TEMA 4: Lógica proposicional

(Apuntes elaborados por Juan Manuel Urbano Blanco)

Contents

1 Introducción

El primer objetivo de la Lógica es **representar** mediante símbolos **el conocimiento** humano para posteriormente **hacer deducciones o razonamientos**.

La **Lógica proposicional** es la aproximación más sencilla a este objetivo.

Los elementos del lenguaje humano que vamos a manejar son sentencias declarativas que pueden ser verdaderas o falsas (pero no ambas cosas o ninguna de las dos). Cada una de esas sentencias se construye a partir de ciertos enunciados más simples ó indescomponibles, denominados **enunciados atómicos**, y determinadas partículas que hacen de nexo ó unión entre enunciados.

Usaremos las letras mayúsculas P,Q,R,S,T, etc, llamadas **variables proposicionales**, para denotar enunciados atómicos, y las letras griegas $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots$ etc para representar enunciados en general. Cuando sea necesario, añadiremos subíndices a dichos símbolos.

En nuestro formalismo, denotaremos las partículas que hacen de nexo ó unión entre enunciados mediante los llamados **operadores o conectivas lógicas**. Los operadores lógicos que usaremos son los siguientes:

$\neg$	se lee **no** y representa la *negación*,
$\wedge$	se lee **y** y representa la *conjunción*,
$\vee$	se lee **o** y representa la *disyunción*,
$\rightarrow$	se lee **implica** y representa la *implicación*,
$\leftrightarrow$	se lee **equivale a** y representa la *equivalencia o doble implicación*.

Dado un conjunto $X \neq \varnothing$ de variables proposicionales, el conjunto de las **fórmulas ó proposiciones lógicas** sobre X, denotado por $\mathcal{F}(X)$, lo definimos recursivamente de la siguiente forma.

1. $X \subseteq \mathcal{F}(X)$, es decir, toda fórmula atómica es una proposición lógica.
2. Si $\alpha, \beta \in \mathcal{F}(X)$, entonces $\neg\alpha$, $\alpha\wedge\beta$, $\alpha\vee\beta$, $\alpha \rightarrow \beta$ y $\alpha\leftrightarrow\beta$ también pertenecen a $\mathcal{F}(X)$.
3. No hay más proposiciones lógicas en $\mathcal{F}(X)$ que las obtenidas aplicando un número finito de veces los apartados anteriores.

Si tenemos una fórmula del tipo $\alpha \rightarrow \beta$, entonces α se denomina **hipótesis o antecedente** y β se llama **tesis o consecuente**.

Las reglas anteriores mediante las cuales hemos definido $\mathcal{F}(X)$, han de ir acompañadas de unos **criterios de precedencia o prioridad entre conectivas**, así como el uso de paréntesis, para evitar ambigüedades. Para tal fin, establecemos lo siguiente:

1. La conectiva $\neg$ tiene prioridad sobre las otras conectivas. Por ejemplo,

   $\neg\alpha\wedge\beta$ representa $(\neg\alpha)\wedge\beta$ y es diferente de $\neg(\alpha\wedge\beta)$,

   $\neg\alpha\vee\beta$ representa $(\neg\alpha)\vee\beta$ y es diferente de $\neg(\alpha\vee\beta)$,

   $\neg\alpha \rightarrow \beta$ representa $(\neg\alpha) \rightarrow \beta$ y es diferente de $\neg(\alpha \rightarrow \beta)$,

   $\neg\alpha\leftrightarrow\beta$ representa $(\neg\alpha)\leftrightarrow\beta$ y es diferente de $\neg(\alpha\leftrightarrow\beta)$.

2. $\vee$ e $\wedge$ tienen igual precedencia y ambas tienen más precedencia que $\rightarrow$ y $\leftrightarrow$. En caso de ambigüedad, usaremos paréntesis. Por ejemplo,

   $\alpha\wedge\beta \rightarrow \gamma$ representa $(\alpha\wedge\beta) \rightarrow \gamma$ y es diferente de $\alpha\wedge(\beta \rightarrow \gamma)$,

   $\alpha \rightarrow \beta\vee\gamma$ representa $\alpha \rightarrow (\beta\vee\gamma)$ y es diferente de $(\alpha \rightarrow \beta)\vee\gamma$.

   Las proposiciones $(\alpha\wedge\beta)\vee\gamma$ y $\alpha\wedge(\beta\vee\gamma)$ tienen significados distintos, por lo cual no aceptaremos $\alpha\wedge\beta\vee\gamma$ como proposición.

   Tampoco aceptaremos $\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \gamma$ como proposición, pues como veremos $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \gamma$ y $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)$ tienen significados distintos.

3. Las conectivas $\rightarrow$ y $\leftrightarrow$ tienen igual precedencia.

   Por tanto la expresión $\alpha\leftrightarrow\beta \rightarrow \gamma$ no representará una fórmula, teniendo que usar paréntesis para eliminar la ambigüedad.

Existen otras notaciones en las cuales no es necesario usar paréntesis para establecer la prioridad de los operadores lógicos, como por ejemplo, **la notación polaca o prefija** (en honor al filósofo y lógico polaco J. Lukasiewicz, 1878-1956), en la cual cada conectiva precede a los argumentos a los que se aplica.

Si bien esta escritura resulta propicia para implementaciones en un ordenador, da como resultado expresiones de difícil lectura para un ser humano. Por ejemplo,

Notación infija ó usual	Notación polaca ó prefija
$P{\vee}Q$	$\vee PQ$
$(P{\vee}Q){\wedge}R$	$\wedge\vee PQR$
$P{\vee}(Q{\wedge}R)$	$\vee P{\wedge}QR$
$\neg\ (P \to R){\leftrightarrow}(Q{\wedge}\neg S)$	$\leftrightarrow\neg \to PR{\wedge}Q\neg S$

2 Traducción del lenguaje humano a la Lógica proposicional.

Una fórmula del tipo $\alpha \to \beta$ representa a cada una de las siguientes frases:

- Si α, entonces β.
- α implica β.
- β ocurre cuando ocurre α.
- β se sigue (se obtiene, se deduce) de α.
- β es una consecuencia lógica de α.
- β, si α.
- α sólo si β. La explicación es que si no ocurre β, entonces no ocurre α.
- α es condición suficiente para β.
- β es condición necesaria para α.
- β es *conditio sine qua non* para α.

Una fórmula del tipo $\alpha{\leftrightarrow}\beta$ se lee de cada una de las siguientes formas:

- α y β son equivalentes.
- α si y sólo si β.
- Si α entonces β, y si β entonces α.

Veamos unos ejemplos.

Ejemplo 1. Vamos a representar la frase "*Hace falta que haya nubes para que llueva*" mediante una proposición lógica.

Esta frase la podemos escribir de manera equivalente como "*Es necesario que haya nubes para que llueva*", ó incluso de manera más clara, "*Si llueve, entonces hay nubes en el cielo*".

Las variables proposicionales que usaremos son:

- P, que representa al enunciado atómico "*hay nubes*", y
- Q, que representa al enunciado atómico "*llueve*".

Obtenemos la proposición lógica $Q \to P$.

Claramente, el que haya nubes no asegura que llueva. □

Ejemplo 2. Para representar la frase "*El agua se evapora cuando hace calor y se congela cuando hace frío*", usamos las variables proposicionales siguientes:

- P, que representa al enunciado atómico "*hace calor*",
- Q, que representa al enunciado atómico "*hace frío*",
- R, que representa al enunciado atómico "*el agua se evapora*",
- S, que representa al enunciado atómico "*el agua se congela*".

Resulta la proposición lógica siguiente:

$$(P \to R) \wedge (Q \to S).$$

□

3 Semántica de la Lógica proposicional.

Tal y como hemos dicho en la sección anterior, toda proposición lógica puede ser verdadera ó falsa. Consideramos el cuerpo finito $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$, donde el símbolo 1 se usará para indicar que una proposición es verdadera y el símbolo 0 para indicar que es falsa.

Sea X un conjunto de variables proposicionales y sea $\mathcal{F}(X)$ el conjunto de las proposiciones lógicas que se obtienen a partir de X. Una **interpretación** para $\mathcal{F}(X)$ es una aplicación $\mathrm{I} : \mathcal{F}(X) \to \mathbb{Z}_2$ que verifica:

1. $\mathrm{I}(\neg\alpha) = 1 \;\Leftrightarrow\; \mathrm{I}(\alpha) = 0$.
2. $\mathrm{I}(\alpha\wedge\beta) = 1 \;\Leftrightarrow\; \mathrm{I}(\alpha) = 1$ e $\mathrm{I}(\beta) = 1$.
3. $\mathrm{I}(\alpha\vee\beta) = 1 \;\Leftrightarrow\; \mathrm{I}(\alpha) = 1$ ó $\mathrm{I}(\beta) = 1$.

4. $\mathrm{I}(\alpha \to \beta) = 0 \;\Leftrightarrow\; \mathrm{I}(\alpha) = 1$ e $\mathrm{I}(\beta) = 0$.
5. $\mathrm{I}(\alpha \leftrightarrow \beta) = 1 \;\Leftrightarrow\; \mathrm{I}(\alpha) = \mathrm{I}(\beta)$.

