Ejercicio 3 *Dada la ecuación $a_{n+2} + a_n = 3^n + 2a_{n+1}$. Encuentra su solución general y una solución particular que verifique $a_0 = 1$ y $a_1 = 2$.*

$$a_{n+2} + a_n = 3^n + 2a_{n+1} \Rightarrow a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n = 3^n \Rightarrow$$

$$a_n - 2a_{n-1} + a_{n-2} = 3^{n-2} = \frac{1}{9} \cdot 3^n$$

$\Rightarrow \frac{1}{9} 3^n$, con $\frac{1}{9}$ polinomio de grado 0

$\Rightarrow a_n$ satisface una e.d.l.h. cuyo polinomio característico es:

$$(\lambda^2 - 2\lambda + 1)(\lambda - 3) = (\lambda - 1)^2 (\lambda - 3)$$

$$\Rightarrow a_n = C_1 + C_2 \cdot n + C_3 \cdot 3^n$$

C.I.

$$\left.\begin{array}{l} a_0 = 1 \Rightarrow C_1 + C_3 = 1 \\ a_1 = 2 \Rightarrow C_1 + C_2 + 3C_3 = 2 \\ a_2 = 2a_1 - a_0 + \frac{1}{9} \cdot 3^2 = 2 \cdot 2 - 1 + 1 = 4 \Rightarrow C_1 + 2C_2 + 9C_3 = 4 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} C_1 = 3/4 \\ C_2 = 1/2 \\ C_3 = 1/4 \end{array} \Rightarrow \boxed{a_n = \frac{3}{4} + \frac{1}{2} n + \frac{1}{4} \cdot 3^n}$$

Ejercicio 4 *Dada la ecuación $x_n = 4 + x_{n-2}$ para todo $n \geq 2$. Encuentra la solución que cumple $x_0 = 1$, $x_1 = 2$.*

$x_n - 4x_{n-2} = 4$, con 4 un polinomio de grado 0.

$\Rightarrow$ x_n satisface una e.d.l.h. con p. característico:

$$p(\lambda) = (\lambda^2 - 4)(\lambda - 1) = (\lambda - 1)(\lambda + 2)(\lambda - 2)$$

$$\Rightarrow x_n = c_1 + c_2 \cdot 2^n + c_3 \cdot (-2)^n$$

C.I.:

$$\left.\begin{array}{l} x_0 = 1 \Rightarrow c_1 + c_2 + c_3 = 1 \\ x_1 = 2 \Rightarrow c_1 + 2c_2 - 2c_3 = 2 \\ x_2 = 4x_0 + 4 = 8 \Rightarrow c_1 + 4c_2 + 4c_3 = 8 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} c_1 = -\frac{4}{3} \\ c_2 = 2 \\ c_3 = \frac{1}{3} \end{array}$$

$$\boxed{x_n = -\frac{4}{3} + 2 \cdot 2^n + \frac{1}{3}(-2)^n}$$

Ejercicio 6 *La torre de Hércules tiene una escalera con 234 peldaños. Si solemos subirla saltando uno o dos peldaños, ¿de cuántas formas distintas podemos subir al faro?.*

La ecuación en recurrencia es $h_n = h_{n-1} + h_{n-2}$, con $\begin{cases} h_1 = 1 \\ h_2 = 2 \end{cases}$

Sacamos la fórmula general:

$$h_n - h_{n-1} - h_{n-2} = 0 \Rightarrow p(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 1 \quad \begin{cases} \lambda = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ \lambda = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{h_n = C_1 \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + C_2 \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}$$

$$\left.\begin{array}{l} h_1 = 1 \Rightarrow \frac{1+\sqrt{5}}{2} C_1 + \frac{1-\sqrt{5}}{2} C_2 = 1 \\ h_2 = 2 \Rightarrow \frac{3+\sqrt{5}}{2} C_1 + \frac{3-\sqrt{5}}{2} C_2 = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} C_1 = \frac{5+\sqrt{5}}{10} \\ C_2 = \frac{5-\sqrt{5}}{10} \end{array}$$

$$\Rightarrow \boxed{h_n = \frac{5+\sqrt{5}}{10} \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{5-\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}$$

$$\Rightarrow \boxed{h_{234} = \frac{5+\sqrt{5}}{10} \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{234} + \frac{5-\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{234} \simeq 5'789 \cdot 10^{48} \text{ formas}}$$

Ejercicio 8 *Dadas 121 rectas del plano de forma que no hay dos paralelas ni tres concurrentes en un punto. ¿Cuántas regiones del plano determinan?*

$$\left.\begin{array}{l} r_n = n + r_{n-1} \\ r_0 = 1 \end{array}\right| \Rightarrow r_n - r_{n-1} = n$$

con n un polinomio de grado 1

$\Rightarrow X_n$ satisface una homogénea cuyo p. carac es.

$$p(\lambda) = (\lambda-1)\cdot(\lambda-1)^2 = (\lambda-1)^3 \Rightarrow \{ \lambda = 1 \text{ (triple)}$$

$$\Rightarrow X_n = C_1 + C_2 \cdot n + C_3 \cdot n^2$$

$$\left.\begin{array}{l} r_0 = 1 \Rightarrow C_1 = 1 \\ r_1 = 1 + r_0 = 2 \Rightarrow C_1 + C_2 + C_3 = 2 \\ r_2 = 2 + r_1 = 2 + 2 = 4 \Rightarrow C_1 + 2C_2 + 4C_3 = 4 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} C_1 = 1 \\ C_2 = \frac{1}{2} \\ C_3 = \frac{1}{2} \end{array}$$

$$\boxed{r_n = 1 + \frac{1}{2}n + \frac{1}{2}n^2}$$

$$\boxed{r_{121} = 1 + \frac{121}{2} + \frac{(121)^2}{2} = 7382}$$

Ejercicio 13 *Dada la ecuación en recurrencia $x_n = -x_{n-2} + 2n$ para $n \geq 2$:*

1. *Calcula mediante la ecuación los ocho primeros términos de la sucesión que cumple $a_0 = 3$ y $a_1 = 2$.*
2. *Encuentra el polinomio característico y la solución general de una ecuación homógenea asociada.*
3. *Encuentra la solución particular que verifica $a_0 = 1$ y $a_1 = 2$ y calcula $a_{123456789}$*

$x_n = -x_{n+2} + 2n \quad \forall n \geq 2$

1. $a_0 = 3$, $a_1 = 2$; $a_2 = 1$; $a_3 = 4$; $a_4 = 7$; $a_5 = 6$; $a_6 = 5$; $a_7 = 8$; $a_8 = 11$

2. $(\lambda^2 + 1)(\lambda - 1)^2$ $\begin{cases} \lambda = i \\ \lambda = -i \end{cases}$ $\begin{cases} |i| = 1 \\ \theta = \pi/2 \end{cases} \Rightarrow$; $\lambda = 1$ (doble)

$$\Rightarrow \boxed{x_n = C_1 \cdot \cos(n\pi/2) + C_2 \cdot \operatorname{sen}(n \cdot \pi/2) + C_3 + C_4 n}$$

3.
$$\left.\begin{array}{l} a_0 = 1 \Rightarrow C_1 + C_3 = 1 \\ a_1 = 2 \Rightarrow C_2 + C_3 + C_4 = 2 \\ a_2 = 1 \Rightarrow -C_1 + C_3 + 2C_4 = 1 \\ a_3 = 4 \Rightarrow -C_2 + C_3 + 3C_3 = 4 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} C_1 = 2 \\ C_2 = 1 \\ C_3 = -1 \\ C_4 = 2 \end{array}$$

$$\Rightarrow \boxed{x_n = 2\cos(n\pi/2) + \operatorname{sen}(n\pi/2) - 1 + 2n}$$

$$a_{123456789} = 2\cos\left(\frac{123456789}{2}\pi\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{123456789}{2}\pi\right) - 1 + 2 \cdot 123456789 \simeq$$

$$\simeq$$

Ejercicio 14 *Dada la ecuación $x_{n+2} - x_n = 2$. Encuentra:*

1. *la solución general de una homogénea asociada,*
2. *su solución general*
3. *y una solución particular que verifique $a_0 = 1$ y $a_1 = 2$.*

1 Homogénea asociada: $X_{n+2} - X_n = 0 \Rightarrow$

$p(\lambda) = \lambda^2 - 1 \Rightarrow \boxed{X_n = C_1 \cdot + C_2 \cdot (-1)^n}$

2 La ec. es. $X_{n+2} - X_n = 2 \Rightarrow X_n - X_{n-2} = 2$

con 2 un polinomio de grado 0 $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ Satisface una e.d.l.h. cuyo p. característico es:

$$p(\lambda) = (\lambda^2 - 1)(\lambda - 1) \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 1 & \text{(doble)} \\ \lambda = -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{X_n = C_1 + C_2 \cdot n + C_3 \cdot (-1)^n}$$

3
$$\left.\begin{array}{l} a_0 = 1 \Rightarrow C_1 + C_3 = 1 \\ a_1 = 2 \Rightarrow C_1 + C_2 - C_3 = 2 \\ a_2 = 2 + a_0 = 3 \Rightarrow C_1 + 2C_2 + C_3 = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} C_1 = 1 \\ C_2 = 1 \\ C_3 = 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow \boxed{X_n = 1 + n}$$

Ejercicio 17 *Justifica que el retículo $(D(210), |)$ es un álgebra de Boole y a continuación evalúa las siguientes expresiones:*

$$30 \vee (15 \wedge 10), \quad 14^* \wedge 21, \quad (6^* \vee 35)^* \vee 10, \quad ((3 \vee 10)^* \vee 2)^*.$$

Expresa los elementos 21 y 35 como supremo de átomos y como ínfimo de coátomos (complemento de los átomos).

$\boxed{210} = 21 \cdot 10 = 3 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 5 = \boxed{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}$

$D(210) = \{1, 2, 3, 5, 6, 7, 10, 14, 15, 21, 30, 35, 42, 70, 105, 210\}$

D(210) es álgebra de Boole, porque 210 es producto de primos distintos.

$\boxed{30 \vee (15 \wedge 10)} = mcm(30, mcd(15,10)) = mcm(30, 5) = 30$

$\boxed{((3 \vee 10)^* \vee 2)^*} = 210 / (mcm(210 / \underbrace{(3, 10)}_{m.c.m}), 2) = 210 / (mcm(210/30, 2)) =$

$= 210 / (mcm(7, 2)) = 210 / 14 = 15$

$\boxed{21 = \bigvee\{3, 7\}}$

Coátomos: $\{210/2, 210/3, 210/5, 210/7\} = \{105, 70, 42, 30\}$

$\boxed{21 = \bigwedge\{105, 42\}}$

$\boxed{35 = \bigvee\{5, 7\}}$

$\boxed{35 = \bigwedge\{105, 70\}}$

Ejercicio 18 *Dada la función booleana elemental $f_{126} : \mathbb{B}^3 \longrightarrow \mathbb{B}$. Halla sus formas canónica disyuntiva y reducida disyuntiva. Encuentra también sus formas disyuntivas no simplificables.*

f_{126} $\quad\quad 126)_{10} = 01111110)_2$

	x	y	z	f
0	0	0	0	0
1	0	0	1	1
2	0	1	0	1
3	0	1	1	1
4	1	0	0	1
5	1	0	1	1
6	1	1	0	1
7	1	1	1	0

$f(x,y,z) = m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5 + m_6$

$$\boxed{f(x,y,z) = x^*y^*z + x^*yz^* + x^*yz + xy^*z^* + xy^*z + xyz^*}$$

FORMA CANÓNICA DISYUNTIVA

$f(x,y,z) = M_0 \cdot M_7$

$$\boxed{f(x,y,z) = (x+y+z)(x^*+y^*+z^*)}$$

FORMA CANÓNICA CONJUNTIVA

* QUIM:

✓101	-01
✓110	10-
✓011	-10
✓001	1-0
✓010	0-1
✓100	01-

$\Rightarrow$ Implicantes primos:

$y^*z\ ,\ xy^*\ ,\ yz^*\ ,\ xz^*\ ,\ x^*z\ ,\ x^*y$

$$\Rightarrow \boxed{f(x,y,z) = y^*z + xy^* + yz^* + xz^* + x^*z + x^*y}$$

FORMA CANÓNICA DISYUNTIVA REDUCIDA

$$f(x,y,z) = (x+y+z)(x^*+y^*+z^*) = xy^* + xz^* + x^*y + yz^* + x^*z + y^*z$$

* KARNAUGH:

z \ xy	00	01	11	10
0	0	1 (2)	1 (6)	1 (4)
1	1 (1)	1 (3)	7	1 (5)

$$\boxed{f(x,y,z) = x^*y + xz^* + y^*z}$$

FORMA NO-SIMPLIFICABLE

* PETRICK:

		x^*y^*z	x^*yz^*	x^*yz	xy^*z^*	xy^*z	xyz^*
A	y^*z	✓				✓	
B	xy^*				✓	✓	
C	yz^*		✓				✓
D	xz^*				✓		✓
E	x^*z	✓		✓			
F	x^*y		✓	✓			

No hay ningún implicante primo esencial.

Renombramos los implicantes primos:

$A = y^*z$, $B = xy^*$, $C = yz^*$, $D = xz^*$, $E = x^*z$, $F = x^*y$

Construimos la función

$$g(A,B,C,D,E,F) = (A+E)\cdot(C+F)\cdot(E+F)\cdot(B+D)\cdot(A+B)\cdot(C+D) =$$

$$= (A+E)(E+F)(C+F)(C+D)(B+D)(A+B) =$$

$$= (E+AF+AE+EF)(C+CD+CF+FD)(B+AB+BD+AD) =$$

$$= (E+AF)(C+FD)(B+AD) =$$

$$= (EC+EFD+AFC+AFD)(B+AD) =$$

$$= ECB+ECAD+EFDB+EFDA+AFCB+AFCD+AFDB+AFD =$$

$$= BCE+ACDE+BDEF+ADEF+ABCF+ACDF+ABDF+ADF =$$

$$= \underline{BCE}+ADF+ACDE+BDEF+ABCF \Rightarrow$$

Cogemos, por ejemplo, BCE $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{f(x,y,z) = B+C+E = xy^* + yz^* + x^*z}$$

ó ADF

$$\Rightarrow \boxed{f(x,y,z) = A+D+F = y^*z + xz^* + x^*y}$$

FORMAS NO - SIMPLIFICABLES.

