LMD (Grupo E del GII)

RELACIÓN DE EJERCICIOS DEL TEMA 1

1. Recordemos de teoría que un álgebra de Boole es un conjunto $\mathcal{A}$ en el que hay dos elementos distinguidos $\mathbf{0}$ y $\mathbf{1}$, y sobre el cual se han definido dos operaciones binarias denotadas por $\vee$ y $\wedge$ y una operación monaria denotada por $-$ de modo que se verifica el siguiente conjunto de axiomas:
   1. *Leyes conmutativas*: $\forall a,b \in \mathcal{A},\ a\vee b = b\vee a,\ a\wedge b = b\wedge a.$
   2. *Leyes asociativas*: $\forall a,b,c \in \mathcal{A},\ a\vee(b\vee c) = (a\vee b)\vee c,\ a\wedge(b\wedge c) = (a\wedge b)\wedge c.$
   3. *Leyes distributivas*: $\forall a,b,c \in \mathcal{A},\ a\wedge(b\vee c) = (a\wedge b)\vee(a\wedge c),\ a\vee(b\wedge c) = (a\vee b)\wedge(a\vee c).$
   4. *Leyes de los elementos identidad*: $\forall a \in \mathcal{A},\ a\vee\mathbf{0} = a,\ a\wedge\mathbf{1} = a.$
   5. *Leyes de complementos*: $\forall a \in \mathcal{A},\ a\vee\overline{a} = \mathbf{1},\ a\wedge\overline{a} = \mathbf{0}.$

   Demuestre que las propiedades siguientes son consecuencia de los axiomas anteriores:

   6. *Propiedades de idempotencia*: $\forall a \in \mathcal{A}$, $a\vee a = a$, $a\wedge a = a$.
   7. *Propiedades de los elementos identidad*: $\forall a \in \mathcal{A},\ a\vee\mathbf{1} = \mathbf{1},\ a\wedge\mathbf{0} = \mathbf{0}.$
   8. *Propiedades de absorción*: $\forall a,b \in \mathcal{A},\ a\vee(a\wedge b) = a,\ a\wedge(a\vee b) = a.$
   9. *Caracterización del elemento complementario*:

      Si $a,b \in \mathcal{A}$, entonces
      $$\left.\begin{array}{r} a\vee b = \mathbf{1} \\ a\wedge b = \mathbf{0} \end{array}\right\} \iff b = \overline{a}.$$
   10. *Propiedad de involución ó de doble complemento*: $\forall a \in \mathcal{A},\ \overline{\overline{a}} = a.$
   11. *Propiedades de De Morgan*: $\forall a,b \in \mathcal{A},\ \overline{a\vee b} = \overline{a}\wedge\overline{b},\ \overline{a\wedge b} = \overline{a}\vee\overline{b}.$

2. Basándose en los axiomas de álgebra de Boole y en sus consecuencias inmediatas, demuestre las siguientes identidades:
   a) $(a \vee \overline{(b \wedge c)}) \wedge \overline{b} = \overline{b}$.
   b) $a \vee b \vee (a \wedge c) \vee (b \wedge c) = a \vee b$.
   c) $a \vee b = a \vee (\overline{a} \wedge b)$.
   d) $a \wedge b = a \wedge (\overline{a} \vee b)$.
   e) $(a \vee b) \wedge (a \vee \overline{b}) = a$.
   f) $\overline{a \vee (b \wedge c)} = (\overline{a} \wedge \overline{b}) \vee (\overline{a} \wedge \overline{c})$.
   a^V(b^Ac^)A(aVb^)=(a^Vb^)A(a^Vc^)A(aVb^)=(a^Vb^)=(b^V(a^Aa))A(a^Vc^)=b^A(a^Vc^)
   g) $\overline{(a \wedge (b \vee c)) \vee (\overline{a} \wedge b)} = \overline{b} \wedge (\overline{a} \vee \overline{c})$.
   h) $(a \wedge b) \vee (\overline{a} \wedge c) \vee (b \wedge c) = (a \wedge b) \vee (\overline{a} \wedge c)$.
   i) $(a \wedge b) \vee (a \wedge \overline{b}) \vee (\overline{a} \wedge b) \vee (\overline{a} \wedge \overline{b}) = \mathbf{1}$.   aA(bVb^)Va^A(bVb^) = aVa^= 1

3. Justifique que en cualquier álgebra de Boole, las afirmaciones siguientes son equivalentes:
   $$(1)\ a \vee b = b \qquad (2)\ a \wedge b = a \qquad (3)\ \overline{a} \vee b = \mathbf{1} \qquad (4)\ a \wedge \overline{b} = \mathbf{0}$$

4. Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Boole. Demuestre las siguientes propiedades para la relación de orden implícito en $\mathcal{A}$:
   a) $\forall a \in \mathcal{A}$, $\mathbf{0} \leq a \leq \mathbf{1}$.
   b) $\forall a,b \in \mathcal{A}$, $a \leq b \ \Leftrightarrow\ \overline{b} \leq \overline{a}$.
   c) Si $a \leq b$, entonces $a \vee x \leq b \vee x$ y $a \wedge x \leq b \wedge x$ para todo $x \in \mathcal{A}$.
   d) $\forall a,b,c \in \mathcal{A},\ a \leq b \ \Rightarrow\ a \vee (c \wedge b) = (a \vee c) \wedge b$.   (aVc)A(aVb)= (aVc)Ab
   e) $\forall a,b,c \in \mathcal{A},\ (a \wedge b) \vee (a \wedge c) \vee (b \wedge c) \leq (a \vee b) \wedge (a \vee c) \wedge (b \vee c)$.
   aVcA(aVb)   <= bAcV(aAb)   -> aVbAc <= aVbAc

5. Sean $(\mathcal{A}_1,\vee,\wedge,-),\ldots,(\mathcal{A}_n,\vee,\wedge,-)$ álgebras de Boole. Sobre el conjunto $\mathcal{A}_1 \times \cdots \times \mathcal{A}_n$ definimos las siguientes operaciones:
   $$(x_1,\ldots,x_n) \vee (y_1,\ldots,y_n) = (x_1 \vee y_1,\ldots,x_n \vee y_n),$$
   $$(x_1,\ldots,x_n) \wedge (y_1,\ldots,y_n) = (x_1 \wedge y_1,\ldots,x_n \wedge y_n),$$
   $$\overline{(x_1,\ldots,x_n)} = (\overline{x_1},\ldots,\overline{x_n}).$$

   a) Compruebe que $\mathcal{A}_1 \times \cdots \times \mathcal{A}_n$, respecto de las operaciones anteriores, es un álgebra de Boole cuyos elementos cero y uno son, respectivamente, $(\mathbf{0},\ldots,\mathbf{0})$ y $(\mathbf{1},\ldots,\mathbf{1})$. El álgebra de Boole $\mathcal{A}_1 \times \cdots \times \mathcal{A}_n$ se denomina el álgebra producto de las álgebras de Boole $\mathcal{A}_1,\ldots,\mathcal{A}_n$.

b) Describa la relación de orden implícito en el álgebra de Boole $\mathcal{A}_1 \times \cdots \times \mathcal{A}_n$.
c) Describa los átomos y los coátomos del álgebra de Boole $\mathcal{A}_1 \times \cdots \times \mathcal{A}_n$.

6. Si k es un número entero positivo, denotamos por $\mathrm{D}(k)$ el conjunto de los divisores positivos de k, es decir, $\mathrm{D}(k) = \{d \in \mathbb{N} : d|k\}$. Sean n un entero positivo, $p_1, \ldots, p_n$ números primos distintos y $m = p_1 \cdots p_n$. Definimos sobre el conjunto $\mathrm{D}(m)$ las siguientes operaciones:

$$a \vee b = \mathrm{mcm}(a,b), \text{ es decir, el mínimo común múltiplo de } a \text{ y } b,$$

$$a \wedge b = \mathrm{mcd}(a,b), \text{ es decir, el máximo común divisor de } a \text{ y } b,$$

$$\overline{a} = \tfrac{m}{a}.$$

Justifique que $\mathrm{D}(m)$ con las operaciones anteriores es un álgebra de Boole. Determine el orden implícito, los átomos y los coátomos.

7. Constate que el conjunto de divisores $\mathrm{D}(210)$ es un álgebra de Boole y a continuación evalúe las siguientes expresiones:

$$30 \vee (15 \wedge 10), \quad \overline{14} \wedge 21, \quad \overline{(\overline{6} \vee 35)} \vee 10, \quad \overline{\overline{(3 \vee 10)} \vee 2}.$$

Exprese cada uno de los elementos 21 y 35 como supremo de átomos y como ínfimo de coátomos.

8. Determine un número natural n sabiendo que el conjunto $\mathrm{D}(n)$ de los divisores positivos de n es un álgebra de Boole con las operaciones usuales (véase el Ejercicio 6), y que 105 y 42 son dos coátomos. Además obtenga todos los $x \in \mathrm{D}(n)$ tales que $\overline{105} \vee x = 42$.

9. En el álgebra de Boole $\mathrm{D}(67830)$, ¿cuál de las opciones siguientes es correcta?
a) El número de coátomos es cinco.
b) $1615 \wedge 2261 = 969$.
c) $1615 \vee 2261 = 11305$.
d) $\overline{399} = 340$.