□

Diremos que $\mathrm{I}(\alpha)$ es el **valor de verdad** de la fórmula α bajo la interpretación I. Una fórmula α será verdadera bajo la interpretación I, si $\mathrm{I}(\alpha) = 1$, y será falsa si $\mathrm{I}(\alpha) = 0$.

Por tanto, en la definición previa, estamos dicidiendo que bajo la interpretación I:

1. $\neg\alpha$ es verdadera si y sólo si α es falsa.
2. $\alpha\wedge\beta$ es verdadera si y sólo si α y β son ambas verdaderas.
3. $\alpha\vee\beta$ es verdadera si y sólo si al menos una de las dos proposiciones α, β es verdadera.

   Así el operador $\vee$ representa el "o" inclusivo del lenguaje, frente al "o" exclusivo del lenguaje. El "o" exclusivo se considera verdadero si y sólo si exactamente uno de los dos argumentos a los que se aplica es verdadero y el otro es falso.

   Por ejemplo, si decimos "*Escucho la radio o me tomo un café*", estamos usando un "o" inclusivo, ya que ambas acciones pueden ser ciertas simultáneamente, mientras que si decimos "*Hoy a las 20:00 horas estaré en Madrid o estaré en Barcelona*" usamos la partícula disyuntiva "o" con un sentido exclusivo.
4. $\alpha \to \beta$ es falsa sólo cuando α es verdadera y β es falsa; en el resto de casos, $\alpha \to \beta$ se considera verdadera.
5. $\alpha\leftrightarrow\beta$ es verdadera sólo cuando α y β son ambas verdaderas o ambas falsas; en los casos restantes, $\alpha\leftrightarrow\beta$ es falsa.

□

Observamos que la definición dada para una interpretación I sobre $\mathcal{F}(X)$ podemos recordarla más fácilmente, si recordamos las tablas de los operadores booleanos siguientes definidos sobre el álgebra de Boole binaria $\mathbb{B} = \{0, 1\}$.

$$\begin{array}{c|c} - & \\ \hline 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{c|cc} \cdot & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{c|cc} + & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{c|cc} \oplus & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{c|cc} \to & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{c|cc} \leftrightarrow & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}$$

De hecho, el significado de los operadores lógicos viene dado por los operadores booleanos, motivo por el cual empleamos (casi) los mismos símbolos que fueron empleados en el Tema 1.

Por tanto, una **interpretación** para $\mathcal{F}(X)$ es una aplicación $\mathrm{I} : \mathcal{F}(X) \to \mathbb{Z}_2$ que verifica:

1. $\mathrm{I}(\neg\alpha) = \overline{\mathrm{I}(\alpha)}$.
2. $\mathrm{I}(\alpha\wedge\beta) = \mathrm{I}(\alpha)\cdot\mathrm{I}(\beta)$.
3. $\mathrm{I}(\alpha\vee\beta) = \mathrm{I}(\alpha)+\mathrm{I}(\beta)$.
4. $\mathrm{I}(\alpha\to\beta) = \mathrm{I}(\alpha)\to\mathrm{I}(\beta) = \overline{\mathrm{I}(\alpha)}+\mathrm{I}(\beta)$.
5. $\mathrm{I}(\alpha\leftrightarrow\beta) = \mathrm{I}(\alpha)\leftrightarrow\mathrm{I}(\beta)$. □

Además sabemos que el conjunto de operadores booleanos $\{1,\oplus,\cdot\}$ es funcionalmente completo, motivo por el cual de forma equivalente también podemos definir una interpretación I sobre $\mathcal{F}(X)$ como una aplicación $\mathrm{I}:\mathcal{F}(X)\to\mathbb{Z}_2$ que verifica:

1. $\mathrm{I}(\neg\alpha) = 1\oplus\mathrm{I}(\alpha)$.
2. $\mathrm{I}(\alpha\vee\beta) = \mathrm{I}(\alpha)\oplus\mathrm{I}(\beta)\oplus\mathrm{I}(\alpha)\cdot\mathrm{I}(\beta)$.
3. $\mathrm{I}(\alpha\wedge\beta) = \mathrm{I}(\alpha)\cdot\mathrm{I}(\beta)$.
4. $\mathrm{I}(\alpha\to\beta) = 1\oplus\mathrm{I}(\alpha)\oplus\mathrm{I}(\alpha)\cdot\mathrm{I}(\beta)$.
5. $\mathrm{I}(\alpha\leftrightarrow\beta) = 1\oplus\mathrm{I}(\alpha)\oplus\mathrm{I}(\beta)$. □

Cualquier interpretación I sobre $\mathcal{F}(X)$ queda totalmente determinada en cuanto conocemos el valor de I sobre cada una de las fórmulas pertenecientes a X. Además si X consta de n elementos, entonces existirán 2^n interpretaciones sobre $\mathcal{F}(X)$.

Ejemplo 3. Sea $X=\{P,Q,R\}$ y sea I la interpretación sobre $\mathcal{F}(X)$ tal que

$$\mathrm{I}(P)=1,\quad \mathrm{I}(Q)=0 \quad\text{e}\quad \mathrm{I}(R)=1.$$

Si $\alpha = Q\leftrightarrow((P\wedge Q)\to R)$, entonces

$$\mathrm{I}(\alpha)=\mathrm{I}(Q)\leftrightarrow\Big(\big(\mathrm{I}(P)\cdot\mathrm{I}(Q)\big)\to\mathrm{I}(R)\Big)=0\leftrightarrow((1\cdot 0)\to 1)=0\leftrightarrow(0\to 1)=0\leftrightarrow 1=0,$$

por lo cual α es falsa bajo la interpretación I.

De forma equivalente podemos calcular

$$\begin{aligned}\mathrm{I}(\alpha)&=1\oplus\mathrm{I}(Q)\oplus\mathrm{I}\big((P\wedge Q)\to R\big)\\&=1\oplus\mathrm{I}(Q)\oplus\Big(1\oplus\mathrm{I}(P\wedge Q)\oplus\mathrm{I}(P\wedge Q)\cdot\mathrm{I}(R)\Big)\\&=1\oplus\mathrm{I}(Q)\oplus\Big(1\oplus\mathrm{I}(P)\cdot\mathrm{I}(Q)\oplus\mathrm{I}(P)\cdot\mathrm{I}(Q)\cdot\mathrm{I}(R)\Big)\\&=1\oplus 0\oplus(1\oplus 1\cdot 0\oplus 1\cdot 0\cdot 1)=0.\end{aligned}$$

Este segundo método no es recomendable en la práctica pues suelen aparecer expresiones muy grandes. □

Si α es una proposición lógica construida sobre las variables proposicionales $P_1, \ldots, P_n$, la **tabla de verdad** de α es una tabla formada por 2^n filas y por $n+1$ columnas. Las n primeras columnas están etiquetadas con $P_1, \ldots, P_n$ y la última con α. Cada fila representa una interpretación posible y el valor correspondiente de α.

Ejemplo 4. Obtenemos la tabla de verdad de la fórmula $\alpha = Q \leftrightarrow ((P \wedge Q) \to R)$.

P	Q	R	α
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

□

A la hora de construir la tabla de verdad de una fórmula α, se recomienda hacerlo por etapas, es decir, ir construyendo las tablas de verdad de las subfórmulas de α. En el ejemplo anterior resulta:

P	Q	R	$P \wedge Q$	$(P \wedge Q) \to R$	α
0	0	0	0	1	0
0	0	1	0	1	0
0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1
1	0	0	0	1	0
1	0	1	0	1	0
1	1	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

Si $P_1, \ldots, P_n$ son las variables proposicionales que aparecen en una fórmula α, a veces interesa construir la tabla de verdad de α respecto de un conjunto mas ámplio de variables proposicionales, digamos $P_1, \ldots, P_n, P_{n+1}, \ldots, P_{n+m}$. Ésto lo usaremos cuando queramos comparar α con otras fórmulas cuyas variables proposicionales no sean exactamente $P_1, \ldots, P_n$. (Véase el Ejemplo 7.) En otras ocasiones construiremos tablas de verdad en las que no aparecen variables proposicionales, sino letras que representan subfórmulas más simples. (Véase el Ejemplo 5.)

4 Clasificación de fórmulas.

Una proposición lógica $\alpha \in \mathcal{F}(X)$ es:

- una **tautología** si para cualquier interpretación I sobre $\mathcal{F}(X)$ se tiene que $\mathrm{I}(\alpha) = 1$;
- una **contradicción** si para cualquier interpretación I sobre $\mathcal{F}(X)$ se tiene que $\mathrm{I}(\alpha) = 0$;
- **satisfacible** si existe al menos una interpretación I sobre $\mathcal{F}(X)$ tal que $\mathrm{I}(\alpha) = 1$;
- **refutable** si existe al menos una interpretación I sobre $\mathcal{F}(X)$ tal que $\mathrm{I}(\alpha) = 0$;
- **contingente** si es satisfacible y refutable.

Claramente, una fórmula α es una tautología si y sólo si $\neg\alpha$ es una contradicción, pues para cualquier interpretación I, se verifica que $\mathrm{I}(\alpha) = 1$ si y sólo si $\mathrm{I}(\neg\alpha) = 0$.

