# Segunda Entrega Grafos

Alberto Llamas González

*Lógica y Métodos Discretos*
*1º Grado Ingeniería Informática*

(3.27) Encuentra, si existe un grafo G de cuatro vértices con grados {3, 2, 3, 2}

Utiliza el algoritmo de demolición - reconstrucción. Calcula su polinomio cromático

$P_G(x)$, su nº cromático y de cuantas formas se puede pintar con 6 colores.

$G \to \{3,2,3,2\}$

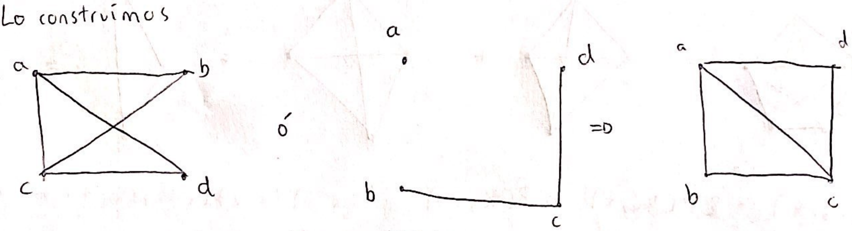
| a | b | c | d |
|---|---|---|---|
| $\cancel{3}$ | 2 | 3 | 2 |
| 0 | 1 | $\cancel{2}$ | 1 |
| 0 | 0 | 0 | 0 |

pivote a → elegimos b, c, d

pivote c → elegimos b, d

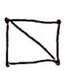
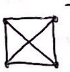
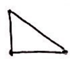
ES UNA SECUENCIA GRÁFICA

Lo construimos



Utilizando el segundo grafo reconstruido:

Para calcular el polinomio cromático, usamos el algoritmo de la suma.

$P(G,x) =$ [  ] = [  ] + [  ] $= P(K_4,x) + P(K_3,x) =$

$= x(x-1)(x-2)(x-3) + x(x-1)(x-2) = x(x-1)(x-2)\left[x-3+1\right] =$

$= \boxed{x(x-1)(x-2)^2 = p(G,x)}$

El nº cromático es el primer natural distinto de 0 que no anula el polinomio cromático

$P(G,1) = 0$

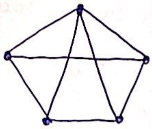
$P(G,2) = 0$

$P(G,3) = 6 \neq 0 \Rightarrow$ El nº cromático es 3

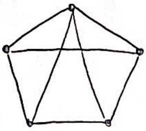
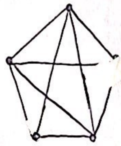
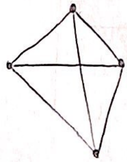
Con 6 colores: $p(G,6) = 6(6-1)(6-2)^2 = 6 \cdot 5 \cdot 16 = \underline{480}$

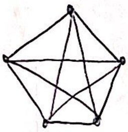
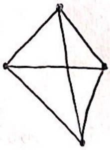
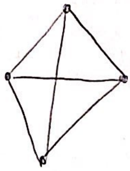
Se puede pintar de 480 formas distintas

(3.28) Dado el grafo G



calcula su polinomio cromático $P_G(x)$ y su nº cromático. ¿De cuantas formas se puede pintar G con 6 colores?

$P(G,x) =$  $=$  $+$  $=$

$=$  $+$  $+$  $+$  $=$

$= P(K_5,x) + 2P(K_4,x) + P(K_3,x) = x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4) +$

$+ 2x(x-1)(x-2)(x-3) + x(x-1)(x-2) = x(x-1)(x-2)\left[(x-3)(x-4)+2(x-3)+1\right] =$

$= (x^3-3x^2+2x)(x^2-7x+12+2x-6+1) = \boxed{(x^3-3x^2+2x)(x^2-5x+7) = P(G,x)}$

$P(0) = 0$

$P(1) = (1-3+2)(1-5+7) = 0$

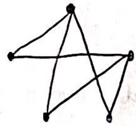
$P(2) = (2^3 - 3\cdot 4 + 4)(4-20+7) = 0$

