Examen-190612sol.pdf

Anónimo

Lógica y Métodos Discretos

1º Grado en Ingeniería Informática

Escuela Técnica Superior de Ingenierías Informática y de Telecomunicación
Universidad de Granada

CELEBRACIÓN:
¡FIN DE CURSO!

2x1
UNIVERSITARIOS Y ESTUDIANTES
+18

FOSTER'S HOLLYWOOD

INFO AQUÍ

Lógica y métodos discretos.
12/6/2019

Solucionario

1. **(1 pt)** Dada la ecuación en recurrencia $x_n = 4 - x_{n-2}$ para $n \geq 2$:

   (a) Encuentra el polinomio característico y la solución general de una ecuación homógenea asociada.

   (b) Encuentra la solución particular que verifica $a_0 = 2$ y $a_1 = 2$ y calcula a_{231}

Solución:

(a) $(x^2+1)(x-1)$,
$g_n = Ai^n + B(-i)^n + C$.

(b) Si $a_0 = 2$ y $a_1 = 2$, resulta $a_2 = 2$.
$2 = A + B + C$
$2 = Ai - Bi + C$
$2 = -A - B + C$
Resolviendo primera y tercera resulta $C = 2$ y $A = -B$. Introduciendo en la segunda tenemos $B = 0$ y $A = 0$, luego $p_n = 2$, de donde $a_{231} = 2$.

□

2. **(1 pt)** Dada la función booleana elemental $f_{189} : \mathbb{B}^3 \longrightarrow \mathbb{B}$. Halla:

   (a) sus implicantes primos y su forma disyuntiva reducida usando FCC,

   (b) mediante el algoritmo de Petrick sus formas disyuntivas no simplificables.

Solución:

(a) Escribimos en binario $189 = 10111101$. Forma canónica reducida $f_{189} = M_1 M_6 = (x+y+z^*)(x^*+y^*+z) = xy^* + xz + x^*y + yz + x^*z^* + y^*z^*$.
los implicantes primos son los sumandos de la forma reducida.

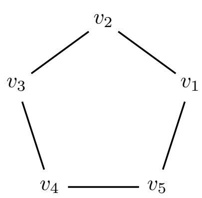
(b) La cuadrícula de McCluskey sería:

		m_0	m_2	m_3	m_4	m_5	m_7
A	xy^*				$\times$	$\times$	
B	xz					$\times$	$\times$
C	x^*y		$\times$	$\times$			
D	yz			$\times$			$\times$
E	x^*z^*	$\times$	$\times$				
F	y^*z^*	$\times$			$\times$		

Aplicando Petrick:
$(E+F)(C+E)(C+D)(A+F)(A+B)(B+D) = (E+CF)(D+BC)(A+BF) = ABCE + ACDF + ADE + BCF + BDEF$.
Que nos da la frase que nos permite construir las formas nos simplificables:
$f_{189} = xy^* + xz + x^*y + x^*z^* = xy^* + x^*y + yz + y^*z^* = xy^* + yz + x^*z^* = xz + x^*y + y^*z^* = xz + yz + x^*z^* + y^*z^*$.

□

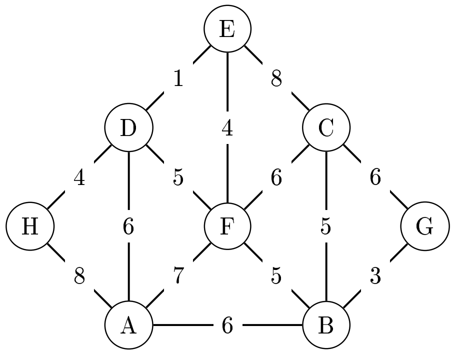
3. **(1 pt)** Dado el grafo G



calcula su polinomio cromático $p_G(x)$ y su número cromático. ¿De cuantas formas se puede pintar G con 6 colores?

