LMD (Grupo E del GII)

Relación de ejercicios del Tema 5

En los ejercicios que siguen, cuando se dice un lenguaje de predicados, se refiere a un lenguaje de predicados de primer orden.

1. Traduzca a un lenguaje de predicados las frases siguientes sobre números reales:

   a) *Todo número real no negativo tiene raíz cuadrada.*

   b) *Si el producto de dos números reales es cero, entonces alguno de los dos es cero.*

   Para ello use los símbolos de predicado P^1, E^2 con los significados siguientes,

   $$\begin{array}{lcl} P(x) & : & x > 0, \\ E(x,y) & : & x = y, \end{array}$$

   así como el símbolo de función f^2 con el significado $f(x,y) = x \cdot y$ y el símbolo de constante a que representa al número 0.

2. Consideramos los símbolos de predicado A^1, P^1, V^2 a los que les asignamos el significado siguiente:

   $$\begin{array}{lcl} A(x) & : & x \text{ es un avión;} \\ P(x) & : & x \text{ es un pájaro;} \\ V(x,y) & : & x \text{ vuela más alto que } y. \end{array}$$

   Entonces podemos traducir la frase

   "Algunos aviones vuelan más alto que cualquier pájaro"

   a un lenguaje de predicados como:

   a) $\forall y \exists x (P(y) \wedge A(x) \wedge V(x,y))$.

   b) $\forall x \forall y ((A(x) \wedge P(y)) \to V(x,y))$.

   c) $\exists y \forall x (P(y) \wedge (A(x) \to V(x,y)))$.

   d) $\exists x \forall y (A(x) \wedge (P(y) \to V(x,y)))$.

3. Traduzca a un lenguaje de predicados las frases siguientes sobre números naturales:

   a) *El doble de cualquier número es divisible por 2.*

   b) *2 es un número primo.*

   c) *Todo número natural mayor que 1 tiene al menos dos divisores distintos.*

Para ello use los símbolos de predicado P^2, E^2, Q^2 con los significados siguientes,

$$\begin{array}{lcl} P(x,y) & : & x > y, \\ E(x,y) & : & x = y, \\ Q(x,y) & : & x \text{ es un divisor de } y, \end{array}$$

así como el símbolo de función f^2 con el significado $f(x,y) = x + y$ y el símbolo de constante a que representa al número 1.

4. Traduzca a un lenguaje de predicados cada una de las frases siguientes referidas a una relación binaria R definida sobre un conjunto:

   a) R verifica la propiedad reflexiva.
   b) R verifica la propiedad simétrica.
   c) R verifica la propiedad transitiva.
   d) R es una relación de equivalencia.

5. Traduzca a un lenguaje de predicados las frases siguientes:

   a) Los amigos del padre de Manolo son rusos.
   b) Manolo y su padre no tienen amigos en común.
   c) El abuelo paterno de Manolo es ruso.
   d) No todos los amigos de Manolo son amigos entre sí.

   Para ello utilice algunos de los símbolos siguientes:

   El símbolo de constante a que designa a Manolo.
   El símbolo de función $f(x)$ que indica el padre de x.
   El símbolo de predicado $R(x)$ que indica que x es ruso.
   El símbolo de predicado $S(x,y)$ que indica que x es amigo de y.

6. En el lenguaje de predicados $\mathcal{L}$ tal que $\mathrm{Func}(\mathcal{L}) = \{f^2\}$ y $\mathrm{Rel}(\mathcal{L}) = \{P^1\}$, consideramos la estructura $\mathcal{E}$ para $\mathcal{L}$ dada por:

$$\begin{cases} \mathrm{D} = \mathbb{Z} \\ a^{\mathcal{E}} = 2 \\ f^{\mathcal{E}}(x,y) = x \cdot y + 1 \\ P^{\mathcal{E}}(x) = \mathbf{1} \ \text{ si y sólo si } \ x \text{ es múltiplo de 3.} \end{cases}$$

   Sea $v : \mathrm{Term}(\mathcal{L}) \to \mathbb{Z}$ una asignación en $\mathcal{E}$ que verifica

$$v(x) = -1, \quad v(y) = 4.$$

   Calcule el valor de v para cada uno de los términos siguientes:

$$a, \quad f(a,x), \quad f(f(x,x),y), \quad f(f(x,y),f(a,a)), \quad f(a,f(a,f(a,x))).$$

   Encuentre dos términos $t_1, t_2 \in \mathrm{Term}(\mathcal{L})$ tales que $v(t_1) = 6$ y $v(t_2) = 8$.