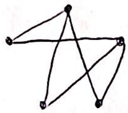
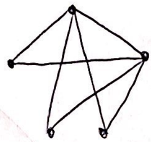
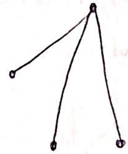
$P(3) = (3^3 - 3^{3} + 6)(3^2 - 30 + 7) = 6 \cdot 14 \neq 0 \Rightarrow$ El nº cromático es $\underline{3}$

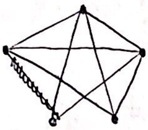
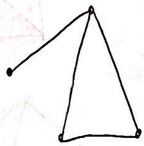
$P(G,6) = (6^3 - 3\cdot 6^2 + 2\cdot 6)(6^2 - 5\cdot 6 + 7) = 1560$

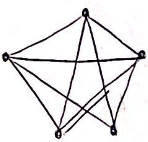
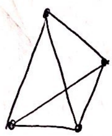
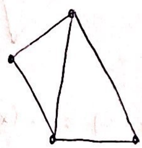
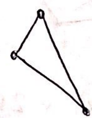
Se puede colorear de 1560 formas distintas con 6 colores.

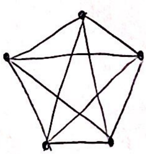
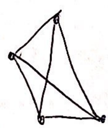
**3.29** Dado el grafo $G = K_{2,3}$ calcula su polinomio cromático $P_G(x)$. Halla el nº cromático de $G$ y calcula de cuántas formas se puede colorear $G$ con 6 colores distintos

$K_{2,3} =$ 

$P(G,x) =$  $=$  $+$  $=$

$=$  $+$  $+$  $+$  $=$

$=$  $+$  $+$  $+$  $+$  $+$ 

$=$  $+ P(K_4,x) +$  $+$  $+ 2P(K_3,x) + P(P_1,x)$

$= P(K_5,x) + P(K_4,x) + P(K_4,x) + 3P(K_3,x) + P(P_1,x) =$

$= x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4) + 2x(x-1)(x-2)(x-3) + 3x(x-1)(x-2) + x(x-1)$

$= x(x-1)(x^3 - 7x^2 + 19x - 17)$

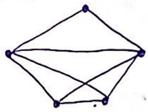
$P(0) = 0$

$P(1) = 1$

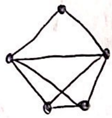
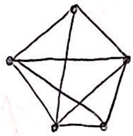
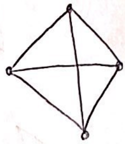
$P(2) = 2\cdot(2^3 - 7\cdot 4 + 19\cdot 2 - 17) \neq 0 \Rightarrow \boxed{\text{Nº cromático} = 2}$

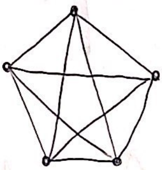
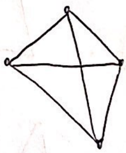
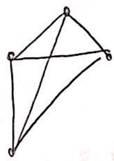
$P(G,6) = 1830 \Rightarrow$ Se puede colorear de 1830 formas distintas

(3.30) Dado el grafo:



Halla su polinomio cromático, su número cromático y de cuantas formas se puede pintar con 4 colores

$p(G,x) =$  $=$  $+$  $=$

$=$  $+$  $+$  $=$

$= P(K_5, x) + 2P(K_4, x) = x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4+2) =$

$= \boxed{x(x-1)(x-2)^2(x-3)}$

$P(1) = 0$

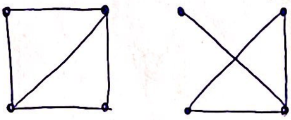
$P(2) = 0$

$P(3) = 0$

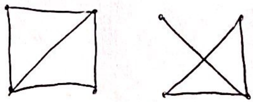
$P(4) = 48 \neq 0 \Rightarrow \boxed{N^o \text{ CROMÁTICO} = 4}$

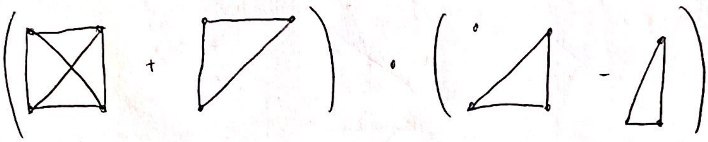
El grafo G se puede colorear de 48 formas distintas con 4 colores

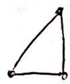
**3.31** Dado el grafo:



Halla su polinomio cromático, su nº cromático y calcula de cuantas formas se puede colorear con 5 colores.