Ejercicio 19 *Dada la función booleana elemental $f_{217} : \mathbb{B}^3 \longrightarrow \mathbb{B}$. Halla sus formas canónica disyuntiva y disyuntiva reducida. Encuentra las formas disyuntivas no simplificables de f.*

$217)_{10} = 11011001)_2$

	x	y	z	f
0	0	0	0	1
1	0	0	1	1
2	0	1	0	0
3	0	1	1	1
4	1	0	0	1
5	1	0	1	0
6	1	1	0	0
7	1	1	1	1

$f(x,y,z) = m_0 + m_1 + m_3 + m_4 + m_7 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{f(x,y,z) = \bar{x}\bar{y}\bar{z} + \bar{x}\bar{y}z + \bar{x}yz + x\bar{y}\bar{z} + xyz}$$

CANÓNICA DISYUNTIVA

* QUINE:

✓ 111	−11
✓ 011	0−1
✓ 100	−00
✓ 001	00−
✓ 000	

$\Rightarrow$ Implicantes primos: yz, $\bar{x}z$, $\bar{y}\bar{z}$, $\bar{x}\bar{y}$

$$\Rightarrow \boxed{f(x,y,z) = yz + \bar{x}z + \bar{y}\bar{z} + \bar{x}\bar{y}}$$

FORMA DISYUNTIVA REDUCIDA

$z \backslash xy$	00	01	11	10
0	1 (0)	(2)	(6)	1 (4)
1	1 (1)	1 (3)	1 (7)	(5)

$$\boxed{f(x,y,z) = \bar{x}\bar{y} + yz + \bar{y}\bar{z}}$$

FORMA NO SIMPLIFICABLE

* PETRICK

	$\bar{x}\bar{y}\bar{z}$ ✓	$\bar{x}\bar{y}z$	$\bar{x}yz$ ✓	$x\bar{y}\bar{z}$ ✓	xyz ✓
yz			✓		✓
$\bar{x}z$		✓	✓		
$\bar{y}\bar{z}$	✓			✓	
$\bar{x}\bar{y}$	✓	✓			

$\bar{y}\bar{z}$ y yz implicantes primos esenciales

	$\bar{x}\bar{y}z$
$\bar{x}z$	✓
$\bar{x}\bar{y}$	✓

$\bar{x}z$ y $\bar{x}\bar{y}$ son intercambiables.

Por ejemplo, cogemos $\bar{x}\bar{y}$

$$\Rightarrow \boxed{f(x,y,z) = \bar{y}\bar{z} + yz + \bar{x}\bar{y}}$$

NO SIMPLIFICABLE

Ejercicio 20 *Sea $f : \mathbb{B}^4 \longrightarrow \mathbb{B}$ la función definida mediante las tablas:*

x	y	z	t	f	x	y	z	t	f
0	0	0	0	0	1	0	0	0	1
0	0	0	1	0	1	0	0	1	1
0	0	1	0	0	1	0	1	0	1
0	0	1	1	0	1	0	1	1	0
0	1	0	0	0	1	1	0	0	0
0	1	0	1	0	1	1	0	1	1
0	1	1	0	1	1	1	1	0	1
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Halla su forma disyuntiva reducida y sus formas disyuntivas no simplificables.(Puedes utilizar cualquier método incluido mapas de Karnaugh)

$f(x,y,z,t) = m_6 + m_7 + m_8 + m_9 + m_{10} + m_{13} + m_{14} + m_{15}$

$f(x,y,z,t) = x^*yzt^* + x^*yzt + xy^*z^*t^* + xy^*z^*t + xy^*zt^* + xyz^*t + xyzt^* + xyzt$

Sacamos los Implicantes Primos:

*** QUINE:**

✓ 1111	✓ 111–	–11–
✓ 1110	11–1	
✓ 1101	✓ –111	
✓ 0111	1–10	
✓ 1010	✓ –110	
✓ 1001	1–01	
✓ 0110	✓ 011–	
✓ 1000	10–0	
	100–	

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{Implicantes primos: } xyt,\ xzt^*,\ xz^*t,\ xy^*t^*,\ xy^*z^*,\ yz}$

*** KARNAUGH:**

zt \ xy	00	01	11	10
00	0	4	12	1 (8)
01	1	5	1 (13)	1 (9)
11	3	1 (7)	1 (15)	11
10	2	1 (6)	1 (14)	1 (10)

$\boxed{f(x,y,z,t) = yz + xz^*t + xy^*t^*}$ FORMA NO-SIMPLIFICABLE

Ejercicio 21 *Dada la función booleana elemental $f_{203} : \mathbb{B}^3 \longrightarrow \mathbb{B}$. Encuentra sus implicantes primos nucleares y determina, mediante el algoritmo de Petrick, sus formas disyuntivas no simplificables.*

$f_{203} : \mathbb{B}^3 \longrightarrow \mathbb{B}$ $\qquad 203)_{10} = 11001011)_2$

	x	y	z	f
0	0	0	0	1
1	0	0	1	1
2	0	1	0	0
3	0	1	1	0
4	1	0	0	1
5	1	0	1	0
6	1	1	0	1
7	1	1	1	1

$$f(x,y,z) = m_0 + m_1 + m_4 + m_6 + m_7$$

$$f(x,y,z) = \bar{x}\bar{y}\bar{z} + \bar{x}\bar{y}z + x\bar{y}\bar{z} + xy\bar{z} + xyz$$

* QUINE:

✓ 111	11–
✓ 110	1–0
✓ 100	–00
✓ 001	00–
✓ 000	

$\boxed{\text{Implicantes primos: } xy,\ xz^*,\ y^*z^*,\ x^*y^*}$

* PETRICK:

	$\bar{x}\bar{y}\bar{z}$	$\bar{x}\bar{y}z$	$x\bar{y}\bar{z}$	$xy\bar{z}$	xyz
xy				✓	✓
$x\bar{z}$			✓	✓	
$\bar{y}\bar{z}$	✓		✓		
$\bar{x}\bar{y}$	✓	✓			

$\boxed{\text{Implicantes primos principales: } x^*y^*,\ xy}$

	$x\bar{y}\bar{z}$
$x\bar{z}$	✓
$\bar{y}\bar{z}$	✓

Intercambiables

$\boxed{f(x,y,z) = x^*y^* + xy + xz^*}$ FORMA NO SIMPLIFICABLE

Ejercicio 22 *Dada la función booleana elemental $f_{173} : \mathbb{B}^3 \longrightarrow \mathbb{B}$. Encuentra sus implicantes primos nucleares y determina, mediante el algoritmo de Petrick, sus formas disyuntivas no simplificables.*

$173)_{10} = 1010\ 1101)_2$

	x	y	z	f
0	0	0	0	1
1	0	0	1	0
2	0	1	0	1
3	0	1	1	0
4	1	0	0	1
5	1	0	1	1
6	1	1	0	0
7	1	1	1	1

$f(x,y,z) = m_0 + m_2 + m_4 + m_5 + m_7$

$\Rightarrow f(x,y,z) = \bar{x}\bar{y}\bar{z} + \bar{x}y\bar{z} + x\bar{y}\bar{z} + x\bar{y}z + xyz$

*QUINE:

✓	111	1 – 1
✓	101	1 0 –
✓	100	– 0 0
✓	010	0 – 0
✓	000	

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{Implicantes primos: } xz,\ x\bar{y},\ \bar{y}\bar{z},\ \bar{x}\bar{z}}$

McCluskey

	$\bar{x}\bar{y}\bar{z}$	$\bar{x}y\bar{z}$	$x\bar{y}\bar{z}$	$x\bar{y}z$	xyz
xz				✓	✓
$x\bar{y}$			✓	✓	
$\bar{y}\bar{z}$	✓		✓		
$\bar{x}\bar{z}$	✓	✓			

$\Rightarrow$ $\boxed{xz \text{ y } \bar{x}\bar{z} \text{ son implicantes primos nucleares}}$

Simplificamos

	$x\bar{y}\bar{z}$
$x\bar{y}$	✓
$\bar{y}\bar{z}$	✓

Son intercambiables

$$\boxed{f(x,y,z) = xz + \bar{x}\bar{z} + x\bar{y}}$$

ó

$$\boxed{f(x,y,z) = xz + \bar{x}\bar{z} + \bar{y}\bar{z}}$$

z \ xy	00	01	11	10
0	1 0	1 2	6	1 4
1	1	3	1 7	1 5

Ejercicio 23 *Dada la función booleana elemental* $f_{231} : \mathbb{B}^3 \longrightarrow \mathbb{B}$. *Halla:*

1. *sus formas canónicas disyuntiva y conjuntiva,*
2. *sus implicantes primos y su forma disyuntiva reducida,*
3. *mediante el algoritmo de Petrick sus formas disyuntivas no simplificables.*

$231)_{10} = 1110\ 0111)_2$

	x	y	z	f
0	0	0	0	1
1	0	0	1	1
2	0	1	0	1
3	0	1	1	0
4	1	0	0	0
5	1	0	1	1
6	1	1	0	1
7	1	1	1	1

$f(x,y,z) = m_0 + m_1 + m_2 + m_5 + m_6 + m_7$

$$\boxed{f(x,y,z) = \bar{x}\bar{y}\bar{z} + \bar{x}\bar{y}z + \bar{x}y\bar{z} + x\bar{y}z + xy\bar{z} + xyz}$$

CANÓNICA DISYUNTIVA

$$\boxed{f(x,y,z) = M_3 \cdot M_4 = (x+\bar{y}+\bar{z})(\bar{x}+y+z)}$$

CANÓNICA CONJUNTIVA

* QUINE:

✓ 111	11–
✓ 110	1–1
✓ 101	–10
✓ 010	–01
✓ 001	0–0
✓ 000	00–

$\Rightarrow$

$$\boxed{\text{Implicantes primos: } xy,\ xz,\ y\bar{z},\ \bar{y}z,\ \bar{x}\bar{z},\ \bar{x}\bar{y}}$$

$\Rightarrow$ $\boxed{f(x,y,z) = xy + xz + y\bar{z} + \bar{y}z + \bar{x}\bar{z} + \bar{x}\bar{y}}$ DISYUNTIVA REDUCIDA

		$\bar{x}\bar{y}\bar{z}$	$\bar{x}\bar{y}z$	$\bar{x}y\bar{z}$	$x\bar{y}z$	$xy\bar{z}$	xyz
A	xy					✓	✓
B	xz				✓		✓
C	$y\bar{z}$			✓		✓	
D	$\bar{y}z$		✓		✓		
E	$\bar{x}\bar{z}$	✓		✓			
F	$\bar{x}\bar{y}$	✓	✓				

$$= (E+F)(D+F)(C+E)(B+D)(A+C)(A+B) =$$

$$= (E+F)(D+F)(C+E)(A+C)(B+D)(A+B) =$$

$$= (F+EF+DF+ED)(C+AC+EC+AE)(B+AB+DB+AD) =$$

$$= (F+ED)(C+AE)(B+AD) =$$

$$= (CF+AEF+CDE+ADE)(B+AD) =$$

$$= BCF + ACDF + ABEF + \underbrace{ADEF} + BCDE + \underbrace{ACDE} + \underbrace{ABDE} + \underbrace{ADE} =$$

$$= BCF + ADE + ACDF + ABEF + BCDE$$

BCF $\Rightarrow$ $\boxed{f(x,y,z) = B+C+F = xz + y\bar{z} + \bar{x}\bar{y}}$

ADE $\Rightarrow$ $\boxed{f(x,y,z) = A+D+E = xy + \bar{y}z + \bar{x}\bar{z}}$

FORMAS DISYUNTIVAS NO SIMPLIFICABLES.

z \ xy	00	01	11	10
0	1 $_{0}$	1 $_{2}$	1 $_{6}$	$_{4}$
1	1 $_{1}$	$_{3}$	1 $_{7}$	1 $_{5}$

$\bar{x}\bar{y} + y\bar{z} + xz$

$\bar{x}\bar{z} + xy + \bar{y}z$

Ejercicio 25 *Dada la función booleana elemental $f_{189} : \mathbb{B}^3 \longrightarrow \mathbb{B}$. Halla:*

1. *sus implicantes primos y su forma disyuntiva reducida usando FCC,*
2. *mediante el algoritmo de Petrick sus formas disyuntivas no simplificables.*

$f_{189} : \mathbb{B}^3 \to \mathbb{B}$ $\qquad$ $189)_{10} = 10111101)_2$

	x	y	z	f
0	0	0	0	1
1	0	0	1	0
2	0	1	0	1
3	0	1	1	1
4	1	0	0	1
5	1	0	1	1
6	1	1	0	0
7	1	1	1	1

$$f(x,y,z) = m_0 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5 + m_7$$

$$f(x,y,z) = \bar{x}\bar{y}\bar{z} + \bar{x}y\bar{z} + \bar{x}yz + x\bar{y}\bar{z} + x\bar{y}z + xyz$$

$$f(x,y,z) = M_1 \cdot M_6 = (x+y+\bar{z})(\bar{x}+\bar{y}+z) =$$

$$= \boxed{(xy^* + xz + x^*y + yz + x^*z^* + y^*z^*)}$$

FORMA DISYUNTIVA REDUCIDA

$\boxed{\text{Implicantes primos: } xy^*,\ xz,\ x^*y,\ yz,\ x^*z^*,\ y^*z^*}$

* PETRICK:

		$\bar{x}\bar{y}\bar{z}$	$\bar{x}y\bar{z}$	$\bar{x}yz$	$x\bar{y}\bar{z}$	$x\bar{y}z$	xyz
A	$x\bar{y}$				✓	✓	
B	xz					✓	✓
C	$\bar{x}y$		✓	✓			
D	yz			✓			✓
E	$\bar{x}\bar{z}$	✓	✓				
F	$\bar{y}\bar{z}$	✓			✓		

No hay i.p. esenciales.

