

Segunda Entrega Álgebras de Boole

Alberto Llamas González



*Lógica y Métodos Discretos
1º Grado Ingeniería Informática*

2.15 Sean $f_i: \mathbb{B}^3 \rightarrow \mathbb{B}$ las funciones booleanas de tres variables con $i = 63, 82,$

103, 104, 116, 126, 143, 172, 188, 217, 231

Halla:

- Sus forman canónicas disyuntivas y conjuntivas
 - Sus implicantes primos mediante Quine, consensos, FCC y Karnaugh
 - Sus forman canónicas disyuntivas reducidas.
 - Sus forman no simplificables mediante Karnaugh y Petrick

$$f_{63} : B^3 \rightarrow B$$

$$63)_{10} = 0011\ 1111_2$$

$$\int_{63} (x, y, z) = m_2 + m_3 + m_4 + m_5 + m_6 + m_7 =$$

$$= x^* y z^* + x^* y z + x y^* z^* + x y^* z + x y z^* + x y z$$

Forma Canónica Disyuntiva

$$f_{63}(x,y,z) = M_0 M_1 = \boxed{(x+y+z)(x+y+z^*)}$$

Forma Canónica Conjuntiva

QUINE

$x x^* y z^*$	$x x^* y$	y
$x x y^* z^*$	$x y z^*$	x
$x x^* y z$	$x x y^*$	
$x x y^* z$	$x x z^*$	
$x x y z^*$	$x y^*$	
$x x y z$	$x x z$	
	$x x y$	

Implicantes primos: x, y

Consensus

$$= x^*y + xy^* + xy + xy^* + xy = x^*y + xy^* + xy =$$

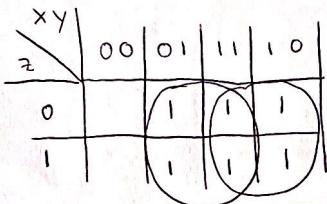
$$= x^*y + xy^* + xy + y = xy^* + y = xy^* + y + x = \boxed{x+y} \quad \text{Implicantes primos}$$

x, y

FCC

$$f(x,y,z) = (x+y+z)(x+y+z^*) = x+xy + x^*y + y + yz^* + xz + yz = \boxed{x+y}$$

Karnaugh



Implicantes: y, x

Formas canónicas disyuntivas reducidas:

$$\boxed{f(x,y,z) = x+y}$$

Petrick

	$x^*y^*z^*$	x^*yz	xy^*z^*	xy^*z	xy^*z^*	xyz
x			✓	✓	✓	✓
y	✓	✓	✗		✓	✓

Ambos implicantes primos son esenciales $\Rightarrow f(x,y,z) = x+y$

$$\bullet f_{82} : \mathbb{B}^3 \rightarrow \mathbb{B}$$

$$82)_{10} = 01010010)_2$$

$$f(x, y, z) = m_1 + m_3 + m_6 = \overline{x}\overline{y}z + \overline{x}y\overline{z} + xy\overline{z}$$

Forma Canónica Disyuntiva

$$f_{82}(x, y, z) = M_0 M_2 M_4 M_5 M_7 = (x+y+z)(x+y^*+z)(x^*+y+z)(x^*+y+z^*)$$

Forma Canónica Conyuntiva (x+y+z)

QUINE

$x \ x^* y^* z$	$\overline{x} z$
$x \ x^* y \cdot z$	
$x \ y \ z^*$	

$\Rightarrow \underline{xyz^*, x^*z : Implicantes primos}$

Consensos

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= x^*y^*z + x^*yz + xy^*z = x^*y^*z + x^*yz + xyz^* + x^*z = \\ &= xyz^* + x^*z \Rightarrow \underline{Implicantes primos : xyz^* + x^*z} \end{aligned}$$

FCC

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= (x+y+z)(x+y^*+z)(x^*+y+z)(x^*+y+z^*)(x^*+y^*+z^*) = \\ &= (x+xy^*+xz+xy+yz+y^*z+)(x'+x'y+x'z'+y+yz'+x'z+yz)(x'+y'+z') = \\ &\stackrel{\substack{\text{Cambio} \\ \text{notación:}}}{=} (x+xy^*+y^*z)(x'+y)(x'+y'+z') = (x+yz+y^*z)(x'+x'y'+x'z'+x'y+yz') = \\ &= (x+yz+y^*z)(x'+y^*z') = (xyz' + x'y^*z + x'y^*z') = \boxed{(xyz' + x'y^*z)} \\ &\qquad\qquad\qquad \text{Implicantes primos} \end{aligned}$$