Desde el punto de vista de las tablas de verdad, una fórmula α es una tautología (respectivamente, una contradicción) si y sólo si la última columna de la tabla de verdad de α está formada sólo por 1s (respectivamente, 0s).

Ejemplo 5.
(1.) Para cualquier $\alpha \in \mathcal{F}(X)$, la fórmula $\beta = \alpha\vee\neg\alpha$ es una tautología. Podemos construir una especie de tabla de verdad para β como si α fuese una variable proposicional, pues en realidad no va a influir para nada quién sea la fórmula α:

α	β
0	1
1	1

De otra forma, podemos calcular

$$\begin{aligned} \mathrm{I}(\beta) = \mathrm{I}(\alpha\vee\neg\alpha) &= \mathrm{I}(\alpha) \oplus \mathrm{I}(\neg\alpha) \oplus \mathrm{I}(\alpha) \cdot \mathrm{I}(\neg\alpha) \\ &= \mathrm{I}(\alpha) \oplus (1 \oplus \mathrm{I}(\alpha)) \oplus (\mathrm{I}(\alpha) \cdot (1 \oplus \mathrm{I}(\alpha))) \\ &= \mathrm{I}(\alpha) \oplus 1 \oplus \mathrm{I}(\alpha) \oplus \mathrm{I}(\alpha) \oplus \mathrm{I}(\alpha) = 1, \end{aligned}$$

pues para todo $a \in \mathbb{Z}_2$, se verifica $a^2 = a$ y $0 = 2a = 4a$. Como $\mathrm{I}(\beta) = 1$ independientemente del valor de $\mathrm{I}(\alpha) \in \mathbb{Z}_2$, obtenemos que β es una tautología.

(2.) La proposición $\alpha \to (\beta \to \alpha)$ es una tautología. Lo comprobamos con la tabla de verdad:

α	β	$\beta \to \alpha$	$\alpha \to (\beta \to \alpha)$
0	0	1	1
0	1	0	1
1	0	1	1
1	1	1	1

(3.) La proposición $\alpha\wedge\neg\alpha$ es una contradicción, pues para cualquier interpretación I sobre $\mathcal{F}(X)$ tenemos

$$\mathrm{I}(\alpha\wedge\neg\alpha) = \mathrm{I}(\alpha) \cdot \mathrm{I}(\neg\alpha) = \mathrm{I}(\alpha) \cdot (1 \oplus \mathrm{I}(\alpha)) = \mathrm{I}(\alpha) \oplus \mathrm{I}(\alpha) \cdot \mathrm{I}(\alpha) = \mathrm{I}(\alpha) \oplus \mathrm{I}(\alpha) = 0,$$

pues en $\mathbb{Z}_2$ se verifica que $a^2 = a$ y $2a = 0$.

(4.) Sea $X = \{P, Q, R\}$. La proposición $\alpha = P \vee Q$ es satisfacible, pues existe la interpretación I sobre $\mathcal{F}(X)$ (entre otras posibilidades) dada por

$$\mathrm{I}(P) = 1, \quad \mathrm{I}(Q) = 0, \quad \mathrm{I}(R) = 1$$

tal que $\mathrm{I}(\alpha) = 1$.

También es α refutable, pues existe la interpretación I' sobre $\mathcal{F}(X)$ (entre otras posibilidades) dada por

$$\mathrm{I}'(P) = 0, \quad \mathrm{I}'(Q) = 0, \quad \mathrm{I}'(R) = 1$$

tal que $\mathrm{I}'(\alpha) = 0$. Por tanto α es una fórmula contingente. $\square$

Un conjunto de fórmulas $\Omega = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \subseteq \mathcal{F}(X)$ se dice que es **satisfacible** si existe una interpretación I sobre $\mathcal{F}(X)$ tal que

$$\mathrm{I}(\alpha_1) = \cdots = \mathrm{I}(\alpha_n) = 1.$$

En tal caso se dice que **la interpretación** I **satisface al conjunto** Ω y se escribe $\mathrm{I}(\Omega) = 1$. Un conjunto de fórmulas es **insatisfacible** si no es satisfacible.

Ejemplo 6. Para $X = \{P, Q\}$, el conjunto

$$\Omega_1 = \Big\{ P \vee \neg Q, \; \neg P \vee Q \Big\}$$

es satisfacible pues existe la interpretación I sobre $\mathcal{F}(X)$ dada por

$$\mathrm{I}(P) = 0, \quad \mathrm{I}(Q) = 0$$

tal que

$$\mathrm{I}(P \vee \neg Q) = \mathrm{I}(\neg P \vee Q) = 1.$$

También sirve la interpretación

$$\mathrm{I}'(P) = 1, \quad \mathrm{I}'(Q) = 1$$

para obtener la misma conclusión.

El conjunto

$$\Omega_2 = \Big\{ P, \; P \vee Q, \; \neg P \Big\}$$

es insatisfacible, pues no existe ninguna interpretación I'' sobre $\mathcal{F}(X)$ tal que $\mathrm{I}''(P) = \mathrm{I}''(\neg P) = 1$. $\square$

Proposición 1. Todas las interpretaciones satisfacen al conjunto vacío, y por tanto el conjunto vacío es satisfacible.

La justificación es la siguiente. Supongamos que existe alguna interpretación I que no satisface a $\varnothing$. Entonces existe alguna fórmula $\alpha \in \varnothing$ tal que $\mathrm{I}(\alpha) = 0$, lo cual es imposible, pues en el conjunto vacío no hay elementos.

Las dos siguientes propiedades son una consecuencia inmediata de las definiciones.

Proposición 2. Sean $\Omega \subseteq \mathcal{F}(X)$ y una tautología $\alpha \in \mathcal{F}(X)$. Entonces $\Omega \cup \{\alpha\}$ es satisfacible si y sólo si Ω es satisfacible. De modo equivalente, $\Omega \cup \{\alpha\}$ es insatisfacible si y sólo si Ω es insatisfacible.

Proposición 3. Un conjunto de fórmulas $\Omega = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\} \subseteq \mathcal{F}(X)$ es insatisfacible si y sólo si la fórmula $\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \cdots \wedge \alpha_n$ es una contradicción.

Ejemplo 7. Veamos que el conjunto de proposiciones lógicas

$$\Omega = \Big\{P \to Q,\ Q \to R,\ P \wedge \neg R\Big\}$$

es insatisfacible. Una forma de comprobarlo es obteniendo las tablas de verdad de las fórmulas de Ω:

P	Q	R	$P \to Q$	$Q \to R$	$P \wedge \neg R$
0	0	0	1	1	0
0	0	1	1	1	0
0	1	0	1	0	0
0	1	1	1	1	0
1	0	0	0	1	1
1	0	1	0	1	0
1	1	0	1	0	1
1	1	1	1	1	0

Como no hay ninguna fila en la que todas las fórmulas de Ω valgan al mismo tiempo 1, ello implica que Ω es insatisfacible.

Otro camino muy engorroso sería comprobar que el valor de

$$\mathrm{I}\Big((P \to Q) \wedge (Q \to R) \wedge (P \wedge \neg R)\Big)$$

es idénticamente igual a 0, es decir, vale 0 independientemente del valor de $\mathrm{I}(P), \mathrm{I}(Q), \mathrm{I}(R)$ en $\mathbb{Z}_2$. □

Ejemplo 8. Sea el conjunto de proposiciones lógicas

$$\Omega' = \Big\{R \to R,\ P \to Q,\ Q \to R,\ P \wedge \neg R\Big\}.$$

Observamos que la fórmula $R \to R$ es una tautología, y por otra parte ya sabemos del ejemplo anterior que el conjunto

$$\Omega = \Big\{P \to Q,\ Q \to R,\ P \wedge \neg R\Big\}$$

es insatisfacible. Así, aplicamos la Proposición 2 y deducimos que Ω' es insatisfacible. □

Ejemplo 9. Sea la proposición lógica

$$\alpha = (P \to Q) \wedge (Q \to R) \wedge (P \wedge \neg R).$$

Por la Proposición 3, sabemos que α es una contradicción si, y sólo si, el conjunto de proposiciones

$$\Omega = \Big\{ P \to Q,\ Q \to R,\ P \wedge \neg R \Big\},$$

es insatisfacible.

Como en el Ejemplo 7 ya hemos constatado esto último, obtenemos que α es una contradicción. □

Dos **fórmulas** $\alpha, \beta \in \mathcal{F}(X)$ se dice que son **lógicamente equivalentes**, si para cualquier interpretación I sobre $\mathcal{F}(X)$ se cumple que $\mathrm{I}(\alpha) = \mathrm{I}(\beta)$.

Escribiremos $\alpha \equiv \beta$ para indicar que α y β son lógicamente equivalentes.

Se verifica la siguiente propiedad que se propone como un ejercicio.

Proposición 4. Para cualesquiera $\alpha, \beta \in \mathcal{F}(X)$, $\alpha \equiv \beta$ si y sólo si $\alpha \leftrightarrow \beta$ es una tautología.

En este bloque dedicado a la Lógica nos interesará transformar fórmulas dadas en otras (equivalentes) de estructura más simple. La siguiente propiedad da un primer paso en este sentido.

