EL LIBRO DE SALAS

estheergarciaa

Lógica y Métodos Discretos

1º Grado en Ingeniería Informática

Escuela Técnica Superior de Ingenierías Informática y de Telecomunicación
Universidad de Granada

CELEBRACIÓN:
¡FIN DE CURSO!

2x1
UNIVERSITARIOS Y ESTUDIANTES
+18

FOSTER'S HOLLYWOOD

INFO AQUÍ

1 Recurrencias

1.1 HOMOGÉNEAS

Una recurrencia lineal homogénea es del tipo:

$$c_n a_n + c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k} = 0$$

a. Hallar el orden del polinomio característico

Tomamos a_n y le restamos su último sucesor, es decir, a_{n-k}.

ejemplos

el polinomio caract. deberá ser de orden

$a_n + a_{n-1} - 6a_{n-2} \longrightarrow$ orden del polinomio característico: $n-(n-2) = \cancel{n}-\cancel{n}+2 = 2$

$a_n - 5a_{n-1} \longrightarrow$ orden del pol. característico: $n-(n-1) = 1$

b. Hallar el polinomio característico

Para hallar el polinomio característico primero debemos construir el polinomio general de orden k, es decir, que si $k=2$ el polinomio sería $ax^2+bx+c=0$ y si $k=4$, entonces sería $ax^4+bx^3+cx^2+d=0$.

Luego deberemos igualar $\{a, b, \dots\}$ con $\{c_1, c_2, \dots\}$, respectivamente.

ejemplos

$1a_n + 1a_{n-1} - 6a_{n-2} \longrightarrow$ polinomio característico: $1x^2 + 1x + (-6) \rightsquigarrow x^2+x-6$

$1a_n - 5a_{n-1} \longrightarrow$ pol. característico: $1x + (-5) \rightsquigarrow x-5$

c. Hallar las raíces del polinomio

Convertimos el polinomio a ecuación al igualarlo a cero y resolvemos.

ejemplos

- $x^2+x-6=0$ → $x=2$, $x=-3$
- $x-5=0 \longrightarrow x=5$

Aunque nos salgan raíces simples (ambas son números distintos) o raíces complejas (tienen números complejos), la estructura de la solución será la misma:

$$S_n = A(\underbrace{r_1}_{\text{raíz } 1})^n + B(\underbrace{r_2}_{\text{raíz } 2})^n$$

Solución general de la recurrencia

No obstante, si hay raíces dobles (ambas son el mismo número), la fórmula variará un poco:

$$S_n = (An + B) \cdot (r)^n$$

polinomio de un grado menor a la multiplicidad

cualquiera de las raíces, porque son la misma

Multiplicidad: número de veces que aparece una raíz

d. Solución particular

Como paso extra, nos pueden pedir que resolvamos la recurrencia teniendo en cuenta los parámetros iniciales $S_n = x$ y $S_m = y$

Para hallar la solución particular deberemos resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$S_n \Rightarrow \quad x = A(\underbrace{r_1}_{\text{raíz } 1})^n + B(\underbrace{r_2}_{\text{raíz } 2})^n$$

$$S_m \Rightarrow \quad y = A(r_1)^m + B(r_2)^m$$

Nota: si las raíces son dobles el sistema de ecuaciones se hace con la otra fórmula

De aquí deberemos obtener los valores de A y B que posteriormente sustituiremos en la fórmula de la solución general.

ejemplos

- $x^2 + x - 6 = 0$

  Raíces: $x = 2 \quad x = -3$

  $S_n = A(2)^n + B(-3)^n$

→ Hallar la solución particular si $a_0 = 1$ y $a_1 = 2$.

$S_0 \Rightarrow 1 = A(2)^0 + B(-3)^0 = A + B$

$S_1 \Rightarrow 2 = A(2)^1 + B(-3)^1 = 2A - 3B$

$$\left.\begin{array}{l} A + B = 1 \\ 2A - 3B = 2 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} A = 1 - B \\ 2(1-B) - 3B = 2 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} 2 - 2B - 3B = 2 \\ -5B = 0 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} A = 1 \\ B = 0 \end{array}$$

Sol. particular: $1 \cdot (2)^n + 0 \cdot (-3)^n$

Sol. particular: 2^n

- $x - 5 = 0$

  Raíz: $x = 5$

  $S_n = A(5)^n$

→ Hallar la solución particular si $a_0 = 1$

$S_0 \Rightarrow 1 = A(5)^0 \longrightarrow A = 1$

Sol. particular: 5^n

1.2 NO HOMOGÉNEAS

Una recurrencia lineal no homogénea es del tipo:

$$c_n a_n + c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k} = p(n) b^n$$

Para resolver una recurrencia no homogénea debemos encontrar una recurrencia que sí sea homogénea y además, de un grado superior. De esta forma tendremos más soluciones que las buscadas.

a. Hallar el orden del polinomio característico

Es igual que en las recurrencias homogéneas, tomamos a_n y le restamos su último sucesor, es decir, a_{n-k}.

ejemplos

- $h_n - 2h_{n-1} \longrightarrow$ orden del polinomio : $n-(n-1) = 1$
- $r_n - r_{n-1} \longrightarrow$ orden del polinomio : $n-(n-1) = 1$

b. Hallar $p(n)b^n$

Ahora debemos reconocer quién es $p(n)$ y quién b^n. Debemos tener en cuenta que:

$p(n)$ es un polinomio cuya incógnita es n
b^n es un número elevado a n

ejemplos

- $h_n = 2h_{n-1} + 1 \longrightarrow \underbrace{h_n - 2h_{n-1}}_{\text{recurrencia}} = \underbrace{1}_{p(n)b^n}$

  si $p(n)b^n = 1$ entonces:

  $p(n) = 1$

  $b = 1$

- $r_n = r_{n-1} + n \longrightarrow \underbrace{r_n - r_{n-1}}_{\text{recurrencia}} = \underbrace{n}_{p(n)b^n}$

  si $p(n)b^n = n$ entonces:

  $p(n) = n$

  $b = 1$

c. Hallar la ecuación característica

La ecuación característica de las recurrencias tiene por estructura general

$$[c_n x^{k} + c_{n-1} x^{k-1} + \cdots + c_{n-k}] \cdot (x-b)^{gr(p)+1} = 0$$

orden de la recurrencia

grado del polinomio $p(n)$

coeficientes de la recurrencia

ejemplos

- $1h_n - 2h_{n-1}$

LO QUE SABEMOS
$\begin{cases} p(n) = 1 \\ gr(p) = 0 \\ b = 1 \\ k = 1 \text{ (orden)} \end{cases}$

Como el orden de la recurrencia es 1, la primera parte del pol. caract. tendrá la forma $x + a$

Polinomio característico: $(1x - 2)\cdot(x-1)^{0+1}$

- $1r_n - 1r_{n-1}$

LO QUE SABEMOS
$\begin{cases} p(n) = n \\ gr(p) = 1 \\ b = 1 \\ k = 1 \text{ (orden)} \end{cases}$

Polinomio característico:

$(1x - 1)\cdot(x-1)^{1+1}$

d Hallar la solución generalísima

Para hallar la solución generalísima debemos hallar primero las raíces del polinomio que acabamos de calcular y, posteriormente, aplicaremos la misma fórmula que en las recurrencias homogéneas:

$$S_n = A\underbrace{(r_1)^n}_{\text{raíz 1}} + B\underbrace{(r_2)^n}_{\text{raíz 2}}$$

NOTA: Esta fórmula se extiende tanto como raíces tenga el polinomio en cuestión.

ejemplos

- $h_n - 2h_{n-1} \longrightarrow (x-2)\cdot(x-1)$ POLINOMIO CARACTERÍSTICO

Raíces $\begin{cases} x = 2 \\ x = 1 \end{cases}$

Sol. generalísima: $A\cdot(2)^n + B(1)^n$

Sol. generalísima: $A\cdot 2^n + B$

- $r_n - r_{n-1} \longrightarrow (x-1)\cdot(x-1)^2$ POLINOMIO CARACTERÍSTICO

Raíces $\begin{cases} x = 1 \\ x = 1 \end{cases}$ Tienen multiplic. 3

Sol. generalísima: $(An^2 + Bn + C)\,(1)^n$

Sol. generalísima: $An^2 + Bn + C$

e. Hallar la solución general

Para hallar la solución general debemos realizar un sistema de ecuaciones con una nueva sucesión a la que llamaremos a_n. Primeramente "hallaremos" varios términos de la sucesión mediante la recurrencia que estamos resolviendo, siempre partiendo del supuesto de que el primer elemento de la sucesión es "a".