Karnaugh

	xy	00	01	11	10
z	xz	0	0	1	
y	0	0	1	1	1

xyz' , $x'z$ \Rightarrow implicants primos

Forma Canónica Disyuntiva reducida

$$f(x,y,z) = xyz' + x'z$$

Petriau

	$x'y'z$	$x'yz$	xyz'
xyz'	✓		
$x'z$	✓	✓	✓

Ambos son esenciales \Rightarrow

$$\Rightarrow f(x,y,z) = xyz' + x'z$$

2-16

Sean $f_i: \mathbb{B}^4 \rightarrow \mathbb{B}$ las funciones booleanas con $i = 13244, 43944, 62640$

Halla:

- sus formas canónicas disyuntivas y conjuntivas

$$13244_{10} = 0011001110111100$$

$$f_{13244}(x, y, z, t) = m_2 + m_3 + m_6 + m_7 + m_8 + m_{10} + m_{11} + m_{12} + m_{13} =$$

$$= \overline{x}\overline{y}z\overline{t} + x\overline{y}\overline{z}t + \overline{x}y\overline{z}\overline{t} + \overline{x}yz\overline{t} + \overline{x}\overline{y}\overline{z}\overline{t} + x\overline{y}z\overline{t} + \overline{x}\overline{y}zt + xy\overline{z}\overline{t} + x\overline{y}\overline{z}t \quad FCD$$

$$= M_0 M_4 M_5 M_6 M_7 M_8 M_{12} M_{13} =$$

$$= (x+y+z+t)(x+y+z+\overline{t})(x+\overline{y}+z+t)(x+\overline{y}+z+\overline{t})(\overline{x}+y+z+\overline{t})(\overline{x}+\overline{y}+z+t)(\overline{x}+\overline{y}+z+\overline{t})$$

FCC \uparrow

- sus implicantes primos

Quine

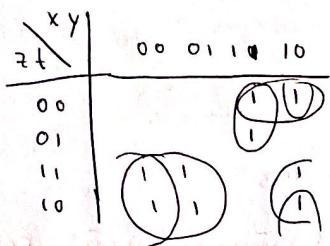
$f_{13244} :$

$x \overline{x}\overline{y}z\overline{t}$	$\checkmark \overline{x}\overline{y}z$	$\overline{x}z$
$x x\overline{y}\overline{z}\overline{t}$	$\times \overline{x}z\overline{t}$	$\overline{y}z$
$x \overline{x}\overline{y}z t$	$\times \overline{y}z \overline{t}$	
$x \overline{x}y z \overline{t}$	$\times \overline{z} \overline{t}$	
$x x\overline{y} z \overline{t}$	$\times \overline{y} \overline{t}$	
$x x y \overline{z} \overline{t}$	$\checkmark \overline{x} z t$	
$x x y \overline{z} t$	$\checkmark \overline{y} z t$	
$x \overline{x} y z t$	$\checkmark \overline{x} y z$	
$x x \overline{y} z t$	$\checkmark x \overline{y} z$	
$x x y \overline{z} t$	$x y \overline{z}$	

→ Implicantes primos:

$$\overline{x}z, \overline{y}z, x\overline{z}\overline{t}, x\overline{y}\overline{t}, xy\overline{z}$$

Karnaugh



$$f(x,y,z,t) = \bar{x}\bar{z}\bar{t} + \bar{x}z + \bar{y}z + xy\bar{t} + x\bar{y}\bar{t}$$

- Forma Canónica Disyuntiva reducida

$$\underline{f_{BCD}(x,y,z,t) = \bar{x}\bar{t} + \bar{x}z + \bar{y}z + xy\bar{t} + x\bar{y}\bar{t}}$$

- Forma no simplificable

Petrick

	m_2	m_3	m_6	m_7	m_8	m_{10}	m_{11}	m_{12}	m_{13}
A $x\bar{z}\bar{t}$						✓			✓
B $\bar{x}z$	✓	✓	✓	✓					
C $\bar{y}z$	✓	✓				✓	✓		
D $xy\bar{z}$								✓	✓
E $x\bar{y}\bar{t}$					✓	✓			

Mapeo

$$m_2 \equiv B+C$$

$$m_6 \equiv B$$

$$m_8 \equiv A+E$$

$$m_{11} \equiv C$$

$$m_{13} \equiv D$$

$$m_3 \equiv B+C$$

$$m_7 \equiv B$$

$$m_{10} \equiv C+E$$

$$m_{12} \equiv A+D$$

Implicantes primos esenciales: B, C, D

Las formas irredundantes serían:

$$\cdot f(x,y,z,t) = A+B+C+D = \bar{x}\bar{z}\bar{t} + \bar{x}z + \bar{y}z + xy\bar{t}$$

$$\cdot f(x,y,z,t) = B+C+D+E = \bar{x}z + \bar{y}z + xy\bar{t} + x\bar{y}\bar{t}$$

