Tema 5: Lógica de predicados de primer orden. Semántica.

(Apuntes elaborados por Juan Manuel Urbano Blanco)

Índice

1 Introducción. Definiciones básicas.

La Lógica proposicional puede no ser apropiada para expresar ciertos tipos de conocimiento. Por ejemplo:

Algunas personas hablan cinco idiomas.

Esta afirmación no está especificando ninguna persona de manera explícita, con nombre y apellidos, sólo está diciendo que existe un subconjunto no vacío dentro del conjunto de todas las personas, tal que cada uno de sus elementos habla cinco idiomas.

La Lógica proposicional tampoco permite designar objetos de forma indirecta en los enunciados, como por ejemplo cuando decimos "*el padre de Manolo*" ó "*el coche del padre de Manolo*".

Por otra parte, existen razonamientos que no pueden ser llevados a cabo con el formalismo de la Lógica proposicional. Por ejemplo:

Premisa 1:	*Todos los gatos trepan a los árboles.*
Premisa 2:	*Garfield es un gato.*
Conclusión:	*Garfield trepa a los árboles.*

Si intentamos aplicar la Lógica de proposiciones para hacer la deducción anterior, representaríamos la Premisa 1, la Premisa 2 y la Conclusión mediante sendas variables proposicionales P, Q, R, y como se aprecia, R no es consecuencia lógica del conjunto $\{P, Q\}$.

Denotemos por A el conjunto de todos los gatos, por B el conjunto de los seres que trepan a los árboles, y por a el gato Garfield. Entonces el razonamiento anterior lo podemos escribir simbólicamente como:

$$\left.\begin{array}{l} A \subseteq B \\ a \in A \end{array}\right\} \implies a \in B.$$

El problema es que en la Lógica de proposiciones no se contempla el hacer referencia a un objeto concreto perteneciente a un conjunto, como es en este caso Garfield que se supone es un gato concreto, conocido para el hablante.

La Lógica de predicados de primer orden soluciona estos problemas mediante el uso de cuantificadores, ya sea universales ó existenciales, como por ejemplo, en la frases "*Todos los pájaros tienen plumas*" y "*Algunos pájaros no comen insectos*".

Además la Lógica de predicados de primer orden permite representar propiedades de objetos a través de funciones y predicados, tal y como veremos en los ejemplos subsiguientes.

2 Lenguajes de predicados.

Un lenguaje de predicados $\mathcal{L}$ tiene por alfabeto los siguientes elementos.

- **Símbolos de variable**, que los denotaremos por $x, y, z, \ldots$, así como por $x_1, x_2, \ldots$, $y_1, y_2, \ldots$, etc., cuando ello sea necesario. Escribiremos $\mathrm{Var}(\mathcal{L})$ para representar el conjunto de todos los símbolos de variable del lenguaje $\mathcal{L}$.

- **Símbolos de constante**, que los representaremos por las letras $a, b, c, \ldots$ así como por $a_1, a_2, \ldots$, $b_1, b_2, \ldots$, etc. cuando ello sea necesario. Escribiremos $\mathrm{Cons}(\mathcal{L})$ para designar el conjunto de los símbolos de constante de $\mathcal{L}$.

- **Símbolos de función**, denotados como $f^{m_1}, g^{m_2}, h^{m_3}, \ldots$, donde $m_1, m_2, m_3, \ldots$, son números naturales llamados aridades. Cuando sea conveniente añadiremos subíndices, escribiendo en tal caso $f_1^{m_1}, f_2^{m_2}, \ldots$, $g_1^{n_1}, g_2^{n_2}, \ldots$, etc. La aridad de un símbolo de función es el número de argumentos (también llamados términos) a los que se supone se aplica dicho símbolo de función. Para simplificar la notación escribiremos por ejemplo f cuando la aridad sea conocida, en vez de f^{m_1}. El conjunto de todos los símbolos de función de $\mathcal{L}$ lo simbolizaremos por $\mathrm{Func}(\mathcal{L})$.

- **Símbolos de relación o de predicado**, que los representaremos siempre con letras mayúsculas $P^{m_1}, Q^{m_2}, R^{m_3}, \ldots$, donde $m_1, m_2, m_3, \ldots$, son las aridades correspondientes. Cuando ello sea necesario, incorporaremos subíndices $R_1^{a_1}, R_2^{a_2}, \ldots$, etc. Los símbolos de predicado van a representar relaciones que se definen para un número fijo de objetos, es cual es la aridad de dicho símbolo de predicado. También omitiremos las aridades cuando éstas sean conocidas. El conjunto de símbolos de relación lo denotaremos por $\mathrm{Rel}(\mathcal{L})$.

- **Operadores o conectivas lógicas**: Éstos son los operadores $\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, que ya conocemos del Tema 4, así como el cuantificador existencial denotado por $\exists$, y el cuantificador universal representado mediante el símbolo $\forall$.

Cuando especifiquemos un lenguaje de predicados de primer orden, indicaremos sólo los conjuntos $\mathrm{Cons}(\mathcal{L})$, $\mathrm{Func}(\mathcal{L})$ y $\mathrm{Rel}(\mathcal{L})$, omitiendo la especificación del conjunto $\mathrm{Var}(\mathcal{L})$, el cual es algo común a todos los lenguajes de predicados de primer orden.

Como hemos mencionado anteriormente, la aridad de un símbolo de función o de predicado es el número de elementos (llamados términos) a los que ésta ó éste se aplica. Normalmente sólo indicaremos los superíndices de aridad al principio, es decir, a la hora de definir el lenguaje. Posteriormente cada vez que se use un símbolo, ya sea de función o de predicado, omitiremos los superíndices de aridad.

Nótese que es posible definir símbolos de predicado 0-arios. Éstos representan afirmaciones que no se aplican a ningún término y que pueden ser verdaderas o falsas. Por ejemplo, la frase "*El Sol luce cada mañana*" podríamos representarla mediante un símbolo de predicado P con aridad 0. De esta forma la Lógica proposicional, queda inmersa dentro de la Lógica de predicados.

A partir de los símbolos anteriores definimos los términos, las fórmulas atómicas y las fórmulas. Los términos harán el papel de los objetos en el lenguaje hablado. Las fórmulas vendrán a representar los enunciados, siendo las fórmulas atómicas los enunciados más simples o indescomponibles.

Los **términos** del lenguaje $\mathcal{L}$ se definen recursivamente de la siguiente forma.

1. Todo símbolo de constante es un término.
2. Todo símbolo de variable es un término.
3. Si f es un símbolo de función de aridad n y $t_1, \ldots, t_n$ son términos, entonces $f(t_1, \ldots, t_n)$ es un término.
4. Todos los términos se generan aplicando las reglas anteriores un número finito de veces.

El conjunto de los términos de un lenguaje de primer orden $\mathcal{L}$ lo denotaremos por $\mathrm{Term}(\mathcal{L})$.

Una **fórmula atómica** o **átomo** es una expresión de la forma $R(t_1, \ldots, t_n)$, con R un símbolo de relación de aridad n y $t_1, \ldots, t_n$ términos.

Las **fórmulas** de $\mathcal{L}$ se definen recursivamente como sigue.

1. Todo átomo es una fórmula.
2. Si α y β son fórmulas, entonces $\neg\alpha$, $\alpha\vee\beta$, $\alpha\wedge\beta$, $\alpha \to \beta$ y $\alpha\leftrightarrow\beta$ también son fórmulas.
3. Si α es una fórmula y x es un símbolo de variable, entonces $\forall x\alpha$ y $\exists x\alpha$ son fórmulas.
4. Toda fórmula se genera aplicando las reglas anteriores un número finito de veces.

Denotamos el conjunto de todas las fórmulas del lenguaje $\mathcal{L}$ por $\mathrm{Form}(\mathcal{L})$.

Como en Lógica proposicional, se definen unas reglas de prioridad o precedencia entre las conectivas. Se mantienen los criterios que ya conocemos así como el uso de paréntesis. Sólo queda añadir que los cuantificadores y la negación tienen prioridad sobre el resto, y cuando varios de éstos aparecen juntos entonces se consideran de derecha a izquierda en la fórmula sobre la que actúan. Aclaramos todos estos conceptos con algunos ejemplos.

