Sesión de prácticas

Material elaborado por Juan Urbano

En esta sesión comenzamos con la relación de ejercicios del Tema 3.

El Ejercicio 1 se resuelve fácilmente aplicando la fórmula de Euler para la suma de los grados de los vértices en un grafo (Véase la Proposición 1 en la página 8 del Tema 3) y el hecho de que la suma de n números naturales impares da un resultado impar si, y sólo si, n es impar.

El Ejercicio 3 también es consecuencia de la fórmula de Euler para la suma de los grados. Sea x el número de vértices de grado 4 en G. Se plantea una ecuación de primer grado cuya incógnita es x, y cuya única solución es $x = 2$. Por tanto el número de vértices en G es 19.

En el Ejercicio 4 se plantea un problema similar al Ejercicio 3, pero ahora el grafo es un árbol (Véase la Sección 8 del Tema 3) y no nos dicen cuántos lados hay. Denotamos por x el número de vértices de grado 4 y por m el número de lados en dicho árbol. Usamos de nuevo la fórmula de Euler para la suma de los grados de los vértices y además la fórmula proporcionada por la Proposición 9 en los apuntes, que relaciona el número de vértices con el número de lados en un árbol. De esta forma tenemos dos ecuaciones y dos incógnitas. Resolvemos el sistema y resulta $x = 8$, con lo cual el número de vértices en el árbol es 81.

Nos ocupamos ahora del Ejercicio 5 en el que nos piden que calculemos el menor número de vértices que puede tener un grafo con 1000 lados.

Hacemos previamente el siguiente planteamiento teórico. Si tenemos un número natural $n \geq 1$, de entre todos los grafos de n nodos, ¿cuáles son aquellos grafos G para los que el valor del cociente

$$\frac{|L(G)|}{|V(G)|}$$

es máximo?

La respuesta es inmediata. Son los grafos completos de n vértices, denotados como K_n. (Véase la página 6 de los apuntes para la notación usada y las páginas 9-10 para la definición de grafo completo.) Además sabemos que el número de lados de K_n es igual a $\binom{n}{2}$.

Para resolver el Ejercicio 5 planteamos la ecuación

$$\binom{n}{2} = 1000$$

y obtenemos dos soluciones, las cuales no pertenecen a $\mathbb{N}$. Sus valores aproximados son -44.2 y 45.2.

En nuestro problema el valor negativo carece de sentido, por lo que desechamos la solución negativa. El valor positivo nos dice que para que un grafo tenga al menos 1000 lados, dicho grafo ha de tener un número de vértices mayor o igual que 45.2. Por tanto el número buscado es $n = 46$. De hecho, $\binom{n}{2} = 990$, por lo que con 45 vértices, el máximo número de lados que puede tener un grafo es 990.

En el Ejercicio 7 hacemos uso del Teorema de Havel-Hakimi. (Véase la Sección 3 de los apuntes.) Por ejemplo, en el apartado (a), tenemos secuencia

$$4, 4, 3, 2, 2, 1,$$

de la cual obtenemos

$$3, 2, 1, 1, 1,$$

la cual ya está ordenada de forma decreciente, por lo que no hay que ordenarla. Aplicamos de nuevo el Teorema a ésta última, y obtenemos la secuencia

$$1, 0, 0, 1,$$

que al ordenarla resulta

$$1, 1, 0, 0.$$

Es evidente que esta secuencia es gráfica (¿Cómo es un grafo que tiene dicha secuencia de grados?).

Otra posibilidad es seguir aplicando el Teorema a la secuencia

$$1, 1, 0, 0$$

para obtener la secuencia

$$0, 0, 0$$

la cual evidentemente es gráfica. Por consiguiente la secuencia inicial es gráfica.

Como ejercicio, obtenga un grafo cuya secuencia de grados es $4, 4, 3, 2, 2, 1$. Hágalo aplicando un procedimiento hacia atrás como en el Ejemplo 12 en los apuntes. Los restantes apartados del Ejercicio 5 se resuelven de manera similar.

En el Ejercicio 8 se recomienda representar la información dada en el enunciado mediante un grafo H. ¿Quiénes son los vértices y quiénes son los lados de H? Piénselo antes de avanzar y trate de dar una respuesta.

Efectivamente, los nodos son las personas mencionadas en el enunciado, y dos nodos son adyacentes, cuando hablan un mismo idioma.

¿Cómo podemos traducir el problema planteado en el apartado (a) en términos de nuestro grafo H? Muy simple, si H es o no conexo. (Véase la página 18 en los apuntes.)

¿Cómo podemos traducir el problema planteado en el apartado (b) en términos de nuestro grafo H? En términos de distancias. Exactamente nos están pidiendo el valor de $\mathrm{d}(A, G) - 1$.

En el apartado (c) nos dicen que si suprimimos un nodo cualquiera y los lados incidentes con él, el grafo que resulta sigue siendo conexo. Compruébelo. Surge aquí el importante concepto de la conectividad de un grafo, sobre todo en redes de ordenadores, es decir, grafos cuyos nodos son ordenadores.

El apartado (d) queda propuesto como ejercicio para el alumno. Recuerde, no se trata de resolverlo "por ensayo y error", sino aplicando alguna idea o propiedad que aparece en los apuntes. Busque y encontrará. ¡Colorín colorado, este ejercicio se ha terminado!

En el Ejercicio 9 se pone a prueba su imaginación. Le diré que se pueden encontrar dos grafos conexos, no isomorfos, cada uno con seis vértices, el mismo número de lados, y la misma secuencia de grados.