7. Sea el lenguaje de predicados $\mathcal{L}$ tal que $\mathrm{Func}(\mathcal{L}) = \{f^1, g^2\}$ y $\mathrm{Rel}(\mathcal{L}) = \{P^1, R^3\}$. Para cada una de las fórmulas siguientes de $\mathcal{L}$, clasifique como ligadas ó libres, todas las ocurrencias de sus variables:

   a) $\forall x \big(R(a, x, f(y)) \to \exists y R(g(y, z), x, b) \big)$.
   b) $P(b) \vee \neg P(f(x)) \to \exists x \forall z R(x, f(y), a)$.
   c) $\forall x R(a, b, x) \wedge \forall y P(x)$.
   d) $\forall x \big(R(a, b, x) \wedge \forall y P(x) \big)$.
   e) $\forall x \forall y \big(R(a, b, x) \wedge P(x) \big)$.

8. Sea el lenguaje de predicados $\mathcal{L}$ tal que $\mathrm{Func}(\mathcal{L}) = \{f^2\}$ y $\mathrm{Rel}(\mathcal{L}) = \{P^1\}$. Utilice la asignación v y la estructura $\mathcal{E}$ siguientes,

$$\begin{cases} \mathrm{D} = \mathbb{Z} \\ a^{\mathcal{E}} = 2 \\ f^{\mathcal{E}}(x, y) = x \cdot y + 1 \\ P^{\mathcal{E}}(x) = \mathbf{1} \text{ si y sólo si } x \text{ es múltiplo de 3,} \end{cases}$$

$$v(x) = 0, \quad v(y) = 5,$$

   para interpretar las fórmulas siguientes:

$$\begin{aligned} &\alpha_1 = \forall x P(x), && \alpha_2 = \forall y P(x), \\ &\alpha_3 = \exists x \ \neg P(x), && \alpha_4 = \exists x P(y), \\ &\alpha_5 = \exists x \Big(P(x) \wedge P(f(x, a)) \Big), && \alpha_6 = \forall x \Big(\neg P(x) \to \exists y P(f(x, y)) \Big). \end{aligned}$$

   Para cada una de las fórmulas anteriores, estudie si es válida en $\mathcal{E}$, y además si es universalmente válida.

9. Sea el lenguaje de predicados $\mathcal{L}$ tal que $\mathrm{Func}(\mathcal{L}) = \{f^2, g^2\}$ y $\mathrm{Rel}(\mathcal{L}) = \{P^1\}$. Consideramos la estructura $\mathcal{E}$ siguiente,

$$\begin{cases} \mathrm{D} = \{n \in \mathbb{Z} : n \geq 1\} \\ a^{\mathcal{E}} = 1, \ b^{\mathcal{E}} = 2, \ c^{\mathcal{E}} = 7 \\ f^{\mathcal{E}}(x, y) = x + y, \quad g^{\mathcal{E}}(x, y) = x \cdot y \\ P^{\mathcal{E}}(x) = \mathbf{1} \text{ si y sólo si } x \text{ es primo,} \end{cases}$$

   y la asignación $v(x) = 1, \ v(y) = 3$. Interprete las fórmulas siguientes en $\mathcal{E}$:

   a) $\alpha_0 = P(f(g(b, f(g(b, b), a)), a))$.
   b) $\alpha_1 = \forall y \neg P(f(y, y))$.
   c) $\alpha_2 = \forall x (P(x) \to \neg P(f(x, x)))$.
   d) $\alpha_3 = \forall y \neg P(g(y, y))$.

