Unificación y resolución

Mayo 2020

Introducción

Objetivo: ¿Un conjunto de fórmulas implica semanticamente a otra?

ET 4.1.
$\{\exists x P(x) \to \forall y P(y); \forall x (P(x) \vee Q(x))\} \models \exists x \neg Q(x) \to \forall y P(y)$

Aplicando el Teorema de la Deducción y negando la condición $\forall y P(y)$, el problema se transforma en estudiar si el conjunto
$\Gamma = \{\forall x \forall y [\neg P(x) \vee P(y)], \forall x (P(x) \vee Q(x)), \neg Q(x), \neg P(b)\}$
Este conjunto está en forma normal clausulada y el problema se transforma en estudiar si el conjunto formado por las cláusulas es o no satisfactible $\Gamma = \{\neg P(x) \vee P(y), P(x) \vee Q(x), \neg Q(x), \neg P(b)\}$

Aplicaremos el método de resolución y para eso necesitamos hacer *sustituciones* en las variables para *unificar* literales.

Unificación. Sustituciones

Objetivo: dados dos o más literales transformarlos de manera que queden iguales, esto es, UNIFICAR literales.
Una sustitución es una transformación de una variable por un término en todas las ocurrencias de la variable en una fórmula. Se representa como $\sigma = (x|t)$.

Ejemplos:

- $\{P(x), \neg P(a)\}$. Con $\sigma = (x|a)$ ambos literales quedan iguales.
- $\{P(x), \neg P(f(x))\}$. Para unificar literales haríamos $\sigma = (x|f(x))$, pero como la x aparece en ambos al aplicar el cambio tendríamos $\{P(f(x)), \neg P(f(f(x)))\}$ y esto es imposible de unificar.
- $\{Q(x,a), Q(y,b)\}$. Empezamos por unificar la x y la y, esto es $\sigma = (x|y)$ y los literales quedarían $\{Q(x,a), Q(x,b)\}$. Ahora habría que unificar a y b pero eso es imposible pues son constantes.

Pág. 167

Un conjunto de literales se dice UNIFICABLE si existe un unificador para ellas. Caso contrario se dice que NO es unificable.

Un unificador es una sustitución (o cadena de sustituciones) que hace que dos o más literales se conviertan en idénticos.

Ejemplo: $P(a, x, f(g(y))),\ P(z, f(z), f(u))$

$\sigma_1 = (z|a) \qquad P(a, x, f(g(y))),\ P(a, f(a), f(u))$
$\sigma_2 = (x|f(a)) \qquad P(a, f(a), f(g(y))),\ P(a, f(a), f(u))$
$\sigma_3 = (u|g(y)) \qquad P(a, f(a), f(g(y))),\ P(a, f(a), f(f(g(y)))$
Unificador es $\sigma = (z|a; x|f(a); u|g(y)$

También podríamos haber unificador de otra forma
$\tau = (x|f(a); y|a; z|a; u|g(a))$ y ambos literales quedarían
$P(a, f(a), f(g(a)))$.

Pág. 169

Algortimo de unificación. Discordancia

Un conjunto de discordancia para un par de literales es el conjunto formado por los primeros términos (recorridos los literales de izquierda a derecha) en los que difieren.

En el caso de que todos los literales coincidan totalmente, el conjunto de discordancia es el conjunto vacío.

Ejemplos:

- $\{P(x), P(y)\}$. El conjunto de discordancia es $D = \{x, y\}$ (Dos símbolos de variable)
- $\{Q(x, f(x, y)); Q(x, f(y, y))\}$. El conjunto de discordancia es $D = \{x, y\}$ (Dos símbolos de variable)
- $\{R(g(x)); R(f(y))\}$. El conjunto de discordancia es $D = \{g(x), f(y)\}$ (Ningún símbolo de variable)
- $\{Q(x, f(x, y)); Q(x, f(g(x), y))\}$. El conjunto de discordancia es $D = \{x, g(x)\}$ (Un símbolo de variables y un término que depende de esa variable)

