Sesión de prácticas

Material elaborado por Juan Urbano

Comenzamos esta sesión resolviendo algunos apartados del Ejercicio 16.

En el apartado (c) tenemos la recurrencia lineal homogénea

$$\begin{cases} f(0) = 1, \ f(1) = a, \\ f(n) = 2f(n-1) - f(n-2) \quad \text{para } n \geq 2 \end{cases}$$

El polinomio característico es $x^2 - 2x + 1$ cuya única raíz es $\alpha = 1$ con multiplicidad 2. Por consiguiente la fórmula cerrada que se obtiene es de la forma

$$f(n) = 1^n \cdot (bn + c).$$

Imponemos las dos condiciones iniciales y resulta el sistema

$$\begin{cases} c = 1 \\ b + c = a \end{cases}$$

cuyas incógnitas son b y c. Su única solución es $b = a - 1, \ c = 1$. Así la fórmula cerrada para $f(n)$ es

$$f(n) = (a-1) \cdot n + 1 \quad \text{para } n \geq 0.$$

En el apartado (h) tenemos la recurrencia lineal no homogénea

$$\begin{cases} f(0) = 0, \ f(1) = 1, \\ f(n) = 3f(n-1) - 2f(n-2) + 2^n + 2n \quad \text{para } n \geq 2 \end{cases}$$

Sabemos por la teoría que la sucesión dada se puede representar mediante una recurrencia lineal homogénea cuyo polinomio característico es

$$(x^2 - 3x + 2) \cdot (x-2) \cdot (x-1)^2 = (x-2)^2(x-1)^3.$$

Por tanto la fórmula cerrada para $f(n)$ será

$$f(n) = 2^n(an + b) + 1^n(cn^2 + dn + e) \quad \text{para todo } n \geq 0.$$

Necesitamos cinco condiciones iniciales. Usamos la recurrencia y calculamos las tres condiciones que faltan, es decir, $f(2) = 11, \ f(3) = 45, \ f(4) = 137$. Por tanto resulta el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} b + e = 0 \\ 2\,a + 2\,b + c + d + e = 1 \\ 8\,a + 4\,b + 4\,c + 2\,d + e = 11 \\ 24\,a + 8\,b + 9\,c + 3\,d + e = 45 \\ 64\,a + 16\,b + 16\,c + 4\,d + e = 137 \end{cases}$$

cuya única solución es

$$a = 2,\ b = 3,\ c = -1,\ d = -5,\ e = -3.$$

Por consiguiente la fórmula cerrada para $f(n)$ es

$$f(n) = 2^n \cdot (2n+3) - n^2 - 5n - 3 \quad \text{para } n \geq 0.$$

Ahora nos ocupamos del apartado (m) en el que nos dan la recurrencia

$$\begin{cases} f(0) = a,\ f(1) = b, \\ f(n) = 4f(n-1) - 8f(n-2) + \operatorname{sen}\frac{n\pi}{4} \quad \text{para } n \geq 2 \end{cases}$$

Se trata de una RLNH en la que las potencias de la parte homogénea se han escrito en términos de senos y cosenos. De la parte homogénea resulta el polinomio característico $x^2 - 4x + 8$, cuyas raíces son $\alpha_1 = 2 + 2i$ y $\alpha_2 = 2 - 2i$, ambas simples, con módulo $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$, y argumentos $\frac{\pi}{4}$ y $-\frac{\pi}{4}$, respectivamente. La parte no homogénea realmente se escribe como

$$1^n \cdot (c \cdot \cos\frac{n\pi}{4} + d \cdot \operatorname{sen}\frac{n\pi}{4}),$$

donde $c = 0$ y $d = 1$. Por tanto de la parte no homogénea obtenemos dos raíces complejas conjugadas simples β_1 y β_2, de módulo 1 y argumentos $\frac{\pi}{4}$ y $-\frac{\pi}{4}$, respectivamente. Éstas son

$$\beta_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{y} \quad \beta_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} - i \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Por tanto, la fórmula cerrada que resulta es

$$f(n) = (\sqrt{8})^n \cdot \left(x_0 \cdot \cos\frac{n\pi}{4} + x_1 \cdot \operatorname{sen}\frac{n\pi}{4}\right) + 1^n \cdot \left(x_2 \cdot \cos\frac{n\pi}{4} + x_3 \cdot \operatorname{sen}\frac{n\pi}{4}\right),$$

con los parámetros x_0, x_1, x_2, x_3. Necesitamos cuatro condiciones iniciales. Usamos la recurrencia dada y obtenemos

$$f(2) = -8a + 4b + 1 \quad \text{y} \quad f(3) = -32a + 8b + 4 + \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Ahora se plantea un sistema de ecuaciones lineales cuyas incógnitas son x_0, x_1, x_2, x_3 el cual resulta tedioso debido a que aparecen parámetros y números con radicales.

Usando Maxima se obtiene que

$$x_0 = \frac{63\,a - 2^{\frac{3}{2}} - 8}{63},\ \ x_1 = -\frac{-126\,b + 252\,a - \sqrt{2} - 32}{252},\ \ x_2 = \frac{2^{\frac{3}{2}} + 8}{63},\ \ x_3 = -\frac{2^{\frac{3}{2}} + 1}{63}.$$

Estos valores se sustituyen en la fórmula general dada más arriba y se obtiene la fórmula cerrada no recurrente.