e) $\alpha_4 = \forall x(P(x) \to P(f(g(b,x),a)))$.

f) $\alpha_5 = \forall x\exists y P(f(x,y))$.

g) $\alpha_6 = \exists y\forall x P(f(x,y))$.

h) $\alpha_7 = \forall x\forall y(P(x)\wedge P(y) \to \neg P(f(f(x,y),a)))$.

i) $\alpha_8 = \forall y P(y) \to P(y)$.

j) $\alpha_9 = P(y) \to \forall y P(y)$.

k) $\alpha_{10} = P(x) \to \forall y P(y)$.

l) $\alpha_{11} = P(x) \leftrightarrow \exists x(P(x)\wedge P(f(x,c)))$.

Para cada una de las fórmulas anteriores, estudie si es válida en $\mathcal{E}$, y además si es universalmente válida.

10. Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje de predicados tal que $\mathrm{Rel}(\mathcal{L}) = \{P^1\}$. Dé un ejemplo de una $\mathcal{L}$-estructura $\mathcal{E}$ y una fórmula α de $\mathcal{L}$ que sea satisfacible en $\mathcal{E}$ pero no sea válida en $\mathcal{E}$.

11. En un lenguaje de predicados consideramos las fórmulas lógicas

$$\alpha = \exists x\Big(\neg P(x)\wedge\neg P(f(x,x))\Big) \text{ y } \beta = \exists x\Big(Q(f(x,x),a)\wedge P(x)\Big) \to P(f(a,x)),$$

la estructura

$$\mathcal{E} : \begin{cases} \mathrm{D}_{\mathcal{E}} = \mathbb{Z}_9 \\ a^{\mathcal{E}} = 8 \\ f^{\mathcal{E}}(r,s) = r+s \quad \text{(es decir, la suma en } \mathbb{Z}_9\text{)} \\ P^{\mathcal{E}}(r) = \begin{cases} \mathbf{1} & \text{si existe } s \in \mathrm{D}_{\mathcal{E}} \text{ tal que } s^2 = r \\ \mathbf{0} & \text{en caso contrario} \end{cases} \\ Q^{\mathcal{E}}(r,s) = \begin{cases} \mathbf{1} & \text{si } r = s \\ \mathbf{0} & \text{en caso contrario,} \end{cases} \end{cases}$$

y la asignación $v(x) = 6$, $v(y) = 7$ en $\mathcal{E}$. Determine cuál de las opciones siguientes es correcta:

a) $I^v(\alpha) = \mathbf{0}$ y $I^v(\beta) = \mathbf{0}$.

b) $I^v(\alpha) = \mathbf{0}$ y $I^v(\beta) = \mathbf{1}$.

c) $I^v(\alpha) = \mathbf{1}$ y $I^v(\beta) = \mathbf{0}$.

d) $I^v(\alpha) = \mathbf{1}$ y $I^v(\beta) = \mathbf{1}$.

12. Dada la fórmula $\alpha = \forall x R(b,x) \to \exists y\forall x\big(R(x,y) \to R(f(x),y)\big)$, interprételа en la estructura

$$\mathcal{E} : \begin{cases} \mathrm{D}_{\mathcal{E}} = \mathbb{N} \\ b^{\mathcal{E}} = 1 \\ f^{\mathcal{E}}(x) = x+1 \\ R^{\mathcal{E}}(x,y) = \mathbf{1}, \quad \text{si y sólo si, “ x divide a y”} \end{cases}$$

A continuación clasifique α y justifique su respuesta.