Pág. 171

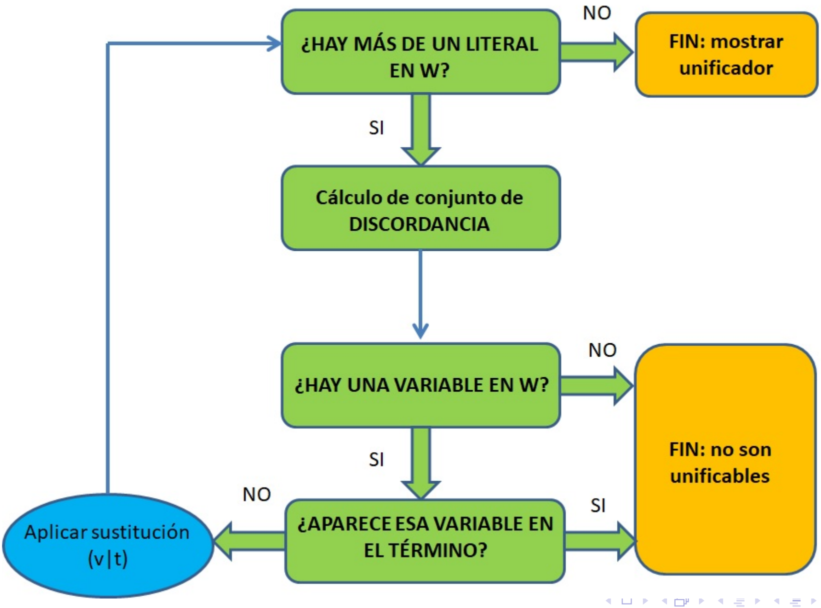
Algoritmo de unificación

Este algoritmo nos permite un cálculo automático de un unificador más general para un conjunto de literales.

- **Datos de entrada**: literales a unificar (W)
- **Salida**: un unificador principal o la respuesta ”no son unificables”.
- **Descripción del algortimo**:
  Inicialización: $W_0 := W$; $\sigma_0 = Id$
  Bucle: Si el número de elementos de W_k es 1, entonces el proceso acaba y σ_k es el unifcador principal.
  En otro caso: Calcular el conjunto de discordancia de W_k, D. Si en D no aparece ningún símbolo de variable, o aparece un símbolo de variables y hay un término que depende de esa variable, entonces el proceso termina porque **no son unificables**. Si existe una variable v_k y un término t_k en el que no aparece la variable v_k entonces $\sigma_{k+1} = (v_k|t_k)$ y aplicamos la sustitución $(v_k|t_k)$ a W_k para obtener W_{k+1} y volvemos a ejecutar el bucle para W_{k+1}.

Pág. 170-172

Esquema del algortimo de unificación



$W = \{P(a,x,f(g(y))), P(z,f(z),f(u))\}$

Inicialización $W_0 = \{P(a,x,f(g(y))), P(z,f(z),f(u))\}$; $\sigma_0 =$ identidad

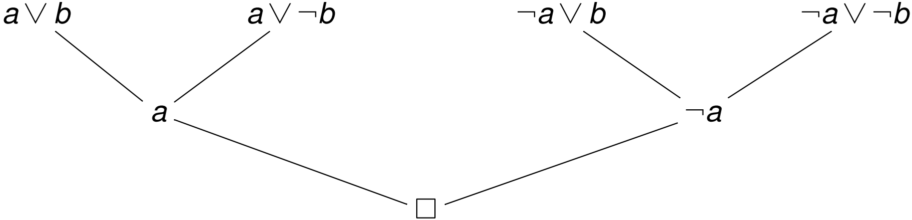
- $|W_0| = 2$, el conjunto de discordancia es $\underline{D = \{a,z\}}$; Entonces $\sigma_1 = (z|a)$ y $W_1 = \{P(a,x,f(g(y))), P(a,f(a),f(u))\}$
- $|W_1| = 2$, el conjunto de discordancia es $\underline{D = \{x,f(a)\}}$; Entonces $\sigma_2 = (z|a; x|f(a))$ y $W_2 = \{P(a,f(a),f(g(y))), P(a,f(a),f(u))\}$
- $|W_2| = 2$, el conjunto de discordancia es $\underline{D = \{g(y),u\}}$; Entonces $\sigma_3 = (z|a; x|f(a); u|g(y))$ y $\underbrace{W_3 = \{P(a,f(a), f(g(y)))\}}_{\text{Algoritmo de unificación}}$

