LMD (Grupo E del GII)
Relación de ejercicios del Tema 3

Salvo que se especifique lo contrario, en los ejercicios que siguen, la palabra grafo designa un grafo no dirigido sin autolados ni lados paralelos.

1. Razone que en cualquier grafo el número de vértices de grado impar es par.

2. Pruebe que en todo grafo con al menos dos vértices hay siempre al menos dos vertices con el mismo grado.

3. Se sabe que un grafo G de 21 lados tiene 7 vértices de grado 1, 3 de grado 2, 7 de grado 3, y el resto de grado 4. ¿Cuántos vértices tiene G?

4. Calcule el número de vértices de un árbol sabiendo que tiene 33 vértices de grado 1, 25 vértices de grado 2, 15 vértices de grado 3 y los restantes de grado 4.

5. ¿Cual es el menor número de vértices que puede tener un grafo con 1000 lados?

6. ¿Cual es el mayor número de vértices que puede tener un grafo conexo con 1000 lados?

7. Determine cuáles de las secuencias siguientes son gráficas, y para aquellas que lo sean, encuentre un grafo correspondiente a dicha secuencia:

   (a) $4, 4, 3, 2, 2, 1$

   (b) $7, 6, 5, 4, 3, 3, 2$

   (c) $5, 5, 4, 4, 4, 4, 2, 2$

   (d) $6, 6, 5, 4, 3, 3, 1$

8. Sobre las personas A,B,C,D,E,F y G, se sabe que A habla inglés, B habla inglés y chino, C habla inglés, italiano y ruso, D habla japonés y chino, E habla alemán e italiano, F habla francés, japonés y ruso, G habla francés y alemán.

   (a) Demuestre que dos personas cualesquiera pueden siempre comunicarse, si es necesario, con la ayuda de otras actuando como intérpretes.

   (b) ¿Cual es el menor número de intérpretes para que A y G se puedan comunicar?

   (c) Demuestre que sigue siendo posible la comunicación entre dos personas cualesquiera, aún cuando una de las restantes sufra afonía. La respuesta a este apartado está relacionada con el concepto de *conectividad* de un grafo. Defina la conectividad de un grafo y ponga ejemplos.

   (d) ¿Cual ha de ser el menor número de grupos en los que hay que dividir a todas las personas para que dos personas en un mismo grupo no puedan comunicarse entre sí?

9. Encuentre dos grafos conexos no isomorfos con el mismo número de vértices, el mismo número de lados, y la misma secuencia de grados.

10. Justifique que dos grafos G_1 y G_2 son isomorfos, si y sólo si, los grafos $\overline{G}_1$ y $\overline{G}_2$ son isomorfos. Explique en qué circunstancias la propiedad demostrada en este ejercicio puede ser útil.

11. ¿Son isomorfos los grafos G_1 y G_2 dados por las matrices de adyacencia siguientes?

$$A(G_1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A(G_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

12. Un grafo G se dice autocomplementario, si $G \cong \overline{G}$.

    (a) Demuestre que si G es autocomplementario, entonces G tiene $4k$ ó $4k+1$ vértices, con k un número natural.

    (b) Encuentre todos los grafos autocomplementarios con a lo sumo cinco vértices.

    (c) Encuentre todos los árboles que sean autocomplementarios.

13. Si G es un grafo no conexo, pruebe que $\overline{G}$ es conexo.

14. Demuestre que todo grafo con $2n$ vértices y sin ciclos de longitud 3 tiene a lo sumo n^2 lados. (Sugerencia: aplique inducción sobre n.)

15. Si A es la matriz de adyacencia de un grafo G, ¿qué significado tienen los valores que aparecen en la diagonal principal de la matriz A^2? ¿Qué interpretación geométrica tienen los valores que aparecen en la diagonal principal de la matriz A^3?

16. Sea G un grafo cuya matriz de adyacencia es

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

    ¿Cuál es el número de caminos de longitud 8 desde el vértice v_1 hasta el vértice v_2? ¿Cuántos de dichos caminos no pasan por v_3?

17. Sea G un grafo dirigido cuya matriz de adyacencia es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

    Dibuje el grafo G y calcule el número de caminos de longitud 8 desde el vértice v_1 hasta el vértice v_2.

