# Sesión de prácticas

## *Material elaborado por Juan Urbano*

En esta sesión de prácticas resolvemos y comentamos algunos ejercicios de la relación del Tema $6$.

Comenzamos con el Ejercicio $1$ en el que hay que obtener una forma normal prenexa para cada una de las fórmulas dadas con el menor número posible de cuantificadores. En el apartado $(a)$ tenemos la fórmula

$$\forall x P(x) \to \forall x R(x,a),$$

que es una sentencia. Seguimos el procedimiento dado en los apuntes (que se basa en las equivalencias lógicas estudiadas en la Sección $8$ del Tema $5$), por lo que en primer lugar reemplazamos el operador flecha por su equivalencia, y obtenemos que

$$\forall x P(x) \to \forall x R(x,a) \equiv \neg \forall x P(x) \vee \forall x R(x,a).$$

A continuación interiorizamos la negación que aparece en la parte izquierda de la fórmula, y obtenemos la fórmula siguiente equivalente a la anterior,

$$\exists x \neg P(x) \vee \forall x R(x,a).$$

Seguidamente extraemos un cuantificador, el que aparecerá en la parte más externa de la forma a la que queremos llegar. En virtud del Lema $5$ que aparece en la página $23$ del Tema $5$, podemos comenzar extrayendo cualquiera de ellos, aunque como se dice en la página $6$ del Tema $6$, es preferible que los cuantificadores existenciales queden en la parte más externa de la fórmula final, por lo que se recomienda comenzar con ellos. Por tanto, como en la fórmula $\forall x R(x,a)$ no hay ocurrencias libres de la variable $x$, resulta (por el Lema $5$ en el Tema $5$) que

$$\exists x \neg P(x) \vee \forall x R(x,a) \equiv \exists x \big(\neg P(x) \vee \forall x R(x,a)\big).$$

Ahora nos proponemos extraer el cuantificador $\forall x$ que aparece dentro del paréntesis, pero no podemos hacerlo directamente como ha ocurrido con el cuantificador $\exists x$, pues si lo hiciéramos, la parte de la fórmula $\neg P(x)$ que también aparece dentro del paréntesis quedaría afectada por el cuantificador $\forall x$ y no por su cuantificador que es $\exists x$. Es decir, la fórmula

$$\exists x \forall x \big(\neg P(x) \vee R(x,a)\big)$$

no es correcta, pues ésta en realidad es

$$\exists x \Big(\forall x \big(\neg P(x) \vee R(x,a)\big)\Big),$$

que equivale a

$$\forall x\big(\neg P(x) \vee R(x,a)\big),$$

la cual no es equivalente a la fórmula que teníamos al principio. Por consiguiente, para poder extraer el cuantificador $\forall x$ tenemos que renombrar variables. Para ello usamos el Lema $6$ que aparece en la página $24$ del Tema $5$. Una solución sería renombrar las variables $x$ que dependen del cuantificador $\forall$ por la variable $y$. Resulta

$$\exists x\big(\neg P(x) \vee \forall x R(x,a)\big) \equiv \exists x\big(\neg P(x) \vee \forall y R(y,a)\big).$$

Ahora ya sí podemos usar el Lema $5$ y llegamos a

$$\exists x\big(\neg P(x) \vee \forall y R(y,a)\big) \equiv \exists x \forall y\big(\neg P(x) \vee R(y,a)\big).$$

Así pues la fórmula

$$\exists x \forall y\big(\neg P(x) \vee R(y,a)\big)$$

es una forma normal prenexa para la fórmula dada en la que aparece el menor número posible de cuantificadores.

