# Grafos

(tema 6)

ES UN GRAFO CONEXO DONDE TODOS LOS VÉRTICES TIENEN = GRADO ⟹ GRAFO REGULAR

## ⇨ GRAFO COMPLETO ← ( $K_n$ )

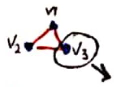
$K_n$ ← nº de vértices

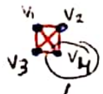
- Si $K_1$ (grafo completo de 1 vértice)
- Si $K_4$ ( " " de 4 vértices)

2 vértices siempre van a tener un lado que los una.
↳ 2 vért. SIEMPRE VAN A SER ADYACENTES.

$K_1$ •

$K_2$

$K_3$  → GRADO $V_3$: 2

$K_4$ 

GRADO $V_4 = 3$

$K_5$ 

- ¿Cuántos vértices tiene $K_n$? Si por ej. es para $K_{80}$ muchos vértices

  $n$

- ¿Cuántos lados tiene $K_n$?

  $\frac{n(n-1)}{2}$

- ¿Grado de los vértices? (todos vért. tienen = grado)
  ↳ es el nº de lados que inciden sobre un vértice.

  $n-1$

MATRIZ ADYACENCIA:
0 en la d.principal
1 en el resto.
} GRAFO COMPLETO.

GRAFO DE EULER cuando $n$ es impar

## ⇨ MATRIZ DE ADYACENCIA (siempre son CUADRADAS Y SIMÉTRICAS)

Es una matriz donde nos dan el grafo representado con $\boxed{0}$ y $\boxed{1}$.

0 → vértice NO conectado a otro

1 → vértice SÍ conectado a otro

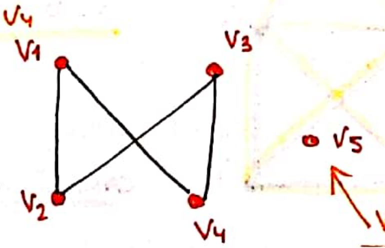
representan vértices

$V_1$ conecta con $V_2$

$$\begin{array}{c|ccccc} & V_1 & V_2 & V_3 & V_4 & V_5 \\ \hline V_1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ V_2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ V_3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ V_4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ V_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} = A$$

$M\,5\times5$
↓ GRAFO DE 5 VÉRTICES

→ $V_3$ conecta con $V_4$




vértice aislado

NO CONECTA CON NADIE

PARA NOSOTROS { Siempre va a ser la D.Principal todo 0, significa que $V_1$ no conecta con $V_1$, que $V_2$ no conecta con $V_2$... es decir que NO hay LAZOS

pq así es + simple

(*) Te pueden dar una matriz INCOMPLETA PARA QUE TÚ LA SEPAS HACER:

$$\begin{pmatrix} *_1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & *_2 & 1 \\ *_3 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = B$$

$V_4$

$V_4$

➡ Tenemos que saber que D. Principal son TODO 0: por lo que $*_1$ y $*_2 = 0$.

➡ Como es simétrica: $*_3 = 1$
(ya que $V_4$ con $V_4$ será simétrico a $V_4$ con $V_4$)

EL BIPARTIDO (NO COMPLETO): Todo vértice de un lado conecta al menos con un vértice del otro lado.

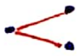
## GRAFO BIPARTIDO COMPLETO ($K_{n,m}$)

( o todos los de arriba con todos los de abajo)

$K_{n,m}$ — n: vértices que pinto a la izq; m: vértices que pinto a la dcha

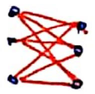
⇒ Unimos todos los vértices de la izq. con todos los de la dcha. Pero no entre sí los del mismo lado.

$K_{1,2}$



$K_{2,2}$

$K_{3,3}$



- ¿Cuántos vértices tiene $K_{n,m}$? $n+m$
- ¿Cuántos lados tiene $K_{n,m}$? $n \cdot m$

tiene circ. de hamilton cuando $n=m$

GRAFO DE EULER cuando n y m pares

CAMINO: sucesión de lados, donde acaba uno, empieza el sig.

Recorrido: sin repetir (lados o aristas)

UN GRAFO de n vértices es HAMILTONIANO si:

1) nº lados $\geq \frac{1}{2}(n-1)(n-2)+2$

2) Si $n \geq 3$ y para cada par de vértices no adyacentes se verifica: $gr(u)+gr(w) \geq n$.

## GRAFOS DE EULER

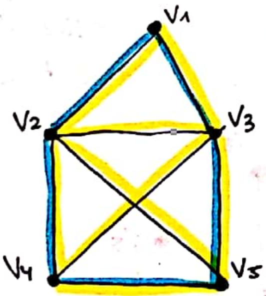
LADOS

- **CAMINO DE EULER**: PASAR POR TODOS LOS LADOS SIN REPETIR (Recorrido) (Path)
- **CIRCUITO DE EULER** (cycle): = CAMINO; empieza y acaba en el mismo sitio

## GRAFOS DE HAMILTON

NODOS

- **CAMINO DE HAMILTON**: PASAR POR TODOS LOS NODOS SIN REPETIR (Recorrido)
- **CIRCUITO DE HAMILTON**: = CAMINO. Si tiene → graf. HAMILTONIANO




CAMINO EULER = {V4, V5, V3, V4, V2, V3, V1, V2, V5} (NO CIRCUITO)

CAMINO DE HAMILTON = {V4, V5, V3, V1, V2}, V4

→ CIRCUITO DE HAMILTON

TRUCOS

1) Si tiene exactamente 2 vértices de grado impar tiene camino pero no circuito. (Siendo G CONEXO)

2) Si todos los vértices son de grado par tiene CAMINO y CIRCUITO. (Siendo CONEXO)

DE EULER

$K_n$ de Euler cuando n IMPAR

$K_{m,n}$ de Euler cuando n y m PARES

$W_n$ NUNCA EULER, excepto $W_2$.

Es grafo de Euler cuando ∃ circuito de Euler

Un grafo conexo es de Euler si y sólo si todos sus vértices son de grado par.

