LÓGICA PROPOSICIONAL

(tema 2)

PRIORIDADES:

1) EL PARÉNTESIS ( )
2) LA NEGACIÓN $\neg$
3) $\wedge$, $\vee$
4) $\rightarrow$, $\leftrightarrow$.

Si por ejemplo tenemos:
$a \rightarrow b \vee c$ ✓ , sabemos que sería: $a \rightarrow (b \vee c)$

pero si tenemos $a \vee b \wedge c$ ✗
NECESITAMOS los paréntesis, pues tienen = prioridad, y no se podría saber el orden.

EQUIVALENCIAS LÓGICAS:

1. $a \rightarrow b \equiv \neg a \vee b$
2. $a \leftrightarrow b \equiv (a \rightarrow b) \wedge (b \rightarrow a)$

Morgan
3. $\neg(a \wedge b) \equiv (\neg a \vee \neg b)$
4. $\neg(a \vee b) \equiv (\neg a \wedge \neg b)$

5. $\neg\neg a \equiv a$

Distributiva — hacemos la combinación de todas con todas
6. $(a \wedge b) \vee d \equiv (a \vee d) \wedge (b \vee d)$
7. $(a \wedge b) \vee (c \wedge d) \equiv (a \vee c) \wedge (b \vee c) \wedge (a \vee d) \wedge (b \vee d)$

8. $a \wedge a \equiv a$
9. $a \vee a \equiv a$

} a

ej: $\neg a \rightarrow b \equiv \neg\neg a \vee b$.

ej: $\neg a \leftrightarrow b \equiv (\neg a \rightarrow b) \wedge (b \rightarrow \neg a)$

FORMA NORMAL CLAUSULADA.

Cláusula

DISYUNCIÓN DE LITERALES

$a \vee b \vee \neg c$
$a \vee \neg b \vee \neg c \vee d$

NO SE ADMITE:

1) (NO) TENGA EL MISMO LITERAL.
$a \vee a \vee \neg b$ ✗

2) NO MISMO LITERAL NEGADO
$a \vee \neg a \vee \neg b \equiv 1$ ✗
siempre vale 1, por lo que NO se considera cláusula.

3) (NO) TENGA OTRO OPERADOR
$(a \vee b) \rightarrow c$ ✗

"FORMA NORMAL CLAUSULADA"

CONJUNCIÓN DE CLÁUSULAS

$\underbrace{\text{CLÁUSULA} \wedge \text{CLÁUS.} \wedge \text{CLÁUS.}}_{\text{FORMA NORMAL CLAUSULADA}}$

$\overbrace{(a \vee b)}^{\text{CLAUS. 1}} \wedge \overbrace{(\neg b \vee c)}^{\text{CLAU. 2}}$

→ PASOS →

PASOS

1) ELIMINAR LOS EQUIVALENTES

$$a \leftrightarrow b \equiv (a \to b) \wedge (b \to a)$$

2) ELIMINAR LOS IMPLICAS

$$a \to b \equiv \neg a \vee b$$

3) MORGAN (para quitar negaciones a paréntesis)

$$\neg(a \vee b) \equiv \neg a \wedge \neg b$$

$$\neg(a \wedge b) \equiv \neg a \vee \neg b$$

4) DISTRIBUTIVA.

$$(a \wedge b) \vee d \equiv (a \vee d) \wedge (b \vee d)$$

$$(a \wedge b) \vee (c \wedge d) \equiv (a \vee c) \wedge (b \vee c) \wedge (a \vee d) \wedge (b \vee d).$$

Pasar un conjunto Π a forma clausular:

Ejemplo 1

→ conjunto de cláusulas

$$\Pi = \{\underbrace{a \to (b \vee c)}_{\text{Fórmula ①}}, \underbrace{b \to (a \to c)}_{\text{Fórm. ②}}, \underbrace{d \wedge \neg(a \to \neg b)}_{\text{Fórm. ③}}\}.$$

Si entre fórmulas tenemos V (ó), podemos quitar ( ).

① $a \to (b \vee c) \equiv \neg a \vee (b \vee c) \equiv \underbrace{\neg a \vee b \vee c}_{\text{Cláusula 1.}}$

Como son todo v, puedo quitar paréntesis

② $b \to (a \to c) \equiv \neg b \vee (a \to c) \equiv \neg b \vee (\neg a \vee c) \equiv \underbrace{\neg b \vee \neg a \vee c}_{\text{C. 2.}}.$

negación antes de paréntesis

③ $d \wedge \neg(a \to \neg b) \equiv d \wedge \neg(\neg a \vee \neg b) \equiv \underbrace{d}_{C_3} \wedge (\underbrace{a}_{C.4} \wedge \underbrace{b}_{C.5})$

Cláusulas ≠, porque para ser 1 tendrían que unirse con V.

Sol $\Pi = \{\neg a \vee b \vee c, \neg b \vee \neg a \vee c, d, a, b\}$

Pasarlo a FNC (forma clausular)

Ejemplo 2 $\Gamma = \{(a \vee \neg b) \rightarrow (\neg c \rightarrow b)\}$

$(a \vee \neg b) \rightarrow (\neg c \rightarrow b) \equiv \neg(a \vee \neg b) \vee (\neg c \rightarrow b) \equiv \neg(a \vee \neg b) \vee (\cancel{\neg\neg} c \vee b) \equiv$

(DISTRIBUTIVA)

$\equiv (\neg a \wedge \cancel{\neg\neg} b) \vee (c \vee b) \equiv (\neg a \vee c \vee b) \wedge (b \vee c \vee \cancel{b})$

necesitamos estos símbolos al revés, pq FNC. es disyunción de cláusulas.

(Tachamos 1 pq no pueden haber 2 iguales en el resultado.