En el apartado $(d)$ tenemos la fórmula $\forall x P(x) \to \exists x R(x,a)$. Actuamos de manera similar al apartado $(a)$ y llegamos a

$$\forall x P(x) \to \exists x R(x,a) \equiv \exists x \neg P(x) \vee \exists x R(x,a).$$

Pero ahora podemos aplicar uno de los apartados en el Lema $4$ en la página $22$ del Tema $5$, y obtenemos que

$$\exists x \neg P(x) \vee \exists x R(x,a) \equiv \exists x(\neg P(x) \vee R(x,a)).$$

La fórmula resultante $\exists x(\neg P(x) \vee R(x,a))$ es una forma normal prenexa de la fórmula dada con el menor número posible de cuantificadores. Si quitamos el requerimiento de que el número de cuantificadores sea mínimo, otra solución sería

$$\exists x \exists y(\neg P(x) \vee R(y,a)).$$

La primera cuestión planteada en el Ejercicio $2$ ha sido respondida en un ejemplo de los que aparecen en el Tema $6$.

En el Ejercicio $3$ hemos de obtener una forma normal clausulada para cada una de las sentencias dadas. En el apartado $(a)$ tenemos la sentencia

$$\alpha_1 = \forall x P(x) \vee \Big(\forall y Q(y) \wedge \forall x Q(f(x))\Big).$$

Una solución en la que se intenta minimizar el número de cuantificadores comenzaría observando que

$$\forall x Q(f(x)) \equiv \forall y Q(f(y)),$$

de lo cual resulta que

$$\forall y Q(y) \land \forall x Q(f(x)) \equiv \forall y Q(y) \land \forall y Q(f(y)),$$

por el Lema 2 en el Tema 5. Por consiguiente

$$\alpha_1 \equiv \forall x P(x) \lor \Big(\forall y Q(y) \land \forall y Q(f(y))\Big) \equiv \forall x \forall y \Big(P(x) \lor \big(Q(y) \land Q(f(y))\big)\Big).$$

Como

$$P(x) \lor \big(Q(y) \land Q(f(y))\big) \equiv \big(P(x) \lor Q(y)\big) \land \big(P(x) \lor Q(f(y))\big),$$

tenemos que

$$\alpha_1 \equiv \forall x \forall y \Big(\big(P(x) \lor Q(y)\big) \land \big(P(x) \lor Q(f(y))\big)\Big).$$

Como no hay cuantificadores existenciales, no tenemos que obtener forma de Skolem, por lo cual la fórmula

$$\forall x \forall y \Big(\big(P(x) \lor Q(y)\big) \land \big(P(x) \lor Q(f(y))\big)\Big)$$

es una forma normal clausulada para $\alpha_1$. Nótese que desde $\alpha_1$ no podemos obtener la fórmula

$$\forall x \forall y \big(P(x) \lor (Q(y) \land Q(f(x)))\big),$$

ya que de los dos cuantificadores que contienen a la variable $x$, hemos de renombrar en uno de ellos. Sí sería correcto, aunque aparecerían más cuantificadores en la forma clausulada final, escribir

$$\alpha_1 \equiv \forall x P(x) \lor \Big(\forall y Q(y) \land \forall z Q(f(z))\Big),$$

de donde se obtendría que

$$\alpha_1 \equiv \forall x \forall y \forall z \Big(P(x) \lor \big(Q(y) \land Q(f(z))\big)\Big) \equiv \forall x \forall y \forall z \Big(\big(P(x) \lor Q(y)\big) \land \big(P(x) \lor Q(f(z))\big)\Big),$$

que es otra forma normal clausulada para $\alpha_1$.

Para la fórmula del apartado $(b)$ un camino posible sería escribir

$$\forall x \exists y R(x,y) \ \land \ \exists y \forall x S(x,y) \equiv \exists y \big(\forall x \exists y R(x,y) \land \forall x S(x,y)\big) \equiv$$
$$\exists y \forall x \big(\exists y R(x,y) \land S(x,y)\big) \equiv \exists y \forall x \big(\exists z R(x,z) \land S(x,y)\big) \equiv$$
$$\exists y \forall x \exists z \big(R(x,z) \land S(x,y)\big),$$

que está en forma normal prenexa. A continuación obtenemos una forma normal de Skolem, y resulta la fórmula

$$\forall x \big(R(x, f(x)) \land S(x,a)\big),$$

que está en forma normal clausulada.