$$g(A,B,C,D,E,F) = (E+F)(C+E)(C+D)(A+F)(A+B)(B+D) =$$

$$= (E+F)(C+E)(A+F)(A+B)(C+D)(B+D) =$$

$$= (E+EC+EF+FC)(A+AB+AF+FB)(D+CD+BD+BC) =$$

$$= (E+FC)(A+FB)(D+BC) = (AE+BEF+ACF+BCF)(D+BC) =$$

$$= ADE+ABCE+BDEF+BCEF+ACDF+ABCF+BCDF+BCF =$$

$$= \boxed{ADE+BCF+BDEF+ACDF}$$

$$ADE \Rightarrow f(x,y,z) = A+D+E = xy^* + yz + x^*z^*$$

$$BCF \Rightarrow f(x,y,z) = B+C+F = xz + x^*y + y^*z^*$$

$$BDEF \Rightarrow f(x,y,z) = B+D+E+F = xz + yz + x^*z^* + y^*z^*$$

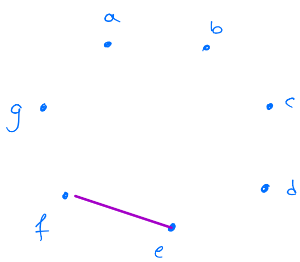
$$ACDF \Rightarrow f(x,y,z) = A+C+D+F = xy^* + x^*y + yz + y^*z^*$$

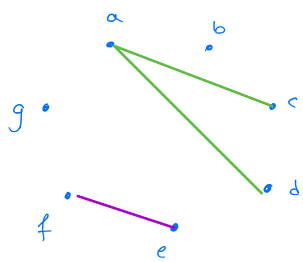
$\left.\right\}$ $\boxed{\text{FORMAS DISYUNTIVAS NO-SIMPLIFICABLES}}$

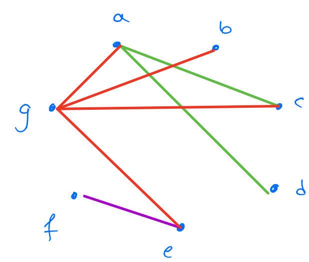
Ejercicio 27 *Utiliza el algoritmo de demolición para probar si hay un grafo de seis vértices con grados* $\{3, 1, 2, 1, 2, 1, 4\}$*. En caso de que exista, haz la reconstrucción de uno de ellos paso a paso.*

a	b	c	d	e	f	g
3	1	2	1	2	1	**4**
2	0	1	1	1	1	0
0	0	0	0	**1**	1	0
0	0	0	0	0	0	0

Pivote g, elegimos a c e b
Pivote a, elegimos c d
Pivote e, elegimos f
Sí.



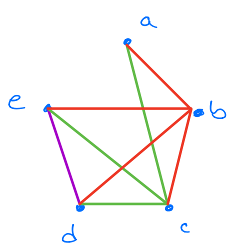




Ejercicio 28 *¿Existe un grafo de cinco vértices con grados* $2, 4, 4, 3, 3$*? En caso afirmativo representalo. Para contestar es necesario utilizar el algoritmo de demolición y reconstrucción. Cualquier otra respuesta no será válida.*

a	b	c	d	e
2	**4**	4	3	3
1	0	**3**	2	2
0	0	0	**1**	1
0	0	0	0	0

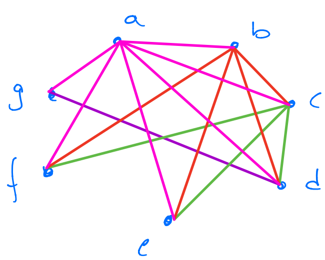
pivote b, elegimos a, c, d, e
pivote c, elegimos a, d, e
pivote d, elegimos e
Sí



Ejercicio 29 *¿Existe un grafo de siete vértices con grados* $6, 5, 5, 4, 3, 3, 2$*? En caso afirmativo represéntalo. Para contestar es necesario utilizar el algoritmo de demolición y reconstrucción. Cualquier otra respuesta no será válida.*

a	b	c	d	e	f	g
6	5	5	4	3	3	2
0	4	4	3	2	2	1
0	0	3	2	1	1	1
0	0	0	1	0	0	1
0	0	0	0	0	0	0

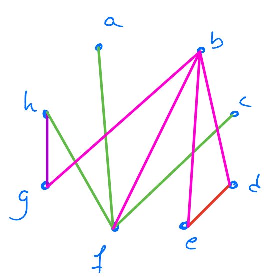
pivote a, elegimos b, c, d, e, f, g
pivote b, elegimos c, d, e, f
pivote c, elegimos d, e, f
pivote d, elegimos g
sucesión gráfica



Ejercicio 30 *¿Existe un grafo de ocho vértices con grados* $1, 4, 1, 2, 2, 4, 2, 2$*? En caso afirmativo represéntalo. Para contestar es necesario utilizar el algoritmo de demolición y reconstrucción. Cualquier otra respuesta no será válida.*

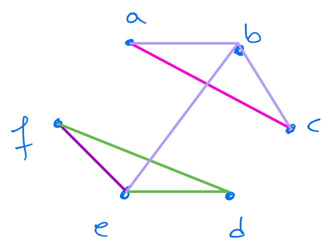
a	b	c	d	e	f	g	h
1	4	1	2	2	4	2	2
1	0	1	1	1	3	1	2
0	0	0	1	1	0	1	1
0	0	0	0	0	0	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0

pivote b, elegimos d, e, f, g
pivote f, elegimos a, c, h
pivote d, elegimos e
pivote g, elegimos h
sí



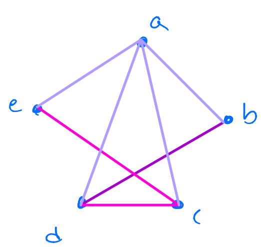
Ejercicio 31 *¿Existe un grafo de seis vértices con grados 2, 3, 2, 2, 3, 2? En caso afirmativo represéntalo. Para contestar es necesario utilizar el algoritmo de demolición y el de reconstrucción. La reconstrucción debe representarse paso a paso y con vértices etiquetados. Cualquier otra respuesta no será válida.*

a	b	c	d	e	f	
2	**3**	2	2	3	2	pivote b, elegimos a, c, e
1	0	1	**2**	2	2	pivote d, elegimos e, f
1	0	1	0	1	1	pivote a, elegimos c
0	0	0	0	**1**	1	pivote e, elegimos f
0	0	0	0	0	0	sí



Ejercicio 32 *Encuentra, utilizando el algoritmo de demolición-reconstrucción, un grafo de cinco vértices con grados* $\{4, 2, 3, 3, 2\}$.

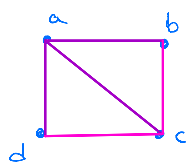
a	b	c	d	e	
4	2	3	3	2	pivote a, elegimos b, c, d, e
0	1	**2**	2	1	piote c, elegimos d, e
0	**1**	0	1	0	pivote b, elegimos d
0	0	0	0	0	sí



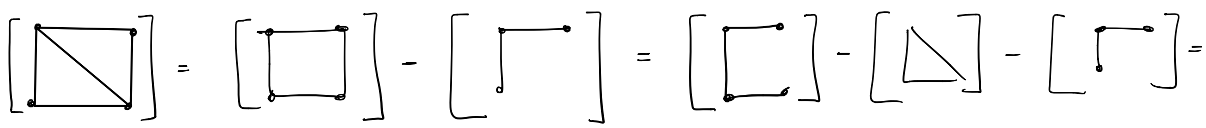
Ejercicio 33 *Encuentra, si existe, un grafo G de cuatro vértices con grados $\{3, 2, 3, 2\}$. Utiliza el algoritmo de demolición-reconstrucción. Calcula su polinomio cromático $p(G, x)$, su número cromático y de cuántas formas se puede pintar con 6 colores.*

a	b	c	d
3	2	3	2
0	1	2	1
0	0	0	0

pivote a, elegimos b, c, d
pivote c, elegimos b, d
sí



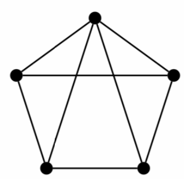
* <u>Hallamos el polinomio cromático:</u>



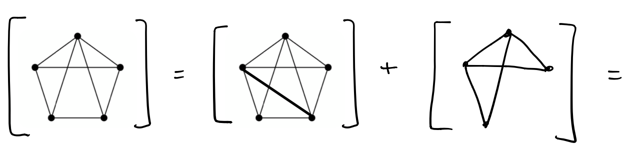
$= [P_3] - [K_3] - [P_2] = x(x-1)^3 - x(x-1)(x-2) - x(x-1)^2$

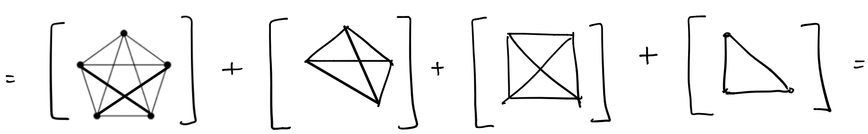
$= x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 4x$

Ejercicio 34 *Dado el grafo G*



calcula su polinomio cromático $P_G(x)$ y su número cromático. ¿De cuantas formas se puede pintar G con 6 colores?





$= [K_5] + [K_4] + [K_4] + [K_3] =$

$= x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4) + 2x(x-1)(x-2)(x-3) + x(x-1)(x-2) =$

$= \boxed{x^5 - 8x^4 + 24x^3 - 31x^2 + 14x}$

N° cromático:

$x = 1 \Rightarrow p(1) = 0$

$x = 2 \Rightarrow p(2) = 0$

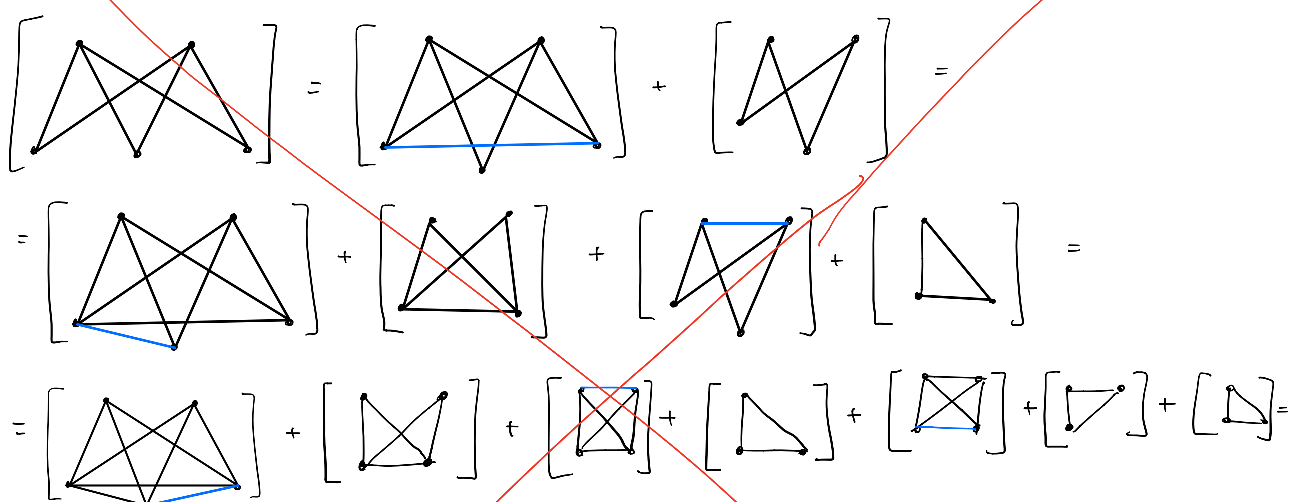
$x = 3 \Rightarrow p(3) = 6 \neq 0$

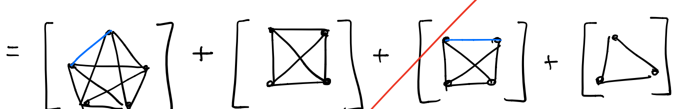
$\Rightarrow \boxed{\text{N° cromático} = 3}$

$\boxed{p(6) = 1560}$

Ejercicio 35

1. *Dado el grafo $G = K_{2,3}$ calcula su polinomio cromático $P_G(x)$.*
2. *Halla el número cromático de G.*
3. *Calcula de cuantas formas se puede colorear G con 6 colores distintos.*





$+ [K_4] + [K_3] + [K_4] + [K_3] + [K_3] =$

$= [K_5] + [K_4] + [K_4] + [K_3] + [K_4] + [K_3] + [K_4] + [K_3] + [K_3] =$

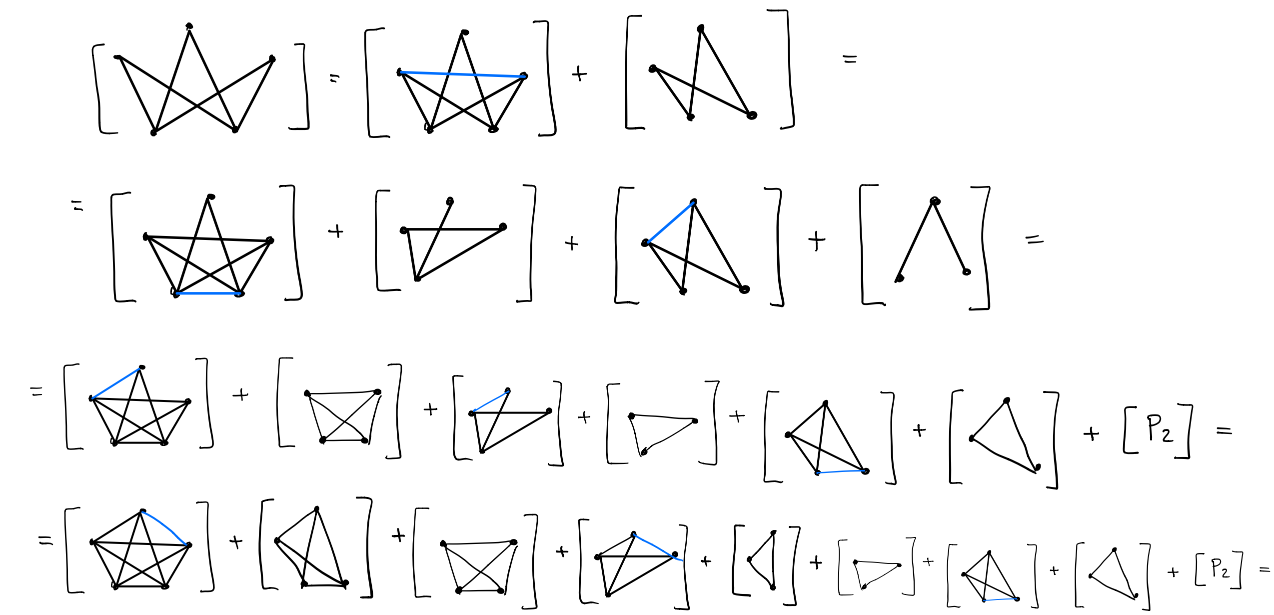
$= 3[K_3] + 4[K_4] + [K_5] =$

$= 3x(x-1)(x-2) + 4x(x-1)(x-2)(x-3) + x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4) =$

