

# Segunda Entrega Lógica Proposicional

Alberto Llamas González



*Lógica y Métodos Discretos  
1º Grado Ingeniería Informática*



4.14 Utiliza el algoritmo de Davis-Putnam y resolución para determinar si son o no tautologías las fórmulas del ejercicio 4.12

$$1. (\beta \rightarrow \alpha \vee \gamma) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow ((\gamma \rightarrow \beta) \rightarrow \gamma))) = \varphi$$

\* Se han cogido las fórmulas del ejercicio 12, realizando en la anterior entrega.

Hallamos la forma clausulada de las fórmulas

$$\begin{array}{c|c|c|c|c} \beta \rightarrow \alpha \vee \gamma & \alpha \rightarrow \beta & \alpha & \gamma \rightarrow \beta & \gamma \\ \hline \neg \beta \vee \alpha \vee \gamma & \neg \alpha \vee \beta & \alpha & \neg \gamma \vee \beta & \neg \gamma \end{array}$$

$\varphi$  es tautología  $\Leftrightarrow h_{\{\neg \beta \vee \alpha \vee \gamma, \neg \alpha \vee \beta, \alpha, \neg \gamma \vee \beta, \neg \gamma\}} = \Sigma$   
es insatisfacible.

Usamos el algoritmo de Davis-Putnam

$$h_{\{\neg \beta \vee \alpha \vee \gamma, \neg \alpha \vee \beta, \alpha, \neg \gamma \vee \beta, \neg \gamma\}} \\ | \quad \alpha = 1$$

$$h_{\{\beta, \neg \gamma \vee \beta, \neg \gamma\}}$$

$$\left. \begin{array}{l} \\ \gamma = 0 \end{array} \right\}$$

$$h_{\{\beta\}}$$

$$\left. \begin{array}{l} \\ \beta = 1 \end{array} \right\}$$

$$\emptyset(h_{\{\}}) \Rightarrow \Sigma \text{ es satisfacible} \Rightarrow \varphi \text{ no es tautología}$$

Un mundo para el que  $\varphi$  es cierto es  $(\alpha, \beta, \gamma) = (1, 1, 1) \Rightarrow$   
 $\underline{(\alpha, \beta, \gamma) = (1, 1, 0)}$

$$2. (\beta \rightarrow \gamma\alpha) \rightarrow ((\gamma\alpha \rightarrow \gamma(\alpha \rightarrow \beta)) \rightarrow \alpha) = \varphi$$

Hallaremos la fórmula clausulada de las fórmulas

$$\{ \beta \rightarrow \gamma\alpha, \gamma\alpha \rightarrow \gamma(\alpha \rightarrow \beta), \gamma\alpha \}$$

$\beta \rightarrow \gamma\alpha$	$\gamma\alpha \rightarrow \gamma(\alpha \rightarrow \beta)$	$\gamma\alpha$
$\gamma\beta \vee \gamma\alpha$	$\gamma\gamma\alpha \vee \gamma(\alpha \vee \beta)$	$\gamma\alpha$
	$\alpha \vee (\alpha \wedge \gamma\beta)$	
	$(\alpha \vee \alpha) \wedge (\alpha \wedge \gamma\beta)$	
	$\alpha \wedge (\alpha \vee \gamma\beta)$	

$\varphi$  es tautología  $\Rightarrow \{ \gamma\beta \vee \gamma\alpha, \alpha, \alpha \vee \gamma\beta, \gamma\alpha \} = \Sigma$  es insatisfacible

$$\{ \gamma\beta \vee \gamma\alpha, \alpha, \alpha \vee \gamma\beta, \gamma\alpha \}$$

$$\left| \begin{array}{l} \text{caso } \beta=0 \\ \text{caso } \beta \neq 0 \end{array} \right.$$

$$\{ \alpha, \gamma\alpha \}$$

$$\{ \} \Rightarrow \text{clausula vacía} \Rightarrow \Sigma \text{ es insatisfacible} \Rightarrow \varphi \text{ es tautología}$$

$$3. (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow ((\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma)) = 4$$

$\vdash \alpha \rightarrow \beta, \beta \rightarrow \gamma \vdash \alpha \rightarrow \gamma$  admit } hallamos la forma clausulada de las fórmulas.

$$\begin{array}{c|c|c|c} \alpha \rightarrow \beta & \beta \rightarrow \gamma & \text{admit} & \alpha \\ \neg \alpha \vee \beta & \neg \beta \vee \gamma & \alpha & \neg \gamma \end{array}$$

$\varphi$  es tautología  $\Leftrightarrow \Sigma = \vdash \neg \alpha \vee \beta, \neg \beta \vee \gamma, \alpha, \neg \gamma \}$  es insatisfacible

$$\vdash \neg \alpha \vee \beta, \neg \beta \vee \gamma, \alpha, \neg \gamma \}$$

$$|\alpha = 1$$

$$\vdash \beta, \neg \beta \vee \gamma, \neg \gamma \}$$

$$|\neg \gamma = 0$$

$$\vdash \beta, \neg \beta \}$$

$$\vdash \square \gamma \Rightarrow \Sigma \text{ es insatisfacible} \Rightarrow \varphi \text{ es tautología}$$

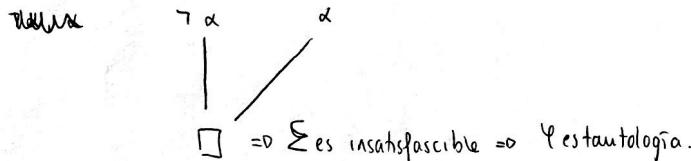
$$4. ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha = \Psi$$

$\vdash ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \alpha), \neg \alpha \vdash$ . Hallamos la fórmula clausulada de las fórmulas

$$\begin{array}{l}
 (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \alpha \\
 \neg(\neg \alpha \vee \beta) \stackrel{\text{V}}{\rightarrow} \alpha \\
 (\neg \neg \alpha \wedge \neg \beta) \vee \alpha \\
 (\alpha \wedge \neg \beta) \vee \alpha \\
 (\alpha \vee \alpha) \wedge (\alpha \neg \beta \vee \alpha) \\
 \alpha \wedge (\neg \beta \vee \alpha)
 \end{array}
 \quad \left| \begin{array}{l} \neg \alpha \\ \neg \alpha \end{array} \right. \quad \Rightarrow \Psi \text{ es tautología} \Leftrightarrow \\
 \Sigma = \vdash \alpha, \neg \beta \vee \alpha, \neg \alpha \} \text{ es insatisfacible}$$

Mostramos el método de resolución

Como podemos observar,  $\Sigma$  es un conjunto de Horn, ya que tiene una cláusula negativa ( $\neg \alpha$ ) y  $\alpha$  y  $\alpha \vee \neg \beta$  tienen solo un literal positivo.  $\Sigma$  es insatisfacible  $\Leftrightarrow \exists$  una deducción lineal -input de la cláusula vacía que se inicia en la cláusula negativa.