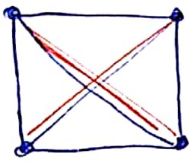
## ⇨ GRAFOS PLANOS

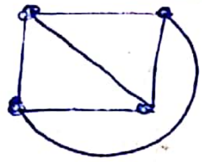
"UN GRAFO DONDE NO SE CRUZAN 2 LADOS"

GRAFOS + pequeños NO planos: $K_5$ y $K_{3,3}$.
→ Fórmu. Euler: es plano y conexo si: vért. − lados + caras = 2
→ Teor. Kuratowski: Es plano si ningún subgrafo suyo se puede contraer a $K_5$ y $K_{3,3}$.

$\boxed{V - l + c = 2}$

$K_4$





A simple vista diríamos que NO es plano, pero se puede dibujar SIN QUE SE CRUCEN LOS LADOS

Por tanto, $K_4$ "ES PLANO"

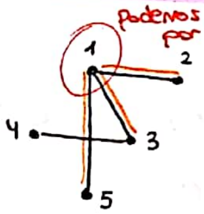
Si es plano: $\boxed{n^{\circ} \text{ lados} \leq 3v - 6}$

## ⇨ GRAFO BIPARTIDO

← 2 CONJUNTOS

Todo vért. de un lado conecta al menos con uno del otro lado.

podemos empezar por este.




(Subconjunto $V_1$) $C_1 = \{1, 4\}$

(Subconjunto $V_2$) $C_2 = \{2, 3, 5\}$

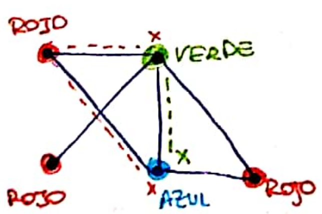
⟹ ES BIPARTIDO

pq hemos podido meter TODOS sus vértices en 2 conjuntos ≠.

¡¡NO SE PUEDEN METER en el mismo conjunto 2 NODOS que estén CONECTADOS MEDIANTE UN LADO!!

## ⇨ Nº CROMÁTICO

¿De cuántos colores diferentes puedo pintar los vértices de un grafo, con la restricción de que dos vértices adyacentes tienen que tener colores diferentes?

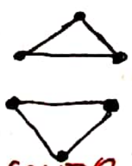



$\chi_G = 3$ ← nº CROMÁTICO.

mínimo nº de colores para pintar sus vértices

---

**G. CONEXO**: Si todo par de vértices está conectado por un camino
(si cojiendo 2 vértices puedo encontrar un camino entre ellos).



NO CONEXO

mismo grafo →

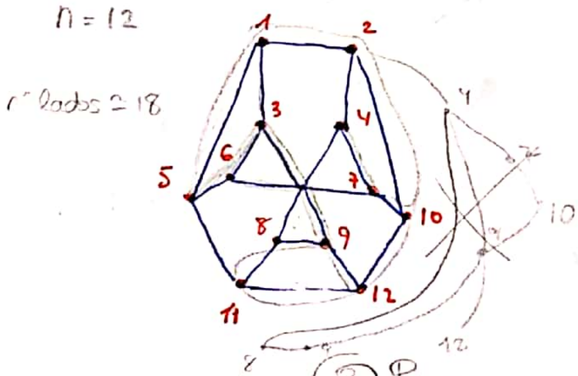
CONEXO

Todo grafo HAMILTONIANO es conexo
Todo g. conexo NO tiene que ser HAMILTONIANO

Creo que todo g de Euler es conexo.

## Ej. examen TIPO TEST

Para el siguiente grafo G, las respuestas a las preguntas.



1. ¿ ∃ recorrido de Euler? No
2. ¿ ∃ circuito de Hamilton? Sí
3. ¿Es bipartido? Sí
4. ¿Es plano? NO

A. SÍ / NO / NO / SÍ
B. NO / NO / SÍ / NO
C. NO / SÍ / SÍ / SÍ
D. NO / SÍ / SÍ / NO

(3) Porque al ver el nº cromático salía 2 (y no se cruzaban).

(4) ¿nº lados ≤ 3·vért. − 6 ?
18 ≮ 30 NO

## SUCESIONES GRÁFICAS

### • DEMOLICIÓN

nº de veces que resto −1

| A | B | C | D | E | F | G |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 4 | 4 | 3 | 2 | 2 | 2 | 1 |
| | −1 | −1 | −1 | −1 | | |

3 2 1 1 2 1 — ordenar en cada PASO.

| B | C | F | D | E | G |
|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 2 | 2 | 1 | 1 | 1 |
| | −1 | −1 | −1 | | |

1 1 0 1 1

| C | F | E | G | D |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| | −1 | | | |

E G
0 1 1 0 (grado 1)

Se dice que cuando nos quedan 0 y 1, cuando nº de 1 es PAR, entonces SUCESIÓN VÁLIDA.

mismo resultado

### SALAS

Si G da desordenado: (Salas)

| A | B | C | D | E | F | G | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 1 | 2 | 3 | ~~4~~ | 2 | 4 | (Paso 4) |
| −1 | | −1 | −1 | | | −1 | |

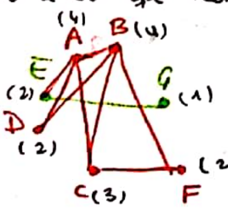
DEMOLICIÓN

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 2 | 0 | 2 | ~~3~~ | (Paso 3) |
| −1 | | | −1 | | −1 | | |
| 0 | ~~1~~ | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | (Paso 2) |
| | | −1 | | | | | |
| 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | (Paso 1) |

D F

### • CONSTRUCCIÓN

1) Pintamos los 1 que nos quedaron al final.
2) Pintar todas las filas donde hemos tachado (→)
(Pintamos elemento tachado, y lo unimos con todos a los que hemos restado −1.

