Sesión de prácticas

Material elaborado por Juan Urbano

Dedicamos esta sesión de prácticas a resolver algunos ejercicios del Tema 5, en el cual se presenta el lenguaje y los conceptos básicos de la Lógica de predicados.

En el apartado (b) del Ejercicio 1 tenemos que traducir una propiedad sobre números reales. Se trata de una propiedad general, es decir, que se enuncia para números reales cualesquiera. Una traducción posible es:

$$\forall x \forall y \big(E(f(x,y),a) \to E(x,a) \vee E(y,a)\big).$$

Los paréntesis inicial y final son necesarios, ya que los cuantificadores han de afectar a toda la parte restante de la fórmula. Sin embargo, no hace falta usar ninguno más, pues tal y como se dijo, el operador $\vee$ tiene más precedencia que el operador $\to$.

En el apartado (a) del Ejercicio 3 tenemos que traducir una propiedad general sobre números naturales usando algunos de los elementos proporcionados. Si x designa un número natural arbitrario, su doble es $f(x,x)$, y el número natural 2 se representa como $f(a,a)$, pues a designa al número 1. Por tanto una solución sería

$$\forall x\, Q(f(a,a), f(x,x)).$$

Para resolver el apartado (c), recordemos que un número primo es por definición un número natural mayor que 1 cuyos únicos divisores (naturales) son el 1 y él mismo. El ejercicio consiste en reflejar esta idea particularizada para el número 2 que se representará en la fórmula como $f(a,a)$. Un solución sería la siguiente:

$$P(f(a,a),a) \wedge \forall x \big(Q(x, f(a,a)) \to E(x,a) \vee E(x, f(a,a))\big).$$

En el Ejercicio 6 tenemos un lenguaje de predicados, una estructura y una asignación. Se trata de evaluar los términos dados. Resolvemos los primeros apartados. Los restantes son análogos y quedan propuestos para el alumno.

1. $v(a) = a^{\mathcal{E}} = 2.$
2. $v(f(a,x)) = f^{\mathcal{E}}(v(a), v(x)) = f^{\mathcal{E}}(a^{\mathcal{E}}, v(x)) = f^{\mathcal{E}}(2,-1) = 2 \cdot (-1) + 1 = -1.$
3. $v(f(f(x,x),y)) = f^{\mathcal{E}}(v(f(x,x)), v(y)) = f^{\mathcal{E}}(f^{\mathcal{E}}(v(x), v(x)), v(y)) = f^{\mathcal{E}}(2,4) = 9.$

En el Ejercicio 8 tenemos que interpretar ciertas fórmulas. Veamos algunas.

1. Primero observamos que α_1 es una sentencia, por lo cual la asignación v dada no tendrá efecto en su interpretación. La interpetación de α_1 afirma que todo número entero es múltiplo de 3, lo cual no es cierto. Por tanto $\mathrm{I}^v(\alpha_1) = 0$.

2. En la fórmula α_2 vemos que la variable que acompaña al cuantificador es diferente de la variable que aparece en el predicado. Por tanto, el cuantificador $\forall y$ no tiene efecto ninguno sobre la parte restante de la fórmula que es $P(x)$. Se trata de un cuantificador superfluo. Ésto implica que $\mathrm{I}^v(\alpha_2) = \mathrm{I}^v(P(x)) = P^{\mathcal{E}}(v(x)) = P^{\mathcal{E}}(0) = 1$, pues efectivamente el número natural 0 es múltiplo de 3.

3. La fórmula α_3 nos dice que hay números enteros que no son múltiplos de 3, lo cual es cierto. Por tanto $\mathrm{I}^v(\alpha_3) = 1$. Nótese que α_3 es una sentencia, por lo cual en su interpretación no hemos tenido que utilizar la asignación v.

En el Ejercicio 11 tenemos un lenguaje de predicados y una estructura para el mismo, cuyo dominio es el conjunto $\mathbb{Z}_9$. Vamos a interpretar la fórmula β, dejando la interpretación de α como ejercicio para el alumno. Como la fórmula es del tipo $\beta_1 \to \beta_2$, interpretamos primero la subfórmula $\beta_2 = P(f(a,x))$, en la cual la única ocurrencia de la variable x que aparece, es una ocurrencia libre. Tenemos

$$\mathrm{I}^v(P(f(a,x))) = P^{\mathcal{E}}(f^{\mathcal{E}}(v(a), v(x))).$$

Como

$$f^{\mathcal{E}}(v(a), v(x)) = f^{\mathcal{E}}(8,6) = 8 + 6 = 5,$$

entonces resulta

$$\mathrm{I}^v(\beta_2) = P^{\mathcal{E}}(5).$$

La pregunta ahora es, ¿ el elemento 5 es el cuadrado de otro elemento de $\mathbb{Z}_9$? Construímos la siguiente tabla en la que aparecen los elementos de $\mathbb{Z}_9$ y sus cuadrados:

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
x^2	0	1	4	0	7	7	0	4	1

Vemos que 5 no es el cuadrado de ningún elemento de $\mathbb{Z}_9$, por lo cual la fórmula β_2 se interpreta como falsa, es decir, $\mathrm{I}^v(\beta_2) = 0$. ¿Por qué hemos empezado con β_2 y no con β_1? Porque β_2 es más simple que β_1, y si su interpretación hubiese sido igual a 1, entonces la interpretación de β sería 1, independientemente de la interpretación de la subfórmula β_1. Como ésto no ha ocurrido, tenemos que interpretar la subfórmula β_1.