$\boxed{\Gamma = \{\neg a \vee c \vee b,\ b \vee c\}}$

CONSECUENCIA LÓGICA $\models$

$\underbrace{\{\dots, \dots, \dots, \dots\}}_{\text{PREMISAS}} \models \underbrace{\dots}_{\text{CONCLUSIÓN}}$

$\models$ ← CONSECUENCIA LÓGICA

CONCLUSIÓN → FALSO $\equiv 0$ / CIERTO $\equiv 1$

$\Gamma \models \alpha$

(Si pregunta si un literal o cláusula es ⊕ o ⊖ o de Horn)

Diap. 24 (resumen 2 de 2).

MÉTODOS

1. Davis - Putnam 90% (de q caiga)
2. RESOLUCIÓN
3. INTERPRETACIONES

---

① DAVIS - PUTNAM (CONSECUENCIAS LÓGICAS)

OBJETIVO: Encontrar la cláusula vacía (□)

$\Gamma \models \alpha$

SOLUCIONES → $\{\emptyset\}$ CONJUNTO VACÍO → SATISFACIBLE

SOLUCIONES → □ CLÁUSULA VACÍA (es una contradicción, por ejemplo tener que a, $\neg a$) → INSATISFACIBLE

Comprobar 1º que → 1) Todas las fórmulas tienen que estar en la izq. (de $\models$)

$\Gamma \models \cancel{\alpha} \Rightarrow \Gamma \models \square \Rightarrow \Gamma$

y ↳ 2) Todo en FNC.

3) Aplicar algoritmo DAVIS-PUTNAM "3 pasos".

NOTA $\dfrac{a \quad \neg a}{\square}$ cláusula vacía → □

Si en algún momento encontramos □ durante el ejercicio, se acaba el ej. y es INSATISFACIBLE.

DAVIS - PUTNAM

PASO 1

"CLAUSULA UNIT" ⟹ (que solo tenga 1 literal) negado o no

$\{\neg q \vee p \vee r,\ \neg p \vee q,\ p,\ \neg r \vee q,\ \neg r\} \models \square$

$\lambda = p$ → Eliminar todas las cláusulas con p.
→ Eliminar su literal $\neg p$.

$\{q,\ \neg r \vee q,\ \neg r\}$ ($\models \square$) → NO HACE FALTA PONERLO

$\lambda = q$ → Eliminar cláusulas con q
→ Eliminar literales con $\neg q$.

$\{\neg r\}$

$\lambda = \neg r$ → Eliminamos cláusula con $\neg r$.

$\{\emptyset\}$ ⟹ SATISFACIBLE

Siempre verificar:
1. - Todo a la izq
2. - Forma clausular

Cuando NO se pueda PASO 1

PASO 2

"LITERAL PURO" ⟹ (que solo esté en un estado o solo normal, o solo negado ($\neg$))

$\{q \vee r,\ \neg r \vee q,\ \neg r \vee p\}$
- Paso 1: Busco cláusulas UNIT, como NO HAY, paso 2

$\lambda = q$ → Eliminar las cláusulas con q.

$\{\neg r \vee p\}$
- ¿PASO 1? NO
- Paso 2

$\lambda = \neg r$ → Eliminar cláusulas con $\neg r$.

$\{\emptyset\}$ ⟹ SATISFACIBLE

Cuando NO se pueda PASO 1 ni PASO 2

PASO 3

"DIVISIÓN DEL PROBLEMA"

Cuando el literal está en todas las fórmulas.
(Cogemos un literal cualquiera ej $\neg b$)

$\{\neg b \vee c \vee a,\ \neg a \vee \neg b \vee d,\ \neg b \vee \neg d \vee a,\ b \vee c \vee d,\ \neg c \vee \neg b,\ \neg d \vee \neg b\}$

dividimos en 2 conjuntos.

T_1: $\lambda = \neg b$

$\{c \vee d\}$

literal puro $\lambda = c$ ⟹ $\{\emptyset\}$ T_1 es SATISFACIBLE

T_2: $\lambda = b$

$\{c \vee a,\ \neg a \vee d,\ \neg d \vee a,\ \neg c,\ \neg d\}$

$\lambda = \neg c$

$\{a,\ \neg a \vee d,\ \neg d \vee a,\ \neg d\}$

$\lambda = a$

$\{d,\ \neg d\}$

$\square$ ⟹ T_2 INSATISFACIBLE

SOLUCIÓN DE Γ:
- Si T_1 ó T_2 $\emptyset$ ⟹ Γ SATISFACIBLE.
- Si T_1 y T_2 $\square$ ⟹ Γ INSATISFACIBLE

Ejercicios

DAVIS - PUTNAM

(8) Estudia si la siguiente afirmación es cierta o no.

$$\{(\neg a \vee \neg b), (a \vee b)\} \models (a \leftrightarrow \neg b)$$

M.2

$$\{(\neg a \vee \neg b), (a \vee b), \neg(a \leftrightarrow \neg b)\} \quad \circledast$$

$$\neg(a \leftrightarrow \neg b) \equiv \neg((a \rightarrow \neg b) \wedge (\neg b \rightarrow a)) \equiv \neg((\neg a \vee \neg b) \wedge (b \vee a)) \equiv \neg(\neg a \vee \neg b) \vee \neg(b \vee a) \equiv$$

$$\equiv (a \wedge b) \vee (\neg b \vee \neg a) \equiv \underbrace{(a \vee \neg b)}_{C_1} \wedge \underbrace{\cancel{(b \vee \neg b)}}_{\cancel{C_2} = 1} \wedge \underbrace{\cancel{(a \vee \neg a)}}_{\cancel{C_3} = 1} \wedge \underbrace{(b \vee \neg a)}_{C_4}$$

distributiva

$$\circledast \quad \{\underbrace{(\neg a \vee \neg b)}_{C_5}, \underbrace{(a \vee b)}_{C_6}, \underbrace{(a \vee \neg b)}_{C_1}, \underbrace{(b \vee \neg b)}_{\cancel{C_2}}, \underbrace{(a \vee \neg a)}_{\cancel{C_3}}, \underbrace{(b \vee \neg a)}_{C_4}\}$$

