LMD (Grupo E del GII)

Relación de ejercicios del Tema 2

1. Demuestre las siguientes propiedades por el método de inducción:

   a) $\forall n \geq 1,\ \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$

   b) $\forall n \geq 1,\ \sum_{k=1}^{n} k \cdot k! = (n+1)! - 1.$

   c) $\forall n \geq 1,\ \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} = \sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k-1} \cdot \frac{1}{k}.$

   d) $\forall n \geq 2,\ \sqrt{n} < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \leq 2\sqrt{n} - 1.$

   e) $\forall n \geq 4,\ n! > 2^n \geq n^2.$

   f) $\forall n \geq 1,\ \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)} \leq \frac{1}{\sqrt{3n+1}}.$

   g) $\forall n \geq 0,\ 5^{n+1} + 2 \cdot 3^n + 1$ es múltiplo de 8.

   h) $\forall n \geq 0,\ 7^{2n} + 16n - 1$ es múltiplo de 64.

   i) $\forall n \geq 1,\ (n+1)(n+2)\cdots(n+n)$ es múltiplo de 2^n.

   j) $\forall n \geq 0,\ 10^{3^n} - 1$ es múltiplo de 3^{n+2}.

2. Calcule un número natural c de modo que para todo número natural n, si $n \geq c$, entonces $(2 \cdot n)! > 3^n \cdot (n!)^2$. Justifique su respuesta.

3. Demuestre para todo número natural $n \geq 2$ que $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n} > \frac{1}{2}$.

4. Sea la sucesión dada por $f(0) = 1$, $f(1) = 1$, $f(2) = 2$ y $f(n) = 3f(n-2) - 2f(n-3)$ para todo $n \geq 3$. Demuestre por inducción que
$$f(n) = \frac{(-2)^n + 3n + 8}{9}$$
para todo $n \geq 0$.

5. Sea la sucesión dada por $f(0) = 1$, $f(1) = 2$ y $f(n) = 4 + f(n-2)$ para todo $n \geq 2$. Demuestre por inducción que
$$f(n) = \frac{1}{2}(4n + 1 + (-1)^n)$$
para todo $n \geq 0$.

6. Definimos las sucesiones siguientes:
$$g(1) = 0 \quad \text{y} \quad g(n) = n \cdot g(n-1) + (-1)^n \quad \text{para todo } n \geq 2,$$
$$f(n) = n! \cdot \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!}\right) \quad \text{para todo } n \geq 1.$$
Exprese $f(n)$ usando la notación de sumatoria y demuestre que $f(n) = g(n)$ para todo $n \geq 1$.

7. La sucesión de los números de Fibonacci se define de la siguiente forma:
$$f(0) = 0,\ f(1) = 1 \text{ y } f(n) = f(n-1) + f(n-2) \text{ para } n \geq 2.$$
Demuestre cada una de las propiedades siguientes:

   a) $\sum_{i=0}^{n} f(i)^2 = f(n) \cdot f(n+1)$ para todo $n \geq 0$.

b) 5 divide a $f(5n)$ para todo $n \geq 0$.

c) $f(n-1) \cdot f(n+1) = f(n)^2 + (-1)^n$ para todo $n \geq 1$.

d) $\operatorname{mcd}(f(n), f(n+1)) = 1$ para todo $n \geq 0$.

e) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f(2k-1) = f(2n)$ para todo $n \geq 1$.

f) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f(2k) = f(2n+1) - 1$ para todo $n \geq 1$.

g) $\theta^n = f(n) \cdot \theta + f(n-1)$ para todo $n \geq 1$, donde $\theta = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. Deduzca de lo anterior que $f(n+2) > \theta^n > f(n+1)$ para todo $n \geq 1$.

8. Sea la sucesión dada por $f(0) = 1, f(1) = 2$ y $f(n) = 7f(n-1) - 2f(n-2)$ para $n \geq 2$. Para cada número natural $n \geq 1$ definimos el enunciado $P(n)$ de la siguiente forma:

$$f(n+1) \cdot f(n-1) - (f(n))^2 = 2^{n+2}.$$

a) ¿Es cierto que $P(n)$ implica $P(n+1)$?

b) ¿Es cierto el enunciado $P(n)$ para todo $n \geq 1$?

9. Sea la sucesión $f(0) = 9$, $f(n) = f(n-1) + 2\sqrt{f(n-1)} + 1$ para $n \geq 1$. Obtenga los primeros términos de esta sucesión y a partir de ellos encuentre una fórmula cerrada para $f(n)$. A continuación demuestre la validez de la fórmula obtenida.