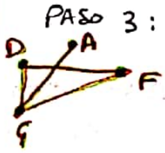


poner grados, así podemos comprobar que es la misma secuencia que enunciado

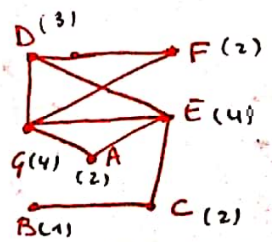
PASO 1:

PASO 2:

PASO 3:

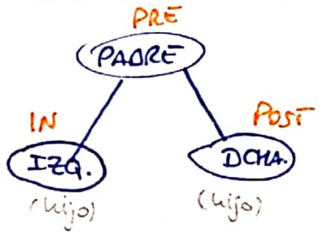


PASO 4:

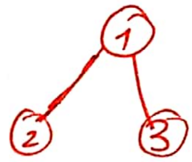


# RECORRIDO DE ÁRBOLES ( SALAS)

- PREORDER
- INORDER
- POSTORDER




PRE: PAD, IZQ, DCHA. ( 1, 2, 3)
IN: IZQ, PAD, DCHA. ( 2, 1, 3)
POST: IZQ, DCHA, PAD. ( 2, 3, 1)

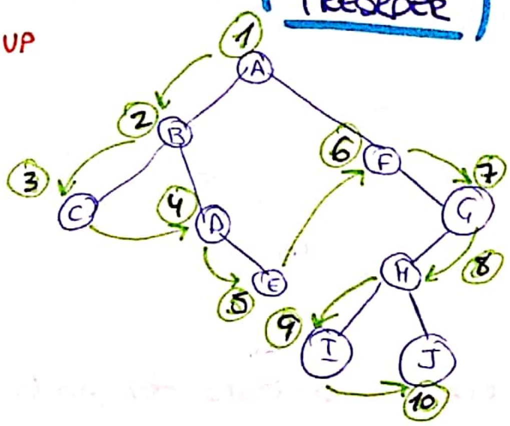



TOP DOWN

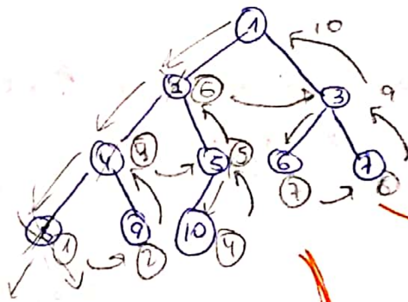
BOTTOM UP importante

## PREORDER

( PADRE, IZQ, DCHA)



A, B, C, D, E, F, G, H, I, J



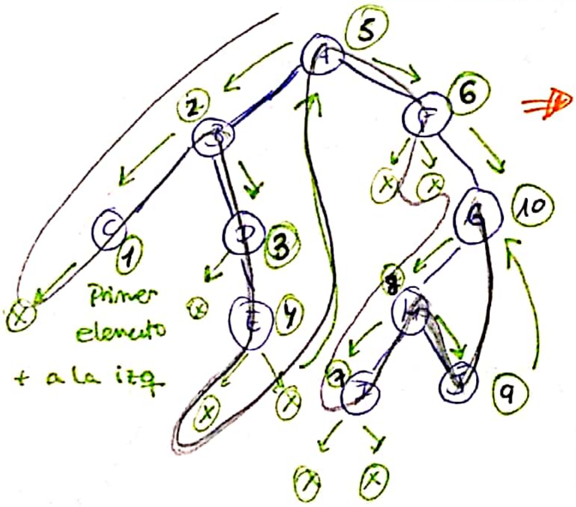
1, 2, 4, 8, 9, 5, 10, 3, 6, 7

INORDER :

8, 4, 9, 2, 10, 5, 1, 6, 3, 7

## INORDER

( IZQ, PAD, DCHA)

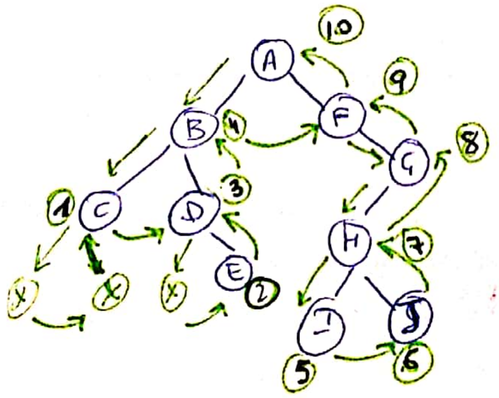


Primer elemento + a la izq

C, B, D, E, A, F, I, H, J, G

## POSTORDER

( IZQ, DCHA, PADRE)



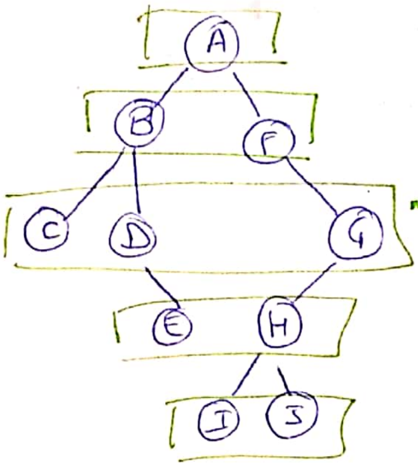
C, E, D, B, I, J, H, G, F, A.

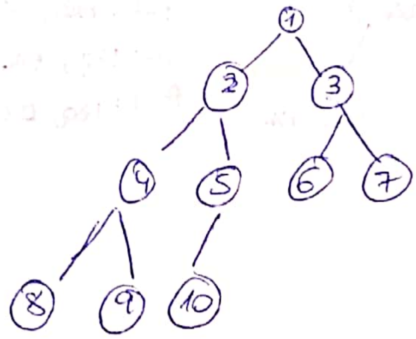
POSTORDER :

8, 9, 4, 10, 5, 2, 6, 7, 3, 1.

