LMD (Grupo E del GII)

Relación de ejercicios del Tema 6

1. En cada apartado, obtenga una forma nomal prenexa para la fórmula dada con el menor número posible de cuantificadores:

   a) $\forall x P(x) \to \forall x R(x,a)$.

   b) $\exists x P(x) \to \forall x R(x,a)$.

   c) $\exists x P(x) \to \exists x R(x,a)$.

   d) $\forall x P(x) \to \exists x R(x,a)$.

   e) $\exists x (P(x) \to \exists x R(x,a))$.

   f) $\forall x Q(x) \wedge \forall y Q(f(y))$.

   g) $\neg \forall z \exists x R(x,z) \vee \exists x P(f(x))$.

2. Ponga de manifiesto mediante un ejemplo que si α es una fórmula y β es una forma normal de Skolem para α, las fórmulas α y β no tienen por qué ser equivalentes. ¿Hay alguna relación lógica entre α y β que se verifique siempre?

3. Obtenga una forma normal clausulada para cada una de las sentencias siguientes:

   a) $\forall x P(x) \vee \Big(\forall y Q(y) \wedge \forall x Q(f(x))\Big)$.

   b) $\forall x \exists y R(x,y) \wedge \exists y \forall x S(x,y)$.

   c) $\exists x P(x) \leftrightarrow \neg \exists x R(x,a)$.

   d) $\exists y \Big(\Big(\forall x R(x,y) \to \forall x P(x)\Big) \to \forall y \neg \exists x R(y, f(x))\Big)$.

   e) $\exists y \forall x R(x,y) \leftrightarrow \forall x \Big(P(x) \to \forall y \neg \exists z R(y, f(x))\Big)$.

   f) $\exists x \forall y \Big(R(x,y) \to \exists y \exists z \Big(P(y) \to R(y,x)\Big)\Big) \to \forall z \exists y \forall x S(f(x,y), z)$.

   g) $\exists y \forall x \Big[\Big(\forall x Q(x, f(y)) \vee \neg P(y)\Big) \to \neg \exists y \Big(Q(a,x) \wedge P(f(y))\Big)\Big]$.

   h) $\forall x \Big[\forall y \Big(\forall x Q(x,y) \wedge \neg P(y)\Big) \to \neg \exists y \Big(Q(a,x) \vee P(f(y))\Big)\Big]$.

   i) $\forall x \Big(\neg R(x,a) \to \forall y Q(y,x)\Big) \to \neg \exists x P(f(x))$.

4. Sea la fórmula $\alpha = \forall x (\exists y Q(x,y) \to \forall y Q(x,y))$ que pertenece a un lenguaje de predicados de primer orden. Elija la opción correcta:

   a) Una forma normal prenexa para α es $\forall x \forall y (Q(x,y) \to Q(x,y))$.

   b) Una forma normal de Skolem para α es $\forall x \forall z (Q(x, f(x)) \to Q(x,z))$.

   c) Una forma normal clausulada para α es $\forall x \forall y \forall z (\neg Q(x,y) \vee Q(x,z))$.

   d) Ninguna de las afirmaciones anteriores es correcta.

5. Dada la substitución $\sigma = \big(x_1|x_2,\ x_2|x_3,\ x_3|x_1,\ y|z,\ z|x,\ x|x_1\big)$, y el literal $L = R(x,y,x_2)$, calcule el resultado de aplicar 2018 veces σ a L, es decir, $\sigma^{2018}(L)$.

