Para concluir el Tema 2, diremos que otro aspecto importante es **saber plantear recurrencias que resuelvan un problema dado**. Ya vimos un ejemplo de ésto con el problema de las torres de Hanoi en el que resultaba una recurrencia lineal no homogénea. Ahora no debe de preocuparnos si la recurrencia resultante es o no resoluble, sino obtenerla.

Consideramos el Ejercicio 23 del Tema 2 que dice lo siguiente:

¿De cuántas formas podemos subir una escalera de n peldaños, donde $n \geq 1$, si en cada paso podemos avanzar uno, dos ó tres peldaños?

Denotamos por $E(n)$ el número de formas de subir la escalera de n peldaños con las condiciones dadas. Se puede comprobar fácilmente que $E(1) = 1$, pues la única posibilidad en este caso es dar un paso simple, que $E(2) = 2$, pues podemos dar dos pasos simples o bien uno doble, y que $E(3) = 4$, ya que 3 se puede descomponer como $1+1+1 = 1+2 = 2+1 = 3$, es decir, hay cuatro formas posibles de descomponer el número 3 usando los sumandos $1, 2, 3$ y teniendo en cuenta el orden en el que aparecen los mismos.

Imaginemos ahora que estamos delante de una escalera de n peldaños, con $n \geq 4$. El número de formas en las que se puede subir la escalera, donde el primer paso es simple, es $E(n-1)$. El número de formas en las que se puede subir la escalera, donde el primer paso es doble, es $E(n-2)$. El número de formas en las que se puede subir la escalera, donde el primer paso es triple, es $E(n-3)$. Por consiguiente,

$$E(n) = E(n-1) + E(n-2) + E(n-3),$$

ya que dos formas de subir la escalera serán diferentes, si el primer paso dado es diferente en una y en otra. Así llegamos a la recurrencia lineal homogénea siguiente de orden 3:

$$\begin{cases} E(1) = 1, \ E(2) = 2, \ E(3) = 4, \\ E(n) = E(n-1) + E(n-2) + E(n-3) \quad \text{para todo } n \geq 4. \end{cases}$$

Si aplicamos la metodología que hemos visto en clase para resolver la recurrencia, obtenemos que el polinomio característico es

$$x^3 - x^2 - x - 1,$$

el cual no tiene raíces racionales. (Compruébelo)

Por tanto, la expresión de la fórmula cerrada para $E(n)$ no es sencilla, y así nos conformamos con la recurrencia.

Como curiosidad, podemos definir la recurrencia en Maxima mediante las instrucciones siguientes:

$$E[1] : 1; \ E[2] : 2; \ E[3] : 4;$$
$$E[n] := E[n-1] + E[n-2] + E[n-3];$$

Ahora podemos pedirle que obtenga una tabla con los veinte primeros valores mediante el comando

$$makelist(E[n], n, 1, 20);$$

y devuelve

$$[1, 2, 4, 7, 13, 24, 44, 81, 149, 274, 504, 927, 1705, 3136, 5768, 10609, 19513, 35890, 66012, 121415]$$

Los valores de la sucesión definida por $E(n)$ crecen de forma exponencial, ya que el polinomio característico tiene una raíz real que vale aproximadamente 1.83, que es un valor mayor que 1. Ésto se puede constatar con el comando de Maxima siguiente:

$$solve(x^3 - x^2 - x - 1 = 0, x), numer;$$