ejemplo

- $h_n = 2h_{n-1} + 1$ $\quad \forall n \geq 1$ $\qquad$ Sol. generalísima: $A\cdot 2^n + B$

Suponemos $a_1 = a$ luego $a_2 = 2a_0 + 1 = 2a+1$

$$\left.\begin{array}{l} a_1 \Rightarrow a = A\cdot 2^1 + B \\ a_2 \Rightarrow 2a+1 = A\cdot 2^2 + B \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} A = \frac{a+1}{2} \\ B = -1 \end{array}\right\}$$

Sol. general: $a_n = \frac{a+1}{2}\cdot 2^n - 1$

ejemplo

- $r_n = r_{n-1} + n \quad \forall n \geq 0$ sol. generalísima: $An^2 + Bn + C$

Suponemos $a_0 = a$, luego $a_1 = a_0 + 1 = a+1$
$a_2 = a_1 + 2 = a+3$

$a_0 \Rightarrow a = C$
$a_1 \Rightarrow a+1 = A+B+C$
$a_2 \Rightarrow a+3 = 4A+2B+C$

$\left.\begin{array}{l} 1 = A+B \\ 3 = 4A+2B \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} A = 1/2 \\ B = 1/2 \end{array}\right\}$

Solución general
$a_n = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n + a$

f. Solución particular

En ocasiones, pueden pedirnos una solución particular de una recurrencia. Para ello, nos suelen facilitar el primer término de la recurrencia pedida. Tenemos dos formas de hallar la solución particular: o bien hacemos un sistema de ecuaciones (igual que al realizar la solución general) o bien sustituimos las "a" por el valor que nos han dado en la solución general.

ejemplos

- $h_n = 2h_{n-1} + 1 \quad \forall n \geq 1$

→ Hallar la recurrencia que cumple que $h_1 = 1$.

Sol. general $\rightsquigarrow a_n = \frac{a+1}{2} \cdot 2^n - 1$

Sol. particular $\rightsquigarrow h_n = \frac{1+1}{2} \cdot 2^n - 1$

Sol. particular $\rightsquigarrow 2^n - 1$

- $r_n = r_{n-1} + n \quad \forall n \geq 0$

→ Hallar la recurrencia que cumple que $r_0 = 1$.

Solución general $\rightsquigarrow a_n = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n + a$

Solución particular $\rightsquigarrow r_n = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n + 1$

2 Álgebra de Boole

Divisores

Justifica que D(210) es un álgebra de Boole y a continuación evalúa las siguientes expresiones:

$$30 \vee (15 \wedge 10), \quad 14^* \wedge 21, \quad (6^* \vee 35)^* \vee 10, \quad ((3 \vee 10)^* \vee 2)^*.$$

Expresa los elementos 21 y 35 como supremo de átomos y como ínfimo de coátomos.

números que siempre son divisores de «n»

$$\left(\underbrace{D(n)}_{\text{divisores de «n»}},\ \overset{\vee}{mcm},\ \overset{\wedge}{mcd},\ \underbrace{\frac{n}{\square}}_{\text{operación}},\ 1,\ n \right)$$

Para que sea un álgebra de Boole debe cumplir lo siguiente:

1) $a \vee b = b$ ⟶ $1 \vee 210 = mcm(1, 210) = 210$
2) $a \wedge b = a$ ⟶ $1 \wedge 210 = mcd(210, 1) = 1$
3) $a^* \vee b = 210$ ⟶ $1^* \vee 210 = mcm(210, 210) = 210$
4) $a \wedge b^* = 1$ ⟶ $1 \wedge 210^* = mcd(1, 1) = 1$

} Es un álgebra de Boole

$30 \vee (15 \wedge 10) = 30 \vee 5 = 30$

$14^* \wedge 21 = mcd(15, 21) = 3$

$(6^* \vee 35)^* \vee 10 = 6 \vee 10 = 30$

$((3 \vee 10)^* \vee 2)^* = (7 \vee 2)^* = 14^* = 15$

Sup. $\bigvee \{ a \in At(D(210)) \text{ tq } a \leq 21 \} = \bigvee \{1, 2, 3, 5, 6, 7, 10, 14, 15, 21\} = 21$

Inf. $\bigwedge \{ a \in At(D(210)) \text{ tq } a \geq 21 \} = \bigwedge \{21, 30, 35, 42, 70, 105, 210\} = 21$

Sup. $\bigvee \{ a \in At(D(210)) \text{ tq } a \leq 35 \} = \bigvee \{1, 2, 3, 5, 6, 7, 10, 14, 15, 21, 30, 35\} = 35$

Inf. $\bigwedge \{ a \in At(D(210)) \text{ tq } a \geq 35 \} = \bigwedge \{35, 42, 70, 105, 210\} = 35$

2.1. FORMAS (NORMALES) CANÓNICAS

La expresión de una función booleana como suma de minterms recibe el nombre de forma normal disyuntiva (FND). ⟶ = FCD

La expresión de una función booleana como producto de maxterms recibe el nombre de forma normal conjuntiva (FNC). ⟶ = FCC

- **Disyuntiva** : suma de minterms ⟶ AND / OR

Partimos de una expresión booleana de la función

1. Distribuir la negación (conseguir que los asteriscos estén sólo en las variables)
2. Distribuir para quitar los paréntesis hasta que quede una suma de conjunciones.
3. Hacemos uso de la igualdad :

$$\mu = \mu(x+\bar{x}) = \mu x + \mu\bar{x}$$

Para que todas las variables aparezcan en todos los monomios

4. Pasar a suma de mintérminos y eliminar repetidos (idempotencia).

- **Conjuntiva** : producto de maxterms ⟶ OR / AND

Está formada por los Maxterms cuyos índices faltan en los minterms

ej: $FCD = m_1 + m_3 \longrightarrow FCC = M_0 \cdot M_2$

Nota : esta forma de expresar la función no es la más óptima, así que con el fin de emplear menos puertas debemos reducir la expresión.

2.2 FORMAS REDUCIDAS

Definición 2.12 (implicante) *Un implicante de una función es un monomio fundamental que es menor o igual que la función.*

Los monomios que aparecen en una forma no redundante tienen la particularidad de que al quitar un literal resulta un monomio que no es un implicante de la función. Es decir, son implicantes lo más grandes posibles. Esto da lugar a la definición que sigue.

Definición 2.13 (implicante primo, simple o maximal) *Un implicante primo de una función es un implicante de la función en el que al suprimir un literal deja de ser implicante.*

Como consecuencia de esto todos los implicantes que aparecen en una forma disyuntiva no redundante son implicantes primos.

Implicante : término producto de variables

Implicante primo : no puede combinarse con otros implicantes para eliminar literales (variables).

Para hallar la forma reducida podemos aplicar métodos de simplificación (como Karnaugh) de manera que al final nos quede una suma de implicantes primos, es decir, vamos realizando operaciones hasta que no podamos reducir / simplificar más la función.

ej: $f(x,y,z,t) = \overbrace{xyzt + \bar{x}y\bar{z}t + x\bar{y}zt + xy\bar{z}t + \bar{x}\bar{y}zt + \bar{x}yzt}^{\text{FNC}}$

$f(x,y,z,t) = \overbrace{yzt + y\bar{z}t + \bar{y}zt}^{\text{implicantes}}$

$f(x,y,z,t) = \overbrace{yz + zt}^{\text{imp. primos}}$

Nota : Los implicantes primos son los sumandos de la forma reducida.

Para hallar la forma canónica reducida podemos usar el método de la FCC, que consiste en hallar la forma canónica conjuntiva, distribuir el producto sobre la suma y realizar absorciones.

A las formas disyuntivas que no admiten simplificación las llamaremos formas disyuntivas no simplificables / no redundantes / irredundantes

2.3 FORMAS NO REDUNDANTES (Cuadrícula de Mac-Cluskey y algoritmo de Petrick)

Formamos una tabla (la cuadrícula de Mac-Cluskey) con tantas columnas como mintérminos aparezcan en la forma canónica disyuntiva y con tantas filas como implicantes primos aparezcan en la forma canónica reducida.

ejemplo: $h(x,y,z) = \overbrace{x^*y^*z^*}^{m_0} + \overbrace{x^*y^*z}^{m_1} + \overbrace{x^*yz}^{m_3} + \overbrace{xy^*z^*}^{m_4} + \overbrace{xyz^*}^{m_6} + \overbrace{xyz}^{m_7}$ ⟵ Forma canónica disyuntiva

$h(x,y,z) = \underbrace{xy}_{A} + \underbrace{xz^*}_{B} + \underbrace{x^*y^*}_{C} + \underbrace{y^*z^*}_{D} + \underbrace{x^*z}_{E} + \underbrace{yz}_{F}$ ⟵ Forma canónica reducida

Nuestra tabla quedaría así.

		m_0	m_1	m_3	m_4	m_6	m_7
A	xy						
B	$x\bar{z}$						
C	$\bar{x}\bar{y}$						
D	$\bar{y}\bar{z}$						
E	$\bar{x}z$						
F	yz						

Ponemos los implicantes que estén en cada mintérmino ⟶

		m_0	m_1	m_3	m_4	m_6	m_7
A	xy					×	×
B	$x\bar{z}$				×	×	
C	$\bar{x}\bar{y}$	×	×				
D	$\bar{y}\bar{z}$	×			×		
E	$\bar{x}z$		×	×			
F	yz			×			×

Si hay columnas con una sola aspa, ese implicante debe aparecer sí o sí en la forma no redundante (por ser implicante primo esencial). Ahora transformaremos cada mintérmino a la suma de los implicantes primos que lo componen.