(9) Estudia si es tautología o no: $\{(\neg p \vee (\neg q \vee (\neg r \vee s))), (\neg p \vee q), p\} \models (r \rightarrow s)$

M.2

$$\{(\neg p \vee (\neg q \vee (\neg r \vee s))), (\neg p \vee q), p, \neg(r \rightarrow s)\}$$

cláusulas

$\neg(\neg r \vee s)$

$(\underbrace{r}_{c} \wedge \underbrace{\neg s}_{c})$

(podemos quitar ())

$$\{(\neg p \vee \neg q \vee \neg r \vee s), (\neg p \vee q), \overset{unit}{p}, r, \neg s\}$$

$$\lambda = p \Rightarrow \{\neg q \vee \neg r \vee s, \overset{unit}{q}, r, \neg s\}$$

$$\lambda = q \Rightarrow \{\neg r \vee s, \overset{unit}{r}, \neg s\}$$

$$\lambda = r \Rightarrow \{s, \neg s\}$$

$$\downarrow$$

$\square \Rightarrow$ SÍ, ES TAUTOLOGÍA.

(10) ¿ES INSATISFACIBLE? $\{\emptyset\} \models ((a \to c) \to ((\neg a \to b) \to (\neg b \to c)))$.

M1

$\{a \to c\} \models (\neg a \to b) \to (\neg b \to c)$

M1

$\{a \to c, \neg a \to b\} \models (\neg b \to c)$

M2

$\{a \to c, \neg a \to b, \neg(\neg b \to c)\} \models \square$

PASAMOS A FÓRMULAS CLAUSULADAS $\Longrightarrow$

$$\left\{\begin{array}{l} a \to c \equiv \underbrace{\neg a \vee c}_{C_1} \\ \neg a \to b \equiv \neg\neg a \vee b \equiv \underbrace{a \vee b}_{C_2} \\ \neg(\neg b \to c) \equiv \neg(b \vee c) \equiv \underbrace{\neg b}_{C_3} \wedge \underbrace{\neg c}_{C_4} \end{array}\right.$$

$\{\neg a \vee c, a \vee b, \overset{\text{unit}}{\neg b}, \neg c\}$

$\lambda = \neg b \Rightarrow \{\neg a \vee c, \overset{\text{unit}}{a}, \neg c\}$

$\lambda = a \Rightarrow \{c, \neg c\}$

$\square \Rightarrow$ SÍ, ES INSATISFACIBLE.

(11) ¿ES TAUTOLOGÍA? $\{\emptyset\} \models (\neg(a \to b) \to (\neg a \to \neg b))$

M2

$\{\neg[\neg(a \to b) \to (\neg a \to \neg b)]\} \models \square$

$\{\neg[\neg\neg(a \to b) \vee (\neg a \to \neg b)]\} \equiv \{\neg[(\neg a \vee b) \vee (a \vee \neg b)]\} \equiv \{\neg(\neg a \vee b) \wedge \neg(a \vee \neg b)\} \equiv$

$\equiv \{(\underbrace{a}_{C_1} \wedge \underbrace{\neg b}_{C_2}) \wedge (\underbrace{\neg a}_{C_3} \wedge \underbrace{b}_{C_4})\} \equiv \{a, \neg b, \neg a, b\}$

$\square \quad \square$

$\Downarrow$

INSATISFACIBLE

$\Downarrow$

SÍ, ES TAUTOLOGÍA.

TODO A LA IZQUIERDA

DAVIS- PUTNAM

(NO TIENE NOMBRE)

MÉTODO 1 (teorema de la deducción)

Intentar primero utilizar

$\{\alpha \vee \neg b\} \models \alpha \rightarrow b$

$\{\alpha \vee \neg b, \alpha\} \models b$

(Nos fijamos en el símbolo con ↓ prioridad)

TRUCO: solo utilizarlo si el → no está entre paréntesis.

ej. $\{a \vee b\} \models \cancel{(\alpha \rightarrow b) \wedge c}$

aquí NO usar

(NOS VAMOS AL MÉTODO 2)

De la dcha se puede eliminar $\boxed{\lambda \vee \lambda^c}$, $\boxed{\beta \vee \beta \equiv \beta}$

MÉTODO 2 (Teorema negación).

$\{\alpha \vee \neg b\} \models b$

¬ (pasarlo negado)

$\{\alpha \vee \neg b, \neg b\} \models \square$

ej. $\{a \vee b\} \models (\alpha \rightarrow b) \wedge c$

$\{\underbrace{a \vee b}_{\text{Cláusula}}, \underbrace{\neg[(\alpha \rightarrow b) \wedge c]}_{\text{hay que trasformarlo a cláusula.}}\} \models \square$

TIENE QUE QUEDAR EN FNC.

Ejemplo 3

1º) Mirar si está a la dcha o izq.

Está a la dcha. pq no hay { }.

$(\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow (\neg(\alpha \rightarrow \gamma) \rightarrow \neg(\alpha \rightarrow \beta))$

M.1: T. deduc. ⇕

a la izq.

$\emptyset \models (\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow (\neg(\alpha \rightarrow \gamma) \rightarrow \neg(\alpha \rightarrow \beta)) \iff \models (\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow (\neg(\alpha \rightarrow \gamma) \rightarrow \neg(\alpha \rightarrow \beta))$

2º) Aplicar M.1 o/y M.2 para pasar a la izq.