10. Para cada $n \geq 1$, definimos $f(n) = \sqrt{n + \sqrt{(n-1) + \sqrt{\cdots + \sqrt{2 + \sqrt{1}}}}}$. Obtenga una expresión recurrente para $f(n)$ y demuestre que $f(n) < \sqrt{n} + 1$ para todo $n \geq 1$.

11. Consideramos la matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$. Para cada número natural $n \geq 1$ encuentre una fórmula para la matriz A^n y demuestre que dicha fórmula es correcta.

12. Para cada $n \geq 0$ se define el n-ésimo número de Fermat como $F_n = 2^{2^n} + 1$. Demuestre para todo $n \geq 1$ que $F_n = 2 + F_0 F_1 \cdots F_{n-1}$.

13. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $f(n) = a^n + \dfrac{1}{a^n}$, donde $a = \dfrac{5-\sqrt{21}}{2}$. Demuestre que $f(n) \in \mathbb{N}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

14. Para cada número natural $n \geq 1$, sea a_n un número real mayor o igual que 1. Demuestre que

$$(1+a_1)\cdots(1+a_n) \geq \frac{2^n}{n+1} \cdot (1 + a_1 + \cdots + a_n).$$

15. Sea $n \geq 1$ un número natural. Escribimos n veces el número 1 y n veces el número -1 mezclados de forma arbitraria formando un círculo. Demuestre que es posible comenzar en uno de dichos valores y recorrer todo el círculo de modo que en todo momento la suma de todos los números por los que se ha pasado nunca sea negativa.

16. Resuelva las recurrencias siguientes:

a) $f(0) = a,\ f(n) = 4 \cdot f(n-1)$ para $n \geq 1$.

b) $f(0) = 1, f(1) = 2,\ f(n) = 5f(n-1) - 6f(n-2)$ para $n \geq 2$.

c) $f(0) = 1, f(1) = a,\ f(n) = 2f(n-1) - f(n-2)$ para $n \geq 2$.

d) $f(0) = 1, f(1) = 1, f(2) = 3,\ f(n) = 4f(n-1) - 5f(n-2) + 2f(n-3)$ para $n \geq 3$.

e) $f(0) = 0, f(1) = 1, f(2) = 1,\ 2f(n) = 9f(n-1) - 12f(n-2) + 4f(n-3)$ para $n \geq 3$.

f) $f(0) = 0, f(1) = 1,\ f(n) = 3f(n-1) - 2f(n-2) + 2$ para $n \geq 2$.

g) $f(0) = 0, f(1) = 1,\ f(n) = 3f(n-1) - 2f(n-2) + 2^n$ para $n \geq 2$.

h) $f(0)=0, f(1)=1,\ \ f(n)=3f(n-1)-2f(n-2)+2^n+2n$ para $n\geq 2$.

i) $f(0)=0, f(1)=1,\ \ f(n)=3f(n-1)-2f(n-2)+2^n\cdot n$ para $n\geq 2$.

j) $f(0)=a, f(1)=b,\ \ f(n)=-f(n-2)$ para $n\geq 2$.

k) $f(0)=a, f(1)=b,\ \ f(n)=4f(n-1)-8f(n-2)$ para $n\geq 2$.

l) $f(0)=a, f(1)=b,\ \ f(n)=4f(n-1)-8f(n-2)+(2\sqrt{2})^n\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)$ para $n\geq 2$.

m) $f(0)=a, f(1)=b,\ \ f(n)=4f(n-1)-8f(n-2)+\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{4}\right)$ para $n\geq 2$.

n) $f(0)=1,\ f(1)=1,\ f(2)=2,\ f(n)=f(n-1)-9f(n-2)+9f(n-3)+2$ para $n\geq 3$.

17. Obtenga una recurrencia lineal homogénea para cada una de las sucesiones siguientes definidas para todo $n\geq 0$:

a) $f_1(n)=4n+1$.

b) $f_2(n)=2^n+3n$.

c) $f_3(n)=2^n+3^n$.

d) $f_4(n)=2^n+3^n+4^n$.

e) $f_5(n)=2^n+(-1)^n\cdot n+2$.

f) $f_6(n)=\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right)$.

g) $f_7(n)=\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)+3$.

h) $f_8(n)=\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)+5n\cdot\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right)$.

i) $f_9(n)=2^{2n}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{4}\right)$.

j) $f_{10}(n)=n\cdot\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)+\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{4}\right)$.

18. Encuentre una fórmula cerrada para la sucesión dada por $f(n)=\sum_{k=1}^{n}k\cdot 2^k$ definida para todo $n\geq 1$.