2.17 Halla las formas disyuntivas canónicas y reducida de la función f dada por
 $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \vee x_2) \wedge x_3$. Encuentra sus formas disyuntivas no simplificables

x	y	z	f
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

$$f(x_1, y, z) = m_3 + m_5 + m_7 = \underline{x^*y^*z + x^*y^*z^* + xy^*z}$$

Forma canónica disyuntiva

auwe (reducida)

$$\begin{array}{c|cc|c} & x^*y^*z & y^*z & \\ \hline x & x^*y^*z & & \\ x & x^*y^*z^* & & \\ \hline x & x^*y^*z & y^*z & \end{array}$$

$$f(x_1, y, z) = \underline{y^*z + xy^*z}$$

Forma oabb disyuntiva
reducida.

Petrick (no simpl)

	m_3	m_5	m_7
y^*z	✓		✓
x^*z		✓	✓

Ambos son indispensables \Rightarrow

$\Rightarrow f(x_1, y, z) = y^*z + x^*z$ es no simplificable

(2.18) Dada la función booleana $f: \mathbb{B}^4 \rightarrow \mathbb{B}$ definida por

$$f(x_1, y_1, z_1, t) = xyzt + x\bar{y}z + \bar{x}yz\bar{t} + \bar{x}\bar{y}z\bar{t} + \bar{x}\bar{y}\bar{z}\bar{t} + \bar{x}\bar{y}\bar{z}t + \bar{x}\bar{y}z\bar{t} + \bar{x}\bar{y}\bar{z}t + \bar{x}\bar{y}\bar{z}\bar{t}$$

1. Demuestra que $f(x_1, y_1, z_1, t) = xz + \bar{x}\bar{z}$ haciendo uso de las propiedades de álgebra de Boole
2. Verifica el resultado anterior calculando las formas disyuntivas no simplificable

$$1. f(x_1, y_1, z_1, t) = xyzt + x\bar{y}z + \bar{x}yz\bar{t} + \bar{x}\bar{y}z\bar{t} + \bar{x}\bar{y}\bar{z}\bar{t} + \bar{x}\bar{y}\bar{z}t + \bar{x}\bar{y}z\bar{t} + \bar{x}\bar{y}\bar{z}t + \bar{x}\bar{y}\bar{z}\bar{t} =$$

$$= xz + x\bar{z} + \cancel{\bar{x}y\bar{z}t} + \cancel{\bar{x}\bar{y}\bar{z}} = xz + \bar{x}\bar{z} = \underline{xz + \bar{x}\bar{z}}$$

2.

$$f(x_1, y_1, z_1, t) = m_0 + m_1 + m_4 + m_5 + m_{10} + m_{11} + m_{14} + m_{15}$$

x	$\bar{x}\bar{y}\bar{z}\bar{t}$	$x\bar{y}\bar{z}$	$\bar{x}\bar{z}$	$f(x_1, y_1, z_1, t)$ = $xz + \bar{x}\bar{z}$
\bar{x}	$\bar{x}\bar{y}\bar{z} +$	$x\bar{y}\bar{z}\bar{t}$		
x	$\bar{x}\bar{y}\bar{z}\bar{t}$	$x\bar{y}\bar{z}\bar{t}$		
x	$\bar{x}\bar{y}\bar{z}\bar{t}$	$x\bar{y}\bar{z}\bar{t}$	xz	
x	$\bar{x}\bar{y}\bar{z}\bar{t}$	$x\bar{y}\bar{z}$		
x	$\bar{x}\bar{y}\bar{z}\bar{t}$	$x\bar{y}\bar{z}$		
x	$\bar{x}\bar{y}\bar{z}\bar{t}$	$x\bar{y}\bar{z}$		
x	$\bar{x}\bar{y}\bar{z}\bar{t}$	$x\bar{y}\bar{z}$		
	$xyzt$			

	m_0	m_1	m_4	m_5	m_{10}	m_{11}	m_{14}	m_{15}	
xz					x	x	x	x	Ambos implicantes son esenciales
$\bar{x}\bar{z}$	x	x	x	x					

- 219) Encuentra la expresión más sencilla que detecte, dentro del conjunto $\{0, 1, \dots, 15\}$, los números que cumplen:
1. Múltiplos de 2
 2. Múltiplos de 3
 3. Múltiplos de 4

