Sesión de prácticas

Material elaborado por Juan Urbano

En esta sesión comenzamos con los ejercicios de la relación del Tema 4 sobre Lógica proposicional. Como se explica en los apuntes, en la Lógica proposicional hay unos operadores lógicos que nos permiten construir proposiciones lógicas a partir de unas proposiciones básicas llamadas variables proposicionales. Lo primero que llama la atención es que los símbolos utilizados para los mencionados operadores lógicos son prácticamente los mismos que para los operadores booleanos que estudiamos en el Tema 1 sobre álgebras de Boole. Ésto no es casualidad, pues los operadores booleanos son los que nos van a permitir asignarle un significado a los correspondientes operadores lógicos, tal y como se explica en la Sección 3 de los apuntes.

En el Ejercicio 1 se propone traducir ciertas fórmulas (ó proposiciones) lógicas escritas en la forma usual, a la notación prefija ó polaca. Recordemos que en la notación prefija, cuando tenemos un operador binario se escribe en primer lugar el operador, en segundo lugar el operando izquierdo, y por último el operando derecho. Para la fórmula

$$\neg P \to Q \wedge R$$

del apartado (a), obtenemos

$$\to \neg P \wedge QR,$$

y la para la fórmula

$$(\neg P \to Q) \wedge R$$

del apartado (b), obtenemos

$$\wedge \to \neg PQR.$$

Para el apartado (e) se obtiene

$$\to\to PQ \to RS.$$

En la notación prefija no hace falta el uso de paréntesis a la hora de escribir las fórmulas lógicas, aunque las expresiones que resultan son más ininteligibles para un ser humano. Como ejercicio adicional, de las fórmulas en notación polaca obtenidas, recupere de nuevo las fórmulas correspondientes en notación usual, que por cierto, se denomina notación infija.

En el Ejercicio 3 se propone otra actividad no menos importante como es la traducción de frases del lenguaje natural, el que utilizamos los seres humanos, al lenguaje de la lógica. Para poder aplicar los métodos que estudiaremos en este segundo bloque de la asignatura a la resolución de problemas lógicos que surgen en el entorno del ser humano, es fundamental saber transcribir dichos enunciados al lenguaje de la lógica.

Disponemos de tres proposiciones lógicas $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, las cuales se usan para construir nuevos enunciados que son los que tenemos que transcribir nosotros al lenguaje de la lógica. Es recomendable que antes de continuar, le eche un vistazo a la Sección 2 de los apuntes.

La solución del apartado (a) es

$$\alpha_3 \to \alpha_2,$$

y la solución del apartado (b) es

$$\alpha_3 \to \alpha_1.$$

En el apartado (c) se complica un poco. Nos dicen que α_1 no es condición necesaria para α_3 ni para α_2. Dicho de otra forma, que α_1 no es condición necesaria para α_3 y que α_1 no es condición necesaria para α_2. Por tanto resultará una proposición compuesta de la forma

$$(\ldots) \wedge (\ldots).$$

El primer paréntesis es la traducción de la frase "α_1 no es condición necesaria para α_3", la cual es la negación de la frase "α_1 es condición necesaria para α_3". Por consiguiente la proposición lógica que escribimos en el primer paréntesis de arriba es

$$\neg(\alpha_3 \to \alpha_1).$$

Similarmente la fórmula que hemos de escribir en el segundo paréntesis es

$$\neg(\alpha_2 \to \alpha_1).$$

Así, la respuesta al apartado (c) es

$$\neg(\alpha_3 \to \alpha_1) \wedge \neg(\alpha_2 \to \alpha_1).$$

Ahora ya puede resolver los apartados (d) y (e) que son parecidos al anterior.

En el apartado (f) se propone traducir la frase "si α_1 es condición necesaria para α_2, entonces $\neg\alpha_3$ y α_1". La solución es

$$(\alpha_2 \to \alpha_1) \to (\neg\alpha_3 \wedge \alpha_1).$$

Los dos últimos paréntesis que aparecen en la fórmula pueden ser suprimidos, pues el operador $\wedge$ tiene más precedencia que el operador $\to$ inmediatamente anterior a él, con lo cual también podríamos haber escrito la respuesta como

$$(\alpha_2 \to \alpha_1) \to \neg\alpha_3 \wedge \alpha_1.$$

Con el Ejercicio 4 comenzamos un nuevo tipo de ejercicios en los que se trabaja con interpretaciones de fórmulas, que son el mecanismo que establece cuándo una fórmula es verdadera o falsa. Entramos así en el campo de la semántica de la lógica, que es el objeto de la Sección 3 en los apuntes. Recordemos que el valor 1 indica que una fórmula es verdadera y el 0 que es falsa.