$m_0 \equiv C + D$ $\quad m_3 \equiv E + F$ $\quad m_6 \equiv A + B$

$m_1 \equiv C + E$ $\quad m_4 \equiv B + D$ $\quad m_7 \equiv A + F$

Así pues, nuestra función será:

$$h(x,y,z) = (C+D)(C+E)\cdot(E+F)\cdot(B+D)\cdot(A+B)\cdot(A+F)$$

Tras distribuir:

$$ABCE + BCF + ACDF + BDEF + ADE$$

Cada una de estas "sucesiones de letras" es una forma disyuntiva irredundante tal que:

$$ABCE \Rightarrow A+B+C+E = xy + x\bar{z} + \bar{x}\bar{y} + \bar{x}z$$

! Las formas óptimas o minimales serán aquellas con un menor número de letras (porque estarán compuestas por menos implicantes).

2.4 FORMAS DE REPRESENTAR

a. Función

f^{3}_{219} → número de variables (3); número a representar (219)

$f_{219} : \mathbb{B}^{3}$ → número de variables (3); número a representar (219)

b. Tabla

(x,y,z)	$f(x,y,z)$	
$(0,0,0)$	1	$m_0 = \bar{x}\bar{y}\bar{z}$
$(0,0,1)$	0	
$(0,1,0)$	1	$m_2 = \bar{x}y\bar{z}$
$(0,1,1)$	1	$m_3 = \bar{x}yz$
$(1,0,0)$	0	
$(1,0,1)$	0	
$(1,1,0)$	1	$m_6 = xy\bar{z}$
$(1,1,1)$	1	$m_7 = xyz$

La variable que valga 0 en cada fila va negada

esta función es

$f^{3}_{x} = 10110011 \Rightarrow f^{3}_{179}$

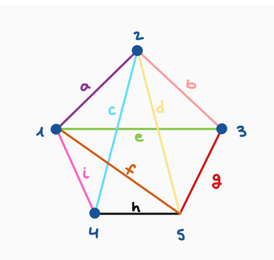
3 Grafos

3.1 DEFINICIONES

Grafo: es un par (V, E), donde V es el conjunto de vértices y E el conjunto de lados o aristas, además de una aplicación $\gamma_G : E \{ \{u,v\}$ tq $u,v \in V \}$ llamada "aplicación de incidencia"

La aplicación de incidencia simplemente nos dice que cada lado o arista tiene asociados dos vértices

ejemplo:



$V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ → vertices

$E = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}$ → Aristas (edges)

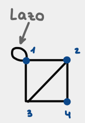
grafo: $G = \{ \underbrace{(1,2)}^{a}, \underbrace{(3,2)}^{b}, \underbrace{(5,3)}^{g}, \underbrace{(4,5)}^{h}, \underbrace{(1,4)}^{i}, \underbrace{(2,4)}^{c}, \underbrace{(2,5)}_{d}, \underbrace{(1,3)}_{e}, \underbrace{(5,1)}_{f} \}$

- La arista "b" se encuentra asociada con los vértices "2" y "3". Esto se traduce tal que $b = (2,3) = (3,2)$.

Lazo: arista incidente en un sólo vértice.

Lados paralelos: dos o más aristas están asociadas a un mismo par de vértices.

ej:



El vértice "1" tiene un lazo

Grafo simple: no tiene lazos ni lados paralelos.

Subgrafo: nuevo grafo $G' = (V', E')$ donde V' y E' son subconjuntos de V y E, respectivamente.

Grado de un vértice: número de aristas que llegan/salen de él + 2 veces el número de lazos que tiene.

Definición 65. *Sea G un grafo y v un vértice de G. Se define el grado de v, y lo denotaremos como $gr(v)$, como el número de lados (no lazos) de G que son incidentes en v más 2 veces el número de lazos incidentes en v.*

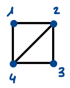
Denotaremos por $D_k(G)$ como el número de vértices de V que tienen grado igual a k. A partir de esto, podemos construir la sucesión

$$D_0(G), D_1(G), D_2(G), \ldots, D_k(G), \ldots$$

que llamaremos sucesión de grados.

Así pues, un grafo puede ser representado como una sucesión de grados, donde la primera posición equivale al número de vértices que tienen grado 0, la segunda posición el número de vértices con grado 1, etc.

ejemplo :



$g(v_1) = 2$ $\quad g(v_2) = 3$ $\quad g(v_3) = 2$ $\quad g(v_4) = 3$

Luego podríamos representar este gráfico como la sucesión 0022. Podemos darnos cuenta entonces que para un grafo de n vértices y ℓ lados se tiene que la suma de los grados de sus vértices es igual a dos veces el número de lados :

$$g(v_1) + g(v_2) + \cdots + g(v_n) = 2\ell$$

Camino de longitud n : sucesión de lados $(e_1, e_2 \dots e_n)$ junto con una sucesión de de vértices $(v_1, v_2 \dots v_n)$ tales que

$\gamma_G(e_i) = \{v_{i-1}, v_i\}$

↳ Camino de longitud 0 : su sucesión de vértices es v y su sucesión de lados es vacía.

Recorrido : camino en el que no hay lados repetidos

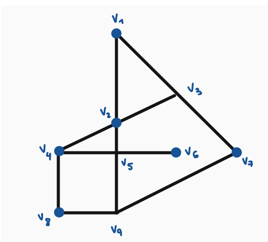
Camino simple : recorrido en el que no hay vértices repetidos

Camino cerrado · camino en el que coindicen el primer y último vértice.

Circuito : recorrido que, a su vez, es un camino cerrado.

Ciclo : circuito que, a su vez, es un camino simple

ejemplo :



La sucesión $v_7 v_3 v_9 v_5 v_4 v_9 v_3$ es un camino de longitud 7 pero no recorrido.

La sucesión $v_1 v_3 v_9 v_8 v_4 v_3 v_7$ es un camino de longitud 6 y un recorrido. No es un camino simple (v_3 se repite)

La sucesión $v_3 v_4 v_8 v_9$ es un camino simple.

La sucesión $v_1 v_3 v_7 v_9 v_3 v_4 v_5 v_2 v_1$ es un camino cerrado y un circuito. No es un ciclo (v_3 se repite)

Nota : siempre existe un camino simple de un vértice a otro. Si existen dos caminos simples distintos que vayan de un vértice a otro entonces existe un ciclo en el grafo.

3.2 ALGORITMO DE DEMOLICIÓN

decide si una sucesión finita es una sucesión gráfica

> Sea G un grafo sin lazos ni lados paralelos, cuyo conjunto de vértices es $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$. Para cada i entre 1 y n, sea $d_i = gr(v_i)$. Tenemos de esta forma una secuencia $d_1, d_2, \cdots, d_n$, que se corresponde con los grados de los vértices del grafo G.

Vamos a trabajar con una sucesión cuyos términos son los grados de los vértices, esta NO es la sucesión de grados que hemos visto antes.

Algoritmo

¿Son todos los elementos de la sucesión 0?

- Sí → La sucesión es gráfica
- NO → ¿Existe un número en la sucesión que es ≥ al número de elementos no nulos de la sucesión?
  - Sí → La sucesión NO es gráfica
  - NO → Elige un vértice que cumpla que no hay ninguno en la sucesión con mayor grado. Si su grado es r, elige r vértices que cumplan que entre los no elegidos no hay uno con mayor grado que alguno de los elegidos.
    ↓
    Genera una nueva sucesión poniendo a cero el vértice elegido anteriormente y disminuyendo en una unidad los elegidos.
    ↓
    Vuelve al primer paso con la nueva sucesión.