Por Davis-Putnam

$$\begin{array}{l}
 \vdash \alpha, \neg \beta \vee \alpha, \neg \alpha \\
 | \quad \beta = 0 \\
 \vdash \alpha, \neg \alpha \\
 | \quad \alpha = 1 \\
 \vdash \square \Rightarrow \Sigma \text{ es insatisfacible} \Rightarrow \Psi \text{ es tautología}
 \end{array}$$

$$5. (\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow (\neg(\alpha \rightarrow \gamma) \rightarrow \neg(\alpha \rightarrow \beta)) = \Psi$$

$$\{ \beta \rightarrow \gamma, \neg(\alpha \rightarrow \gamma), \alpha \rightarrow \beta \}$$

Hallamos la forma clausulada de las fórmulas

$$\begin{array}{c} \beta \rightarrow \gamma \\ \neg \beta \vee \gamma \end{array} \quad \left| \begin{array}{c} \neg(\alpha \rightarrow \gamma) \\ \neg(\neg \alpha \vee \gamma) \\ \neg \neg \alpha \wedge \neg \gamma \\ \alpha \wedge \neg \gamma \end{array} \right| \quad \left| \begin{array}{c} \alpha \rightarrow \beta \\ \neg \alpha \vee \beta \end{array} \right| \quad \Rightarrow \Psi \text{ es tautología} \Leftrightarrow \Sigma = \{ \neg \beta \vee \gamma, \alpha \wedge \neg \gamma, \neg \alpha \vee \beta \} \text{ es insatisfacible}$$

Mostramos el algoritmo de Davis-Putnam

$$\{ \neg \beta \vee \gamma, \alpha \wedge \neg \gamma, \neg \alpha \vee \beta \}$$

$$| \alpha = 1$$

$$\{ \neg \beta \vee \gamma, \neg \gamma, \beta \}$$

$$| \gamma = 0$$

$$\{ \neg \beta, \beta \}$$

$$| \beta = 1$$

$$\{ \square \} \Rightarrow \Sigma \text{ es insatisfacible} \Rightarrow \Psi \text{ es tautología}$$

Por resolución:

$$\begin{array}{c} \{ \neg \beta \vee \gamma, \alpha \wedge \neg \gamma, \neg \alpha \vee \beta \} \\ \hline \neg \beta \vee \gamma \end{array}$$

$$\begin{array}{c} | \\ \neg \beta \end{array} \quad \begin{array}{c} | \\ \neg \alpha \vee \beta \end{array}$$

$$\begin{array}{c} | \\ \neg \alpha \end{array}$$

$$\{ \square \} \Rightarrow \Sigma \text{ es insatisfacible} \Rightarrow \Psi \text{ es tautología}$$

$$6. ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \gamma) \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma) = \Phi$$

$$\vdash ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \gamma, \beta, \gamma)$$

Hallamos la forma clausulada de las fórmulas

$$\begin{array}{c}
 (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \gamma \\
 \neg(\neg \alpha \vee \beta) \vee \gamma \\
 (\neg \neg \alpha \wedge \neg \beta) \vee \gamma \\
 (\alpha \wedge \neg \beta) \vee \gamma \\
 (\alpha \vee \gamma) \wedge (\alpha \vee \neg \beta)
 \end{array}
 \quad \left| \begin{array}{c} \beta \\ \beta \end{array} \right| \quad \left| \begin{array}{c} \gamma \\ \gamma \end{array} \right| \quad \left| \begin{array}{c} \neg \alpha \\ \neg \alpha \end{array} \right| \quad \left| \begin{array}{c} \neg \beta \\ \neg \beta \end{array} \right| \quad \left| \begin{array}{c} \neg \neg \alpha \\ \neg \neg \alpha \end{array} \right|$$

$\Psi$  es tautología  $\Leftrightarrow \vdash \{\alpha \vee \gamma, \alpha \vee \neg \beta, \beta, \gamma\}$  es satisfacible.

Por Davis-Putnam

$$\vdash \alpha \vee \gamma, \alpha \vee \neg \beta, \beta, \gamma$$

$$\vdash \neg \alpha, \neg \beta, \beta, \gamma$$

$$\vdash \neg \gamma, \neg \beta, \beta$$

$$\vdash \neg \beta \Rightarrow \Sigma \text{ es insatisfacible} \Rightarrow \Psi \text{ es tautología}$$

Por resolución:

Transformamos  $\Sigma$  en un conjunto de Horn

$$\text{Sea } \alpha' = \neg \alpha \Rightarrow \Sigma' = \vdash \neg \alpha' \vee \gamma, \neg \beta \vee \gamma, \beta, \gamma$$

En este caso,  $\Sigma'$  si es de Horn y además,  $\Sigma$  es insatisfacible  $\Leftrightarrow \Sigma'$  tb lo es

Comprobamos deducción lineal - input

$$\begin{array}{ccc}
 \neg \gamma & \neg \beta \vee \gamma & \\
 | & \swarrow & \\
 \neg \beta & \beta & \\
 | & \swarrow & \\
 \vdash \beta & &
 \end{array}$$

$\Rightarrow \Sigma'$  es insatisfacible  $\Rightarrow \Sigma$  es insatis  $\Rightarrow \Psi$  es tautología

$$8. \forall x (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\forall x \alpha \rightarrow \forall x \beta) = \Psi$$

$$\mathcal{H} \models (\alpha \rightarrow \beta), \neg \alpha, \beta \rangle$$

Hallamos la forma clausulada de las fórmulas

$\neg(\alpha \rightarrow \beta)$	$\neg\alpha$	$\beta$	$\Psi$ es una tautología $\Leftrightarrow \Sigma = h\alpha, \neg\beta, \neg\alpha, \beta \vdash \perp$
$\neg(\neg\alpha \vee \beta)$	$\neg\neg\alpha$	$\beta$	
$\neg\neg\alpha \wedge \neg\beta$			es insatisfacible.
$\alpha \wedge \neg\beta$			Por Davis-Putnam

Pordans - Putram

$\alpha, \beta, \alpha, \beta$

|  $\alpha = 1$

h 73.34

|  $\beta = 1$

↳ 4) Es tautología

Por resolución:

$\alpha$  |  $\neg\alpha$   
  $\Rightarrow \Sigma$  es insatis  $\Rightarrow \Phi$  es tautología

$$9. (\neg \alpha \rightarrow \neg \beta) \rightarrow \neg(\alpha \rightarrow \beta) = \varphi$$

$$\vdash \neg \alpha \rightarrow \neg \beta, \alpha \rightarrow \beta \}$$

Hallamos la forma clausulada de las fórmulas:

$$\begin{array}{c} \neg \alpha \rightarrow \neg \beta \\ \neg \neg \alpha \vee \neg \beta \\ \alpha \vee \neg \beta \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} \alpha \rightarrow \beta \\ \neg \alpha \vee \beta \end{array} \right. \quad \Rightarrow \varphi \text{ es tautología} \Leftrightarrow \Sigma = \vdash \neg \alpha \vee \neg \beta, \neg \alpha \vee \beta \} \text{ es insatisfacible}$$

Por Davis-Putnam

$$\vdash \alpha \vee \neg \beta, \neg \alpha \vee \beta \}$$

$\alpha = 1$	$\alpha = 0$
$\beta$	$\neg \beta$
$  \beta = 1$	$  \beta = 0$
$\emptyset$	$\emptyset$

$\emptyset \Rightarrow \Sigma \text{ es satisfacible} \Rightarrow \varphi \text{ no es tautología}$

$$10. (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow ((\neg \alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \beta) = \varphi$$

Método tabular

$$\vdash \alpha \rightarrow \beta, \neg \alpha \rightarrow \beta, \neg \beta \}$$

Hallamos la forma clausulada de las fórmulas:

$$\begin{array}{c} \alpha \rightarrow \beta \\ \neg \alpha \vee \beta \\ \alpha \vee \beta \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} \neg \alpha \rightarrow \beta \\ \neg \neg \alpha \vee \beta \end{array} \right. \quad \varphi \text{ es tautología} \Leftrightarrow \Sigma = \vdash \neg \alpha \vee \beta, \alpha \vee \beta, \neg \beta \} \text{ es satisfacible}$$