13. Sea el lenguaje de predicados $\mathcal{L}$ tal que $\mathrm{Func}(\mathcal{L}) = \{f^1\}$ y $\mathrm{Rel}(\mathcal{L}) = \{Q^2\}$. Interprete las fórmulas siguientes,

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= \forall x \exists y Q(x, f(y)), \\
\alpha_2 &= \exists x(\neg Q(x, a) \wedge Q(f(x), f(a))), \\
\alpha_3 &= \exists x(\neg Q(x, b) \wedge Q(f(x), f(b))), \\
\alpha_4 &= \forall x(\neg Q(x, f(x)) \to Q(x, a)), \\
\alpha_5 &= \neg Q(x, f(x)) \to Q(x, b), \\
\alpha_6 &= \neg Q(y, f(y)) \to Q(y, b), \\
\alpha_7 &= Q(x, y) \leftrightarrow Q(f(x), f(y)), \\
\alpha_8 &= \exists x \exists y(Q(x, y) \leftrightarrow Q(f(x), f(y))),
\end{aligned}$$

utilizando la estructura $\mathcal{E}$ dada por

$$\begin{cases}
\mathrm{D} = \mathbb{Z}_6 \\
a^{\mathcal{E}} = 2,\ b^{\mathcal{E}} = 3 \\
f^{\mathcal{E}}(x) = x^2 \\
Q^{\mathcal{E}}(x, y) = \mathbf{1} \text{ si y sólo si } (x, y) \in \{(0,0), (1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5)\},
\end{cases}$$

y la asignación v en $\mathcal{E}$ tal que $v(x) = 1$, $v(y) = 5$. Para cada una de las fórmulas anteriores, estudie si es válida en $\mathcal{E}$, y además si es universalmente válida.

14. De las fórmulas siguientes pertenecientes a un lenguaje de predicados, determine las que son universalmente válidas:

   a) $\exists x P(x) \to P(a)$.
   b) $P(y) \to \exists x P(x)$.
   c) $\forall x P(x) \to P(a)$.
   d) $P(a) \to \exists x P(f(x))$.
   e) $P(f(x)) \to \exists x P(x)$.
   f) $\exists x \forall y(P(x) \to P(y))$.
   g) $\forall x \exists y(P(x) \to P(y))$.
   h) $\forall x \forall y(P(x) \to P(y))$.
   i) $\exists x \exists y(P(x) \to P(y))$.

15. ¿Es la fórmula $\neg(\forall x \neg P(x) \to P(a))$ una contradicción?

16. Estudie si la fórmula siguiente es o no universalmente válida:

$$P(x) \to \exists y \Big[\forall z \neg P(f(z)) \to \neg Q(f(z), a)\Big].$$

17. Encuentre todos los modelos posibles para cada una de las fórmulas siguientes:

    a) $\exists x P(x) \to \forall y P(y)$.
    b) $\forall x P(x) \to \exists y P(y)$.
    c) $P(x) \to \exists y P(y)$.
    d) $P(a) \to P(b)$.

18. Encuentre un conjunto de fórmulas de un lenguaje de predicados, que sea satisfacible pero no admita ningún modelo finito, es decir, aquel cuyo dominio es un conjunto finito.

19. Sean $\mathcal{L}$ un lenguaje de predicados, α una sentencia de $\mathcal{L}$ y $\mathcal{E}$ una $\mathcal{L}$-estructura:

    a) Justifique que α es válida en $\mathcal{E}$, si y sólo si, α es satisfacible en $\mathcal{E}$.
    b) Pruebe que es cierta una de las siguientes afirmaciones, y sólo una:
        1) α es válida en $\mathcal{E}$.
        2) $\neg\alpha$ es válida en $\mathcal{E}$.

    Ponga un ejemplo de un lenguaje de predicados $\mathcal{L}$, una fórmula α de $\mathcal{L}$ y una $\mathcal{L}$-estructura $\mathcal{E}$, tales que ninguna de las fórmulas α y $\neg\alpha$ sea válida en $\mathcal{E}$.