$= \boxed{x^5 - 6x^4 + 14x^3 - 15x^2 + 6x}$

Ejercicio 35

1. *Dado el grafo $G = K_{2,3}$ calcula su polinomio cromático $P_G(x)$.*
2. *Halla el número cromático de G.*
3. *Calcula de cuantas formas se puede colorear G con 6 colores distintos.*



$= [K_5] + 4[K_4] + 3[K_3] + [P_2] =$

$$= \boxed{x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4) + 4x(x-1)(x-2)(x-3) + 3x(x-1)(x-2) + x(x-1)^2}$$

b)

$p(0) = 0$

$p(1) = 0$ $\Rightarrow$ $\boxed{\text{N}^\text{o} \text{ cromático} = 2}$

$p(2) = 2 \neq 0$

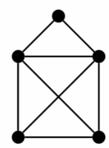
c) $\boxed{p(6) = 2670}$

$p(1) = 0$
$p(2) = 0$
$p(3) = 54 \neq 0$

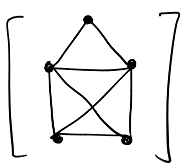
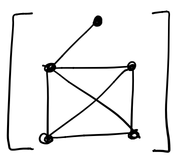
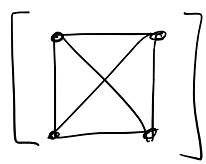
$\Big\} \Rightarrow$ $\boxed{\text{N° cromático} = 3}$

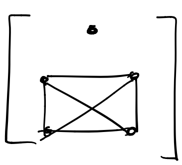
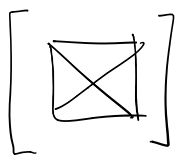
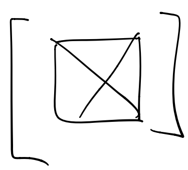
$\boxed{p(6) = 2520}$

Ejercicio 37 *Dado el grafo:*



Halla su polinomio cromático, su número cromático y calcula de cuántas formas se puede colorear con 4 colores.

 =  −  =

=  −  −  =

$$= x \cdot [K_4] - [K_4] - [K_4] = [K_4](x-2) =$$

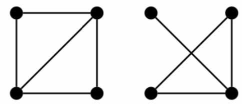
$$= x(x-1)(x-2)(x-3)(x-2) = x(x-1)(x-2)^2(x-3)$$

$p(0) = 0$
$p(1) = 0$
$p(2) = 0$
$p(3) = 0$
$p(4) = 48 \neq 0$

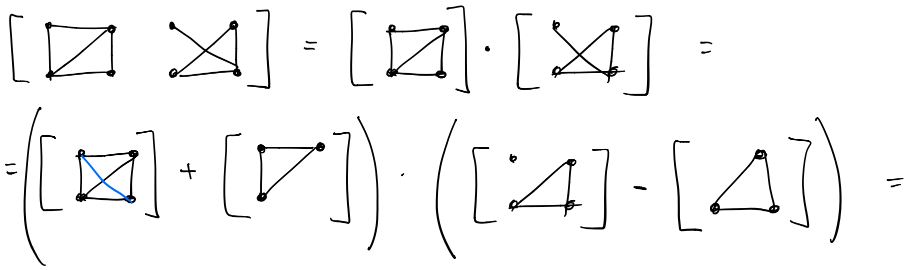
$\Big\} \Rightarrow$ N° cromático = 4

$\boxed{p(4) = 48}$

Ejercicio 38 *Dado el grafo:*



Halla su polinomio cromático, su número cromático y calcula de cuántas formas se puede colorear con 5 colores.



$$= \left([K_4] + [K_3] \right) \cdot \left(x \cdot [K_3] - [K_3] \right) =$$

$$= \left([K_4] + [K_3] \right) \cdot \left([K_3] (x-1) \right) =$$

$$= \left[x(x-1)(x-2)(x-3) + x(x-1)(x-2) \right] \left[x(x-1)^2 (x-2) \right]$$

$p(0) = 0$

$p(1) = 0$

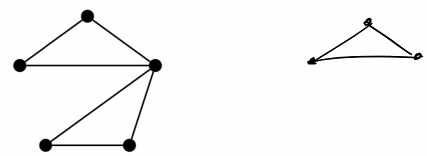
$p(2) = 0$

$p(3) = 72 \neq 0$

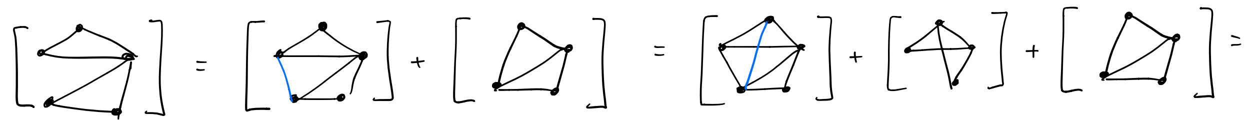
$\Rightarrow \boxed{N^{\underline{o}} \text{ cromático} = 3}$

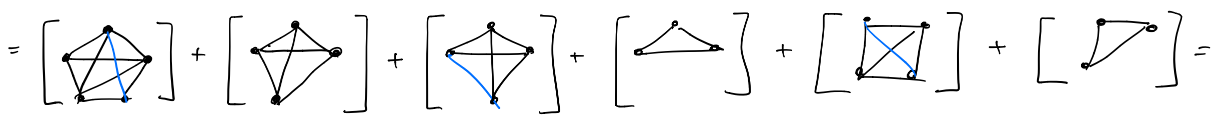
$$\boxed{p(5) = 43200}$$

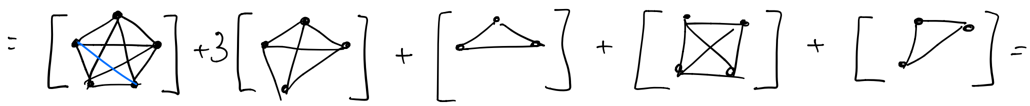
Ejercicio 40 *Dado el grafo:*



Halla su polinomio cromático, su número cromático y calcula de cuántas formas se puede colorear con 5 colores.







$= [K_5] + 4\,[K_4] + 2\,[K_3] =$

$$= \boxed{x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4) + 4x(x-1)(x-2)(x-3) + 2x(x-1)(x-2)}$$

$\Rightarrow p(x) = x^5 - 6x^4 + 13x^3 - 12x^2 + 4x$

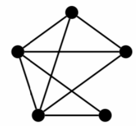
$p(1) =$

$p(2) =$ $\Rightarrow$ $\boxed{\text{Nº cromático} = 3}$

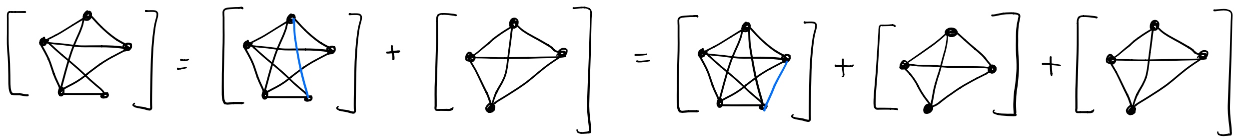
$p(3) =$

$\boxed{p(5) = 720}$

Ejercicio 41 *Dado el grafo:*



Halla su polinomio cromático, su número cromático y calcula de cuántas formas se puede colorear con 5 colores.



$$= [K_5] + 2[K_4] = x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4) + 2x(x-1)(x-2)(x-3)$$

b)

$p(0) = 0$

$p(1) = 0$

$p(2) = 0$

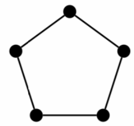
$p(3) = 0$

$p(4) = 48 \neq 0$

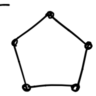
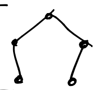
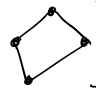
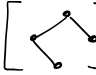
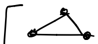
$\Rightarrow$ $\boxed{\text{Nº cromático} = 4}$

$\boxed{p(5) = 360}$

Ejercicio 43 *Dado el grafo G*



calcula su polinomio cromático $p(G,x)$ y su número cromático. ¿De cuantas formas se puede pintar G con 6 colores?

[] = [] − [] $= [P_4] - \Big($ [] − [] $\Big) =$

$$= [P_4] - [P_3] + [K_3] = x(x-1)^4 - x(x-1)^3 + x(x-1)(x-2)$$

$$\Rightarrow \boxed{p(x) = x^5 - 5x^4 + 10x^3 - 10x^2 + 4x}$$

$$\left.\begin{array}{l} p(1) = 0 \\ p(2) = 0 \\ p(3) = 30 \neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{N^{\underline{o}}\ \text{cromático} = 3}$$

$$\boxed{p(6) = 3120}$$

Ejercicio 45 *Un árbol tiene 33 vértices de grado uno, 25 vértices de grado 2, 15 vértices de grado 3, y el resto, vértices de grado 4. ¿Cuántos vértices tiene en total?*

Sabemos que $\sum gr = 2l \Rightarrow$

$$\Rightarrow 33\cdot 1 + 25\cdot 2 + 15\cdot 3 + (n-33-25-15)4 = 2l \Rightarrow 128 + 4n - 292 = 2l$$

$$\Downarrow$$

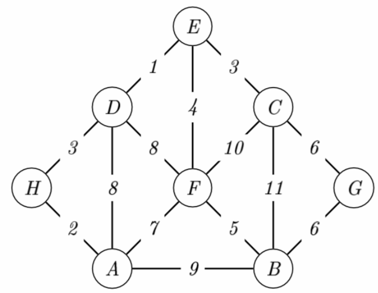
$$\underline{4n - 2l = 164}$$

Además, en un árbol $\underline{n = l+1}$

$$\Rightarrow 4(l+1) - 2l = 164 \Rightarrow 4l + 4 - 2l = 164 \Rightarrow 2l = 160 \Rightarrow l = 80$$

$\Rightarrow n = 81 \Rightarrow$ $\boxed{\text{Hay 81 vértices}}$

Ejercicio 46 *Dado el grafo ponderado:*

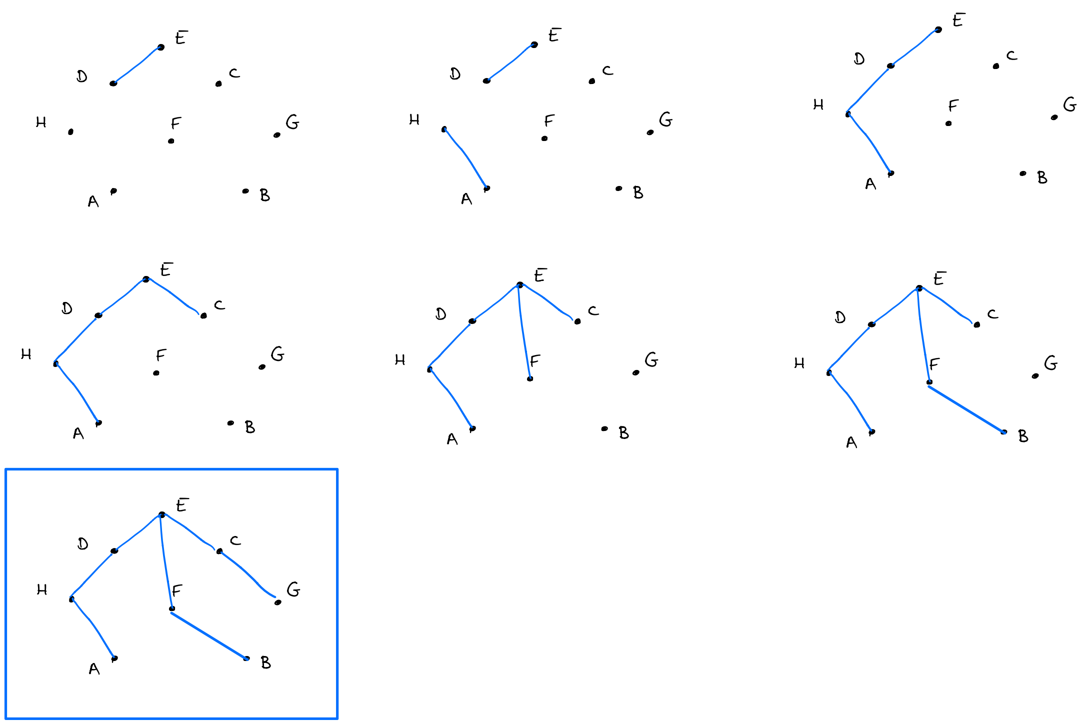


Halla utilizando el algoritmo de Kruskal un árbol generador (abarcador) de peso mínimo y halla su peso. Indica el orden de las elecciones. Describe la aplicación del algoritmo paso a paso.

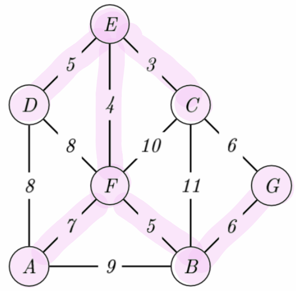
Hacemos la ordenación de los lados de forma creciente en peso:

ED, HA, DH, EC, EF, FB, CG, GB, AF, DF, DA, AB, FC, CB

Señalamos en color los que vayamos cogiendo.



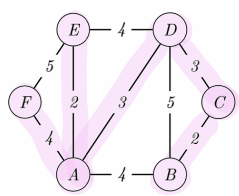
Ejercicio 47 *Dado el grafo ponderado:*



Halla utilizando el algoritmo de Prim un árbol generador (abarcador) de peso mínimo y halla su peso. Describe el algoritmo paso a paso.

