LMD (Grupo E del GII)

Relación de ejercicios del Tema 4

1. Traduzca las siguientes fórmulas a notación prefija ó polaca:

   (a) $\neg P \to Q \wedge R$.

   (b) $(\neg P \to Q) \wedge R$.

   (c) $P \to \neg(Q \wedge R)$.

   (d) $P \to (Q \to (R \to S))$.

   (e) $(P \to Q) \to (R \to S)$.

   (f) $(P \to \neg R) \leftrightarrow (\neg Q \wedge (\neg S \vee Q))$.

2. ¿Existe alguna fórmula lógica cuya expresión en notación polaca sea $\to\to\to PQRS$? ¿Y para $\to\to PQR \to S$?

3. Sean $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ proposiciones lógicas. Represente la frase dada en cada uno de los apartados siguientes mediante una proposición lógica:

   (a) "α_2 es condición necesaria para α_3".

   (b) "α_3 es condición suficiente para α_1".

   (c) "α_1 no es condición necesaria para α_3 ni para α_2".

   (d) "α_1 no es condición necesaria para α_3, aunque sí lo es para α_2".

   (e) "α_1 no es condición suficiente para α_3, y α_3 tampoco es condición suficiente para α_1".

   (f) "Si α_1 es condición necesaria para α_2, entonces $\neg\alpha_3$ y α_1.

   (g) "Si α_3 ó $\neg\alpha_2$, entonces α_2 es condición suficiente para $\neg\alpha_3$.

   (h) "Si α_3 es condición necesaria para α_2, entonces $\neg\alpha_3$ es condición suficiente para $\neg\alpha_2$".

   (i) "El hecho de que α_1 si y sólo si α_3, es condición necesaria para α_2".

   (j) "α_1, si y sólo si, α_3 es condición suficiente para α_2".

4. Sean las proposiciones lógicas $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5 \in \mathcal{F}(X)$, y sea I una interpretación tal que

$$\mathrm{I}\Big(\alpha_1 \to (\alpha_2 \vee \neg\alpha_3)\Big) = 0 \quad \text{e} \quad \mathrm{I}\Big(\alpha_4 \wedge \neg\alpha_5\Big) = 1.$$

   Calcule $\mathrm{I}(\alpha_i)$ para $i = 1, \ldots, 5$.

5. Dadas $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathcal{F}(X)$, y una interpretación I tal que

$$\mathrm{I}(\neg\alpha_3 \to (\alpha_1 \to \alpha_2)) = 0,$$

   estudie cuáles de las afirmaciones siguientes son correctas:

   (a) $\mathrm{I}((\alpha_1 \vee \alpha_3) \to \alpha_2) = 1$.

(b) $\mathrm{I}(\alpha_1 \leftrightarrow (\neg\alpha_2 \to \alpha_3)) = 1$.

(c) $\mathrm{I}((\neg\alpha_3 \to \alpha_1) \to \alpha_2) = 1$.

(d) $\mathrm{I}((\alpha_2 \wedge \alpha_3) \to \neg\alpha_1) = 1$.

6. Clasifique las siguientes fórmulas:

$$\alpha_1 = R\vee\neg S, \quad \alpha_2 = Q\leftrightarrow\neg Q, \quad \alpha_3 = Q\vee R \to Q\wedge R,$$
$$\alpha_4 = Q\wedge R \to Q\vee R, \quad \alpha_5 = (\neg S\leftrightarrow\neg S)\leftrightarrow(S\leftrightarrow S).$$

7. Si $\alpha, \beta \in \mathcal{F}(X)$, justifique las siguientes afirmaciones:

(a) Si β es una tautología, entonces $\alpha \to \beta$ es una tautología.

(b) Si α es una contradicción, entonces $\alpha \to \beta$ es una tautología.

