Segunda Entrega Álgebras de Boole

Alberto Llamas González

Lógica y Métodos Discretos
1º Grado Ingeniería Informática

2.15 Sean $f_i : \mathbb{B}^3 \to \mathbb{B}$ las funciones booleanas de tres variables con $i = 63, 82,$ $103, 104, 116, 126, 143, 172, 188, 217, 231$

Halla:

- Sus formas canónicas disyuntivas y conjuntivas
- Sus implicantes primos mediante Quine, consensos, FCC y Karnaugh
- Sus formas canónicas disyuntivas reducidas.
- Sus formas no simplificables mediante Karnaugh y Petrick

- $f_{63} : \mathbb{B}^3 \to \mathbb{B}$

$63)_{10} = 0011\ 1111)_2$

$f_{63}(x,y,z) = m_2 + m_3 + m_4 + m_5 + m_6 + m_7 =$

$$\boxed{= x^*yz^* + x^*yz + xy^*z^* + xy^*z + xyz^* + xyz}$$

Forma Canónica Disyuntiva

$f_{63}(x,y,z) = M_0 M_1 = \boxed{(x+y+z)(x+y+z^*)}$ Forma Canónica Conjuntiva

QUINE

✗ x^*yz^*	✗ x^*y	y
✗ xy^*z^*	✗ yz^*	x
✗ x^*yz	✗ xy^*	
✗ xy^*z	✗ xz^*	
✗ xyz^*	✗ yz	
✗ xyz	✗ xz	
	✗ xy	

$\boxed{\text{Implicantes primos: } x, y}$

Consensos

$x^*yz^* + x^*yz + xy^*z^* + xy^*z + xyz^* + xyz = x^*yz^* + x^*yz + x^*y + xy^*z^* + xy^*z + xyz^* + xyz =$

$= x^*y + xy^*z^* + xy^*z + xyz^* + xyz = x^*y + xy^*z^* + xy^*z + xyz^* + xyz + xy^* =$

$= x^*y + xyz^* + xyz + xy^* = \underline{x^*y + xyz^* + xyz + xy^* + xy}$. $\rightarrow$

Escaneado con CamScanner

$= x^*y + xyz^* + xyz + xy^* + xy = x^*y + xy^* + xy =$

$= x^*y + xy^* + xy + y = xy^* + y = xy^* + y + x = \boxed{x+y}$ Implicantes primos x, y

FCC

$f(x,y,z) = (x+y+z)(x+y+z^*) = x + xy + xz^* + y + yz^* + xz + yz = \boxed{x+y}$

Karnaugh

z \ xy	00	01	11	10
0		1	1	1
1		1	1	1

$\boxed{\text{Implicantes: } y, x}$

Formas canónicas disyuntivas reducidas:

$\boxed{f(x,y,z) = x+y}$

Petrick

	x^*yz^*	x^*yz	xy^*z^*	xy^*z	xyz^*	xyz
x			✓	✓	✓	✓
y	✓	✓			✓	✓

Ambos implicantes primos son esenciales $\Rightarrow \underline{f(x,y,z) = x+y}$

• $f_{82} : \mathbb{B}^3 \to \mathbb{B}$

$82)_{10} = 01010010)_2$

$$f_{82}(x,y,z) = m_1 + m_3 + m_6 = \underbrace{x^*y^*z + x^*yz + xyz^*}_{\text{Forma Canónica Disyuntiva}}$$

$$f_{82}(x,y,z) = M_0 M_2 M_4 M_5 M_7 = (x+y+z)(x+y^*+z)(x^*+y+z)(x^*+y+z^*)(x^*+y^*+z^*)$$

Forma Canónica Conjuntiva

QUINE

$x\ x^*y^*z$	x^*z
$x\ x^*yz$	
xyz^*	

$\to$ xyz^* , x^*z : Implicantes primos

Consensos

$$f(x,y,z) = x^*y^*z + x^*yz + xyz^* = x^*y^*z + x^*yz + xyz^* + x^*z =$$

$$= xyz^* + x^*z \Rightarrow \text{Implicantes primos} : xyz^* + x^*z$$

FCC

$$f(x,y,z) = (x+y+z)(x+y^*+z)(x^*+y+z)(x^*+y+z^*)(x^*+y^*+z^*) =$$

$$= (x + xy^* + xz + xy + yz + y'z +)(x' + x'y + x'z' + y + yz' + x'z + yz)(x'+y'+z') =$$