Tenemos cinco proposiciones lógicas $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$ y una interpretación I tal que

$$\mathrm{I}\Big(\alpha_1 \to (\alpha_2 \vee \neg\alpha_3)\Big) = 0 \quad \text{e} \quad \mathrm{I}\Big(\alpha_4 \wedge \neg\alpha_5\Big) = 1.$$

El objetivo es calcular los valores $\mathrm{I}(\alpha_i)$ para $i = 1, \ldots, 5$. Para ello tenemos que recordar que por definición $\alpha \to \beta$ es verdadera siempre, excepto en el caso en el que α es verdadera y β es falsa. Así obtenemos de forma inmediata que

$$\mathrm{I}(\alpha_1) = 1, \quad \mathrm{I}(\alpha_2 \vee \neg\alpha_3) = 0, \quad \mathrm{I}(\alpha_4) = 1, \quad \mathrm{I}(\neg\alpha_5) = 1.$$

Por tanto,

$$\mathrm{I}(\alpha_1) = 1, \quad \mathrm{I}(\alpha_2) = 0, \quad \mathrm{I}(\alpha_3) = 1, \quad \mathrm{I}(\alpha_4) = 1, \quad \mathrm{I}(\alpha_5) = 0.$$

El Ejercicio 5 es parecido al 4, pero ahora además tenemos que usar la información obtenida, es decir, los valores $\mathrm{I}(\alpha_1)$, $\mathrm{I}(\alpha_2)$,$\mathrm{I}(\alpha_3)$, para evaluar nuevas fórmulas.

En el Ejercicio 6 tenemos que clasificar las fórmulas dadas. Para ello aplicaremos alguno de los métodos que tenemos disponibles hasta este momento. La fórmula

$$\alpha_1 = R \vee \neg S$$

es satisfacible ya que existen interpretaciones I tales que $\mathrm{I}(\alpha_1) = 1$, como por ejemplo cualquier interpretación tal que $\mathrm{I}(R) = 1$. También es refutable, pues si tomamos una interpretación I' tal que $\mathrm{I}'(R) = 0$ e $\mathrm{I}'(S) = 1$, evidentemente $\mathrm{I}'(\alpha_1) = 0$. Así pues, α_1 es una fórmula contingente.

Consideramos ahora la fórmula

$$\alpha_2 = Q \leftrightarrow \neg Q.$$

Si I es una interpretación tal que $\mathrm{I}(Q) = 0$, entonces

$$\mathrm{I}(\alpha_2) = \mathrm{I}(Q) \leftrightarrow \overline{\mathrm{I}(Q)} = 0 \leftrightarrow 1 = 0.$$

Si I es una interpretación tal que $\mathrm{I}(Q) = 1$, entonces

$$\mathrm{I}(\alpha_2) = \mathrm{I}(Q) \leftrightarrow \overline{\mathrm{I}(Q)} = 1 \leftrightarrow 0 = 0.$$

Por tanto, independientemente del valor de $\mathrm{I}(Q)$, se cumple que $\mathrm{I}(\alpha_2) = 0$, y así α_2 es una contradicción. Observe cómo para evaluar una fórmula mediante una interpretación, pasamos de los operadores lógicos a los operadores booleanos

Estudiamos ahora la fórmula

$$\alpha_4 = Q \wedge R \to Q \vee R,$$

que en realidad representa la fórmula

$$(Q \wedge R) \to (Q \vee R),$$

aunque omitimos los paréntesis porque asumimos (tal y como se establece en los apuntes) que los operadores $\vee$ e $\wedge$ tienen mayor precedencia que el operador $\to$. (Recuerde que en expresiones algebraicas de números reales, el producto tiene mayor precedencia que la suma, por lo cual $4 \cdot 5 + 1$ vale 21, y no 24.)

¿Qué método aplicamos ahora? Decimos primero cuál no conviene aplicar. Concretamente las interpretaciones en términos de sumas exclusivas, pues con éstas se obtienen expresiones algebraicas complicadas. (Véase el apartado (1) en el Ejemplo 5 en la página 8 de los apuntes.)

Una alternativa son las tablas de verdad. En este ejemplo al haber tres variables proposicionales resulta una tabla de ocho filas la cual es asumible. (Resuelva este ejercicio de esta forma.) Aquí ponemos en práctica otro método, que no siempre resuelve el ejercicio completamente, pero para este ejercicio concreto, como veremos sí.