10. En el álgebra de Boole $\mathcal{P}(\{1,2,3,4,5,6\})$, escriba el elemento $\{1,3,4\}$ como supremo de átomos y como ínfimo de coátomos.

11. ¿Para cuántos números naturales n tales que $1 \leq n \leq 10^{1000}$ existe algún álgebra de Boole de n elementos?

12. Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Boole cuyos átomos son a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 y sea el elemento

$$\alpha = \overline{(\overline{a}_1 \wedge (a_2 \vee a_5))} \wedge (a_1 \vee a_2 \vee a_4).$$

Se pide expresar:
a) α como supremo de átomos.
b) α como ínfimo de coátomos.
c) $\overline{\alpha}$ como supremo de átomos.
d) $\overline{\alpha}$ como ínfimo de coátomos.

13. Si a y b son dos átomos distintos pertenecientes a un álgebra de Boole $\mathcal{A}$ de cinco átomos, ¿cuántos elementos x pertenecientes a $\mathcal{A}$ existen tales que $a \vee x = b \vee x$?

14. Si $\mathbb{B}$ es el álgebra de Boole binaria, defina dos isomorfismos del álgebra de Boole $\mathbb{B}^3$ en el álgebra de Boole $\mathrm{D}(30)$. ¿Cuántos isomorfismos distintos hay de $\mathbb{B}^3$ en $\mathrm{D}(30)$?

15. Denotamos por $\mathcal{F}_n$ el conjunto de las funciones booleanas en n variables, es decir, el conjunto de las aplicaciones $f : \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}$. Compruebe que $\mathcal{F}_n$ es un álgebra de Boole con las operaciones dadas por $f \vee g$, $f \wedge g$ y $\overline{f}$, donde

$$(f \vee g)(a_1, \ldots, a_n) = f(a_1, \ldots, a_n) + g(a_1, \ldots, a_n),$$

$$(f \wedge g)(a_1, \ldots, a_n) = f(a_1, \ldots, a_n) \cdot g(a_1, \ldots, a_n),$$

y

$$\overline{f}(a_1, \ldots, a_n) = \overline{f(a_1, \ldots, a_n)}$$

para todo $(a_1,\dots,a_n)\in\mathbb{B}^n$.

16. Escriba la forma normal disyuntiva en términos de variables para cada una de las funciones booleanas siguientes:
    a) $f(x,y,z)=\sum m(2,4,5,6)$.
    b) $f(x,y,z)=(\overline{\overline{x}+yz})\cdot(xy\overline{z}+x\overline{y})$.
    c) $f(x,y,z)=(x+\overline{y}+z)(\overline{x}+y+z)(x+\overline{y}+\overline{z})$.
    d) $f(x,y,z)=\prod M(0,1,4,5)$.

17. Escriba la forma normal conjuntiva en términos de variables para cada una de las funciones booleanas siguientes:
    a) $f(x,y,z)=\prod M(1,4,7)$.
    b) $f(x,y,z)=(\overline{\overline{xy}+z})+x\overline{yz}$.
    c) $f(x,y,z)=x\overline{y}+yz+\overline{x}z$.
    d) $f(x,y,z)=\sum m(1,2,6)$.

18. Calcule la forma normal disyuntiva y la forma normal conjuntiva para la función booleana
$$f(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)=\overline{(x_1+\overline{x}_2+x_4)}\cdot(x_2+\overline{x}_3\cdot x_5)+x_1.$$

19. Consideramos la función booleana $f(x,y,z)=\overline{x\to(\overline{y}\cdot z)}\oplus(x+z)$. Entonces la forma normal conjuntiva de f es:
    a) $\overline{x}yz+\overline{x}\cdot\overline{y}z+x\overline{y}z$.
    b) $(x+y+z)\cdot(\overline{x}+y+z)\cdot(\overline{x}+\overline{y}+z)\cdot(\overline{x}+\overline{y}+\overline{z})\cdot(x+\overline{y}+z)$.
    c) $xyz+\overline{x}\cdot\overline{y}\cdot\overline{z}+\overline{x}y\overline{z}+x\overline{y}\cdot\overline{z}+xy\overline{z}$.
    d) $(\overline{x}+y+\overline{z})\cdot(x+\overline{y}+\overline{z})\cdot(x+y+\overline{z})$.

20. Obtenga la forma normal conjuntiva de la función booleana
$$f(x,y,z,t)=\big[(x+t)\text{ NAND }(\overline{y}+z)\big]+\big[z\overline{t}\oplus(y\text{ NOR }x)\big].$$

21. ¿Verifica la suma exclusiva la propiedad asociativa? ¿Se verifica la propiedad distributiva del producto booleano respecto de la suma exclusiva?

22. Demuestre que toda función booleana se puede expresar usando (tantas veces como sea necesario) la constante **0** y/o el operador booleano $\to$ dado por la tabla siguiente:

a	b	$a\to b$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

    A continuación, represente el operador booleano NAND en términos sólo de operadores $\to$ y/o constantes **0**.