## TOP DOWN

(Recorrer el árbol POR NIVELES)
(y de izq a dcha dentro del mismo nivel)



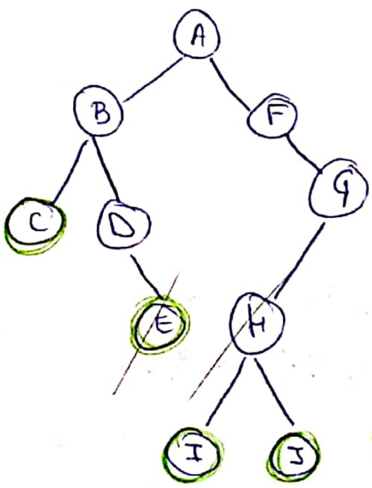
A, B, F, C, D, G, E, H, I, J

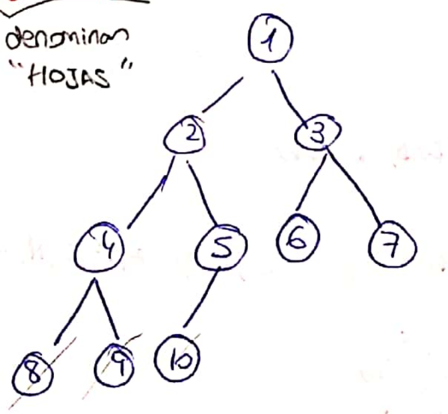
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.

## BOTTOM UP

(Vamos eligiendo los de ↑ altura (+ separados del padre) que NO tengan hijos).

$\underbrace{\text{NO tengan hijos}}_{\text{Se denominan "HOJAS"}}$





de estos "solteros" cogemos los de ↑ altura

I, J, E, H, C, D, G, B, F, A

para el siguiente paso I, J es como si dejaran de existir, y los "solteros" serían: C, E, H volvemos a coger los de ↑ altura

8, 9, 10, 4, 5, 6, 7, 2, 3, 1

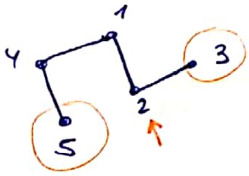
(Quedarían de $\boxed{\text{SALAS}}$: algoritmos de PRIM y KRUSKAL)

ÁRBOL es un grafo G conexo que no tenga ciclos.

## ① DE ÁRBOL A CÓDIGO FRÜFER (Salas)

nº vértices $(n - 2)$

ÁRBOL:




Código: ( 2, 1, 4)

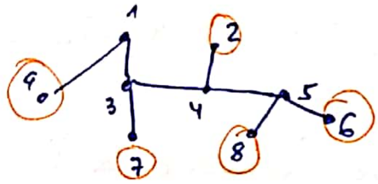
Se quedan fuera del código la primera y última hojas.

PASOS:

① Identificamos las hojas (serían 3 y 5) de menor de las dos, apuntamos su vértice adyacente.
Nos fijamos en 3 y apuntamos 2.

② 3 queda como "eliminado": Volvemos a paso 1. Hojas serían ahora 2 y 5. Del menor (2) apuntamos su vértice adyacente: 1.

③ Hemos ACABADO cuando sólo queden 2 vértices.




Código: ( 4, 5, 3, 5, 4, 3, 1 )

## ② DE CÓDIGO FRÜFER A ÁRBOL

CÓDIGO: Árbol:

(~~6~~, ~~5~~, ~~6~~, ~~5~~, ~~1~~) → { 1, ~~2~~, ~~3~~, ~~4~~, ~~5~~, ~~6~~, 7 }

VÉRTICES

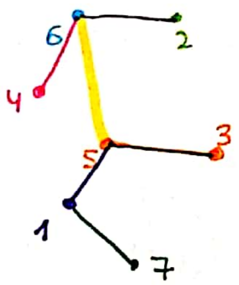
(NO ESTÁ)

tiene 5 números, por lo que nuestro código tendrá 5 + 2 vértices. $(n+2)$

**PASOS:**

- PASO 1: pintamos el primer vértice del código.
- PASO 2: de la lista de vértices los cogemos (por orden) de ellos, el que NO APAREZCA en el código, y lo TACHAMOS
- Repetir todo ahora con el siguiente elemento del código (con el 5), lo uno con el vért. 3.
- Ahora con el 6

...




Al final nos queda el conjunto de vértices:

{ 1, ~~2~~, ~~3~~, ~~4~~, ~~5~~, ~~6~~, 7 }

los que queden libres hay que unirlos

## MATRIZ ASOCIADA $A^2$ (Adyacencia)

$\boxed{A^2 = A \cdot A}$

→ la diagonal de $A^2$ indica el grado de cada vértice.

→ Caminos ≠ entre un vért. y otro de grado 2.

→ ej. vértice 1 tiene 2 lados asociados.

- CIRCUITO EULER NO pq. en la D.P. hay grados impares.
- CAMINO EULER → si hay 2 impares (SÍ (3,3)) → o si todos grados son pares.
- ¿ES UN ÁRBOL?

$$A^2 = \begin{array}{c|c} & V_1 \; V_2 \; V_3 \; V_4 \; V_5 \\ \begin{array}{c} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \end{array} & \begin{pmatrix} 2 & & & & \\ & 2 & & & \\ 3 & & 4 & & \\ & & & 3 & \\ & & & & 3 \end{pmatrix} \end{array}$$

→ vért. 4, tiene grado 3. Hay 3 caminos de longitud 2 que unen $V_4$ consigo mismo. (por $A^2$)

Si es = a → $\Sigma$ grados (vérts.) = 2 · lados (ÁRBOL) $\Rightarrow L = \dfrac{2+2+4+3+3}{2} = 7$

→ lados (L) = vérts. − 1 $\Rightarrow$ 5 + 1 = 6 ≠ NO ES UN ÁRBOL.

(sólo en árboles, creo)

- ¿Del $V_1$ al $V_3$, cuántos caminos ≠ hay de longitud 2?

Hay 3 ⇒ busco el valor de la coordenada que corresponde a

$$\begin{array}{c|c} & V_1 \; V_2 \; V_3 \; V_4 \; V_5 \\ \begin{array}{c} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \end{array} & \begin{pmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \cdots 3 \\ \\ \\ \end{pmatrix} \end{array}$$

UN ÁRBOL NO tiene ciclos (tampoco un bosque).

→ Si tiene un nº finito de vértices (n), entonces tiene lados (aristas) = n − 1.

(nº hojas = nº vértices de grado 1) y hay $n^{n-2}$ árboles posibles.