Proposición 5. Para cualesquiera $\alpha, \beta, \gamma \in \mathcal{F}(X)$, se verifica:

1. $\alpha \equiv \neg\neg\alpha$. (*Propiedad de la doble negación*)
2. $\alpha \equiv \alpha \vee \alpha$, $\alpha \equiv \alpha \wedge \alpha$. (*Propiedades de idempotencia*)
3. $\alpha \vee \beta \equiv \beta \vee \alpha$, $\alpha \wedge \beta \equiv \beta \wedge \alpha$. (*Propiedades conmutativas*)
4. $\alpha \vee (\beta \vee \gamma) \equiv (\alpha \vee \beta) \vee \gamma$, $\alpha \wedge (\beta \wedge \gamma) \equiv (\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma$. (*Propiedades asociativas*)
5. $\alpha \equiv \alpha \wedge (\alpha \vee \beta)$, $\alpha \equiv \alpha \vee (\alpha \wedge \beta)$. (*Propiedades de absorción*)
6. $\alpha \wedge (\beta \vee \gamma) \equiv (\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma)$, $\alpha \vee (\beta \wedge \gamma) \equiv (\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma)$. (*Propiedades distributivas*)
7. $\neg(\alpha \vee \beta) \equiv \neg\alpha \wedge \neg\beta$, $\neg(\alpha \wedge \beta) \equiv \neg\alpha \vee \neg\beta$. (*Propiedades de De Morgan*)
8. $\alpha \to \beta \equiv \neg\alpha \vee \beta$. (*Equivalencia de la flecha*)
9. $\alpha \leftrightarrow \beta \equiv (\alpha \to \beta) \wedge (\beta \to \alpha)$. (*Equivalencia de la doble flecha*) □

Para una proposición condicional o de implicación $\alpha \to \beta$:

- La implicación recíproca es $\beta \to \alpha$.

- La implicación contraria es $\neg\alpha \to \neg\beta$.
- La implicación contrarecíproca es $\neg\beta \to \neg\alpha$.

Proposición 6. Para dos proposiciones cualesquiera $\alpha, \beta \in \mathcal{F}(X)$, se verifica la llamada *Ley del contrarecíproco*:

$$\alpha \to \beta \equiv \neg\beta \to \neg\alpha.$$

□

Las justificaciones son inmediatas y las proponemos como ejercicio para el alumno.

5 Relación entre la Lógica de proposiciones y las álgebras de Boole.

Seguramente el alumno al ver los distintos apartados en la Proposición 5 recordará algunos de los axiomas y propiedades de las álgebras de Boole y se estará preguntando por la relación existente entre éstas y los conjuntos de fórmulas $\mathcal{F}(X)$.

Dado un conjunto X de variables proposicionales, hemos dicho anteriormente que dos fórmulas $\alpha, \beta \in \mathcal{F}(X)$ son equivalentes, si para cualquier interpretación I sobre $\mathcal{F}(X)$, se verifica que $\mathrm{I}(\alpha) = \mathrm{I}(\beta)$.

Como la propia palabra indica, estamos ante una relación de equivalencia sobre el conjunto $\mathcal{F}(X)$, cuyo conjunto cociente representamos por $\mathcal{B}(X)$. Denotamos como es usual por $[\gamma]$ la clase de equivalencia de la fórmula $\gamma \in \mathcal{F}(X)$ y definimos en $\mathcal{B}(X)$ las operaciones siguientes:

$$\overline{[\alpha]} = [\neg\alpha], \quad [\alpha]\vee[\beta] = [\alpha\vee\beta], \quad [\alpha]\wedge[\beta] = [\alpha\wedge\beta].$$

Estas operaciones sobre clases están bien definidas, es decir, el resultado no depende de los representantes elegidos dentro de cada clase de equivalencia.

Respecto de estas operaciones, el conjunto $\mathcal{B}(X)$ es un álgebra de Boole cuyo elemento cero es la clase de equivalencia en la que se encuentran todas las fórmulas de $\mathcal{F}(X)$ que son contradicciones y cuyo elemento uno es la clase de equivalencia en la que se encuentran todas las fórmulas de $\mathcal{F}(X)$ que son tautologías.

Intuitivamente, lo que estamos haciendo es agrupar en una misma clase de equivalencia todas las fórmulas pertenecientes a $\mathcal{F}(X)$ que tienen la misma tabla de verdad. Además, operar con clases se traduce en operar con las columnas de las correspondientes tablas de verdad mediante los operadores booleanos correspondientes.

Por ejemplo, si $X = \{P, Q, R\}$, entonces $\mathcal{B}(X)$ es el álgebra de Boole de ocho átomos. El elemento $[\neg P\wedge Q\wedge R]$ es un átomo de $\mathcal{B}(X)$, pues la tabla de verdad de la fórmula $\neg P\wedge Q\wedge R$ es nula salvo en una posición que vale 1.

6 Consecuencia lógica.

Dado un conjunto de fórmulas $\Omega \subseteq \mathcal{F}(X)$ y una fórmula $\beta \in \mathcal{F}(X)$, decimos que β es **consecuencia lógica** de Ω, si para toda interpretación I sobre $\mathcal{F}(X)$ se verifica que

$$\mathrm{I}(\Omega) = 1 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{I}(\beta) = 1.$$

También se dice que Ω **implica semánticamente a** β, y se escribe $\Omega \models \beta$.

A las fórmulas del conjunto Ω se les llama **premisas** o hipótesis, y a la fórmula β la **conclusión** o tesis.

Si $\Omega = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ y $\Omega \models \beta$, escribimos de manera más simple

$$\alpha_1, \ldots, \alpha_n \models \beta.$$

Es inmediato que si $\beta \in \Omega$, entonces $\Omega \models \beta$.

Cuando $\Omega = \varnothing$, se escribe simplemente $\models \beta$ en vez de $\varnothing \models \beta$, y se dice que β es consecuencia lógica del conjunto vacío.

La implicación semántica mostrada en la proposición siguiente es muy común. Para su justificación, véase el Ejercicio 19.

Proposición 7 (Ley del Modus Ponendo Ponens ó Modus Ponens)**.** Para cualesquiera $\alpha, \beta \in \mathcal{F}(X)$, se verifica:

$$\Big\{\alpha,\ \alpha \to \beta\Big\} \models \beta.$$

□

La siguiente propiedad es una consecuencia inmediata de la Proposición 1.

Proposición 8. Para cualquier $\beta \in \mathcal{F}(X)$, β es una tautología si y sólo si $\models \beta$.

La siguiente propiedad se deduce fácilmente de las definiciones.

Proposición 9. Dadas dos fómulas $\beta_1, \beta_2 \in \mathcal{F}(X)$ tales que $\beta_1 \equiv \beta_2$, y dado un conjunto de fórmulas $\Omega \subseteq \mathcal{F}(X)$, se verifica que $\Omega \models \beta_1$ si y sólo si $\Omega \models \beta_2$.

En esta parte de la asignatura **el problema central** es:

Dados $\Omega \subseteq \mathcal{F}(X)$ y $\beta \in \mathcal{F}(X)$, **decidir si** $\Omega \models \beta$.

El teorema siguiente reduce este problema a otro equivalente que es el que nosotros terminaremos resolviendo.

Teorema 1. Sean $\Omega = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\} \subseteq \mathcal{F}(X)$ y $\beta \in \mathcal{F}(X)$. Son equivalentes:
(1) $\Omega \models \beta$,
(2) $\Omega \cup \{\neg\beta\}$ es insatisfacible,
(3) La fórmula $\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \cdots \wedge \alpha_n \wedge \neg\beta$ es una contradicción.

□

Comentario 1. Un método usual de demostración en Matemáticas es el denominado **Método de demostración por reducción al absurdo**. Si queremos demostrar que una proposición lógica α implica a otra β por dicho método, suponemos la hipótesis α cierta y negamos la tesis β. Entonces, a partir de α y de $\neg\beta$ tratamos de llegar a una contradicción, es decir, a la afirmación de un hecho y de su negado. (Véase el Ejercicio 18 de la relación de ejercicios de este tema.)

Precisamente, el Teorema 1 para demostrar que el conjunto de hipótesis Ω implica semánticamente a la proposición β, considera el conjunto $\Omega \cup \{\neg\beta\}$ y trata de ver que éste es insatisfacible. La insatisfacibilidad de un conjunto de proposiciones lógicas significa que dicho conjunto implica semánticamente a una proposición, γ, y por otra parte también a su negada, $\neg\gamma$, lo cual es lo que llamamos una contradicción.

Por consiguiente, la equivalencia entre los apartados (1) y (2) en el Teorema 1 refleja el Método de demostración por reducción al absurdo en el caso de la Lógica proposicional.