Vamos a justificar que α_4 es una tautología. Para ello suponemos por reducción al absurdo que existe alguna interpretación I tal que $\mathrm{I}(\alpha_4) = 0$. El objetivo es alcanzar alguna contradicción de tipo matemático. Por la definición de $\mathrm{I}(\alpha \to \beta)$ aplicado a nuestra fórmula α_4, si $\mathrm{I}(\alpha_4) = 0$, entonces $\mathrm{I}(Q \wedge R) = 1$ e $\mathrm{I}(Q \vee R) = 0$. Pero $\mathrm{I}(Q \wedge R) = 1$ implica que $\mathrm{I}(Q) = 1$ e $\mathrm{I}(R) = 1$, lo cual implica que $\mathrm{I}(Q \vee R)$ ha de valer 1, y ésto entra en contradicción con la igualdad $\mathrm{I}(Q \vee R) = 0$ que hemos obtenido previamente. Por tanto no existe ninguna interpretación I tal que $\mathrm{I}(\alpha_4) = 0$. Dicho de modo equivalente, para cualquier interpretación I, se verifica que $\mathrm{I}(\alpha_4) = 1$, y así α_4 es tautología.

En el Ejercicio 8 se nos propone estudiar dos fórmulas más complicadas para las cuales escribir sus tablas de verdad ya incluso resulta tedioso. Recordamos que las herramientas que tenemos hasta este momento para el estudio de fórmulas son muy limitadas. En lo que queda de tema estudiaremos otras ideas que simplifican la clasificación de fórmulas.

En el Ejercicio 9 se trata de justificar que cualquier interpretación satisface al conjunto vacío, se entiende, el conjunto vacío visto como un conjunto de fórmulas. Una manera de hacerlo consiste en aplicar la misma idea que hemos utilizado para estudiar la fórmula α_4 en el Ejercicio 6, es decir, suponer por reducción al absurdo que existe alguna interpretación I que no satisface al conjunto vacío, lo cual nos lleva a que en el conjunto vacío hay alguna fórmula α tal que $\mathrm{I}(\alpha) = 0$. Pero ésto contradice la definición del propio conjunto vacío en el cual no hay ningún elemento, y por tanto tampoco ninguna fórmula. Por consiguiente para cualquier interpretación I se verifica que $\mathrm{I}(\varnothing) = 1$. (Recuerde que según la definición dada en la página 9 en los apuntes, una interpretación I satisface a un conjunto de fórmulas Ω cuando I satisface a cada una de las fórmulas que pertenecen a Ω. Por tanto, una interpretación I no satisface a un conjunto de fórmulas Ω cuando en Ω hay al menos una fórmula que se interpreta como falsa bajo la interpretación I. Esto lo hemos usado en el argumento dado más arriba.)

En el Ejercicio 10 tenemos otro tipo de problema. En cada apartado nos dan un conjunto de fórmulas y nos piden que describamos cómo son todas las interpretaciones que lo satisfacen. Para que lo entienda mejor, si tuviéramos las tablas de verdad de todas las fórmulas en el conjunto dado, nos estarían preguntando en qué filas el valor correspondiente que aparece en la columna de la derecha es 1. Por ejemplo para el apartado (b) en el que tenemos el conjunto

$$\Omega_2 = \{P \vee Q \ \leftrightarrow \ P \wedge Q\},$$

las interpretaciones que satisfacen a Ω_2 son aquellas interpretaciones I tales que

$$\mathrm{I}(P) = \mathrm{I}(Q) = 0,$$

así como aquellas tales que

$$\mathrm{I}(P) = \mathrm{I}(Q) = 1,$$

lo cual se puede sintetizar en una sóla condición diciendo que $\mathrm{I}(P) = \mathrm{I}(Q)$. Este ejemplo concreto también se puede resolver sin hacer uso de las tablas de verdad de las fórmulas. Veámoslo. Si

$$\mathrm{I}(P \vee Q \ \leftrightarrow \ P \wedge Q) = 1,$$

entonces

$$\mathrm{I}(P \vee Q) = \mathrm{I}(P \wedge Q),$$

por la definición para la interpretación de una fórmula del tipo $\alpha \leftrightarrow \beta$. Resultan dos casos, el primero es

$$\mathrm{I}(P \vee Q) = \mathrm{I}(P \wedge Q) = 1,$$

de lo cual se obtiene que $\mathrm{I}(P) = \mathrm{I}(Q) = 1$, y el segundo es

$$\mathrm{I}(P \vee Q) = \mathrm{I}(P \wedge Q) = 0,$$

de lo cual se obtiene que $\mathrm{I}(P) = \mathrm{I}(Q) = 0$. Asegúrese de que entiende esto último antes de continuar. Intente los otros apartados de este ejercicio.

