Sesión de prácticas

Material elaborado por Juan Urbano

Continuamos en esta sesión con la relación de ejercicios del Tema 3.

En el Ejercicio 18 nos proponen utilizar la Teoría de grafos para explicar por qué en el juego del dominó se puede formar una secuencia cerrada en la que intervienen todas las fichas. Se supone que el alumno está familiarizado con dicho juego. Si no, puede ver algún tutorial o vídeo para familiarizarse con el mismo.

En primer lugar tenemos que idear un grafo que esté relacionado con el juego del dominó, y por tanto tenemos que establecer qué elementos son los vértices y cuáles son los lados. Hacemos una primera parada para que usted trate de aportar una solución. No avance a la página siguiente sin haberlo intentado.

Como cada ficha tiene dos partes en cada una de las cuales puede aparecer un número del 1 al 6 codificado mediante puntos, o bien no aparecer punto alguno, lo más razonable es establecer el conjunto de vértices $\mathrm{V}(G) = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, donde el valor 0 indica la ausencia de puntos. Por tanto tendremos un grafo con siete vértices.

¿Cuándo el vértice i será adyacente con el vértice j? Pues siempre que en el juego exista alguna ficha en la que aparecen ambos números. Pero sabemos que ello ocurre por definición del juego del dominó. Por tanto dos vértices cualesquiera serán adyacentes, incluyendo en esta afirmación la posibilidad de que ambos vértices sean el mismo. Por tanto tenemos un grafo G que se fabrica a partir del grafo completo K_7 añadiéndole un lado ó autolazo de cada vértice a sí mismo. Así G es lo que en los apuntes se denomina un multigrafo.

Con estos elementos vemos que formar una secuencia cerrada en la que intervienen todas las fichas del juego se traduce en encontrar un camino cerrado que pase por cada lado del grafo una sóla vez, es decir, un lazo de Euler. Según la teoría (Véase el Teorema 2 en la página 27 de los apuntes) en el multigrafo G hay algún lazo de Euler si, y sólo si, G es conexo y el grado de cada vértice es par.

Evidentemente G es conexo y cada uno de sus vértices tiene grado 8, que es un valor par. Por tanto G tiene un lazo ó camino cerrado de Euler. Recordamos que cada autolazo de un vértice v aporta dos unidades al grado de v ya que dicho lado incide, es decir, toca dos veces a v.

Comentamos ahora el Ejercicio 19. Lea el enunciado. De nuevo estamos ante un problema en el que tenemos objetos y relaciones entre ellos. Claramente los objetos serán las personas mencionadas y dos objetos estarán relacionados cuando las personas que representan se conocen. Así resulta un grafo G tal que $\mathrm{V}(G) = \{P_1, P_2, \ldots, P_{10}\}$ y el vértice P_i es adyacente con P_j cuando $i \neq j$ y P_i conoce a P_j. Por tanto G es un grafo en el que no hay autolazos ni lados paralelos.

Recordamos la cuestión que plantea el ejercicio: "Decida si es posible sentar a las diez personas en torno a una mesa de modo que cada persona conozca a aquellas que se sienten a su lado." De acuerdo con la teoría, ¿cómo se traduce la cuestión anterior en términos del grafo G que hemos construído?

Hacemos una nueva parada para que usted trate de aportar una solución. Es importante que no avance a la página siguiente sin haberlo intentado.

Lo que nos preguntan ahora es si en G existe algún camino cerrado de Hamilton, es decir, un ciclo de Hamilton. (Consulte las páginas 32 y 33 de los apuntes.) Observe además que para saber si en un grafo conexo existen caminos de Hamilton no hay propiedades o teoremas elegantes como ocurre para los caminos de Euler. Hay condiciones suficientes que funcionan para algunos grafos (aquellos que tienen muchos lados) pero no para otros. (Vea la Proposición 8 y el comentario que le sigue en la página 33 de los apuntes.)

Y se preguntará, ¿cómo sabemos si un grafo tiene o no algún camino de Hamilton? Pues como se responden muchas cuestiones de la Teoría de Grafos, que es usando algoritmos. Nuestro tema es una introducción a la Teoría de grafos y no vamos a entrar en este campo. El alumno interesado puede consultar libros específicos en la Biblioteca de UGr donde se inciden en los algoritmos relacionados con los grafos.