Solución: $p(C_5,x) = p(P_5,x) - p(C_4,x) = p(P_5,x) - (p(P_4,x) - p(K_3,x)) = p(P_5,x) - p(P_4,x) + p(K_3,x) =$
$= x(x-1)^4 - x(x-1)^3 + x(x-1)(x-2)$
$\chi_{C_5} = 3$ y $p(C_5,6) = 3120$. □

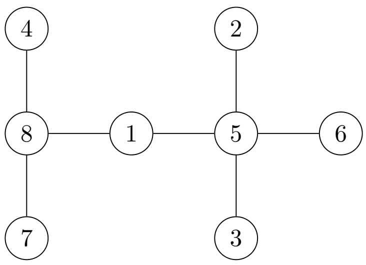
4. **(1 pt)** Dado el grafo ponderado:



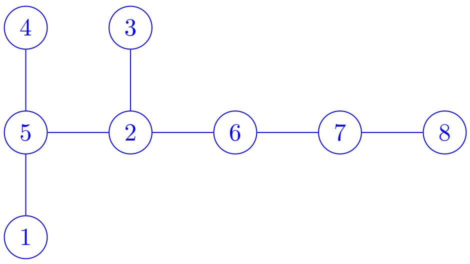
Halla utilizando el algoritmo de Prim un árbol generador (abarcador) de peso mínimo y halla su peso. Indica el orden de las elecciones.

Solución: Partimos de E, sucesión de aristas: ED, DH, EF, FB, BG, BC, BA. Peso 28 □

5. **(1 pt)** Representa el árbol etiquetado con código de Prüfer (5,2,5,2,6,7) y determina el código de Prüfer del árbol

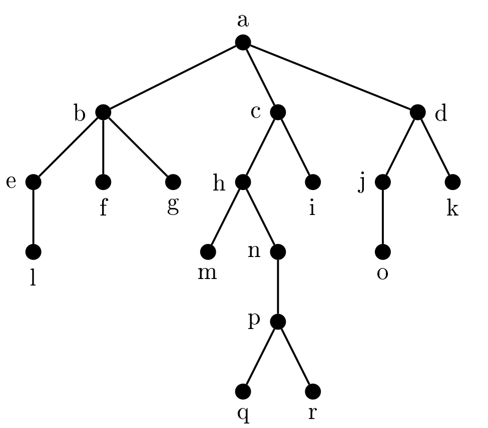


Solución: 5—1, 2—3, 5—4, 2—5, 6—2, 7—6 y 7—8.



$(5, 5, 8, 5, 1, 8)$ □

6. **(1 pt)** Dado el grafo



Escribe la sucesión de sus nodos al recorrerlo en bottom-up order.

Solución: $f, g, i, k, l, m, o, q, r, e, j, p, b, d, n, h, c, a$ □

7. **(1 pt)** Una vez visité la isla de Tururulandia, del planeta Logos porque había oido que en ella las ranas volaban. En el mencionado planeta la población se divide en dos grupos bien distintos: los veraces y los mendaces. Los veraces siempre dicen la verdad, mientras que un mendaz sólo es capaz de decir mentiras. En mi afán de averiguar la verdad sobre las ranas me encontré con tres nativos A, B y C y les pregunté "¿Vuelan las ranas en Tururulandia?". Los nativos respondieron:

   - A: "Las ranas vuelan si, y sólo si, yo soy veraz"
   - B: "Las ranas no vuelan"
   - C: "Las ranas vuelan y A es veraz"

   Dí que puedes concluir sobre las ranas y cada uno de los nativos usando polinomios de Gegalkine.

   Solución:
   $a = r \longleftrightarrow a = 1 + r + a$
   $b = \neg r = 1 + r$
   $c = r \wedge a = ra$
   Por tanto $r = 1$, $b = 0$ y $c = a$. Las ranas vuelan, B es mendaz y A y C son lo mismo (veraces o mendaces). □

8. **(1 pt)** Estudia utilizando el algoritmo de Davis-Putnam si la afirmación:

$$a \to (b \to c),\ c \to d,\ b \to d \vDash a \wedge \neg d$$

   es verdadera o falsa. En caso de ser falsa encuentra un mundo en que las hipótesis sean verdaderas y la conclusión falsa.