$P(G,x) = P(G_1,x) \cdot P(G_2,x) =$  $=$

$=$  $=$

$= \left(p(K_4,x) + p(K_3,x)\right) \cdot \left(\cdot\right.$  $\left. - P(K_3,x)\right) =$

$= \left(P(K_4,x) + P(K_3,x)\right)\left(P(K_1,x)\,P(K_3,x) - P(K_3,x)\right) =$

$= \left(x(x-1)(x-2)(x-3) + x(x-1)(x-2)\right) \cdot \left(x^2(x-1)(x-2) - x(x-1)(x-2)\right) =$

$= \left(x(x-1)(x-2)(x-3+1)\right)\left(x(x-1)(x-2)(x-1)\right) =$

$= \boxed{x^2(x-1)^3(x-2)^3 = P(G,x)}$

$P(1) = 0$

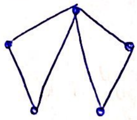
$P(2) = 0$

$P(3) = 72 \neq 0 \Rightarrow$ $\boxed{\text{Nº cromático} = 3}$

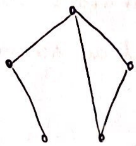
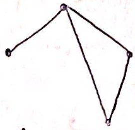
$P(G,5) = 25(4)^3(3)^3 = 43200$

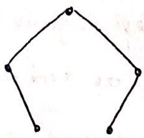
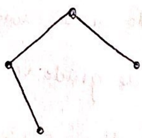
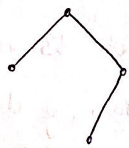
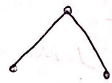
El grafo G se puede colorear de 43200 formas distintas

3.32 Dado el grafo



Halla su polinomio cromático, su nº cromático y calcula de cuantas formas se puede colorear con 5 colores

$P_G(x) =$  $=$  $-$  $=$

$=$  $-$  $-$ $\Big($  $-$  $\Big) =$

$= p_G(P_5, x) - 2\, P_G(P_4, x) + p(P_3, x) =$

$= x(x-1)^4 - 2x(x-1)^3 + x(x-1)^2$

$p(G,1) = 0 \quad p(G,2) = 0 \quad p(G,3) = 12 \neq 0 \quad \chi_G = 3$ (Nº cromático)

$p(G,5) = 5(4)^4 - 2\cdot 5(4)^3 + 5(4)^2 = 720 \Rightarrow$ El grafo G se puede colorear de 720 formas distintas con 5 colores

Escaneado con CamScanner

3.33 Demuestra que en cualquier árbol con 2 o más vértices existe, al menos, un vértice de grado uno.

Sea P el camino más largo del grafo G. P existe por ser G conexo. Sea v el vértice inicial de P. Si $gr(v) > 1 \Rightarrow$ v estaría conectado con el siguiente vértice de P y con otro vértice u. Si u está en P tendríamos un ciclo, lo cual es imposible porque G es un árbol. Si u no está en P, encontramos otra contradicción, ya que P no sería el camino más largo de G. $\Rightarrow$

$\boxed{v \text{ tiene grado } 1}$

3.34 Un árbol tiene 33 vértices de grado uno, 25 vértices de grado 2, 15 vértices de grado 3, y el resto de grado 4. ¿Cuántos vértices tiene en total?