En el Ejercicio 21, apartado (b), consideramos los grafos bipartido-completos (Véanse las páginas 37, 38 y 39 de los apuntes), que denotados por $\mathrm{K}_{m,n}$ y queremos ver para qué valores de m y n tienen algún camino de Euler, ya sea abierto o cerrado.

Claramente todos los grafos $\mathrm{K}_{m,n}$ son conexos. Además los grafos $\mathrm{K}_{1,1}$ y $\mathrm{K}_{1,2}$, que es isomorfo al $\mathrm{K}_{2,1}$, tienen caminos abiertos de Euler. Por tanto vamos a suponer que cada uno de los números m y n vale al menos 2. Denotamos por $v_1, \ldots, v_m$, $w_1, \ldots, w_n$ los vértices de $\mathrm{K}_{m,n}$, donde cada v_i es adyacente con cada uno de los w_j, y viceversa. Vemos que el grado de v_i vale n y que el grado de w_j vale m. Por consiguiente en $\mathrm{K}_{m,n}$ hay un lazo de Euler si, y sólo si, m y n son ambos pares.

En el apartado (c) buscamos los grafos completos K_m que tienen algún camino de Hamilton. Evidentemente estos grafos son todos conexos, observación ésta que es olvidada muchas veces por los alumnos.

En K_1 tenemos un camino de longitud cero que empieza y acaba en el único vértice que hay en el grafo. Por tanto aceptamos que hay un ciclo de Hamilton.

En K_2 hay un camino abierto de Hamilton, pero no hay ciclo de Hamilton. Para todo $m \geq 3$, si $\mathrm{V}(\mathrm{K}_m) = \{1, 2, 3, \ldots, m\}$, la secuencia

$$1, 2, 3, \ldots, m, 1$$

es un ciclo de Hamilton. La secuencia

$$1, 2, 3, \ldots, m$$

es un camino abierto de Hamilton. (Recordemos que si un grafo tiene un ciclo de Hamilton, y se descarta el último lado que se recorre, se obtiene un camino abierto de Hamilton.)

En cada uno de los apartados del Ejercicio 22 primero hay que dibujar el grafo dirigido dado y a continuación tratar de encontrar caminos de Euler y caminos de Hamilton. De forma análoga a lo que ocurre con los grafos no dirigidos, lo primero es constatar que el grafo es conexo; además ahora tenemos que tener en cuenta los sentidos de las flechas.

Para los caminos de Euler podemos usar la Proposición 7 en la página 30 de los apuntes, y para los caminos de Hamilton lo mejor es tratar de encontrarlo directamente.

En el Ejercicio 23 nos proponen encontrar los grafos bipartido-completos con 19 vértices y 84 lados. Este ejercicio es fácil, y si ha entendido los anteriores debería de poder hacerlo usted. Hacemos otra pausa para que usted trate de resolverlo. No avance a la página siguiente sin haberlo intentado.

Si tenemos $\mathrm{K}_{m,n}$, sabemos que el número de vértices es $m+n$ y el número de lados es $m \cdot n$. Por tanto planteamos el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} m+n=19 \\ m \cdot n = 84 \end{cases}$$

cuyas soluciones son $m=7,\ n=12$ y $m=12,\ n=7$. Así los grafos bipartido-completos pedidos son $\mathrm{K}_{7,12}$ y $\mathrm{K}_{12,7}$ que son en realidad isomorfos.

Planteamos ahora el Ejercicio 24. De entre todos los grafos bipartidos con 146 vértices, nos piden aquellos que tienen el mayor número de lados. Aunque no es lo mismo, pero la idea es parecida a la que se empleó para resolver el Ejercicio 5 que vimos en la sesión anterior, allí con grafos completos y aquí con grafos bipartido-completos. Buscamos un grafo $\mathrm{K}_{m,n}$ con 146 vértices y el mayor número de lados posibles. Por tanto

$$m+n=146,$$

y el valor del producto $m \cdot n$ ha de ser máximo. Tenemos un problema de optimización de dos variables que lo podemos reducir a otro de una variable definiendo la función

$$f(m) = m \cdot (146-m) = 146m - m^2,$$

la cual queremos maximizar. Calculamos la primera derivada, la igualamos a 0, y obtenemos el valor crítico $m=73$ que corresponde a un máximo relativo (y absoluto) de f. Por tanto el grafo buscado es $\mathrm{K}_{73,73}$ que tiene $73^2 = 5329$ lados.