20. Estudie cuáles de los conjuntos de fórmulas siguientes son satisfacibles:

$$\begin{aligned}
\Gamma_1 &= \Big\{\forall x \forall y Q(x, y),\ \forall y \neg Q(y, f(y))\Big\},\\
\Gamma_2 &= \Big\{\forall x Q(f(x), x),\ \neg Q(f(a), b)\Big\},\\
\Gamma_3 &= \Big\{\forall y Q(b, y),\ \forall y \neg Q(y, a)\Big\},\\
\Gamma_4 &= \Big\{\forall x Q(x, b),\ \forall y \neg Q(a, f(y))\Big\}.
\end{aligned}$$

21. En cada apartado, estudie qué relación lógica hay entre las dos fórmulas dadas:

    a) $\alpha_1 = \exists x \forall y R(x, y)$, $\alpha_2 = \forall y \exists x R(x, y)$.
    b) $\alpha_1 = \forall x P(x) \vee \forall x Q(x)$, $\alpha_2 = \forall x (P(x) \vee Q(x))$.
    c) $\alpha_1 = \exists x P(x) \wedge \exists x Q(x)$, $\alpha_2 = \exists x (P(x) \wedge Q(x))$.
    d) $\alpha_1 = \forall x P(x) \vee Q(x)$, $\alpha_2 = \forall x (P(x) \vee Q(x))$.
    e) $\alpha_1 = \exists x P(x) \wedge Q(x)$, $\alpha_2 = \exists x (P(x) \wedge Q(x))$.

f) $\alpha_1 = \forall x P(x) \to \forall x Q(x), \;\; \alpha_2 = \forall x (P(x) \to Q(x)).$

g) $\alpha_1 = \exists x P(x) \to \exists x Q(x), \;\; \alpha_2 = \exists x (P(x) \to Q(x)).$

h) $\alpha_1 = \forall x P(x) \leftrightarrow \forall x Q(x), \;\; \alpha_2 = \forall x (P(x) \leftrightarrow Q(x)).$

i) $\alpha_1 = \exists x P(x) \leftrightarrow \exists x Q(x), \;\; \alpha_2 = \exists x (P(x) \leftrightarrow Q(x)).$

22. Compruebe que la fórmula $\neg \exists x \forall y \Big(R(x,y) \to Q(g(x,y)) \Big)$ es equivalente a la fórmula $\forall x \exists y \Big(R(x,y) \wedge \neg Q(g(x,y)) \Big)$.

23. En cada apartado, decida si las fórmulas dadas son o no equivalentes:

    a) $\alpha_1 = \forall x R(x,y) \vee \exists y P(f(y)), \;\; \alpha_2 = \exists z \forall x \Big(R(x,y) \vee P(f(z)) \Big).$

    b) $\alpha_1 = \forall x R(x,y), \;\; \alpha_2 = \forall y R(y,y).$

    c) $\alpha_1 = \forall x \Big(R(x,a) \to \forall x P(x) \Big), \;\; \alpha_2 = \forall y \Big(R(y,a) \to \forall x P(x) \Big).$

    d) $\alpha_1 = \forall x \Big(P(x) \to Q(x) \Big), \;\; \alpha_2 = \forall y \Big(P(y) \wedge Q(y) \Big).$

24. Dada la fórmula $\alpha = \forall x R(x,z) \vee \exists y R(x,y)$, estudie cuáles de las fórmulas siguientes son equivalentes a α:

    a) $\beta_1 = \forall x \Big(R(x,z) \vee \exists y R(x,y) \Big).$

    b) $\beta_2 = \forall y \exists y_1 \Big(R(y,z) \vee R(x,y_1) \Big).$

    c) $\beta_3 = \exists y \forall x_1 \Big(R(x_1,z) \vee R(x,y) \Big).$

25. Sean las fórmulas

$$\alpha = \forall x P(x) \wedge \Big(\exists y \neg Q(y,z) \vee \forall z R(z) \Big),$$
$$\beta_1 = \forall x \Big(P(x) \wedge \big(\forall y Q(y,z) \to R(x) \big) \Big),$$
$$\beta_2 = \neg \Big(\exists x \neg P(x) \vee \forall y \exists z \big(Q(y,z) \wedge \neg R(z) \big) \Big).$$

    Elija la opción correcta:

    a) β_1 y β_2 son equivalentes a α.

    b) Ni β_1 ni β_2 es equivalente a α.

    c) β_1 es equivalente a α, pero β_2 no lo es.

    d) β_2 es equivalente a α, pero β_1 no lo es.