8. Sean las proposiciones lógicas

$$\alpha = P \to (Q \to (P \to (R \to Q))) \ \text{ y } \ \beta = (((P\vee Q)\wedge P) \to R)\wedge(\neg P \to \neg R).$$

Estudie cuáles de las afirmaciones siguientes son correctas:

(a) α y β son tautologías.

(b) α es tautología pero β no lo es.

(c) α no es tautología pero β sí lo es.

(d) Ni α ni β es tautología.

9. Justifique que cualquier interpretación satisface al conjunto vacío.

10. Para cada uno de los siguientes conjuntos de fórmulas, encuentre todas las interpretaciones que lo satisfacen.

(a) $\Omega_1 = \{P\wedge Q \to P\vee Q\}$.

(b) $\Omega_2 = \{P\vee Q \leftrightarrow P\wedge Q\}$.

(c) $\Omega_3 = \{P_1 \to P_2,\ P_2 \to P_3,\ P_3 \to P_4,\ P_4 \to P_1\}$.

(d) $\Omega_4 = \{P_1 \to P_2,\ P_2 \to P_3,\ P_3 \to P_4,\ P_4 \to \neg P_1\}$.

11. Sean $\Omega = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\} \subseteq \mathcal{F}(X)$ y $\tau \in \mathcal{F}(X)$, una *tautología*. Justifique que el conjunto $\Omega \cup \{\tau\}$ es satisfacible, si y sólo si, el conjunto Ω es satisfacible.

12. Dado un conjunto de proposiciones lógicas $\Omega = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$, pruebe que Ω es insatisfacible, si y sólo si, la fórmula $\alpha_1\wedge\alpha_2\wedge\cdots\wedge\alpha_n$ es una contradicción.

13. Demuestre las siguientes equivalencias entre proposiciones, primero usando tablas de verdad, y a continuación basándose en la definición de interpretación mediante polinomios de Gegalkine:

(a) $\alpha \equiv \neg\neg\alpha$.

(b) $\alpha \equiv \alpha\vee\alpha, \quad \alpha \equiv \alpha\wedge\alpha$.

(c) $\alpha\vee\beta \equiv \beta\vee\alpha, \quad \alpha\wedge\beta \equiv \beta\wedge\alpha$.

(d) $\alpha \vee (\beta \vee \gamma) \equiv (\alpha \vee \beta) \vee \gamma, \quad \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma) \equiv (\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma.$

(e) $\alpha \equiv \alpha \wedge (\alpha \vee \beta), \quad \alpha \equiv \alpha \vee (\alpha \wedge \beta).$

(f) $\alpha \wedge (\beta \vee \gamma) \equiv (\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma), \quad \alpha \vee (\beta \wedge \gamma) \equiv (\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma).$

(g) $\neg(\alpha \vee \beta) \equiv \neg\alpha \wedge \neg\beta, \quad \neg(\alpha \wedge \beta) \equiv \neg\alpha \vee \neg\beta.$

(h) $\alpha \to \beta \equiv \neg\alpha \vee \beta.$

(i) $\alpha \leftrightarrow \beta \equiv (\alpha \to \beta) \wedge (\beta \to \alpha).$

14. Para $\alpha, \beta \in \mathcal{F}(X)$, pruebe que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

    (a) $\alpha \equiv \beta$.

    (b) $\alpha \leftrightarrow \beta$ es una tautología.

    (c) $\alpha \leftrightarrow \neg\beta$ es una contradicción.

15. Traduzca la siguiente frase a la lógica de proposiciones mediante un condicional:
    "*En el desierto crece vegetación cuando llueve.*"
    A continuación enuncie las correspondientes afirmaciones recíproca, contraria y contrarecíproca.

16. Sean $\Omega = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\} \subseteq \mathcal{F}(X)$ y $\beta \in \mathcal{F}(X)$. Demuestre que $\Omega \models \beta$, si y sólo si, el conjunto de proposiciones $\Omega \cup \{\neg\beta\}$ es insatisfacible.