18. Explique, utilizando la Teoría de grafos, por qué en el juego del dominó se puede formar una secuencia cerrada en la que intervienen todas las fichas. Se recuerda que cada ficha tiene dos números entre 0 y 6, pudiendo ser ambos iguales, y que al formar la citada secuencia, cada dos fichas consecutivas han de tener un número en común.

19. A una reunión asistirán 10 personas $P_1, P_2, \ldots, P_{10}$. Decida si es posible sentar a las 10 personas en torno a una mesa de modo que cada persona conozca a aquellas que se sienten a su lado. Las amistades de cada persona vienen dadas por la tabla siguiente:

P_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
conoce a P_j donde j es	$4,8$	$4,9$	$6,4,8$	$1,2,3$	$7,10$	$3,7,9$	$5,6,8$	$1,3,7,9$	$2,6,8,10$	$5,9$

20. (a) Encuentre un grafo en el que haya un lazo de Euler, pero no haya ningún ciclo de Hamilton.
    (b) Encuentre un grafo en el que haya un ciclo de Hamilton, pero no haya ningún lazo de Euler.

21. (a) ¿Para qué valores de m el grafo K_m tiene algún camino de Euler?
    (b) ¿Para qué valores de m y n el grafo $\mathrm{K}_{m,n}$ tiene algún camino de Euler?
    (c) ¿Para qué valores de m el grafo K_m tiene algún camino de Hamilton?
    (d) ¿Para qué valores de m y n el grafo $\mathrm{K}_{m,n}$ tiene algún camino de Hamilton?

22. Para cada uno de los grafos dirigidos siguientes, estudie si existen caminos de Euler y caminos de Hamilton.

    (a) $G_1 = (V, L, \varphi)$ tal que:
    - $V = \{1,2,3,4\}$, $L = \{\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4, \ell_5, \ell_6\}$, y
    - $\varphi(\ell_1) = (4,1), \varphi(\ell_2) = (3,4), \varphi(\ell_3) = (2,4),$
      $\varphi(\ell_4) = (1,2), \varphi(\ell_5) = (4,2), \varphi(\ell_6) = (2,3).$

    (b) $G_2 = (V, L, \varphi)$ tal que:
    - $V = \{1,2,3,4\}$, $L = \{\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4, \ell_5, \ell_6\}$, y
    - $\varphi(\ell_1) = (1,4), \varphi(\ell_2) = (4,1), \varphi(\ell_3) = (3,4),$
      $\varphi(\ell_4) = (3,2), \varphi(\ell_5) = (1,2), \varphi(\ell_6) = (2,3).$

    (c) $G_3 = (V, L, \varphi)$ tal que:
    - $V = \{1,2,3,4,5,6\}$, $L = \{\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4, \ell_5, \ell_6, \ell_7, \ell_8, \ell_9, \ell_{10}, \ell_{11}\}$, y
    - $\varphi(\ell_1) = (5,1), \varphi(\ell_2) = (6,2), \varphi(\ell_3) = (5,3),$
      $\varphi(\ell_4) = (1,2), \varphi(\ell_5) = (2,3), \varphi(\ell_6) = (2,1),$
      $\varphi(\ell_7) = (1,4), \varphi(\ell_8) = (3,5), \varphi(\ell_9) = (4,6),$
      $\varphi(\ell_{10}) = (4,5), \varphi(\ell_{11}) = (3,6).$

23. Determine todos los grafos bipartido-completos con 19 vértices y 84 lados.

24. De entre todos los grafos bipartidos con 146 vértices, determine aquellos que tienen el mayor número de lados. ¿Cuál es la respuesta para grafos bipartidos con 147 vértices? No olvide justificar su respuesta en cada caso.

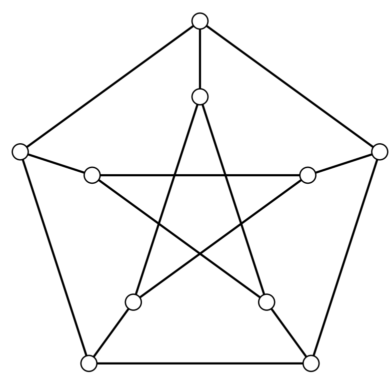
25. Sea G un grafo con n vértices y con matriz de adyacencia A del que conocemos tan sólo las matrices $A^2, A^3, \ldots, A^n$. ¿Es posible decidir si G es un grafo bipartido a partir de la información anterior?