Por resolución:

$$\begin{array}{c} \neg \alpha \vee \beta \\ | \\ \beta \\ | \\ \neg \beta \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} \alpha \vee \beta \\ | \\ \neg \beta \end{array} \right. \quad \vdash \neg \beta \Rightarrow \text{Es insatisfacible} \Rightarrow \varphi \text{ es tautología}$$

Por Davis-Putnam

$$\vdash \neg \alpha \vee \beta, \alpha \vee \beta, \neg \beta \}$$

$$\left| \begin{array}{l} \alpha = 1 \\ \beta = 1 \end{array} \right.$$

$$\vdash \beta, \neg \beta \}$$

$$\left| \begin{array}{l} \beta = 1 \\ \beta = 0 \end{array} \right.$$

$$\vdash \emptyset \}$$

4.15 Utiliza el algoritmo de Davis-Putnam para estudiar las consecuencias que aparecen en el ejercicio 4.13. Para aquellas que sean falsas encuentra un mundo que las falsee. Para las ciertas, una demostración lógica por resolución de la conclusión a partir de las premisas y otra demostración lógica de la cláusula vacía a partir de las premisas y la negación de la conclusión.

$$1. \{ \neg(a \wedge b), \neg c \vee a, b \} \vdash \neg a \wedge \neg c = \varphi$$

$$\varphi \text{ se da} \Leftrightarrow \{ \neg(a \wedge b), \neg c \vee a, b, a \} \text{ y } \{ \neg(a \wedge b), \neg c \vee a, b, c \} = r_2$$

son insatisfacibles. Hallamos la forma clausulada:  $r_2$

$\neg(a \wedge b)$	$\neg c \vee a$	$b$	$a$	$c$
$\neg a \vee \neg b$	$\neg c \vee a$	$b$	$a$	$c$

•  $r_2$ )

$r_2$  es insatisfacible  $\Leftrightarrow \Sigma_1 = \{ \neg a \vee \neg b, \neg c \vee a, b, a \}$  es insatisfacible

Por Davis-Putnam

$$\{ \neg a \vee \neg b, \neg c \vee a, b, a \}$$

$$| a=1$$

$$\{ \neg b, b \}$$

$$| b=1$$

$$\{ \neg \square \} \Rightarrow \text{es insatisfacible } \Sigma_1$$

•  $r_2$ )

$\Sigma_2 = \{ \neg a \vee \neg b, \neg c \vee a, b, c \}$  es insatisfacible  $\Leftrightarrow r_2$  es instati...

$$\{ \neg a \vee \neg b, \neg c \vee a, b, c \}$$

$$| c=1$$

$$\{ \neg a \vee b, b \}$$

$$| a=1$$

$$\{ \neg b, b \}$$

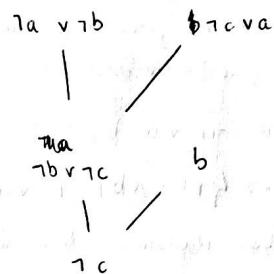
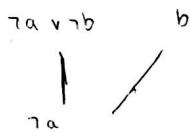
$$| b=1$$

$$\{ \neg \square \} \Rightarrow \Sigma_2 \text{ es insatisfacible} \Rightarrow$$

$\varphi$  es cierta

• Buscamos una demostración lineal por resolución de la conclusión

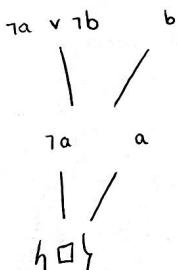
$$\neg \gamma_a \vee \neg b, \gamma_c \vee a, b \not\vdash \gamma_a, \quad \neg \gamma_a \vee \neg b, \gamma_c \vee a, b \not\vdash \gamma_c$$



$\Rightarrow \neg \gamma_a \vee \neg b, \gamma_c \vee a, b \not\vdash \gamma_a \wedge \gamma_c$  queda demostrado

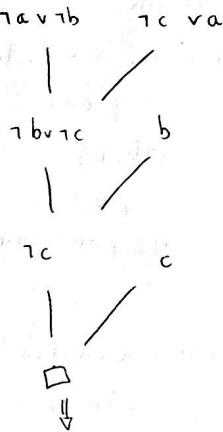
• Buscamos ahora una demostración lineal por resolución de la cláusula vacía, es decir, probaremos de nuevo que  $\Sigma_1$  y  $\Sigma_2$  son insatisfacibles, pero esta vez usando la resolución lineal.

$$\Sigma_1 = \neg \gamma_a \vee \neg b, \gamma_c \vee a, b, a \not\vdash$$



$\Sigma_1$  es insatisfacible

$$\Sigma_2 = \neg \gamma_a \vee \neg b, \gamma_c \vee a, b, c \not\vdash$$



$\Sigma_2$  es insatisfacible

Queda demostrado

$$2. \{ \neg(\alpha \wedge b), \neg c \vee a, b \} \models \neg a \rightarrow \neg c = \Psi$$

$\Psi$  se da  $\Leftrightarrow \{ \neg(\alpha \wedge b), \neg c \vee a, b, \neg a, c \}$  es insatisfacible

Hallamos la forma clausulada

$\neg(\alpha \wedge b)$	$\neg c \vee a$	b	$\neg a$	c	$\Rightarrow \Psi$ se da $\Leftrightarrow$
$\neg a \vee b$	$\neg c \vee a$	b	$\neg a$	c	$\Leftrightarrow \{ \neg a \vee b, \neg c \vee a, b, \neg a, c \}$ es insatisfacible

Por Davis-Putnam

$$\{ \neg a \vee b, \neg c \vee a, b, \neg a, c \}$$

$$\begin{array}{|l} \hline -a = 0 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|l} \hline b = 1 \\ \hline \end{array}$$

$$\{ \neg c, c \}$$

$$\begin{array}{|l} \hline c = 1 \\ \hline \end{array} \quad \square \Rightarrow \Sigma \text{ es insatisfacible} \Rightarrow \Psi \text{ es cierto}$$

- Buscamos una demostración lineal por resolución de la cláusula vacía
- Es decir, probaremos de nuevo que  $\Sigma$  es insatisfacible pero esta vez usando la resolución lineal

$$\Sigma = \{ \neg a \vee b, \neg c \vee a, b, \neg a, c \}$$

$$\neg c \vee a \quad \neg a$$

$$\begin{array}{|l} \hline / \\ \hline \end{array}$$

$$\neg c \quad c$$

$$\begin{array}{|l} \hline / \\ \hline \end{array}$$

$$\square \Rightarrow \Sigma \text{ es insatisfacible}$$

Queda demostrado

- Ahora buscamos una demostración directa por resolución de la conclusión

$$\neg a \rightarrow c \equiv a \vee \neg c$$

$$\text{si } h \neg a \vee b, \neg c \vee a, b \vdash a \vee \neg c$$

Claramente se da ya que  $a \vee \neg c \subseteq h \neg a \vee b, \neg c \vee a, b \vdash$

$$3. h \neg(a \wedge b), \neg c \vee a, b \vdash a \neg \neg b = \varphi$$

$\varphi$  se da  $\Leftrightarrow \{ \neg(a \wedge b), \neg c \vee a, b, a \} \text{ y } h \neg(a \wedge b), \neg c \vee a, b, \neg a \neg b \} = r_2$   
 son insatisfacibles