17. Para cualesquiera $\alpha, \beta, \gamma \in \mathcal{F}(X)$, demuestre que las siguientes fórmulas son tautologías:

    (a) Ley del contrarecíproco: $(\alpha \to \beta) \leftrightarrow (\neg\beta \to \neg\alpha)$.

    (b) Ley de silogismo: $(\alpha \to \beta) \to ((\beta \to \gamma) \to (\alpha \to \gamma))$.

    (c) Ley de Frege: $(\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma))$.

    (d) Ley de Peirce: $((\alpha \to \beta) \to \alpha) \to \alpha$.

18. Compruebe que cada una de las proposiciones siguientes es una tautología, donde α, β, γ son fórmulas cualesquiera pertenecientes a $\mathcal{F}(X)$:

    (a) $\Big(\neg\alpha \to \big(\gamma \wedge \neg\gamma\big)\Big) \to \alpha.$

    (b) $\Big(\big(\alpha \wedge \neg\beta\big) \ \to \ \big(\gamma \wedge \neg\gamma\big)\Big) \to (\alpha \to \beta).$

    Las tautologías mostradas en este ejercicio nos proporcionan sendos esquemas de demostración por reducción al absurdo. Explique este hecho y ponga ejemplos.

19. Demuestre las siguientes propiedades sobre implicación semántica:

    (a) *Modus ponendo ponens*: $\{\alpha, \ \alpha \to \beta\} \models \beta$.

    (b) *Modus tollendo ponens*: $\{\alpha \vee \beta, \ \neg\alpha\} \models \beta$.

    (c) *Modus tollendo tollens*: $\{\alpha \to \beta, \ \neg\beta\} \models \neg\alpha$.

    (d) *Modus ponendo tollens*: $\{\neg(\alpha \wedge \beta), \ \beta\} \models \neg\alpha$.

    En cada uno de los apartados anteriores, explique la relación entre la implicación semántica dada y el nombre proporcionado.

20. Sea el conjunto de proposiciones lógicas

$$\Gamma = \Big\{ (P \to Q) \to P,\ P \to \neg R,\ \neg(Q \wedge \neg R) \Big\}.$$

¿Cuáles de las proposiciones siguientes son consecuencia lógica de Γ?

a) $(Q \to P) \to R$ b) $P \wedge \neg(Q \vee R)$ c) $P \to (Q \vee R)$ d) Q

21. Estudie la relación lógica existente entre las proposiciones

$$\alpha = P \to (Q \to R \vee S) \ \text{ y } \ \beta = (P \to Q) \to (\neg R \wedge \neg S \to \neg P).$$

22. Se sabe que $\mathcal{A}$ es condición necesaria para $\mathcal{B} \vee \mathcal{C}$. En tal caso, de las siguientes afirmaciones encuentre las que son correctas:

(a) $\mathcal{B}$ es condición suficiente para $\neg\, \mathcal{A}$.
(b) $\neg\, \mathcal{C}$ es condición necesaria para $\mathcal{A}$.
(c) $\neg\, \mathcal{A}$ es condición suficiente para $\neg\, \mathcal{B}$.
(d) $\mathcal{C}$ es condición necesaria para $\neg\, \mathcal{A}$.

23. Demuestre el *Teorema de la deducción*, es decir, dados un conjunto de fórmulas $\Omega \subseteq \mathcal{F}(X)$ y $\alpha, \beta \in \mathcal{F}(X)$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(a) $\Omega \models \alpha \to \beta$.
(b) $\Omega \cup \{\alpha\} \models \beta$.

24. Sea $\Gamma = \big\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\big\}$ un conjunto de proposiciones lógicas. Demuestre que Γ es insatisfacible, si y sólo si, la proposición $\beta = \alpha_1 \to (\alpha_2 \wedge \alpha_3 \to \neg \alpha_4)$ es una tautología.