Ejemplo 1. Sea $\mathcal{L}$ el lenguaje de primer orden tal que

$$\mathrm{Cons}(\mathcal{L}) = \{a\}, \quad \mathrm{Func}(\mathcal{L}) = \{f^1\} \text{ y } \mathrm{Rel}(\mathcal{L}) = \{P^1, Q^2, R^0\}.$$

Las siguientes expresiones son términos de $\mathcal{L}$:

$$a, \quad x, \quad y, \quad f(x), \quad f(f(a)), \quad f(f(f(x_2))).$$

Las siguientes expresiones son fórmulas atómicas de $\mathcal{L}$:

$$Q(x, f(f(y))), \qquad R, \qquad P(a), \qquad P(f(f(f(z)))).$$

Las siguientes expresiones son fórmulas, no atómicas, de $\mathcal{L}$:

$$\exists y P(f(f(x))), \qquad \neg Q(a,y) \to \exists x P(x), \qquad \forall x \exists y \Big(Q(x, f(y)) \wedge R\Big) \to P(f(a)).$$

Las siguientes expresiones no son fórmulas de $\mathcal{L}$:

$$P(a,y), \quad P(x)\vee f(y), \quad R(a) \to \forall x P(y), \quad P(R), \quad \exists P\ \forall x\ (Q(x,x)\vee P(x)),$$

pues en la primera fórmula no estamos respetando la aridad del símbolo de predicado P, en la segunda estamos usando el término $f(y)$ como una fórmula, en la tercera no respetamos la aridad del símbolo de predicado R, en la cuarta estamos usando el símbolo de predicado R como si fuese un término, y en la quinta estamos cuantificando un predicado.

Con respecto a la prioridad de los operadores, por ejemplo, si escribimos la fórmula

$$\forall x P(x) \to Q(f(x), a)$$

nos estamos refiriendo a la fórmula

$$\Big(\forall x P(x)\Big) \to Q(f(x), a)$$

que no es la misma que
$$\forall x\Big(P(x) \to Q(f(x), a)\Big).$$

Tampoco es igual la fórmula
$$\forall x \exists y Q(x, y)$$
que la fórmula
$$\exists y \forall x Q(x, y),$$
pues tal y como veremos al final del tema, el orden de los cuantificadores es importante. □

Ya vimos en el Tema 4 cómo se traducen algunas frases del lenguaje natural al formalismo de la Lógica de proposiciones. Ahora ampliamos estas nociones con los ejemplos siguientes en los que aparecen cuantificadores y objetos designados de manera indirecta.

Ejemplo 2. Traducimos a un lenguaje apropiado de primer orden las frases siguientes.

1. *Todos los osos polares son de color blanco.*

   Usamos tres símbolos de predicado monarios: $P(x)$ designa que x vive en el Polo norte, $Q(x)$ indica que x es un oso, y $R(x)$ que x es un objeto o cosa de color blanco. Obtenemos la fórmula siguiente:
$$\forall x\Big(P(x) \wedge Q(x) \to R(x)\Big).$$

2. *Algunos osos no son de color blanco.*

   Aprovechamos los mismos predicados del apartado anterior y obtenemos:
$$\exists x\Big(Q(x) \wedge \neg R(x)\Big).$$

   Es evidente que esta fórmula también representa a cada una de las frases siguientes:

   - "*Existen osos que no son de color blanco*",
   - "*Hay osos que no son de color blanco*",
   - "*No todos los osos son de color blanco*".

3. *El coche del padre de Manolo es de color azul.*

   El substantivo "Manolo" designa un elemento conocido y concreto, por lo que lo representamos mediante un símbolo de constante a. Usamos dos símbolos de función f^1 y g^1, de modo que $f(x)$ designa el padre de x y $g(x)$ designa el coche de x. Finalmente definimos el predicado $P(x)$ que significa que x es de color azul. La frase se representa entonces como
$$P(g(f(a))).$$

También podíamos haber definido $f(x)$ para significar el coche del padre de x, en cuyo caso obtendríamos

$$P(f(a)).$$

La tercera posibilidad consiste en utilizar un símbolo de constante, digamos a, para designar el coche del padre de Manolo, con lo cual la representación sería

$$P(a).$$

El elegir una representación u otra, depende del uso que hagamos, el cual vendrá dado por las restantes frases.

4. *Los amigos de los amigos de Pepe son amigos de Pepe.*

   Representamos a "Pepe" mediante un símbolo de constante a y usamos el símbolo de predicado P^2 de modo que $P(x,y)$ designa que y es amigo de x. Una solución es

$$\forall x \forall y \Big(P(a,x) \wedge P(x,y) \to P(a,y) \Big).$$

5. *Puedes engañar a todo el mundo algún tiempo. Puedes engañar a algunos todo el tiempo. Pero no puedes engañar a todo el mundo todo el tiempo* (Abraham Lincoln).

   Definimos el símbolo de predicado $M(x,t)$ que designa que es posible engañar a x en el instante de tiempo t. Entonces una traducción posible sería:

$$\exists t \forall x M(x,t) \wedge \exists x \forall t M(x,t) \wedge \neg \forall x \forall t M(x,t).$$

□

3 Ocurrencias libres y ligadas. Variables libres y ligadas. Sentencias.

El **radio de acción** de un cuantificador en una fórmula α es la subfórmula de α a la cual ese cuantificador afecta. Así en la fórmula

$$\forall x \beta,$$

el cuantificador universal $\forall$ cuantifica al símbolo de variable x, y su radio de acción es la subfórmula β. Análogamente en la fórmula

$$\exists x \gamma,$$

el radio de acción del cuantificador $\exists$ es la subfórmula γ.

Ejemplo 3. En la fórmula

$$\forall x R(x) \to Q(x,y)$$

el radio de acción del cuantificador $\forall$ es $R(x)$. □

Ejemplo 4. En la fórmula
$$\forall x\Big(R(x) \wedge \exists y Q(x, y)\Big)$$
el radio de acción del cuantificador $\forall$ es $R(x) \wedge \exists y Q(x, y)$, y el radio de acción del cuantificador $\exists$ es $Q(x, y)$. □

Ejemplo 5. En la fórmula
$$\forall x \exists y\Big(R(x) \wedge Q(x, y)\Big)$$
el radio de acción del cuantificador $\forall$ es $\exists y\Big(R(x) \wedge Q(x, y)\Big)$, y el radio de acción del cuantificador $\exists$ es $R(x) \wedge Q(x, y)$. □

Una **ocurrencia** de una variable x en una fórmula α es una aparición de x en la escritura de α. Una ocurrencia de una variable x en una fórmula α se denomina **ligada** si aparece inmediatamente detrás de un cuantificador, o bien aparece en el radio de acción de un cuantificador (universal o existencial) cuya variable acompañante sea x. Una ocurrencia de una variable en una fórmula es **libre**, si no es ligada.

Ejemplo 6. En la fórmula
$$\forall x\Big(R(x, z) \wedge \exists y \forall z Q(x, y, z)\Big)$$
todas las ocurrencias de x son ligadas; la primera ocurrencia de z es libre y las dos siguientes son ligadas; las dos ocurrencias de y son ligadas. □

Ejemplo 7. En la fórmula
$$\forall x \exists y P(x) \wedge Q(x, y)$$
de izquierda a derecha, las dos primeras ocurrencias de x son ligadas mientras que la tercera es libre; la primera ocurrencia de y es ligada y la segunda es libre. □

Una fórmula es una **sentencia** si todas las ocurrencias de todas sus variables son ligadas. Dicho de otra forma, cuando no contiene ocurrencias libres de ninguna variable.

Ejemplo 8. La fórmula
$$\forall x P(x) \wedge \exists y Q(x, y)$$
no es una sentencia, mientras que
$$\forall x \exists y\Big(P(x) \wedge Q(x, y)\Big)$$
sí lo es. □

Resulta que todas las fórmulas que proceden de traducir un enunciado del lenguaje hablado tienen todas sus variables ligadas, y por tanto son sentencias. Mire de nuevo los distintos apartados del Ejemplo 2 y comprobará ésto que acabamos de decir.

4 Estructuras e interpretaciones.

En esta sección generalizamos el concepto de interpretación dado en el tema anterior. Ahora el valor de verdad de una fórmula dependerá del significado que demos a los símbolos de relación, de función y de constante que aparecen en dicha fórmula, así como del dominio en el que se consideren sus variables.