Sabemos que la suma de los grados de un grafo es igual al doble del nº de lados $\Rightarrow \sum gr = 2l$

Además, en un árbol se cumple que $l = (n-1)$

Luego, tenemos:

$$\left.\begin{array}{l} 2l = 33 \cdot 1 + 25 \cdot 2 + 15 \cdot 3 + n - (33+25+15) \cdot 4 \\ l = n-1 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

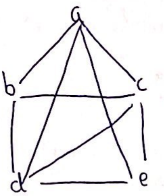
$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2l = 128 + (n-73) \cdot 4 \\ l = n-1 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} 2l - 4n = 128 - 292 = -164 \\ l - n = -1 \end{array}\right\}$$

$l = 80$

$\boxed{n = 81}$ $\rightarrow$ El grafo tiene 81 vértices

Escaneado con CamScanner

3.35 Calcula un grafo generador para los grafos del ejercicio 3.23

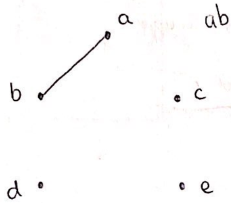



Ordenamos los lados:

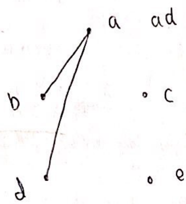
ab, ad, ae, ac, bc, bd, cd, ce, de

Vamos haciendo las iteraciones con el algoritmo de construcción

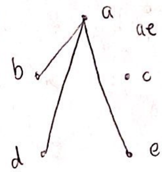
n=9



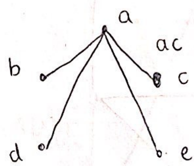

It 1




It 2

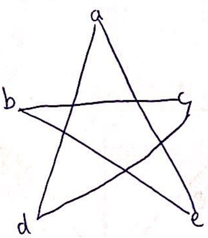



It3



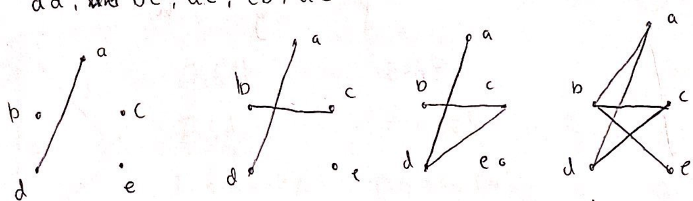

Árbol generador

Si seguimos añadiendo lados se forma algún ciclo

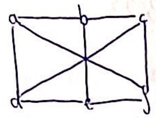



Ordenamos:

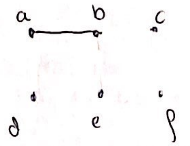
ad, ~~ae~~ bc, dc, eb, ae

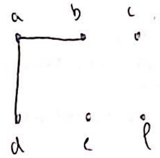


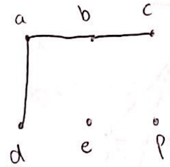

Árbol generador

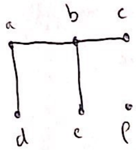


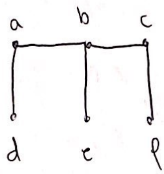

Ordenación : ab, ad, bc, be, cf, cd, ed, ef, af



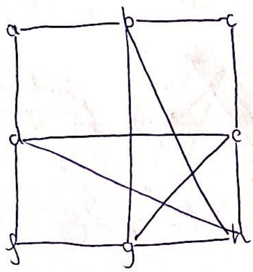



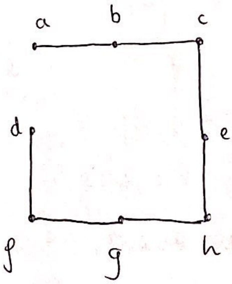




Si añadimos más lados se forman ciclos, luego:

→ Árbol generador

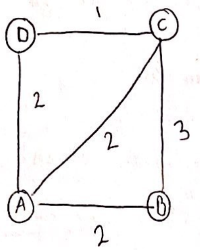



Ordenación: ab, bc, ce, eh, hg, gf, fd, ad, de, eg, gb, bh, hd




→ Árbol generador

(3.36) Dados los grafos ponderados, halla para cada uno de ellos, utilizando los algoritmos de Kruskal y el de Prim un árbol generador de peso mínimo. Detalla el orden de las elecciones o eliminaciones y describe la aplicación de cada algoritmo paso a paso.