4. $f, g, h: \mathbb{B}^4 \rightarrow \mathbb{B}$ $f(\text{múltiplos } 2), g(\text{múltiplos } 3), h(\text{múltiplos } 4)$

x	y	z	t	f	g	h
0	0	0	0	1	1	1
0	0	0	1	0	0	0
0	0	1	0	1	0	0
0	0	1	1	0	1	0
0	1	0	0	1	0	0
0	1	0	1	0	1	0
0	1	1	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0
1	0	0	0	1	0	1
1	0	0	1	0	1	0
1	0	1	0	0	1	0
1	0	1	1	0	0	1
1	1	0	0	1	0	0
1	1	0	1	0	1	0
1	1	1	0	0	1	0
1	1	1	1	0	1	0

$$f = m_0 + m_2 + m_4 + m_6 + m_8 + m_{10} + m_{12} + m_{14}$$

$$g = m_0 + m_3 + m_6 + m_9 + m_{12} + m_{15}$$

$$h = m_0 + m_4 + m_8 + m_{12}$$

$\bar{x}\bar{y}$	00	01	11	10
$\bar{z}\bar{t}$	00	1	1	1
00	1	1	1	1
01				
11				
10	1	1	1	1

$$f = \bar{t}$$

$\bar{x}\bar{y}$	00	01	11	10
$\bar{z}\bar{t}$	00	1	1	
00	1	1	1	
01				
11	1	1	1	
10	1	1	1	

g no es más simplificable

$$g = \bar{x}\bar{y}\bar{z}\bar{t} + \bar{x}\bar{y}zt + \bar{x}y\bar{z}\bar{t} + xy\bar{z}\bar{t} + xy\bar{z}t + xyzt +$$

$\bar{x}\bar{y}$	00	01	11	10
$\bar{z}\bar{t}$	00	1	1	1
00	1	1	1	1
01				
11	1	1	1	1
10	1	1	1	1

$$h = \bar{z}\bar{t}$$

2.20 Un examen tipo test consta de 4 preguntas. Las respuestas correctas son: (SI, NO, NO, SI). Construye una expresión booleana que analice cada examen y distinga los aprobados de los suspensos (se considera aprobado si al menos 3 respuestas son correctas)

x	y	z	t	f
0	0	0	0	0
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	0	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	0
0	1	1	1	0
1	0	0	0	0
1	0	0	1	1
1	0	1	0	0
1	0	1	1	1
1	1	0	0	0
1	1	0	1	0
1	1	1	0	0
1	1	1	1	1

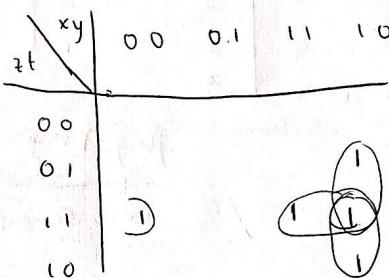
0 ≡ NO

1 ≡ SI

$$f(x,y,z,t) = \bar{x}\bar{y}z\bar{t} + \bar{x}yz\bar{t} + x\bar{y}\bar{z}t + x\bar{y}zt + xyzt$$

↓

Forma canónica disyuntiva no simplificada



$$f(x,y,z,t) = \bar{y}z\bar{t} + xz\bar{t} + x\bar{y}\bar{t} + x\bar{y}t$$

↑
Forma canónica Disyuntiva Simplificada

223 Un comité formado por 3 personas toma decisiones mediante votación por mayoría. Cada miembro del comité puede "votar SI" pulsando un botón. Diseña una red lógica mediante la cual se encienda una luz cuando y sólo cuando haya una mayoría de "votos SI".

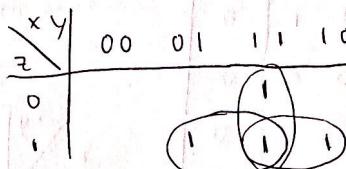
x	y	z	f
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

1 = Votar SI

0 = Votar NO/NO VOTAR

Forma NO Simplificada

$$f(x, y, z) = \bar{x}yz + \bar{x}\bar{y}z + xy\bar{z} + xy\bar{z}$$



$$\underline{f(x, y, z) = y\bar{z} + xy + x\bar{z}}$$

Forma Simplificada

2.22 Calcula la forma normal canónica disyuntiva de la aplicación

$$f(x,y,z) = (x \cdot y) \downarrow z = (x \text{ NAND } y) \text{ NOR } z$$

x	y	z	f
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

$$\underline{f(x,y,z) = xy\bar{z}}$$

2.23 Calcula la forma normal conjuntiva y la forma normal disyuntiva para la función booleana $f(x,y,z) = (x^*y+z)^* + xz^*$

x	y	z	f
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

$$f(x,y,z) = \bar{x}\bar{y}\bar{z} + x\bar{y}\bar{z} + xy\bar{z} \quad \text{Forma disyuntiva}$$

$$f(x,y,z) = (x+y+\bar{z})(x+\bar{y}+z)(x+\bar{y}+\bar{z})(\bar{x}+y+\bar{z})(\bar{x}+\bar{y}+\bar{z})$$