•  $r_1$ )

$$\neg(a \wedge b) \equiv \neg a \vee \neg b \quad r_1 \text{ insatis } \Leftrightarrow \Sigma_1 = h \neg a \vee \neg b, \neg c \vee a, b, \neg a \neg b \text{ insatis}$$

$$h \neg a \vee \neg b, \neg c \vee a, b, \neg a$$

$$\left| \begin{array}{l} a=1 \\ b=1 \end{array} \right.$$

$$h \neg b, b \vdash$$

$$\left| \begin{array}{l} b=1 \\ a=1 \end{array} \right.$$

$$h \square \varphi \Rightarrow \Sigma_1 \text{ insatisfacible}$$

•  $r_2$ )

$$\Sigma_2 = h \neg a \vee \neg b, \neg c \vee a, b, \neg a, \neg b \vdash$$

$$\left| \begin{array}{l} \text{Más } a=0 \\ \text{Más } b=0 \end{array} \right.$$

$$h \neg a, \neg b, \neg c \vee a, b \vdash h \neg c, b, \neg b \vdash$$

$$\left| \begin{array}{l} \text{Más } c=0 \\ \text{Más } b=0 \end{array} \right.$$

$$h b, \neg b \vdash$$

$$\left| \begin{array}{l} \text{Más } b=0 \\ \text{Más } \square \varphi \end{array} \right.$$

que es cierto

• Buscamos una resolución lineal por resolución de la conclusión

$$a \leftarrow \neg b \Leftrightarrow (a \rightarrow \neg b) \wedge (\neg b \rightarrow a) \Leftrightarrow (\neg a \vee \neg b) \wedge (b \wedge a)$$

Vemos si  $\vdash_{\text{LPC}} \neg a \vee \neg b, \neg c \wedge a, b \vdash (\neg a \vee \neg b) \wedge (\neg c \wedge a, b) \vdash b \wedge a$

Claramente se da

$$(\neg a \vee \neg b) \subseteq \vdash_{\text{LPC}} \neg a \vee \neg b, \neg c \wedge a, b$$

No se puede dar  
una demostración directa

• Buscamos una demostración lineal por resolución de la tesis vacía

$$\Sigma_1 = \vdash_{\text{LPC}} \neg a \vee \neg b, \neg c \wedge a, b, a \}$$

$$\Sigma_2 = \vdash_{\text{LPC}} \neg a \vee \neg b, \neg c \wedge a, b, \neg a, \neg b \}$$

$$\begin{array}{c} \neg a \vee \neg b \\ | \quad / \\ \neg a \quad a \end{array}$$

$$\begin{array}{c} b \quad \neg b \\ | \quad / \\ \square \Rightarrow \Sigma_2 \text{ insatis} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} | \quad / \\ \neg a \quad a \\ \square \Rightarrow \Sigma_1 \text{ insatis} \end{array}$$

Demostrado

$$4. \{ \neg(a \wedge b), \neg c \vee a, b \} \models b \rightarrow c = \varphi$$

(se da  $c \Rightarrow \{ \neg(a \wedge b), \neg c \vee a, b \}$  es insatisfacible  $c \Rightarrow$

Hallamos la forma clausulada

$$\Leftrightarrow \Sigma = \{ \neg a \vee \neg b, \neg c \vee a, b, \neg c \} \text{ es insatisfacible}$$

$| \quad b=1$

$$\{ \neg a, \neg c \vee a, \neg c \}$$

$| \quad c=0$

$$\{ \neg a \}$$

$| \quad a=0$

$$\emptyset \Rightarrow \Sigma \text{ es satisfacible} \Rightarrow \varphi \text{ no se cumple}$$

Es falso para  $b=1$   
 $c=0$   
 $a=0$

Mundo para el que

$\varphi$  es falso:  $(a, b, c) \sim (0, 1, 0)$

4.16) Estudia si las siguientes afirmaciones son ciertas o no utilizando el algoritmo de Davis-Putnam. En caso de no serlo, encuentra un mundo en que sean falsas. Para las ciertas encuentra una demostración lineal por resolución de la conclusión a partir de las premisas y otra demostración lineal de la cláusula vacía a partir de las premisas y la negación de la conclusión.

$$1. \vdash a \rightarrow b, a \rightarrow \neg b \vee \neg a = \varphi$$

$\varphi$  es cierta  $\Leftrightarrow r = \vdash a \rightarrow b, a \rightarrow \neg b, a \vee \neg a$  es insatisfacible

Hallamos la forma clausulada.

$$\begin{array}{c|c|c} a \rightarrow b & a \rightarrow \neg b & a \\ \hline \neg a \vee b & \neg a \vee \neg b & a \end{array} \quad \varphi \text{ es cierta} \Leftrightarrow \Sigma = \vdash \neg a \vee b, \neg a \vee \neg b, a \vee \neg a \text{ es insatisfacible}$$

Por Davis-Putnam

$$\vdash \neg a \vee b, \neg a \vee \neg b, a \vee \neg a$$

$$| a=1$$

$$\vdash b, \neg b \vee \neg a$$

$$| b=1$$

$$\square \Rightarrow \Sigma \text{ es insatisfacible} \Rightarrow \varphi \text{ es cierta}$$

• Demostración lineal por resolución de la conclusión :

$$\vdash \neg a \vee b, \neg a \vee \neg b, a \vee \neg a \models \neg a$$

$$\neg a \vee b \quad \neg a \vee \neg b$$

$$| \diagup$$

$\neg a \Rightarrow$  Queda demostrado

• Demostración lineal por resolución lineal de la cláusula vacía a partir de las premisas y negación de la conclusión

$$\vdash \neg a \vee b, \neg a \vee \neg b, a \vee \neg a \models \square$$

$$\neg a \vee b \quad \neg a \vee \neg b$$

$$| \diagup$$

$$\neg a \quad a$$

$$| \diagup$$

Queda demostrado

$$2 \{ a \rightarrow b, a \vee b \} \models b = \varphi$$

$\varphi$  es cierto  $\Leftrightarrow \{ a \rightarrow b, a \vee b, \neg b \}$  es insatisfacible

Hallamos la forma clausulada

a → b	a ∨ b	¬b
¬a ∨ b	a ∨ b	¬b

$\varphi$  es cierto  $\Leftrightarrow \Sigma = \{ \neg a \vee b, a \vee b, \neg b \}$  es insatisfacible

Por Davis-Putnam

$$\{ \neg a \vee b, a \vee b, \neg b \}$$

$$| *b=0$$

$$\{ \neg a, a \}$$

$$| a=1$$

$\square \Rightarrow \Sigma$  es insatisfacible  $\Rightarrow \varphi$  es cierto

• Demostración lineal por resolución de la conclusión

$$\{ \neg a \vee b, a \vee b \} \models b$$

$$\begin{array}{ccc} \neg a \vee b & & a \vee b \\ | & \diagup & \diagdown \end{array}$$

b  $\Rightarrow$  queda demostrado

• Demostración por resolución lineal de la clausula vacía a partir de las premisas y negación de la conclusión

$$\{ \neg a \vee b, a \vee b, \neg b \} \models \square$$

$$\begin{array}{ccc} \neg a \vee b & a \vee b & \\ | & \diagup & \\ b & \neg b & \\ | & \diagup & \\ \square & \Rightarrow & \text{Queda demostrado} \end{array}$$

$$3. \vdash a \rightarrow \neg b, a \wedge b \vdash c = \varphi$$

$\varphi$  es cierto  $\Leftrightarrow \vdash a \rightarrow \neg b, a \wedge b, \neg c \vdash c$  es satisfacible

Hallamos la forma clausulada

$$\begin{array}{c|cc} a \rightarrow \neg b & a \wedge b \\ \hline \neg a \vee \neg b & a \wedge b \\ & a, b \end{array}$$

$\varphi$  es cierto  $\Leftrightarrow \vdash \neg a \vee \neg b, a, b, \neg c \vdash c$  es tautología

