Sesión de prácticas

Material elaborado por Juan Urbano

Continuamos en esta sesión con los ejercicios de la relación del Tema 4.

En el Ejercicio 20 tenemos el conjunto de proposiciones lógicas

$$\Gamma = \Big\{(P \to Q) \to P,\ P \to \neg R,\ \neg(Q \wedge \neg R)\Big\},$$

y nos preguntan cuáles de las proposiciones dadas en cada apartado son consecuencia lógica de Γ.

Como sólo hay tres variables proposicionales, P, Q, R, podemos resolver el ejercicio construyendo tablas de verdad. Escribimos de forma conjunta las tablas de verdad de las proposiciones en Γ.

P	Q	R	$(P \to Q) \to P$	$P \to \neg R$	$\neg(Q \wedge \neg R)$
0	0	0	0	1	1
0	0	1	0	1	1
0	1	0	0	1	0
0	1	1	0	1	1
1	0	0	1	1	1
1	0	1	1	0	1
1	1	0	1	1	0
1	1	1	1	0	1

Observamos que únicamente hay una fila en la que las tres fórmulas del conjunto Γ valen simultáneamente 1. Ella corresponde a la interpretación I tal que

$$\mathrm{I}(P) = 1, \quad \mathrm{I}(Q) = 0, \quad \mathrm{I}(R) = 0.$$

Ahora calculamos:

1. $\mathrm{I}\Big((Q \to P) \to R\Big) = 0.$

2. $\mathrm{I}\Big(P \wedge \neg(Q \vee R)\Big) = 1.$

3. $\mathrm{I}\Big(P \to (Q \vee R)\Big) = 0.$

4. $\mathrm{I}\big(Q\big) = 0$.

Por tanto, de las proposiciones propuestas, sólo la proposición $P \wedge \neg(Q \vee R)$ es consecuencia lógica del conjunto Γ.

Otra forma de resolver el ejercicio consiste en aplicar, para cada apartado la técnica de demostración por refutación (Véase el Teorema 1 y el comentario que le sigue en las páginas 13 y 14 de los apuntes) para obtener un conjunto de fórmulas, transformarlas a forma clausulada, obtener un conjunto de cláusulas y aplicar el Algoritmo de Davis-Putnam. Veámoslo para el apartado (a).

Por el Teorema 1, sabemos que

$$\Gamma \models (Q \to P) \to R,$$

equivale a que el conjunto

$$\Gamma \cup \big\{\neg((Q \to P) \to R)\big\}$$

sea insatisfacible. Por tanto tenemos el conjunto de fórmulas

$$\Gamma' = \big\{(P \to Q) \to P,\ P \to \neg R,\ \neg(Q \wedge \neg R),\ \neg((Q \to P) \to R)\big\}.$$

Obtenemos una forma clausula para cada fórmula de Γ'. (Véase la Seccción 7 de los apuntes.)

- $(P \to Q) \to P \equiv \neg(\neg P \vee Q) \vee P \equiv (P \wedge \neg Q) \vee P \equiv (P \vee P) \wedge (P \vee \neg Q) \equiv P \wedge (P \vee \neg Q)$. La última fórmula obtenida está en forma clausulada, compuesta por dos cláusulas. No obstante vamos a aplicar otra equivalencia más, como es una Ley de absorción, para obtener la fórmula P equivalente a la anterior, que está también en forma clausulada (de hecho consta de una única cláusula), y es más sencilla (y por tanto preferible) a la que hemos obtenido antes.

- $P \to \neg R \equiv \neg P \vee \neg R$. La forma clausulada obtenida es $\neg P \vee \neg R$, que consta de una única cláusula.

- $\neg(Q \wedge \neg R) \equiv \neg Q \vee R$. La forma clausulada que resulta es $\neg Q \vee R$, que consta de una única cláusula.

- $\neg((Q \to P) \to R) \equiv \neg(\neg(\neg Q \vee P) \vee R) \equiv (\neg Q \vee P) \wedge \neg R$. Así la forma clausulada consta de dos cláusulas.

Seguidamente descomponemos cada forma clausula en cláusulas, y juntamos todas ellas en un conjunto que llamamos Δ. Así tenemos

$$\Delta = \Big\{P,\ \neg P \vee \neg R,\ \neg Q \vee R,\ \neg Q \vee P,\ \neg R\Big\}.$$

Por último le aplicamos el Algoritmo de Davis-Putnam a Δ.