Cambio notación: $* \to '$

$$= (x + \cancel{x}yz + y'z)(x'+y)(x'+y'+z') = (x+yz+y'z)(x'+x'y'+x'z'+x'y+yz') =$$

$$= (x+yz+y'z)(x'+yz') = (xyz' + x'yz + x'y'z) = \boxed{(xyz' + x'z)}$$

Implicantes primos

Escaneado con CamScanner

Karnaugh

z \ xy	00	01	11	10
0			1	
1	1	1		

xyz' , $x'z$ $\Rightarrow$ Implicantes primos

Forma Canónica Disyuntiva reducida

$$f(x,y,z) = xyz' + x'z$$

Petrick

	$x'y'z$	$x'yz$	xyz'
xyz'			✓
$x'z$	✓	✓	

Ambos son esenciales $\Rightarrow$

$\Rightarrow f(x,y,z) = xyz' + x'z$

Escaneado con CamScanner

(2.16)

Sean $f_i : \mathbb{B}^4 \to \mathbb{B}$ las funciones booleanas con $i = 13244, 43944, 62640$

Halla:

- sus formas canónicas disyuntivas y conjuntivas

$13244)_{10} = 0011001110111100$

$f_{13244}(x,y,z,t) = m_2 + m_3 + m_6 + m_7 + m_8 + m_{10} + m_{11} + m_{12} + m_{13} =$

$= \bar{x}\bar{y}z\bar{t} + \bar{x}\bar{y}zt + \bar{x}yz\bar{t} + \bar{x}yzt + x\bar{y}\bar{z}\bar{t} + x\bar{y}z\bar{t} + x\bar{y}zt + xy\bar{z}\bar{t} + xy\bar{z}t$ FCD

$= M_0 M_1 M_4 M_5 M_9 M_{14} M_{15} =$

$= (x+y+z+t)(x+y+z+\bar{t})(x+\bar{y}+z+t)(x+\bar{y}+z+\bar{t})(\bar{x}+y+z+\bar{t})(\bar{x}+\bar{y}+\bar{z}+t)(\bar{x}+\bar{y}+\bar{z}+\bar{t})$

FCC

- sus implicantes primos

Quine

f_{13244}:

x $\bar{x}\bar{y}z\bar{t}$	✓ $\bar{x}\bar{y}z$	$\bar{x}z$
x $x\bar{y}\bar{z}\bar{t}$	✓ $\bar{x}z\bar{t}$	$\bar{y}z$
x $\bar{x}\bar{y}zt$	✓ $\bar{y}z\bar{t}$	~~xa~~
x $\bar{x}yz\bar{t}$	$x\bar{z}\bar{t}$	
x $x\bar{y}z\bar{t}$	$x\bar{y}\bar{t}$	
x $xy\bar{z}\bar{t}$	✓ $\bar{x}zt$	
x $\bar{x}yzt$	✓ $\bar{y}zt$	
x $x\bar{y}zt$	✓ $\bar{x}yz$	
x $xy\bar{z}t$	✓ $x\bar{y}z$	
	$xy\bar{z}$	

$\rightarrow$ Implicantes primos:

$\bar{x}z, \bar{y}z, x\bar{z}\bar{t}, x\bar{y}\bar{t}, xy\bar{z}$

Escaneado con CamScanner

Karnaugh

$zt \backslash xy$	00	01	11	10
00			1	1
01			1	
11	1	1		1
10	1	1		1

$$f(x,y,z,t) = x\bar{z}\bar{t} + \bar{x}z + \bar{y}z + xy\bar{z} + x\bar{y}\bar{t}$$

- Forma Canónica Disyuntiva reducida

$$f_{13244}(x,y,z,t) = x\bar{z}\bar{t} + \bar{x}z + \bar{y}z + xy\bar{z} + x\bar{y}\bar{t}$$