Por Davis-Putnam

$$\vdash \neg a \vee \neg b, a, b, \neg c$$

$$\quad | \neg c$$

$$\vdash \neg a \vee \neg b, a, b$$

$$\quad | a=1$$
  
$$\vdash \neg b, b$$

$$\quad | b=1$$

$\vdash \square \varphi \Rightarrow \varphi$  es cierto  $\Leftrightarrow \Sigma$  es insatisfacible

Demonstración lineal por resolución de la conclusión

$$\vdash a \rightarrow \neg b, a, b \vdash c$$

No puede demostrarse

$$4. \{a \vee b, \neg a \vee \neg b\} \models a \leftrightarrow \neg b = \varphi$$

~~Una demostración de la tautología es una secuencia de cláusulas que se reduce a la cláusula vacía.~~

Cláusulas satisfactorias

$$a \leftrightarrow \neg b = (a \rightarrow \neg b) \wedge (\neg b \rightarrow a) = (\neg a \vee \neg b) \wedge (b \vee a)$$

$$r_1 = \{a \vee b, \neg a \vee \neg b, b, a\} \quad r_2 = \{\neg a \vee \neg b, a \vee b, \neg b, \neg a\}$$

Por Davis-Putnam

$$r_1 = \{a \vee b, \neg a \vee \neg b, b, a\}$$

$$\left| \begin{array}{l} a=1 \\ \hline \end{array} \right.$$

$$\{ \neg b, b \}$$

$$\left| \begin{array}{l} b=1 \\ \hline \end{array} \right.$$

$$\{ \square \} \Rightarrow r_1 \text{ es insatisfacible}$$

$$r_2 = \{\neg a \vee \neg b, a \vee b, \neg b, \neg a\}$$

$$\left| \begin{array}{l} \neg b \\ \hline \end{array} \right.$$

$$\{a, \neg a\}$$

$$\left| \begin{array}{l} a=1 \\ \hline \end{array} \right.$$

$$\{ \square \} \Rightarrow r_2 \text{ es satisfacible.}$$

$\varphi$  es cierto

• Demostración lineal por resolución de la conclusión

Hay que demostrar

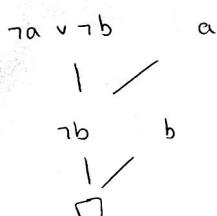
$$\{a \vee b, \neg a \vee \neg b\} \models \neg a \vee \neg b \quad y \quad \{a \vee b, \neg a \vee \neg b\} \models a \vee b$$

lo cual ya está demostrado ya que están contenidas

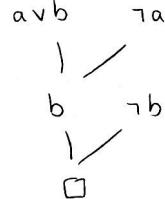
• Demostración por resolución lineal de la cláusula vacía a partir de las premisas y negación de la conclusión.

$$\{a \vee b, \neg a \vee \neg b, a, b\} \models \square$$

$$\{a \vee b, \neg a \vee \neg b, \neg a, \neg b\} \models \square$$



Demostrado



$$5. \{ a \leftarrow \neg b, a \rightarrow c \} \models b \vee c = \varphi$$

Hallamos la forma clausulada

$$\begin{array}{l} a \leftarrow \neg b \\ (a \rightarrow \neg b) \wedge (\neg \neg b \rightarrow a) \\ (\neg a \vee \neg b) \wedge (b \vee a) \end{array} \quad \left| \begin{array}{c} a \rightarrow c \\ \neg a \vee c \end{array} \right| \quad \left| \begin{array}{c} \neg b \\ \neg c \end{array} \right|$$

Questa es cierta  $\Leftrightarrow \Sigma = \{ \neg a \vee \neg b, b \vee a, \neg a \vee c, \neg b, \neg c \}$  es insatisfacible

Por Davis-Putnam

$$\{ \neg a \vee \neg b, b \vee a, \neg a \vee c, \neg b, \neg c \}$$

$$\left| \begin{array}{l} b=0 \\ \neg c=0 \end{array} \right.$$

$$\{ a, \neg a \vee c, \neg c \}$$

$$\left| \begin{array}{l} \neg c=0 \\ a=0 \end{array} \right.$$

$$\{ a, \neg a \}$$

$$\left| \begin{array}{l} \end{array} \right.$$

$\{ \square \} \Rightarrow \Sigma$  es insatisfacible  $\Rightarrow \varphi$  es cierta

Demostración lineal por resolución de la conclusión

$$\{ \neg a \vee \neg b, b \vee a, \neg a \vee c \} \models b \vee c$$

$$b \vee a \quad \neg a \vee c$$

$$\left| \begin{array}{l} \end{array} \right.$$

$b \vee c \Rightarrow$  Demostrado

Demostración por resolución lineal de la cláusula vacía a partir de las premisas y negación de la conclusión

$$\{ \neg a \vee \neg b, b \vee a, \neg a \vee c, \neg b, \neg c \} \models \square$$

$$b \vee a \quad \neg a \vee c$$

$$\left| \begin{array}{l} \end{array} \right.$$

$$b \vee c \quad \neg c$$

Demostrado

$$\left| \begin{array}{l} \end{array} \right.$$

$$b \quad \neg b$$

$$\left| \begin{array}{l} \end{array} \right.$$

$$6. \{(\alpha \wedge b) \leftrightarrow c, \neg c\} \models \neg a \wedge \neg b = \varphi$$

$$\begin{aligned} (\alpha \wedge b) \leftrightarrow c &\equiv ((\alpha \wedge b) \rightarrow c) \wedge (c \rightarrow (\alpha \wedge b)) = \\ &= (\neg(\alpha \wedge b) \vee c) \wedge (\neg c \vee (\alpha \wedge b)) = (\neg a \vee \neg b \vee c) \wedge (\neg c \vee a) \wedge (\neg c \vee b) \end{aligned}$$

$$\Sigma_1 = \{\neg a \vee \neg b \vee c, \neg c \vee a, \neg c \vee b, \neg c, a, b\}$$

$$\Sigma_2 = \{\neg a \vee \neg b \vee c, \neg c \vee a, \neg c \vee b, \neg c, b\} \quad \text{es insatisfacible?}$$

$$\{\neg a \vee \neg b \vee c, \neg c \vee a, \neg c \vee b, \neg c, a\} = \Sigma_1$$

$$\mid \lambda = \neg c \quad c = 0$$

$$\{\neg a \vee \neg b, a\}$$

$$\mid \lambda = a \quad a = 1$$

$$\{\neg b\}$$

$$\mid \lambda = \neg b$$

$\emptyset \Rightarrow$  es satisfacible  $\Sigma_1$

$$\{\neg a \vee \neg b \vee c, \neg c \vee a, \neg c \vee b, \neg c, b\}$$

$$\mid \lambda = \neg c$$

$$\{\neg a \vee \neg b, b\}$$

$$\mid b = \lambda$$

$$\{\neg a\}$$

$$\mid \lambda = \neg a$$

$\emptyset \Rightarrow \Sigma_2$  es satisfacible  $\Rightarrow \varphi$  no es cierto

Un mundo que lo falsee es  $a = 1, b = 0, c = 0 \Rightarrow (a, b, c) = (1, 0, 0)$

$$7. \vdash (\neg(a \wedge b \wedge c)), (a \wedge c) \vee (b \wedge c) \models a \rightarrow \neg b = \varphi$$

Hallamos la forma clausulada de las premisas

taut

$\neg(\neg(a \wedge b \wedge c))$	$(a \wedge c) \vee (b \wedge c)$	$a$	$\neg b$
$\neg a \vee \neg b \vee \neg c$	$((a \wedge c) \vee b) \wedge ((a \wedge c) \vee c)$	$a$	$\neg b$
	$(a \vee b) \wedge (b \vee c) \vee c$		