Como en Δ hay cláusulas unitarias, podemos comenzar aplicando la regla 1 para cláusulas unitarias, concretamente con $\lambda = P$. (También podríamos haberlo hecho con $\lambda = \neg R$.) Por consiguiente descartamos aquellas cláusulas en Δ que contienen a $\lambda = P$; para aquellas que contienen al literal complementario $\lambda^c = \neg P$, sólo les suprimimos $\neg P$; por último, las que no contienen a λ ni a λ^c se conservan. De este modo obtenemos un conjunto de cláusulas más simple

$$\Delta_1 = \big\{\neg R,\ \neg Q \vee R\big\},$$

al cual le seguimos aplicando el mismo procedimiento. Vemos que en Δ_1 hay cláusulas unitarias, por lo que aplicamos nuevamente la regla 1 con $\lambda = \neg R$, tras lo cual obtenemos el conjunto

$$\Delta_2 = \big\{\neg Q\big\},$$

el cual evidentemente es satisfacible. Cualquier interpretación I tal que $\mathrm{I}(Q) = 0$ satisface a Δ_2. Por consiguiente Δ_1 es satisfacible, y así Δ es satisfacible. Lo que nos interesa a nosotros es que la satisfacibilidad de Δ significa que la fórmula propuesta $(Q \to P) \to R$ no es consecuencia lógica del conjunto de proposiciones lógicas Γ. Según las definiciones dadas, ésto significa que existen interpretaciones I tales que $\mathrm{I}(\Gamma) = 1$, pero $\mathrm{I}((Q \to P) \to R) = 0$. ¿Cómo encontramos una interpretación que verifique éso? Pues simplemente considerando los literales que hemos tenido en cuenta al aplicar el algoritmo así como la información que obtenemos al final $\mathrm{I}(Q) = 0$. Éstos han sido $\lambda = P$ y $\lambda = \neg R$. Pues si consideramos la interpretación I tal que $\mathrm{I}(P) = 1$, $\mathrm{I}(R) = 0$ e $\mathrm{I}(Q) = 0$, vemos que

$$\mathrm{I}((P \to Q) \to P) = 1,\ \mathrm{I}(P \to \neg R) = 1,\ \mathrm{I}(\neg(Q \wedge \neg R)) = 1,$$

pero

$$\mathrm{I}((Q \to P) \to R) = 0.$$

Los otros apartados se constatan aplicando la misma técnica, y ello queda propuesto al alumno.

En el Ejercicio 21 se pregunta por la relación lógica que existe entre las dos fórmulas dadas. Lo que nos están preguntando es si alguna de ellas implica semánticamente a la otra, es decir, si $\alpha \models \beta$ y si $\beta \models \alpha$. De nuevo tenemos varios enfoques a nuestra disposición para resolver el ejercicio. Vamos a estudiar si $\beta \models \alpha$. Un camino sería aplicar la misma técnica que hemos usado en el ejercicio anterior, lo que nos llevaría a estudiar si el conjunto de fórmulas

$$\{\beta,\ \neg\alpha\} = \big\{(P \to Q) \to (\neg R \wedge \neg S \to \neg P),\ \neg(P \to (Q \to R \vee S))\big\}$$

es satisfacible ó insatisfacible. Aquí seguimos un camino diferente. Nos basamos en el Teorema de la deducción según el cual la afirmación $\beta \models \alpha$, es decir,

$$(P \to Q) \to (\neg R \wedge \neg S \to \neg P) \models P \to (Q \to R \vee S)$$

equivale a

$$(P \to Q) \to (\neg R \wedge \neg S \to \neg P),\ P \models (Q \to R \vee S).$$

De nuevo, por el citado teorema, lo anterior equivale a

$$(P \to Q) \to (\neg R \wedge \neg S \to \neg P),\ P,\ Q \models R \vee S.$$

Llegados a este punto, podemos usar de nuevo la técnica de demostración por refutación, como hemos visto en un ejercicio previo. Nosotros vamos a seguir otro método que en este ejercicio es factible. Sencillamente usamos la definición de implicación semántica. Supongamos que I es una interpretación tal que

$$\mathrm{I}\big(\big\{(P \to Q) \to (\neg R \wedge \neg S \to \neg P),\ P,\ Q\big\}\big) = 1.$$