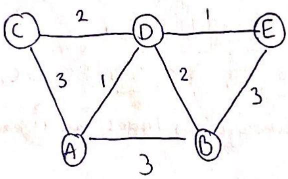
Utilizamos el Algoritmo de Prim:

T={A} E={}

T={A,B} E={AB} 2

T={A,B,D} E={AB,AD} 4

T={A,B,D,C} E={AB,AD,DC} 5



Algoritmo Prim

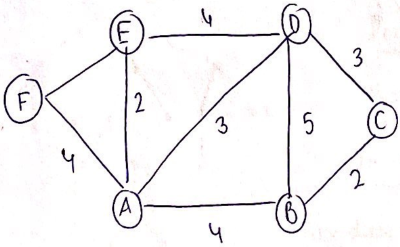
T={A} E={}

T={A,D} E={AD} 1

T={A,D,E} E={AD,DE} 2

T={A,D,E,B} E={AD,DE,DB} 4

T={A,D,E,B,C} E={AD,DE,DB,DC} 6



T={A} E={}

T={A,E} E={AE} 2

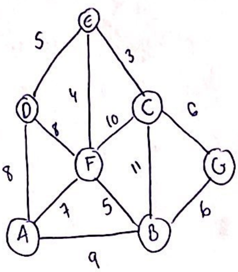
T={A,E,D} E={AE,ED} 6

T={A,E,D,C} E={AE,ED,DC} 9

T={A,E,D,C,B} E={AE,ED,DC,CB} 11

T={A,E,D,C,B,F} E={AF,ED,DC,CB,AF} 15

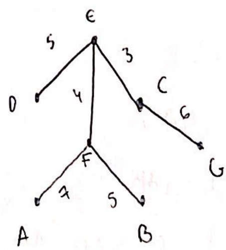
Para los siguientes utilizamos el Algoritmo de Kruskal constructivo



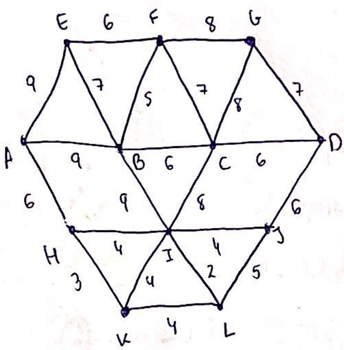
Hacemos la ordenación de forma creciente en peso:

EC, EF, FB, ED, CG, GB, FA, DA, DF, AB, FC, CB
1° 2° 3° 4° 5° 6°

Subrayo los lados que cogemos que no forman ciclos

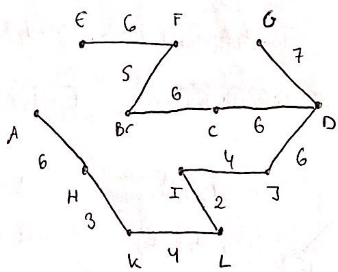


El peso del árbol es 30



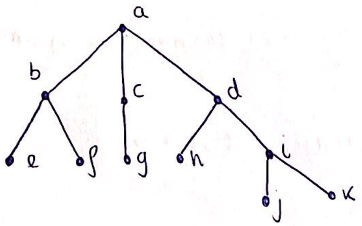
Ordenación creciente:

IL, HK, KL, KI, HI, IJ, JL, BF,
JD, CD, BC, HA, EF, EB, FC, GD, FG, GC,
IC, BI, AB, EA . Subrayo los lados que cogemos



El peso del árbol es 55

3.38 Dados los árboles; escribe la sucesión de sus nodos al recorrerlos de todas las formas posibles (pre-orden, post-orden, in-orden, top-down, bottom-up)