19. Sean a y b dos números reales no nulos. Para cada número natural $n\geq 1$, sea $S_n=a^n+a^{n-1}\cdot b+\cdots+a\cdot b^{n-1}+b^n$. Obtenga una fórmula cerrada para S_n.

20. Para cada natural $n\geq 1$, sea S_n la suma de los n primeros números naturales impares. Encuentre una fórmula cerrada para S_n.

21. Obtenga una fórmula cerrada para la sumatoria
$$S_n=1^2-2^2+3^2-4^2+\cdots+(2n-1)^2-(2n)^2$$
definida para todo número natural $n\geq 1$.

22. Disponemos de tres postes sobre un plano numerados con los números 1, 2 y 3. En el poste 1 tenemos apilados $2n$ discos, con $n\in\mathbb{N}$, tales que en la parte superior hay dos discos de radio 1, justo debajo hay otros dos discos de radio 2, y así hasta llegar a la parte inferior de la pila en la que hay dos discos de radio n. Se desea trasladar la pila de discos del palo 1 al palo 3 de modo que en cada movimiento se traslade un sólo disco y en ningún momento del proceso haya un disco por encima de otro de radio menor. Encuentre una fórmula cerrada para el menor número de movimientos necesarios para resolver esta variante del juego de las Torres de Hanoi.

23. ¿De cuántas formas podemos subir una escalera de n peldaños, donde $n\geq 1$, si en cada paso podemos avanzar uno, dos ó tres peldaños?

24. ¿De cuántas formas podemos pavimentar un pasillo rectangular de tamaño $2\times n$, si podemos usar baldosas de tamaño 2×1 y de tamaño 1×2?

25. Trazamos n líneas rectas en el plano de forma que cada una de ellas corte a cada una de las restantes exactamente en un punto y no haya tres o más líneas que pasen por un mismo punto. Encuentre una expresión no recurrente para el número de regiones en las que el plano queda dividido por tales líneas rectas.

26. (*Problema de Fibonacci.*) Se precisa determinar el número de parejas de conejos adultos resultantes de una pareja de conejos recién nacidos al transcurrir n meses, si cada pareja adulta produce mensualmente una nueva pareja y los recién nacidos adquieren la posibilidad de procrear pasado un mes. Se supone que los conejos no mueren nunca. ¿Cuántos conejos adultos habrá transcurrido un año?

27. Determine una recurrencia para el número de secuencias binarias, es decir, formadas por 0 y 1, que tienen longitud n, y en ninguna de las cuales aparecen dos ó más ceros consecutivos.

28. Obtenga una recurrencia para el número de secuencias de longitud $n \geq 1$ que se forman usando algunas de las letras a, b, c y en ninguna de las cuales aparece la subsecuencia *bb* ni la subsecuencia *ac*. Por ejemplo, para $n = 4$, son válidas las secuencias *caaa* y *babc*, pero no son válidas las secuencias *abac* y *cbbc*.

29. Encuentre una fórmula cerrada para las sucesiones tales que $f(0) = 2,\ g(0) = 1$ y
$$\begin{cases} f(n) = 8f(n-1) - 5g(n-1) \\ g(n) = 10f(n-1) - 7g(n-1) \end{cases}$$
para todo $n \geq 1$.

30. Para cada número natural $n \geq 1$, sea la matriz siguiente de orden $n \times n$,
$$A_n = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & a & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & a \end{pmatrix},$$
donde $a \in \mathbb{R}$. Llamamos $f(n) = |A_n|$.
   a) Obtenga una recurrencia lineal homogénea para $f(n)$.
   b) Resuelva dicha recurrencia para cada uno de los siguientes valores particulares del parámetro a: $-2,\ 0,\ 5/2$ y 4.

31. Resuelva cada una de las recurrencias siguientes:
   a) $x_0 = 1, x_1 = 1,\ x_n = \dfrac{x_{n-1} \cdot x_{n-2}}{x_{n-1} + x_{n-2}}$ para $n \geq 2$.
   b) $x_0 = 1,\ x_1 = 2,\ x_2 = 8$ y $x_n \cdot x_{n-2} \cdot x_{n-3} + 2x_{n-1} \cdot x_{n-2}^2 = 3x_{n-1}^2 \cdot x_{n-3}$ para $n \geq 3$.
   c) $x_0 = a,\ x_1 = b,\ x_2 = c$ y $x_n = \dfrac{x_{n-1}^4 \cdot x_{n-3}^2}{x_{n-2}^5}$ para $n \geq 3$, donde $a, b, c \in \mathbb{R}^+$.