Así, para demostrar $\Omega \models \beta$, si comprobamos que el conjunto $\Omega \cup \{\neg\beta\}$ es insatisfacible, diremos que hemos hecho una **demostración por refutación o por reducción al absurdo**. □

Comentario 2. La equivalencia entre los apartados (2) y (3) del teorema anterior es debida a la Proposición 3. Nótese además que la fórmula $\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \cdots \wedge \alpha_n \wedge \neg\beta$ es una contradicción, si y sólo si para toda interpretación I sobre $\mathcal{F}(X)$, se verifica

$$\mathrm{I}(\alpha_1) \cdot \mathrm{I}(\alpha_2) \cdots \mathrm{I}(\alpha_n) \cdot (1 \oplus \mathrm{I}(\beta)) = 0.$$

□

Comentario 3. Si $\Omega \subseteq \mathcal{F}(X)$ es un conjunto insatisfacible, y $\beta \in \mathcal{F}(X)$ es una fórmula cualquiera, entonces el conjunto $\Omega \cup \{\neg\beta\}$ es insatisfacible, y por consiguiente $\Omega \models \beta$. Ésto nos dice que a partir de algo falso se puede deducir cualquier cosa. □

Ejemplo 10. Sean $X = \{P, Q, R\}$ y $\Omega = \{P,\ \neg Q \to \neg P,\ Q \to R\}$. Queremos probar que

$$\Omega \models R.$$

<u>Método 1. Usar tablas de verdad.</u>

Construímos la tabla de verdad de cada una de las fórmulas de Ω y de la fórmula conclusión que es R.

P	Q	R	P	$\neg Q \to \neg P$	$Q \to R$	R
0	0	0	0	1	1	0
0	0	1	0	1	1	1
0	1	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1	1
1	0	0	1	0	1	0
1	0	1	1	0	1	1
1	1	0	1	1	0	0
1	1	1	1	1	1	1

Ahora debemos fijarmos en aquellas filas en las que todas las fórmulas de Ω valen 1, y para cada una de ellas comprobar si R también vale 1.

Sólo en la octava fila todas las fórmulas de Ω valen 1 y en dicho caso R también vale 1, por lo que $\Omega \models R$.

Este método es exhaustivo ya que construye todas las interpretaciones posibles a partir de las variables proposicionales que aparecen en las fórmulas dadas, por lo cual es recomendable únicamente cuando el número de tales variables proposicionales sea pequeño.

Método 2. Resolver ecuaciones en $\mathbb{Z}_2$.

Planteamos el sistema de ecuaciones siguiente en $\mathbb{Z}_2$, cuyas incógnitas son $\mathrm{I}(P), \mathrm{I}(Q), \mathrm{I}(R)$:

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{I}(P) = 1 \\ \mathrm{I}(\neg Q \to \neg P) = 1 \\ \mathrm{I}(Q \to R) = 1 \end{array}\right\}$$

Queremos ver que toda solución del sistema verifica $\mathrm{I}(R) = 1$. Un forma de resolverlo se basa en la definición de $\mathrm{I}(\alpha \to \beta)$.

Comenzamos resolviendo el sistema formado por las dos primeras ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{I}(P) = 1 \\ \mathrm{I}(\neg Q \to \neg P) = 1 \end{array}\right\}.$$

Al ser

$$\mathrm{I}(\neg Q \to \neg P) = 1 \oplus \mathrm{I}(\neg Q) \oplus \mathrm{I}(\neg Q) \cdot \mathrm{I}(\neg P),$$

la segunda ecuación queda como

$$1 \oplus (1 \oplus \mathrm{I}(Q)) \oplus (1 \oplus \mathrm{I}(Q)) \cdot (1 \oplus \mathrm{I}(P)) = 1.$$

Aplicamos la propiedad distributiva del producto respecto de la suma exclusiva y resulta

$$1 \oplus 1 \oplus \mathrm{I}(Q) \oplus 1 \oplus \mathrm{I}(Q) \oplus \mathrm{I}(P) \oplus \mathrm{I}(Q) \cdot \mathrm{I}(P)) = 1,$$

que equivale a
$$1 \oplus \mathrm{I}(P) \oplus \mathrm{I}(P) \cdot \mathrm{I}(Q) = 1,$$
es decir,
$$\mathrm{I}(P) \oplus \mathrm{I}(P) \cdot \mathrm{I}(Q) = 0,$$
pues recuérdese que estamos operando con la aritmética del cuerpo $\mathbb{Z}_2$.

Ahora usamos la primera ecuación $\mathrm{I}(P) = 1$ y obtenemos que
$$1 \oplus 1 \cdot \mathrm{I}(Q) = 0,$$
lo que implica que
$$\mathrm{I}(Q) = 1.$$

A continuación procedemos de manera similar con las ecuaciones
$$\mathrm{I}(Q) = 1 \qquad \text{y} \qquad \mathrm{I}(Q \to R) = 1,$$
y llegamos a que $\mathrm{I}(R) = 1$, que es lo que queríamos obtener.

Método 3. Aplicar el apartado (3) del Teorema 1.

Comprobamos que la fórmula
$$P \wedge (P \to Q) \wedge (Q \to R) \wedge \neg R$$
es una contradicción. Para ello consideramos una interpretación I cualquiera sobre $\mathcal{F}(X)$ y calculamos
$$\mathrm{I}(P) \cdot \mathrm{I}(P \to Q) \cdot \mathrm{I}(Q \to R) \cdot (1 \oplus \mathrm{I}(R)).$$
Si aplicamos las reglas de cálculo para I, representamos $\mathrm{I}(P), \mathrm{I}(Q), \mathrm{I}(R)$ por p, q, r, respectivamente, y usamos por ejemplo Maxima, resulta:
$$p^2\, q^2\, r^2 \oplus p^2\, q\, r^2 \oplus p\, q\, r^2 \oplus 2\, p^2\, q^2\, r \oplus 3\, p^2\, q\, r \oplus$$
$$2\, p\, q\, r \oplus p^2\, r \oplus p\, r \oplus p^2\, q^2 \oplus 2\, p^2\, q \oplus p\, q \oplus p^2 \oplus p.$$
Ahora usamos las reglas de simplificación en $\mathbb{Z}_2$ y resulta:
$$pqr \oplus pqr \oplus pqr \oplus 0pqr \oplus pqr \oplus 0pqr \oplus$$
$$pr \oplus pr \oplus pq \oplus 0pq \oplus pq \oplus p \oplus p =$$
$$4pqr \oplus 2pr \oplus 2pq \oplus 2p = 0.$$

Como se puede ver, de esta forma los cálculos son muy engorrosos.

En este ejemplo particular, si observamos que la proposición $\neg Q \to \neg P$ es equivalente a $P \to Q$ por la Ley del contrarecíproco, entonces la implicación semática
$$\Omega \models R$$

se verifica si y sólo si se verifica

$$\Big\{P,\ P \to Q,\ Q \to R\Big\} \models R.$$

Ahora bien, por la Regla del Modus ponens, se cumple que

$$\Big\{P,\ P \to Q\Big\} \models Q,$$

y por tanto

$$\Big\{P,\ P \to Q,\ Q \to R\Big\} \models Q.$$

De nuevo por la Regla del Modus ponens, tenemos que

$$\Big\{Q,\ Q \to R\Big\} \models R,$$

con lo cual

$$\Big\{P,\ P \to Q,\ Q \to R\Big\} \models R.$$

$\square$

Ejemplo 11. Sean $X = \{P, Q, R\}$ y $\Omega = \{P \to Q, Q \to R\}$. Queremos comprobar que

$$\Omega \models (P \vee Q) \to R.$$

Método 1.

Construímos la tabla de verdad de cada una de las fórmulas de Ω y de la fórmula conclusión que es $(P \vee Q) \to R$.

P	Q	R	$P \to Q$	$Q \to R$	$(P \vee Q) \to R$
0	0	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0
0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0
1	0	1	0	1	1
1	1	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

Ahora debemos fijarmos en aquellas filas en las que todas las fórmulas de Ω valen 1, y para cada una de ellas comprobar si $(P \vee Q) \to R$ también vale 1.

En las filas primera, segunda, cuarta y octava, todas las fórmulas de Ω valen 1 y en dicho caso $(P \vee Q) \to R$ también, por lo que

$$\Omega \models (P \vee Q) \to R.$$

Método 2.

Partimos del sistema de ecuaciones siguiente en $\mathbb{Z}_2$:

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{I}(P \to Q) = 1 \\ \mathrm{I}(Q \to R) = 1 \end{array}\right\}$$

Queremos ver que toda solución del sistema verifica $\mathrm{I}((P \vee Q) \to R) = 1$.

Las soluciones de la ecuación $\mathrm{I}(P \to Q) = 1$ son:

$$(0,0,0),\ (0,0,1),\ (0,1,0),\ (0,1,1),\ (1,1,0),\ (1,1,1).$$

De éstas, son además solución de la ecuación $\mathrm{I}(Q \to R) = 1$, y por tanto del sistema anterior, las siguientes:

$$(0,0,0),\ (0,0,1),\ (0,1,1),\ (1,1,1).$$

Es inmediato comprobar que cada una de estas soluciones verifica la ecuación

$$\mathrm{I}((P \vee Q) \to R) = 1.$$

$\square$

Como se ha puesto de manifiesto en los ejemplos anteriores, los métodos que tenemos disponibles hasta este momento para decidir la insatisfacibilidad de un conjunto de proposiciones lógicas son bastante limitados. En la parte final de este tema estudiaremos el Algoritmo de Davis-Putnam que nos permite resolver dicho problema de forma más efectiva.

La propiedad siguiente es una consecuencia de la Proposición 2 y del Teorema 1, y nos dice que ante un problema de implicación semántica, podemos suprimir todas las tautologías pertenecientes al conjunto de premisas sin que ello altere la respuesta al problema inicial.