$\varphi$  es cierto  $\Leftrightarrow \Sigma = \vdash \neg a \vee \neg b \vee \neg c, a \vee b, b \vee c, c, a, b \models$  es insatisfacible

Por Davis - Putnam

$$\vdash \neg a \vee \neg b \vee \neg c, a \vee b, b \vee c, c, a, b \models$$

$$|\lambda = c$$

$$\{\neg a \vee \neg b, a \vee b, a, b\}$$

$$|\lambda = a$$

$$\vdash \neg b, b \models$$

$$|\lambda = b$$

$$\vdash \square \varphi \Rightarrow \text{Es insatisfacible} \Rightarrow \varphi \text{ es cierto.}$$

. Demostración lineal por resolución de la conclusión

$$\vdash \neg a \vee \neg b \vee \neg c, a \vee b, b \vee c, c \models \neg a \vee \neg b$$

$$\neg a \vee \neg b \vee \neg c \quad c$$

$$| /$$

$$\neg a \vee \neg b \Rightarrow \text{Demostrado}$$

. Demostración por resolución lineal de la cláusula dada a partir de las premisas y la negación de la conclusión

$$\vdash \neg a \vee \neg b \vee \neg c, a \vee b, b \vee c, c, a, b \models \square$$

$$\neg a \vee \neg b \vee \neg c \quad c$$

$$| /$$

$$\neg a \vee \neg b \quad a$$

$$| /$$

$$\neg b \quad b$$

Demostrado

$$8. \vdash b \rightarrow (c \vee a), a \leftarrow \neg(b \wedge d) \vdash b \leftarrow (c \vee d)$$

Hallamos la forma clausulada de las premisas

$$\begin{array}{l} b \rightarrow (c \vee a) \\ \neg b \vee (c \vee a) \\ \neg b \vee c \vee a \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} a \leftarrow \neg(b \wedge d) \\ (\neg b \rightarrow \neg(d \wedge a)) \wedge (\neg(d \wedge a) \rightarrow a) \\ (\neg b \vee \neg(d \wedge a)) \wedge (\neg(d \wedge a) \vee a) \\ ((\neg b \vee \neg(d \wedge a)) \wedge (\neg(d \wedge a) \vee a)) \wedge ((b \wedge d) \vee a) \\ ((\neg b \vee \neg(d \wedge a)) \wedge (\neg(d \wedge a) \vee a)) \wedge ((b \wedge d) \vee a) \\ (\neg b \vee \neg(d \wedge a)) \wedge ((b \wedge d) \vee a) \\ (\neg b \vee \neg(d \wedge a)) \wedge ((b \wedge d) \vee a) \\ (\neg b \vee \neg(d \wedge a)) \wedge ((b \wedge d) \vee a) \end{array} \right|$$

$$b \leftarrow (c \vee d)$$

$$(b \rightarrow (c \vee d)) \wedge ((c \vee d) \rightarrow b)$$

$$(\neg b \vee (c \vee d)) \wedge ((\neg c \wedge \neg d) \vee b)$$

$$(\neg b \vee c \vee d) \wedge ((\neg c \vee b) \wedge (\neg d \vee b))$$

Y es cierta  $\Leftrightarrow \Sigma_1 = \{ \neg b \vee c \vee d, \neg a \vee \neg b \vee \neg d, b \vee a, d \vee a, b, \neg c, \neg d \}$

$$\Sigma_2 = \{ \neg b, \neg c, \neg d, c \vee d \}$$

son insatisfacibles

$$\{ \neg b \vee c \vee d, \neg a \vee \neg b \vee \neg d, b \vee a, d \vee a, b, \neg c, \neg d \}$$

$$| b = \lambda$$

$$\{ c \vee a, \neg a \vee \neg d, d \vee a, \neg c, \neg d \}$$

$$| \lambda = \neg c$$

$$\{ a, \neg d \vee \neg a, d \vee a, \neg d \}$$

$$| \lambda = \neg d$$

$$\{ a, a \}$$

$$| \lambda = a$$

$\emptyset$  satisfacible  $\Sigma_1$

$$8. \Sigma_2 = \{ \neg b \vee c \vee a, \neg a \vee \neg b \vee \neg d, b \vee a, d \vee a, \neg b, c \vee d \}$$

$$| \quad \neg b = \lambda$$

$$\{ a, d \vee a, c \vee d \}$$

$$| \quad \lambda = a$$

$$\{ c \vee d \}$$

$$\{ d \}$$

$$| \quad \lambda = d$$

Ø

$$\begin{cases} \lambda = \neg c \\ \lambda = c \end{cases}$$

$\Sigma_2$  es satisfacible

φ No es cierta

Un mundo que falsea es  $b=1, c=0, a=1, d=0$

$$(a, b, c, d) = (1, 1, 0, 0)$$

$$9. h(a \wedge b) \rightarrow c, c \rightarrow (\neg a \vee d) \models b \rightarrow (\neg a \rightarrow c) = 4$$

Hallamos la forma clausulada de las premisas

$(a \wedge b) \rightarrow c$	$c \rightarrow (\neg a \vee d)$	$b$	$\neg(a \vee c)$
$\neg(a \wedge b) \vee c$	$\neg c \vee \neg a \vee d$	$b$	$\neg a \wedge \neg c$
$\neg a \vee \neg b \vee c$			

$\Psi$  se cumple  $\Rightarrow \Sigma = \{ \neg a \vee \neg b \vee c, \neg c \vee \neg a \vee d, b, \neg a, \neg c \}$  es insatisfacible

Por Davis-Putnam

$$\{ \neg a \vee \neg b \vee c, \neg c \vee \neg a \vee d, b, \neg a, \neg c \}$$

$$| \lambda = b$$

$$\{ \neg a \vee c, \neg c \vee \neg a \vee d, \neg a, \neg c \}$$

$$| \lambda = \neg a$$

$$\{ \neg c \vee d, \neg c \}$$

$$| \lambda = \neg c$$

✗  $\Rightarrow$  Es satisfacible  $\Rightarrow \Psi$  no es cierto

Un mundo que hace falsa  $\Psi$  es  $(a, b, c, d) = (0, 1, 0, 0)$

$$10. \{ (a \vee c) \rightarrow \neg a, c \rightarrow \neg a, b \rightarrow \neg a \} \models \neg a$$

Hallamos la forma clausulada

$$(a \vee c) \rightarrow \neg a$$

$$\neg(a \vee c) \vee \neg a$$

$$(\neg a \wedge \neg c) \vee \neg a$$

$$(\neg a \vee \neg a) \wedge (\neg c \vee \neg a)$$

$$\neg a \wedge (\neg c \vee \neg a)$$

$$\neg a$$

$\varphi$  es cierto  $\Leftrightarrow \Sigma = \{\neg a, \neg c \vee \neg a, \neg b \vee \neg a, a\}$  es insatisfacible

Por Davis-Putnam

$$\{\neg a, \neg c \vee \neg a, \neg b \vee \neg a, a\}$$

$$|\lambda = \neg a$$

$$\{\square\} \Rightarrow \Sigma \text{ es insatisfacible} \Rightarrow \varphi \text{ cierto}$$