Para un lenguaje de primer orden $\mathcal{L}$, una **estructura**, también llamada **$\mathcal{L}$-estructura**, es una cuaterna

$$\mathcal{E} = \Big(\mathrm{D}, \{c_i^{\mathcal{E}}\}, \{f_j^{\mathcal{E}}\}, \{R_k^{\mathcal{E}}\}\Big),$$

donde:

1. D es un conjunto no vacío llamado **dominio** o **universo** de la $\mathcal{L}$-estructura,

2. a cada símbolo de constante $c_i \in \mathrm{Cons}(\mathcal{L})$ le corresponde un elemento $c_i^{\mathcal{E}} \in \mathrm{D}$,

3. a cada símbolo de función $f_j^n \in \mathrm{Func}(\mathcal{L})$ le corresponde una aplicación:

$$f_j^{\mathcal{E}} : \mathrm{D}^n \to \mathrm{D},$$

4. a cada símbolo de relación $R_k^m \in \mathrm{Rel}(\mathcal{L})$ le corresponde una aplicación

$$R_k^{\mathcal{E}} : \mathrm{D}^m \to \mathbb{Z}_2.$$

Al igual que en el tema anterior usamos el conjunto $\mathbb{Z}_2 = \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$ formado por los dos valores de verdad, donde **1** indicará verdadero y **0** falso. Por tanto al definir una estructura sobre un lenguaje de predicados $\mathcal{L}$, le estamos dando un significado concreto a cada símbolo del lenguaje, salvo a los símbolos de variable.

A veces para denotar el dominio de una estructura $\mathcal{E}$ escribiremos $\mathrm{D}_{\mathcal{E}}$.

Ejemplo 9. Damos una estructura $\mathcal{E}$ para el lenguaje de primer orden $\mathcal{L}$ definido por $\mathrm{Cons}(\mathcal{L}) = \{a\}$, $\mathrm{Func}(\mathcal{L}) = \{f^1\}$ y $\mathrm{Rel}(\mathcal{L}) = \{P^1, Q^2, R^0\}$:

1. $\mathrm{D} = \mathbb{R}$.

2. $a^{\mathcal{E}} = \sqrt{2}$.

3. $f^{\mathcal{E}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f^{\mathcal{E}}(r) = r^2 + \cos(r) - 1$.

4. - Para $r \in \mathbb{R}$, $P^{\mathcal{E}}(r)$ es verdad si y sólo si $r \in \mathbb{Z}$.

     Dicho de otra forma, $P^{\mathcal{E}} : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}_2$ es la aplicación tal que

$$P^{\mathcal{E}}(r) = \begin{cases} \mathbf{1} & \text{si } r \in \mathbb{Z}, \\ \mathbf{0} & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

- Para $r, s \in \mathbb{R}$, $Q^{\mathcal{E}}(r,s)$ es verdad si y sólo si $r \leq s$.

  Es decir, $Q^{\mathcal{E}} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{Z}_2$ es la aplicación tal que

$$Q^{\mathcal{E}}(r,s) = \begin{cases} \mathbf{1} & \text{si } r \leq s, \\ \mathbf{0} & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

- $R^{\mathcal{E}}$ es falso.

  En este caso, $R^{\mathcal{E}} : \varnothing \to \mathbb{Z}_2$ es la aplicación constante $\mathbf{0}$.

$\square$

A continuación nos ocupamos de la interpretación de los símbolos de variable que aparecen en las fórmulas.

Dados un lenguaje $\mathcal{L}$ y una $\mathcal{L}$-estructura $\mathcal{E}$, una **asignación** en $\mathcal{E}$ es una aplicación

$$v : \mathrm{Var}(\mathcal{L}) \to \mathrm{D},$$

donde D es el dominio de $\mathcal{E}$.

Toda asignación v en una $\mathcal{L}$-estructura $\mathcal{E}$ se extiende de forma única al conjunto de los términos del lenguaje $\mathcal{L}$ de la siguiente manera. Para ello consideramos la aplicación

$$v' : \mathrm{Term}(\mathcal{L}) \to \mathrm{D}$$

definida por

$$v'(t) = \begin{cases} c^{\mathcal{E}} & \text{si } t = c \in \mathrm{Cons}(\mathcal{L}), \\ v(x) & \text{si } t = x \in \mathrm{Var}(\mathcal{L}), \\ f^{\mathcal{E}}(v'(t_1), \ldots, v'(t_n)) & \text{si } t = f(t_1, \ldots, t_n). \end{cases}$$

De esta forma a cada término del lenguaje $\mathcal{L}$ le estamos asignando un valor en $\mathrm{D}_{\mathcal{E}}$. A partir de ahora, vamos a identificar v con su extensión v', ya que v' queda unívocamente determinada una vez que se conoce v. Además especificaremos únicamente los valores de v para los símbolos de variable que nos interesen, es decir, aquellos que intervienen en las fórmulas que estamos considerando.

Ejemplo 10. Sea el lenguaje $\mathcal{L}$ definido por

$$\mathrm{Cons}(\mathcal{L}) = \{a\},\ \mathrm{Func}(\mathcal{L}) = \{f^2\} \ \text{ y } \ \mathrm{Rel}(\mathcal{L}) = \{Q^2\},$$

y la $\mathcal{L}$-estructura $\mathcal{E}$ siguiente:

1. $\mathrm{D} = \mathbb{Z}$.

2. $a^{\mathcal{E}} = 8$.

3. $f^{\mathcal{E}} : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ f^{\mathcal{E}}(r,s) = r^2 - s$.

4. Para $r, s \in \mathbb{Z}$, $Q^{\mathcal{E}}(r,s)$ es verdad si y sólo si $r \leq s$.

Sea v la asignación en la $\mathcal{L}$-estructura $\mathcal{E}$ tal que:

$$v(x) = 3,\ v(y) = -1.$$

Entonces

$$v(a) = a^{\mathcal{E}} = 8;$$

$$v(f(x,a)) = f^{\mathcal{E}}(v(x), v(a)) = f^{\mathcal{E}}(3,8) = 3^2 - 8 = 1;$$

$$\begin{aligned} v(f(a, f(y,x))) &= f^{\mathcal{E}}(v(a), v(f(y,x))) = f^{\mathcal{E}}(v(a), f^{\mathcal{E}}(v(y), v(x))) = \\ &f^{\mathcal{E}}(8, f^{\mathcal{E}}(-1,3)) = f^{\mathcal{E}}(8, (-1)^2 - 3) = f^{\mathcal{E}}(8,-2) = 8^2 - (-2) = 66. \end{aligned}$$

□

Dada una asignación v para un lenguaje $\mathcal{L}$ en una estructura $\mathcal{E}$, un símbolo de variable $x \in \mathrm{Var}(\mathcal{L})$ y un elemento $r \in \mathrm{D}$, definimos $v(x|r)$ como la asignación que actúa sobre todos los símbolos de variable de $\mathcal{L}$ igual que lo hace v, excepto sobre x al cual le asigna el valor $r \in \mathrm{D}$.

Análogamente se define $v(x_1|r_1, \ldots, x_n|r_n)$, que sería igual que v en los símbolos de variable $y \notin \{x_1, \ldots, x_n\}$ y $v(x_1|r_1, \ldots, x_n|r_n)(x_i) = r_i$ para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Ejemplo 11. Para el lenguaje $\mathcal{L}$ y la estructura $\mathcal{E}$ del ejemplo anterior, hemos considerado una asignación v tal que

$$v(x) = 3,\ v(y) = -1.$$

Ahora consideramos la asignación w_1 definida a partir de v como $w_1 = v(x|7)$. Entonces

$$w_1(x) = 7,\ w_1(y) = -1.$$

Análogamente, si definimos $w_2 = v(x|7, y|0)$, entonces

$$w_2(x) = 7,\ w_2(y) = 0.$$

□

Estamos ya en condiciones de definir formalmente lo que vamos a entender por interpretación de una fórmula, que no es otra cosa que una extensión "natural" de las interpretaciones que vimos en el capítulo anterior para la Lógica proposicional.

Una **$\mathcal{L}$-interpretación** ó interpretación para un lenguaje de predicados de primer orden $\mathcal{L}$, es un triple ordenado $(\mathcal{E}, v, \mathrm{I}^v)$, donde $\mathcal{E}$ es una $\mathcal{L}$-estructura, v es una asignación en $\mathcal{E}$ e I^v es una aplicación

$$\mathrm{I}^v : \mathrm{Form}(\mathcal{L}) \to \mathbb{Z}_2,$$

que verifica las siguientes propiedades:

1. $\mathrm{I}^v(R(t_1, \ldots, t_n)) = R^{\mathcal{E}}(v(t_1), \ldots, v(t_n))$, con $t_1, \ldots, t_n$ términos y R un símbolo de relación n-ario de $\mathcal{L}$.