Proposición 10. Sean $\Omega \subseteq \mathcal{F}(X)$ y $\alpha \in \mathcal{F}(X)$, una tautología. Entonces

$$\Omega \cup \{\alpha\} \models \beta \ \text{ si y sólo si } \ \Omega \models \beta.$$

Una herramienta que a veces resulta útil en los problemas de consecuencia lógica es el denominado **Teorema de la deducción** que mostramos a continuación.

Teorema 2 (Teorema de la deducción)**.** Dados un conjunto de fórmulas $\Omega \subseteq \mathcal{F}(X)$ y $\alpha, \beta \in \mathcal{F}(X)$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. $\Omega \models \alpha \to \beta$.
2. $\Omega \cup \{\alpha\} \models \beta$.

$\square$

Ejemplo 12. Probamos que la fórmula

$$(P \to Q) \to ((P \to (Q \to R)) \to (P \to R))$$

es una tautología, es decir,

$$\models (P \to Q) \to ((P \to (Q \to R)) \to (P \to R)).$$

Aplicamos varias veces el Teorema de la deducción, y obtenemos las siguientes implicaciones semánticas equivalentes entre sí:

1ª vez: $\left\{P \to Q\right\} \models (P \to (Q \to R)) \to (P \to R)$.

2ª vez: $\left\{P \to Q,\ P \to (Q \to R)\right\} \models P \to R$.

3ª vez: $\left\{P \to Q,\ P \to (Q \to R),\ P\right\} \models R$.

Llegados a este punto, hemos de aplicar alguno de los métodos anteriores. Por ejemplo, planteamos el sistema de ecuaciones siguiente en $\mathbb{Z}_2$:

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{I}(P \to Q) = 1 \\ \mathrm{I}(P \to (Q \to R)) = 1 \\ \mathrm{I}(P) = 1 \end{array}\right\}.$$

Para resolverlo, comenzamos con el subsistema

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{I}(P \to Q) = 1 \\ \mathrm{I}(P) = 1 \end{array}\right\}$$

cuyas soluciones son:

$$(1, 1, 0),\ (1, 1, 1).$$

De éstas, sólo la segunda verifica la ecuación $\mathrm{I}(P \to (Q \to R)) = 1$.

Por tanto $(1, 1, 1)$ es la única solución del sistema

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{I}(P \to Q) = 1 \\ \mathrm{I}(P \to (Q \to R)) = 1 \\ \mathrm{I}(P) = 1 \end{array}\right\}.$$

Como además esta solución verifica la ecuación $\mathrm{I}(R) = 1$, obtenemos que la implicación semántica

$$\left\{P \to Q,\ P \to (Q \to R),\ P\right\} \models R$$

es cierta, lo que concluye la comprobación.

Otro camino alternativo sería, una que vez hemos planteado problema $\Omega \models R$, donde

$$\Omega := \Big\{ P \to Q,\ P \to (Q \to R),\ P \Big\},$$

observar que

$$\Omega \models Q \qquad \text{y} \qquad \Omega \models Q \to R,$$

por la Regla del Modus ponens. Como además

$$\Big\{ Q,\ Q \to R \Big\} \models R,$$

concluímos finalmente que $\Omega \models R$. □

Ejemplo 13. Comprobamos la Ley del contrarecíproco haciendo uso del Teorema de la deducción, es decir, que para cualesquiera dos fórmulas $\alpha, \beta \in \mathcal{F}(X)$, la fórmula

$$(\alpha \to \beta) \to (\neg\beta \to \neg\alpha)$$

es una tautología. Ésto equivale a

$$\models (\alpha \to \beta) \to (\neg\beta \to \neg\alpha).$$

Aplicamos el Teorema de la deducción dos veces y llegamos a

$$\Big\{ \alpha \to \beta, \neg\beta \Big\} \models \neg\alpha,$$

lo cual por el Teorema 1, equivale a que el conjunto

$$\Big\{ \alpha \to \beta, \neg\beta,\ \neg\neg\alpha \Big\}$$

sea insatisfacible, es decir, que el conjunto

$$\Omega := \Big\{ \alpha \to \beta, \neg\beta,\ \alpha \Big\}$$

sea insatisfacible.

Como por la Regla del Modus ponens se cumple que

$$\Omega \models \beta,$$

y por otra parte

$$\Omega \models \neg\beta,$$

ésto significa que Ω es insatisfacible.

□

7 Cláusulas.

Un **literal** en $\mathcal{F}(X)$ es una variable proposicional o su negada.

Por ejemplo, si $X = \{P, Q, R\}$, entonces P y $\neg Q$ son literales. No es un literal la fórmula $\neg\neg Q$, aún cuando esta fórmula es equivalente a Q que sí es un literal.

Si λ es un literal, denotamos por λ^c el literal que es equivalente a $\neg\lambda$. Por ejemplo, si $\lambda = P$, entonces $\lambda^c = \neg P$ y si $\lambda = \neg P$, entonces $\lambda^c = P$.

Una **cláusula** es una disyunción de literales. Aclaramos que todo literal es una cláusula. También se considera como cláusula a la "disyunción de cero literales", denominándose ésta la **cláusula vacía**. Denotamos la cláusula vacía por $\Box$.

Así podemos decir que una cláusula es una disyunción de cero o más literales.

La cláusula vacía va a representar una situación de insatisfacibilidad. Por definición, **todo conjunto de cláusulas que contenga a la cláusula vacía, será insatisfacible**.

Ejemplo 14. Dado $X = \{P, Q, R, S\}$, las siguientes fórmulas de $\mathcal{F}(X)$ son cláusulas:

$$P, \quad \neg Q, \quad \neg P \vee Q, \quad R \vee P \vee R \vee R, \quad R \vee Q \vee S, \quad \neg P \vee \neg Q \vee \neg R \vee \neg S.$$

$\Box$

Ya que, $\alpha \vee \alpha \equiv \alpha$, siempre que en una cláusula C aparezca un literal λ más de una vez, al escribir C sólo escribiremos una ocurrencia del literal λ.

Así, en el ejemplo anterior nos quedamos con $R \vee P$ ó bien con $P \vee R$, en vez de $R \vee P \vee R \vee R$.

Si en una cláusula C aparecen los literales λ y λ^c, se dice que C es una **cláusula tautológica**.

Por ejemplo,

$$P \vee \neg P, \quad P \vee Q \vee \neg P \vee R,$$

son cláusulas tautológicas.

Una fórmula de $\mathcal{F}(X)$ se dice que está en **forma clausulada** si es una cláusula o está expresada como conjunción de cláusulas.

Ejemplo 15. Dado $X = \{P, Q, R, S\}$, son fórmulas en forma clausulada,

$$P, \quad \neg R, \quad \neg Q \vee P, \quad P \vee Q \vee \neg R,$$

pues todas ellas son cláusulas. Las siguientes fórmulas también están en forma clausula, al ser conjunción de dos ó más cláusulas:

$$\neg Q \wedge P, \quad (\neg Q \vee P) \wedge P, \quad P \wedge \neg P, \quad (P \vee \neg R) \wedge (\neg Q \vee \neg P) \wedge Q.$$

$\Box$

Teorema 3. Toda fórmula α_1 puede ser transformada en una fórmula α_2 lógicamente equivalente con α_1, de modo que α_2 esté en forma clausulada.

La justificación del teorema anterior se basa en las equivalencias lógicas dadas en la Proposición 5 y consiste en aplicar las siguientes reglas tantas veces como haga falta:

1. Si aparece alguna subfórmula del tipo $\alpha \leftrightarrow \beta$, la reemplazamos por $(\alpha \to \beta) \wedge (\beta \to \alpha)$.
2. Si hay alguna subfórmula del tipo $\alpha \to \beta$, la reemplazamos por $\neg\alpha \vee \beta$.
3. Toda subfórmula del tipo $\neg\neg\alpha$ la substituímos por α.
4. Interiorizamos las negaciones dentro de los paréntesis mediante las leyes de De Morgan:
$$\neg(\alpha \wedge \beta) \equiv \neg\alpha \vee \neg\beta, \quad \neg(\alpha \vee \beta) \equiv \neg\alpha \wedge \neg\beta.$$
   De esta manera llegamos a una fórmula en la que sólo pueden aparecer algunas de las conectivas siguientes: $\neg, \vee, \wedge$.

   Además, si aparece $\neg$, ésta sólo actúa sobre variables proposicionales.
5. Ahora puede ser necesario el uso de las leyes distributivas para conseguir que dentro de los paréntesis no aparezca ninguna conectiva $\wedge$.
6. Si es posible, aplicamos la regla $(\alpha \vee \beta) \wedge \alpha \equiv \alpha$ (Ley de absorción).

De este modo obtenemos una forma clausulada de la fórmula inicial.