El método de resolución. Recordatorio

Un ejemplo en la lógica proposicional sería estudiar si el conjunto $\Gamma = \{a \vee b, a \vee \neg b, \neg a \vee b, \neg a \vee \neg b\}$ es satisfactible.
Calculamos la resolvente de dos cláusulas.

$$\begin{array}{l} a \vee b \\ a \vee \neg b \\ \hline a \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{l} \neg a \vee b \\ \neg a \vee \neg b \\ \hline \neg a \end{array}$$

Estudiar la insatisfactibilidad de Γ equivale a estudiar la de $\{a \vee b, a \vee \neg b, \neg a \vee b, \neg a \vee \neg b, a, \neg a\}$. Esto es



Ampliación del concepto de resolvente. Resolvente binaria

El objetivo es calcular resolventes para aplicar el método de resolución.

Un resolvente binaria de dos cláusulas $C_1 = L_1 \vee C_1'$ y $C_2 = (L_2)^c \vee C_2'$ donde σ es el unificador de L_1 y L_2 es la claúsula $\sigma(C_1') \vee \sigma(C_2')$

Ejemplo. $C_1 = P(x,b) \vee Q(x,a)$; $\quad C_2 = \neg P(a,z) \vee R(z)$

Sean $L_1 = P(x,b)$ y $L_2 = P(a,z)$ y busquemos un unificador para ellos. Aplicando el algoritmo de unificación 2 veces obtenemos $\sigma = (x|a; z|b)$. Mediante σ ya podemos eliminar L_1 y $(L_2)^c$, esto es:

$$P(x,b) \vee Q(x,a) \xrightarrow{(x|a)} P(a,b) \vee Q(a,a)$$

$$\neg P(a,z) \vee R(z) \xrightarrow{(z|b)} \neg P(a,b) \vee R(b)$$

$$Q(a,a) \vee R(b)$$

Pág. 176-177

Ampliación del concepto de resolvente. Factor

Un factor es la cláusula que resulta al unificar dos literales de una misma cláusula.

Ejemplo. $C = P(x) \vee P(f(a)) \vee Q(x, b)$.
$P(x)$ y $P(f(a))$ son unifcables bajo $\sigma = (x|f(a))$. Si hacemos $\sigma(C) = P(f(a)) \vee Q(f(a), b)$

Una resolvente de dos cláusulas es una resolvente binaria de ellas o de sus factores.

Observación

Implican semánticamente a C

Si C es una resolvente de C_1 y C_2, entonces $\{C_1, C_2\} \models C$

Observación

Las variables de dos cláusulas distintas son distintas aunque se llamen igual. En caso de que ocurra eso cambiaremos el nombre a alguna de ellas.

Pág. 178

Ampliación del concepto de resolvente. ET.4.3.m)

3. Intenta obtener como resolvente la cláusula vacía:

$$\{Q(x, f(a)) \vee Q(f(b), y), \neg Q(x, f(y)) \vee \neg Q(f(z), t))\}$$

Calcularemos los factores y luego una resolvente binaria para obtener una resolvente.

$$Q(x, f(a)) \vee Q(f(b), y) \xrightarrow{\sigma_1 = (x|f(b); y|f(a))} Q(f(b), f(a))$$

$$\neg Q(x, f(y)) \vee \neg Q(f(z), t) \xrightarrow{\sigma_2 = (x|f(z); t|f(y))} \neg Q(f(z), f(y))$$

$$Q(f(b), f(a)),\ \neg Q(f(z), f(y)) \xrightarrow{\tau = (z|b; y|a)} \square$$

Ampliación del concepto de resolvente. ET.4.3.m)

En estos casos es conveniente renombrar variables y hacer todas las sustituciones