Queremos ver si ello implica que $\mathrm{I}(R \vee S) = 1$. Como $\mathrm{I}(P) = 1$ e $\mathrm{I}(Q) = 1$, entonces evidentemente $\mathrm{I}(P \to Q) = 1$. Como además sabemos que

$$\mathrm{I}((P \to Q) \to (\neg R \wedge \neg S \to \neg P)) = 1,$$

entonces por Modus ponens (Véase el ejercicio 19) deducimos que

$$\mathrm{I}(\neg R \wedge \neg S \to \neg P) = 1.$$

Por la Ley de contrarecíproco (Véase la Proposición 6 de los apuntes en la página 12) sabemos que

$$\neg R \wedge \neg S \to \neg P \equiv P \to R \vee S.$$

De ésto obtenemos que

$$\mathrm{I}(P \to R \vee S) = 1.$$

(Aquí hemos usado que si $\alpha_1 \equiv \alpha_2$ e I es una interpretación tal que $\mathrm{I}(\alpha_1) = 1$, entonces $\mathrm{I}(\alpha_2) = 1$.) Por último, como estamos suponiendo que $\mathrm{I}(P) = 1$, de nuevo por Modus ponens, finalmente llegamos a que $\mathrm{I}(R \vee S) = 1$. Por consiguiente hemos probado que

$$(P \to Q) \to (\neg R \wedge \neg S \to \neg P),\ P,\ Q \models R \vee S,$$

lo que equivale a que $\beta \models \alpha$, es decir, α es consecuencia lógica de β.

Queda propuesto al alumno estudiar si $\alpha \models \beta$. Quizá ahora sea mejor usar la técnica de demostración por refutación y el Algoritmo de Davis-Putnam.

El Ejercicio 22 es parecido al Ejercicio 20 ya visto, aunque ahora además hemos de representar previamente los enunciados dados mediante proposiciones lógicas.

Los Ejercicios 24 y 25 se pueden resolver usando el Teorema de la deducción.

En el ejercicio 27 se plantean varias cuestiones algunas de las cuales ya hemos visto cómo se pueden resolver. Los apartados (a) y (c) se resuelven aplicando técnicas parecidas a las que hemos usado en ejercicios previos. En el apartado (b) se pregunta si cierta fórmula α es tautología. Ello equivale a que α sea consecuencia lógica del conjunto vacío, es decir, si $\models \alpha$, lo cual por la técnica de demostración por refutación, equivale a que el conjunto $\{\neg\alpha\}$ sea insatisfacible. Por tanto un método de solución comienza calculando una forma clausulada para la fórmula $\neg\alpha$, a continuación obteniendo el conjunto de las cláusulas que la forman, y por último aplicando el Algoritmo de Davis-Putnam. Los detalles quedan propuestos al alumno.

Nos ocupamos ahora del Ejercicio 31 que afirma lo siguiente. Sobre cuatro cinéfilos A, B, C y D se sabe lo siguiente. Si A decide ir al cine, B también irá. Sobre C y D se sabe que no les gusta ver una misma película juntos. B y C, o van al cine juntos, o no va ninguno de los dos. Por último, si A no va al cine, entonces B y D sí quieren ir. ¿Quienes estarán en el cine esta noche?

Se trata de resolver el ejercicio aplicando las técnicas estudiadas en este tema. Para ello en primer lugar tenemos que representar la información dada mediante proposiciones lógicas. Denotamos mediante las letras anteriores la proposición que afirma que tal persona quiere ir al cine. Así la información dada en el enunciado se puede representar como sigue:

- Si A decide ir al cine, B también irá: $A \to B$.
- Sobre C y D se sabe que no les gusta ver una misma película juntos: $\neg(C \wedge D)$.
  Si en vez de esta fórmula, escribimos $(\neg C) \leftrightarrow D$, estaríamos representando la información dada en el enunciado, así como el hecho de que siempre uno de los dos (y sólo uno) habría de estar presente. Con la fórmula $\neg(C \wedge D)$ se acepta la posibilidad de que ni C ni D asistan al cine.
- B y C, o van al cine juntos o no va ninguno de los dos: $B \leftrightarrow C$.
- Si A no va al cine, entonces B y D sí quieren ir: $(\neg A) \to (B \wedge D)$.

Por tanto, lo que nos están preguntando es: ¿cuáles de las proposiciones lógicas A, B, C, D son consecuencia lógica del conjunto

$$\Omega = \Big\{A \to B,\ \neg(C \wedge D),\ B \leftrightarrow C,\ (\neg A) \to (B \wedge D)\Big\}?$$

Para responder a esta pregunta, planteamos el sistema siguiente en $\mathbb{Z}_2$:

$$\begin{cases} \mathrm{I}(A \to B) = 1 \\ \mathrm{I}(\neg(C \wedge D)) = 1 \\ \mathrm{I}(B \leftrightarrow C) = 1 \\ \mathrm{I}((\neg A) \to (B \wedge D)) = 1 \end{cases}$$

Para simplificar la notación, escribimos a, b, c y d, en vez de $\mathrm{I}(A)$, $\mathrm{I}(B)$, $\mathrm{I}(C)$ y $\mathrm{I}(D)$, respectivamente.