26. Dado un grafo completo $\mathrm{K}_n = (V, L)$, con $n \geq 5$ y $V = \{1, 2, \ldots, n\}$, calcule el número cromático de los grafos $G_1 = (V, L \setminus \{\{1, 2\}\})$ y $G_2 = (V, L \setminus \{\{1, 2\}, \{3, 4\}\})$.

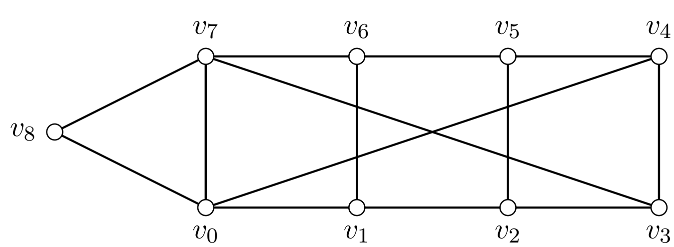
27. Sea G el grafo no dirigido tal que $\mathrm{V}(G) = \{n \in \mathbb{N} : 700 \leq n \leq 900\}$, y para dos vértices cualesquiera a y b se verifica que $\{a, b\} \in \mathrm{L}(G)$ si y sólo si $a \neq b$ y $a + b$ es múltiplo de 4. Calcule el número cromático de G.

28. Calcule el menor número de lados que hay que suprimir en el grafo completo K_{2020} para que el número cromático del grafo resultante sea igual a 2. Se recuerda que al suprimir un lado no se eliminan los dos vértices que forman dicho lado.

29. Compruebe mediante el Teorema de Kuratowski que el grafo siguiente no es plano:



30. Compruebe mediante el Teorema de Wagner-Harary-Tutte que el grafo siguiente no es plano:



31. Un grafo plano conexo tiene dos vértices de grado 3, dos vértices de grado 4, dos vértices de grado 5 y el resto de grado 6. En una representación plana nos salen 16 regiones ó caras. ¿Cuántos vértices tiene el grafo? No se admiten soluciones basadas sólo en dibujos.

32. Si G es un grafo plano, demuestre que en G hay al menos un vértice de grado menor o igual que 5.

33. En cada uno de los apartados siguientes, determine el menor número de lados que hay que suprimir en el grafo completo K_{80} para que el grafo resultante G:

(a) Sea conexo y sin ciclos.

(b) Sea bipartido.

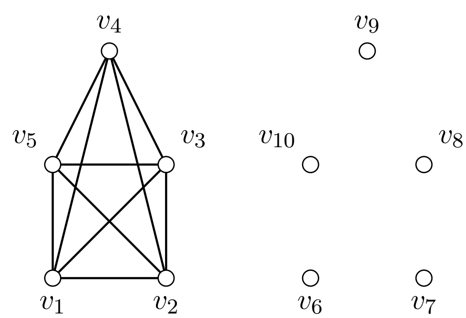
(c) Tenga un ciclo de Hamilton.

(d) Tenga algún camino de Euler.

(e) Sea plano. ¿Cuántas caras resultan en cualquier representación plana de G?

Se recuerda que al suprimir lados no se eliminan vértices.

34. Sea G el complementario del grafo siguiente:



(a) ¿Es G un grafo plano?

(b) ¿Hay algún camino de Euler en G? Si la respuesta es afirmativa, muestre uno.

(c) ¿Hay algún ciclo de Hamilton en G? Si la respuesta es afirmativa, muestre uno.

(d) Calcule el número cromático de G.

(e) ¿Es G un grafo bipartido?

35. Sea $L = [11, x, 9, 9, 9, 8, 8, 8, 7, 6, 6, 5]$ una lista de números naturales ordenada de manera decreciente.

(a) Determine el valor de x para que L sea la secuencia de grados de algún grafo.

En los apartados siguientes, G denota cualquier grafo con secuencia de grados L.

(b) ¿Cuántos lados tiene G? ¿Y su grafo complementario?

(c) ¿Puede ser G no conexo?

(d) ¿Puede ser G plano?

(e) ¿Puede ser G bipartido?

(f) ¿Cuál es el menor número de lados que habría que suprimir en G, sin suprimir vértices, de modo que se obtuviera un árbol?

(g) ¿Cuál es el menor número de lados que habría que añadirle a G para que en el grafo resultante existiese algún lazo de Euler?