$\{\beta \rightarrow \gamma\} \models \neg(\alpha \rightarrow \gamma) \rightarrow \neg(\alpha \rightarrow \beta)$

izq. M.1

$\{\beta \rightarrow \gamma, \neg(\alpha \rightarrow \gamma)\} \models \neg(\alpha \rightarrow \beta)$ M.2

$\{\beta \rightarrow \gamma, \neg(\alpha \rightarrow \gamma), \cancel{\neg\neg}(\alpha \rightarrow \beta)\} \models \square$

debemos pasar las fórmulas a FNC. ⟹

$\beta \rightarrow \gamma \equiv \underbrace{\neg\beta \vee \gamma}_{C1}$

$\neg(\alpha \rightarrow \gamma) \equiv \neg(\neg\alpha \vee \gamma) \equiv (\underbrace{\alpha}_{C2} \wedge \underbrace{\neg\gamma}_{C3})$

$\alpha \rightarrow \beta \equiv \underbrace{\neg\alpha \vee \beta}_{C4}$

$\{\neg\beta \vee \gamma, \alpha, \neg\gamma, \neg\alpha \vee \beta\}$ ← (cláusula UNIT: α)

3º) Ya todo a la izq. Aplicar DAVIS-PUTNAM

$\lambda = \alpha$ ↗ Todas las cláusulas con α fuera
↘ Eliminar todos literales $\neg\alpha$.

$\{\neg\beta \vee \gamma, \neg\gamma, \beta\}$ (cláusula UNIT: $\neg\gamma$)

$\lambda = \neg\gamma$ ⟹

$\{\neg\beta, \beta\}$

$\square$ ⟹ Γ (conjunto original) es INSATISFACIBLE

(cláusula vacía)

DAVIS - PUTNAM

TIPOS DE PREGUNTAS

$\emptyset$
- SATISFACIBLE
- NO ES TAUTOLOGÍA
- NO ES CIERTO

$\square$ (todo lo positivo que nos puedan preguntar)
- INSATISFACIBLE
- TAUTOLOGÍA
- ES CIERTA

ojo: (que sea consecuencia lógica).

---

2 MÉTODO DE RESOLUCIÓN (CONSECUENCIAS LÓGICAS)

⇨ OBJETIVO: Encontrar la cláusula vacía ($\square$). $\dfrac{\begin{matrix} a \\ \neg a \end{matrix}}{\square}$

- SÍ ESTÁ ($\square$) ✓ (INSATISFACIBLE)
- NO ESTÁ ($\cancel{\square}$) (SATISFACIBLE)

⇨ IDEA: Crear resolventes hasta encontrar la $\square$. (podemos no encontrarla)

⇨ PASOS:

1| PASAR TODO A LA IZQUIERDA → M.1 (teorema de la DEDUCCIÓN) / → M.2 (teorema negación).

igual q en D.PUTNAM

2| Pasar todo a FNC.

3| Crear las resolventes (es poder coger 2 cláusulas, y unirlas) (hacer combinaciones hasta encontrar $\square$).

$$\dfrac{\begin{matrix} a \vee b \\ c \vee d \end{matrix}}{a \vee b \vee c \vee d} \qquad \dfrac{\begin{matrix} a \vee \cancel{b} \\ a \vee \cancel{\neg b} \end{matrix}}{a} \qquad \dfrac{\begin{matrix} a \vee \cancel{b} \\ c \vee \cancel{\neg b} \end{matrix}}{a \vee c}$$

Resolvente 1 — Resolvente 2 — Resolvente 3

sería como: $(a \vee b) \vee (c \vee \neg b)$ creo

CUIDADO!!

$$\cancel{\dfrac{\begin{matrix} a \vee b \\ \neg a \vee \neg b \end{matrix}}{\square}} \qquad \cancel{\dfrac{\begin{matrix} a \vee b \\ \neg a \vee \neg b \end{matrix}}{b \vee \neg b}}$$

¡¡PROHIBIDO!!

√ SÍ Hacer resolventes donde solo se puede eliminar un literal.

X NO RESOLVENTES donde puedas eliminar más de 1 literal.

Método de resolución

Ejemplo 4

$$\{(a \to b) \lor (c \to d),\ \neg a \to a,\ \neg c \to c\} \models b \lor d$$

$$\{(a \to b) \lor (c \to d),\ \neg a \to a,\ \neg c \to c,\ \neg(b \lor d)\}$$ 1º) Pasar a izquierda.

2º) Pasar a FNC $\Longrightarrow$

$(a \to b) \lor (c \to d) \equiv \underbrace{(\neg a \lor b) \lor (\neg c \lor d)}_{C_1}$

$\neg a \to a \equiv \underbrace{a \lor a}_{C_2} = a$ // $\neg c \to c \equiv \underbrace{c \lor c}_{C_3} = c$

$\neg(b \lor d) \equiv \underbrace{\neg b}_{C_4} \land \underbrace{\neg d}_{C_5}$

$$\{\underbrace{\neg a \lor b \lor \neg c \lor d}_{C_1},\ \underbrace{a}_{C_2},\ \underbrace{c}_{C_3},\ \underbrace{\neg b}_{C_4},\ \underbrace{\neg d}_{C_5}\}$$

Busco la contraria

3º) Crear los resolventes

$\neg a \lor b \lor \neg c \lor d$ — a $(C_1 - C_2)$

Cláusula/resolvente 6

$b \lor \neg c \lor d$ — $\neg b$ $(R_6 - C_4)$

$\neg c \lor d$ — c $(R_7 - C_3)$:

d — $\neg d$ $(R_8 - C_5)$

$\square \Rightarrow$ INSATISFACIBLE

Ejemplo 5

$\{\underbrace{\neg a \vee \neg b \vee c}_{C_1}, \underbrace{\neg c \vee a \vee d}_{C_2}, \underbrace{b}_{C_3}, \underbrace{\neg a}_{C_4}, \underbrace{\neg c}_{C_5}\}$

seguimos con el resto.