## MATRIZ ASOCIADA $A^3$

$\boxed{A^3 = A^2 \cdot A}$

→ DIAGONAL (indica si el vértice "i" contiene algún ciclo de longitud 3)

→ RESTO MATRIZ (nº caminos de longitud 3). (Para $A^5$ serán nº caminos longitud 5, $A^6$ nº cam. longitud 6...)

- ¿ES BIPARTIDO?

Si en la Diag. Principal hay algún ciclo de grado 3 ⇒ No es BIPARTIDO

$$A^3 = \begin{pmatrix} 0 & & & & & \\ & 0 & & & & \\ & & 0 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & 0 & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

BIPARTIDO

(En este caso, como toda la diag. Principal son 0 ⇒ SÍ ES BIPARTIDO).

- Polinomio CROMÁTICO

Faltan
- Suma
- Resta

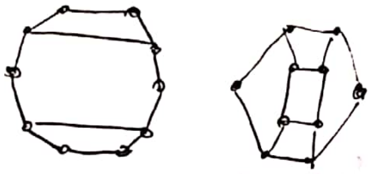
...

# TEMA 6

**MATRIZ DE ADYACENCIA**
- cuadrada
- de grado $n$ ← nº vértices

## PARA QUE 2 GRAFOS SEAN ISOMORFOS:

Deben tener
- IGUAL GRADO:



(cada vértice debe conservar su grado)
↓
nº de lados que inciden en V.

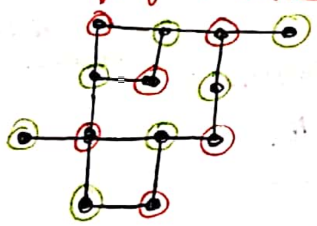
$gr(A) = 24 \neq gr(B) = 28$

Son isomorfos si podemos establecer 2 biyecciones entre los conjuntos de vértices y los conjuntos de lados.

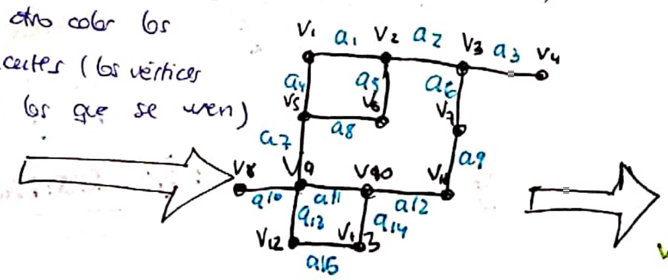
GRAFO CON 4 o menos vértices ⇒ SIEMPRE PLANO

## COMPROBAR SI UN GRAFO ES BIPARTIDO:

cojo un vértice y pintamos alternamente con otro color los adyacentes (los vértices con los que se unen)



(aristas)

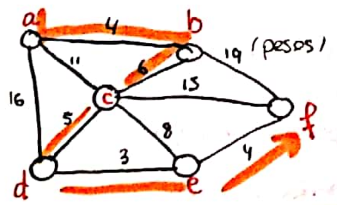



$V_1\ V_3\ V_6\ V_9\ V_{11}\ V_{13}$

$V_2\ V_4\ V_5\ V_7\ V_8\ V_{10}\ V_{12}$

Hemos podido colocar los vértices en 2 conjuntos de manera que las aristas van de un conjunto al otro.

## DETERMINAR EL MÍNIMO CAMINO HAMILTONIANO: (Árbol mínimo) (de recubrimiento)




Me sitúo en un vértice (a) y voy pasando por las aristas de menor peso (entre las posibles).

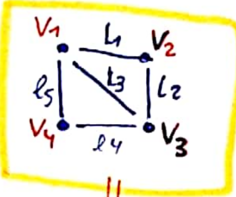
¿Cómo sé si es el mínimo?
Pruebo con otros caminos HAMILTONIANOS y comparo la suma de sus pesos. Elijo el que menos peso tenga en total.
→ Este en concreto pesa 22.
$4 + 6 + 5 + 3 + 4 = 22$

# ⇨ ISOMORFISMO DE GRAFOS

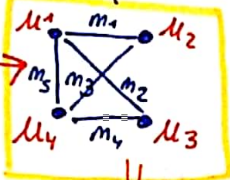
- Dos grafos isomorfos tienen IGUAL MATRIZ DE ADYACENCIA salvo permutación, esto es, ∃ una matriz de permutación ~~sólo tiene en cuenta vértices~~ (que tiene un 1 en la asignación de un vértice en otro y 0 en el resto) que verifica que $P^{-1}CP = A$.

- Todo lo que digamos sobre un grafo es válido para el otro.

- Solo difieren en
  - nombre de sus lados y vértices
  - y la forma en que los hemos representado.




⟵ ISOMORFOS ⟶




⇒

| | |
|---|---|
| $V_1 \to u_1$ | $l_1 \to m_1$ |
| $V_2 \to u_2$ | $l_2 \to m_2$ |
| $V_3 \to u_4$ | $l_3 \to m_5$ |
| $V_4 \to u_3$ | $l_4 \to m_4$ |
| | $l_5 \to m_3$ |

$$A = \begin{array}{c} \\ V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} V_1 & V_2 & V_3 & V_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} ;$$

$V_2$ tiene un lado con $V_1$ y otro con $V_3$.

$$C = \begin{array}{c} \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} ;$$

$u_2$ tiene un lado con $u_1$ y otro con $u_4$

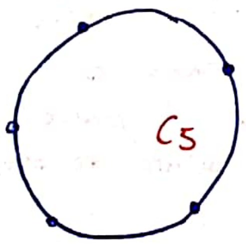
$$P = \begin{array}{c} \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} V_1 & V_2 & V_3 & V_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} = P^{-1}$$

En este caso coincide con su INVERSA.

MATRIZ DE PERMUTACIÓN

- el $V_2$ va al $u_2$
- el $V_3$ va al $u_4$.

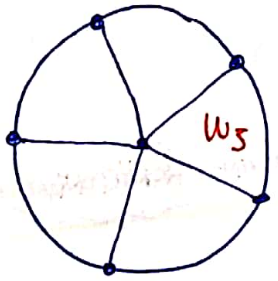
## ⇨ CICLOS ($C_n$) y ⇨ RUEDAS ($W_n$)




Ciclo con n vértices, si cada vértice es incidente únicamente con los vértices anterior y posterior.