6. Obtenga un unificador principal, siempre que exista, para cada uno de los conjuntos de literales siguientes:

   a) $\Big\{R(x,y),\ R(y,z)\Big\}$.

   b) $\Big\{R(x,y),\ R(y,a)\Big\}$.

   c) $\Big\{R(x,y),\ R(y,f(x))\Big\}$.

   d) $\Big\{R(x_1,x_2),\ R(y_1,y_2),\ R(z_1,z_1)\Big\}$.

   e) $\Big\{R(x,y),\ R(z,a),\ R(b,x)\Big\}$.

   f) $\Big\{R(x,f(x,y)),\ R(y,z)\Big\}$.

   g) $\Big\{R(x,f(y)),\ R(z,z),\ R(a,x)\Big\}$.

   h) $\Big\{R(x,f(x)),\ R(f(y),y)\Big\}$.

   i) $\Big\{R(x,f(z)),\ R(f(y),y)\Big\}$.

   j) $\Big\{R(f(y),g(x)),\ R(x,y),\ R(z,g(z))\Big\}$.

   k) $\Big\{S(a,x,x),\ S(y,y,a)\Big\}$.

   l) $\Big\{S\Big(x_5, f_1(f_3(a,x_6)), f_2\Big(x_2, f_3(x_1,x_4), x_4\Big)\Big),$
   $S\Big(f_1(x_1), x_5, f_2\Big(f_4(x_4), x_3, f_3\big(f_4(x_6), f_4(a)\big)\Big)\Big)\Big\}$.

7. Encuentre dos unificadores principales σ_1 y σ_2 para el conjunto de literales

$$\Gamma = \Big\{R(x,y),\ R(y,z)\Big\}.$$

   A continuación obtenga dos sustituciones μ_1 y μ_2 tales que $\sigma_2 = \mu_1 \circ \sigma_1$ y $\sigma_1 = \mu_2 \circ \sigma_2$.

8. Obtenga un unificador principal σ para el conjunto de literales

$$\Gamma = \Big\{\neg R\big(g(x,y), f(f(z))\big),\ \neg R\big(g(z,f(z)), f(y)\big)\Big\}.$$

   Compruebe que la sustitución $\sigma' = (x|g(z_1),\ y|f(g(z_1)),\ z|g(z_1))$ es un unificador para el conjunto Γ y encuentre una sustitución μ tal que $\sigma' = \mu \circ \sigma$.

9. Justifique la validez de la siguiente generalización del Modus Ponens: Para cualesquiera fórmulas $\alpha, \beta_1, \dots, \beta_m, \beta_1', \dots, \beta_n'$, se verifica que

$$\Big\{\alpha \vee \beta_1 \vee \cdots \vee \beta_m,\ \neg\alpha \vee \beta_1' \vee \cdots \vee \beta_n'\Big\} \models \beta_1 \vee \cdots \vee \beta_m \vee \beta_1' \vee \cdots \vee \beta_n'.$$

10. Encuentre todas las resolventes posibles para cada uno de los pares de cláusulas siguientes:

    a) $P(x) \vee Q(x),\ \neg P(y) \vee Q(z)$.

b) $P(x) \vee \neg Q(x), \;\; \neg P(y) \vee Q(y)$.

c) $P(x) \vee \neg Q(x) \vee R(x,a), \;\; \neg P(y) \vee Q(y) \vee S(y,y)$.

d) $\neg P(x) \vee \neg P(f(x)), \;\; P(x) \vee \neg Q(y)$.

e) $\neg P(y) \vee \neg P(f(x)), \;\; P(x) \vee \neg Q(y)$.

f) $R(x,a) \vee \neg Q(x), \;\; \neg R(y,b) \vee S(y,z) \vee Q(f(a))$.

g) $R(x,a) \vee \neg Q(x) \vee R(y,a), \;\; \neg R(y,z) \vee S(y,z) \vee Q(f(z)) \vee Q(a)$.

11. A partir del conjunto de cláusulas $\Gamma = \Big\{\neg P(x) \vee P(f(x)), \; P(a)\Big\}$, definimos la siguiente sucesión de conjuntos de cláusulas: $\Gamma_0 = \Gamma$ y para $n \geq 1$, Γ_n es el conjunto de cláusulas que se obtiene de Γ_{n-1} al añadirle todas las resolventes posibles que se pueden obtener a partir de dos cláusulas en dicho conjunto. Justifique que el conjunto $\bigcup\limits_{n\geq 0} \Gamma_n$ es infinito.