BUSCO LA CONTRARIA

$\neg a \vee \neg b \vee c \qquad \neg c \vee a \vee d$

pero también coinciden

¡PROHIBIDO!

De aquí no saldrá la $\square$

$\neg c \vee a \vee d \;,\; b \;,\; \neg a \;,\; \neg c$

tampoco podemos, NO hay C

Nos queda sólo b, $\neg a$, $\neg c$ por lo que tampoco podemos reducir con eso a $\square$.

$\Rightarrow$ SATISFACIBLE

↳ También podemos llegar a la conclusión si vemos que para $\neg c \vee a \vee d$ NO TENEMOS $\neg d$, por lo que sería SATISFACIBLE.

Ejer 9

Podríamos hacer con este método uno de los que hicimos con Davis-Putnam:

Estudiar si es tautología: $\{(\neg p \vee (\neg q \vee (\neg r \vee s))), (\neg p \vee q), p\} \models (r \rightarrow s)$

lo pasé a FNC y queda: $\{\underbrace{\neg p \vee \neg q \vee \neg r \vee s}_{C_1}, \underbrace{(\neg p \vee q)}_{C_2}, \underbrace{p}_{C_3}, \underbrace{r}_{C_4}, \underbrace{\neg s}_{C_5}\}$.

$\neg p \vee \neg q \vee \neg r \vee s \qquad p$

$\neg q \vee \neg r \vee s \qquad r$

$\neg q \vee s \qquad \neg s$

$\neg q \qquad \neg p \vee q$

$\neg p \qquad p$

$\square \quad \Rightarrow$ INSATISFACIBLE, SÍ ES TAUTOLOGÍA.

③ MÉTODO DE INTERPRETACIONES

"Dado un conjunto de proposiciones $T \models \alpha$, decimos que α es consecuencia lógica de T si "α" es cierta bajo cualquier interpretación que haga ciertas simultáneamente todas las proposiciones de T."

$$\underbrace{T}_{\text{premisas}} \models \underbrace{\alpha}_{\text{conclusión}}$$

$$\{\gamma_1, \gamma_2 \dots \gamma_n\} \models \alpha$$

$$\left.\begin{array}{l} I(\gamma_1) = 1 \\ I(\gamma_2) = 1 \\ \dots \\ I(\gamma_3) = 1 \end{array}\right\} \ ¿I(\alpha) = 1?$$

Suponemos que son ciertas, entonces ¿también lo será para?

PASO 1 "OPERADORES"

(TABLAS DE VERDAD)

$\mathbb{Z}_2$

a	¬a
0	1
1	0

cuando los literales sean (=)

a	b	a ∨ b (+)	a ∧ b (·)	a ↔ b	a → b
0	0	0	0	1	1
0	1	1	0	0	1
$\boxed{1}$	$\boxed{0}$	1	0	0	$\boxed{0}$
1	1	1	1	1	1

solo en este caso

PASO 2 "FÓRMULAS"

$I(\neg a) = 1 + I(a)$

$I(a \vee b) = I(a) + I(b) + I(a) \cdot I(b)$

$I(a \wedge b) = I(a) \cdot I(b)$

$I(a \to b) = 1 + I(a) + I(a) \cdot I(b)$

$I(a \leftrightarrow b) = 1 + I(a) + I(b)$

POLINOMIO GEGALKINE:

(es igual, solo quitamos la I de interpretación)

$\neg a = 1 + a$

$a \vee b = a + b + a \cdot b$

$a \wedge b = a \cdot b$

$a \to b = 1 + a + a \cdot b$

$a \leftrightarrow b = 1 + a + b$

Ejemplo 6 $\{p \vee q \to r, \neg r\} \models \neg q$

$\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$

EN INTERPRETACIONES

Suponemos:

① $I(p \vee q \to r) = 1$

② $I(\neg r) = 1$

comprobamos: ¿$I(\neg q) = 1$?

2. $I(\neg r) = 1 + I(r) = 1$

$\cancel{1} + I(r) = \cancel{1} \Rightarrow \boxed{I(r) = 0}$

se va, pq $\mathbb{Z}_2$

1. $I(p \vee q \to r) = 1$

$\cancel{1} + I(p \vee q) + I(p \vee q) \cdot I(r) = \cancel{1}_0$

$I(p \vee q) = 0$

↳ mirando en la tabla de verdad

Sabemos que $I(p \vee q) = 0$ vale 0 solo en un caso:

$I(p) = 0$ $\boxed{I(q) = 0}$

$\Rightarrow I(\neg q) = 1$, por lo tanto ES CIERTA la consecuencia lógica.

CONCEPTOS

Interpretaciones

Universalmente válida ‖

TAUTOLOGÍA

$I(\alpha) = 1$

A	B	α
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	1

CONTRADICCIÓN

$I(\alpha) = 0$

A	B	α
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	0

SATISFACIBLE Y REFUTABLE

$I(\alpha) = \nearrow 1, \searrow 0$

A	B	α
0	0	1
0	1	0
1	0	1
1	1	0

• ¿Qué es α = ... → (suele tener muchos → ρ, 0)

Si te dicen estudia cómo es, tienes que averiguar si es:
- tautología
- contradicción
- Satis / refut.

$\emptyset \models \alpha$ → Teorema deducción / Teorema negación

Podemos resolver con DAVIS-PUTNAM

significa que hay algún 0

$\emptyset$ REFUTABLE ⇒ (hay alguna valoración $I(\alpha) = 0$)

$\square$ TAUTOLOGÍA ≃ VÁLIDA ⇓ ($\forall$ estructura $I(\alpha) = 1$)

pensamos que ya la tenemos a la izq.