$Q(x_1, f(a)) \vee Q(f(b), y_1)$ $\qquad$ $\neg Q(x_2, f(y_2)) \vee \neg Q(f(z), t)$

$(x_1|f(b); y_1|f(a))$ $\qquad$ $(x_2|f(b); y_2|b; z|b; t|f(b))$

$\square$

ET. 4.4 g)

Estudiar si este conjunto es SATISFACIBLE o INSATISFACIBLE

$$\Gamma = \{R(a), D(y) \vee S(a,y), \neg R(x) \vee \neg Q(y) \vee \neg S(x,y), \neg D(f(x)), Q(f(x))\}$$

$$\begin{tikzcd}
D(y) \vee S(a,y) \arrow[d, dash, "(x|a)"] & \neg R(x) \vee \neg Q(y) \vee \neg S(x,y) \arrow[dl, dash] \\
D(y) \vee \neg R(a) \vee \neg Q(y) \arrow[d, dash] & R(a) \arrow[dl, dash] \\
D(y) \vee \neg Q(y) \arrow[d, dash, "(y|f(x))"] & \neg D(f(x)) \arrow[dl, dash] \\
\neg Q(f(x)) \arrow[d, dash] & Q(f(x)) \arrow[dl, dash] \\
\square \arrow[r] & \text{Insatisfacible}
\end{tikzcd}$$

Deducción o refutación.

Este proceso se llama *deducción de la cláusula vacía mediante resolución o refutación*. Formalmente se escribe como una sucesión finita de cláusulas que bien son elementos del conjunto de partida, bien resolventes de ellas.

1. $D(y) \vee S(a, y)$ y $\neg R(x) \vee \neg Q(y) \vee \neg S(x, y)$ son cláusulas de Γ
2. $D(y) \vee \neg R(a) \vee \neg Q(y)$ es resolvente de $D(y) \vee S(a, y)$ y $\neg R(x) \vee \neg Q(y) \vee \neg S(x, y)$.
3. $R(a)$ es una cláusula de Γ
4. $D(y) \vee \neg Q(y)$ es resolvente de $D(y) \vee \neg R(a) \vee \neg Q(y)$ y $R(a)$
5. $\neg D(f(x))$ es una cláusula de Γ
6. $\neg Q(f(x))$ es resolvente de $D(y) \vee \neg Q(y)$ y $\neg D(f(x))$
7. $Q(f(x))$ es una cláusula de Γ
8. $\square$ es resolvente de $\neg Q(f(x))$ y $Q(f(x))$.

Completitud del principio de resolución

Teorema

Sea Γ un conjunto de cláusulas. Entonces Γ es insatisfactible sí y sólo sí existe una deducción de $\square$ a partir de Γ.

Problema

¿Cómo estamos seguros de que NO existe una deducción lineal de $\square$ a partir de Γ?

- Estrategias de saturación: calcular todas las posibles resolventes.
- Estrategias lineales: se elige una raíz (lineales- input: sólo se calculan resolventes con las cláusulas de partida)

Estrategias de saturación. ET4. 4.a)

$$\{\neg P(x) \vee Q(f(x)), P(a), \neg P(x) \vee \neg Q(x)\}$$

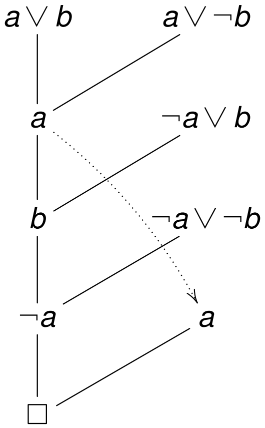
$S_0 = \{C_1 = \neg P(x_1) \vee Q(f(x_1)), C_2 = P(a), C_3 = \neg P(x_2) \vee \neg Q(x_2)\}$
$R(C_1, C_2) = Q(f(a))$
$R(C_1, C_3) = \neg P(x_1) \vee \neg P(f(x_1))$
$R(C_2, C_3) = \neg Q(a)$
$S_1 = \{C_1, C_2, C_3, C_4 = Q(f(a)), C_5 = \neg P(x_1) \vee \neg P(f(x_1)), C_6 = \neg Q(a)\}$