El Ejercicio 11 nos plantea algo interesante, y es que al estudiar si un conjunto de fórmulas es satisfacible ó insatisfacible, podemos suprimir las tautologías que pertenecen al mismo. Dicho de otro modo, las tautologías que pertenecen a un conjunto de fórmulas no influyen en su satisfacibilidad ó insatisfacibilidad.

La demostración es sencilla. Si partimos de que $\Omega \cup \{\tau\}$ es satisfacible, sabemos que existe alguna interpretación I que satisface al mismo, es decir, que $\mathrm{I}\big(\Omega \cup \{\tau\}\big) = 1$, lo cual evidentemente implica que $\mathrm{I}\big(\Omega\big) = 1$, con lo cual Ω es satisfacible. Recíprocamente, supongamos que Ω es satisfacible, y sea I una interpretación tal que $\mathrm{I}\big(\Omega\big) = 1$. Si τ es tautología, sabemos que $\mathrm{I}(\tau) = 1$, y por tanto $\mathrm{I}\big(\Omega \cup \{\tau\}\big) = 1$, es decir, $\Omega \cup \{\tau\}$ es satisfacible.

Intente el Ejercicio 12 que es similar al anterior.

En los Ejercicios 13 y 14 aparece un concepto nuevo que es el de fórmulas lógicamente equivalentes. (Consulte la página 11 en los apuntes.)

En el Ejercicio 15 tenemos que traducir una frase del lenguaje natural a la Lógica de proposiciones. (Repase la página 3 de los apuntes.)

En el Ejercicio 16 aparece el concepto de consecuencia lógica, también llamado implicación semántica, que establece el hecho de que la verdad simultánea de todas las fórmulas en un conjunto dado, implica la verdad de otra fórmula. (Consulte la Sección 6 de los apuntes.)

En lo que queda de asignatura vamos a dar métodos para estudiar si $\Omega \models \beta$ se verifica o no. En el Tema 4 actual lo hacemos para la Lógica de proposiciones, y en los Temas 5 y 6 para la Lógica de predicados. Pues bien, la propiedad presentada en el Ejercicio 16 nos dice que responder a un problema del tipo $\Omega \models \beta$, es equivalente a estudiar si el conjunto $\Omega \cup \{\neg\beta\}$ es insatisfacible. Es decir, para resolver un problema, terminamos resolviendo otro equivalente.

La solución del Ejercicio 16 es la siguiente. Suponemos en primer lugar que $\Omega \models \beta$, y en dicho caso queremos probar que el conjunto $\Omega \cup \{\neg\beta\}$ es insatisfacible. Supongamos por reducción al absurdo que no lo es, en cuyo caso existe al menos una interpretación I tal que $\mathrm{I}(\Omega) = 1$ e $\mathrm{I}(\neg\beta) = 1$, y por tanto, que $\mathrm{I}(\beta) = 0$. Pero el hecho de que exista al menos una interpretación I tal que $\mathrm{I}(\Omega) = 1$ e $\mathrm{I}(\beta) = 0$, significa que β no es consecuencia lógica del conjunto Ω, lo que contradice la hipótesis de la cual hemos partido.

Recíprocamente, supongamos que el conjunto $\Omega \cup \{\neg\beta\}$ es insatisfacible. Ahora hemos de probar que $\Omega \models \beta$. Para ello, sea I una interpretación tal que $\mathrm{I}(\Omega) = 1$. Nuestro objetivo es llegar a que $\mathrm{I}(\beta) = 1$. De nuevo por reducción al absurdo, si $\mathrm{I}(\beta) = 0$, entonces $\mathrm{I}(\neg\beta) = 1$, por lo cual I es una interpretación que satisface al conjunto $\Omega \cup \{\neg\beta\}$. Pero ésto contradice la hipótesis de que el conjunto $\Omega \cup \{\neg\beta\}$ es insatisfacible. Por tanto se tiene que cumplir que $\mathrm{I}(\beta) = 1$.

En el Ejercicio 17 hay que comprobar que cada una de las fórmulas dadas es una tautología, lo cual se podría hacer mediante el método de las tablas de verdad. No obstante, dependiendo de cómo sea la fórmula en cuestión, puede resultar más factible aplicar otro método alternativo que sea más favorable. Por ejemplo, el apartado (a) puede ser resuelto comprobando que para cualquier interpretación I se verifica que

$$\mathrm{I}(\alpha \to \beta) = \mathrm{I}(\neg\beta \to \neg\alpha).$$

(Inténtelo.) Los apartados (b) y (c) pueden ser resueltos más fácilmente usando el Teorema de la deducción. (Veánse las páginas $18 - 20$ en los apuntes y el Ejercicio 23.)