En el Ejercicio 17 se plantea el problema inverso a la resolución de la recurrencia. Por ejemplo en el apartado (e) tenemos la sucesión de término general $2^n + (-1)^n \cdot n + 2$. De aquí obtenemos que las raíces y multiplicidades correspondientes del polinomio característico de la RLH buscada son

$$\begin{cases} \alpha_1 = 2, \ m_1 = 1 \\ \alpha_2 = -1, \ m_2 = 2 \\ \alpha_3 = 1, \ m_3 = 1 \end{cases}$$

Por tanto tenemos que el polinomio característico de la recurrencia buscada es

$$(x-2)(x+1)^2(x-1) = x^4 - x^3 - 3\,x^2 + x + 2.$$

Así pues, la recurrencia lineal homogénea es

$$f(n) = f(n-1) + 3(n-2) - f(n-3) - 2f(n-4)$$

para $n \geq 4$ con las condiciones iniciales

$$f(0) = 3, \ f(1) = 3, \ f(2) = 8, \ f(3) = 7.$$

Los ejercicios desde el 18 al 21 se pueden resolver planteando una recurrencia y resolviéndola. Por ejemplo, en el Ejercicio 18 tenemos la expresión

$$f(n) = \sum_{k=1}^{n} k \cdot 2^k$$

definida para $n \geq 1$. Es inmediato que $f(1) = 2$ y si $n \geq 2$, entonces

$$f(n) = \sum_{k=1}^{n-1} k \cdot 2^k + n \cdot 2^n = f(n-1) + n \cdot 2^n.$$

Por tanto tenemos la RLNH siguiente

$$\begin{cases} f(1) = 2, \\ f(n) = f(n-1) + n \cdot 2^n \quad \text{para } n \geq 2 \end{cases}$$

La solución de la misma es

$$f(n) = (n-1)\ 2^{n+1} + 2 \quad \text{para } n \geq 1.$$

En los Ejercicios del 22 al 28 se trata de plantear una recurrencia no necesariamente lineal. El Ejercicio 22 es una variante de la versión básica del problema de las Torres de Hanoi que vimos en clase. El Ejercicio 23 ha sido ya resuelto en una sesión anterior.

Resolvamos el Ejercicio 27. Sea $f(n)$ el número de secuencias binarias de longitud n en las que no hay dos o más ceros consecutivos. Se puede comprobar que $f(1) = 2$ y que $f(2) = 3$. Supongamos que $n \geq 3$. Resulta que el número de secuencias pedidas que empiezan por 1 es igual a $f(n-1)$ pues este primer dígito no impone ninguna restricción sobre el siguiente dígito. Pero si el primer dígito de la secuencia es 0, ello fuerza a que el segundo tenga que ser 1, el cual a su vez no impone ninguna restricción sobre el tercer dígito. Por tanto el número de secuencias pedidas que empiezan por 0 es igual a $f(n-2)$. Así pues, obtenemos la siguiente recurrencia

$$\begin{cases} f(1) = 2, \ f(2) = 3 \\ f(n) = f(n-1) + f(n-2) \quad \text{para } n \geq 3 \end{cases}$$

En el Ejercicio 29, quizá el enfoque más sencillo consiste en "separar" ambas sucesiones obteniendo una recurrencia para cada una de ellas, y resolverla. Inténtelo.

En el Ejercicio 30 primero hay que aplicar los conocimientos aprendidos en ALEM para cálculo de determinantes y a continuación la teoría de resolución de recurrencias lineales.

En el Ejercicio 31 nos dan tres recurrencias no lineales. La idea consiste en aplicar primero alguna transformación biyectiva (con lo cual tiene inversa y se puede deshacer), que reduzca la recurrencia a una lineal, resolverla y por último tratar de deshacer el cambio aplicado para llegar a la solución de la recurrencia propuesta.

Por último, diremos que Maxima permite resolver recurrencias lineales. Para ello hay que cargar previamente un paquete con el comando que lleva a cabo la resolución. Escribimos

```
load(solve_rec);
```

Una vez hecho ésto, por ejemplo, para resolver la recurrencia obtenida en el Ejercicio 18, simplemente ejecutamos la orden

```
solve_rec(f[n]=f[n-1]+n*2^n,f[n],f[1]=2);
```

Para resolver el apartado (h) del Ejercicio 16 introducimos la orden

```
solve_rec(f[n]=3*f[n-1]-2*f[n-2]+2^n+2*n,f[n],f[0]=0,f[1]=1);
```

Si el polinomio característico de la recurrencia tiene raíces complejas, la fórmula cerrada que obtiene Maxima es en términos de dichas raíces, y no la expresa usando las funciones trigonométricas para evitar los números complejos. Pruebe con alguno de los ejemplos visto en clase en los que aparecen raíces complejas.

Se recomienda que el alumno resuelva la recurrencias siguiendo el proceso estudiado, y sólo al final usar este comando para comprobar sus cálculos. Por tanto hay que adquirir destreza para buscar las raíces de un polinomio y para resolver sistemas de ecuaciones lineales.