- Forma no simplificable

Petrick

		m_2	m_3	m_6	m_7	m_8	m_{10}	m_{11}	m_{12}	m_{13}
A	$x\bar{z}\bar{t}$					✓			✓	
B	$\bar{x}z$	✓	✓	✓	✓					
C	$\bar{y}z$	✓	✓				✓	✓		
D	$xy\bar{z}$								✓	✓
E	$x\bar{y}\bar{t}$					✓	✓			

$m_2 \equiv B+C$ $\quad$ $m_6 \equiv B$ $\quad$ $m_8 \equiv A+E$ $\quad$ $m_{11} \equiv C$ $\quad$ $m_{13} \equiv D$

$m_3 \equiv B+C$ $\quad$ $m_7 \equiv B$ $\quad$ $m_{10} \equiv C+E$ $\quad$ $m_{12} \equiv A+D$

Implicantes primos esenciales: B, C, D

Las formas irredundantes serían:

- $f(x,y,z,t) = A+B+C+D = x\bar{z}\bar{t} + \bar{x}z + \bar{y}z + xy\bar{z}$
- $f(x,y,z,t) = B+C+D+E = \bar{x}z + \bar{y}z + xy\bar{z} + x\bar{y}\bar{t}$

Escaneado con CamScanner

$\vee \to +$

$\wedge \to \cdot$

(2.17) Halla las formas disyuntivas canónicas y reducida de la función f dada por $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \vee x_2) \wedge x_3$. Encuentra sus formas disyuntivas no simplificables

x	y	z	f
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

$f(x,y,z) = m_3 + m_5 + m_7 = \underline{x^* y z + x y^* z + x y z}$

Forma canónica disyuntiva

QMNE (reducida)

x $x^* y z$	yz
x $x y^* z$	$x\cancel{y}z$
x xyz	

$f(x,y,z) = \underline{yz + x\cancel{y}z}$

Forma ~~abab~~ disyuntiva reducida.

Petrick (no simpl)

	m_3	m_5	m_7
yz	✓		✓
xz		✓	✓

Ambos son indispensables $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $\underline{f(x,y,z) = yz + xz}$ es disyuntiva no simplificable

2.18 Dada la función booleana $f: \mathbb{B}^4 \to \mathbb{B}$ definida por

$$f(x,y,z,t) = xyzt \vee x\bar{y}zt \vee xyz\bar{t} \vee x\bar{y}z\bar{t} \vee \bar{x}\bar{y}\bar{z}\bar{t} \vee \bar{x}y\bar{z}\bar{t} \vee \bar{x}\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}y\bar{z}t$$

1. Demuestra que $f(x,y,z,t) = xz \vee \bar{x}\bar{z}$ haciendo uso de las propiedades de álgebra de Boole
2. Verifica el resultado anterior calculando las formas disyuntivas no simplificable

1. $f(x,y,z,t) = xyzt + x\bar{y}zt + xyz\bar{t} + x\bar{y}z\bar{t} + \bar{x}\bar{y}\bar{z}\bar{t} + \bar{x}y\bar{z}\bar{t} + \bar{x}\bar{y}\bar{z} + \bar{x}y\bar{z}t =$

$= xzt + xz\bar{t} + \bar{x}y\bar{z} + \bar{x}\bar{y}\bar{z} = xz + \bar{x}\bar{z} = \underline{xz \vee \bar{x}\bar{z}}$

2.

$f(x,y,z,t) = m_0 + m_1 + m_4 + m_5 + m_{10} + m_{11} + m_{14} + m_{15}$

x $\bar{x}\bar{y}\bar{z}\bar{t}$	x $\bar{x}\bar{y}\bar{z}$ x $\bar{x}\bar{z}\bar{t}$	$\bar{x}\bar{z}$
x $\bar{x}\bar{y}\bar{z}t$ x $\bar{x}y\bar{z}\bar{t}$	x $\bar{x}y\bar{z}$ x $\bar{x}\bar{z}t$	xz
x $x\bar{y}z\bar{t}$ x $\bar{x}y\bar{z}t$	x $x\bar{y}z$ x $xz\bar{t}$	
x $x\bar{y}zt$ x $xyz\bar{t}$	x xzt x xyz	
$xyzt$		

$$\underline{f(x,y,z,t) = xz + \bar{x}\bar{z}}$$

	m_0	m_1	m_4	m_5	m_{10}	m_{11}	m_{14}	m_{15}
xz					X	X	X	X
$\bar{x}\bar{z}$	X	X	X	X				