El sistema queda de la forma siguiente:

$$\begin{cases} 1 \oplus a \oplus ab = 1 \\ 1 \oplus cd = 1 \\ 1 \oplus b \oplus c = 1 \\ 1 \oplus (1 \oplus a) \oplus (1 \oplus a)bd = 1 \end{cases}$$

es decir,

$$\begin{cases} a(1 \oplus b) = 0 \\ cd = 0 \\ b \oplus c = 0 \\ a \oplus bd \oplus abd = 1 \end{cases}$$

Nótese que la ecuación $b \oplus c = 0$ es equivalente a la ecuación $b = c$.

Lo resolvemos a continuación. Si $b = 0$, entonces $a = 0$ (por la primera ecuación) y $c = 0$ (por la tercera ecuación). Sin embargo, la cuarta ecuación quedaría como $0 = 1$, lo cual es absurdo. Por tanto necesariamente ha de ser $b = 1$ y así $c = 1$. Por la segunda ecuación obtenemos $d = 0$. Entonces la cuarta nos dice que $a = 1$. Así la única solución del sistema es $(a, b, c, d) = (1, 1, 1, 0)$, lo cual significa que estarán todos en el cine excepto D.

Otro camino posible para resolver el ejercicio, sería estudiar si

$$\Omega \models A,\ \Omega \models B,\ \Omega \models C,\ \Omega \models D.$$

Por último nos ocupamos de otro tipo de problemas, como son los presentados en los Ejercicios 32 y 36. En ambos nos describen un mundo en el que hay dos tipos de personas, los veraces, que siempre dicen la verdad, y los mendaces, que siempre mienten. Si a un mendaz se le pregunta por algo que él sabe que es verdad, responde diciendo que es mentira, y si él sabe que es mentira, responde diciendo que es verdad.

Veamos el apartado (a) del Ejercicio 32. Un turista llama a la puerta de una casa en la que sabe a ciencia cierta que vive un matrimonio, y el marido abre la puerta para ver quién es. El turista dice: “Necesito información sobre usted y su esposa. ¿Cual de ustedes, si alguno lo es, es veraz y cual es mendaz?”, a lo que el hombre responde: “Ambos somos mentirosos”.

Para resolver este ejercicio, hay que tener presente siempre que la condición de un individuo, es decir, el hecho de que sea veraz o mendaz, es equivalente a aquello que afirma. Es decir, una persona es veraz (respectivamente mendaz) si, y sólo si, cualquier cosa que afirma es verdad (respectivamente falsa).

Lo primero que se hace es representar la información dada en el enunciado mediante proposiciones lógicas. Para ello definimos las proposiciones atómicas siguientes: A representa “el marido es veraz” y B “la esposa es veraz”. De la información “ambos somos mentirosos” emitida por el marido, obtenemos $\mathrm{I}(A \leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)) = 1$ para cualquier interpretación I. Escribimos $\mathrm{I}(A) = a$ y $\mathrm{I}(B) = b$ para aligerar la escritura.

Obtenemos la ecuación

$$1 \oplus a \oplus (1 \oplus a)(1 \oplus b) = 1$$

en el cuerpo $\mathbb{Z}_2$, es decir,

$$a = (1 \oplus a)(1 \oplus b).$$

Si $a = 1$, llegamos a $1 = 0$. Por tanto $a = 0$. Entonces $b \oplus 1 = 0$, es decir, $b = 1$. Por tanto la solución al problema es que A es mendaz y B es veraz.

Como un comentario final, podríamos haber llegado a la misma conclusión directamente. A partir de la respuesta del marido está claro que él es un mendaz, pues un veraz nunca afirmaría que él es mentiroso. En tal caso, su esposa ha de ser veraz, pues de lo contrario, la afirmación proporcionada por el marido sería cierta, lo que no es propio de un mendaz.

Los apartados (b) y (c) en el Ejercicio 32 se resuelven similarmente.

En el Ejercicio 36 tenemos que usar las variables proposicionales para personas A, B, C similares a las usadas en el Ejercicio 32, así como otra variable D que indica que ayer llovió en la isla. Se plantea un sistema de tres ecuaciones con cuatro incógnitas en el cuerpo en $\mathbb{Z}_2$ que se resuelve de modo similar a lo que hemos visto en el ejercicio anterior. (Nótese que aunque la aritmética se hace en el cuerpo $\mathbb{Z}_2$, normalmente las ecuaciones que resultan no son lineales por lo que no podemos aplicar las técnicas para sistemas de ecuaciones lineales.)