2. $\mathrm{I}^v(\neg\alpha) = 1 \oplus \mathrm{I}^v(\alpha)$;

3. $\mathrm{I}^v(\alpha \vee \beta) = \mathrm{I}^v(\alpha) \oplus \mathrm{I}^v(\beta) \oplus \mathrm{I}^v(\alpha) \cdot \mathrm{I}^v(\beta)$;

4. $\mathrm{I}^v(\alpha \wedge \beta) = \mathrm{I}^v(\alpha) \cdot \mathrm{I}^v(\beta)$;

5. $\mathrm{I}^v(\alpha \to \beta) = \mathbf{1} \oplus \mathrm{I}^v(\alpha) \oplus \mathrm{I}^v(\alpha) \cdot \mathrm{I}^v(\beta)$;

6. $\mathrm{I}^v(\alpha \leftrightarrow \beta) = \mathbf{1} \oplus \mathrm{I}^v(\alpha) \oplus \mathrm{I}^v(\beta)$;

7. $$\mathrm{I}^v(\forall x\alpha) = \begin{cases} \mathbf{1}, & \text{si para todo } r \in \mathrm{D} \text{ se verifica que } \mathrm{I}^{v(x|r)}(\alpha) = \mathbf{1}, \\ \mathbf{0}, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

8. $$\mathrm{I}^v(\exists x\alpha) = \begin{cases} \mathbf{1}, & \text{si existe } r \in \mathrm{D} \text{ tal que } \mathrm{I}^{v(x|r)}(\alpha) = \mathbf{1}, \\ \mathbf{0}, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

El apartado (1) es el caso base y nos dice cómo se interpretan las fórmulas atómicas. Concretamente una fórmula atómica es cierta si y sólo si los elementos que son asignados a los argumentos que acompañan al símbolo de relación R están relacionados mediante la relación concreta que se le asocia al símbolo R. Los apartados (2)-(6) de la definición recogen la idea de cómo se deben interpretar las conectivas. Obsérvese que es exactamente igual a la definición de interpretación en Lógica proposicional. Por último, los apartados (7) y (8) corresponden a la interpretación de los cuantificadores. El séptimo apartado dice que la fórmula $\forall x\alpha$ es cierta en la $\mathcal{L}$-estructura $\mathcal{E}$ considerada y bajo la asignación v, si para cualquier valor que le asignemos al símbolo de variable x (de ahí el cambio de asignación de v por $v(x|r)$) la fórmula α es cierta en la $\mathcal{L}$-estructura dada con la nueva asignación. El octavo apartado es análogo al anterior.

Importante: Dada una $\mathcal{L}$-interpretación $(\mathcal{E}, v, \mathrm{I}^v)$ y una fórmula $\alpha \in \mathrm{Form}(\mathcal{L})$, las ocurrencias libres de las variables que aparecen en α se interpretan haciendo uso de la asignación v mientras que las ocurrencias ligadas de las variables que aparecen en α se interpretan atendiendo al cuantificador correspondiente tal y como se indica en los apartados (7) y (8) de la definición anterior.

En este sentido, es interesante también conocer el siguiente resultado.

Lema 1 (**Lema de coincidencia**). Sea α una fórmula de un lenguaje de predicados $\mathcal{L}$ y sean $x_1, \dots, x_n \in \mathrm{Var}(\mathcal{L})$ los símbolos de variable para cada uno de los cuales aparece en α al menos una ocurrencia libre. Sea $\mathcal{E}$ una $\mathcal{L}$-estructura y sean v_1 y v_2 dos asignaciones en $\mathcal{E}$ tales que $v_1(x_i) = v_2(x_i)$ para todo $i = 1, \dots, n$. Entonces $\mathrm{I}^{v_1}(\alpha) = \mathrm{I}^{v_2}(\alpha)$. □

Ejemplo 12. Para el lenguaje de primer orden $\mathcal{L}$ definido por

$$\mathrm{Cons}(\mathcal{L}) = \{a\},\ \mathrm{Func}(\mathcal{L}) = \{f^1\}\ \text{ y }\ \mathrm{Rel}(\mathcal{L}) = \{P^1, Q^2\},$$

consideramos la estructura $\mathcal{E}$ siguiente:

1. $\mathrm{D} = \mathbb{R}$.
2. $a^{\mathcal{E}} = \sqrt{5}$.
3. $f^{\mathcal{E}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f^{\mathcal{E}}(r) = r^2$.
4. Para $r \in \mathbb{R},\ P^{\mathcal{E}}(r) = \mathbf{1}$ si y sólo si $r \in \mathbb{Z}$;

   Para $r, s \in \mathbb{R},\ Q^{\mathcal{E}}(r, s) = \mathbf{1}$ si y sólo si $r \leq s$.

También consideramos la asignación v tal que $v(x) = 4$, $v(y) = \frac{1}{100}$, y calculamos las interpretaciones siguientes:

1. $\mathrm{I}^v(P(a)) = P^{\mathcal{E}}(v(a)) = P^{\mathcal{E}}(a^{\mathcal{E}}) = P^{\mathcal{E}}(\sqrt{5}) = \mathbf{0}$.
2. $\mathrm{I}^v(P(x)) = P^{\mathcal{E}}(v(x)) = P^{\mathcal{E}}(4) = \mathbf{1}$.
3. $\mathrm{I}^v(Q(x, y)) = Q^{\mathcal{E}}(v(x), v(y)) = Q^{\mathcal{E}}(4, \frac{1}{100}) = \mathbf{0}$.
4. La fórmula $\exists x Q(x, y)$ nos dice que existe algún elemento del dominio, es decir, un número real x el cual es menor o igual que el valor asignado a y, es decir, $v(y) = \frac{1}{100}$. Ésto es claramente verdadero, pues basta tomar como x cualquier número real menor o igual que $\frac{1}{100}$. Por consiguiente

   $$\mathrm{I}^v(\exists x Q(x, y)) = \mathbf{1}.$$

   De forma más rigurosa, tomamos cualquier $r \in \mathrm{D} = \mathbb{R}$ tal que $r \leq 1/100$ y tenemos

   $$\mathrm{I}^{v(x|r)}(Q(x, y)) = Q^{\mathcal{E}}(w(x), w(y)) = Q^{\mathcal{E}}(r, \frac{1}{100}) = \mathbf{1},$$

   donde hemos denotado la asignación $v(x|r)$ por w. Por tanto

   $$\mathrm{I}^v(\exists x Q(x, y)) = \mathbf{1}.$$

5. La fórmula $\exists y P(x)$ nos dice que es posible asignarle al símbolo de variable y algún valor en D tal que $v(x)$ sea un número entero. Ésto es cierto pues según la definición de v, sabemos que $v(x) = 4$, que evidentemente pertenece a $\mathbb{Z}$. Por tanto $\mathrm{I}^v(\exists y P(x)) = \mathbf{1}$. De manera más formal, cogemos cualquier elemento $r \in \mathbb{R}$ y tenemos que
$$\mathrm{I}^{v(y|r)}(P(x)) = P^{\mathcal{E}}(w(x)) = P^{\mathcal{E}}(4) = \mathbf{1},$$
donde w representa $v(y|r)$. Por tanto
$$\mathrm{I}^v(\exists y P(x)) = \mathbf{1}.$$

6. $\mathrm{I}^v(\exists x P(x)) = \mathbf{1}$, ya que si cogemos cualquier $r \in \mathbb{Z}$, tenemos que
$$\mathrm{I}^{v(x|r)}(P(x)) = P^{\mathcal{E}}(w(x)) = P^{\mathcal{E}}(r) = \mathbf{1},$$
donde hemos denotado $v(x|r)$ por w. Por tanto
$$\mathrm{I}^v(\exists x P(x)) = \mathbf{1}.$$

7. $\mathrm{I}^v(P(f(a))) = \mathbf{1}$, pues estamos diciendo que $(\sqrt{5})^2 = 5 \in \mathbb{Z}$. De manera más precisa,
$$\mathrm{I}^v(P(f(a))) = P^{\mathcal{E}}(v(f(a))) = P^{\mathcal{E}}(f^{\mathcal{E}}(v(a))) = P^{\mathcal{E}}(f^{\mathcal{E}}(a^{\mathcal{E}})) = P^{\mathcal{E}}((\sqrt{5})^2) = P^{\mathcal{E}}(5) = \mathbf{1}.$$

8. La fórmula $\forall x \exists y Q(f(y), x)$ nos dice que para todo $x \in \mathbb{R}$ existe $y \in \mathbb{R}$ tal que $y^2 \leq x$. Sabemos que para cualquier $r \in \mathbb{R}$ se verifica que $r^2 \geq 0$; si la variable x en la fórmula anterior toma un valor negativo, no existirá $y \in \mathbb{R}$ tal que $y^2 \leq x$. Por consiguiente
$$\mathrm{I}^v\Big(\forall x \exists y Q(f(y), x\Big) = \mathbf{0}.$$

9. La fórmula $\forall x \exists y Q(x, f(y))$ nos dice que para todo $x \in \mathbb{R}$ existe (al menos) un elemento $y \in \mathbb{R}$ tal que $x \leq y^2$. Esta propiedad es cierta pues si $x \leq 0$, tomamos $y := 0$, mientras que si $x > 0$, cogemos $y := x + 1$. Por tanto
$$\mathrm{I}^v\Big(\forall x \exists y Q(x, f(y))\Big) = \mathbf{1}.$$

10. $\mathrm{I}^v\Big(\forall x \exists y Q(x, f(y)) \to \forall x \exists y Q(f(y), x)\Big) = \mathbf{0}$ como consecuencia de los dos apartados anteriores.

