Primera Entrega Álgebras de Boole

Alberto Llamas González

Lógica y Métodos Discretos
1º Grado Ingeniería Informática

Relación 2. Álgebras de Boole - PRIMERA ENTREGA. ALBERTO LLAMAS

(2.1) Sea I el conjunto de los números reales que pertenecen al intervalo cerrado $[0,1]$. Para todo $a,b \in I$ definimos $a \vee b = \max\{a,b\}$, $a \wedge b = \min\{a,b\}$ y $\bar{a} = 1-a$ ¿Es I con estas operaciones un Álgebra de Boole? Razona la respuesta.

Veamos si cumple las 8 propiedades:

$$(I, \underset{\vee}{\max\{a,b\}}, \underset{\wedge}{\min\{a,b\}}, \bar{a}, 0, 1)$$

A0) Asociatividad

- $\forall a,b,c \in I$, ¿$a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$?

Sean $a,b,c \in I$,

$$a \vee (b \vee c) = \max\{a, \max\{b,c\}\} = \max\{a,b,c\} =$$
$$= \max\{\max\{a,b\}, c\} = (a \vee b) \vee c$$

- $\forall a,b,c \in I$ ¿$a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c$?

Sean $a,b,c \in I$

$$a \wedge (b \wedge c) = \min\{a, \min\{b,c\}\} = \min\{a,b,c\} =$$
$$= \min\{\min\{a,b\}, c\} = (a \wedge b) \wedge c$$

A1) Conmutatividad

- $a \vee b = \max\{a,b\} = \max\{b,a\} = b \vee a$
- $a \wedge b = \min\{a,b\} = \min\{b,a\} = b \wedge a$

Escaneado con CamScanner

A2) Distributividad

1) $¿\, a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$? y 2) $¿\, a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$?

- Si $a > b > c$

  1) $\max\{a, \min\{b,c\}\} = a = \min\{\max\{a,b\}, \max\{a,c\}\}$

  2) $\min\{a, \max\{b,c\}\} = b = \max\{\min\{a,b\}, \min\{a,c\}\}$

- Si $a > c > b$

  1) $\max\{a, \min\{b,c\}\} = a = \min\{\max\{a,b\}, \max\{a,c\}\}$

  2) $\min\{a, \max\{b,c\}\} = c = \max\{\min\{a,b\}, \min\{a,c\}\}$

- Si $b > a > c$

  1) $\max\{a, \min\{b,c\}\} = a\cancel{b} = \min\{\max\{a,b\}, \max\{a,c\}\}$

  2) $\min\{a, \max\{b,c\}\} = a = \max\{\min\{a,b\}, \min\{a,c\}\}$

- Si $b > c > a$

  1) $\max\{a, \min\{b,c\}\} = c = \min\{\max\{a,b\}, \max\{a,c\}\}$

  2) $\min\{a, \max\{b,c\}\} = a = \max\{\min\{a,b\}, \min\{a,c\}\}$

- Si $c > a > b$

  1) $\max\{a, \min\{b,c\}\} = a = \min\{\max\{a,b\}, \max\{a,c\}\}$

  2) $\min\{a, \max\{b,c\}\} = a = \max\{\min\{a,b\}, \min\{a,c\}\}$

- Si $c > b > a$

  1) $\max\{a, \min\{b,c\}\} = b = \min\{\max\{a,b\}, \max\{a,c\}\}$

  2) $\min\{a, \max\{b,c\}\} = a = \max\{\min\{a,b\}, \min\{a,c\}\}$

A3) complementación

$¿\, a \vee \bar{a} = 1$? $\max\{a, 1-a\} =$

- Si $a \leq 0'5 \Rightarrow \max\{a, 1-a\} = 1-a$!!
- Si $a > 0'5 \Rightarrow \max\{a, 1-a\} = a$

NO SE CUMPLE

Luego no es un Álgebra de Boole

2.3 Si $(A, \vee, \wedge, *, 0, 1)$ es un Álgebra de Boole. $\forall a, b, c \in A$ Se cumple:

1. Si $a \vee x = 1$ y $a \wedge x = 0$, entonces $x = a^*$

$a \vee x = 1 = a \vee a^* \Rightarrow a \vee x = a \vee a^*$ (propiedad cancelativa) $\Rightarrow x = a^*$

$a \wedge x = 0 = a \wedge a^* \Rightarrow a \wedge x = a \wedge a^* \Rightarrow x = a^*$.