Otro camino que llega a otra solución más complicada hubiese sido escribir

$$\forall x \exists y R(x,y) \ \land \ \exists y \forall x S(x,y) \equiv \forall x \big(\exists y R(x,y) \land \exists y \forall x S(x,y)\big) \equiv$$

$$\forall x\big(\exists y_1 R(x,y_1) \wedge \exists y_2 \forall z S(z,y_2)\big) \equiv \forall x \exists y_1 \exists y_2 \forall z\big(R(x,y_1) \wedge S(z,y_2)\big),$$

de donde obtenemos una forma de Skolem

$$\forall x \forall z\big(R(x,f(x)) \wedge S(z,g(x))\big),$$

que también está en forma clausulada. Recuerde que en general no se puede cambiar el orden en el que aparecen escritos cuantificadores consecutivos distintos.

En el Ejercicio $5$, como $\sigma(x_1) = x_2$, $\sigma(x_2) = x_3$ y $\sigma(x_3) = x_1$, vemos que las variables $x_1, x_2, x_3$ se transforman según un ciclo de longitud $3$. Por otra parte, como $\sigma(y) = z$, $\sigma(z) = x$, $\sigma(x) = x_1$, resulta que las variables $x, y, z$ acaban "entrando" en el ciclo mencionado. Como

$$\sigma^{2018}\big(L(x,y,x_2)\big) = L\Big(\sigma^{2018}(x), \sigma^{2018}(y), \sigma^{2018}(x_2)\Big),$$

ya sólo queda hacer el cálculo concreto que queda propuesto al alumno.

En el Ejercicio $8$ tenemos un conjunto de literales para el cual hemos de obtener un unificador principal $\sigma$. Aplicamos la metodología expuesta en el Tema $6$ y planteamos el sistema de ecuaciones en términos

$$\begin{cases} g(x,y) = g(z,f(z)) \\ f(f(z)) = f(y) \end{cases}$$

que se transforma en el sistema equivalente

$$\begin{cases} x = z \\ y = f(z) \\ f(z) = y \end{cases}$$

En el sistema obtenido, no vemos ninguna ecuación que indique incompatibilidad, ni todavía podemos decir que está en forma resuelta. Seguimos aplicando transformaciones. Ahora le damos la vuelta a la tercera ecuación y vemos que resulta la segunda, por lo que obtenemos el sistema equivalente

$$\begin{cases} x = z \\ y = f(z) \end{cases}$$

el cual está en forma resuelta. Por tanto $\Gamma$ es unificable, y

$$\sigma = \big(x|z,\ y|f(z)\big)$$

es un unificador principal para $\Gamma$. Seguidamente comprobamos que la sustitución dada $\sigma'$ es un unificador para $\Gamma$. Hay un errata en el enunciado del ejercicio, ya que en los literales de $\Gamma$, el símbolo de función $g$ aparece con aridad $2$, mientras que en la definición de $\sigma'$ tiene aridad $1$. Vamos a resolverlo para

$$\sigma' = \Big(x|h(z_1),\ y|f(h(z_1)),\ z|h(z_1)\Big).$$

Para ello calculamos

$$\sigma'\Big(\neg R\big(g(x,y), f(f(z))\big)\Big) = \neg R\Big(g(\sigma'(x), \sigma'(y)), f(f(\sigma'(z)))\Big) =$$
$$\neg R\Big(g\big(h(z_1), f(h(z_1))\big), f(f(h(z_1)))\Big),$$
$$\sigma'\Big(\neg R\big(g(z, f(z)), f(y)\big)\Big) = \neg R\Big(g\big(\sigma'(z), f(\sigma'(z))\big), f(\sigma'(y))\Big) =$$
$$\neg R\Big(g\big(h(z_1), f(h(z_1))\big), f(f(h(z_1))\Big),$$

lo cual indica que efectivamente $\sigma'$ es un unificador para $\Gamma$. Por último, encontramos una sustitución $\mu$ tal que $\sigma' = \mu \circ \sigma$. Esta igualdad es una igualdad entre aplicaciones, lo que equivale a decir que cada variable se transforma de la misma manera por una aplicación que por otra. Por tanto ha de ocurrir que