A continuación podemos aplicar las siguientes **optimizaciones**:

1. Si la fórmula inicial no era tautología, suprimimos las cláusulas tautológicas que haya.
2. Si en alguna de las cláusulas resultantes aparece un literal λ dos o más veces, lo escribimos una sóla vez en dicha cláusula, pues $\lambda \vee \lambda \equiv \lambda$. □

Ejemplo 16. Obtenemos una forma clausulada para la fórmula $\alpha = (P \to Q) \leftrightarrow (\neg P \wedge Q)$.

$$\alpha \equiv \Big((P \to Q) \to (\neg P \wedge Q)\Big) \wedge \Big((\neg P \wedge Q) \to (P \to Q)\Big) \equiv$$

$$\Big(\neg(\neg P \vee Q) \vee (\neg P \wedge Q)\Big) \wedge \Big(\neg(\neg P \wedge Q) \vee (\neg P \vee Q)\Big) \equiv$$

$$\Big((P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q)\Big) \wedge \Big((P \vee \neg Q) \vee (\neg P \vee Q)\Big) \equiv$$

$$(P \vee \neg P) \wedge (\neg Q \vee \neg P) \wedge (P \vee Q) \wedge (\neg Q \vee Q) \wedge (P \vee \neg Q \vee \neg P \vee Q).$$

Ésto ya es una forma clausulada de α. Finalmente suprimimos las cláusulas tautológicas y obtenemos una forma clausulada de α más simple:

$$(\neg Q \vee \neg P) \wedge (P \vee Q).$$

□

Como se ha visto en el ejemplo anterior, la forma clausulada no es única. Por ejemplo, en algunas cláusulas podríamos insertar variables proposicionales que no aparecen en tales cláusulas:

$$(\neg Q \vee \neg P) \wedge (P \vee Q) \equiv (\neg Q \vee \neg P) \wedge (P \vee Q \vee R) \wedge (P \vee Q \vee \neg R).$$

Obtenemos así otra forma clausulada de α, aunque como es lógico, nos quedamos con la que ya teníamos que es más simple.

Ejemplo 17. Obtenemos una forma clausulada para $\alpha = (\neg P \wedge Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$.

Comenzamos aplicando la propiedad distributiva.

$\alpha \equiv \Big((\neg P \wedge Q \wedge R) \vee \neg P\Big) \wedge \Big((\neg P \wedge Q \wedge R) \vee \neg Q\Big).$

Ahora podemos aplicar una ley de absorción, pues $(\neg P \wedge Q \wedge R) \vee \neg P \equiv \neg P$. Resulta:

$\alpha \equiv \neg P \wedge \Big((\neg P \wedge Q \wedge R) \vee \neg Q\Big).$

De nuevo usamos una propiedad distributiva. Obtenemos

$\neg P \wedge \Big((\neg P \wedge Q \wedge R) \vee \neg Q\Big) \equiv \neg P \wedge \Big((\neg P \vee \neg Q) \wedge (Q \vee \neg Q) \wedge (R \vee \neg Q)\Big).$

Eliminamos las cláusulas tautológicas y obtenemos una forma clausulada de α:

$$\alpha \equiv \neg P \wedge (\neg P \vee \neg Q) \wedge (R \vee \neg Q).$$

Incluso si aplicamos la ley de absorción, podemos obtener otra forma clausulada más simple todavía para α:

$$\alpha \equiv \neg P \wedge (R \vee \neg Q).$$

$\square$

8 El Algoritmo de Davis-Putnam.

Presentamos en esta última sección un nuevo método para resolver el problema de la implicación semántica, es decir, dados un conjunto de fórmulas $\Omega \subseteq \mathcal{F}(X)$ y una fórmula $\alpha \in \mathcal{F}(X)$, decidir si $\Omega \models \alpha$.

Tal y como hemos visto en el Teorema 1,

$$\Omega \models \alpha \quad \Leftrightarrow \quad \Omega \cup \{\neg \alpha\} \text{ es insatisfacible.}$$

La propiedad siguiente nos dice que estudiar la insatisfacibilidad de un subconjunto de fórmulas de $\mathcal{F}(X)$ es equivalente a estudiar la insatisfacibilidad de un subconjunto de cláusulas de $\mathcal{F}(X)$.

Proposición 11. Sean $\Delta \subseteq \mathcal{F}(X)$ un conjunto de fórmulas, Δ' el conjunto que se obtiene a partir de Δ reemplazando cada fórmula por una forma clausulada correspondiente, y sea Δ'' el conjunto que resulta de substituir cada fórmula en Δ' por las cláusulas que la componen. Entonces:

$$\Delta \text{ es insatisfacible } \Leftrightarrow \Delta' \text{ es insatisfacible } \Leftrightarrow \Delta'' \text{ es insatisfacible.}$$

Por tanto, vemos que **el problema de decidir si una fórmula es consecuencia lógica de un conjunto de fórmulas se reduce al problema de decidir si un conjunto de cláusulas es insatisfacible o no**.

Ejemplo 18. Con la notación de la propiedad anterior, si

$$\Delta = \Big\{P \to Q,\ R \to (P \wedge Q)\Big\},$$

entonces

$$\Delta' = \Big\{\neg P \vee Q,\ (\neg R \vee P) \wedge (\neg R \vee Q)\Big\},$$

y

$$\Delta'' = \Big\{\neg P \vee Q,\ \neg R \vee P,\ \neg R \vee Q\Big\}.$$

□

Presentamos a continuación el **Algoritmo de Davis-Putnam**, el cual permite decidir si un conjunto finito de cláusulas es o no satisfacible. Para ello damos la siguiente notación:

Si C es una cláusula y λ es un literal que aparece en C, denotamos por $C - \lambda$ la cláusula que resulta de suprimir todas las ocurrencias de λ en C.

Por ejemplo, si

$$C = P \vee \neg Q \vee R,$$

entonces

$$C - \neg Q = P \vee R.$$

Si

$$C = P,$$

entonces

$$C - P = \square,$$

la cláusula vacía.

El algoritmo de Davis-Putnam se basa en **las tres reglas** siguientes, las cuales permiten ir reduciendo el conjunto de cláusulas.

1. Sea Σ un conjunto de cláusulas y supongamos que en Σ hay una cláusula unitaria, es decir, aquella que consiste en un único literal λ. Sea Σ' el conjunto que resulta de Σ al suprimir todas las cláusulas que contengan el literal λ y substituir las cláusulas

C que contengan a λ^c por $C - \lambda^c$. Las cláusulas de Σ en las que no aparece λ ni λ^c se añaden "intactas" a Σ'. Es decir, si

$$\Sigma = \Big\{\lambda, \lambda \vee C_1, \ldots, \lambda \vee C_m,$$

$$\lambda^c \vee C_{m+1}, \ldots, \lambda^c \vee C_{m+n},$$

$$C_{m+n+1}, \ldots, C_{m+n+p}\Big\},$$

donde ninguna de las cláusulas $C_{m+n+1}, \ldots, C_{m+n+p}$ contiene a λ ó a λ^c, entonces

$$\Sigma' = \Big\{C_{m+1}, \ldots, C_{m+n}, C_{m+n+1}, \ldots, C_{m+n+p}\Big\}.$$

En tal caso se verifica que Σ es satisfacible si y sólo si Σ' es satisfacible.

2. Supongamos que en el conjunto Σ existe un literal puro, es decir, un literal λ tal que λ^c no aparece en ninguna cláusula de Σ. Sea entonces Σ' el conjunto de cláusulas que resulta de suprimir todas las cláusulas de Σ en las que aparece el literal λ. Es decir, si
$$\Sigma = \Big\{\lambda \vee C_1, \ldots, \lambda \vee C_m, C_{m+1}, \ldots, C_{m+n}\Big\},$$
donde ninguna de las cláusulas $C_{m+1}, \ldots, C_{m+n}$ contiene a λ, entonces
$$\Sigma' = \Big\{C_{m+1}, \ldots, C_{m+n}\Big\}.$$
En tal caso se verifica que Σ es satisfacible si y sólo si Σ' es satisfacible.

3. Sea Σ un conjunto de cláusulas y a una proposición atómica. Supongamos que Σ viene dado por:
$$\Sigma = \Big\{a \vee C_1, \ldots, a \vee C_m,$$
$$\neg a \vee C_{m+1}, \ldots, \neg a \vee C_{m+n},$$
$$C_{m+n+1}, \ldots, C_{m+n+p}\Big\}.$$
donde ninguna de las cláusulas $C_{m+n+1}, \ldots, C_{m+n+p}$ contiene a a ó a $\neg a$. Sean
$$\Sigma_1 = \{C_{m+1}, \ldots, C_{m+n}, C_{m+n+1}, \ldots, C_{m+n+p}\}$$
y
$$\Sigma_2 = \{C_1, \ldots, C_m, C_{m+n+1}, \ldots, C_{m+n+p}\}.$$
En tal caso, Σ es satisfacible si y sólo si Σ_1 es satisfacible ó Σ_2 es satisfacible. De modo equivalente, Σ es insatisfacible si y sólo si Σ_1 y Σ_2 son ambos insatisfacibles. $\Box$

Obsérvese que en la Regla (3.) anterior, Σ_1 es el conjunto que se obtendría a partir de Σ como si hubiésemos aplicado la Regla 1 con $\lambda = a$ y Σ_2 es el conjunto que se obtendría a partir de Σ como si hubiésemos aplicado la Regla 1 con $\lambda = \neg a$.

Recordamos que por definición todo conjunto en el que aparezca la cláusula vacía es siempre insatisfacible, ya que bajo cualquier interpretación I se verifica que $\mathrm{I}(\Box) = 0$.