		P
T = {A}	E = { }	0
T = {A, F}	E = {AF}	7
T = {A, F, E}	E = {AF, FE}	11
T = {A, F, E, C}	E = {AF, FE, EC}	14
T = {A, F, E, C, B}	E = {AF, FE, EC, FB}	19
T = {A, F, E, C, B, D}	E = {AF, FE, EC, FB, ED}	24
T = {A, F, E, C, B, D, G}	E = {AF, FE, EC, FB, ED, BG}	30

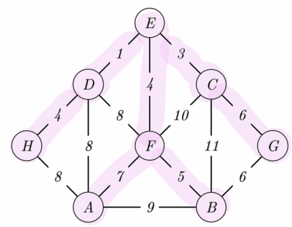
Ejercicio 48 *Dado el grafo ponderado*



Halla utilizando el algoritmo de Prim un árbol generador de peso mínimo. Detalla el orden de las elecciones y describe la aplicación del algoritmo paso a paso.

		P
T = {A}	E = { }	0
T = {A, E}	E = {AE}	2
T = {A, E, D}	E = {AE, AD}	5
T = {A, E, D, C}	E = {AE, AD, DC}	8
T = {A, E, D, C, B}	E = {AE, AD, DC, CB}	10
T = {A, E, D, C, B, F}	E = {AE, AD, DC, CB, AF}	14

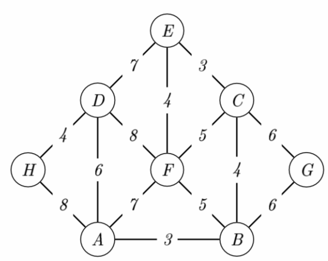
Ejercicio 49 *Dado el grafo ponderado:*



Halla utilizando el algoritmo de Prim un árbol generador (abarcador) de peso mínimo y halla su peso. Indica el orden de las elecciones.

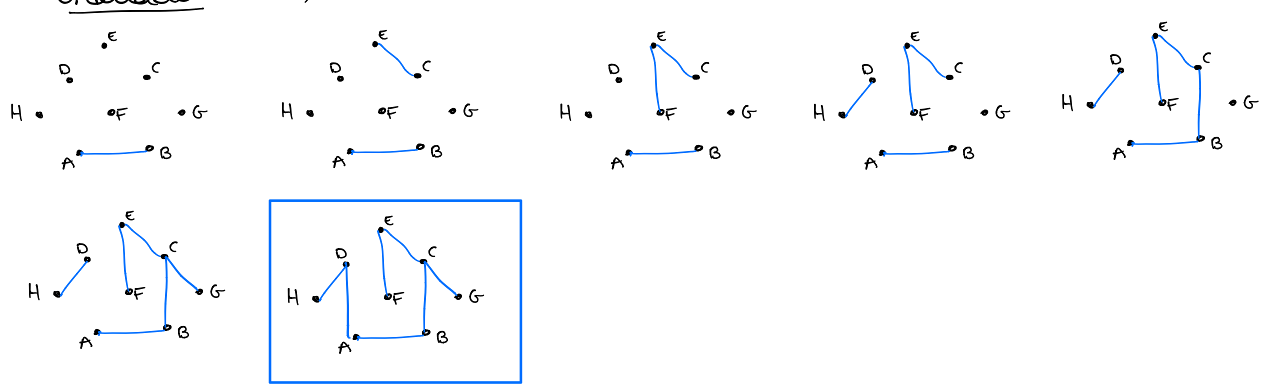
T={A}	E={ }	0
T={A,F}	E={AF}	7
T={A,F,E}	E={AF,FE}	11
T={A,F,E,D}	E={AF,FE,ED}	12
T={A,F,E,D,C}	E={AF,FE,ED,EC}	15
T={A,F,E,D,C,H}	E={AF,FE,ED,EC,DH}	19
T={A,F,E,D,C,H,B}	E={AF,FE,ED,EC,DH,FB}	24
T={A,F,E,D,C,H,B,G}	E={AF,FE,ED,EC,DH,FB,CG}	30

Ejercicio 50 *Dado el grafo ponderado:*

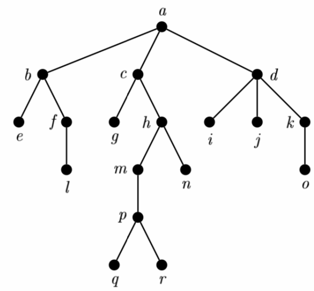


Halla utilizando el algoritmo de Kruskal un árbol generador (abarcador) de peso mínimo y halla su peso. Indica el orden de las elecciones.

Ordenación: AB, EC, EF, DH, CB, CF, FB, CG, DA, GB, ED, FA, DF, HA



Ejercicio 52 *Dado el grafo*



Escribe la sucesión de sus nodos al recorrerlo en preorden, postorden, inorden, top-down y bottom-up.

Preorden: a, b, e, f, l, c, g, h, m, p, q, r, n, d, i, j, k, o.

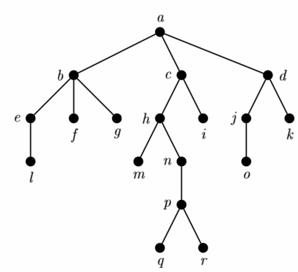
Post-orden: e, l, f, b, g, q, r, p, m, n, h, c, i, j, o, k, d, a

In-orden: e, b, l, f, a, g, c, q, p, r, m, h, n, i, d, j, o, k

Top-down: a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, o, p, q, r

Bottom-up: e, i, j, l, n, o, q, r, f, k, p, b, d, m, h, c, a

Ejercicio 53 *Dado el grafo*



Escribe la sucesión de sus nodos al recorrerlo en bottom-up order.

Preorden: a, b, e, l, f, g, c, h, m, n, p, q, r, i, d, j, o, k

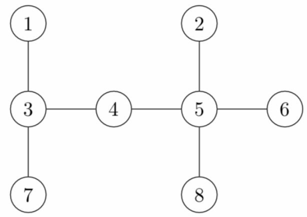
Post-orden: l, e, f, g, b, m, q, r, p, n, h, i, c, o, j, k, d, a

In-order: l, e, b, f, g, a, m, h, q, p, r, n, c, i, o, j, d, k

Top-down: a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, o, p, q, r

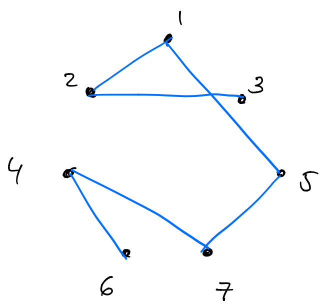
Bottom-up: f, g, i, k, l, m, o, q, r, e, j, p, b, d, n, h, c, a

Ejercicio 54 *Representa el árbol etiquetado con código de Prüfer (2,1,5,7,4) y determina el código de Prüfer del árbol etiquetado*



Código del árbol del dibujo: (3,5,5,3,4,5)

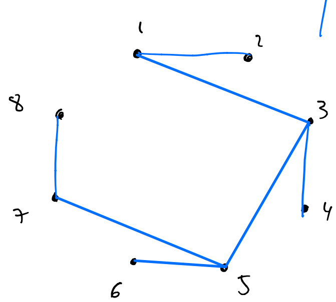
Construcción del árbol con código (2,1,5,7,4)



$V = \{1,2,3,4,5,6,7\}$

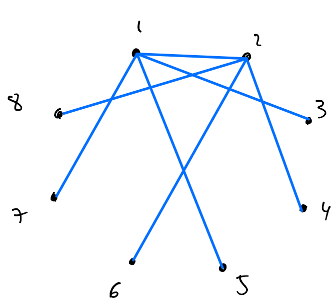
Ejercicio 55 *Representa el árbol etiquetado con código de Prüfer (1,3,3,5,5,7)*

8 vértices : $V=\{\cancel{1},\cancel{2},\cancel{3},\cancel{4},\cancel{5},\cancel{6},7,8\}$ $\qquad c=(\cancel{1},\cancel{3},\cancel{3},\cancel{5},\cancel{5},\cancel{7})$

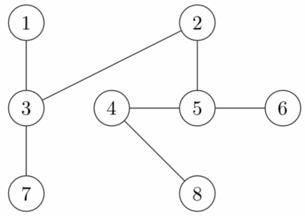


Ejercicio 56 *Representa el árbol etiquetado con código de Prüfer (1,2,1,2,1,2).*

8 vértices $V=\{\cancel{1},2,\cancel{3},\cancel{4},\cancel{5},\cancel{6},\cancel{7},8\}$ $\qquad c=(\cancel{1},\cancel{2},\cancel{1},\cancel{2},\cancel{1},\cancel{2})$



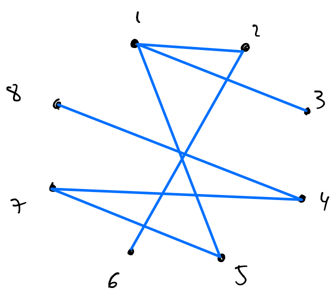
Ejercicio 57 *Representa el árbol etiquetado con código de Prüfer (1,2,1,5,7,4) y determina el código de Prüfer del árbol*



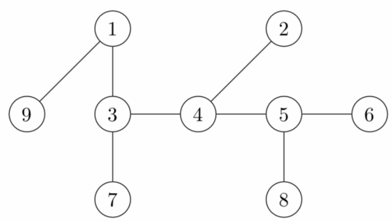
Código del árbol de la imagen: (3, 5, 3, 2, 5, 4)

Árbol del código (1,2,1,5,7,4)

8 vértices: $V = \{\cancel{1}, \cancel{2}, \cancel{3}, 4, \cancel{5}, \cancel{6}, \cancel{7}, 8\}$ $c = (\cancel{1}, \cancel{2}, \cancel{1}, \cancel{5}, \cancel{7}, \cancel{4})$



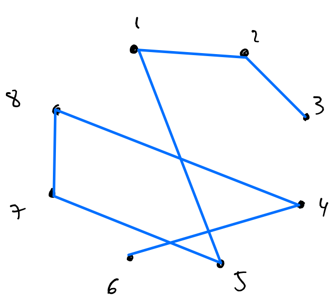
Ejercicio 58 *Representa el árbol etiquetado con código de Prüfer (2,1,5,7,4,8) y determina el código de Prüfer del árbol*



Código del árbol de la figura: (4, 5, 3, 5, 4, 3, 1)

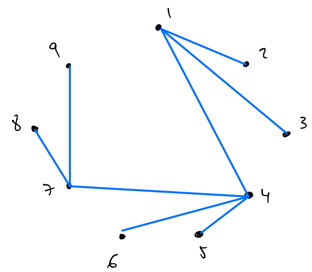
Árbol de código (2,1,5,7,4,8)

8 vértices: $V = \{\cancel{1}, \cancel{2}, \cancel{3}, \cancel{4}, \cancel{5}, \cancel{6}, 7, 8\}$ $c = (\cancel{2}, \cancel{1}, \cancel{5}, \cancel{7}, \cancel{4}, \cancel{8})$

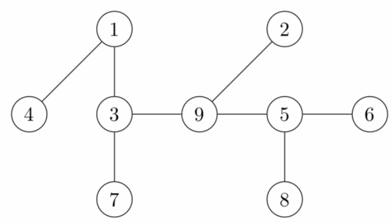


Ejercicio 59 *Representa el árbol etiquetado con código de Prüfer (1,1,4,4,4,7,7).*

9 vértices $\quad V = \{\cancel{1}, \cancel{2}, \cancel{3}, \cancel{4}, \cancel{5}, \cancel{6}, 7, \cancel{8}, 9\}$ $\quad c = (\cancel{1}, \cancel{1}, \cancel{4}, \cancel{4}, \cancel{4}, \cancel{7}, \cancel{7})$



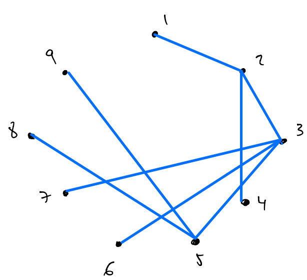
Ejercicio 60 *Representa el árbol etiquetado con código de Prüfer (2,2,3,3,3,5,5) y determina el código de Prüfer del árbol*



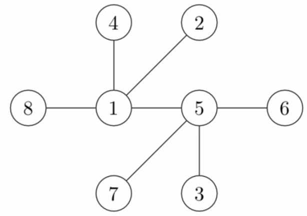
Código del árbol de la figura: (9, 1, 3, 5, 3, 9, 5)

Árbol de código: (2, 2, 3, 3, 3, 5, 5)

9 vértices $\quad V = \{\cancel{1}, \cancel{2}, \cancel{3}, \cancel{4}, 5, \cancel{6}, \cancel{7}, \cancel{8}, 9\}$ $\quad c = (\cancel{2}, \cancel{2}, \cancel{3}, \cancel{3}, \cancel{3}, \cancel{5}, \cancel{5})$



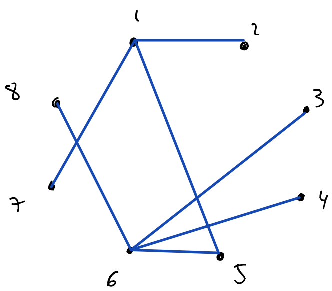
Ejercicio 64 *Representa el árbol etiquetado con código de Prüfer (1,6,6,1,5,6) y determina el código de Prüfer del árbol*



Código del árbol de la figura: (1, 5, 1, 5, 5, 1)

Árbol de código (1,6,6,1,5,6)

8 vértices: V= {~~1~~, ~~2~~, ~~3~~, ~~4~~, ~~5~~, 6, ~~7~~, 8} C = (~~1~~, ~~6~~, ~~6~~, ~~1~~, ~~5~~, ~~6~~)



Ejercicio 65 *Utiliza los polinomios de Gegalkine para estudiar la validez de:*

$$\{(a \wedge b) \to c,\ c \to (a \vee d)\} \vDash b \to (\neg a \to c).$$

Sabemos que $\{(a \wedge b) \to c, c \to (a \vee d)\} \vDash b \to (\neg a \to c) \iff$

$\iff \{(a \wedge b) \to c, c \to (a \vee d), \neg(b \to (\neg a \to c))\}$ es insatisfascible

Vemos si hay alguna interpretación para la que todas las fórmulas sean ciertas.

$$\left.\begin{array}{l} (a \wedge b) \to c = 1 \\ c \to (a \vee d) = 1 \\ \neg(b \to (\neg a \to c)) = 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \overset{1:}{\Rightarrow} 1 + (a \cdot b) + a \cdot b \cdot c = 1 \\ \overset{2:}{\Rightarrow} 1 + c + c(a + d + a \cdot d) = 1 \\ \overset{3:}{\Rightarrow} 1 + 1 + b + b(1 + 1 + a + (1+a) \cdot c) = 1 \Rightarrow \end{array}$$

$\overset{3:}{\Rightarrow} b + ab + bc + abc = 1 \Rightarrow b(1 + a + c + ac) = 1 \begin{cases} b = 1 \\ a + c + ac = 0 \Rightarrow \end{cases}$ $a = 0$, $c = 0$

1:

$\Rightarrow 1 + 0 = 1$ ✓

$\Rightarrow 1 + 0 = 1$ ✓

$\Rightarrow$ Para $(a, b, c, d) = (0, 1, 0, 0)$ y $(a, b, c, d) = (0, 1, 0, 1)$

$\Rightarrow$ todas las fórmulas son ciertas $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ el conjunto es satisfascible $\Rightarrow$

$\boxed{\text{No es consecuencia lógica}}$

Ejercicio 66 *Una vez visité la isla de Tururulandia, del planeta Logos porque había oido que en ella las ranas volaban. En el mencionado planeta la población se divide en dos grupos bien distintos: los veraces y los mendaces. Los veraces siempre dicen la verdad, mientras que un mendaz sólo es capaz de producir mentiras. En mi afán de averiguar la verdad sobre las ranas llamé me encontré con tres nativos A, B y C y les pregunté "¿Vuelan las ranas en Tururulandia?". Los nativos respondieron:*

- *A: "Las ranas vuelan"*
- *B: "Las ranas no vuelan y A es mendaz"*
- *C: "Las ranas vuelan si, y sólo si, yo soy mendaz"*

Dí que puedes concluir sobre las ranas y los nativos usando polinomios de Gegalkine.