Si la suma de los grados de los vértices es impar, la sucesión NO es gráfica.

ejemplo:

gr(v₁) gr(v₂) gr(v₃) gr(v₄)

1. Consideremos la sucesión (2222)
2. Formamos una nueva sucesión poniendo a 0 el primer 2 y restando 1 a los dos términos siguientes porque el grado es 2:
   0 (2-1) (2-1) (2) ⇒ 0112
3. Como no todos los elementos de la sucesión son 0 y no existe ningún elemento ≥ 3 (número de elementos no nulos), continuamos con el algoritmo.
4. Formamos una nueva sucesión poniendo a 0 un 2 y restando 1 a los dos términos siguientes porque el grado es 2:
   0 (1-1) (1-1) 0 ⇒ 0000
5. Como todos los elementos de la sucesión son 0, sabemos que la sucesión es gráfica.

Nota: que una sucesión sea gráfica implica que se puede representar mediante un grafo.

3.3 ALGORITMO DE RECONSTRUCCIÓN

Este algoritmo se lleva a cabo si la sucesión es gráfica.

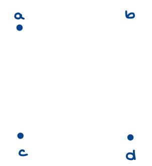
Algoritmo

1. Partimos del grafo nulo con n vértices y nos situamos en la última fila (la que tiene todo 0).
2. Pasamos a una fila superior añadiendo al grafo de la fila r lados que conectan el vértice marcado en la fila superior con los elegidos (los que aumentan el grado en 1).

ejemplo: Supongamos la sucesión 2222, que ya hemos demostrado que es gráfica.

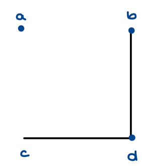
Con respecto al algoritmo de demolición
Pivote elegido
vértices elegidos (a los que se les restaba 1)

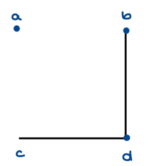
LO QUE TENEMOS



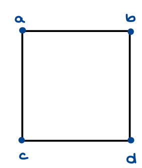
	a	b	c	d
	2	2	2	2
Fila siguiente ⟶	0	1	1	2
Empezamos aquí ⟶	0	0	0	0

TRAS ALGORITMO





	a	b	c	d
Fila siguiente ⟶	2	2	2	2
Estamos aquí ⟶	0	1	1	2
	0	0	0	0



Como no quedan más filas encima, hemos terminado

3.4 COLORACIÓN DE GRAFOS

Definición 74. *Sea $G = (V, E)$ un grafo. Una coloración G es una aplicación $f : V \to C$, donde C es un conjunto, de tal forma que para cualquier $e \in E$, si $\gamma_G(e) = \{v, w\}$ con $v \neq w$ entonces $f(u) \neq f(v)$.*

El conjunto C es un conjunto de colores. La aplicación f asigna un color a cada vértice, de forma que dos vértices adyacentes no tengan el mismo color.

Número cromático de G [χ(G)]: cardinal del menor conjunto C para el que existe una coloración de G
⟶ Menor número de colores con el que se puede pintar el grafo.

El polinomio cromático de un grafo calcula el número de maneras en las cuales puede ser coloreado un grafo usando un número de colores dado, de forma que dos vértices adyacentes no tengan el mismo color

- Si G es un grafo con al menos un lado (que no es lazo) entonces $p(G,1) = 0$
- Polinomio cromático de un grafo completo de n vértices.

Este símbolo significa factorial (hasta n)

$$P(K_n, x) = x(x-1)(x-2)\ldots(x-n+1) \xrightarrow{\text{con lo que}} P(K_n, x) = x^{\underline{n}}$$

Este polinomio sólo sirve para saber el número cromático del grafo

- Polinomio cromático de un grafo de n vértices que es un camino simple.

$$P(P_n, x) = x(x-1)^{n-1}$$

Algoritmo

- Algoritmo de la suma

Tenemos la siguiente fórmula:

$$p(G_e, x) = p(G, x) + p(G_e', x)$$

Que nos indica que dado un grafo simple G_e, hallar su polinomio cromático consiste en sumar los polinomios cromáticos de los grafos G y G_e', teniendo en cuenta que:

Nota: el nº cromático será el menor exponente

- G tiene un lado más que G_e.
- G_e' tiene un vértice menos que G_e.
- La condición de parada es que todos los grafos sean completos.

Algoritmo

- Algoritmo de la resta

Tenemos la siguiente fórmula:

$$p(G, x) = p(G_e, x) - p(G_e', x)$$

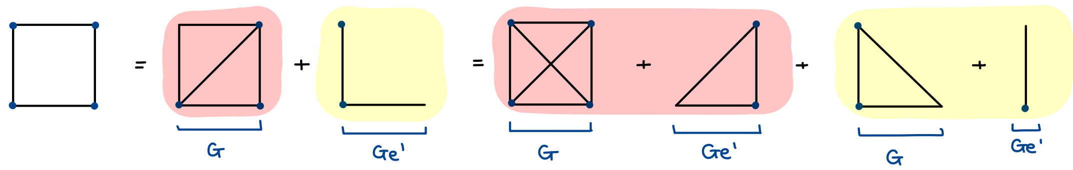
Nota: el número cromático se calcula dando valores naturales a la x

Que nos indica que el polinomio cromático de un grafo puede obtenerse calculando polinomios cromáticos de grafos más pequeños, teniendo en cuenta que el algoritmo termina cuando obtengamos grafos cuyos polinomios cromáticos conozcamos.

Nota: si al restar nos queda un vértice suelto, éste no se quita. Conforma por sí mismo otro grafo cuyo polinomio cromático deberemos multiplicar al polinomio del grafo al que pertenecía.

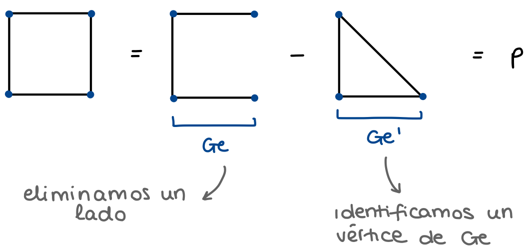
ejemplo: Calcular el polinomio cromático de un ciclo de longitud 4

- según el algoritmo de la suma:



$= p(K_4, x) + p(K_3, x) + p(K_3, x) + p(K_2, x) = x^4 + 2x^3 + x^{2}$ número cromático

- según el algoritmo de la resta:



$= p(P_4, x) - (K_3, x) = x(x-1)^3 - x(x-1)(x-2)$

Para hallar el nº cromático en el algoritmo de la resta debemos ir dando valores naturales ≥ 1.

Para calcular el número cromático, sustituye los números naturales en el polinomio característico, el primero que de un resultado $\neq 0$ es el nº cromático. Para saber el número de combinaciones, sustituye en el polinomio el nº de colores que te den.

3.5 ÁRBOLES

Definición 60. *Sea G un grafo. Se dice que G es conexo, si dados u y v dos vértices de G existe al menos un camino de u a v.*

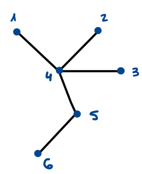
Definición 76. *Un* árbol *es un grafo conexo que no tiene ciclos.*

Un grafo que no tenga ciclos se denomina bosque.

Dado un grafo conexo, un subgrafo suyo se dice árbol generador *si tiene todos los vértices y es un árbol.*

Primero, recordemos que un **ciclo** es un camino cerrado en el que no se repite ningún vértice a excepción del primero, que aparece al principio y al final del camino. Se suele asemejar a un polígono de n lados.

ejemplo: Árbol etiquetado con 6 vértices y 5 lados



Como podemos ver, dos vértices cualesquiera están conectados por exactamente un camino. De esta forma, podemos comprobar que un grafo G (conexo) de n vértices es un árbol si tiene n-1 lados. Esta afirmación es equivalente a las siguientes (si se cumple una, se cumplen todas):

1. G es un árbol
2. Dos vértices cualesquiera están unidos por un camino simple.
3. G es conexo, pero si le quitamos un lado deja de serlo.
4. G no tiene ciclos, pero si le añadimos un lado sí que tendrá.

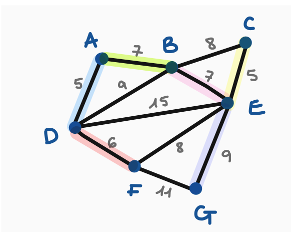
3.6 ALGORITMO DE KRUSKAL

Busca un subconjunto de aristas que, formando un árbol, incluyen todos los vértices y donde el valor de la suma de todas las aristas del árbol es el mínimo.