23. ¿Verifica el operador NAND la propiedad asociativa? ¿Y el operador NOR? ¿Y el operador $\to$?

24. Justifique que el conjunto $\{+,\ \cdot\}$ de operadores booleanos no es funcionalmente completo.

25. Sea la función booleana $f(x,y,z)=\overline{\overline{x}y+z}+x\overline{z}$.
    a) Exprese f usando sólo operadores del conjunto $\{\to,\mathbf{0}\}$.
    b) Obtenga el polinomio de Gegalkine de f.

26. Obtenga el polinomio de Gegalkine para la función booleana
$$f(x,y,z,t)=\begin{cases} yt\oplus z & \text{si } x=0\\ (y\text{ NOR }\overline{z})+t & \text{si } x=1\end{cases}$$

27. Exprese el operador NAND en función del operador NOR, y viceversa.

28. Aplique el método de los mapas de Karnaugh para obtener una expresión minimal como suma de productos de literales para cada una de las funciones booleanas siguientes:

a) $f(x_1,x_2,x_3,x_4) = \sum m(2,3,4,5,7,8,10,13,15)$.
b) $f(x_1,x_2,x_3,x_4) = \sum m(0,4,5,7,8,10,14,15)$.
c) $f(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) = \sum m(0,2,4,7,10,12,13,18,23,26,28,29)$.

29. Use el método de los mapas de Karnaugh para obtener una expresión minimal como producto de sumas de literales para la función booleana
$$f(x,y,z,t) = \prod M(0,1,2,3,6,9,14).$$

30. Consideramos la función booleana $f(x,y,z,t) = \sum m(2,3,6,8,9,10,11)$. Se sabe que el precio de una puerta lógica NOT es de 0.3 euros, el de un puerta OR (de dos entradas) es de 0.5 euros, y el de una puerta AND (de dos entradas) es de 0.6 euros. A partir de estos datos, decida si es preferible implementar f como una suma de productos de literales, ó bien, como un producto de sumas de literales.

31. Obtenga una expresión minimal como sumas de productos de literales de la función booleana $f : \mathbb{B}^5 \to \mathbb{B}$ tal que $f(a_4,a_3,a_2,a_1,a_0) = \mathbf{1}$ si, y sólo si, el número natural escrito en binario como $(a_4a_3a_2a_1a_0)_2$, es primo.

32. Sea $f : \mathbb{B}^4 \to \mathbb{B}$ la función booleana tal que $f(a_3,a_2,a_1,a_0) = \mathbf{1}$ si, y sólo si, el número natural escrito en binario como $(a_3a_2a_1a_0)_2$, es múltiplo de 3 ó de 5. Encuentre una expresión minimal de f como sumas de productos de literales.

33. Una función booleana $f(x_1,\dots,x_n) \in \mathcal{F}_n$ se dice autodual, si $f(\overline{a}) = \overline{f}(a)$ para todo $a \in \mathbb{B}^n$. ¿Cuántas funciones booleanas pertenecientes a $\mathcal{F}_n$ son autoduales?

34. Para la función booleana $f(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) = x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 \oplus x_4 \oplus x_5$, ¿cuántos mintérminos aparecen en su forma normal disyuntiva? ¿Y para la función booleana $g(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6) = x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 \oplus x_4 \oplus x_5 \oplus x_6$?

35. Sea la función booleana $f(x,y,z,t) = \Sigma\, m\Big(0,1,5,8,9,12,13,14\Big)$. De las afirmaciones siguientes, encuentre las que son correctas:
a) f tiene exactamente cuatro implicantes primos, de los cuales sólo dos son esenciales.
b) La expresión $xy\overline{z}$ es un implicante primo de f, aunque no es esencial.
c) f tiene exactamente dos expresiones minimales como suma de productos de literales.
d) f tiene exactamente tres implicantes primos, cada uno de los cuales es esencial.
e) f tiene sólo una expresión minimal como producto de sumas de literales.

36. Sea la función booleana $f(x,y,z) = (\overline{x}\cdot y)$ NAND $\big(x \to (z \text{ NOR } \overline{y})\big)$. De las afirmaciones siguientes, encuentre las que son correctas:
a) En el polinomio de Gegalkine de f no aparece la constante $\mathbf{1}$.
b) f tiene una expresión minimal como suma de productos de literales, en la cual no aparece la variable z.
c) $f(x,y,z) = \overline{(x+\overline{y}+z)\cdot(x+\overline{y}+\overline{z})}$.
d) En la forma normal disyuntiva de f hay exactamente tres sumandos.
e) $f(x,y,z) = 1 \oplus yz \oplus xyz$.