$|V| = n$ ⟵ conjunto de vértices

$|E| = n$ ⟵ conjunto de lados




Rueda con n vértices, si cada vértice es incidente únicamente con los vértices anterior y posterior y con un tercer vértice CENTRAL.

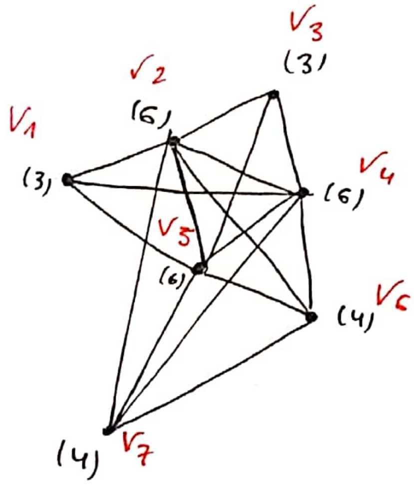
$|V| = n+1$

$|E_n| = 2n$

EJERCICIOS

# REPASO DE GRAFOS

① Construya un grafo que tenga 3 vértices de grado 6, 2 de grado 4 y 2 de grado 3.
Dé, si es posible, un camino de Euler de ese grafo.




$\{V_3, V_5, V_6, V_4, V_7, V_6, V_2, V_7, V_5, V_4, V_3, V_2, V_1, V_4, V_2, V_5, V_1\}$

② Sea G el grafo $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ y su matriz de adyacencia.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a) ¿Hay camino o circuito de Euler? Sí, los 2.

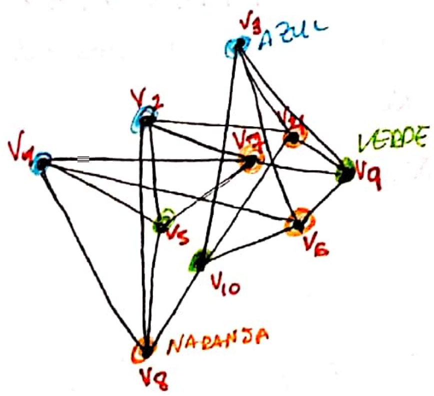
b) ¿Hay algún ciclo de Hamilton? Sí

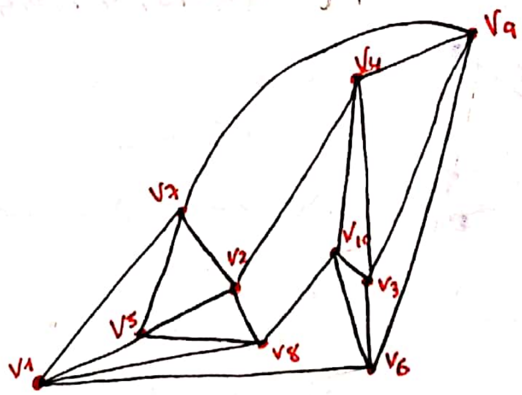
c) ¿Es plano? Sí

d) Calcula su número cromático. 3

e) ¿Es conexo? Sí

f) ¿Puede existir un camino de Hamilton o Euler en un grafo no conexo? NO ¿Sí?
– (todo grafo HAMILTONIANO es conexo)




c) ¿nº lados $\leq$ 3 · vért. − 6?
$19 \leq 3 \cdot 10 - 6$ ✓

③ Demuestra que puede haber un grafo con 13 vértices, cuyos grados sean 2,2,3,4,4,4,4,5,6,6,6,8,10

| A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K | L | M |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 2 | 3 | 4 | 4 | 4 | 4 | 5 | 6 | 6 | 6 | 8 | ~~10~~ |

-1 -1 -1 -1 -1 -1 -1 -1 -1 -1

2 2 2 3 3 3 3 4 5 5 5 ~~7~~

-1 -1 -1 -1 -1 -1 -1

2 2 2 3 2 2 2 3 4 4 4

| A | B | C | E | F | G | D | H | I | J | K |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 | ~~4~~ |

-1 -1 -1 -1

2 2 2 2 2 2 2 2 3 ~~3~~

-1 -1 -1

2 2 2 2 2 2 1 1 3

| D | H | A | B | C | E | F | G | I |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | ~~3~~ |

-1 -1 -1

1 1 2 2 2 1 1 1

| D | H | E | F | G | A | B | C |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | ~~2~~ |

-1 -1

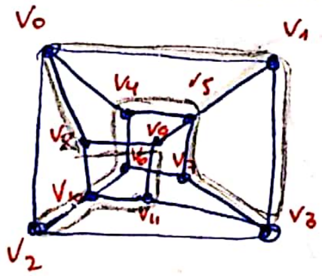
1 1 1 1 1 1 1 ~~1~~

-1

$\underbrace{1\ 1\ 1\ 1\ 1}\ 0$ No se puede ?

nº impar de "1"

④ Calcula Nº cromático de: {0, 1, 3, 7, 5, 4, 6, 2, 10, 11, 9, 8, 0}




Sí {0, 1, 3, 7, 5, 4, 6, 2, 10, 8, 9, 11}

¿Tiene un ciclo de Hamilton? ¿Y un camino de Hamilton? Sí

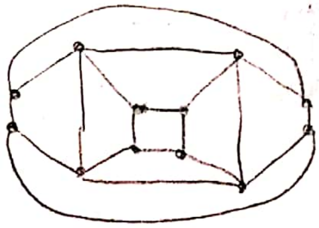
¿Tiene circuito de Euler? No (No camino, no circuito, creo.

¿Es conexo? ¿Y plano? Sí. Sí.

¿nº lados ≤ 3·vért − 6?

11 ≤ 33 − 6 ✓

Sí, es plano.



EXAMEN : **GRAFOS**

Ejercicios

1) Sea G un grafo conexo plano con 20 vért., todos de grado 3. ¿En cuántas regiones se divide el plano en una representación plana de G?

2) ¿Cuál es el mayor nº de vérts. de grado 5 que puede tener un árbol con 15 lados?