Lo primero que observamos es que β_1 es una sentencia que afirma lo siguiente: Existe un elemento $x \in \mathbb{Z}_9$ tal que $2x = 8$ y x es el cuadrado de algún elemento de $\mathbb{Z}_9$. Esta afirmación es cierta, pues se cumple para $x = 4$. Por tanto $\mathrm{I}^v(\beta_1) = 1$, y así, concluímos que

$$\mathrm{I}^v(\beta) = 1 \to 0 = 0.$$

En el Ejercicio 13 hay que interpretar las fórmulas dadas, y clasificarlas. Obsérvese que el símbolo de predicado Q se interpreta como la igualdad en el dominio de la estructura dada, es decir, $Q^{\mathcal{E}}(x, y) = 1$ si, y sólo si, x es igual a y. Consideramos en primer lugar

$$\alpha_1 = \forall x \exists y Q(x, f(y)).$$

Como α_1 es una sentencia, la asignación v que proporciona el enunciado es irrelevante para interpretar la fórmula, la cual expresa que "para todo elemento $x \in \mathbb{Z}_6$, existe un elemento $y \in \mathbb{Z}_6$ tal que $x = y^2$." Dicho con otras palabras, cada elemento de $\mathbb{Z}_6$ tiene una raíz cuadrada en $\mathbb{Z}_6$. Ésta afirmación es falsa, pues uno puede comprobar que no existe ningún elemento $y \in \mathbb{Z}_6$ tal que $5 = y^2$. Por tanto $\mathrm{I}^v(\alpha_1) = 0$, es decir, bajo la interpretación dada, la fórmula α_1 es falsa.

A continuación clasificamos α_1. De lo anterior obtenemos de modo inmediato que α_1 es refutable. También obtenemos que α_1 no es satisfacible en la estructura $\mathcal{E}$, pues independientemente de la asignación que uno tome en $\mathcal{E}$, la fórmula se interpreta como falsa. Es decir, no existe ninguna interpretación basada en la estructura $\mathcal{E}$ que satisfaga a α_1. Ésto también nos dice que α_1 no es válida en la estructura $\mathcal{E}$, y por consiguiente, α_1 no es universalmente válida. (Repase las definiciones dadas en la página 14 de los apuntes.) No obstante, hay estructuras en las que α_1 es satisfacible, como por ejemplo la siguiente. Sea la estructura $\mathcal{E}'$ dada por

$$\begin{cases} \mathrm{D} = \mathbb{Z}_6 \\ a^{\mathcal{E}'} = 2, \ b^{\mathcal{E}'} = 3 \\ f^{\mathcal{E}'}(x) = x \\ Q^{\mathcal{E}'}(x, y) = \mathbf{1} \ \text{ si y sólo si } \ (x, y) \in \{(0,0), (1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5)\}, \end{cases}$$

(Nótese que sólo hemos cambiado la forma de interpretar el símbolo de función f.) Ahora la fórmula expresa que "para todo elemento $x \in \mathbb{Z}_6$, existe un elemento $y \in \mathbb{Z}_6$ tal que $x = y$", lo cual es evidentemente cierto, pues basta tomar para y el propio elemento x. Además, al igual que ocurría antes, la asignación v que uno use no influye en el resultado de la interpretación. Por tanto para cualquier asignación v en la estructura $\mathcal{E}'$ se verifica que $\mathrm{I}^v(\alpha_1) = 1$, es decir, bajo la interpretación $\mathcal{E}'$, la fórmula α_1 es verdadera. Ésto nos dice que α_1 es válida (y por tanto también satisfacible) en la estructura $\mathcal{E}'$.

Consideramos a continuación la fórmula

$$\alpha_5 = \neg Q(x, f(x)) \to Q(x, b).$$

Observamos que α_5 no es una sentencia. De hecho todas las ocurrencias de variables que aparecen en α_5 son libres. Entonces α_5 nos dice que "si no es cierto que $v(x) = v(x)^2$, entonces $v(x) = b^{\mathcal{E}}$", es decir, "si $1 \neq 1^2$, entonces $1 = 3$." Tenemos un condicional en el que la premisa y la tesis ambas son falsas, por lo cual el condicional se considera verdadero. Recuerde que $0 \to 0 = 1$. Por tanto $\mathrm{I}^v(\alpha_5) = 1$, y así resulta que α_5 es satisfacible en la estructura $\mathcal{E}$. Sin embargo α_5 no es válida en la estructura $\mathcal{E}$, pues si tomamos la asignación v' en $\mathcal{E}$ tal que $v'(x) = 2$, entonces

$$\mathrm{I}^{v'}(\neg Q(x, f(x))) = 1,$$

pues $2 \neq 2^2$ en $\mathbb{Z}_6$, y por otra parte
$$\mathrm{I}^{v'}(Q(x,b)) = 0$$
ya que $2 \neq 3$. Como consecuencia $\mathrm{I}^{v'}(\alpha_5) = 0$, y así α_5 también es refutable. Por tanto estamos ante una fórmula que es satisfacible y al mismo tiempo refutable.