Ambos implicantes son esenciales

Escaneado con CamScanner

2.19 Encuentra la expresión más sencilla que detecte, dentro del conjunto $\{0, 1, \dots, 15\}$ los números que cumplen:

1. Múltiplos de 2
2. Múltiplos de 3
3. Múltiplos de 4

1. $f, g, h: \mathbb{B}^4 \to \mathbb{B}$ f (multiplos 2), g (multiplos 3), h (multiplos 4)

x	y	z	t	f	g	h
0	0	0	0	1	1	1
0	0	0	1	0	0	0
0	0	1	0	1	0	0
0	0	1	1	0	1	0
0	1	0	0	1	0	1
0	1	0	1	0	0	0
0	1	1	0	1	1	0
0	1	1	1	0	0	0
1	0	0	0	1	0	1
1	0	0	1	0	1	0
1	0	1	0	1	0	0
1	0	1	1	0	0	0
1	1	0	0	1	1	1
1	1	0	1	0	0	0
1	1	1	0	1	0	0
1	1	1	1	0	1	0

$f = m_0 + m_2 + m_4 + m_6 + m_8 + m_{10} + m_{12} + m_{14}$

$g = m_0 + m_3 + m_6 + m_9 + m_{12} + m_{15}$

$h = m_0 + m_4 + m_8 + m_{12}$

zt \ xy	00	01	11	10
00	1	1	1	1
01				
11				
10	1	1	1	1

$\boxed{f = \bar{t}}$

zt \ xy	00	01	11	10
00	1		1	
01				1
11	1		1	
10		1		

g no es más simplificable

$$\boxed{g = \bar{x}\bar{y}\bar{z}\bar{t} + \bar{x}\bar{y}zt + \bar{x}yz\bar{t} + x\bar{y}\bar{z}t + xy\bar{z}\bar{t} + xyzt}$$

zt \ xy	00	01	11	10
00	1	1	1	1
01				
11				
10				

$\boxed{h = \bar{z}\bar{t}}$

Escaneado con CamScanner

2.20 Un examen tipo test consta de 4 preguntas. Las respuestas correctas son: (SI, NO, ~~NO~~ SI, SI). Construye una expresión booleana que analice cada examen y distinga los aprobados de los suspensos (se considera aprobado si al menos 3 respuestas son correctas)

0 ≡ NO
1 ≡ SI

x	y	z	t	f
0	0	0	0	0
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	0	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	0
0	1	1	1	0
1	0	0	0	0
1	0	0	1	1
1	0	1	0	1
1	0	1	1	1
1	1	0	0	0
1	1	0	1	0
1	1	1	0	0
1	1	1	1	1

$$f(x,y,z,t) = \bar{x}\bar{y}zt + \bar{x}yzt + x\bar{y}\bar{z}t + x\bar{y}zt + xyzt$$

↓

Forma Canónica Disyuntiva no simplificada

zt \ xy	00	01	11	10
00				
01				1
11	1		1	1
10				1

$$\boxed{f(x,y,z,t) = \bar{y}zt + xzt + x\bar{y}t + x\bar{y}z}$$

↑

Forma Canónica Disyuntiva Simplificada

Escaneado con CamScanner

2.21 Un comité formado por 3 personas toma decisiones mediante votación por mayoría. Cada miembro del comité puede "votar SI" pulsando un botón. Diseña una red lógica mediante la cual se encienda una luz cuando y sólo cuando haya una mayoría de "votos SI"

