En la última clase de prácticas nos quedamos resolviendo el Ejercicio 1.(f). Tras aplicar la hipótesis de inducción, llegamos a la expresión

$$\frac{1}{\sqrt{3n+1}} \cdot \frac{2n+1}{2n+2},$$

la cual vamos a ver si es menor o igual que la parte derecha de la propiedad que queremos probar para $n+1$, es decir, que

$$\frac{1}{\sqrt{3n+4}}.$$

Por tanto tenemos un nuevo problema, que es intentar demostrar que

$$\frac{1}{\sqrt{3n+1}} \cdot \frac{2n+1}{2n+2} \leq \frac{1}{\sqrt{3n+4}}$$

para todo $n \geq 1$. Llegados a este punto, no hace falta recurrir de nuevo al principio de inducción, ya que se puede demostrar aplicando transformaciones aritméticas elementales. Como se trata de una desigualdad de números positivos, ésta se cumplirá, si y sólo si, sus cuadrados también la cumplen, es decir,

$$\left(\frac{1}{\sqrt{3n+1}} \cdot \frac{2n+1}{2n+2}\right)^2 \leq \left(\frac{1}{\sqrt{3n+4}}\right)^2$$

para todo $n \geq 1$.

Tras simplificar, lo anterior equivale a que

$$\frac{1}{3n+1} \cdot \frac{(2n+1)^2}{(2n+2)^2} \leq \frac{1}{3n+4},$$

es decir,

$$(3n+4) \cdot (2n+1)^2 \leq (3n+1) \cdot (2n+2)^2.$$

Desarrollamos las expresiones polinómicas de ambos miembros (a mano o usando Maxima con los comandos $expand((3*n+4)*(2*n+1)^2);$ $expand((3*n+1)*(2*n+2)^2);$) y obtenemos

$$12n^3 + 28n^2 + 19n + 4 \leq 12n^3 + 28n^2 + 20n + 4,$$

y ésto equivale a que

$$0 \leq n,$$

lo cual es cierto pues estamos suponiendo que $n \geq 1$. Por tanto hemos probado que la propiedad se verifica para $n+1$, y así por el Primer principio de inducción la propiedad es cierta para todo $n \geq 1$.

Resolvemos ahora el Ejercicio 1.(h) en el que se propone probar que

$$7^{2n} + 16n - 1$$

es múltiplo de 64 para todo natural $n \geq 0$.

Por la similitud con otro ejercicio que vimos en clase de teoría, aplicamos el Primer principio de inducción.

Para $n = 0$ la propiedad es cierta ya que

$$7^{2\cdot 0} + 16 \cdot 0 - 1 = 1 + 0 - 1 = 0 = 64 \cdot 0.$$

Establecemos como Hipótesis de inducción (HI) la propiedad para $n \geq 0$, es decir,

$$7^{2n} + 16n - 1 = 64 \cdot x_n,$$

donde $x_n \in \mathbb{Z}$, y entonces intentamos probarlo para $n + 1$, es decir, que

$$7^{2(n+1)} + 16(n + 1) - 1$$

también es múltiplo de 64.

De la HI obtenemos que $7^{2n} = -16n + 1 + 64 \cdot x_n$. Por tanto resulta que

$$7^{2(n+1)} + 16(n + 1) - 1 = 7^{2n} \cdot 7^2 + 16n + 15 = (-16n + 1 + 64 \cdot x_n) \cdot 7^2 + 16n + 15,$$

donde en la última igualdad hemos aplicado la HI. La última expresión obtenida a su vez es igual a

$$64 \cdot 7^2 \cdot x_n + (-16 \cdot 7^2 + 16)n + (7^2 + 15) = 64 \cdot 7^2 \cdot x_n - 768n + 64 = 64 \cdot (49x_n - 12n + 1),$$

lo cual demuestra que la propiedad se verifica para $n + 1$ ya que el hecho de que $x_n \in \mathbb{Z}$ y $n \in \mathbb{N}$, implica que $49x_n - 12n + 1 \in \mathbb{Z}$. Por tanto, por el primer Principio de inducción la propiedad es cierta para todo $n \geq 0$.

Intentamos ahora el Ejercicio 5 en el que nos dan la sucesión definida por la recurrencia

$$\begin{cases} f(0) = 1, \ f(1) = 2 \\ f(n) = 4 + f(n-2) \quad \text{para todo } n \geq 2 \end{cases}$$

y tenemos que demostrar por inducción que

$$f(n) = \frac{1}{2}(4n + 1 + (-1)^n)$$

para todo $n \geq 0$.