$$\sigma'(x) = \mu \circ \sigma(x),\ \sigma'(y) = \mu \circ \sigma(y),\ \sigma'(z) = \mu \circ \sigma(z),$$

es decir,

$$h(z_1) = \mu(z),\ f(h(z_1)) = \mu(f(z)),\ h(z_1) = \mu(z).$$

Como $\mu(f(z)) = f(\mu(z))$, vemos que la condición $f(h(z_1)) = \mu(f(z))$ equivale a $\mu(z) = h(z_1)$, que ya había aparecido también. Por tanto,

$$\mu = (z|h(z_1)).$$

En el Ejercicio 10 tenemos que obtener todas las resolventes posibles para cada uno de los pares de cláusulas dadas. Por ejemplo, en el apartado $(a)$ tenemos la cláusulas $P(x) \vee Q(x)$ y $\neg P(y) \vee Q(z)$, que representan las fórmulas respectivas

$$\forall x(P(x) \vee Q(x)) \quad \text{y} \quad \forall y \forall z(\neg P(y) \vee Q(z)).$$

La única posibilidad es calcular una resolvente binaria de ambas tomando los literales respectivos $L_1 = P(x)$ y $L_2 = \neg P(y)$. Según las definiciones, obtenemos un unificador principal para el conjunto de literales $\Gamma = \{L_1, L_2^c\} = \{P(x), P(y)\}$, como es por ejemplo $\sigma = (x|y)$. Por tanto tenemos las cláusulas

$$\sigma(P(x) \vee Q(x)) = P(y) \vee Q(y), \qquad \sigma(\neg P(y) \vee Q(z)) = \neg P(y) \vee Q(z),$$

de las que se obtiene la resolvente $Q(y) \vee Q(z)$.

En el apartado $(b)$ tenemos las cláusulas $P(x) \vee \neg Q(x)$ y $\neg P(y) \vee Q(y)$. Podemos calcular para ellas dos resolventes (binarias) posibles. Una se obtiene al considerar los literales respectivos $L_1 = P(x)$ y $L_2 = \neg P(y)$, y la otra al tomar $L_1 = \neg Q(x)$ y $L_2 = Q(y)$. El alumno puede completar los detalles fácilmente.

En el Ejercicio 12 nos dan dos cláusulas escritas con variables comunes. Se recomienda renombrar en alguna de ellas para que aparezcan escritas sin variables comunes. Éste es un buen ejercicio para probar la comprensión por parte del alumno de la definición de resolvente.

En el Ejercicio 16 tenemos el conjunto de cláusulas

$$\Gamma = \Big\{R(a,x) \vee \neg P(x),\ \neg R(y,y) \vee P(z)\Big\},$$

el cual queremos saber si es consistente ó inconsistente. Nombramos las cláusulas

$$C_1 \equiv R(a,x) \vee \neg P(x) \quad \text{y} \quad C_2 \equiv \neg R(y,y) \vee P(z).$$

Una opción es aplicar el Principio de resolución y tratar de llegar a la cláusula vacía. Podemos calcular dos resolventes posibles a partir de las cláusulas en $\Gamma$. Si usamos los literales respectivos

$$L_1 = R(a,x),\ L_2 = \neg R(y,y),$$

resulta la resolvente

$$C_3 \equiv \neg P(a) \vee P(z),$$

mientras que si usamos los literales respectivos

$$L_1 = \neg P(x),\ L_2 = P(z),$$

resulta la resolvente

$$C_4 \equiv R(a,x) \vee \neg R(y,y).$$

Nótese que $C_3$ y $C_4$ no son resolubles. Si resolvemos $C_1$ con $C_3$, resulta la cláusula

$$C_5 \equiv R(a,x) \vee \neg P(a),$$

mientras que si resolvemos $C_2$ con $C_3$, donde sería recomendable renombrar variables previamente, se obtiene una cláusula equivalente a $C_2$. Si resolvemos $C_1$ con $C_4$, donde de nuevo sería recomendable renombrar variables previamente, da la cláusula $C_5$ ya obtenida, mientras que si resolvemos $C_2$ con $C_4$, da una cláusula equivalente a $C_2$. Aquí también sería conveniente renombrar variables previamente. La resolvente de $C_2$ con $C_5$, dependiendo de los literales que usemos, puede dar la cláusula