$\nexists R(C_1, C_4)$	$\nexists R(C_2, C_4)$	$R(C_3, C_4) = \neg P(f(a))$	$\nexists R(C_4, C_5)$
$\nexists R(C_1, C_5)$	$R(C_2, C_5) = \neg P(f(a))$	$\nexists R(C_3, C_5)$	$\nexists R(C_4, C_6)$
$\nexists R(C_1, C_6)$	$\nexists R(C_2, C_6)$	$\nexists R(C_3, C_6)$	$\nexists R(C_5, C_6)$

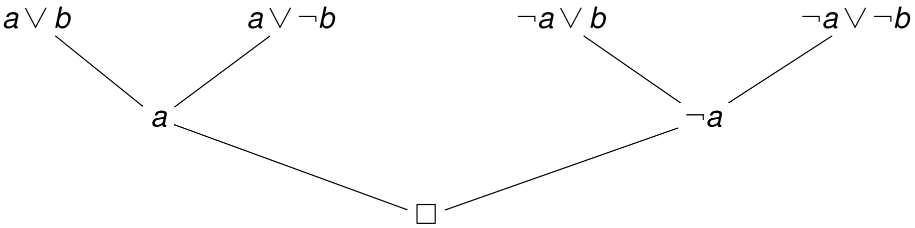
$S_2 = \{C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6, C_7 = \neg P(f(a))\}$
Como no hay resolvente de C_7 con ninguna de las demás clásusulas, $S_2 = S_3$ y por tanto el conjunto sería satisfactible porque no hemos encontrado la cláusula vacía.

Estrategias lineales

En una estrategia lineal se elige un punto de partida (raíz) y se calculan resolventes sobre la anterior resolvente. Gráficamente:



Estrategias no lineales



Teorema

Si para un conjunto de cláusulas existe una deducción de la cláusula vacía, entonces existe una deducción lineal de la cláusula vacía.

Teorema: Completitud de la estrategia lineal

Γ es insatisfactible sí y sólo sí existe una deducción lineal de $\square$ a partir de Γ

Estrategia lineal-input

lineal: se elige raíz
input: sólo se calculan resolventes con las cláusulas de partida
El ejemplo lineal anterior no es input

- **Ventajas:** En cada paso sólo hay que probar con un número finito de claúsulas.
- **Inconvenientes:**
  1. ¿Cómo se elige la raíz?
  2. No es una estrategia completa (en el ejemplo anterior: el conjunto es insatisfactible, pero no hay una deducción L-I que llegue a la cláusula vacía)
- **¿Por qué es interesante?:** Porque es completa cuando el conjunto de cláusulas es un conjunto de Horn.

Pág. 136

Conjuntos de Horn

Definición

Dado un lenguaje proposicional construído sobre el conjunto X:

1. Se dice que un literal es positivo si es una fórmula atómica.
2. Se dice que un literal es negativo si es el negado de una fórmula atómica.
3. Una cláusula se dice negativa si todos los literales que aparecen en ella son literales negativos.
4. Una cláusula se dice de Horn si tiene exactamente un literal positivo.
5. Un conjunto de cláusulas es un conjunto de Horn si tiene exactamente una cláusula negativa y el resto de las cláusulas son cláusulas de Horn.

Conjuntos de Horn

Las cláusulas de Horn se clasifican como:

- Hechos: si sólo contienen al literal positivo
- Reglas: si tienen algún literal negativo

Las cláusulas negativas se denominan objetivos.
En un lenguaje de programación PROLOG, un conjunto de reglas y hechos (un conjunto de Horn) forman un programa

Teorema

Si Γ es un conjunto de Horn , Γ es insatisfactible sí y sólo sí existe una deducción lineal-input de $\Box$ con raíz la cláusula objetivo.

Observación

Un conjunto de Horn puede ser SATISFACTIBLE

$$\{\neg P, \neg Q \vee P\}$$

Pág. 136