Sea A una persona que dice α, y llamando $a =$ "A es veraz" resulta que $a = \alpha$.

•) Si A es veraz $\alpha = 1$ y $a = 1$

•) Si A es mendaz $\alpha = 0$ y $a = 0$

$\Rightarrow$ Sea $a :=$ "A es veraz", $b :=$ "B es veraz" ; $c :=$ "C es veraz" y $d :=$ "Las ranas vuelan:

$$\left.\begin{array}{l} a = d \\ b = \neg d \wedge \neg a \\ c = d \leftrightarrow \neg c \end{array}\right\} \begin{array}{l} \Rightarrow \boxed{a=0} \\ \Rightarrow b = (1+d)(1+a) \Rightarrow b = 1+a \Rightarrow \boxed{b=1} \\ \Rightarrow c = 1 + d + 1 + c \Rightarrow \boxed{d=0} \end{array}$$

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{A es mendaz, B es veraz, C puede ser ambas, y las ranas no vuelan.}}$

Ejercicio 67 *Una vez visité la isla de Tururulandia, del planeta Logos porque había oido que en ella las ranas volaban. En el mencionado planeta la población se divide en dos grupos bien distintos: los veraces y los mendaces. Los veraces siempre dicen la verdad, mientras que un mendaz sólo es capaz de producir mentiras. En mi afán de averiguar la verdad sobre las ranas llamé me encontré con tres nativos A, B y C y les pregunté "¿Vuelan las ranas en Tururulandia?". Los nativos respondieron:*

- *A: "Las ranas vuelan y B es mendaz"*
- *B: "Las ranas no vuelan y C es mendaz"*
- *C: "Las ranas vuelan y A es mendaz"*
- *A: "C es mendaz"*

Dí que puedes concluir sobre las ranas y los nativos usando polinomios de Gegalkine.

Sea A una persona que dice α, y llamando $a =$ "A es veraz" resulta que $a = \alpha$.

•) Si A es veraz $\alpha = 1$ y $a = 1$
•) Si A es mendaz $\alpha = 0$ y $a = 0$

Sea $a =$ A es veraz, $b =$ B es veraz, $c =$ C es veraz, $d =$ las ranas vuelan

$a = d \wedge \neg b$ $\Rightarrow$ 1: $a = d \cdot (1 + b)$

$b = \neg d \wedge \neg c$ $\Rightarrow$ 2: $b = (1+d)(1+c)$

$c = d \wedge \neg a$ $\Rightarrow$ 3: $c = d(1+a)$ $\Rightarrow$

$a = \neg c$ $\Rightarrow$ 4: $a = 1 + c$

3: $c = d(1+a) = d(1+1+c) \Rightarrow c = d \cdot c \Rightarrow$

2: $b = (1+d)(1+c) = (1+d)(1+dc) = 1 + dc + d + dc \Rightarrow \underline{b = 1+d}$

1: $a = d(1+b) = d(1+1+d) \Rightarrow d \Rightarrow \underline{a = d}$

$c = d(1+a) = d(1+d) = d + d \Rightarrow \boxed{c = 0} \Rightarrow \boxed{a = 1}$

$\boxed{b = 0}$ $\boxed{d = 1}$

A es veraz
B es mendaz
C es mendez
Las ranas vuelan

Ejercicio 68 *Una vez visité la isla de Tururulandia, del planeta Logos porque había oido que en ella los gatos ladraban. En el mencionado planeta la población se divide en dos grupos bien distintos: los veraces y los mendaces. Los veraces siempre dicen la verdad, mientras que un mendaz sólo es capaz de decir mentiras. En mi afán de averiguar la verdad sobre los gatos me encontré con tres nativos A, B, y C y les pregunté "¿Ladran los gatos en Tururulandia?". Los nativos respondieron:*

- *A: "Los gatos no ladran y C es mendaz"*
- *B: "Los gatos ladran si, y sólo si, yo soy mendaz"*
- *C: "Los gatos ladran y A es veraz"*

Dí que puedes concluir sobre los gatos y cada uno de los nativos planteando y resolviendo un sistema de ecuaciones polinómicas en $\mathbb{Z}_2$.

Sea A una persona que dice α, y llamando $a =$ "A es veraz"
resulta que $a = \alpha$.

- Si A es veraz $\alpha = 1$ y $a = 1$
- Si A es mendaz $\alpha = 0$ y $a = 0$

Sea $a =$ A es veraz, $b =$ B es veraz, $c =$ C es veraz, $d =$ Los gatos ladran.

$$\left.\begin{aligned} a &= \neg d \wedge \neg c \\ b &= d \longleftrightarrow \neg b \\ c &= d \wedge a \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} a &= (1+d)(1+c) \Rightarrow a = 1 + c \Rightarrow \boxed{a = 1} \\ b &= 1 + d + 1 + b \Rightarrow \boxed{d = 0} \\ c &= d \cdot a \Rightarrow \boxed{c = 0} \end{aligned}$$

A es veraz B puede ser veraz o mendaz C es mendaz Los gatos no ladran

$$f = \bar{x}yz + x\bar{y}z + xy\bar{z} + xyz =$$
$$= \bar{x}yz + x\bar{y}z + xy\bar{z} + xyz + yz =$$
$$= \bar{x}yz + x\bar{y}z + xy\bar{z} + xyz + yz + xy$$
$$= \bar{x}yz + x\bar{y}z + xy\bar{z} + xyz + yz + xy + xz =$$
$$= yz + xy + xz.$$

Ejercicio 69 *Una vez visité la isla de Tururulandia, del planeta Logos porque había oido que en ella las ranas volaban. En el mencionado planeta la población se divide en dos grupos bien distintos: los veraces y los mendaces. Los veraces siempre dicen la verdad, mientras que un mendaz sólo es capaz de decir mentiras. En mi afán de averiguar la verdad sobre las ranas me encontré con tres nativos A, B y C y les pregunté "¿Vuelan las ranas en Tururulandia?". Los nativos respondieron:*

- *A: "Las ranas vuelan si, y sólo si, yo soy veraz"*
- *B: "Las ranas no vuelan"*
- *C: "Las ranas vuelan y A es veraz"*

Dí que puedes concluir sobre las ranas y cada uno de los nativos usando polinomios de Gegalkine.

Sea A una persona que dice α, y llamando $a =$ "A es veraz"
resulta que $a = \alpha$.

- ·) Si A es veraz $\alpha = 1$ y $a = 1$
- ·) Si A es mendaz $\alpha = 0$ y $a = 0$

$a =$ A es veraz, $b =$ B es veraz, $c =$ C es veraz, $d =$ Las ranas vuelan

$$\left.\begin{array}{l} a = d \longleftrightarrow a \\ b = \neg d \\ c = d \wedge a \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} a = 1 + d + a \Rightarrow 1 + d = 0 \Rightarrow \boxed{d = 1} \\ \Rightarrow b = 1 + d = 1 + 1 \Rightarrow \boxed{b = 0} \\ \Rightarrow c = d \cdot a \Rightarrow \boxed{c = a} \end{array}$$

A puede ser veraz o mendaz
B es mendaz
C es veraz $\Leftrightarrow$ A es veraz
Las ranas vuelan

(0, 0, 1, 0)

Ejercicio 70 *Estudia utilizando el algoritmo de Davis-Putnam si la afirmación:*

$$\{d \overset{1}{\to} a,\ b \overset{1}{\to} c,\ \neg(\overset{1}{\neg} a \to b),\ \neg \overset{1}{c} \to b\} \models \neg(c \to \overset{0}{\neg} d)$$

es verdadera o falsa. En caso de ser falsa encuentra un mundo en que las hipótesis sean verdaderas y la conclusión falsa.

$\{d \to a, b \to c, \neg(\neg a \to b), \neg c \to b\} \models \neg(c \to \neg d)$

$\Leftrightarrow \{d \to a, b \to c, \neg(\neg a \to b), \neg c \to b, c \to \neg d\}$ es insatisfascible

Hallamos la forma clausulada de las fórmulas:

$d \to a$	$b \to c$	$\neg(\neg a \to b)$	$\neg c \to b$	$c \to \neg d$
$\neg d \vee a$	$\neg b \vee c$	$\neg(a \vee b)$	$c \vee b$	$\neg c \vee \neg d$
		$\neg a \wedge \neg b$		

El conjunto es insatisfascible $\Leftrightarrow$

$\{\neg d \vee a, \neg b \vee c, \neg a, \neg b, c \vee b, \neg c \vee \neg d\}$ es insatisfascible.

Usamos el algoritmo de Davis-Putnam.

$$\{\neg d \vee a, \neg b \vee c, \neg a, \neg b, c \vee b, \neg c \vee \neg d\}$$

$$\Big|\ \lambda = \neg b$$

$$\{\neg d \vee a, \neg a, c, \neg c \vee \neg d\}$$

$$\Big|\ \lambda = \neg a$$

$$\{\neg d, c, \neg c \vee \neg d\}$$

$$\Big|\ \lambda = \neg d$$

$$\{c\}$$

$$\Big|\ \lambda = c$$

$\emptyset \Rightarrow$ El conjunto es satis

$\Rightarrow \boxed{\text{La afirmación es falsa para } (0,0,1,0)}$

Ejercicio 71 *Estudia si la siguientes afirmación es cierta o no. En caso de no serlo, encuentra un mundo en que sea falsa.*

$$\{c \to (a \vee d),\ (a \wedge b) \to c\} \vDash b \to (\neg c \to a).$$

La afirmación es cierta $\Leftrightarrow$ $\{c \to (a \vee d), (a \wedge b) \to c, b, \neg c, \neg a\}$ es insatisfascible. Hallamos la forma clausulada de las fórmulas

$c \to a \vee d$	$(a \wedge b) \to c$	b	$\neg c$	$\neg a$
$\neg c \vee a \vee d$	$\neg(a \wedge b) \vee c$			
	$\neg a \vee \neg b \vee c$			

Vemos si $\Sigma = \{\neg c \vee a \vee d, \neg a \vee \neg b \vee c, b, \neg c, \neg a\}$ es insatisfascible

$$\{\neg c \vee a \vee d, \neg a \vee \neg b \vee c, b, \neg c, \neg a\}$$
$$\Big|\ \lambda = \neg c$$
$$\{\neg a \vee \neg b, b, \neg a\}$$
$$\Big|\ \lambda = \neg a$$
$$\{b\}$$
$$\Big|\ \lambda = b$$
$\emptyset$ $\Rightarrow$ el conjunto es satisfascible

$\Rightarrow$ **La afirmación no es cierta.**

Un mundo que la falsea es: $(0, 1, 0)$

Ejercicio 72 *Estudia utilizando Davis-Putnam*

$$((e \vee a) \wedge \neg b) \to c,\ \neg c \wedge (a \vee e) \models b \vee d$$

En caso que no sea cierta, encuentra los mundos en que no se cumple.

Cierta $\iff$ $\{(e \vee a) \wedge \neg b \to c,\ \neg c \wedge (a \vee e), \neg b, \neg d\}$ es insatis.

Forma clausulada:

$(e \vee a) \wedge \neg b \to c$

$\neg((e \vee a) \wedge \neg b) \vee c$

$(\neg(e \vee a) \vee b) \vee c$

$((\neg e \wedge \neg a) \vee b) \vee c$

$[(\neg e \vee b) \wedge (\neg a \vee b)] \vee c$

$(\neg e \vee b \vee c) \wedge (\neg a \vee b \vee c)$

$\neg c \wedge (a \vee e)\ |\ \neg b\ |\ \neg d$

$\{\neg e \vee b \vee c, \neg a \vee b \vee c, \neg c, a \vee e, \neg b, \neg d\}$

$| \lambda = \neg c$

$\{\neg e \vee b, \neg a \vee b, a \vee e, \neg b, \neg d\}$

$| \lambda = \neg b$

$\{\neg e, \neg a, a \vee e, \neg d\}$

$| \lambda = \neg e$

$\{\neg a, a, \neg d\}$

$| \lambda = a$

$\{\square, \neg d\}$ $\Rightarrow$ Es insatisfascible

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{La afirmación es cierta.}}$

(0,0,1)

Ejercicio 73 *Estudia utilizando Davis-Putnam la consecuencia lógica*

$$\neg c \to a,\ (\neg a \to b) \to \neg a,\ c \to \neg b \models (b \to \neg c) \wedge (c \to a)$$

En caso que no sea cierta, encuentra los mundos en que no se cumple.

Cierta $\Leftrightarrow$ $\{\neg c \to a, (\neg a \to b) \to \neg a, c \to \neg b, \neg(b \to \neg c)\}$ y

$\{\neg c \to a, (\neg a \to b) \to \neg a, c \to \neg b, \neg(c \to a)\}$ son insatisfascibles.