$$P(z) \vee \neg P(a),$$

que es equivalente a $C_3$, así como

$$\neg R(y,y) \vee R(a,x),$$

que es equivalente a $C_4$, y la de $C_3$ con $C_5$ da un cláusula equivalente a $C_5$. Por último, la resolvente de $C_4$ con $C_5$ da de nuevo $C_5$. Es decir, vemos que no se obtienen cláusulas nuevas. Como la cláusula vacía no ha aparecido, ésto indica que $\Gamma$ no es refutable, y por tanto es satisfacible. Vamos a encontrar una interpretación que satisfaga a $\Gamma$. Nótese que $C_1$ es la fórmula

$$\forall x(R(a,x) \vee \neg P(x))$$

y $C_2$ es la fórmula

$$\forall y \forall z(\neg R(y,y) \vee P(z)).$$

Se verifica que

$$C_1 \equiv \forall x(P(x) \rightarrow R(a,x))$$

y

$$C_2 \equiv \forall y \forall z(R(y,y) \rightarrow P(z)).$$

Tomamos una estructura $\mathcal{E}$ con un dominio $\mathrm{D}$ cualquiera (siempre no vacío por definición), e interpretamos los símbolos de predicado $P$ y $Q$ como verdaderos en cualquier caso, es decir, $P^{\mathcal{E}}(r) = 1$ para todo $r \in \mathrm{D}$, y $Q^{\mathcal{E}}(r_1, r_2) = 1$ para todo $r_1, r_2 \in \mathrm{D}$. Resulta evidente que para cualquier asignación $v$ en $\mathcal{E}$, se cumple

$$\mathrm{I}^v(\forall x(R(a,x) \vee \neg P(x))) = 1$$

y

$$\mathrm{I}^v(\forall y \forall z(\neg R(y,y) \vee P(z))) = 1.$$

Así, $\Gamma$ es satisfacible ó consistente.

En el Ejercicio 19, apartado $(a)$, tenemos que estudiar si la implicación semántica

$$\exists x \forall y R(x,y) \ \models \ \exists z R(z,a)$$

es o no cierta usando el método de refutación por resolución. Por tanto consideramos el conjunto de sentencias

$$\Omega = \big\{\exists x \forall y R(x,y),\ \neg(\exists z R(z,a))\big\},$$

el cual tenemos que estudiar si es satisfacible o insatisfacible. Obtenemos una forma clausulada para cada fórmula en $\Omega$, y cada una de ellas la descomponemos en cláusulas. Resulta el conjunto de cláusulas

$$\Gamma = \big\{R(b,y),\ \neg R(z,a)\big\},$$

a partir del cual se obtiene fácilmente la cláusula vacía. Por tanto $\Gamma$ es refutable, y por consiguiente insatisfacible, lo que implica que $\Omega$ es insatisfacible, y por tanto la implicación semántica propuesta es cierta.

En el Ejercicio 20 tenemos que estudiar en primer lugar si se cumple que $\alpha \models \beta$, y a continuación si se cumple que $\beta \models \alpha$, usando el método de refutación por resolución. En cada caso el procedimiento es el mismo, con la simplificación adicional de que tenemos proposiciones lógicas, y por tanto no hay variables y así no es necesario calcular unificadores.

En el Ejercicio 22 tenemos que ver que las fómulas dadas no son equivalentes de nuevo aplicando refutación por resolución. Para ello hemos de constatar que alguna de las dos fórmulas dadas no implica semánticamente a la otra. Por ejemplo, vamos a comprobar que la implicación semántica

$$\forall x R(x,y) \models \forall y R(y,y)$$

no es cierta, lo que equivale a que el conjunto

$$\Omega = \big\{\forall x R(x,y),\ \neg \forall y R(y,y)\big\}$$

sea satisfacible. Ahora hay que tener cuidado ya que la primera de las dos fórmulas no es una sentencia, por lo que no podemos aplicarle directamente la metodología estudiada, es decir, obtener formas clausuladas, descomponer en cláusulas y calcular resolventes. ¿Qué hacemos entonces? Usamos el Ejercicio 29 y obtenemos el nuevo conjunto de fórmulas