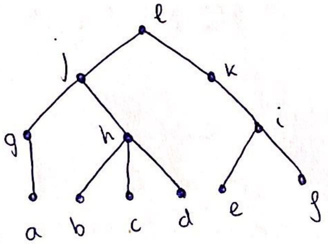

Pre-orden: a, b, e, f, c, g, d, h, i, j, k

Post-orden: e, f, b, g, c, h, j, k, i, d, a

In-orden: e, b, f, a, g, c, h, d, j, i, k

Top-down: a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k

Bottom-up: e, f, g, h, j, k, b, c, i, d, a



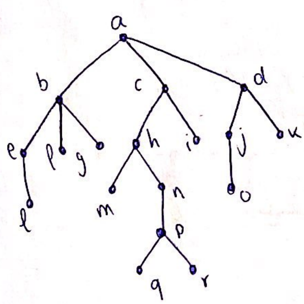

Pre-orden: l, j, g, a, h, b, c, d, k, i, e, f

Post-orden: a, g, b, c, d, h, j, e, f, i, k, l

In-Orden: a, g, j, b, h, c, d, l, e, i, f, k

Top-down: l, j, k, g, h, i, a, b, c, d, e, f

Bottom-up: a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l




Pre-orden: a, b, e, l, f, g, c, h, m, n, p, q, r, i, d, j, o, k

Post-orden: l, e, f, g, b, m, q, r, p, n, h, i, c, o, j, k, d, a

In-orden: l, e, b, f, g, a, m, h, q, p, r, n, c, i, o, j, d, k

Top-down: a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, o, p, q, r

Bottom-up: f, g, i, k, l, m, o, q, r, e, j, p, b, d, n, h, c, a

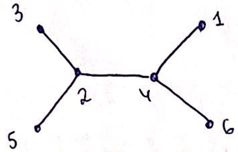
**3.39** Prueba directamente que hay 125 árboles etiquetados con 5 vértices

Por la teoría sabemos que el nº de árboles etiquetados con n vértices es $n^{n-2}$

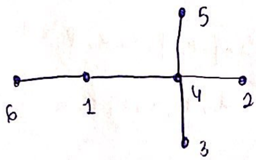
Luego:

$$5^3 = 125 \Rightarrow \text{Hay 125 árboles etiquetados con 5 vértices}$$

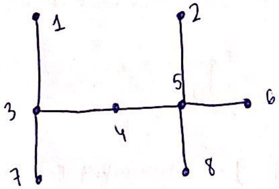
**3.40** Determina los códigos de Prüfer de los árboles:



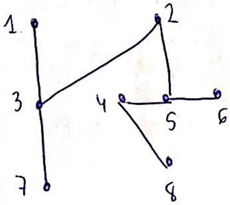

(4, 2, 2, 4)



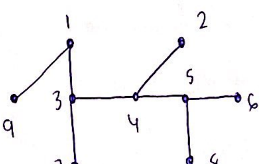

(4, 4, 4, 1)




(3, 5, 5, 3, 4, 5)



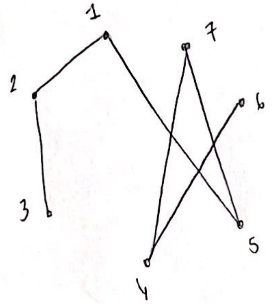

(3, 5, 3, 2, 5, 4)



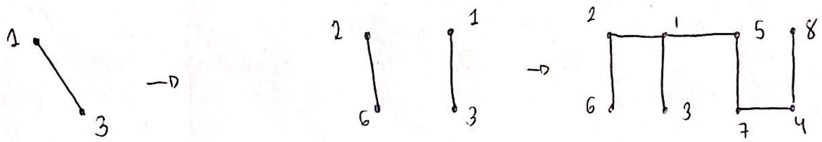

(4, 5, 3, 5, 4, 3, 1)

3.41 Representa los árboles etiquetados con códigos de Prüfer :

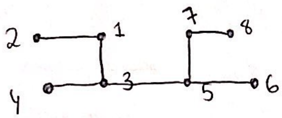
(~~2~~, ~~1~~, 5, 7, 4)   Tiene 7 vértices y 6 lados   ; V = { ~~1~~, ~~2~~, ~~3~~, 4, 5, 6, 7 }



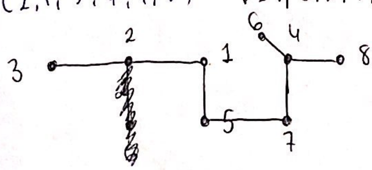
(1, 2, 1, 2, 1, 2)   V = { 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 }



(1, 3, 3, 5, 5, 7)   V = { 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 }



(2, 1, 5, 7, 4, 8)   V = { 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 }



(1, 2, 1, 5, 7, 4)   V = { 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 }