En este tema nos ocurre algo parecido a lo que pasaba al principio del Tema 4, y es que todavía no tenemos las herramientas necesarias para resolver muchos de los problemas planteados en la Lógica de predicados, por lo que hemos de basarnos casi siempre en las definiciones dadas, lo que hace que el proceso de resolución del problema resulte más tedioso.

Los Ejercicios 14, 15 y 16 son ejemplos de ésto que estamos diciendo. No obstante la intuición también puede ayudarnos. Por ejemplo, en el apartado (c) del Ejercicio 14 tenemos la fórmula $\forall x P(x) \to P(a)$, la cual expresa que si el predicado P se hace cierto para todo elemento del dominio considerado (el que sea, da igual), entonces el predicado P se hace cierto para el valor que asuma el símbolo de constante a en dicho dominio. Ésto es evidentemente verdadero, independientemente de la interpretación concreta que uno tome. Por tanto la fórmula dada es universalmente válida.

En el Ejercicio 17 hemos de encontrar todos los modelos posibles para cada una de las fórmulas dadas. Evidentemente, si la fórmula es universalmente válida, entonces cualquier modelo (de entre todos los posibles que existen) será un modelo para tal fórmula. Vamos a considerar el apartado (a) en el que tenemos la fórmula $\exists x P(x) \to \forall y P(y)$. Ésta nos dice que si la propiedad expresada por el predicado P se cumple para algún elemento en el dominio considerado D, entonces P ha de cumplirse para todo elemento en D. Por consiguiente los modelos para dicha fórmula son aquellos en los que la definición de $P^{\mathcal{E}}$ vale 1 para todos los elementos en $\mathrm{D}_{\mathcal{E}}$, o bien vale 0 para todos los elementos en $\mathrm{D}_{\mathcal{E}}$.

En el Ejercicio 20 en este momento nuestras únicas herramientas son las definiciones y la intuición. Por ejemplo para
$$\Gamma_1 = \Big\{ \forall x \forall y Q(x,y),\ \forall y \neg Q(y, f(y)) \Big\},$$
tenemos un conjunto con dos fórmulas que se construyen usando un predicado binario Q, que denotará una relación binaria definida sobre algún conjunto ó dominio. (Recuerde que ya hemos visto relaciones binarias como son la relación de divisibilidad en $\mathbb{Z}$, y la relación de orden usual en $\mathbb{R}$.) La primera fórmula en Γ_1 nos dice que dos elementos cualesquiera del dominio que consideremos, han de estar relacionados. Ahora bien, la segunda fórmula en Γ_1 expresa que ningún elemento y del dominio puede estar relacionado con el elemento correspondiente $f(y)$ que también pertenece al dominio. Claramente lo segundo es incompatible con lo primero, y por tanto el conjunto de fórmulas Γ_1 es insatisfacible ó inconsistente.

En este tema también se define el concepto de implicación semántica, o de consecuencia lógica, similar al que vimos para el Tema 4. En cada apartado del Ejercicio 21 nos están preguntando si cada una de las dos fórmulas dadas implica semánticamente a la otra. Si repasa los ejemplos dados en los apuntes, verá que algunos apartados ya fueron allí resueltos.

Los ejercicios restantes tienen que ver con el uso de las transformaciones estudiadas en la Sección 8 de los apuntes. Concretamente se trasforman fórmulas en otras equivalentes. Para ilustrarlo resolvemos el Ejercicio 22. Se trata de comprobar que las fórmulas

$$\alpha = \neg\exists x\forall y\Big(R(x,y) \to Q(g(x,y))\Big)$$

y

$$\beta = \forall x\exists y\Big(R(x,y) \ \wedge \ \neg Q(g(x,y))\Big)$$

son equivalentes. Comenzamos con la primera, y lo primero que hacemos es interiorizar la negación:

$$\alpha = \neg\exists x\forall y\Big(R(x,y) \to Q(g(x,y))\Big) \equiv \forall x\exists y\neg\Big(R(x,y) \to Q(g(x,y))\Big).$$

Dentro del paréntesis reemplazamos la flecha por la fórmula equivalente ya vista en los apuntes, recuérdese que $\gamma_1 \to \gamma_2 \equiv \neg\gamma_1 \vee \gamma_2$. Tenemos

$$\forall x\exists y\neg\Big(R(x,y) \to Q(g(x,y))\Big) \equiv \forall x\exists y\neg\Big(\neg R(x,y) \vee Q(g(x,y))\Big),$$

donde seguimos interiorizando la negación mediante una de las Leyes de De Morgan para obtener

$$\forall x\exists y\Big(R(x,y) \wedge \neg Q(g(x,y))\Big),$$

que es precisamente la fórmula β. Por tanto $\alpha \equiv \beta$.