El segundo apartado se resuelve de forma análoga y queda propuesto para el alumno.

En el Ejercicio 26 el grafo G_1 se obtiene de K_n al suprimir el lado $\{1,2\}$. Nótese que los vértices 1 y 2 no se suprimen en el grafo. Se trata de calcular el número cromático de G_1.

Sabemos que el número cromático de un grafo completo K_m vale m, es decir, $\chi(\mathrm{K}_m) = m$. ¿Cómo podemos utilizar ésto para calcular $\chi(G_1)$?

Piense durante un momento el ejercicio y trate de aportar una respuesta antes de continuar.

Sea H el subgrafo de G_1 que contiene a los vértices $2, 3, \ldots, n$. La observación fundamental es que H es isomorfo a K_{n-1}, por lo que su número cromático vale $n-1$. No siga adelante hasta que no entienda lo anterior.

Además el grafo G_1 se obtiene del grafo H añadiendo un nuevo vértice denotado por 1 el cual será adyacente a cada uno de los vértices $3, \ldots, n$ de H, pero no al vértice 2. Por tanto, si asignamos al vértice 1 el mismo color que tiene el vértice 2 (lo cual es posible pues ambos vértices no son adyacentes en G_1), resulta una coloración para los vértices del grafo G_1 y así $\chi(G_1) = n - 1$.

Para el grafo G_2 se razona de manera similar.

En el Ejercicio 27 se define un grafo G que tiene 201 vértices. La condición $a \neq b$ dada en el enunciado es para que en el grafo resultante no hayan autolados. De hecho tampoco habrá lados paralelos. Para resolver este ejercicio hay que estudiar cuáles son las componentes conexas de G. La clave está en la condición que establece cuándo dos vértices son adyacentes, que es:

$$a \neq b \quad \text{y} \quad a + b \text{ es múltiplo de } 4.$$

¿Cuándo la suma de dos números naturales (distintos) es múltiplo de 4? Hay varios casos:

(1) Que ambos sean múltiplo de 4, es decir, $a \equiv 0 \bmod 4$ y $b \equiv 0 \bmod 4$.

(2) Que uno sea de la forma de $4k + 1$ y el otro $4k' + 3$, es decir, $a \equiv 1 \bmod 4$ y $b \equiv 3 \bmod 4$.

(3) Que ambos sean de la forma de $4k + 2$, es decir, $a \equiv 2 \bmod 4$ y $b \equiv 2 \bmod 4$.

Observe que cada vértice de G sólo puede cumplir una condición dada en uno y sólo uno de los tres apartados anteriores. Por consiguiente G tiene tres componentes conexas.

Dos vértices cualesquiera de G (distintos entre sí) que cumplan la condición del apartado (1) son adyacentes. Así pues los vértices del apartado (1) forman un grafo completo cuyo número cromático es fácil de calcular.

Los vértices en el apartado (2) dan lugar a un grafo bipartido-completo cuyo número cromático es conocido.

¿A qué grafo dan lugar los vértices en el apartado (3)?

Una vez que tengamos el número cromático de cada componente conexa de G, aplicamos el apartado tercero en la Proposición 2 de la página 35 de los apuntes y concluímos el ejercicio.

El grafo que aparece en el Ejercicio 29 es el grafo de Petersen el cual ya sabemos que no es plano aplicando el Teorema de Wagner-Harary-Tutte. (Véase la página 47 en los apuntes.) Ahora se trata de alcanzar la misma conclusión usando el Teorema de Kuratowski. Por tanto habrá que encontrar un subgrafo suyo que sea homeomorfo a K_5 ó a $\mathrm{K}_{3,3}$.

Similarmente ya sabemos que el grafo que aparece en el Ejercicio 30 no es plano aplicando el Teorema de Kuratowski. (Véanse las páginas 45 y 46 en los apuntes.) Ahora se trata de alcanzar la misma conclusión usando el Teorema de Wagner-Harary-Tutte. Por tanto habrá que encontrar un subgrafo suyo que sea contraible a K_5 ó a $\mathrm{K}_{3,3}$. Inténtelo.

El Ejercicio 31 es parecido a los Ejercicios 3 y 4 que ya hemos considerado previamente. Puesto que se trata de un grafo plano conexo, podemos usar además la fórmula de Euler para grafos planos. (Véanse las páginas 40 y 41 en los apuntes.)