$$\Omega^* = \big\{\forall x R(x,a),\ \neg\forall y R(y,y)\big\}$$

con el cual ya sí, procedemos como de costumbre. El conjunto de cláusulas que resulta es

$$\Gamma = \{R(x,a),\ \neg R(b,b)\},$$

a partir del cual no se puede calcular ninguna resolvente, en particular tampoco la cláusula vacía. Por consiguiente $\Gamma$ es satisfacible, y así $\Omega^*$ también lo es, y por tanto $\Omega$ es satisfacible. Ésto último nos dice que la implicación semántica propuesta no es cierta, y en particular las fórmulas dadas no son equivalentes. Otra forma de resolver este ejercicio, que no es la que dice el enunciado, sería encontrar una interpretación bajo la cual una fórmula se hace verdadera y la otra falsa.

En cada apartado del Ejercicio 23 tenemos que comprobar que $\models \alpha$, ó equivalentemente que el conjunto de fórmulas $\{\neg\alpha\}$ es insatisfacible.

En el Ejercicio 24 nos dan un conjunto de cláusulas para el cual hemos de estudiar si existe o no una refutación lineal-input. (Repase este concepto en el Tema 6.) En este tipo de ejercicios no se recomienda calcular resolventes indiscriminadamente con la pretensión de que en algún punto se llegue a la cláusula vacía. Es mejor visualizar mentalmente el camino que nos lleva a la cláusula vacía, o detectar algún detalle que nos permita decir que no se puede. Es decir, primero hay que hacer un análisis del problema. Además es conveniente renombrar las variables en algunas de las cláusulas dadas para que dos cláusulas diferentes no tengan variables en común. Nótese además que aunque en $\Gamma$ hay una cláusula negativa, $\Gamma$ no es un conjunto de Horn. No obstante vamos a comenzar con tal cláusula que es la $(4)$, que la resolvemos con un factor de $(2)$, resultando una cláusula de la forma $\neg T(\ldots)$. Ésta última la resolvemos con $(3)$ y obtenemos otra de la forma $\neg D(\ldots)$, la cual la resolvemos con $(1)$ y obtenemos otra de la forma $\neg H(\ldots)$. Por último ésta podemos resolverla con un factor de $(5)$, o bien con $(6)$, y es posible que resulte la cláusula vacía. A ésto es a lo que me refería más arriba. Los detalles quedan propuestos para el alumno.

El Ejercicio $25$ es similar al $24$. Para responder al Ejercicio $26$ basta repasar algunos de los ejemplos que aparecen en el Tema $6$.

El Ejercicio $27$ nos enseña cómo estudiar si una fórmula, que no es una sentencia, es o no universalmente válida. Sencillamente hay que calcular su cierre universal, que sí es sentencia, y a ésta aplicarle la metodología estudiada en este tema. Para la primera fórmula dada en el Ejercicio $28$, que no es sentencia, su cierre universal es

$$\forall y\Big(\forall x(R(x,y)\ \vee\ R(y,x)) \to R(y,y)\Big).$$

Por tanto hay que estudiar si el conjunto

$$\Big\{\neg\forall y\big(\forall x(R(x,y)\ \vee\ R(y,x)) \to R(y,y)\big)\Big\}$$

es o no insatisfacible. Los detalles quedan propuestos para el alumno.

El Ejercicio $29$ ya lo hemos comentado en una ejercicio previo, y en el Ejercicio $30$ tenemos que poner en práctica lo aprendido en el $29$.

Por último, en los Ejercicios $31$ y $32$ hay que representar previamente la información dada mediante fórmulas (que serán además sentencias) y a continuación aplicar los métodos ya conocidos. En el Tema $5$ ya vimos ejercicios de representación de información mediante proposiciones lógicas, por lo que ambos quedan también propuestos para el alumno.