- *Constructiva*

Ordeno los lados del grafo de menor a mayor peso y elijo los (n-1) primeros lados de manera que no se formen ciclos.

ejemplo:



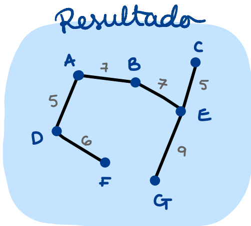
1. Ordeno los vértices de menor a mayor

AD CE DF AB BE BC EF BD EG FG DE

2. Cojo los primeros 6 lados que no formen ciclos

AD CE DF AB BE BC EF BD EG FG DE

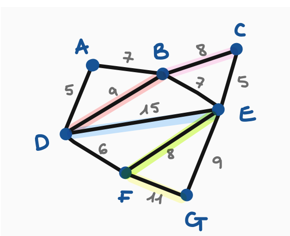
Resultado



- *Destructiva*

Ordeno los lados del grafo de mayor a menor peso y elijo (l - n + 1) primeros lados que rompan un ciclo del grafo que va quedando. Luego, los elimino

ejemplo:



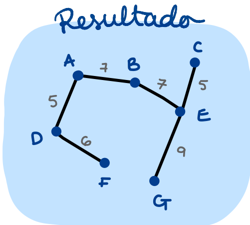
1. Ordeno los vértices de mayor a menor

DE FG EG BD EF BC BE AB DF CE AD

2. Elimino los primeros 5 lados que rompan ciclos

DE FG EG BD EF BC BE AB DF CE AD

Resultado



3.7 ALGORITMO DE PRIM

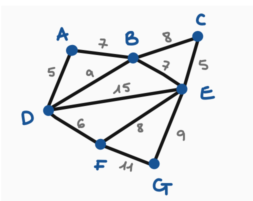
1. Partimos de un vértice «v» (elegido por nosotros) que se añade al conjunto T (de vértices).

$T=\{v\}$ y $E=\{\ \}$

2. En cada paso se añade un vértice «u» a T y un lado a E que cumplan lo siguiente:

   a. Que u no esté en T.
   b. Que u sea adyacente a algún vértice de T mediante el lado e.
   c. Que el lado e no forme ciclos con otros lados del conjunto E.
   d. Que e sea de peso mínimo entre los que cumplan las condiciones anteriores.

ejemplo:



	CONJUNTO T	CONJUNTO E	
1.	{ A }	{ }	
2.	{ A, D }	{ AD }	5
3.	{ A, D, F }	{ AD, DF }	11
4.	{ A, D, F, B }	{ AD, DF, AB }	18
5	{ A, D, F, E }	{ AD, DF, AB, BE }	25
6.	{ A, D, F, E, C }	{ AD, DF, AB, BE, CE }	30
7.	{ A, D, F, E, C, G }	{ AD, DF, AB, BE, CE, EG }	39

OPCIONES

1. Elegimos el vértice A, por ejemplo.
2. AB (7) AD (5)
3. AB (7) DF (6) DE (15) DB (9)
4. AB (7) DE (15)
5. DE (15) BC (8) BE (7) EF (8)
6. BC (8) CE (5) EG (9) EF (8)
7. FG (11) EG (9)

3.8 CÓDIGO DE PRÜFER

Supongamos unos árboles etiquetados con los números naturales del 1 a «n». Un código de Prüfer de un árbol etiquetado es una sucesión de (n-2) términos que se obtiene tal que:

generar código a partir de un árbol

1. Se parte de la sucesión vacía y el árbol etiquetado T.
2. Si T tiene dos vértices se devuelve el código y hemos terminado.
3. Se determina la hoja con menor etiqueta del árbol T y se añade al código la etiqueta del adyacente a la hoja seleccionada y se ésta se suprime del árbol T.
4. Se vuelve al paso 2 con la nueva sucesión y el nuevo árbol.

Nota: las hojas son los vértices que sólo conectan con un vértice

ejemplo: El árbol etiquetado T es el siguiente:


- Paso 1 : S = { } T = 

- Paso 2 : El árbol T tiene más de 2 vértices
- Paso 3 : Podemos elegir entre los vértices 2 y 4 ya que ambos son hojas. Escogemos el 2 ya que su valor numérico es menor (2 < 4).

S = (3) T = 

- Paso 4 : repetimos tantas veces como haga falta (hasta que queden 2 vértices).

S = (3, 1) T = 

S = (3, 1, 5) T = 

Como quedan sólo 2 vértices, hemos terminado; la sucesión es (3, 1, 5).

generar árbol a partir de código

1. Se parte de un código «c» de longitud (n−2), del conjunto V = {1, 2 ... n} y del grafo vacío T con «n» vértices.

2. Si «c» es vacío y T tiene dos vértices se pone un lado entre ambos y se devuelve T porque ya hemos terminado.

3. Se determina el menor número de V que no está en «c». Se añade en T un lado entre ese número y el primer elemento del código. Se quita de V el elemento seleccionado y de «c» se quita su primer elemento.

4. Volver al paso 2 con el nuevo código, nuevo conjunto V y nuevo grafo T.

ejemplo: Vamos a hallar el árbol con código de Prüfer (3, 1, 5).

- Como «c» es una sucesión de 3 términos sabemos que el árbol tiene 5 vértices (n = #c + 2). El conjunto V será {1, 2, 3, 4, 5}. Partimos de un grafo T vacío.
- El paso 2 no se cumple así que continuamos.
- El menor número de V que no está en «c» es 2. Así pues el grafo T es: 

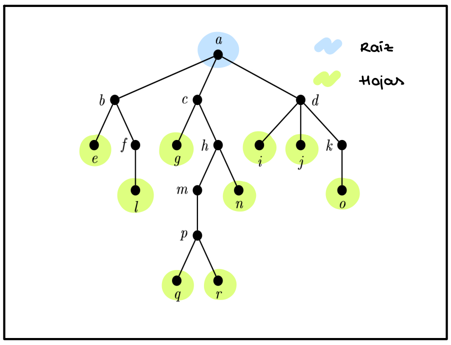
- Repetimos tantas eces como haga falta (hasta que «c» esté vacío).

V = {1, 3, 4, 5}, c = (1, 5) 

V = {1, 4, 5}, c = (5) 

- Como «c» está vacío, añadimos unimos los vértices que faltan y terminamos

3.9 ÁRBOLES CON RAÍZ



Los nodos son los puntitos

Profundidad / nivel de un nodo: su distancia al nodo raíz.

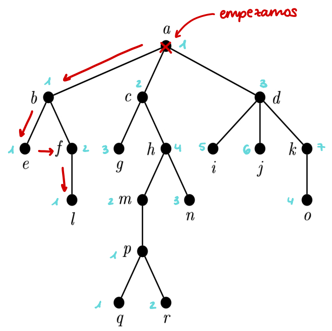
Altura de un árbol: longitud desde la raíz a la hoja de mayor profundidad.

nº de nodos que tiene debajo en la rama más larga

Altura de un nodo: altura del subárbol que lo tiene como raíz.

Rango de un nodo: depende de la representación de un árbol y sirve para comparar nodos del mismo nivel. Un nodo tiene menor rango si está situado a la izquierda del otro.

a. Recorrido en preorden



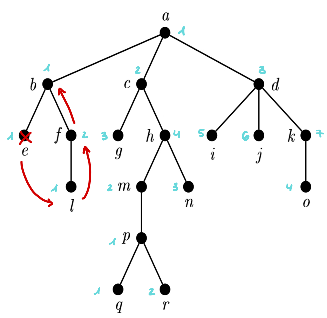
Orden de preferencia de los nodos al mismo nivel

Recorrido en preorden:

a, b, e, f, l, c, g, h, m, p, q, r, n, d, i, j, k, o

Nota: es como si recorriéramos el árbol de izquierda a derecha y de arriba a abajo.

b. Recorrido en postorden (antes de recorrer un nodo se recorren los que están por debajo de él)

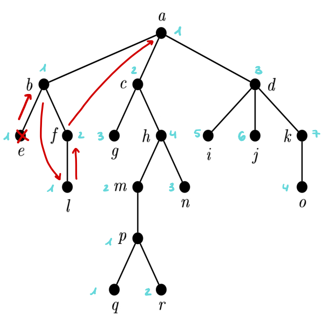


Recorrido en postorden:

e, l, f, b, g, q, r, p, m, n, h, c, i, j, o, k, d, a

Nota: es como si recorriéramos el árbol de izquierda a derecha y de abajo a arriba.

c. Recorrido en inorden



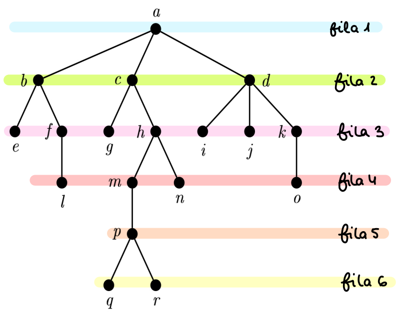
Recorrido inorden:

e, b, l, f, a, g, c, q, p, r, m, h, n, i, d, j, o, k

Siempre empezamos por abajo y por la izquierda.
Para pasar de izquierda a derecha en un mismo nivel y teniendo un mismo nodo padre (el de arriba) debes pasar primero por él.

ej: para pasar del nodo e a la rama de f (en la que tendré que empezar por el nodo l por ser el que está más abajo) debo pasar por el padre de «e» y «f», el nodo «b».

d. Recorrido Top-down

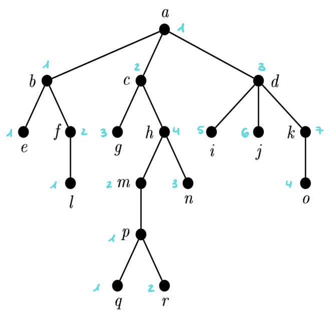


Recorrido Top-down:

a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, o, p, q

Nota: se recorre por filas y de izquierda a derecha

e. Recorrido Bottom-up



Se van colocando en orden creciente de altura.