3) Construye un grafo que tenga 7 vért. de los cuales hay 3 de grado 6, 2 de grado 4 y 2 de grado 3. Da si es posible, un camino o circuito de Euler de ese grafo. ¿Podría ser plano un grafo con 7 vértices y estos grados? Razona la respuesta.

1) En un grafo, la suma de los grados de los vértices es el doble del nº de lados:

$$\boxed{2\cdot \ell = \Sigma \text{ grados (vérts)}} \Rightarrow 2\ell = 20\cdot 3$$

$$\ell = \frac{60}{2} \; ; \; \ell = 30 \text{ lados}$$

En grafo plano y conexo: $\boxed{\text{vért.} - \text{lados} + \text{caras (regiones)} = 2}$

EULER

$$\text{regiones} = 2 - 20 + 30 \; ; \; \boxed{\text{regiones} = 12}$$

2) Creo que es $v-1$.

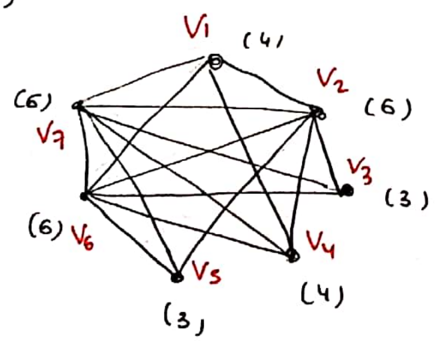
nº lados = nº vértices + 1 | $\Sigma$ grados (vért) = 2 · lados

$15 = (x+y)+1$ | $5x + y = 2\cdot 15$

$$\left.\begin{array}{l} 15 = (x+y)+1 \\ 5x+y = 30 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x+y = 14 \\ 5x+y = 30 \end{array} \left.\right\} \begin{array}{l} y = 10 \\ x = 4 \end{array} \Rightarrow$$

Por tanto, el ↑ nº vérts. de grado 5, será 4.

3)




Camino: {V5, V7, V1, V6, V7, V2, V6, V3, V7, V4, V6, V5, V2, V1, V4, V2, V3}

Circuito: No tiene

Tiene CAM. pero no circ. pq tiene exactamente 2 vért. de grado impar.

¿PLANO? NO

¿nº lados ≤ 3 · vért. − 6?

$\sim 16 \leq 3\cdot 7 - 6$

$\sim 16 \leq 15$ X NO

EXAMEN: Ejercicios: MIR: Junio 2019 (ej. 8)

Responde suponiendo que se trata de un grafo sin lazos ni lados paralelos.

1) ¿Cuántos lados puede tener, como máximo un grafo plano con 50 vértices?

2) ¿Cuál es el nº menor de vértices que puede tener un grafo con 600 lados?

3) ¿Cuántas hojas tiene un árbol con 5 vértices de grado 6, 8 vért. de grado 5, 15 vért. de grado 4, 32 vért. de grado 3, 50 vértices de grado 2?

4) ¿Puede haber ... 3, 4, 3, 5, 3, 6, 3, 4, 3, 5, 3, 6?

1) En un grafo PLANO : nº lados ≤ 3 · vértices − 6 (y se puede alcanzar la igualdad)

Puesto que nos dicen que $v = 50$, tenemos: $l \leq 50 \cdot 3 - 6 = 144$

es decir el nº máximo de lados es $\boxed{144}$

2) El nº máximo de lados que tiene un grafo con n vértices sería 600 lados:

(hablamos de un grafo completo (Kn)) : $\frac{n(n-1)}{2} = 600 \Rightarrow n^2 - n - 1200 = 0$ < $n = 35,1446...$ ; $n = \cancel{-...}$

No se pueden obtener 600 lados con 35 vértices.

Sin embargo, con $n = 36$ (vértices):

$\frac{36(36-1)}{2} = 630 \Rightarrow K_{36}$ (grafo completo) tiene 630 lados.

Sol: Por tanto, el nº menor de vértices que puede tener un grafo con 600 lados es 36.

Escaneado con CamScanner

3) Nos falta conocer el nº vérts. de grado 1 (es decir, nº de hojas). $\Rightarrow X$.

$$n \text{ (vérts)} = 5+8+15+32+50+x = 110+x$$

$110 + x \Rightarrow$ Por ser árbol $\Rightarrow 109 + x$ = lados

(nº lados = nº vérts − 1)

$$l = (110+x)-1$$

Ahora: $\boxed{\Sigma \text{ grados (vért)} = 2 \cdot \text{lados}}$

$$5\cdot 6 + 8\cdot 5 + 15\cdot 4 + 32\cdot 3 + 50\cdot 2 = 2(109+x)$$

$$326 + x = 218 + 2x \; ; \; 2x - x = 326 - 218 \; ; \; \boxed{x = 108}$$

El árbol tiene 108 hojas.

* Si en vez de 50, tuviera 100 vérts. de grado 2:

El nº de hojas sería el mismo.

Pues: $n = 160 + x$

nº lados = nº vért. − 1

$$l = (160+x)-1 \Rightarrow l = 159+x$$

$$\Sigma \text{ grados (vért)} = 2 \cdot \text{lados}$$

$$426 + x = 2(159+x) \Rightarrow \boxed{x = 108}$$

4) ¿Puede haber un grafo con 12 vérts. cuyos grados sean 3, 4, 3, 5, 3, 6, 3, 4, 3, 5, 3, 6?

Extra: Si consiguiéramos un grafo plano con esos vértices, ¿en cuántas regiones quedaría dividido el plano al dibujar ese grafo?

6 6 5 5 4 4 3 3 3 3 3 3

6(−1) → 5 4 4 3 3 2 3 3 3 3 3

5 4 4 3 3 3 3 3 3 3 2

5(−1) → 3 3 2 2 2 3 3 3 3 2

3 3 3 3 3 3 2 2 2 2

3(−1) → 2 2 2 3 3 2 2 2 2

3 3 2 2 2 2 2 2 2

3(−1) → 2 1 1 2 2 2 2 2

2 2 2 2 2 2 1 1

2(−1) → 1 1 2 2 2 1 1

2 2 2 1 1 1 1

2(−1) → 1 1 1 1 1 1

0 1 1 1 1

1 1 1 1 0

0 1 1 0

1 1 0 0

0 0 0 (todo 0)

Como hemos llegado a la sucesión inicial es gráfica, el grafo existe.