1 ≡ Votar SI

0 ≡ Votar NO / NO VOTAR

x	y	z	f
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Forma NO simplificada

$$f(x,y,z) = \bar{x}yz + x\bar{y}z + xy\bar{z} + xyz$$

z \ xy	00	01	11	10
0			1	
1		1	1	1

$$f(x,y,z) = yz + xy + xz$$

Forma Simplificada

Escaneado con CamScanner

2.22 Calcula la forma normal canónica disyuntiva de la aplicación

$f(x,y,z) = (x \uparrow y) \downarrow z = (x \text{ NAND } y) \text{ NOR } z$

x	y	z	f
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

$f(x,y,z) = x y \bar{z}$

2.23 Calcula la forma normal conjuntiva y la forma normal disyuntiva para la función booleana $f(x,y,z) = (x^* y + z)^* + x z^*$

x	y	z	f
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

$f(x,y,z) = \bar{x}\bar{y}\bar{z} + x\bar{y}\bar{z} + x y \bar{z}$ Forma disyuntiva

$f(x,y,z) = (x+y+\bar{z})(x+\bar{y}+z)(x+\bar{y}+\bar{z})(\bar{x}+y+\bar{z})(\bar{x}+\bar{y}+\bar{z})$

Forma conjuntiva

Escaneado con CamScanner

2.24 Se desea construir un circuito que tenga como entradas cuatro líneas que suministran los dígitos de un nº binario $n = (a_3 a_2 a_1 a_0)_2$ y tenga como salida una línea que tome el valor 1 cuando n sea múltiplo de 3 o de cuatro, y 0 en otro caso. Obtén una función booleana f que rige el funcionamiento de dicho circuito. Optimiza la expresión de f

a_3	a_2	a_1	a_0	f
0	0	0	0	1
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	0	1
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	0	1	1
1	0	1	0	0
1	0	1	1	0
1	1	0	0	1
1	1	0	1	0
1	1	1	0	0
1	1	1	1	1

$$f(a_3, a_2, a_1, a_0) =$$

$$= \bar{a}_3\bar{a}_2\bar{a}_1\bar{a}_0 + \bar{a}_3\bar{a}_2 a_1 a_0 + \bar{a}_3 a_2 \bar{a}_1 \bar{a}_0 + \bar{a}_3 a_2 a_1 \bar{a}_0 +$$

$$+ a_3\bar{a}_2\bar{a}_1\bar{a}_0 + a_3\bar{a}_2\bar{a}_1 a_0 + a_3 a_2 \bar{a}_1 \bar{a}_0 + a_3 a_2 a_1 a_0$$

Forma Disyuntiva No optimizada

Optimizamos por Karnaugh:

$a_1 a_0$ \ $a_3 a_2$	00	01	11	10
00	1	1	1	1
01				1
11	1		1	
10		1		

$$\boxed{f(a_3, a_2, a_1, a_0) = \bar{a}_1\bar{a}_0 + \bar{a}_3 a_2 \bar{a}_0 + a_3\bar{a}_2\bar{a}_1 + \bar{a}_3\bar{a}_2 a_1 a_0 + a_3 a_2 a_1 a_0}$$

Forma Disyuntiva Optimizada

Escaneado con CamScanner

2.25 Sea f la función booleana de 4 variables que toma el valor 1 exclusivamente para $(0,0,0,0)$, $(0,0,0,1)$, $(0,1,0,0)$, $(0,1,1,1)$, $(1,0,1,1)$, $(1,1,1,0)$ y $(1,1,1,1)$. Aplica Quine - Petrick para obtener todas las formas irredundantes posibles de f.

$$f(x,y,z,t) = x^*y^*z^*t^* + x^*y^*z^*t + x^*yz^*t^* + x^*yzt + xy^*zt + xyzt^* + xyzt$$

QUINE

x	$x^*y^*z^*t^*$	$x^*y^*z^*$
		$x^*z^*t^*$
x	$x^*y^*z^*t$	
x	$x^*yz^*t^*$	
x	x^*yzt	yzt
x	xy^*zt	xzt
x	$xyzt^*$	xyz
x	$xyzt$	

PETRICK

	m_0	m_1	m_4	m_9	m_{11}	m_{14}	m_{15}
$x^*y^*z^*$	✓	✓					
$x^*z^*t^*$	✓		✓				
yzt				✓			✓
xzt					✓		✓
xyz						✓	✓

Todos los implicantes primos son esenciales luego:

$$f(x,y,z,t) = x^*y^*z^* + x^*z^*t^* + yzt + xzt + xyz$$

Escaneado con CamScanner