$\square$

5 Validez y satisfacibilidad.

Sean un lenguaje de predicados $\mathcal{L}$ y una fórmula $\alpha \in \mathrm{Form}(\mathcal{L})$. Entonces:

- α es **satisfacible** si existe alguna interpretación $(\mathcal{E}, v, \mathrm{I}^v)$ de $\mathcal{L}$ tal que $\mathrm{I}^v(\alpha) = \mathbf{1}$. En dicho caso se dice que la interpretación $(\mathcal{E}, v, \mathrm{I}^v)$ satisface a α así como que es un **modelo** para α.
- α se dice **satisfacible en una estructura** $\mathcal{E}$, si existe alguna interpretación $(\mathcal{E}, v, \mathrm{I}^v)$ que satisface a α.
- Cuando una fórmula no es satisfacible, esto es, cuando es falsa bajo cualquier interpretación, la llamamos **contradicción**.
- α es **refutable** si $\neg\alpha$ es satisfacible. De modo equivalente α es **refutable** si existe una interpretación $(\mathcal{E}, v, \mathrm{I}^v)$ de $\mathcal{L}$ tal que $\mathrm{I}^v(\alpha) = \mathbf{0}$.
- α es **válida** en una $\mathcal{L}$-estructura $\mathcal{E}$ si para toda asignación v en $\mathcal{E}$ se verifica que $\mathrm{I}^v(\alpha) = \mathbf{1}$.
- α es **universalmente válida** si es válida en toda $\mathcal{L}$-estructura.

Comentarios:

1. Podemos extender las definiciones anteriores, diciendo que un conjunto de fórmulas $\Omega \subseteq \mathrm{Form}(\mathcal{L})$ es satisfacible, si existe alguna interpretación $(\mathcal{E}, v, \mathrm{I}^v)$ de $\mathcal{L}$ tal que $\mathrm{I}^v(\alpha) = \mathbf{1}$ para toda $\alpha \in \Omega$. En tal caso diremos que la interpretación $(\mathcal{E}, v, \mathrm{I}^v)$ satisface a Ω, así como que $(\mathcal{E}, v, \mathrm{I}^v)$ es un modelo para Ω, y escribiremos $\mathrm{I}^v(\Omega) = \mathbf{1}$.

   El conjunto de fórmulas Ω es satisfacible en la estructura $\mathcal{E}$, si existe alguna interpretación $(\mathcal{E}, v, \mathrm{I}^v)$ que satisface a Ω.

2. Observamos que cualquier fórmula de $\mathcal{L}$ puede encuadrarse en uno de los siguientes tipos:
   - Universalmente válida.
   - Satisfacible y refutable.
   - Contradicción.

3. Si α es válida en una $\mathcal{L}$-estructura $\mathcal{E}$, en particular α es satisfacible en $\mathcal{E}$. Sin embargo puede ocurrir que α sea satisfacible en $\mathcal{E}$ sin que sea válida en $\mathcal{E}$.

4. α es universalmente válida si y sólo si $\neg\alpha$ es una contradicción.

5. Para probar que una fórmula es satisfacible o refutable hemos de buscar una interpretación concreta bajo la cual la fórmula se haga verdadera o falsa, respectivamente. Sin embargo para probar que es universalmente válida o una contradicción tenemos que dar un razonamiento de tipo general que sea válido para cualquier interpretación posible de dicha fórmula.

Ejemplo 13. Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje de predicados de primer orden.

1. Para cualquier fórmula $\alpha \in \mathrm{Form}(\mathcal{L})$, la fórmula $\alpha \to \alpha$ es universalmente válida, pues para toda interpretación $(\mathcal{E}, v, \mathrm{I}^v)$ de $\mathcal{L}$, por la definición de la aplicación I^v tenemos que
$$\mathrm{I}^v(\alpha \to \alpha) = \mathbf{1} \oplus \mathrm{I}^v(\alpha) \oplus \mathrm{I}^v(\alpha) \cdot \mathrm{I}^v(\alpha) = \mathbf{1}.$$
Este ejemplo se puede generalizar de la manera siguiente. A partir de una tautología β de la Lógica proposicional obtenemos fórmulas universalmente válidas de la Lógica de predicados simplemente reemplazando cada variable proposicional que aparece en β por una fórmula cualquiera de $\mathcal{L}$.

   Por ejemplo, consideremos la proposición lógica $\beta := P \to (Q \to P)$ construida a partir de las variables proposicionales P y Q. Es inmediato comprobar que β es una tautología. Por otra parte, si sabemos que $\exists x R(x, y)$ y $P(f(a))$ son fórmulas de un lenguaje de predicados $\mathcal{L}$, entonces la fórmula siguiente, también perteneciente a $\mathcal{L}$,
$$\exists x R(x, y) \to \Big(P(f(a) \to \exists x R(x, y)\Big)$$
es universalmente válida.

   Decir también que existen fórmulas universalmente válidas que no son obtenibles a partir de ninguna tautología proposicional. Véase el apartado (6.) más abajo.

2. Para cualquier $\alpha \in \mathrm{Form}(\mathcal{L})$, la fórmula $\alpha \wedge \neg\alpha$ es una contradicción, pues
$$\mathrm{I}^v(\alpha \wedge \neg\alpha) = \mathrm{I}^v(\alpha) \cdot (\mathbf{1} \oplus \mathrm{I}^v(\alpha)) = \mathrm{I}^v(\alpha) \oplus \mathrm{I}^v(\alpha) = \mathbf{0}$$
para toda interpretación $(\mathcal{E}, v, \mathrm{I}^v)$ de $\mathcal{L}$.

3. La fórmula $P(x) \to P(y)$ es válida en toda estructura $\mathcal{E}$ cuyo dominio tenga cardinal 1, es decir, $\mathrm{D}_{\mathcal{E}} = \{r\}$, pues en tal caso cualquier asignación v en $\mathcal{E}$ verifica que $v(x) = v(y) = r$. Comprobemos ésto:
$$\begin{aligned}
&\mathrm{I}^v\Big(P(x) \to P(y)\Big) = \\
&\mathbf{1} \oplus \mathrm{I}^v(P(x)) \oplus \mathrm{I}^v(P(x)) \cdot \mathrm{I}^v(P(y)) = \\
&\mathbf{1} \oplus P^{\mathcal{E}}(v(x)) \oplus P^{\mathcal{E}}(v(x)) \cdot P^{\mathcal{E}}(v(y)) = \\
&\mathbf{1} \oplus P^{\mathcal{E}}(r) \oplus P^{\mathcal{E}}(r) \cdot P^{\mathcal{E}}(r) = \\
&\mathbf{1} \oplus P^{\mathcal{E}}(r) \oplus P^{\mathcal{E}}(r) = \\
&\mathbf{1}.
\end{aligned}$$

4. También puede comprobarse de manera similar que $P(x) \to P(y)$ es válida en toda estructura en la cual la aplicación $P^{\mathcal{E}}$ (es decir, la forma de interpretar el símbolo de predicado P) es constante en el dominio $\mathrm{D}_{\mathcal{E}}$.