¿Tienen la misma altura? El de menor profundidad va antes.

¿Tienen la misma profundidad? El de menor rango va antes.

Recorrido Bottom-up:

e, g, i, j, l, n, o, q, r, f, k, p, b, d, h, c, a

NODO	ALTURA	PROFUNDIDAD	RANGO
a	5	0	1
b	2	1	1
c	4	1	2
d	2	1	3
e	0	2	1
f	1	2	2
g	0	2	3
h	3	2	4
i	0	2	5
j	0	2	6
k	1	2	7
l	0	3	1
m	2	3	2
n	0	3	3
o	0	3	4
p	1	4	1
q	0	5	1
r	0	5	2

Creo que haciendo esta tabla es más fácil de ver, es simplemente ponerlos en orden alfabético según su altura (en este caso al menos).

! **Ejercicio 45** *Un árbol tiene 33 vértices de grado uno, 25 vértices de grado 2, 15 vértices de grado 3, y el resto, vértices de grado 4. ¿Cuántos vértices tiene en total?*

Árbol $\begin{cases} n \text{ vértices} \\ n-1 \text{ lados} \end{cases} \longrightarrow \sum gr(v) = 2\ell \Rightarrow \ell = \dfrac{\sum gr(v)}{2} \longrightarrow \ell = \dfrac{33\cdot 1 + 25\cdot 2 + 15\cdot 3 + 4x}{2} = 64 + 2x$

$\left.\begin{array}{l} n-1 = 64 + 2x \longrightarrow n = 65 + 2x \\ n = 33 + 25 + 15 + x = 73 + x \end{array}\right\} \quad 65 + 2x = 73 + x \Rightarrow x = 73 - 65 = 8$

Solución: El árbol tiene 81 vértices

4 Lógica Proposicional

4.1 SÍMBOLOS LÓGICOS, FÓRMULAS Y EQUIVALENCIAS

$\longrightarrow$	$\neg$	$\vee$	$\wedge$	$\longleftrightarrow$
sii	no	o	y	doble implicación

al hacer estos cambios se construye el polinomio de Gegalkine

$a \vee b = a + b + ab$
$a \wedge b = a \cdot b$
$a \longrightarrow b = 1 + a + ab$
$a \longleftrightarrow b = 1 + a + b$
$\neg a = a + 1$

4.2 SATISFACIBILIDAD

1. φ es una *fórmula satisfacible* sii, por def., existe (al menos) una valoración v tal que $v(\varphi) = 1$.
2. φ es una *fórmula refutable* sii, por def., $(\neg\varphi)$ es una fórmula satisfacible. si $v(\varphi) = 0$ al menos una vez
3. φ es una *fórmula contingente* sii, por def., φ es satisfacible y refutable.
4. φ es una *fórmula tautológica*, *tautología* o *válida* sii, por def., para toda asignación v se cumple $v(\varphi)$. si $v(\varphi)$ es siempre 1
5. φ es una *contradicción* sii, por def., $(\neg\varphi)$ es una *tautología*. si φ nunca es cierta

$\models$ implicación semántica
↳ ej: $a \models b$ "a implica a b"

- El conjunto vacío (ϕ) es satisfacible.
- $\{a, \neg a\}$ es insatisfacible así como cualquier conjunto que lo contenga
- Dos fórmulas serán equivalentes si $\alpha \longleftrightarrow \beta$ es una Tautología

ejemplos de uso:

$a \models b \rightsquigarrow \; \models a \longrightarrow b$
$\{a, b\} \models c \rightsquigarrow a \wedge b \models c \rightsquigarrow \; \models (a \wedge b) \longrightarrow c$

Teorema 3.3.10. *Sea $\Gamma \cup \{\varphi\}$ un conjunto de fórmulas. Son equivalentes las siguientes afirmaciones:*

1. $\Gamma \vDash \varphi$
2. $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ *es insatisfacible*

ejemplos de uso:

$\{a, b\} \vDash c \longrightarrow \{a, b, \neg c\}$ es insatisfacible

! ¿Cómo saber si una implicación semántica ($\vDash$) es cierta?

- Con tablas de verdad (no recomendado)
- Usando un sist. de ecuaciones de pol. de Gegalkine ($\mathbb{Z}_2$)
  1. Se igualan las hipótesis a 1
  2. Se trata de concluir en qué casos el polinomio de la tesis vale 1.

ejemplo: $\{a \vee b \to c, \neg c\} \vDash \neg b$ **Sol:** Es satisfacible

$$\left.\begin{array}{r} 1+a+b+ab+ac+bc+abc=1 \\ 1+c=1 \Rightarrow c=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 1+a+b+ab=1 \Rightarrow 1+a+(1+a)b=(1+a)(1+b)=1 \Rightarrow a=b=0$$

Algunas equivalencias

$$\begin{array}{rcl}
\alpha & \equiv & \neg\neg\alpha \\
\alpha \to \beta & \equiv & \neg\alpha \vee \beta \\
\alpha \leftrightarrow \beta & \equiv & (\alpha \to \beta) \wedge (\beta \to \alpha) \\
\neg(\alpha \wedge \beta) & \equiv & \neg\alpha \vee \neg\beta \\
\neg(\alpha \vee \beta) & \equiv & \neg\alpha \wedge \neg\beta \\
\alpha \vee (\beta \vee \gamma) & \equiv & (\alpha \vee \beta) \vee \gamma \\
\alpha \wedge (\beta \wedge \gamma) & \equiv & (\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma \\
\alpha \vee (\beta \wedge \gamma) & \equiv & (\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \wedge \gamma) \\
\alpha \wedge (\beta \vee \gamma) & \equiv & (\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma)
\end{array}$$

- Multiplicando con el polinomio de Gegalkine
  - ↳ Multiplicamos todas las hipótesis y la tesis negada.
  - ↳ Si sale 0, la implicación original es satisfacible y, por lo tanto, verdadera.

ejemplo: $\{a \vee b \to c, \neg c\} \vDash \neg b \longrightarrow \{a \vee b \to c, \neg c, b\}$ **Sol:** Es satisfacible

$$(1+a+b+ab+ac+bc+abc)(1+c)b = (1+a+b+ab+ac+bc+abc)b(1+c) = bc(1+c) = bc+bc = 0$$

4.3 FORMA NORMAL CONJUNTIVA Y DISYUNTIVA

Definiciones

- **Proposición atómica**: compuesta por un único literal

  ej: $a, b, \neg a$

- **Cláusula**. fórmula de la forma $(\lambda_0 \vee \lambda_1 \vee \ldots \vee \lambda_m)$
- **Cláusula vacía** ($\square$): tipo especial de cláusula, es insatisfacible.