• Demostración lineal por resolución de la conclusión a partir de las premisas

$$\{\neg a, \neg c \vee \neg a, \neg b \vee \neg a\} \models \neg a$$

Claramente se da ya que la conclusión está contenida en la hipótesis

• Demostración lineal por resolución lineal de la cláusula vacía a partir de las premisas y la negación de la conclusión

$$\{\neg a, \neg c \vee \neg a, \neg b \vee \neg a, a\} \models \square$$

$$\neg a \quad a$$

$$\diagup$$

$\square \Rightarrow$  Queda demostrado

$$11. \{ (a \wedge b) \rightarrow c, c \rightarrow d, b \wedge \neg d \} \models \neg a = 4$$

Hallamos la forma clausulada

$(a \wedge b) \rightarrow c$	$c \rightarrow d$	$b \wedge \neg d$	$a$
$\neg(a \wedge b) \vee c$	$\neg c \vee d$	$b \wedge \neg d$	$a$
$\neg a \vee \neg b \vee c$			

Querido  $\Leftarrow \Sigma = \{ \neg a \vee \neg b \vee c, \neg c \vee d, b \wedge \neg d, a \}$  es insatisfacible

Por Davis Putnam

$$\{ \neg a \vee \neg b \vee c, \neg c \vee d, b \wedge \neg d, a \}$$

$$| \lambda = a$$

$$\{ \neg b \vee c, \neg c \vee d, b \wedge \neg d \}$$

$$| \lambda = b$$

$$\{ c, \neg c \vee d, \neg d \}$$

$$| \lambda = \neg d$$

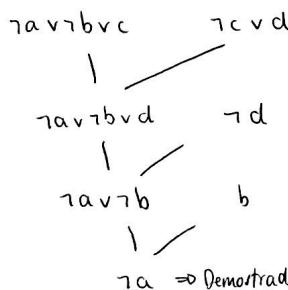
$$\{ c, \neg c \}$$

$$| \lambda = c$$

$$h \square \models \Sigma \text{ es insatisfacible} \Rightarrow \Psi \text{ es cierto}$$

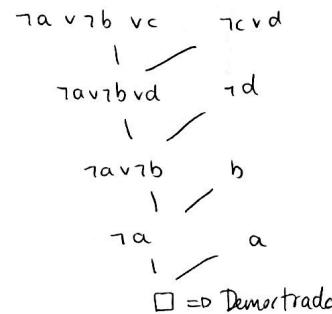
- Demostración lineal por resolución de la conclusión

$$\{ \neg a \vee \neg b \vee c, \neg c \vee d, b \wedge \neg d \} \models \neg a$$



- Demostración lineal por resolución lineal de la cláusula vacía o partir de las premisas y negación de la conclusión

$$\{ \neg a \vee \neg b \vee c, \neg c \vee d, b \wedge \neg d, a \} \models \square$$



$$14 \quad h(b \rightarrow a) \wedge b, c \rightarrow d, b \rightarrow c \models a \vee d = \varphi$$

Hallamos la forma clausulada

$(b \rightarrow a) \wedge b$	$c \rightarrow d$	$b \rightarrow c$	$\neg a$	$\neg d$
$(\neg b \vee a) \wedge b$	$\neg c \vee d$	$\neg b \vee c$		
$(\neg b \wedge b) \vee (\neg b \wedge a)$				
$b \vee (\neg b \wedge a)$				
$b \wedge a$				

Y es cierto  $\Leftrightarrow \Sigma = h b \wedge a, \neg c \vee d, \neg b \vee c, \neg a, \neg d \models \varphi$  es insatisfacible

Por Davis Putnam

$$h b \wedge a, \neg c \vee d, \neg b \vee c, \neg a, \neg d \models$$

$$|\lambda = \neg d$$

$$h b \wedge a, \neg c, \neg b \vee c, \neg a$$

$$|\lambda = \neg a$$

$$h b, \neg c, \neg b \vee c$$

$$|\lambda = \neg c$$

$$h b, \neg b$$

$$|\lambda = b$$

$h \varphi \Rightarrow$  ~~obvio~~ Y es cierto  $\models \Sigma$  es insatisfacible

• Dem. por resolución

de la conclusión

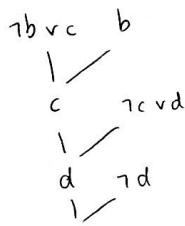
(A partir de ahora se abreviará  
cond.R.C.)

No hay dem directa, ya

que la cláusula a no se puede  
unir con ninguna otra para  
hacerla resolvente, pues  
ninguna contiene a  $\neg a$

• Demostrar lineal por res lineal  
de la cláusula vacía a partir de las  
premisas y la negación de la conclusión  
(Abreviará cond.R.C.)

$$h b \wedge a, \neg c \vee d, \neg b \vee c, \neg a, \neg d \models \square$$



$\square \Rightarrow$  Queda demostrado

$$15. \neg(a \wedge b) \rightarrow c, (\neg a \wedge \neg b) \rightarrow d, a \leftrightarrow b \vdash c \vee d : \varphi$$

Hallamos la forma clausulada

$(a \wedge b) \rightarrow c$	$(\neg a \wedge \neg b) \rightarrow d$	$(\neg a \vee b) \wedge (\neg b \vee a)$	$\neg c$	$\neg d$
$\neg(a \wedge b) \vee c$	$\neg(\neg a \wedge \neg b) \vee d$			
$\neg a \vee \neg b \vee c$	$a \vee b \vee d$			

$\varphi$  es cierto  $\Leftrightarrow \neg \{ \neg a \vee \neg b \vee c, a \vee b \vee d, \neg a \vee b, \neg b \vee a, \neg c, \neg d \}$  es insat.

Por Davis-Putnam

$$\neg \{ \neg a \vee \neg b \vee c, a \vee b \vee d, \neg a \vee b, \neg b \vee a, \neg c, \neg d \}$$

$$\begin{array}{l} | \lambda = \neg c \\ \neg \{ \neg a \vee \neg b, a \vee b \vee d, \neg a \vee b, \neg b \vee a, \neg d \} \\ | \lambda = \neg d \\ \neg \{ \neg a \vee \neg b, a \vee b, \neg a \vee b \vee d, \neg b \vee a \} \\ | \begin{array}{l} \lambda = a \\ \lambda = b \end{array} \quad | \begin{array}{l} \lambda = \neg a \\ \lambda = b \end{array} \\ \neg \{ \neg b, b \} \quad \neg \{ \neg b, b \} \\ | \square \quad | \square \Rightarrow \text{Se insatis} \Rightarrow \varphi \text{ cierto} \end{array}$$

• D.R.C

$$\begin{array}{l} \neg \{ \neg a \vee \neg b \vee c, a \vee b \vee d, \neg a \vee b, \neg b \vee a \} \vdash c \vee d \\ | \quad | \\ \neg a \vee \neg b \vee c \quad \neg a \vee b \\ | \quad | \\ \neg a \vee c \quad a \vee b \vee d \\ | \quad | \\ b \vee c \vee d \quad \neg b \vee a \\ | \quad | \\ a \vee c \vee d \quad \neg a \vee b \vee c \\ | \quad | \\ \neg b \vee c \vee d \quad b \vee c \vee d \\ | \quad | \\ c \vee d = \square \text{ Demostrado} \end{array}$$

• DNC

$$\begin{array}{l} \neg \{ \neg a \vee \neg b \vee c, a \vee b \vee d, \neg a \vee b, \neg b \vee a, \neg c, \neg d \} \vdash \square \\ | \quad | \\ \neg a \vee \neg b \vee c \quad \neg a \vee b \\ | \quad | \\ \neg a \vee c \quad \neg c \\ | \quad | \\ a \quad \neg a \\ | \quad | \\ \square \Rightarrow \text{Demostrado} \end{array}$$

$$16. \{a \rightarrow (b \vee c), d \vee \neg c, b \vee d\} \models a \rightarrow d = \Phi$$