25. Sean $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$ proposiciones lógicas distintas y sea $\Gamma = \{\alpha_3, \alpha_4\}$. ¿Cuáles de las proposiciones siguientes puede no ser consecuencia lógica de Γ?

(a) $\alpha_1 \to (\alpha_2 \to (\alpha_5 \to \alpha_4))$.
(b) $(\alpha_2 \to \alpha_4) \to (\alpha_2 \to \alpha_5)$.
(c) $\alpha_2 \to ((\alpha_3 \to \alpha_5) \to \alpha_5)$.
(d) $(\alpha_4 \wedge \alpha_5) \to (\alpha_2 \to \alpha_5)$.

26. Si $\Omega \subseteq \mathcal{F}(X)$ y $\alpha, \beta \in \mathcal{F}(X)$, justifique que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(a) $\Omega \models \alpha \vee \beta$.
(b) $\Omega \cup \{\neg \alpha\} \models \beta$.
(c) $\Omega \cup \{\neg \beta\} \models \alpha$.
(d) $\Omega \cup \{\neg \alpha, \neg \beta\}$ es insatisfacible.

27. Sea la proposición lógica $\alpha = \neg\big(\neg Q \vee R \leftrightarrow (\neg P \wedge R \to Q)\big)$. De las afirmaciones siguientes, encuentre las que son correctas:

(a) α no es consecuencia lógica del conjunto $\{P \wedge Q \wedge \neg R,\ \neg P \wedge Q \wedge R\}$.

(b) α es una tautología.

(c) α implica semánticamente a la fórmula $Q \to (R \to P)$.

(d) Existen exactamente cuatro interpretaciones sobre el conjunto de variables proposicionales $\{P, Q, R\}$ que satisfacen a α.

28. Obtenga una forma clausulada para cada una de las fórmulas siguientes:

(a) $P \to (Q \to (R \to S))$.

(b) $(P \to (Q \to R)) \to S$.

(c) $(\neg P \wedge Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge \neg Q) \vee (P \wedge Q \wedge \neg R)$.

(d) $(P \to (Q \vee R)) \vee (Q \to \neg P)$.

29. Aplique el Algoritmo de Davis-Putnam al siguiente conjunto de cláusulas:

$$\Gamma = \Big\{ P \vee \neg Q \vee R,\ \neg P \vee Q \vee R,\ P \vee Q \vee \neg R,\ \neg P \vee \neg Q \Big\}.$$

En vista del resultado, ¿qué conclusión se obtiene?

30. Dado el conjunto de proposiciones lógicas

$$\Omega = \Big\{ (Q \to P) \wedge (S \to R) \to T,\ \neg R \to \neg Q \wedge S,\ (T \vee S) \leftrightarrow (R \to \neg P) \Big\},$$

donde P, Q, R, S, T son variables proposicionales, se pide:

(a) Demostrar que Ω es satisfacible.

(b) Encontrar alguna interpretación que satisfaga a Ω.

(c) Estudiar cuáles de las fórmulas siguientes son consecuencia lógica de Ω:

$$\alpha_1 = P \to R,\quad \alpha_2 = S \to \neg P \vee \neg T,\quad \alpha_3 = P \vee Q \to T,\quad \alpha_4 = S \wedge Q \to (R \leftrightarrow R).$$

31. Sobre cuatro cinéfilos A, B, C y D se sabe lo siguiente. Si A decide ir al cine, B también irá. Sobre C y D se sabe que no les gusta ver una misma película juntos. B y C, o van al cine juntos, o no va ninguno de los dos. Por último, si A no va al cine, entonces B y D sí quieren ir. ¿Quienes estarán en el cine esta noche?

32. Un país está habitado por dos tipos de personas. Los *veraces* que siempre dicen la verdad y los *mendaces* o mentirosos que siempre mienten (es decir, si se le pregunta por algo que ellos saben que es verdad, responden diciendo que es mentira, y si ellos saben que es mentira, responden diciendo que es verdad).