Vemos ya el Algoritmo de Davis-Putnam para decidir la insatisfacibilidad de un conjunto de cláusulas Σ:

1. Tratamos de aplicar la Regla 1, es decir, comprobamos si hay alguna cláusula unitaria. Si la respuesta es afirmativa, y λ es dicha cláusula, reducimos el conjunto de cláusulas tal y como hemos visto en la Regla 1, anotamos el literal λ y volvemos al principio con el nuevo conjunto de cláusulas.

2. Si la respuesta es negativa, comprobamos si existe un literal puro. De existir, llamémoslo λ, procedemos como en la Regla 2, anotamos el literal λ y volvemos al inicio con el nuevo conjunto de cláusulas.

3. De no existir tampoco un literal puro, elegimos una variable proposicional a que aparezca en alguna de las cláusulas del conjunto actual, abrimos dos ramas, tal y como hemos visto en la Regla 3, y analizamos cada una de las ramas. Al analizar la rama con Σ_1, anotamos el literal a, mientras que al analizar Σ_2, anotamos el literal $\neg a$.

4. El algoritmo acaba cuando obtenemos un conjunto satisfacible, en cuyo caso Σ también es satisfacible y una interpretación que satisface a Σ es aquella que vale 1 sobre todos los literales que hemos ido anotando, o bien, si en todas las ramas se obtiene un conjunto insatisfacible, en cuyo caso el conjunto inicial Σ será insatisfacible. $\Box$

Ejemplo 19. El conjunto $\Sigma = \{P\}$ es claramente satisfacible, pues tomando cualquier interpretación I tal que $\mathrm{I}(P) = 1$, la única fórmula en Σ se hace verdadera. Veamos cómo se puede obtener esa misma conclusión aplicando el Algoritmo de Davis-Putnam.

En Σ hay un cláusula unitaria. Si aplicamos la Regla 1 con $\lambda = P$, obtenemos el conjunto

$$\Sigma' = \{\} = \varnothing,$$

el cual es satisfacible. (Recuérdese la Proposición 1.) Por tanto Σ es satisfacible. $\Box$

Ejemplo 20. El conjunto $\Sigma = \{P, \neg P\}$ es claramente insatisfacible. Veamos cómo la aplicación de las reglas anteriores conducen a la misma conclusión.

Podemos aplicar la Regla 1, pues tanto P como $\neg P$ son cláusulas unitarias. Si aplicamos la Regla 1 con $\lambda = P$, y puesto que

$$\neg P - \lambda^c = \neg P - \neg P = \Box,$$

obtenemos que

$$\Sigma' = \Big\{\Box\Big\},$$

que es insatisfacible, y por tanto Σ es también insatisfacible. $\Box$

Ejemplo 21. Al conjunto

$$\Sigma = \Big\{P \vee Q,\ P \vee \neg Q\Big\}$$

no le podemos aplicar la Regla 1 al no haber ninguna cláusula unitaria. Sin embargo la Regla 2 sí es aplicable pues $\lambda = P$ es un literal puro en Σ. Resulta

$$\Sigma' = \{\},$$

que es satisfacible, por lo cual Σ es satisfacible.

Esta misma conclusión la podríamos haber obtenido eligiendo cualquier interpretación I tal que $\mathrm{I}(P) = 1$, independientemente del valor de $\mathrm{I}(Q)$. $\Box$

Ejemplo 22. Al conjunto

$$\Sigma = \Big\{P \vee \neg Q, \neg P \vee Q\Big\}$$

no le podemos aplicar la Regla 1 ni la Regla 2. No contiene cláusulas unitarias ni literales puros.

Aplicamos la Regla 3 con $a = P$ y obtenemos que Σ es satisfacible si y sólo si $\Sigma_1 = \{Q\}$ es satisfacible ó $\Sigma_2 = \{\neg Q\}$ es satisfacible.

En este caso Σ_1 y Σ_2 son ambos evidentemente satisfacibles. Deducimos así que Σ es satisfacible.

Una interpretación que satisface a Σ es

$$\mathrm{I}(P) = 0,\ \mathrm{I}(Q) = 0.$$

Otra es

$$\mathrm{I}(P) = 1,\ \mathrm{I}(Q) = 1.$$

$\Box$

Ejemplo 23. Sea el conjunto de proposiciones

$$\Sigma = \Big\{P \vee Q,\ P \vee \neg Q,\ \neg P \vee R,\ \neg P \vee \neg R\Big\}.$$

Vemos que no es aplicable la Regla 1 ni la 2. Aplicamos la Regla 3 con $a = P$ y obtenemos los conjuntos

$$\Sigma_1 = \Big\{R, \neg R\Big\}$$

y

$$\Sigma_2 = \Big\{Q, \neg Q\Big\}.$$

Como cada uno de ellos es insatisfacible, resulta que Σ es insatisfacible. $\Box$

Ejemplo 24. Dado
$$\Sigma = \Big\{P \vee \neg Q,\ \neg P \vee R,\ \neg P \vee \neg R\Big\},$$
no le podemos aplicar la Regla 1 al no haber ninguna cláusula unitaria.

Sí hay un literal puro $\lambda = \neg Q$. Aplicamos la Regla 2 a Σ y resulta
$$\Sigma' = \Big\{\neg P \vee R,\ \neg P \vee \neg R\Big\}.$$

No podemos aplicar la Regla 1 a Σ'. Sin embargo $\lambda = \neg P$ es un literal puro para Σ'. Aplicamos la Regla 2 a Σ' y obtenemos
$$\Sigma'' = \varnothing,$$
que es satisfacible.

Así, Σ es satisfacible. Además una interpretación que satisface a Σ se obtiene a partir de los literales anotados. Concretamente $\mathrm{I}(Q) = 0$, $\mathrm{I}(P) = 0$ e $\mathrm{I}(R)$ indistintamente 0 ó 1. $\square$

Ejemplo 25. Dado el conjunto
$$\Omega = \Big\{\neg P \to (Q \wedge R),\ R \to (\neg P \to R),\ (Q \vee S) \to R\Big\},$$
estudiamos si es cierto ó no que $\Omega \models R \wedge P$.

Por el Teorema 1, ésto equivale a que el conjunto
$$\Omega' = \Big\{\neg P \to (Q \wedge R),\ R \to (\neg P \to R),\ (Q \vee S) \to R,\ \neg(R \wedge P)\Big\}$$
sea insatisfacible.

Calculamos una forma clausulada para cada una de las fórmulas pertenecientes a Ω'.

- $\neg P \to (Q \wedge R) \equiv P \vee (Q \wedge R) \equiv (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$.
- $R \to (\neg P \to R) \equiv \neg R \vee P \vee R$.
- $(Q \vee S) \to R \equiv \neg(Q \vee S) \vee R \equiv (\neg Q \wedge \neg S) \vee R \equiv (\neg Q \vee R) \wedge (\neg S \vee R)$.
- $\neg(R \wedge P) \equiv \neg R \vee \neg P$.

En el punto segundo hemos obtenido una cláusula tautológica, la cual descartamos. Por tanto, resulta el conjunto siguiente de cláusulas al cual le aplicamos el Algoritmo de Davis-Putnam:

$$\Sigma = \Big\{P\vee Q,\ P\vee R,\ \neg Q\vee R,\ \neg S\vee R,\ \neg R\vee\neg P\Big\}.$$

En Σ no hay cláusulas unitarias. Sin embargo $\lambda = \neg S$ es literal puro, por lo que aplicamos la Regla 2 y resulta

$$\Sigma' = \Big\{P\vee Q,\ P\vee R,\ \neg Q\vee R,\ \neg R\vee\neg P\Big\}.$$

En Σ' no hay cláusulas unitarias ni literales puros, por lo que aplicamos la Regla 3 con $a = P$ y obtenemos

$$\Sigma'_1 = \Big\{\neg R,\ \neg Q\vee R\Big\}$$

y

$$\Sigma'_2 = \Big\{Q,\ R,\ \neg Q\vee R\Big\}.$$

Analizamos Σ'_1, al que le aplicamos la Regla 1 con $\lambda = \neg R$ y resulta $\Sigma''_1 = \Big\{\neg Q\Big\}$ que es satisfacible.

Por consiguiente Σ' es satisfacible y así Σ también lo es. Deducimos de todo ésto que la implicación semántica propuesta, $\Omega \models R\wedge P$, no se verifica.

Además, usando las anotaciones de los literales obtenemos una interpretación I que satisface a Σ, y por tanto también a Ω, pero $\mathrm{I}(R\wedge P) = 0$.

De la satisfacibilidad de Σ''_1 resulta $\mathrm{I}(Q) = 0$. De la obtención de Σ''_1 a partir de Σ'_1 tenemos $\mathrm{I}(R) = 0$. Al haber considerado Σ'_1 desde Σ', tenemos $\mathrm{I}(P) = 1$, pues $a = P$. De la obtención de Σ' a partir de Σ, resulta $\mathrm{I}(S) = 0$.

Por tanto $\mathrm{I}(P) = 1$, $\mathrm{I}(Q) = 0$, $\mathrm{I}(R) = 0$ e $\mathrm{I}(S) = 0$. $\square$