$\{\alpha\} \models \square$

FNC

$\emptyset$ SATISFACIBLE ⇓ (hay alguna $I(\alpha) = 1$)

$\square$ CONTRADICCIÓN ⇓ ($\forall$ estructura $I(\alpha) = 0$)

(TODOS LOS PROFESORES)

Traducción 1

Ana: "Ayer no llovió" (MIRANDA) Junio 2017 (ej. 4)

Bruno: "Ayer llovió"

Carmen: "Si ayer llovió, yo soy una mentirosa"

(Nosotros ponemos letras por ejemplo:

$a \equiv$ "Ana dice la verdad"

$b \equiv$ "Bruno dice la verdad"

$c \equiv$ "Carmen dice la verdad"

$L \equiv$ "llovió"

para cuando alguien afirma algo.

Si c es Carmen dice la verdad, $\neg c$ es que miente.

$$\{\underbrace{a \leftrightarrow \neg L}_{\text{si Ana dice la verdad, ayer no llovió}},\ b \leftrightarrow L,\ c \leftrightarrow (L \rightarrow \neg c)\}$$

Se puede resolver por ejemplo por Davis-Putnam

1. FNC
2. Davis-Putnam $\Longrightarrow$ elegimos nosotros los λ $\Longrightarrow$ por ejemplo $\lambda = \ldots$

$\lambda = a \rightarrow a = 1$ (significaría que dice la verdad)

$\lambda = \neg b \rightarrow b = 0$ (significaría que está mintiendo)

1. FNC

$a \leftrightarrow \neg L$

$(a \rightarrow \neg L) \wedge (\neg L \rightarrow a)$

$\underbrace{(\neg a \vee \neg L)}_{C_1} \wedge \underbrace{(L \vee a)}_{C_2}$

$b \leftrightarrow L$

$(a \rightarrow L) \wedge (L \rightarrow a)$

$\underbrace{(\neg a \vee L)}_{C_3} \wedge \underbrace{(\neg L \vee a)}_{C_4}$

$c \leftrightarrow (L \rightarrow \neg c)$

$c \leftrightarrow (\neg L \vee \neg c)$

$(c \rightarrow (\neg L \vee \neg c)) \wedge ((\neg L \vee \neg c) \rightarrow c)$

$(\neg c \vee \neg L \vee \neg c) \wedge ((L \wedge c) \vee c)$

$\underbrace{(\neg c \vee \neg L)}_{C_5} \wedge (\underbrace{(L \vee c)}_{C_6} \wedge \underbrace{(c \vee c)}_{\equiv\, c \;=\; C_7})$

¿Son lo mismo? pero negado

$$\{\neg a \vee \neg L,\ L \vee a,\ \neg a \vee L,\ \neg L \vee a,\ \neg c \vee \neg L,\ L \vee c,\ c\}$$

¿Son lo mismo? pero negado

Pq entonces serían $\square \Rightarrow$ INSATISFACIBLE $\Rightarrow$ TAUTOLOGÍA

Traducción 2

(SOLO SALAS)

(si exige que lo hagamos con pols. de Gegalkine)

A: "Las ranas vuelan" $\equiv r$

B: "Las ranas no vuelan y A es mendaz"

C: "Las ranas vuelan, si y solo sí, yo soy mendaz"

mentiroso

Supongamos que:

$a \equiv$ verdad

$\neg a \equiv$ falso (mendaz)

TRADUCIMOS:

Gegalkine: (quitamos operadores)

$a = \boxed{r}$

Interpretaciones

distributiva

$(1\cdot 1)\ (1\cdot a)\ (r\cdot 1)\ (r\cdot a)$

$b = \neg r \wedge \neg a = \neg r \cdot \neg a = (1+r)\cdot(1+a) = \boxed{1+a+r+ar}$

intentar sacar todas conclusiones que podamos

$c = r \leftrightarrow \neg c = 1 + r + \neg c = \boxed{\cancel{1} + r + \cancel{1} + c} = r + c$

$\Rightarrow 1+1=0$

Me preguntan si las ranas vuelan y si los nativos están diciendo la verdad o no, y qué podemos decir de ellos.

$c = r + \cancel{c} \rightsquigarrow \boxed{r=0}$ LAS RANAS NO VUELAN

$a = r \rightsquigarrow \boxed{a=0}$ A es mendaz.

$b = 1 + \cancel{a} + \cancel{r} + \cancel{ar} \rightsquigarrow \boxed{b=1}$ B dice la verdad.

0 0 0

C → 0, 1

(que ha desaparecido) puede valer tanto 0 como 1.

Traducción 3

Solo cambiamos esto, con respecto al anterior

A: "Las ranas vuelan, sí y solo sí, yo soy veraz"

B: "Las ranas no vuelan" $= \neg r$

C: "Las ranas vuelan y A es veraz."

Supongamos que:

$a \equiv$ veraz (verdad)

$\neg a \equiv$ falso (mendaz)

gegalkine:

Traducimos:

$a = r \leftrightarrow a = 1+r+a \Rightarrow \cancel{a} = 1 + r + \cancel{a}$; $1+r=0$; $\boxed{r=1}$

$b = \neg r = 1 + r \Rightarrow b = 1 + r$; $b = 1+1$; $\boxed{b=0}$

$c = r \wedge a = r \cdot a \Rightarrow c = \cancel{r}\cdot a$; $\boxed{c = a}$

1

ó los 2 dicen la verdad: 1

ó los 2 mienten: 0

EXAMEN

Ejercicios:

Estudia si el siguiente conjunto de cláusulas es o no insatisf. y en caso de ser satis., da una interpretación que lo demuestre.

$\Sigma = \{\neg a \vee c \vee d,\ \neg b \vee c,\ a \vee \neg c \vee d,\ a \vee d \vee e,\ \neg a \vee \neg b,\ \neg a \vee b \vee \neg d,\ a \vee b \vee \neg d\}$.