(a) Un turista llama a la puerta de una casa en la que sabe a ciencia cierta que vive un matrimonio, y el marido abre la puerta para ver quién es. El turista dice: "*Necesito información sobre usted y su esposa. ¿Cual de ustedes, si alguno lo es, es veraz y cual es mendaz?*", a lo que el hombre responde: "*Ambos somos mentirosos*".

(b) Un turista llega a una bifurcación de una carretera en la que no hay indicaciones, salvo un cartel que anuncia la proximidad de un restaurante, y un habitante de aquella región parado en la misma bifurcación. Si el turista quiere ir al restaurante, ¿qué pregunta debe hacer a la persona que está junto a la bifurcación para que ésta con su respuesta "sí" o "no" le indique el camino que debe seguir?

(c) Otro día, nuestro intrépido turista llega a un punto en el que salen tres caminos, y sólo uno de ellos conduce al hotel. En el cruce de caminos hay dos habitantes de aquella región. Si el turista puede formular a lo sumo una pregunta cuya respuesta sea "sí" o "no" a cada uno de los nativos, ¿cómo puede saber el camino que ha de seguir para ir al hotel?

En cada uno de los apartados anteriores hay que dar una respuesta en la cual primero se represente la información dada mediante proposiciones lógicas, y a continuación se llegue a la conclusión aplicando un método algebraico a tales proposiciones. Finalmente, el alumno intentará mediante un razonamiento natural corroborar la solución obtenida formalmente.

33. Clasifique la proposición lógica siguiente, sin hacer uso de tablas de verdad:

$$\Big((T \vee P) \wedge \neg Q \to R \Big) \wedge \Big(\neg R \wedge \big(P \vee T \big) \Big) \to Q \vee S.$$

34. En cada uno de los enunciados siguientes, relativos a fórmulas de la Lógica proposicional, decida si la afirmación dada es verdadera ó falsa, justificando adecuadamente la respuesta:

(a) $((\neg P \to Q) \vee (\neg Q \to (R \vee \neg S))) \to ((\neg P \vee \neg Q) \to (S \to R))$ es una tautología.

(b) Si cada una de las proposiciones α y β es contingente, entonces el conjunto $\{\alpha, \beta\}$ es satisfacible.

(c) Si α y β son dos proposiciones y $\alpha \not\models \beta$, entonces $\alpha \models \neg\beta$.

35. Estudie si la consecuencia lógica $\{\alpha_1 \alpha_2, \alpha_3\} \models \beta$ es cierta o no, donde:

- $\alpha_1 = R \vee T \to P \vee S$,
- $\alpha_2 = \neg R \wedge \neg S \to \neg P \wedge (\neg P \to Q)$,
- $\alpha_3 = R \to (\neg(P \vee T) \to (\neg S \vee T))$,
- $\beta = \neg(S \to T \vee R) \vee (S \wedge \neg(T \to R))$.

Caso de no ser cierta, encuentre una interpretación que lo pruebe.

36. Una isla está habitada por dos tipos de personas: Los *veraces* que siempre dicen la verdad y los *mendaces* ó mentirosos que siempre mienten. Llega un grupo de meteorólogos a dicha isla interesados en saber si durante la jornada de ayer estuvo lloviendo en la isla. Encuentran a tres nativos, que dicen llamarse Ana, Bruno y Carmen, y les plantean la cuestión que les interesaba. Las respuestas que dieron son:

Ana: "*Ayer no llovió aquí*".
Bruno: "*Ayer sí llovió aquí*".
Carmen: "*Si ayer llovió, yo soy una mentirosa*".

En vista de ésto, ¿es posible deducir qué tiempo hizo ayer en la isla, y de paso, saber quién miente y quién dice la verdad?

Para resolver este ejercicio, represente la información proporcionada mediante proposiciones lógicas, y a partir de la representación obtenida aplique un método algebraico.