    ¿Es Γ satisfacible? ¿Qué consecuencias puede tener ésto cuando se intenta averiguar la satisfacibilidad ó insatisfacibiliad de Γ mediante el uso de un método basado en el Principio de Resolución?

12. Consideramos las cláusulas $\begin{cases} C_1 \equiv P(x, f(y)) \vee \neg P(x,a) \\ C_2 \equiv \neg P(y,x) \vee P(x, f(z)) \end{cases}$. Elija la opción correcta:

    a) No existe ninguna resolvente para C_1 y C_2.

    b) La cláusula vacía se obtiene como una resolvente binaria de C_1 y C_2.

    c) La cláusula $P(f(y), f(z)) \vee \neg P(x,a)$ es una resolvente de C_1 y C_2.

    d) La cláusula $P(x, f(y)) \vee \neg P(y,x)$ es una resolvente de C_1 y C_2.

13. Justifique la validez de las siguientes afirmaciones:

    a) Si C es una resolvente binaria de las cláusulas C_1 y C_2, entonces $\big\{C_1, C_2\big\} \models C$.

    b) Si $\sigma(C)$ es un factor de la cláusula C, entonces $C \models \sigma(C)$.

    c) Si C es una resolvente de las cláusulas C_1 y C_2, entonces $\big\{C_1, C_2\big\} \models C$.

14. Estudie si el conjunto de cláusulas siguiente es satisfacible o insatisfacible:

$$\Gamma = \Big\{R(x,a) \vee P(x) \vee P(y), \; \neg R(b,x) \vee Q(x, f(y)), \; \neg P(z) \vee \neg P(x), \; \neg Q(z, f(z))\Big\}.$$

15. Estudie la satisfacibilidad del conjunto de cláusulas siguiente, primero aplicando el Algoritmo de Davis-Putnam, y a continuación mediante el método de resolución:

$$\Sigma = \Big\{P \vee Q, \; P \vee \neg Q, \; \neg P \vee R, \; \neg P \vee \neg R\Big\},$$

16. Estudie si el conjunto de cláusulas $\Gamma = \Big\{R(a,x) \vee \neg P(x), \; \neg R(y,y) \vee P(z)\Big\}$ es consistente ó inconsistente.

17. Consideramos el conjunto de cláusulas

$$\Gamma = \Big\{\neg P(f(a)),\ \neg P(g(x))\vee P(x),\ P(x)\vee P(y)\vee\neg P(f(x)),$$

$$\neg P(a),\ P(f(g(a))),\ P(g(x))\vee\neg P(x)\Big\}.$$

¿Es Γ refutable? Si su respuesta es positiva, muestre alguna refutación para Γ, mientras que si es negativa, dé un modelo para Γ.

18. Dado el conjunto de fórmulas de un lenguaje de predicados,

$$\Omega = \Big\{\forall x\forall y\forall z\Big(R(x,y)\wedge R(y,z)\to R(x,z)\Big),\ \exists x\Big(R(x,b)\wedge\neg R(x,a)\Big)\Big\},$$

¿cuál de las fórmulas siguientes es consecuencia lógica de Ω?

a) $\neg R(b,a)$ b) $R(a,b)$ c) $\exists x R(b,x)$ d) $\forall x\neg R(b,x)$

19. Aplique el método de refutación por resolución para demostrar las siguientes implicaciones semánticas:

a) $\exists x\forall y R(x,y)\models\exists z R(z,a)$.

b) $\forall x(P(x)\to Q(x)),\ \forall x P(x)\models\forall x Q(x)$.

c) $P(a)\vee P(b)\models\exists x P(x)$.

d) $\forall x(P(x)\to Q(x)),\ P(a)\models Q(a)$.

e) $\forall x(P_1(x)\to P_2(x)),\ \forall x(P_2(x)\to P_3(x))\models\forall x(P_1(x)\to P_3(x))$.

f) $\forall x(P(x)\to Q(x,f(x))),\ \forall x(P(x)\to R(f(x))),\ \exists x P(x)\models\exists x\exists y Q(x,y)$.