Forma clausulada:

$\neg c \to a$

$c \vee a$

$(\neg a \to b) \to \neg a$

$\neg(\neg a \to b) \vee \neg a$

$\neg(a \vee b) \vee \neg a$

$(\neg a \wedge \neg b) \vee \neg a$

$\neg a \wedge (\neg a \vee \neg b)$

$\neg a$

$c \to \neg b$

$\neg c \vee \neg b$

$\neg(b \to \neg c)$

$\neg(\neg b \vee \neg c)$

$b \wedge c$

$\neg(c \to a)$

$\neg(\neg c \vee a)$

$c \wedge \neg a$

$\{c \vee a, \neg a, \neg c \vee \neg b, b, c\}$ y $\{c \vee a, \neg a, \neg c \vee \neg b, c\}$ son insatis.

$\{c \vee a, \neg a, \neg c \vee \neg b, b, c\}$

$\big|\ \lambda = c$

$\{\neg a, \neg b, b\}$

$\big|\ \lambda = b$

$\{\neg a, \square\}$

$\Downarrow$

Insatis

$\{c \vee a, \neg a, \neg c \vee \neg b, c\}$

$\big|\ \lambda = c$

$\{\neg a, \neg b\}$

$\big|\ \lambda = \neg a$

$\{\neg b\}$

$\big|\ \lambda = \neg b$

$\emptyset \Rightarrow$ Satisfascible

$\Rightarrow$ La consecuencia lógica es falsa.

Ejemplo: $(a, b, c) = (0, 0, 1)$

Ejercicio 74 *Estudia utilizando el algoritmo de Davis-Putnam si la afirmación:*

$$\{(a \wedge b) \to c,\ (\neg a \wedge \neg b) \to d,\ a \leftrightarrow b\} \vDash c \vee d$$

es verdadera o falsa. En el caso de que sea falsa encuentra un mundo en que las hipótesis sean verdaderas y la conclusión falsa.

Cierta $\Leftrightarrow \{(a \wedge b) \to c,\ (\neg a \wedge \neg b) \to d,\ a \leftrightarrow b,\ \neg c,\ \neg d\}$ insatis.

Forma clausulada:

$(a \wedge b) \to c$	$(\neg a \wedge \neg b) \to d$	$a \leftrightarrow b$	$\neg c$	$\neg d$
$\neg(a \wedge b) \vee c$	$\neg(\neg a \wedge \neg b) \vee d$	$(a \to b) \wedge (b \to a)$		
$\neg a \vee \neg b \vee c$	$a \vee b \vee d$	$(\neg a \vee b) \wedge (\neg b \vee a)$		

$\{\neg a \vee \neg b \vee c,\ a \vee b \vee d,\ \neg a \vee b,\ \neg b \vee a,\ \neg c,\ \neg d\}$

$\mid \lambda = \neg c$

$\{\neg a \vee \neg b,\ a \vee b \vee d,\ \neg a \vee b,\ \neg b \vee a,\ \neg d\}$

$\mid \lambda = \neg d$

$\{\neg a \vee \neg b,\ a \vee b,\ \neg a \vee b,\ \neg b \vee a\}$ → No se pueden dar todas a la vez.

Σ_a: $\{\neg b,\ b\}$ $\mid \lambda = b$ $\square$

$\Sigma_{\neg a}$: $\{b,\ \neg b\}$ $\mid \lambda = b$ $\square$ ⇒ Son insatis

La consecuencia es cierta.

Ejercicio 75 *Estudia utilizando el algoritmo de Davis-Putnam si la afirmación:*

$$a \to (b \vee c),\ c \to d,\ \neg b \vee d \vDash \neg(a \wedge \neg d)$$

es verdadera o falsa. En caso de ser falsa encuentra un mundo en que las hipótesis sean verdaderas y la conclusión falsa.

Cierta $\Leftrightarrow$ $\{a \to (b \vee c), c \to d, \neg b \vee d, a, \neg d\}$ es insatisfascible

Forma clausulada:

$a \to (b \vee c)$	$c \to d$	$\neg b \vee d$	a	$\neg d$
$\neg a \vee (b \vee c)$	$\neg c \vee d$			
$\neg a \vee b \vee c$				

$$\{\neg a \vee b \vee c, \neg c \vee d, \neg b \vee d, a, \neg d\}$$

$$\big|\ \lambda = \neg d$$

$$\{\neg a \vee b \vee c, \neg c, \neg b, a\}$$

$$\big|\ \neg c$$

$$\{\neg a \vee b, \neg b, a\}$$

$$\big|\ \lambda = \neg b$$

$$\{\neg a, a\}$$

$$\big|\ \lambda = a$$

$\{\square\}$ $\Rightarrow$ Insatisfascible.

La afirmación es cierta.

Ejercicio 76 *Estudia utilizando resolución si la afirmación:*

$$\{(a \wedge b) \to c,\ c \to (a \vee d)\} \vDash b \to (\neg a \to c)$$

es verdadera o falsa.

Cierta $\Leftrightarrow \{(a \wedge b) \to c,\ c \to (a \vee d),\ b,\ \neg a,\ \neg c\}$ insatisfascible.

Forma clausulada:

$(a\wedge b) \to c$	$c \to (a \vee d)$	b	$\neg a$	$\neg c$
$\neg(a \wedge b) \vee c$	$\neg c \vee a \vee d$			
$\neg a \vee \neg b \vee c$				

¿ $\{\neg a \vee \neg b \vee c,\ \neg c \vee a \vee d,\ b,\ \neg a,\ \neg c\}$ insatisfascible ?

* Usamos saturación:

$$\Sigma_0 = \{\underbrace{\neg a \vee \neg b \vee c}_{C_1},\ \underbrace{\neg c \vee a \vee d}_{C_2},\ \underbrace{b}_{C_3},\ \underbrace{\neg a}_{C_4},\ \underbrace{\neg c}_{C_5}\}$$

C_1 con C_3	C_1 con C_5	C_2 con C_4
$\neg a \vee \neg b \vee c$, b	$\neg a \vee \neg b \vee c$, $\neg c$	$\neg c \vee a \vee d$, $\neg a$
$\neg a \vee c = C_6$	$\neg a \vee \neg b = C_7$	$\neg c \vee d = C_8$

$$\Sigma_1 = \{\underbrace{\neg a \vee \neg b \vee c}_{C_1},\ \underbrace{\neg c \vee a \vee d}_{C_2},\ \underbrace{b}_{C_3},\ \underbrace{\neg a}_{C_4},\ \underbrace{\neg c}_{C_5},\ \underbrace{\neg a \vee c}_{C_6},\ \underbrace{\neg a \vee \neg b}_{C_7},\ \underbrace{\neg c \vee d}_{C_8}\}$$

C_2 con C_7	~~C_1 con C_8~~	~~C_5 con C_8~~	C_6 con C_8
$\neg c \vee a \vee d$, $\neg a \vee \neg b$	~~$\neg a \vee \neg b \vee c$, $\neg c \vee d$~~	~~$\neg c$, $\neg c \vee d$~~	$\neg a \vee c$, $\neg c \vee d$
$\neg b \vee \neg c \vee d = C_9$	~~$\neg a \vee \neg b \vee c = C_{10}$~~	~~$d = C_{10}$~~	$\neg a \vee d = C_{10}$

$$\Sigma_2 = \{\underbrace{\neg a \vee \neg b \vee c}_{C_1},\ \underbrace{\neg c \vee a \vee d}_{C_2},\ \underbrace{b}_{C_3},\ \underbrace{\neg a}_{C_4},\ \underbrace{\neg c}_{C_5},\ \underbrace{\neg a \vee c}_{C_6},\ \underbrace{\neg a \vee \neg b}_{C_7},\ \underbrace{\neg c \vee d}_{C_8},\ \underbrace{\neg b \vee \neg c \vee d}_{C_9},\ \underbrace{\neg a \vee d}_{C_{10}}\}$$

C_1 con C_9

$$\begin{array}{ccc} \neg a \vee \neg b \vee c & & \neg b \vee \neg c \vee d \\ | & & / \\ & \neg a \vee \neg b \vee d & \\ & \shortparallel & \\ & C_{10} & \end{array}$$

$$\Sigma_3 = \{ \underset{C_1}{\neg a \vee \neg b \vee c}, \underset{C_2}{\neg c \vee a \vee d}, \underset{C_3}{b}, \underset{C_4}{\neg a}, \underset{C_5}{\neg c}, \underset{C_6}{\neg a \vee c}, \underset{C_7}{\neg a \vee \neg b}, \underset{C_8}{\neg c \vee d},$$

$$\underset{C_9}{\neg b \vee \neg c \vee d}, \underset{C_{10}}{\neg a \vee d}, \underset{C_{11}}{\neg a \vee \neg b \vee d} \}$$

Como ya no pueden hacerse más resolventes, y no ha aparecido la cláusula vacía, el conjunto es satisfascible y la afirmación era falsa.

Ejercicio 77 *Estudia utilizando resolución si la afirmación:*

$$d \to \neg a,\ a \to (b \to c),\ c \to d,\ b \to d \vDash \neg b \wedge c$$

es verdadera o falsa.

Cierta $\Leftrightarrow$ $\{d \to \neg a, a \to (b \to c), c \to d, b \to d, b\}$ y

$\{d \to \neg a, a \to (b \to c), c \to d, b \to d, \neg c\}$ son insatis.

Forma clausulada:

$d \to \neg a$	$a \to (b \to c)$	$c \to d$	$b \to d$	b	$\neg c$
$\neg d \vee \neg a$	$\neg a \vee (\neg b \vee c)$	$\neg c \vee d$	$\neg b \vee d$		
	$\neg a \vee \neg b \vee c$				

$\{\neg d \vee \neg a, \neg a \vee \neg b \vee c, \neg c \vee d, \neg b \vee d, b\}$ y

$\{\neg d \vee \neg a, \neg a \vee \neg b \vee c, \neg c \vee d, \neg b \vee d, \neg c\}$ son insatisfacibles.

Vemos el primero con saturación:

$$\Sigma_0 = \{\underset{C_1}{\neg d \vee \neg a}, \underset{C_2}{\neg a \vee \neg b \vee c}, \underset{C_3}{\neg c \vee d}, \underset{C_4}{\neg b \vee d}, \underset{C_5}{b}\}$$

C_1 con C_3

$\neg d \vee \neg a \quad \neg c \vee d$

$\neg a \vee \neg c = C_6$

C_1 con C_4

$\neg d \vee \neg a \quad \neg b \vee d$

$\neg a \vee \neg b = C_7$

C_2 con C_3

$\neg a \vee \neg b \vee c \quad \neg c \vee d$

$\neg a \vee \neg b \vee d = C_8$

C_4 con C_5

$\neg b \vee d \quad b$

$d = C_9$

C_2 con C_5

$\neg a \vee \neg b \vee c \quad b$

$\neg a \vee c = C_{10}$

$$\Sigma_1 = \{ \underset{C_1}{\neg d \lor \neg a},\ \underset{C_2}{\neg a \lor \neg b \lor c},\ \underset{C_3}{\neg c \lor d},\ \underset{C_4}{\neg b \lor d},\ \underset{C_5}{b},\ \underset{C_6}{\neg a \lor \neg c},\ \underset{C_7}{\neg a \lor \neg b},\ \underset{C_8}{\neg a \lor \neg b \lor d},\ \underset{C_9}{d},\ \underset{C_{10}}{\neg a \lor c} \}$$

C_1 con C_9	C_5 con C_8
$\neg d \lor \neg a \quad d$	$b \quad \neg a \lor \neg b \lor d$
$\neg a$	$\neg a \lor d$
$= C_{10}$	$= C_{11}$

$$\Sigma = \{ \underset{C_1}{\neg d \lor \neg a},\ \underset{C_2}{\neg a \lor \neg b \lor c},\ \underset{C_3}{\neg c \lor d},\ \underset{C_4}{\neg b \lor d},\ \underset{C_5}{b},\ \underset{C_6}{\neg a \lor \neg c},\ \underset{C_7}{\neg a \lor \neg b},\ \underset{C_8}{\neg a \lor \neg b \lor d},\ \underset{C_9}{d},\ \underset{C_{10}}{\neg a},\ \underset{C_{11}}{\neg a \lor d} \}$$

Ya no se pueden hacer más resolventes y no se ha obtenido la cláusula vacía $\Rightarrow$ Satisfascible $\rightarrow$ la afirmación es falsa.

Ejercicio 78 *Estudia utilizando el algoritmo de Davis-Putnam si la afirmación:*

$$a \to (b \to c),\ c \to d,\ b \to d \vDash a \wedge \neg d$$

es verdadera o falsa. En caso de ser falsa encuentra un mundo en que las hipótesis sean verdaderas y la conclusión falsa.

Cierta $\iff$ $\{a \to (b \to c), c \to d, b \to d, \neg a\}$ y $\{a \to (b \to c), c \to d, b \to d, d\}$

son insatis.

Forma clausulada:

$a \to (b \to c)$	$c \to d$	$b \to d$	$\neg a$	d
$\neg a \vee (\neg b \vee c)$	$\neg c \vee d$	$\neg b \vee d$		
$\neg a \vee \neg b \vee c$				

$\{\neg a \vee \neg b \vee c,\ \neg c \vee d,\ \neg b \vee d,\ \neg a\}$

$\quad | \ \lambda = \neg a$

$\{\neg c \vee d,\ \neg b \vee d\}$

$\quad | \ \lambda = d$

$\emptyset$ satisfascible.