- Una fórmula está en su forma normal conjuntiva si es una conjunción de cláusulas

  ej: $a \vee b \vee (\neg c) \vee (a \wedge c)$

- Una fórmula está en su forma normal disyuntiva si es una disyunción de cláusulas

  ej: $a \wedge b \wedge (\neg c) \wedge (a \vee c)$

- Una fórmula está en su forma normal conjuntiva si es una conjunción de cláusulas

ej: $a \vee b \vee (\neg c) \vee (a \wedge c)$

- Una fórmula está en su forma normal disyuntiva si es una disyunción de cláusulas

ej: $a \wedge b \wedge (\neg c) \wedge (a \vee c)$

Método para hallar la forma normal conjuntiva (si no es tautología)

1. Cambiar $a \longleftrightarrow b$ por $(a \rightarrow b) \wedge (b \rightarrow a)$
2. Cambiar $a \longrightarrow b$ por $\neg a \vee b$
3. Cambiar $\neg\neg a$ por a
4. Usar leyes de Morgan:

$$\neg(a \vee b) = \neg a \wedge \neg b$$
$$\neg(a \wedge b) = \neg a \vee \neg b$$

5. Si queda algún $a \vee (b \wedge c)$ lo distribuimos así: $(a \vee b) \wedge (a \vee c)$
   ↳ Los $\vee$ deben quedar dentro y los $\wedge$, fuera

Nota: los $\wedge$ que quedan al final podemos sustituirlos por comas, separando los dos términos: $(a \vee b) \wedge c \longrightarrow \{a \vee b, c\}$

La cláusula vacía es insatisfacible!

4.4 ALGORITMO DE DAVIS & PUTNAM

- Si en una rama (mínimo) aparece el conjunto vacío $\{\phi\}$ el conjunto al completo es satisfacible.
- Para que el conjunto sea insatisfacible, debemos obtener la cláusula vacía ($\square$) en TODAS las ramas.
- Para obtener la cláusula vacía debemos tener $\{a, \neg a\}$ (cláusula unit y su complemento).
- Un conjunto será satisfacible si sus subconjuntos lo son.

PASOS:

1. Buscar **cláusulas unit** (formadas por un sólo literal) y eliminar esa cláusula y todas las que la contengan. Posteriormente se elimina su complementario, pero sólo él, no la cláusula completa.

2. Buscar **literales puros** (hay un literal dentro de una cláusula pero su complementario <u>no</u> está en el conjunto). Se eliminan las cláusulas que lo contengan

3. **Descomponer**. Escoger un literal que se repita y quitarlo del conjunto de cláusulas, a la derecha irán las cláusulas que no tenían al literal o que tenían a su complementario. A la izquierda, las que tenían al literal y las que no lo tenían (sí, de nuevo). NO SE ELIMINA LA CLÁUSULA ENTERA SÓLO EL LITERAL.

NOTA: Hay que repetir cada paso hasta que no encontremos más cláusulas que cumplan las condiciones.

ejemplos: ($h \equiv$? ← lo que se quita)

Regla 1

$\Sigma \equiv \{a, b \vee a, \neg a \vee c\}$

$\downarrow h \equiv a$

$\{c\}$

$\downarrow h \equiv c$

$\{\phi\}$

Regla 2

$\Sigma \equiv \{c \vee d, d \vee \neg d\}$

$\downarrow h \equiv c$ — se quita entera la cláusula que lo contenga

$\{d \vee \neg d\}$

$\downarrow$

$\{\phi\}$

Regla 3

$\Sigma \equiv \{a \vee b, a \vee c, \neg a \vee d, c \vee d\}$

$\swarrow h \equiv a$ | $\searrow h \equiv \neg a$

$h \equiv a$	$h \equiv \neg a$
$\{b, c, c \vee d\}$	$\{d, c \vee d\}$
regla 1 $\downarrow h \equiv b$	regla 1 $\downarrow h \equiv d$
$\{c, c \vee d\}$	$\{\phi\}$
regla 1 $\downarrow h \equiv c$	
$\{\phi\}$	

Leyenda:
- Contiene el lit
- Contiene el comp.
- No contiene el lit

5 Lógica de Primer Orden

El lenguaje de la lógica de Primer orden está compuesto por una serie de objetos (términos) de los que se pueden decir cosas (predicados).

5.1 SÍMBOLOS LÓGICOS Y DEFINICIONES

CONJUNTOS

- $\mathcal{C} \longrightarrow$ símbolos de constante
- $\mathcal{V} \longrightarrow$ símbolos de variable
- $\mathcal{F} \longrightarrow$ símbolos de función
- $\mathcal{R} \longrightarrow$ símbolos de relación / predicado

No puede estar vacío

Nota: los símbolos de $\mathcal{F}$ y $\mathcal{R}$ tienen asociada una ariedad (número de argumentos necesarios para que un operador o función se pueda calcular).

(conectivas)

SÍMBOLOS

$\vee$	$\wedge$	$\rightarrow$	$\longleftrightarrow$	$\neg$
o	y	si	doble implic.	no

CUANTIFICADORES

- $\forall$ cuantificador universal ("todo, cada, el...")
- $\exists$ cuantificador existencial ("algún, unos, hay.")

ejemplo.

Sea L el lenguaje de primer orden con:
$\mathcal{C} = \{a, b, c\}$;
$\mathcal{F} = \{f, g, h\}$, f y h son unarios y g es binario, o bien, $\mathcal{F}_1 = \{f, h\}$ y $\mathcal{F}_2 = \{g\}$
$\mathcal{R} = \{P, Q, R, S\}$, R es monario, P y S son binarios y Q es ternario, o bien, $\mathcal{R}_1 = \{R\}$, $\mathcal{R}_2 = \{P, S\}$ y $\mathcal{R}_3 = \{Q\}$.

Término: Todos los nombres, variables y (dada una función f de ariedad $n \geq 1$ y los términos $t_1, t_2, \ldots, t_n$) $f(t_1, t_2 \ldots t_n)$ son términos.

Fórmula atómica: la aplicación de las operaciones de $\mathcal{R}$ sobre términos.

↳ ej: Dados $\mathcal{C} = \{a, b, c\}$, $\mathcal{R} = \{P^2, Q^3, R^1, S^{2}\}$ (ariedad) y $\mathcal{F} = \{f^1, g^2, h^1\}$

Fórmulas atómicas: $P(a,x)$, $Q(a,a,a)$, $S(h(x),b)$ ...
NO fórmulas atómicas: $P(g(a,x))$, $R(f(g))$ ...

5.1.1 FÓRMULAS DEL LENGUAJE

Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje de primer orden. Definimos las fórmulas de $\mathcal{L}$ como sigue:

- Toda fórmula atómica es una fórmula.
- Si α y β son fórmulas, también lo son $\alpha \wedge \beta$, $\alpha \vee \beta$, $\alpha \longrightarrow \beta$, $\alpha \longleftrightarrow \beta$, $\neg\alpha$.
- Si β es una fórmula y x es un símbolo de variable, entonces son fórmulas $\forall x \beta$ y $\exists x \beta$.
- Todo lo que no se haya construido siguiendo las reglas anteriores NO es una fórmula.

Nota: los cuantificadores tienen prioridad sobre las conectivas. Ejemplo:
$\forall x \alpha \vee \beta = (\forall x \alpha) \vee \beta \neq \forall x (\alpha \vee \beta)$

Radio de acción de un cuantificador : hasta qué punto de una fórmula afecta el cuantificador.

↳ ej: $\exists y\, \underbrace{(R(g(a,y))}_{\text{radio de } \exists y}$

Aparición ligada : aparición de una variable x dentro del rango de acción de un cuantificador $\forall x$ ó $\exists x$. En caso opuesto diremos que es una <u>aparición libre</u>. Las ocurrencias $\forall x$ y $\exists x$ de la variable x se consideran ligadas.

↳ ej: $\exists y\, [R(g(a,y)) \longrightarrow [P(g(a,b),x) \wedge \neg \forall x\, Q(x,x,x)]]$

- Apariciones ligadas de la var y
- Apariciones ligadas de la var x
- Apariciones libres de la var x

Una **estructura / $\mathcal{L}$-estructura ($\mathcal{E}$)** consiste en :

- Un conjunto D distinto del vacío, denominado dominio / universo.
- Para cada símbolo de constante $a \in C$, un elemento $a^{\mathcal{E}} \in D$.
- Para cada símbolo de función n-ario (de ariedad n) f, una aplicación $f^{\mathcal{E}} : D^n \to D$.
- Para cada símbolo de predicado n-ario P, una aplicación $P^{\mathcal{E}} : D^n \longrightarrow \mathbb{Z}_2$

Si P es 0-ario esto es lo mismo que asignar un valor de verdad.

5.2 SATISFACIBILIDAD

L-estructura

1. φ es válida o cierta *en* $\mathfrak{A}$ *si* $\varphi^{\mathfrak{A}} = A^{V}$. *Es decir, todas las asignaciones en* $\mathfrak{A}$ *satisfacen a* φ. *También diremos que* $\mathfrak{A}$ *es modelo de* φ *y lo notaremos* $\mathfrak{A} \models \varphi$.
2. φ es satisfacible *en* $\mathfrak{A}$ *si* $\varphi^{\mathfrak{A}} \neq \emptyset$. *Es decir, hay <u>una</u> asignación* $\mathfrak{a}$ *en* $\mathfrak{A}$ *que satisface a* φ.
3. φ es refutable *en* $\mathfrak{A}$ *si* $\varphi^{\mathfrak{A}} \neq A^{V}$. *Es decir, hay <u>una</u> asignación* $\mathfrak{a}$ *en* $\mathfrak{A}$ *que <u>no</u> satisface a* φ.
4. φ es no válida o falsa *en* $\mathfrak{A}$ *si* $\varphi^{\mathfrak{A}} = \emptyset$. *Es decir, ninguna asignación* $\mathfrak{a}$ *en* $\mathfrak{A}$ *satisface a* φ.