2. $0^* = 1$ y $1^* = 0$

$1 \wedge 0 = 0$ y $1 \vee 0 = 1$

3. $(a^*)^* = a$

$$\left.\begin{array}{l} a^* \vee a = a \vee a^* = 1 \\ a^* \wedge a = a \wedge a^* = 0 \end{array}\right\} \overset{2.3.1}{\Rightarrow} a = (a^*)^*$$

4. $a^* = b^*$ entonces $a = b$

$(a^*)^* = (b^*)^* \Leftrightarrow a = b$

5. Leyes de De Morgan $(a \wedge b)^* = a^* \vee b^*$, $(a \vee b)^* = a^* \wedge b^*$

~~$(a \vee b) \vee (a \vee b)^* = 1$~~

2.4 Si $(A, \wedge, \vee, {}^*, 0, 1)$ es un Álgebra de Boole. $\forall a, b, c \in A$ se cumple:

1. $0 \leq a \leq 1$

Por la relación de orden $a \leq b \Leftrightarrow a \vee b = b$

$0 \vee 1 = 1 \quad 0 \leq 1 \quad , \quad 0 \vee a = a \quad 0 \leq a$

$a \vee 1 = 1 \Rightarrow a \leq 1 \Rightarrow \boxed{0 \leq a \leq 1}$

2 Isotonía. Si $a \leq b$, entonces $a \vee c \leq b \vee c$ y $a \wedge c \leq b \wedge c$

$a \leq b \Leftrightarrow a \vee b = b \Leftrightarrow a \wedge b = a$

$(a \vee c) \vee (b \vee c) = a \vee c \vee b \vee c = a \vee b \vee c = b \vee c \Rightarrow a \vee c \leq b \vee c$

$(a \wedge c) \wedge (b \wedge c) = a \wedge b \wedge c = a \wedge c \Rightarrow a \wedge c \leq b \wedge c$

3. $a \leq b \Leftrightarrow b^* \leq a^*$

$a \leq b \Leftrightarrow a \wedge b = a \Leftrightarrow (a \wedge b)^* = a^* \Leftrightarrow a^* \vee b^* = a^* \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow b^* \vee a^* = a^* \Leftrightarrow b^* \leq a^*$

$b^* \leq a^* \Rightarrow b^* \vee a^* = a^* \Rightarrow (b \wedge a)^* = a^* \Rightarrow b \wedge a = a \Rightarrow$

$\Rightarrow a \wedge b = a \Rightarrow a \leq b$

4. $a \wedge b \leq c \Leftrightarrow a \leq b^* \vee c$

$a \wedge b \leq c \Leftrightarrow (a \wedge b)^* \vee c = 1 \Leftrightarrow 0 = 1^* = ((a \wedge b)^* \vee c)^* =$

$= a \wedge (b \wedge c^*) = a \wedge (b^* \vee c)^* \Leftrightarrow a \leq b^* \vee c$

(2.6) Sea $D(70)$ el conjunto de los nº naturales que son divisores de 70 con las operaciones mcm, mcd, $x^* = 70/x$ y con $0 = 1$ y $1 = 70$

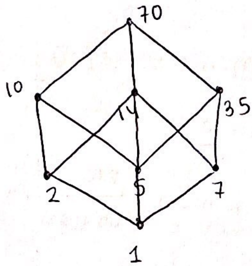
1. ¿Es un Álgebra de Boole? En caso afirmativo encuentra sus átomos y coátomos

$D(70) = \{1, 2, 5, 7, 10, 14, 35, 70\}$

Es un álgebra de Boole ya que $70 = 2 \cdot 5 \cdot 7 \Rightarrow$ es producto de primos distintos

$(D(70), \overset{\vee}{mcm}, \overset{\wedge}{mcd}, x^* = 70/x, \overset{0}{1''}, \overset{''1}{70})$. Sus átomos son 2, 5, 7 y coátomos 10, 14, 35