Mundo que lo falsea $(0, 0, 0, 1)$

Ejercicio 79 *Halla una forma clausulada de las sentencias:*

1. $\forall x Q(x) \rightarrow \forall x \exists y (P(y) \wedge S(x,y))$
2. $\exists x P(x) \rightarrow \exists x (Q(x) \rightarrow \neg L(x,y))$

1. $\forall x Q(x) \rightarrow \forall x \exists y (P(y) \wedge S(x,y))$

$\forall z Q(z) \rightarrow \forall x \exists y (P(y) \wedge S(x,y))$

$\forall x (\forall z Q(z) \rightarrow \exists y (P(y) \wedge S(x,y)))$

$\forall x (\forall y Q(y) \rightarrow \exists y (P(y) \wedge S(x,y)))$

$\boxed{\forall x \exists y (Q(y) \rightarrow (P(y) \wedge S(x,y)))}$ FORMA NORMAL PRENEXA

$\boxed{\forall x (Q(f(x)) \rightarrow (P(f(x)) \wedge S(x,f(x))))}$ SKOLEM

$Q(f(x)) \rightarrow (P(f(x)) \wedge S(x,f(x)))$

$\neg Q(f(x)) \vee (P(f(x)) \wedge S(x,f(x)))$

$(\neg Q(f(x)) \vee P(f(x))) \wedge (\neg Q(f(x)) \vee S(x,f(x)))$

$\boxed{\forall x (\neg Q(f(x)) \vee P(f(x))) \wedge \forall x (\neg Q(f(x)) \vee S(x,f(x)))}$

CLAUSULADA

2. $\exists x P(x) \to \exists x(Q(x) \to \neg L(x,y))$

$\exists x(\exists z P(z) \to (Q(x) \to \neg L(x,y)))$

$\boxed{\exists x \forall z (P(z) \to (Q(x) \to \neg L(x,y)))}$ FORMA NORMAL PRENEXA

$\boxed{\forall z (P(z) \to (Q(a) \to \neg L(a,y)))}$ FORMA DE SKOLEM

$\neg P(z) \vee (\neg Q(a) \vee \neg L(a,y))$

$\boxed{\forall z (\neg P(z) \vee \neg Q(a) \vee \neg L(a,y))}$ FORMA CLAUSULADA

Ejercicio 80 *Halla una forma clausulada de las sentencias:*

1. $\forall x(\forall x Q(x) \to \exists y(P(y) \wedge S(x,y)))$
2. $\forall y(\exists x P(x) \to \forall y \exists x(Q(x) \to \neg L(x,y)))$

1. $\forall x (\forall x Q(x) \to \exists y(P(y) \wedge S(x,y)))$

$\forall x Q(x) \to \forall x \exists y (P(y) \wedge S(x,y))$

$\forall x Q(x) \to \forall z \exists y (P(y) \wedge S(z,y))$

$\exists x (Q(x) \to \forall z \exists y (P(y) \wedge S(z,y)))$

$\boxed{\exists x \forall z \exists y (Q(x) \to (P(y) \wedge S(z,y)))}$ FORMA NORMAL PRENEXA

$\forall z \exists y (Q(a) \to (P(y) \wedge S(z,y)))$

$\boxed{\forall z (Q(a) \to (P(f(z)) \wedge S(z,f(z))))}$ FORMA DE SKOLEM

$\neg Q(a) \vee (P(f(z)) \wedge S(z,f(z)))$

$(\neg Q(a) \vee P(f(z))) \wedge (\neg Q(a) \vee S(z,f(z)))$

$\boxed{\forall z (\neg Q(a) \vee P(f(z))) \wedge \forall z (\neg Q(a) \vee S(z,f(z)))}$

FORMA CLAUSULADA

$2. \ \forall y\,(\exists x\, P(x) \rightarrow \forall y \exists x\,(Q(x) \rightarrow \neg L(x,y)))$

$\exists x P(x) \rightarrow \forall y \exists x\,(Q(x) \rightarrow \neg L(x,y))$

$\forall y\,(\exists x P(x) \rightarrow \exists x\,(Q(x) \rightarrow \neg L(x,y)))$

$\forall y\,(\exists z P(z) \rightarrow \exists x\,(Q(x) \rightarrow \neg L(x,y)))$

$\forall y \exists z\,(P(z) \rightarrow \exists x\,(Q(x) \rightarrow \neg L(x,y)))$

$\boxed{\forall y \exists z \forall x\,(P(z) \rightarrow (Q(x) \rightarrow \neg L(x,y)))}$ FORMA NORMAL PRENEXA

$\boxed{\forall y \forall x\,(P(f(y)) \rightarrow (Q(x) \rightarrow \neg L(x,y)))}$ SKOLEM

$\neg P(f(y)) \vee (\neg Q(x) \vee \neg L(x,y))$

$\boxed{\forall y \forall x\,(\neg P(f(y)) \vee \neg Q(x) \vee \neg L(x,y))}$ CLAUSULADA

Ejercicio 81 *Halla una forma clausulada de las sentencias:*

1. $\forall x(\forall x P(x) \to \exists y(Q(y) \wedge R(x,y)))$
2. $\forall y(\exists x P(x) \to \exists x(Q(x) \to \neg R(x,y)))$

$1. \ \forall x\,(\forall x P(x) \rightarrow \exists y(Q(y) \wedge R(x,y)))$

$\forall x P(x) \rightarrow \forall x \exists y\,(Q(y) \wedge R(x,y))$

$\forall z P(z) \rightarrow \forall x \exists y\,(Q(y) \wedge R(x,y))$

$\exists z\,(P(z) \rightarrow \forall x \exists y\,(Q(y) \wedge R(x,y)))$

$\boxed{\exists z \forall x \exists y\,(P(z) \rightarrow (Q(y) \wedge R(x,y)))}$

2. $\forall y\,(\exists x\, P(x) \rightarrow \exists x\,(Q(x) \rightarrow \neg R(x,y)))$

$\forall y\,(\exists z\, P(z) \rightarrow \exists x\,(Q(x) \rightarrow \neg R(x,y)))$

$\boxed{\forall y\, \exists x\, \exists z\ (P(z) \rightarrow (Q(x) \rightarrow \neg R(x,y)))}$ NORMAL PRENEXA

$\boxed{\forall y\ (P(f(y)) \rightarrow (Q(g(y)) \rightarrow \neg R(g(y),y)))}$ Skolem

$P(f(y)) \rightarrow (Q(g(y)) \rightarrow \neg R(g(y),y))$

$\neg P(f(y)) \vee (\neg Q(g(y)) \vee \neg R(g(y),y))$

$\boxed{\forall y\,(\neg P(f(y)) \vee (\neg Q(g(y)) \vee \neg R(g(y),y)))}$ Clausulada.

82 a) IGUAL QUE 81 a)

82 b) igual que 81 b)

Ejercicio 83 *Halla una forma prenexa, de Skolem y clausulada de la sentencias, con el menor número de cuantificadores posibles:*

1. $\exists x P(x) \vee (\forall y Q(y) \to (\forall z P(z) \to \exists x Q(x)))$
2. $\forall y(\exists x P(x) \to \exists x(Q(x) \to \neg R(x,y)))$

1. $\exists x P(x) \vee (\forall y Q(y) \to (\forall z P(z) \to \exists x Q(x)))$

$\exists x P(x) \vee (\forall y Q(y) \to (\forall z P(z) \to \exists z Q(z)))$

$\exists x P(x) \vee (\forall y Q(y) \to \exists z (P(z) \to Q(z)))$

$\exists x P(x) \vee (\forall y Q(y) \to \exists y (P(y) \to Q(y)))$

$\exists x P(x) \vee \exists y (Q(y) \to (P(y) \to Q(y)))$

$\exists y P(y) \vee \exists y (Q(y) \to (P(y) \to Q(y)))$

$\boxed{\exists y (P(y) \vee (Q(y) \to (P(y) \to Q(y))))}$ FORMA NORMAL PRENEXA

$\boxed{P(a) \vee (Q(a) \to (P(a) \to Q(a)))}$ SKOLEM

$P(a) \vee (\neg Q(a) \vee (\neg P(a) \vee Q(a)))$?? $\longrightarrow$ NO SÉ

83 b igual que 82 b

Ejercicio 84 *Halla una forma prenexa, de Skolem y clausulada de la sentencias, con el menor número de cuantificadores posibles e indicando las equivalencias que utilizas:*

1. $\neg\exists x P(x) \vee (\forall x Q(x) \to \neg\exists y \forall x R(x,y))$
2. $\forall x P(x) \to (\forall y Q(y) \to (\forall z P(z) \to \neg\forall u Q(u)))$

1. $\neg \exists x P(x) \vee (\forall x Q(x) \longrightarrow \neg \exists y \forall x R(x,y))$

$\forall x \neg P(x) \vee (\forall x Q(x) \longrightarrow \forall y \neg \forall x R(x,y))$

$\forall x \neg P(x) \vee (\forall x Q(x) \longrightarrow \forall y \exists x \neg R(x,y))$

$\forall x \neg P(x) \vee \forall y (\forall x Q(x) \longrightarrow \exists x \neg R(x,y))$

$\forall x \neg P(x) \vee \forall y \exists x (Q(x) \to \neg R(x,y))$

$\forall z \neg P(z) \vee \forall y \exists x (Q(x) \to \neg R(x,y))$

$\boxed{\forall y \exists x \forall z (\neg P(z) \vee (Q(x) \longrightarrow \neg R(x,y)))}$ FORMA NORMAL PRENEXA

$\boxed{\forall y \forall z (\neg P(z) \vee (Q(f(y)) \longrightarrow \neg R(f(y),y)))}$ SKOLEM

$\neg P(z) \vee (\neg Q(f(y)) \vee \neg R(f(y),y))$

$\boxed{\forall y \forall z (\neg P(z) \vee \neg Q(f(y)) \vee \neg R(f(y),y))}$ CLAUSULADA

2. $\forall x\, P(x) \to (\forall y\, Q(y) \to (\forall z\, P(z) \to \neg \forall u\, Q(u)))$

$$\forall x\, P(x) \to (\forall y\, Q(y) \to (\forall z\, P(z) \to \exists u\, \neg Q(u)))$$

$$\forall x\, P(x) \to (\forall y\, Q(y) \to (\forall z\, P(z) \to \exists z\, \neg Q(z)))$$

$$\forall x\, P(x) \to (\forall y\, Q(y) \to \exists z\, (P(z) \to \neg Q(z)))$$

$$\forall x\, P(x) \to (\forall z\, Q(z) \to \exists z\, (P(z) \to \neg Q(z)))$$

$$\forall x\, P(x) \to \exists z\, (Q(z) \to (P(z) \to \neg Q(z)))$$

$$\forall z\, P(z) \to \exists z\, (Q(z) \to (P(z) \to \neg Q(z)))$$

$$\boxed{\exists z\, (P(z) \to (Q(z) \to (P(z) \to \neg Q(z))))}$$ FORMA NORMAL PRENEXA

$$\boxed{P(a) \to (Q(a) \to (P(a) \to \neg Q(a)))}$$ Skolem

$$\neg P(a) \vee (\neg Q(a) \vee (\neg P(a) \vee \neg Q(a)))$$

$$\boxed{\neg P(a) \vee \neg Q(a)}$$ FORMA CLAUSULADA

Ejercicio 85 *Encuentra el conjunto de cláusulas cuya insatisfacibilidad sea equivalente a la validez de la consecuencia lógica:*

$$\{\exists x(Q(x) \wedge \forall y(P(y) \rightarrow R(x,y))),\ \forall x(Q(x) \rightarrow \exists y(P(y) \wedge S(x,y)),\ \forall x(\exists y(S(x,y) \wedge R(x,y)) \rightarrow T(x))\} \models \exists x(T(x) \wedge Q(x)).$$

Verdadera $\Longleftrightarrow$ $\left\{\begin{array}{l} \exists x(Q(x) \wedge \forall y(P(y) \rightarrow R(x,y))) \\ \forall x(Q(x) \rightarrow \exists y(P(y) \wedge S(x,y))) \\ \forall x(\exists y(S(x,y) \wedge R(x,y)) \rightarrow T(x)) \\ \neg \exists x(T(x) \wedge Q(x)) \end{array}\right.$ es insatisfascible

Hallamos la forma clausulada de cada fórmula

1. $\exists x(Q(x) \wedge \forall y(P(y) \rightarrow R(x,y)))$

$\exists x \forall y (Q(x) \wedge (P(y) \rightarrow R(x,y)))$ N. PRENEXA

$\forall y (Q(a) \wedge (P(y) \rightarrow R(a,y)))$ Skolem

$Q(a) \wedge (P(y) \rightarrow R(a,y))$

$Q(a) \wedge (\neg P(y) \vee R(a,y))$

$\boxed{Q(a) \wedge \forall y(\neg P(y) \vee R(a,y))}$ FORMA CLAUSULADA

2. $\forall x (Q(x) \rightarrow \exists y (P(y) \wedge S(x,y))$

$\forall x \exists y (Q(x) \rightarrow (P(y) \wedge S(x,y)))$ PRENEXA

$\forall x (Q(x) \rightarrow (P(f(x)) \wedge S(f(x),y)))$ Skolem

$Q(x) \rightarrow (P(f(x)) \wedge S(f(x),y))$

$\neg Q(x) \vee (P(f(x)) \wedge S(f(x),y))$

$(\neg Q(x) \vee P(f(x))) \wedge (\neg Q(x) \vee S(f(x),y))$

$\boxed{\forall x(\neg Q(x) \vee P(f(x))) \wedge \forall x(\neg Q(x) \vee S(f(x),y))}$ forma clausulada

3. $\forall x(\exists y\,(S(x,y)\wedge R(x,y))\to T(x))$

$\forall x\forall y\,((S(x,y)\wedge R(x,y))\to T(x))$ Prenexa Ya está en Skolem

$(S(x,y)\wedge R(x,y))\to T(x)$

$\neg(S(x,y)\wedge R(x,y))\vee T(x)$

$\neg S(x,y)\vee\neg R(x,y)\vee T(x)$

$\boxed{\forall x\forall y(\neg S(x,y)\vee\neg R(x,y)\vee T(x))}$ Forma clausulada

4. $\neg\exists x\,(T(x)\wedge Q(x))$

$\forall x\,\neg(T(x)\wedge Q(x))$ Normal Prenexa Ya está en Skolem

$\neg(T(x)\wedge Q(x))$

$\neg T(x)\vee\neg Q(x)$

$\boxed{\forall x\,(\neg T(x)\vee\neg Q(x))}$ Forma clausulada

La validez de la consecuencia lógica inicial es equivalente a la insatisfascibilidad del conjunto

$$\left\{\begin{array}{l} Q(a)\wedge\forall y(\neg P(y)\vee R(a,y)) \\ \forall x(\neg Q(x)\vee P(f(x)))\wedge\forall x(\neg Q(x)\vee S(f(x),y)) \\ \forall x\forall y(\neg S(x,y)\vee\neg R(x,y)\vee T(x)) \\ \forall x(\neg T(x)\vee\neg Q(x)) \end{array}\right.$$