5. Por el apartado anterior, la fórmula $P(x) \to P(y)$ es satisfacible. Ésta también es refutable. Para ver ésto último, consideramos la estructura dada por

$$\begin{aligned} &\mathrm{D}_{\mathcal{E}} = \mathbb{Z}, \\ &P^{\mathcal{E}}(r) = \mathbf{1} \iff r \text{ es par}, \end{aligned}$$

y la asignación

$$v(x) = 2, \quad v(y) = 3.$$

Entonces

$$\mathrm{I}^v\Big(P(x) \to P(y)\Big) = \mathbf{1} \oplus \mathrm{I}^v(P(x)) \oplus \mathrm{I}^v(P(x)) \cdot \mathrm{I}^v(P(y)) = \mathbf{1} \oplus \mathbf{1} \oplus \mathbf{1} \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}.$$

Recuérdese que las ocurrencias libres de variables se interpretan mediante la asignación utilizada.

6. La fórmula $\forall x P(x) \to \exists y P(y)$ es universalmente válida, pues intuitivamente, si aceptamos que el símbolo de predicado P se verifica para todos los elementos del dominio considerado D, como D nunca es vacío, ciertamente existe algún elemento perteneciente a D para el cual P se hace verdad.

   De manera más rigurosa, si tenemos una interpretación cualquiera $(\mathcal{E}, v, \mathrm{I}^v)$ para $\mathcal{L}$, pueden ocurrir dos posibilidades excluyentes:

   - $\mathrm{I}^v(\forall x P(x)) = \mathbf{0}$. Entonces

$$\begin{aligned} &\mathrm{I}^v(\forall x P(x) \to \exists y P(y)) = \\ &\mathbf{1} \oplus \mathrm{I}^v(\forall x P(x)) \oplus \mathrm{I}^v(\forall x P(x)) \cdot \mathrm{I}^v(\exists y P(y)) = \\ &\mathbf{1} \oplus \mathbf{0} \oplus \mathbf{0} \cdot \mathrm{I}^v(\exists y P(y)) = \\ &\mathbf{1}. \end{aligned}$$

   - $\mathrm{I}^v(\forall x P(x)) = \mathbf{1}$, lo cual significa que para todo elemento $r \in \mathrm{D}_{\mathcal{E}}$ se cumple que $P^{\mathcal{E}}(r) = \mathbf{1}$. Como $\mathrm{D}_{\mathcal{E}} \neq \varnothing$, ésto implica que $\mathrm{I}^v(\exists y P(y)) = \mathbf{1}$. Por tanto resulta que

$$\begin{aligned} &\mathrm{I}^v(\forall x P(x) \to \exists y P(y)) = \\ &\mathbf{1} \oplus \mathrm{I}^v(\forall x P(x)) \oplus \mathrm{I}^v(\forall x P(x)) \cdot \mathrm{I}^v(\exists y P(y)) = \\ &\mathbf{1} \oplus \mathbf{1} \oplus \mathbf{1} \cdot \mathbf{1} = \\ &\mathbf{1}. \end{aligned}$$

Como en ambos casos obtenemos el valor lógico **1**, deducimos que la fórmula propuesta es universalmente válida.

En el tema siguiente veremos un método sistemático para decidir cuándo una fórmula es universalmente válida.

□

En la sección anterior hemos visto el Lema de coincidencia el cual implica que si una fórmula α es una **sentencia**, es decir, una fórmula sin variables libres, entonces la asignación no es relevante para calcular la interpretación de α.

Incluímos aquí las dos propiedades siguientes que se deducen del Lema de coincidencia.

Corolario 1. Dada una sentencia α y $\mathcal{E}$ una $\mathcal{L}$-estructura, son equivalentes:

1. α es válida en $\mathcal{E}$,
2. α es satisfacible en $\mathcal{E}$.

□

Corolario 2. Dada una sentencia α y $\mathcal{E}$ una $\mathcal{L}$-estructura, entonces es cierta una de las siguientes afirmaciones, y sólo una:

1. α es válida en $\mathcal{E}$,
2. $\neg\alpha$ es válida en $\mathcal{E}$.

□

6 Consecuencia Lógica. El Teorema de la deducción.

Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje de predicados y $\Gamma \cup \{\beta\} \subseteq \mathrm{Form}(\mathcal{L})$. Decimos que β es **consecuencia lógica** de Γ, o bien que Γ **implica semánticamente** a β, y lo notaremos por $\Gamma \models \beta$, si para toda $\mathcal{L}$-interpretación $(\mathcal{E}, v, \mathrm{I}^v)$ que satisface a Γ (es decir, que verifica $\mathrm{I}^v(\alpha) = \mathbf{1}$ para toda fórmula $\alpha \in \Gamma$), se cumple que $\mathrm{I}^v(\beta) = \mathbf{1}$.

Si $\Gamma = \varnothing$, entonces escribiremos $\models \beta$ en lugar de $\varnothing \models \beta$. Se puede comprobar que $\models \beta$ equivale a decir que β sea universalmente válida.

Como se puede ver, la idea es esencialmente la misma que la dada en el tema de Lógica proposicional pero ahora adaptada al contexto de la Lógica de predicados. Análogamente a como vimos allí, si ahora $\Gamma = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ y $\Gamma \models \beta$, escribiremos simplemente

$$\alpha_1, \ldots, \alpha_n \models \beta.$$

Como la Lógica de proposiciones está incluída en la Lógica de predicados, todos los ejemplos de implicación semántica vistos allí, siguen siendo ciertos ahora.

Ejemplo 14. Si α y β son dos fórmulas de un lenguaje de predicados $\mathcal{L}$, tenemos el esquema de *Modus ponens*, es decir,

$$\Big\{\alpha,\ \alpha \to \beta\Big\} \models \beta.$$

Para comprobarlo, tomemos $(\mathcal{E}, v, \mathrm{I}^v)$ una $\mathcal{L}$-interpretación cualquiera tal que

$$\mathrm{I}^v(\alpha) = \mathbf{1} \quad \text{y} \quad \mathrm{I}^v(\alpha \to \beta) = \mathbf{1}.$$

Entonces

$$\mathbf{1} = \mathbf{1} \oplus \mathrm{I}^v(\alpha) \oplus \mathrm{I}^v(\alpha) \cdot \mathrm{I}^v(\beta) = \mathbf{1} \oplus \mathbf{1} \oplus \mathrm{I}^v(\beta),$$

de donde

$$\mathrm{I}^v(\beta) = \mathbf{1}.$$

$\square$

Ejemplo 15. Veamos que en cualquier lenguaje de predicados $\mathcal{L}$ se verifica que

$$\forall x P(x) \vee \forall x Q(x) \models \forall x\big(P(x) \vee Q(x)\big).$$

Sea $(\mathcal{E}, v, \mathrm{I}^v)$ una $\mathcal{L}$-interpretación de forma que

$$\mathrm{I}^v\Big(\forall x P(x) \vee \forall x Q(x)\Big) = \mathbf{1}.$$

Ésto implica que

$$\mathrm{I}^v\Big(\forall x P(x)\Big) = \mathbf{1} \quad \text{o bien} \quad \mathrm{I}^v\Big(\forall x Q(x)\Big) = \mathbf{1}.$$

Supongamos que $\mathrm{I}^v(\forall x P(x)) = \mathbf{1}$. El caso $\mathrm{I}^v(\forall x Q(x)) = \mathbf{1}$ se resuelve de manera similar. Entonces para todo $r \in \mathrm{D}_{\mathcal{E}}$ tenemos que

$$P^{\mathcal{E}}(r) = \mathbf{1}.$$

Ahora bien, ya sea $Q^{\mathcal{E}}(r) = \mathbf{1}$ ó $Q^{\mathcal{E}}(r) = \mathbf{0}$, se cumple que

$$P^{\mathcal{E}}(r) \oplus Q^{\mathcal{E}}(r) \oplus P^{\mathcal{E}}(r) \cdot Q^{\mathcal{E}}(r) = \mathbf{1} \oplus Q^{\mathcal{E}}(r) \oplus \mathbf{1} \cdot Q^{\mathcal{E}}(r) = \mathbf{1}$$

para todo $r \in \mathrm{D}_{\mathcal{E}}$, lo cual significa que

$$\mathrm{I}^v\Big(\forall x\big(P(x) \vee Q(x)\big)\Big) = \mathbf{1}.$$

$\square$

El método empleado en el ejemplo anterior es bastante artesanal, pues se basa únicamente en la definición de implicación semántica. En el tema siguiente veremos un método sistemático para decidir cuándo una fórmula es consecuencia lógica de un conjunto de fórmulas.