Utilizo algoritmo $\boxed{\text{Davis-Putnam}}$:

$\lambda = e$ (LITERAL PURO)

$\{\neg a \vee c \vee d,\ \neg b \vee c,\ a \vee \neg c \vee d,\ \neg a \vee \neg b,\ \neg a \vee b \vee \neg d,\ a \vee b \vee \neg d\}$

$\lambda = \neg a$

$\{\neg b \vee c,\ \neg c \vee d,\ b \vee \neg d\}$

$\lambda = \neg b$

$\{\neg c \vee d,\ \neg d\}$

$\lambda = \neg d$

$\{\neg c\} \Longrightarrow \{\emptyset\} \Rightarrow$ ES SATISFACIBLE

$\lambda = \neg c$

Para encontrar una interpretación que haga ciertas todas las cláusulas basta con recorrer esa rama, y buscar la interpretación que haga ciertas todos los literales que hemos ido utilizando en el desarrollo del algoritmo. Sería:

$I(a) = 0;\quad I(b) = 0;\quad I(c) = 0;\quad I(d) = 0;\quad I(e) = 1$

MIRANDA: (MIRANDA) Ej. similar Marzo 2014 (ej. 4)

4 Utilizar Davis-Putnam para determinar si el conjunto de cláusulas es satisf. o insatisfacible.

$\Sigma = \{d \vee a \vee \neg e,\ \neg d \vee a,\ d \vee \neg c \vee a \vee e,\ \neg d \vee b \vee a,\ d \vee \neg a \vee e,\ d \vee \neg a \vee \neg e,\ b \vee c \vee a,\ \neg d\}$

$\lambda = \neg d$

$\{a \vee \neg e,\ \neg c \vee a \vee e,\ \neg a \vee e,\ \neg a \vee \neg e,\ b \vee c \vee a\}$.

$\lambda = b$

$\{a \vee \neg e,\ \neg c \vee a \vee e,\ \neg a \vee e,\ \neg a \vee \neg e\}$

$\lambda = \neg c$

$\{a \vee \neg e,\ \neg a \vee e,\ \neg a \vee \neg e\}$

$\lambda = a$: $\{e, \neg e\}$, $\lambda = e$: $\{\square\}$

$\lambda = \neg a$: $\{\neg e\}$, $\lambda = \neg e$: $\emptyset$

copiar igual texto

$I(a) = 0,\quad I(b) = 1;\quad I(c) = 0$

$I(d) = 0;\quad I(e) = 0.$

EXAMEN:

Ejercicios:

Dadas las fórmulas:

1) $\alpha_1 = c \to a \vee b$.
2) $\alpha_2 = a \wedge b \to (c \leftrightarrow e)$
3) $\alpha_3 = ((d \to c) \to d) \to (a \to b)$
4) $\alpha_4 = (\neg a \wedge \neg b \to c) \wedge (a \wedge b \wedge \neg d \to c)$.
5) $\beta = (b \to a) \to a \wedge b \wedge c \wedge e$.

¿Es β consecuencia lógica de $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$? En caso de ser cierto, da una interpretación que lo demuestre.

Estudiar si $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\} \models \beta$. Es decir demostrar que $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \neg\beta\} \models \square$ es insatisfacible.

$\alpha_1 = c \to a \vee b$

$\underbrace{\neg c \vee a \vee b}_{\text{CLAUS}}$

$\alpha_2 = \neg(a \wedge b) \vee (c \leftrightarrow e) \equiv (\neg a \vee \neg b) \vee (c \to e) \wedge (e \to c)$

$\equiv (\neg a \vee \neg b) \vee ((\neg c \vee e) \wedge (\neg e \vee c))$

$\alpha_3 = ((d \to c) \to d) \to (a \to b)$

$\neg((d \to c) \to d) \vee (a \to b)$

$\neg(\neg(d \to c) \vee d) \vee (\neg a \vee b)$

$(\cancel{\neg\neg}(d \to c) \wedge \neg d) \vee (\neg a \vee b)$

$((\neg d \vee c) \wedge \neg d) \vee (\neg a \vee b)$

$(\neg d \wedge \neg d) \vee (c \wedge \neg d) \vee (\neg a \vee b)$

$\beta = (b \to a) \to a \wedge b \wedge c \wedge e$

$\equiv \neg(\neg b \vee a) \vee (a \wedge b \wedge c \wedge e)$

$\equiv (b \wedge \neg a) \vee (a \wedge b \wedge c \wedge e)$.

$\wedge$ (NO SE CONSIDERA CLÁUSULA).

$\equiv \underbrace{(b \vee a)}_{\text{CLAUS.}} \wedge \underbrace{(b \vee \cancel{b})}_{\underbrace{b}_{\text{CLAUS}}} \wedge \underbrace{(b \vee c)}_{\text{CLAUS.}} \wedge \underbrace{(b \wedge e)}_{\text{CLAUS.}} \wedge \cancel{(\neg a \vee a)} \wedge \underbrace{(\neg a \vee b)}_{\text{CLAUS.}} \wedge \underbrace{(\neg a \vee c)}_{\text{CLAUS}} \wedge \underbrace{(\neg a \vee e)}_{\text{CLAUS.}}$

$\alpha_4 = ((\neg a \wedge \neg b) \to c) \wedge ((a \wedge b \wedge \neg d) \to c)$

$\equiv (\cancel{\neg\neg} a \vee \cancel{\neg\neg} b \vee c) \wedge ((\neg a \vee \neg b \vee \neg d) \vee c)$

$\equiv \underbrace{a \vee b \vee c}_{\text{CLAUS}} \wedge \underbrace{\neg a \vee \neg b \vee c \vee \neg d}_{\text{CLAUS.}}$

Resolvemos por D Putnam.

O Resolución.

ELENA ORTEGA CONTRERAS (entrega)

Relación de ejercicios y problemas.
Lógica proposicional

Pasos, observar procedimiento: 1º) Cláusula unit; 2º) Literal puro; 3º) División del problema.