Dado $\Gamma = \{\gamma_1, \gamma_2 \dots \gamma_n\}$, escribiremos $\gamma_1, \gamma_2 \dots \gamma_n \models \varphi$. Para ver si esta implicación es cierta no podemos hacer lo mismo que en lógica proposicional de comprobar esas afirmaciones en todas las L-estructuras posibles ya que son infinitas.

Sea Γ un conjunto de fórmulas y φ otra fórmula. Son equivalentes:

1) $\Gamma \models \varphi$

2) $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ es insatisfacible.

5.2.1 TEOREMA DE LA DEDUCCIÓN

Teorema 5.6 (Teorema de la Deducción)

Sea Γ *un conjunto de fórmulas (que podría ser vacío) de un lenguaje de primer orden, y* φ, ψ, *otras dos fórmulas. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. $\Gamma \models \varphi \to \psi$
2. $\Gamma \cup \{\varphi\} \models \psi$

Este teorema nos sirve para pasar fórmulas de derecha a izquierda en las implicaciones.

5.3 EQUIVALENCIAS LÓGICAS

Entre cuantificadores

$\neg\forall x\alpha \equiv \exists x\neg\alpha$

$\neg\exists x\alpha \equiv \forall x\neg\alpha$

Sea α una fórmula que no tiene ocurrencias/apariciones libres de x.

$\forall x\alpha \equiv \alpha$ $\qquad$ $\exists x\alpha \equiv \alpha$

$\forall x\underbrace{\forall x\beta}_{\alpha} \equiv \forall\beta$ $\qquad$ $\exists x\exists x\beta \equiv \exists\beta$

$\forall x\underbrace{\exists x\beta}_{\alpha} \equiv \exists x\beta$ $\qquad$ $\exists x\forall x\beta \equiv \forall x\beta$

Inclusión de $\wedge$ y $\vee$ en el radio de $\exists$ y $\forall$

Dadas dos fórmulas α y β

En β no hay ocurrencias libres de la variable x.	En α no hay ocurrencias libres de la variable x.
$\forall x\alpha \wedge \beta \equiv \forall x(\alpha \wedge \beta)$	$\alpha \wedge \forall x\beta \equiv \forall x(\alpha \wedge \beta)$
$\forall x\alpha \vee \beta \equiv \forall x(\alpha \vee \beta)$	$\alpha \vee \forall x\beta \equiv \forall x(\alpha \vee \beta)$
$\exists x\alpha \wedge \beta \equiv \exists x(\alpha \wedge \beta)$	$\alpha \wedge \exists x\beta \equiv \exists x(\alpha \wedge \beta)$
$\exists x\alpha \vee \beta \equiv \exists x(\alpha \vee \beta)$	$\alpha \vee \exists x\beta \equiv \exists x(\alpha \vee \beta)$

Si NO hay ocurrencias libres

Estas son sólo unas pocas equivalencias, tenéis todas en la chuleta oficial.

5.4 FORMA NORMAL PRENEXA

Una fórmula φ es una forma normal prenexa si es de la forma:

$$\varphi = C_1 \underbrace{x_1 \dots C_n x_n}_{\text{variables}} \Phi$$

Donde C_i es un cuantificador ($\forall$ ó $\exists$) y Φ es una fórmula sin cuantificadores.

Nota: para toda fórmula φ existe otra fórmula φ' en forma normal prenexa que es lógicamente equivalente a φ.

Para hallar la forma normal prenexa debemos hacer transformaciones en nuestra fórmula con las equivalencias lógicas.

ejemplo:

Φ

$C_i x_i$

$\forall x\,[\,R(x,y) \wedge \neg\forall y R(x,y)\,]$ aplicamos $\neg\forall x\varphi \equiv \exists x\neg\varphi$ (chuleta; 3)

$\forall x\,[\,R(x,y) \wedge \exists y \neg R(x,y)\,]$ aplicamos un cambio de variable $\exists y \equiv \exists z$ (chuleta; 5)

$\forall x\,[\,R(x,y) \wedge \exists z \neg R(x,z)\,]$ sacamos $\exists z$ del paréntesis (chuleta; 14)

$\forall x\exists z\,[\,R(x,y) \wedge \neg R(x,z)\,]$

5.5 FORMA NORMAL DE SKOLEM

Una forma normal de Skolem se deriva de una forma normal prenexa a la que le "quitamos" los cualificadores existenciales ($\exists$). Es decir:

$$\alpha = \forall x_1 \forall x_2 \dots \forall x_n \varphi$$

Donde φ es una fórmula sin cuantificadores.

Si un cuantificador $\exists$ no se encuentra dentro del rango de acción de un cuantificador $\forall$ se sustituye la variable cuantificada (la que acompañe a $\exists$) por otra que aún no haya sido utilizada y se elimina el cuantificador $\exists$.

ejemplo:

Rango de $\forall y$

$\exists x \forall y (\neg S(x) \vee R(x,y))$
$\forall y (\neg S(a) \vee R(a,y))$

Cambiamos la variable x por a y eliminamos $\exists x$

Si un $\exists$ se encuentra dentro del rango de acción de un $\forall$, se sustituye la variable cuantificada por una función de la variable que acompaña a $\forall$ y se elimina $\exists$.
La función utilizada no puede haber sido usada antes ni podrá usarse de nuevo.

ejemplo:

Rango de $\forall x$
Rango de $\forall z$

$\forall x \exists y \forall z (P(x,y,z))$
$\forall x \forall z (P(x, f(x), z))$

Cambiamos la y por $f(x)$

Si un $\exists$ se encuentra dentro del ámbito de más de un cuantificador $\forall$ entonces se sustituye la variable cuantificada por una función de todas las variables que acompañan a los $\forall$ y se elimina el $\exists$ De nuevo, esa función no puede haber sido utilizada antes ni usarse después.

ejemplo:

Rango de $\forall x$
Rango de $\forall y$

$\forall x \forall y \exists z (P(x,y,z))$
$\forall x \forall y (P(x,y, g(x,y)))$

sustituimos z por $g(x,y)$

5.6 FORMA CLAUSULAR

Literal (λ): fórmula atómica o su negado (λ^c).
↳ ej. $P(a)$ $\neg Q(x,a)$ $\neg H(x, g(a,x), y)$ $P(f(x))$ $Q(g(y, f(b)), x)$
Cláusula: disyunción de literales precedida de un cuantificador $\forall$.

Nota: de ahora en adelante, al escribir las cláusulas obviaremos los cuantificadores universales $\forall$.

La forma clausular se obtiene obviando los cuantificadores universales $\forall$ que preceden a las fórmulas y operando sobre ellas igual que en el tema anterior para hallar la FNC (forma normal conjuntiva:

ejemplo:

$\forall y (S(a) \longrightarrow R(a,y))$ Forma de Skolem
$\forall y (\neg S(a) \vee R(a,y))$ Forma clausulada

Nuestros a y b serían los componentes de $\mathcal{F}$ y de $\mathcal{R}$, es decir, las funciones y relaciones de una $\mathcal{L}$-estructura:

Método para hallar la forma normal conjuntiva

1. Cambiar $a \longleftrightarrow b$ por $(a \to b) \land (b \to a)$
2. Cambiar $a \longrightarrow b$ por $\neg a \lor b$
3. Cambiar $\neg\neg a$ por a
4. Usar leyes de Morgan:

$$\neg(a \lor b) = \neg a \land \neg b$$
$$\neg(a \land b) = \neg a \lor \neg b$$

5. Si queda algún $a \lor (b \land c)$ lo distribuimos así: $(a \lor b) \land (a \lor c)$
   ↳ Los $\lor$ deben quedar dentro y los $\land$, fuera

Nota: los $\land$ que quedan al final podemos sustituirlos por comas, separando los dos términos: $(a \lor b) \land c \longrightarrow \{a \lor b, c\}$

Al igual que en el tema de lógica proposicional, la satisfacibilidad de un conjunto de fórmulas queda reducida al estudio de la satisfacibilidad de un conjunto de cláusulas