Observamos que la recurrencia tiene orden 2, y la propiedad a demostrar es que la sucesión dada por dicha recurrencia tiene otra expresión alternativa. Este ejercicio es similar a otro que hicimos en clase, donde tuvimos que utilizar el Segundo principio de inducción, cosa que haremos también ahora.

Para facilitar la explicación, llamamos $g(n) = \frac{1}{2}(4n + 1 + (-1)^n)$, y así nuestro objetivo es probar que $f(n) = g(n)$ para todo $n \geq 0$.

Comenzamos comprobando la propiedad para los dos casos iniciales, es decir, para $n = 0$ y $n = 1$, ya que el orden de la recurrencia es precisamente dos. Para ello calculamos

$$g(0) = \frac{1}{2}(0 + 1 + 1) = 1 = f(0) \quad \text{y} \quad g(1) = \frac{1}{2}(4 + 1 - 1) = 2 = f(1).$$

Establecemos como hipótesis de inducción que

$$f(0) = g(0), \ f(1) = g(1), \ldots, f(n-1) = g(n-1)$$

para $n-1 \geq 1$, es decir, $n \geq 2$, y ahora intentamos probar que $f(n) = g(n)$.

Por definición de la recurrencia sabemos que $f(n) = 4 + f(n-2)$, y por la HI tenemos que $f(n-2) = g(n-2)$, con lo cual obtenemos que

$$f(n) = 4 + g(n-2) = 4 + \frac{1}{2}(4(n-2) + 1 + (-1)^{n-2}) =$$

$$\frac{1}{2}(8 + 4(n-2) + 1 + (-1)^{n-2}) = \frac{1}{2}(4n + 1 + (-1)^n) = g(n),$$

pues $(-1)^{n-2} = (-1)^n$. Así, la propiedad se verifica para n, y por el Segundo principio de inducción se verifica para todo número natural n.

El alumno puede ahora resolver los Ejercicios 4 y 6 que son similares a éste.

Consideramos ahora el Ejercicio 7 en el cual se define la sucesión de los números de Fibonacci mediante una recurrencia lineal homogénea (RLH). Vamos a resolver el apartado (d) en el que hay que probar que el mcd de dos términos consecutivos de la sucesión dada vale 1.

Como tenemos una RLH de orden 2, uno piensa que hay que utilizar el Segundo principio de inducción. Como veremos en este ejercicio, basta usar el Primer principio. Antes de comenzar la inducción, recordamos la siguiente propiedad elemental sobre números enteros de la cual se obtiene el Algoritmo de Euclides:

Si $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ *y* $a = b \cdot c + d$, *entonces* $\mathrm{mcd}(a, b) = \mathrm{mcd}(b, d)$.

Comenzamos ya la demostración por inducción. Cuando $n = 0$, tenemos

$$\mathrm{mcd}(f(0), f(1)) = \mathrm{mcd}(0, 1),$$

lo cual vale 1. Por tanto la propiedad es cierta para $n = 0$.

Establecemos como HI que la propiedad es cierta para $n \geq 0$, es decir,

$$\mathrm{mcd}(f(n), f(n+1)) = 1,$$

y ahora intentamos probarla para $n+1$, es decir,

$$\mathrm{mcd}(f(n+1), f(n+2)) = 1.$$

Por la definición de la recurrencia obtenemos que

$$f(n+2) = f(n+1) + f(n),$$

que podemos escribirlo como

$$f(n+2) = f(n+1) \cdot 1 + f(n).$$

Por la propiedad mencionada más arriba aplicada a la igualdad anterior, deducimos que

$$\mathrm{mcd}(f(n+2), f(n+1)) = \mathrm{mcd}(f(n+1), f(n)),$$

y ésto último por la HI vale 1, con lo cual la propiedad propuesta es cierta para $n+1$, y así, por el Primer principio de inducción se verifica para todo número natural n.

El alumno ahora puede intentar resolver otros apartados de este ejercicio.