Hallamos la forma clausulada

$a \rightarrow (b \vee c)$	$d \vee \neg c$	$b \vee d$	$a \rightarrow d$	
$\neg a \vee (b \vee c)$			$\neg a \vee d$	
$\neg a \vee b \vee c$				

$\Phi$  es cierto  $\Leftrightarrow \Sigma = \{\neg a \vee b \vee c, d \vee \neg c, b \vee d, \neg a, \neg d\}$  es satis-

Davis-Putnam

$$\{ \neg a \vee b \vee c, d \vee \neg c, b \vee d, a, \neg d \}$$

$$| \lambda = a$$

$$\{ b \vee c, d \vee \neg c, b \vee d, \neg d \}$$

$$| \lambda = \neg d$$

$$\{ b \vee c, \neg c, b \}$$

$$| \lambda = b$$

$$\{ \neg c \}$$

$$| \lambda = \neg c$$

$$\{ \emptyset \} \Rightarrow \Sigma \text{ es satisfacible} \Rightarrow \Phi \text{ no es cierto}$$

Un mundo que hace falso a  $\Phi$  es  $(a, b, c, d) = (1, 0, 1, 0, 0)$

$$17. \{(\neg b \wedge \neg c) \rightarrow \neg a, a \rightarrow b, ac \rightarrow c\} \models b \vee c = \varphi$$

Hallamos la forma clausulada

$$\begin{array}{c|c|c|c|c}
(\neg b \wedge \neg c) \rightarrow \neg a & a \rightarrow b & ac \rightarrow c & \neg b & \neg c \\
\neg(\neg b \wedge \neg c) \vee \neg a & \neg a \vee b & (\neg a \vee c) \wedge (\neg c \vee a) & & \\
b \vee c \vee \neg a & & & &
\end{array}$$

$\varphi$  es cierto  $\Leftrightarrow \Sigma = \{\neg b \vee c \vee \neg a, \neg a \vee b, \neg a \vee c, \neg c \vee a, \neg b, \neg c\}$  es insatis

Por Davis-Putnam

$$\{\neg b \vee c \vee \neg a, \neg a \vee b, \neg a \vee c, \neg c \vee a, \neg b, \neg c\}$$

$$|\lambda = \neg c$$

$$\{\neg b \vee \neg a, \neg a \vee b, \neg a, \neg b\}$$

$$|\lambda = \neg b$$

$$\{\neg a, \neg a\}$$

$$|\lambda = \neg a$$

$\emptyset \Rightarrow \Sigma$  es satisfacible  $\Rightarrow \varphi$  es falso (nocierto)

Un mundo para el que  $\varphi$  se cumple es  $(a, b, c) = (0, 0, 0)$

$$19. h(a \wedge b) \rightarrow c, (\neg a \wedge b) \rightarrow d, \neg a \vee \neg b, e \rightarrow (a \wedge d) \models \neg e = \varphi$$

$\varphi$  es cierto  $\Leftrightarrow h(a \wedge b \rightarrow c, (\neg a \wedge b) \rightarrow d, \neg a \vee \neg b, e \rightarrow (a \wedge d), \neg e)$  es insatis

Hallamos la forma clausulada

$(a \wedge b) \rightarrow c$	$(\neg a \wedge b) \rightarrow d$	$\neg a \vee \neg b$	$e \rightarrow (a \wedge d)$	$e$
$\neg(a \wedge b) \vee c$	$\neg(\neg a \wedge b) \vee d$		$\neg e \vee (a \wedge d)$	
$\neg a \vee b \vee \neg c$	$a \vee \neg b \vee d$		$(\neg e \vee a) \wedge (\neg e \vee d)$	

$\varphi$  es cierto  $\Leftrightarrow \Sigma = h \neg a \vee b \vee \neg c, a \vee \neg b \vee d, \neg a \vee \neg b, \neg e \vee a, \neg e \vee \neg d, e \}$   
es insatis

Davis - Putnam

$$h \neg a \vee b \vee \neg c, a \vee \neg b \vee d, \neg a \vee \neg b, \neg e \vee a, \neg e \vee \neg d, e \} \\ | \lambda e$$

$$h \neg a \vee b \vee \neg c, a \vee \neg b \vee d, \neg a \vee \neg b, a \wedge d \}$$

$$| \lambda = a$$

$$h b \vee \neg c, \neg b, \neg d \}$$

$$| \lambda = \neg b$$

$$h \neg c, \neg d \}$$

$$| \lambda = \neg c$$

$$h \neg d \}$$

$$| \lambda = \neg d$$

$$\emptyset \Rightarrow \Sigma \text{ es satisfacible} \Rightarrow \varphi \text{ no es cierto}$$

$\varphi$  es falso para  $(a, b, c, d, e) = (1, 0, 0, 0, 1)$

$$20. \{ c \rightarrow d, a \vee b, \neg(a \rightarrow d), \neg a \rightarrow b \} \models b \wedge c = 4$$

Hallamos la forma clausulada

$c \rightarrow d$	$a \vee b$	$\neg(\neg a \rightarrow d)$	$\neg a \rightarrow b$
$\neg c \vee d$		$\neg(\neg \neg a \vee d)$	$\neg(\neg a \vee b)$
		$\neg(\neg a \vee d)$	$a \wedge \neg b$
		$\neg a \wedge d$	

$$\varphi_{resuelto} \Leftrightarrow \Sigma_1 = \{ \neg c \vee d, a \vee b, \neg a, \neg d, a, \neg b \} \text{ y}$$

$$\Sigma_2 = \{ \neg c \vee d, a \vee b, \neg a, \neg d, a, \neg b, c \} \text{ son inconsistentes}$$

Dans - Putnam

$\{ \neg c \vee d, a \vee b, \neg a, \neg d, a, \neg b \}$	$\{ \neg c \vee d, a \vee b, \neg a, \neg d, a, \neg b, c \}$
$  \lambda = \neg d$	$  \lambda = c$
$\{ \neg c, a \vee b, \neg a, a, \neg b \}$	$\{ \neg d, a \vee b, \neg a, \neg d, a, \neg b \}$
$  \lambda = \neg b$	$  \lambda = \neg b$
$\{ \neg c, a, \neg a \}$	$\{ \neg d, a, \neg a, \neg d \}$
$  \lambda = \neg c$	$  \lambda = d$
$\{ a, \neg a \}$	$\{ a, \neg a \}$
$  \lambda = a$	$  \lambda = a$
$\{ \square \}$	$\{ \square \}$

$\clubsuit \Sigma_1 \text{ y } \Sigma_2 \text{ son inconsistentes} \Rightarrow \varphi_{resuelto}.$

o D. R. C

$$\{ \neg c \vee d, a \vee b, \neg a, \neg d, a, \neg b \} \models b$$

$$\begin{array}{c} a \vee b \\ | \\ b \end{array} \quad \begin{array}{c} \neg a \\ | \end{array}$$

Demostrado

$$\{ \neg c \vee d, a \vee b, \neg a, \neg d, a, \neg b \} \models \neg c$$

$$\begin{array}{c} \neg c \vee d \\ | \\ \neg c \end{array} \quad \begin{array}{c} \neg d \\ | \end{array}$$

DNC

$\{ \neg c \vee d, a \vee b, \neg a, \neg d, a, \neg b \} \models \square$	$\{ \neg c \vee d, a \vee b, \neg a, \neg d, a, \neg b, c \} \models \square$
$a \vee b$   / $a$ $\neg a$   / $\square$	 $\neg c \vee d$   / $d$ $\neg d$   / $\square$

Demolido