Extra:

Si fuera representación plana: $v - l + c = 2$

$v = 12$

$\Sigma \text{grados vért.} = 2 \cdot \text{lados}$

$\text{lados} = \dfrac{\Sigma \text{gr.}}{2}$

$$l = \frac{6+6+5+5+4+4+3+3+3+3+3+3}{2} = \frac{48}{2} = 24$$

$$c = 2 + l - v$$

$$c = 2 + 24 - 12$$

$$\boxed{c = 14}$$

quedaría dividido en 14 regiones

T6 | Ejers 2

EXAMEN: Ejercicios:

Sea G un grafo cuya matriz de adyacencia es:

$$
\begin{array}{l}
V_1 \to gr(6) \\
V_2 \to gr(4) \\
V_3 \to gr(4) \\
V_4 \to gr(4) \\
V_5 \to gr(4) \\
V_6 \to gr(6) \\
V_7 \to gr(6)
\end{array}
\quad
A = \begin{pmatrix}
0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0
\end{pmatrix}
$$

1) ¿Es G bipartido?

2) ¿Es G un grafo de Euler?

3) ¿Es G un grafo de Hamilton? En caso afirmativo da un ciclo de Hamilton.

4) ¿Es G plano?

5) ¿Cuántos caminos de longitud 3 hay de $V_1$ a $V_6$? ¿Y de $V_1$ en sí mismo?

1 y 5)

$$
A^3 = 
\begin{array}{c|ccccccc}
 & V_1 & V_2 & V_3 & V_4 & V_5 & V_6 & V_7 \\
\hline
V_1 & 22 & 19 & 19 & 19 & 19 & 23 & 23 \\
V_2 & 19 & 12 & 13 & 12 & 12 & 19 & 19 \\
V_3 & 19 & 13 & 12 & 12 & 12 & 19 & 19 \\
V_4 & 19 & 12 & 12 & 12 & 13 & 19 & 19 \\
V_5 & 19 & 12 & 12 & 13 & 12 & 19 & 19 \\
V_6 & 23 & 19 & 19 & 19 & 19 & 22 & 23 \\
V_7 & 23 & 19 & 19 & 19 & 19 & 23 & 22
\end{array}
$$

$A^3 = A^2 \cdot A$

1) NO es BIPARTIDO, porque en la diagonal principal hay ciclos de grado 3

5) Hay 23 caminos de longitud 3 de $V_1$ a $V_6$.
Hay 22 caminos de longitud 3 que unen $V_1$ consigo mismo.

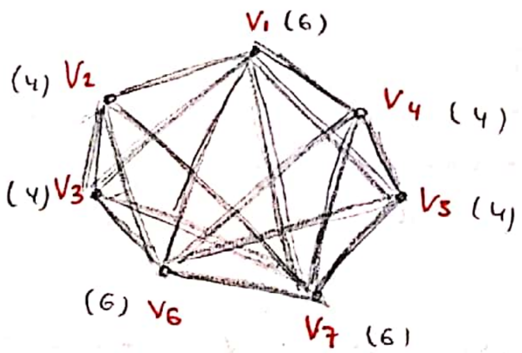
Como TODOS vértices son de grado PAR tiene camino y circuito (de Euler) → 3) Sí, porque tiene circuito de Euler

4) ¿n lados $\geq \frac{1}{2}(n-1)(n-2)+2$?

$n\ 17 \geq \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 5 + 2$ ✓

Es grafo de Hamilton.

Ciclo = $\{V_1, V_2, V_3, V_6, V_7, V_5, V_4, V_1\}$




Escaneado con CamScanner

MIRANDA Junio 2014 (ejer. 6)

Sea $G = K_{20}$. Calcule el nº mínimo de lados que hay que suprimir en $G$ para que:

1) nos quede un grafo de Euler.
2) nos quede un grafo que NO sea conexo.
3) nos quede un grafo que NO tenga ciclos.
4) nos quede un grafo cuyo número cromático sea 2.

En primer lugar: grado de cada vértice de $K_{20}$ es 19 $(n-1)$

nº lados de $K_{20} \Rightarrow \frac{n(n-1)}{2} = \frac{20(20-1)}{2} = 190$

① Para que quede grafo Euler => el grado de cada vértice debe ser par. (Ahora es 19)
Por lo que disminuimos el grado de cada vértice 1 unidad.
Cuando eliminamos 1 lado, disminuimos 1 unidad el grado de 2 vértices, así que suprimimos 10 lados, para disminuir 1 unidad el grado de cada uno de los 20 vérts

Sol: 10 lados.

② Para que deje de ser conexo de forma que quitemos el menor número de vértices debemos dejar un vért. AISLADO. Por lo tanto suprimimos los 19 lados que incida en él. Sol: 19 lados.

③ Un grafo sin ciclos es un ÁRBOL (o un bosque). Como el nº de lados de un árbol con n vérts. es lados $= n-1$, tendremos que quedarnos con $20-1 = 19$ lados. Hemos de suprimir $190 - 19 = 171$ lados. Sol: 171 lados

④ Grafo con nº cromático 2 es un grafo BIPARTIDO. Por tanto hemos de conseguir un grafo bipartido con 20 vértices y el mayor nº posible de lados. Entonces este grafo debe ser $K_{n,m}$ donde $\underbrace{n+m=20}_{\text{nº vérts.}}$ (COMPLETO) $n: 20-m$

En $K_{n,m}$, el nº de lados $= m \cdot n \Rightarrow m \cdot n = m(20-m) = 20m - m^2$. ← Esta f. alcanza el máximo para $m = 10$ (derivamos e igualamos f a cero).

Por tanto, hemos de quitar lados hasta llegar al grafo $K_{10,10}$.
Como tiene 100 lados, debemos suprimir al menos 90 para obtener un grafo bipartido. ($K_{10,10}$)

Sol: 90 lados