Comentamos a continuación el Ejercicio 9 en el cual nos dan una sucesión definida mediante una recurrencia de orden 1. Cuidado porque no es una recurrencia lineal debido a que aparece la raíz cuadrada de un término de la sucesión. Por tanto las técnicas de resolución de recurrencias estudiadas en clase no se pueden aplicar en este ejercicio. El enunciado nos insta a obtener los primeros términos de la sucesión y a partir de ellos tratar de proponer una fórmula cerrada para $f(n)$. Los primeros terminos de la sucesión son $9,\ 16,\ 25,\ 36, \ldots$. Lo primero que nos llama la atención es que los números obtenidos son cuadrados de números naturales, es decir,

$$f(0) = 9 = 3^2,\ f(1) = 16 = 4^2,\ f(2) = 25 = 5^2,\ f(3) = 36 = 6^2.$$

LLegados a este punto, ¿podría usted proponer una fórmula para $f(n)$? Inténtelo antes de pasar a la página siguiente.

Al menos los cuatro primeros casos que hemos escrito parecen indicar que

$$f(n) = (n+3)^2.$$

Pues vamos a probar por inducción, usando el Primer principio, que ésto es cierto para todo natural n.

La propiedad es cierta para $n = 0$ ya que por definición de la recurrencia,

$$f(0) = 9 = 3^2 = (3+0)^2.$$

Establecemos como HI que la propiedad es cierta para n, es decir,

$$f(n) = (n+3)^2$$

para $n \geq 0$, y tratamos de probarla para $n+1$, es decir, que

$$f(n+1) = (n+4)^2.$$

De nuevo por la definición de la recurrencia, sabemos que

$$f(n+1) = f(n) + 2\sqrt{f(n)} + 1.$$

Por tanto, haciendo uso de la HI, resulta que

$$f(n+1) = (n+3)^2 + 2 \cdot \sqrt{(n+3)^2} + 1 = (n+3)^2 + 2(n+3) + 1 = ((n+3)+1)^2 = (n+4)^2.$$

Vemos que la propiedad es cierta para $n+1$, y por el Primer principio de inducción se verifica para todo número natural n.

Para terminar esta sesión, comentamos algunos aspectos de otros ejercicios propuestos en la Relación 2 sobre inducción.

En el Ejercicio 2, tenemos que encontrar el número natural a partir del cual la propiedad dada es cierta, y a continuación aplicar inducción.

El Ejercicio 8 no se plantea como el típico ejercicio que dice "demuestre por inducción", sino que nos piden primero intentar ver si es cierto que $P(n)$ implica $P(n+1)$. A continuación se nos pregunta si la propiedad propuesta es cierta para todo natural n, lo cual por el Primer principio de inducción será verdad si la respuesta al apartado (a) fué afirmativa y $P(0)$ es cierta.

Cuidado porque podría darse el caso de que $P(n)$ implicara $P(n+1)$ para todo n, pero $P(0)$ fuese falso. Para que entienda mejor lo que digo, sea la propiedad siguiente $Q(n)$ definida para todo natural n, que afirma que el número $2n+1$ es par. Para todo n, es cierto que $Q(n)$ implica $Q(n+1)$, es decir, si asumimos que $2n+1$ es par, entonces $2(n+1)+1 = 2n+3$ también es par, ya que $2n+3 = (2n+1)+2$. Sin embargo $Q(n)$ es falsa para todo n como se puede observar.

En el Ejercicio 13 se recomienda definir una recurrencia (no necesariamente lineal) para la sucesión dada. Además hay que observar que el número real a es mayor que cero, lo cual, por la forma como se define $f(n)$, implica (y no hay que demostrarlo) que $f(n) > 0$ para todo n. Por tanto, para resolver el ejercicio, basta demostrar por inducción que $f(n)$ pertenece a $\mathbb{Z}$ para todo n.

En el Ejercicio 15 tenemos un ejemplo de que los principios de inducción no sólo se usan para demostrar fórmulas, sino propiedades de otros tipos. Cabe añadir al enunciado que el sentido en el que recorremos el círculo lo elegimos al principio según nos convenga, es decir, para un círculo podría interesarnos recorrerlo en el sentido de las agujas del reloj, o bien en sentido contrario. En otros casos es indiferente el sentido elegido, por ejemplo para $n = 2$, si tenemos $1, -1, 1, -1$, comenzamos en cualquiera de los dos unos y recorremos el círculo en cualquiera de los dos sentidos posibles.

Por último, recalcar que es muy importante que el alumno intente resolver ejercicios por su cuenta.