Si queremos demostrar que una fórmula β no es consecuencia lógica de un conjunto Γ, es decir,

$$\Gamma \not\models \beta,$$

tenemos que encontrar una interpretación $(\mathcal{E}, v, \mathrm{I}^v)$ que sea un modelo para Γ pero no lo sea para β.

Ejemplo 16. Veamos que

$$\forall x\big(P(x) \vee Q(x)\big) \ \not\models\ \forall x P(x) \vee \forall x Q(x).$$

Consideramos la estructura $\mathcal{E}$ dada por

$$\begin{aligned}
&\mathrm{D} = \mathbb{Z},\\
&P^{\mathcal{E}}(r) = \mathbf{1} \ \Leftrightarrow\ r \text{ es par},\\
&Q^{\mathcal{E}}(r) = \mathbf{1} \ \Leftrightarrow\ r \text{ es impar}.
\end{aligned}$$

Entonces $\forall x(P(x) \vee Q(x))$ nos dice que dado un número entero cualquiera, éste siempre será par o impar, lo cual es verdadero, mientras que $\forall x P(x) \vee \forall x Q(x)$ nos dice que todos los números enteros son pares o bien todos son impares, lo cual es falso. □

Aquí también tenemos el correspondiente Teorema de la deducción cuya utilidad ya quedó patente en el tema anterior a la hora de resolver ejercicios sobre implicación semántica.

Teorema 1 (Teorema de la deducción). Dado un conjunto de fórmulas $\Gamma \cup \{\alpha, \beta\}$ en un lenguaje de predicados, son equivalentes las afirmaciones siguientes:

- $\Gamma \cup \{\alpha\} \models \beta$,
- $\Gamma \models \alpha \to \beta$.

□

Ejemplo 17. Decir que la fórmula

$$\alpha = \forall x P(x) \vee \forall x Q(x) \to \forall x\big(P(x) \vee Q(x)\big)$$

es universalmente válida, es lo mismo que afirmar

$$\models \forall x P(x) \vee \forall x Q(x) \to \forall x\big(P(x) \vee Q(x)\big),$$

lo cual por el Teorema de la deducción es equivalente a que

$$\forall x P(x) \vee \forall x Q(x) \models \forall x\big(P(x) \vee Q(x)\big).$$

Pero ésto ya lo constatamos en un ejemplo anterior, por lo que α es universalmente válida. □

Nótese que la fórmula $\forall x(P(x) \to Q(x))$ no tiene el formato $\alpha \to \beta$, por lo cual, si tenemos un conjunto de fórmulas Γ y nos planteamos

$$\Gamma \models \forall x\big(P(x) \to Q(x)\big),$$

no podemos aplicar el Teorema de la deducción.

7 Consecuencia lógica y conjuntos insatisfacibles.

En lo sucesivo nos vamos a centrar en intentar resolver el problema de la implicación semántica, es decir, decidir si $\Gamma \models \beta$.

De forma similar a la definición dada en el tema anterior, un conjunto de fórmulas se dice que es **insatisfacible** o **inconsistente**, si no existe ninguna interpretación que haga ciertas simultáneamente todas las fórmulas del conjunto.

El problema de decidir la consecuencia lógica para una fórmula se puede transformar en el de decidir la insatisfacibilidad de un conjunto de fórmulas usando el siguiente resultado.

Teorema 2. Sea $\Gamma \cup \{\beta\}$ un conjunto de fórmulas en un lenguaje de predicados de primer orden. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. $\Gamma \models \beta$,
2. $\Gamma \cup \{\neg\beta\}$ es insatisfacible.

□

En el próximo capítulo nos ocuparemos de transformar un conjunto de fórmulas inicial en otros que conserven el carácter de satisfacibilidad ó insatisfacibilidad de dicho conjunto y que sean más sencillos de estudiar. Daremos algoritmos para determinar, en algunos casos, la insatisfacibilidad de tales conjuntos.

8 Equivalencia lógica.

Dos fórmulas $\alpha, \beta \in \text{Form}(\mathcal{L})$ son **equivalentes**, si para cualquier $\mathcal{L}$-interpretación $(\mathcal{E}, v, \mathrm{I}^v)$ se verifica que $\mathrm{I}^v(\alpha) = \mathrm{I}^v(\beta)$, es decir, si la fórmula $\alpha \leftrightarrow \beta$ es universalmente válida. Escribiremos $\alpha \equiv \beta$ para indicar que las fórmulas α y β son equivalentes.

Como es de esperar, la equivalencia lógica define una relación de equivalencia en el conjunto $\text{Form}(\mathcal{L})$.

La siguiente propiedad nos dice que la relación de equivalencia lógica es compatible con las conectivas u operadores lógicos.

Lema 2. Sean $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \text{Form}(\mathcal{L})$. Entonces:

1. $\alpha_1 \equiv \beta_1 \implies \neg\alpha_1 \equiv \neg\beta_1$,

2. $$\left.\begin{array}{l}\alpha_1 \equiv \beta_1\\ \alpha_2 \equiv \beta_2\end{array}\right\} \implies \alpha_1 \wedge \alpha_2 \equiv \beta_1 \wedge \beta_2,$$

3. $$\left.\begin{array}{l}\alpha_1 \equiv \beta_1\\ \alpha_2 \equiv \beta_2\end{array}\right\} \implies \alpha_1 \vee \alpha_2 \equiv \beta_1 \vee \beta_2,$$

4. $\alpha_1 \equiv \beta_1 \implies \forall x\alpha_1 \equiv \forall x\beta_1$, para cualquier $x \in \mathrm{Var}(\mathcal{L})$,

5. $\alpha_1 \equiv \beta_1 \implies \exists x\alpha_1 \equiv \exists x\beta_1$, para cualquier $x \in \mathrm{Var}(\mathcal{L})$.

□

Todas las equivalencias lógicas estudiadas en el tema anterior, aquí siguen siendo válidas. Ahora estudiamos otras que involucran cuantificadores.

Lema 3. Para cualesquiera $\alpha, \beta \in \mathrm{Form}(\mathcal{L})$:

1. $\neg\forall x\alpha \equiv \exists x\neg\alpha$,

2. $\neg\exists x\alpha \equiv \forall x\neg\alpha$,

3. $\exists x\alpha \equiv \neg\forall x\neg\alpha$,

4. $\forall x\alpha \equiv \neg\exists x\neg\alpha$.

□

Estas propiedades nos indican cómo se relaciona la conectiva $\neg$ con los cuantificadores. Nos dice **cómo se interioriza** (y también cómo se extrae) **la conectiva $\neg$ en una fórmula cuantificada**.

Ejemplo 18. Dada la fórmula

$$\alpha := \neg\exists x\Big(R(x,a) \wedge \neg Q(f(x))\Big),$$

hacemos uso del lema anterior, de las Leyes de De Morgan y de las Leyes de doble negación, y obtenemos

$$\alpha \;\equiv\; \forall x\Big(\neg R(x,a) \vee Q(f(x))\Big).$$

□

Ejemplo 19. La fórmula

$$\neg\exists x \forall y \Big(R(x,y) \to Q(g(x,y)) \Big)$$

es equivalente a

$$\forall x \neg\forall y \Big(R(x,y) \to Q(g(x,y)) \Big),$$

la cual es equivalente a

$$\forall x \exists y \neg \Big(R(x,y) \to Q(g(x,y)) \Big).$$

Si recordamos que

$$\alpha \to \beta \;\equiv\; \neg\alpha \vee \beta,$$

entonces

$$\forall x \exists y \neg \Big(R(x,y) \to Q(g(x,y)) \Big) \equiv \forall x \exists y \neg \Big(\neg R(x,y) \vee Q(g(x,y)) \Big).$$

Usamos de nuevo las Leyes de De Morgan y las Leyes de doble negación, y obtenemos

$$\forall x \exists y \neg \Big(\neg R(x,y) \vee Q(g(x,y)) \Big) \equiv \forall x \exists y \Big(R(x,y) \wedge \neg Q(g(x,y)) \Big).$$

Así pues, la fórmula inicial es equivalente a ésta última. □

Lema 4. Para cualesquiera $\alpha, \beta \in \mathrm{Form}(\mathcal{L})$:

1. $\forall x\alpha \wedge \forall x\beta \equiv \forall x(\alpha \wedge \beta)$,

2. $\exists x\alpha \vee \exists x\beta \equiv \exists x(\alpha \vee \beta)$.