Ejercicio 9. ¿ Cuáles de las siguientes afirmaciones son ciertas?.

a) Por el algoritmo de Davis-Putnam sabemos que {a V b V ¬c, ¬a V c, b V c, a V c} es satisfacible si, y sólo si, lo es {¬a V c,a V c}.

1º) No

2º) Literal puro : $\lambda = b \Rightarrow \Sigma_b = \{\neg a \vee c, a \vee c\}$.

CIERTO

Satisfacible si, y sólo si, lo es Σ_b.

b) Por el algoritmo de Davis-Putnam sabemos que {a V ¬b V ¬c V d, ¬a V ¬c V d, b V ¬d, b V c V d, a V ¬d} es satisfacible si, y sólo si, los conjuntos {b, a} y {a V ¬b V ¬c, ¬a V ¬c, b V c} son satisfacibles.

1º) No unit

2º) No literal puro

FALSO

3º) $\lambda = \neg d$ $\begin{cases} \lambda = \neg d \Rightarrow \Sigma_{\neg d} = \{a \vee \neg b \vee \neg c, \neg a \vee \neg c, b \vee c\} \\ \lambda = d \Rightarrow \Sigma_d = \{b, a\} \end{cases}$ Satisfacible si un cojunto u otro lo es.

Es satisfacible si $\Sigma_{\neg d}$ es satisfacible o lo es Σ_d.

c) Por el algoritmo de Davis-Putnam sabemos que {¬aVcV¬d, ¬aVbV¬c, ¬bVd, aVbV d, ¬bVc} es insatisfacible si, y sólo si, los conjuntos {cV¬d, bV¬c, ¬bVd, ¬bVc} y {¬b V d, b V d, ¬b V c} lo son.

1º) NO

2º) NO

CIERTO

3º) $\lambda = a$ $\begin{cases} \lambda = a \Rightarrow \Sigma_a = \{c \vee \neg d, b \vee \neg c, \neg b \vee d, \neg b \vee c\} \\ \lambda = \neg a \Rightarrow \Sigma_{\neg a} = \{\neg b \vee d, b \vee d, \neg b \vee c\} \end{cases}$

Insatisfacible si lo son Σ_a y $\Sigma_{\neg a}$.

d) Por el algoritmo de Davis-Putnam sabemos que {a V b V c, ¬a V b V c, ¬b V ¬c, ¬b} es insatisfacible si, y sólo si, lo es {a V c, ¬a V c, ¬c}.

1º) Cláusula unit : $\lambda = \neg b \Rightarrow \Sigma_{\neg b} = \{a \vee c, \neg a \vee c\}$

FALSO

Insatisfacible si y sólo si, lo es $\Sigma_{\neg b}$.

ELENA ORTEGA CONTRERAS

Ejercicio 14. ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son ciertas?.

a) Por el algoritmo de Davis-Putnam sabemos que {a ∨ b ∨ ¬c, ¬a ∨ c, ¬b ∨ c, a ∨ c} es satisfacible si, y sólo si, lo es {¬a ∨ c,a ∨ c}.

FALSO

1º) No
2º) No
3º) $\lambda = b$
$$\lambda = b \Rightarrow \Sigma_b = \{\neg a \vee c,\ c,\ a \vee c\}$$
$$\lambda = \neg b \Rightarrow \Sigma_{\neg b} = \{a \vee \neg c,\ \neg a \vee c,\ a \vee c\}$$

Es satisfacible si lo es Σ_b o $\Sigma_{\neg b}$.

* duda sobre este ejercicio planteada en forma de comentario junto con la entrega.

b) Por el algoritmo de Davis-Putnam sabemos que {a ∨ ¬b ∨ ¬c ∨ d, ¬a ∨ ¬c ∨ d, b ∨ ¬d, b ∨ c ∨ d, a ∨ ¬d} es satisfacible si, y sólo si, los conjuntos {b, a} y {a ∨ ¬b ∨ ¬c, ¬a ∨ ¬c, b ∨ c} son satisfacibles.

FALSA

1º) No
2º) No
3º) $\lambda = d$
$$\lambda = d \Rightarrow \Sigma_d = \{b, a\}$$
$$\lambda = \neg d \Rightarrow \Sigma_{\neg d} = \{a \vee \neg b \vee \neg c,\ \neg a \vee \neg c,\ b \vee c\}$$

Es satisfacible si Σ_d es satisfacible o lo es $\Sigma_{\neg d}$.

c) Por el algoritmo de Davis-Putnam sabemos que {¬a ∨ c ∨ ¬d, ¬a ∨ b ∨ ¬c, ¬b ∨ d, a ∨ b ∨ d, } es insatisfacible si, y sólo si, los conjuntos {c ∨ ¬d, b ∨ ¬c, ¬b ∨ d} y {¬b ∨ d, b ∨ d, ¬b ∨ c} lo son.

FALSA

1º) No
2º) No
3º) $\lambda = a$
$$\lambda = a \Rightarrow \Sigma_a = \{c \vee \neg d,\ b \vee \neg c,\ \neg b \vee d\}$$
$$\lambda = \neg a \Rightarrow \Sigma_{\neg a} = \{\neg b \vee d,\ b \vee d\}$$

Insatisfacible si Σ_a y $\Sigma_{\neg a}$ lo son.

d) Por el algoritmo de Davis-Putnam sabemos que {a ∨ b ∨ c, ¬a ∨ b ∨ c, ¬b ∨ ¬c, ¬b} es insatisfacible si, y sólo si, lo es {a ∨ c, ¬a ∨ c }.

1º) Cláusula unit $\lambda = \neg b$:

CIERTO

$$\lambda = \neg b \Rightarrow \Sigma_{\neg b} = \{a \vee c,\ \neg a \vee c\}$$

Es insatisfacible si, y sólo si, lo es $\Sigma_{\neg b}$