   Solución:

$$\{a \to (b \to c),\ c \to d,\ b \to d, \neg(a \wedge \neg d)\}$$
Paso a cláusulas
$$\{\neg a \vee \neg b \vee c,\ \neg c \vee d,\ \neg b \vee d,\ \neg a \vee d\}$$
DP regla 2 $d = 1$
$$\{\neg a \vee \neg b \vee c\}$$
DP regla 2 $c = 1$
$$\{\ \}$$

   Conjunto vacío es satisfacible la consecuencia lógica es falsa y queda falseada en cualquier mundo que cumpla c=1 y d=1. □

9. **(1 pt)** Halla una forma prenexa, de Skolem y clausulada de la sentencias, con el menor número de cuantificadores posibles:

   (a) $\exists x P(x) \vee (\forall y Q(y) \to (\forall z P(z) \to \exists x Q(x)))$
   (b) $\forall y(\exists x P(x) \to \exists x(Q(x) \to \neg R(x, y)))$

   Solución:

   (a) $\exists x P(x) \vee (\forall y Q(y) \to (\forall z P(z) \to \exists x Q(x)))$
   Renombro la z a x y uso regla 15
   $\exists x P(x) \vee (\forall y Q(y) \to \exists x(P(x) \to Q(x)))$
   Renombro la y a x y uso regla 15
   $\exists x P(x) \vee \exists x(Q(x) \to (P(x) \to Q(x)))$
   Utilizo la regla 17
   $\exists x(P(x) \vee (Q(x) \to (P(x) \to Q(x))))$
   Skolem
   $P(a) \vee (Q(a) \to (P(a) \to Q(a)))$
   Forma clausulada
   $P(a) \vee \neg Q(a) \vee \neg P(a) \vee Q(a)$
   que no es una clásula sino una tautología. Por tanto la sentencia es una tautología las únicas que no tienen forma clausulada.

(b) $\forall y(\exists x P(x) \to \exists x(Q(x) \to \neg R(x,y)))$
Saco el cuantificador del consecuente
$\forall y \exists x(\exists x P(x) \to (Q(x) \to \neg R(x,y)))$
Renombro la x ligada en el antecedente para que no capture en el consecuente
$\forall y \exists x(\exists z P(z) \to (Q(x) \to \neg R(x,y)))$
Saco el cuantificador renombrado
$\forall y \exists x \forall z(P(z) \to (Q(x) \to \neg R(x,y)))$
Skolem
$\forall y \forall z(P(z) \to (Q(f(y)) \to \neg R(f(y),y)))$
Forma clausulada
$\forall y \forall z(\neg P(z) \vee \neg Q(f(y)) \vee \neg R(f(y),y))$

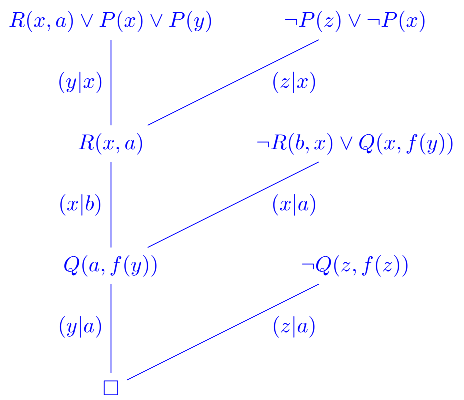
$\square$

10. **(1 pt)** Estudia la satifacibilidad de:

$$\Gamma = \{R(x,a) \vee P(x) \vee P(y), \neg R(b,x) \vee Q(x,f(y)), \neg P(z) \vee \neg P(x), \neg Q(z,f(z))\}$$

donde como es usual x, y, z son símbolos de variable y a, b son símbolos de constante.

Solución:



El conjunto es insatisfacible. $\square$