2. Represéntala gráficamente como conjunto ordenado



3. Calcula $35 \wedge (2 \vee 7)$ y $(2 \vee 7) \wedge (14 \wedge 10)$

- $35 \wedge (2 \vee 7) = (35 \wedge 2) \vee (35 \wedge 7) =$
$= mcm(mcd(35, 2), mcd(35, 7)) = mcm(1, 7) = \underline{7}$

- $(2 \vee 7) \wedge (14 \wedge 10) = [(14 \wedge 10) \wedge 2] \vee [(14 \wedge 10) \wedge 7] =$
$= [14 \wedge (10 \wedge 2)] \vee [14 \wedge (10 \wedge 7)] = mcm(mcd(14, mcd(10, 2)), mcd(14, mcd(10, 7)))$
$= mcm(mcd(14, 2), mcd(14, 1)) = mcm(2, 1) = \underline{2}$

(2.7) Justifica que D(210) es un álgebra de Boole y evalúa las siguientes expresiones:

$30 \vee (15 \wedge 10)$, $14^* \wedge 21$, $(6^* \vee 35)^* \vee 10$, $((3 \vee 10)^* \vee 2)^*$

Expresa 21 y 35 como supremo de átomos y ínfimo de coátomos.

$D(210) = \{1, 2, 3, 5, 6, 7, 10, 14, 15, 21, 30, 35, 42, 70, 105, 210\}$

$210 = 14 \cdot 15 = \underbrace{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}_{2^4 \text{ elementos}}$ ⟹ Es un Álgebra de Boole porque es producto de primos distintos

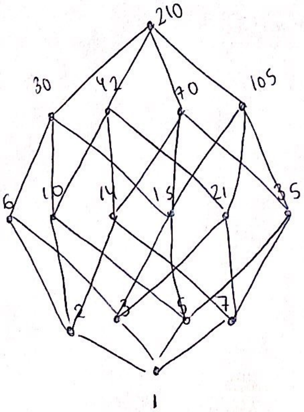
- $30 \vee (15 \wedge 10) = mcm(30, mcd(15, 10)) = mcm(30, 5) = \underline{30}$
- $14^* \wedge 21 = mcd\left(\frac{210}{14}, 21\right) = mcd(15, 21) = \underline{3}$
- $(6^* \vee 35)^* \vee 10 = mcm\left(\frac{210}{mcm(210/6, 35)}, 10\right) = mcm\left(\frac{210}{mcm(35,35)}, 10\right) =$

$= mcm\left(\frac{210}{35}, 10\right) = mcm(6, 10) = \underline{30}$

- $((3 \vee 10)^* \vee 2)^* = \frac{210}{mcm\left(\frac{210}{mcm(3,10)}, 2\right)} = \frac{210}{mcm(7, 2)} = \frac{210}{14} = \underline{15}$

$21 = \vee\{3, 7\} = 3 \vee 7$

$35 = \wedge\{70, 105\} = 70 \wedge 105$



2.8 Consideramos el álgebra de Boole de los divisores de 2310

1. Calcula los átomos y coátomos

$D(2310) = \{1, 2, 3, 5, 6, 7, 10, 11, 14, 15, 21, 22, 30, 33, 35, 42,$

$55, 66, 70, 77, 105, 110, 154, 165, 210, 231, 330, 385, 462, 770, 1155, 2310\}$

$2310 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$

Átomos $= 2, 3, 5, 7, 11$ (primos)

Coátomos $= 210, 330, 462, 770, 1155$ (productos de 4 primos)

2. Evalúa las expresiones:

- $21 \vee (165 \wedge 77^*) = mcm\left(21, mcd\left(165, \frac{2310}{77}\right)\right) = mcm(21, mcd(165, 30)) =$

$= mcm(21, 15) = \underline{105}$

- $770 \wedge (3 \vee 14)^* = mcd\left(770, \frac{2310}{mcm(3,14)}\right) = mcd\left(770, \frac{2310}{42}\right) =$

$= mcd(770, 55) = \underline{55}$

- $(15 \vee 110)^* = \frac{2310}{mcm(15,110)} = \frac{2310}{330} = \underline{7}$