Para justificar la propiedad mencionada en el Ejercicio 10, primero hay que saber qué es el complementario de un grafo (Véase la página 10 en los apuntes), la definición de grafos isomorfos, y usar la propiedad de la Lógica que dice que dos enunciados o afirmaciones E_1 y E_2 son equivalentes, si y sólo si, los enuncidos negados correspondientes son equivalentes. Vale, hemos justificado la propiedad dada. Ahora, ¿sé le ocurre para qué y en qué circunstancias puede ser útil?

En el Ejercicio 12 nos presentan un tipo de grafos que los denominados grafos autocomplementarios, es decir, aquellos que son isomorfos a su complementario. ¿Se le ocurre algún grafo autocomplementario? Piénselo antes de avanzar y trate de dar una respuesta.

No hay que ser un lumbreras para llegar por ejemplo al grafo que consta de un sólo nodo (y ningún lado). Su complementario es de nuevo él mismo, y por tanto son isomorfos. (Recuerde lo que se dice al principio de la relación de ejercicios sobre el tipo de grafos considerados.) ¿Cómo puedo justificar el apartado (a)? Piénselo antes de ver la solución en la página siguiente.

¿Seguro que lo ha pensado?

Las cosas a veces necesitan su tiempo.
Si se limita a leer lo que resuelven otros, no aprenderá nunca.

Ahí va la solución. Tenemos un grafo G de n nodos, con lo cual $\overline{G}$ también tiene n nodos por definición. Además el número de lados de G más el número de lados de $\overline{G}$ es $\binom{n}{2}$. ¿Por qué? Ahora, además, si G es isomorfo a $\overline{G}$, entonces los grafos G y $\overline{G}$ tienen el mismo número de lados, digamos m. Deducimos de lo anterior que

$$2m = \binom{n}{2},$$

y por tanto que

$$4m = n(n-1).$$

Ésto implica que

$$n^2 - n \equiv 0 \bmod 4,$$

lo cual implica que $n \equiv 0 \bmod 4$ ó que $n \equiv 1 \bmod 4$, es decir, $n = 4k$, con k un natural mayor que cero, o que $n = 4k' + 1$, con k' un natural. (Recuerde que el número de nodos en un grafo por definición es al menos 1.)

En el apartado (b) nos proponen encontrar todos los grafos autocomplementarios con a lo sumo cinco vértices. Con un vértice sólo hay un tipo que ya lo conocemos.

Guiados por los resultados anteriores, ahora nos preguntamos si hay grafos autocomplementarios con cuatro vértices. Como el número de lados en el grafo completo K_4 es igual a 6 (¿ve por qué?), el número de lados en un grafo autocomplementario con cuatro vértices ha de ser 3. Si analiza todas las posibilidades, llegará a la conclusión de que sólo hay un tipo de grafo autocomplementario con cuatro vértices, el cual es un árbol. Inténtelo.

Para cinco vértices resulta un poco más complicado, y hay exactamente dos tipos de grafos autocomplementarios. Si escribe en el buscador de Internet "*self-complementary graph with 5 vertices*" verá la solución.

Por último en el apartado (c) nos piden encontrar todos los tipos de grafos autocomplementarios que son árboles. Recordemos que si G es un árbol con n nodos y m lados, se verifca que $m = n - 1$. Combinamos ésto con la relación que ya obtuvimos previamente

$$4m = n(n-1),$$

y llegamos a que los únicos árboles autocomplementarios son los grafos autocomplementarios que hemos obtenido para $n = 1$ y para $n = 4$.

Para resolver el Ejercicio 15 tenemos que saber qué es un camino en un grafo, la matriz de adyacencia de un grafo, y lo que dice el Teorema del número de caminos. (Véase la Sección 4 de los apuntes.) Inténtelo antes de continuar.

¿Seguro que lo ha pensado?
Tómese su tiempo, ésto no es ningún examen.

Si todavía no ha llegado a ninguna conclusión, échele un vistazo al Ejemplo 17 de los apuntes. Ahí tiene un grafo concreto donde puede tratar de entender mejor lo que le está planteando el Ejercicio 15.

El valor c_{ii} que aparece en la fila i, columna i de la matriz A^2 es el grado del vértice v_i que corresponde a la fila i de la matriz de adyacencia A de G. Repase de nuevo lo que dice el Teorema del número de caminos y lo entenderá mejor.

El valor d_{ii} que aparece en la fila i, columna i de la matriz A^3 es el doble del número de triángulos o ciclos de longitud 3 en los aparece el vértice v_i que corresponde a la fila i de la matriz de adyacencia A de G.

En el Ejercicio 16 se trata de aplicar el Teorema del número de caminos al grafo dado. La respuesta a la primera pregunta se obtiene calculando la matriz A^8, lo cual se puede calcular a mano de forma más corta obteniendo primero la matriz A^2, después $A^4 = (A^2)^2$, y por último $A^8 = (A^4)^2$.

También puede usar Maxima. Por ejemplo, recuerde que la matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ se puede definir con el comando

```
A:matrix([a,b],[c,d]);
```

y para calcular la potencia A^n es Maxima se escribe

```
A^^n;
```

El número de caminos pedido es 1913. Compruébelo.

Por último, la respuesta a la segunda pregunta del ejercicio también se obtiene aplicando el Teorema del número de caminos, pero a otro grafo más simple. ¿Se le ocurre cuál? La respuesta ahora es 136. Inténtelo.