↑ Forma conjuntiva

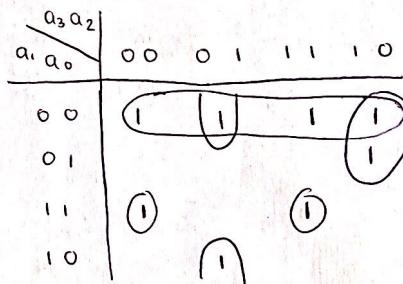
2.24) Se desea construir un circuito que tenga como entradas cuatro líneas que suministran los dígitos de un nº binario $n = (a_3 a_2 a_1 a_0)_2$ y tenga como salida una línea que tome el valor 1 cuando n sea múltiplo de 3 o de cuatro, y 0 en otro caso. Obtén una función booleana f que rige el funcionamiento de dicho circuito. Optimaliza la expresión de f .

$a_3 \ a_2 \ a_1 \ a_0$	f
0 0 0 0	1
0 0 0 1	0
0 0 1 0	0
0 0 1 1	1
0 1 0 0	1
0 1 0 1	0
0 1 1 0	1
0 1 1 1	0
1 0 0 0	1
1 0 0 1	1
1 0 1 0	0
1 0 1 1	0
1 1 0 0	1
1 1 0 1	0
1 1 1 0	0
1 1 1 1	1

$$f(a_3, a_2, a_1, a_0) = \\ = \bar{a}_3 \bar{a}_2 \bar{a}_1 \bar{a}_0 + \bar{a}_3 \bar{a}_2 a_1 a_0 + \bar{a}_3 a_2 \bar{a}_1 \bar{a}_0 + a_3 \bar{a}_2 \bar{a}_1 a_0 + \\ + a_3 \bar{a}_2 \bar{a}_1 a_0 + a_3 \bar{a}_2 a_1 \bar{a}_0 + a_3 a_2 \bar{a}_1 \bar{a}_0 + a_3 a_2 a_1 a_0$$

Forma Disyuntiva No optimizada

Optimizamos por Karnaugh:



$$f(a_3, a_2, a_1, a_0) = \bar{a}_1 \bar{a}_0 + \bar{a}_3 a_2 \bar{a}_0 + a_3 \bar{a}_2 \bar{a}_1 + \\ + \bar{a}_3 \bar{a}_2 a_1 a_0 + a_3 a_2 a_1 a_0$$

Forma Disyuntiva Optimizada

225) Sea f la función booleana de 4 variables que toma el valor 1 exclusivamente para $(0,0,0,0)$, $(0,0,0,1)$, $(0,1,0,0)$, $(0,1,1,1)$, $(1,0,1,1)$, $(1,1,1,0)$ y $(1,1,1,1)$. Aplica Quine - Petrick para obtener todas las formas irredundantes posibles de f .

$$f(x,y,z,t) = x^*y^*z^*t^* + x^*y^*z^*t + x^*y^*z^*t^* + x^*y^*z^*t + x^*y^*z + x^*y^*z^*$$

QUINE

x	$x^*y^*z^*t^*$	$x^*y^*z^*$
x	$x^*y^*z^*t$	$x^*z^*t^*$
x	$x^*y^*z^*t^*$	$\cancel{x^*z^*t}$
y	$x^*y^*z^*t$	y^*z^*t
x	$x^*y^*z^*t$	x^*z^*t
x	$x^*y^*z^*t^*$	x^*y^*z
x	$x^*y^*z^*t$	
	$x^*y^*z^*t$	

PETRICK

	m_0	m_1	m_2	m_3	m_4	m_5	m_{10}	m_{11}
$x^*y^*z^*t^*$	✓	✓						
$x^*z^*t^*$		✓	✓					
y^*z^*t			✓					✓
x^*z^*t				✓				✓
x^*y^*z					✓	✓		

Todos los implicantes primos son esenciales luego:

$$\underline{f(x,y,z,t) = x^*y^*z^*t^* + x^*z^*t^* + y^*z^*t + x^*z^*t + x^*y^*z}$$