□

El apartado (1.) en la propiedad anterior nos dice que **el cuantificador universal distribuye al operador** $\wedge$, mientras que el apartado (2.) nos dice que **el cuantificador existencial distribuye al operador** $\vee$.

Ejemplo 20. La fórmula

$$\forall x P(x) \wedge \forall x R(x,a)$$

es equivalente a

$$\forall x \Big(P(x) \wedge R(x,a) \Big).$$

La fórmula

$$\forall x P(x) \wedge \forall x R(x,a) \wedge \forall x \exists y Q(f(x),y)$$

es equivalente a

$$\forall x \Big(P(x) \wedge R(x,a) \wedge \exists y Q(f(x),y) \Big).$$

La fórmula

$$\exists x P(x) \vee \exists x R(x, a)$$

es equivalente a

$$\exists x \Big(P(x) \vee R(x, a) \Big).$$

□

Lema 5. Sean $\alpha, \beta \in \mathrm{Form}(\mathcal{L})$ y supongamos que no hay ocurrencias libres de x en β. Entonces:

1. $\forall x \alpha \wedge \beta \equiv \forall x(\alpha \wedge \beta)$,
2. $\exists x \alpha \wedge \beta \equiv \exists x(\alpha \wedge \beta)$,
3. $\forall x \alpha \vee \beta \equiv \forall x(\alpha \vee \beta)$,
4. $\exists x \alpha \vee \beta \equiv \exists x(\alpha \vee \beta)$.

□

La propiedad anterior nos dice **cómo incluir los operadores $\vee$ e $\wedge$ en el radio de acción de un cuantificador** supuesto que la parte a incluir no interfiere con la variable cuantificada.

Ejemplo 21. Consideremos la fórmula

$$\delta := \forall x P(x) \vee \forall x \exists y Q(x, y).$$

Podemos aplicar el apartado (3.) del lema anterior con

$$\alpha := P(x) \qquad \text{y} \qquad \beta := \forall x \exists y Q(x, y).$$

Entonces

$$\delta \;\equiv\; \forall x \Big(P(x) \vee \forall x \exists y Q(x, y) \Big).$$

Nótese que los dos cuantificadores universales que aparecen en esta última fórmula "juegan papeles diferentes" dentro de dicha fórmula. Es posible que el primero se refiera a objetos de cierto conjunto, como por ejemplo personas, y el segundo a objetos de otro conjunto diferente, como por ejemplo automóviles. □

Ejemplo 22. En la fórmula

$$\forall x P(x) \vee Q(x)$$

no podemos aplicar el apartado (3.) del lema anterior, pues si hacemos las identificaciones

$$\alpha := P(x) \qquad \text{y} \qquad \beta := Q(x),$$

vemos que x aparece libre en β.

De hecho, se puede constatar que la fórmula inicial no es equivalente a la fórmula

$$\forall x \Big(P(x) \vee Q(x) \Big).$$

□

Lema 6. Sean $\alpha, \beta \in \mathrm{Form}(\mathcal{L})$ y supongamos que el símbolo de variable y no aparece en β (ni libre ni ligada). Entonces:

1. $\forall x\beta \equiv \forall y\beta^*$,

2. $\exists x\beta \equiv \exists y\beta^*$,

donde β^* es la fórmula que se obtiene reemplazando todas las ocurrencias libres de x en β por la variable y. □

Esta propiedad nos dice que **podemos renombrar o cambiar los nombres de las variables cuantificadas** que aparecen en una fórmula, lo cual combinado con otras propiedades anteriores nos permite incluir todas las componentes de una fórmula dentro del radio de acción de un cuantificador. En particular **podemos extraer los cuantificadores de una fórmula de modo que todos ellos aparezcan en la parte de la izquierda**. Recordamos también que **las ocurrencias libres de variables son intocables, es decir, no podemos renombrarlas**.

Ejemplo 23. La fórmula $\forall xR(x,y)$ es equivalente a la fórmula $\forall zR(z,y)$.

Sin embargo, la fórmula $\forall xR(x,y)$ no es equivalente a $\forall yR(y,y)$.

En la fórmula $\forall xR(x,y)$ la única ocurrencia de y es libre, mientras que en la fórmula $\forall yR(y,y)$, dicha ocurrencia la hemos convertido en ligada, con lo cual su significado ahora viene dado por el cuantificador universal. En la relación de problemas se propone justificar que ambas fórmulas no son equivalentes. □

Ejemplo 24. Sea la fórmula

$$\alpha := \forall xR(x,y) \vee \exists yP(f(y)).$$

Como en la subfórmula $\exists yP(f(y))$ no aparece la variable x, entonces resulta

$$\alpha \;\equiv\; \forall x\Big(R(x,y) \vee \exists yP(f(y))\Big).$$

Si nos proponemos en primer lugar extraer a la izquierda el cuantificador existencial de modo que afecte a toda la fórmula, hemos de renombrar primero la variable cuantificada por dicho cuantificador. Por una parte aplicando el Lema 6 tenemos que

$$\exists yP(f(y)) \;\equiv\; \exists zP(f(z)),$$

y por otra aplicando el Lema 2, resulta

$$\alpha = \forall xR(x,y) \vee \exists yP(f(y)) \;\equiv\; \forall xR(x,y) \vee \exists zP(f(z)).$$

Ya sólo queda aplicar el Lema 5 para obtener el objetivo propuesto

$$\alpha \;\equiv\; \exists z\Big(\forall xR(x,y) \vee P(f(z))\Big).$$

Sobre la fórmula obtenida podemos aplicar de nuevo el Lema 5 y llegamos a

$$\alpha \;\equiv\; \exists z \forall x \Big(R(x,y) \vee P(f(z)) \Big).$$

Así hemos obtenido una fórmula equivalente a la inicial, en la cual todos los cuantificadores aparecen agrupados en la parte de la izquierda. □

En general en una fórmula no podemos alterar el orden en el que aparecen los cuantificadores, pues la fórmula resultante podría no ser equivalente a la fórmula inicial.

Ejemplo 25. Las fórmulas $\forall x \exists y R(x,y)$ y $\exists y \forall x R(x,y)$ no son equivalentes, pues si consideramos la estructura $\mathcal{E}$ dada por

$$\begin{aligned} &\mathrm{D} = \mathbb{R}, \\ &R^{\mathcal{E}}(x,y) := \text{“ } x \leq y \text{ ”}, \end{aligned}$$

entonces para cualquier asignación v en $\mathcal{E}$ tenemos que

$$\mathrm{I}^v \Big(\forall x \exists y R(x,y) \Big) = \mathbf{1},$$

pues podemos asignarle a y el valor que toma x, mientras que

$$\mathrm{I}^v \Big(\exists y \forall x R(x,y) \Big) = \mathbf{0},$$

ya que $\mathbb{R}$ no está acotado superiormente. □

La propiedad siguiente nos dice que podemos cambiar el orden de cuantificadores idénticos siempre que vayan consecutivos.

Lema 7. Si $\alpha \in \mathrm{Form}(\mathcal{L})$, entonces:

1. $\forall x \forall y \alpha \equiv \forall y \forall x \alpha$,

2. $\exists x \exists y \alpha \equiv \exists y \exists x \alpha$.

□

Por último vemos que a veces es posible eliminar **cuantificadores superfluos** sin que ello afecte a la interpretación de la fórmula.

Lema 8. Si $\alpha \in \mathrm{Form}(\mathcal{L})$, entonces:

1. $\forall x \forall x \alpha \equiv \forall x \alpha$,

2. $\exists x \forall x \alpha \equiv \forall x \alpha$,

3. $\forall x \exists x \alpha \equiv \exists x \alpha$,

4. $\exists x \exists x \alpha \equiv \exists x \alpha$.

$\square$

Con la notación del lema anterior, el cuantificador que afecta a α es el más próximo por la derecha a α.

Lema 9. Si $\alpha \in \mathrm{Form}(\mathcal{L})$ e y es un símbolo de variable que no aparece en α, entonces:

1. $\forall y \alpha \equiv \alpha$,
2. $\exists y \alpha \equiv \alpha$.

$\square$

Ejemplo 26. Tenemos las siguientes equivalencias:

$$\begin{array}{lcl} \exists x P(y) & \equiv & P(y), \\ \forall y \exists x \neg P(y) & \equiv & \forall y \neg P(y), \\ \forall z \forall y \exists x \neg P(y) & \equiv & \forall y \neg P(y), \\ \forall x \forall y R(x,y) & \equiv & \forall y \forall x R(x,y). \end{array}$$

$\square$