- $15^* \wedge 110^* \overset{mcd}{=} \left(\frac{2310}{15}, \frac{2310}{110}\right) = mcd(154, 21) = 7$ (Evidente por Morgan)

- $385 \vee (1155 \wedge 42) = mcm(385, mcd(1155, 42)) = mcm(385, 21) = \underline{1155}$

- $(385 \vee 1155) \wedge (385 \vee 42) = mcd(mcm(385, 1155), mcm(385, 42)) =$

$= mcd(2310, 2310) = \underline{2310}$

Escaneado con CamScanner

3. Expresa 5, 35, 154, 231, 1155 como supremo y como ínfimo de coátomos

$5 = \vee\{5\} = \wedge\{210, 330, 770, 1155\}$

$35 = \vee\{5, 7\} = \wedge\{210, 770, 1155\}$

$154 = \vee\{2, 7, 11\} = \wedge\{462, 770\}$

$231 = \vee\{3, 7, 11\} = \wedge\{462, 1155\}$

$1155 = \vee\{3, 5, 7, 11\} = \wedge\{1155\}$

Escaneado con CamScanner

(2.9) 1. Sea B un álgebra de Boole con 32 elementos. ¿Cuántos átomos tiene?

2. Sea B un álgebra de Boole cuyos átomos son a_1, a_2, a_3 y a_4 ¿Cuáles son sus coátomos?

1.

$$\left.\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}\right\} \begin{array}{c} 2 \\ 4 \\ 8 \\ 16 \\ 32 \end{array} \Rightarrow \underline{\text{Tiene 5 átomos}}$$

2. Coátomos $= \{a_1^*, a_2^*, a_3^*, a_4^*\}$

(2.10) Determina un número natural n sabiendo que el conjunto $D(n)$ de los divisores positivos de n es un álgebra de Boole con las operaciones usuales, y que 105 y 42 son dos coátomos. Además, obten todos los $x \in D(n)$ tales que $105^* \vee x = 42$

$D(n)$ es un álgebra de Boole con 2^r elementos con $r \in \mathbb{N}$

105 y 42 coátomos $\Rightarrow \dfrac{n}{105}$ y $\dfrac{n}{42}$ son átomos

$mcm(105, 42) = 210 \Rightarrow n = 210$

$D(210) = \{1, 2, 3, 5, 6, 7, 10, 14, 15, 21, 30, 35, 42, 70, 105, 210\}$

$105^* \vee x = 42$

$mcm\left(\dfrac{210}{105}, x\right) = 42 \Leftrightarrow mcm(2, x) = 42$

Luego $x = \{21, 42\}$

(2.11) Obtén una expresión de la función booleana $f(x,y,z) = xy + z^*$ en la que sólo aparezcan las operaciones suma y complemento. A continuación obtén otra expresión de f en la que sólo aparezcan las operaciones producto y complemento $(x^* = \overline{x})$

$$f(x,y,z) = xy + \overline{z} \underset{(\overline{\overline{a}}=a)}{=} \overline{\overline{xy}} + \overline{z} \underset{\text{(De Morgan)}}{=} \boxed{\overline{\overline{x} + \overline{y}} + \overline{z}}$$

$$f(x,y,z) = xy + \overline{z} = \overline{\overline{xy + \overline{z}}} = \boxed{\overline{\overline{xy} \cdot z}}$$

(2.14) Expresa la función booleana del Ejercicio 2.11 en términos únicamente de la operación NAND. Haz lo mismo con la operación NOR

NAND (a NAND b = $a \uparrow b = (a \wedge b)^*$)

$$f(x,y,z) = xy + z^* = ((xy + z^*)^*)^* = \overline{\overline{xy} \cdot z} = (x \uparrow y) \uparrow z$$

NOR (a NOR b = $a \downarrow b = (a \vee b)^*$)

$$f(x,y,z) = xy + z^* = \overline{\overline{xy}} + \overline{z} = \overline{\overline{x} + \overline{y}} + \overline{z} = \overline{\overline{\overline{\overline{x} + \overline{y}} + \overline{z}}} =$$

$$= [(\overline{x} \downarrow \overline{y}) \downarrow \overline{z}] \downarrow [(\overline{x} \downarrow \overline{y}) \downarrow \overline{z}]$$