g)
$$\left.\begin{array}{l}\exists x(P(x)\wedge\forall y(Q(y)\to R(x,y)))\\ \forall x(P(x)\to\forall y(S(y)\to\neg R(x,y)))\end{array}\right\}\models\forall x(Q(x)\to\neg S(x)).$$

20. Utilice el método de refutación por resolución para estudiar la relación lógica entre las proposiciones

$$\alpha = P\to(Q\to R\vee S)\ \text{ y }\ \beta = (P\to Q)\to(\neg R\wedge\neg S\to\neg P).$$

21. Use el método de refutación por resolución para comprobar que:

a) La fórmula $\exists x P(x)\wedge\exists x Q(x)$ no implica semánticamente a la fórmula $\exists x(P(x)\wedge Q(x))$.

b) La fórmula $\forall x(P(x)\vee Q(x))$ no implica semánticamente a la fórmula $\forall x P(x)\vee\forall x Q(x)$.

22. Aplique el método de refutación por resolución para mostrar que las fórmulas $\forall x R(x,y)$ y $\forall y R(y,y)$ no son equivalentes.

23. Demuestre que cada una de las fórmulas siguientes es universalmente válida mediante una refutación por resolución:

a) $\exists x(P(x)\to P(f(a)))$.

b) $\neg\exists x\forall y(R(x,y)\leftrightarrow R(y,y))$.

c) $\forall x \exists y (Q(x,y) \vee \forall z \neg Q(x,z))$.

24. Sea Γ el conjunto formado por las cláusulas siguientes, las cuales mostramos de forma numerada:

(1) $\neg H(x,y) \vee D(y,x)$	(4) $\neg Q(x,y)$
(2) $\neg T(x,f(x)) \vee Q(y,z) \vee Q(b,t)$	(5) $H(y,x) \vee H(a,f(t))$
(3) $\neg D(f(y),a) \vee T(f(x),z)$	(6) $H(b,t)$

Estudie si existe o no una refutación lineal-input para Γ.

25. Encuentre una resolución lineal-input para probar que el siguiente conjunto de cláusulas es insatisfacible:

$$\Big\{\neg D(x) \vee \neg H(y,x) \vee \neg S(y) \vee F(x),\ \neg D(x) \vee \neg V(x) \vee S(x),\ \neg D(x) \vee V(x),$$
$$\neg H(y,x) \vee \neg D(y) \vee D(x),\ D(a),\ H(a,b),\ \neg H(x,y) \vee \neg F(y)\Big\}.$$

26. Encuentre un conjunto insatisfacible de cláusulas para el que no exista ninguna refutación lineal-input.

27. Sean $x_1, x_2, \ldots, x_n$ todos los símbolos de variable para los que hay alguna ocurrencia libre en una fórmula α. Se define el *cierre universal* de la fórmula α como la fórmula $\alpha^* = \forall x_1 \forall x_2 \ldots \forall x_n \alpha$. Por ejemplo, el cierre universal de la fórmula $\forall x R(x,y)$ es $\forall y \forall x R(x,y)$. Justifique que una fórmula α es universalmente válida, si y sólo si, α^* es universalmente válida.

28. ¿Es la fórmula $\forall x (R(x,y) \vee R(y,x)) \to R(y,y)$ universalmente válida? ¿Y la fórmula $\forall y R(x,y) \to \exists z R(z,a)$?

29. Dado un conjunto de fórmulas $\Omega = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$, sean $x_1, \ldots, x_k$ los símbolos de variable para cada uno de los cuales aparece alguna ocurrencia libre en la fórmula $\alpha = \alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_n$. Sean $c_1, \ldots, c_k$ símbolos de constante distintos que no aparecen en α. Para cada $i = 1, \ldots, n$, sea α_i^* la fórmula obtenida de α_i al reemplazar todas las ocurrencias libres de x_j por c_j, para todo $j = 1, \ldots, k$. Justifique que Ω es satisfacible, si y sólo si, $\Omega^* = \{\alpha_1^*, \ldots, \alpha_n^*\}$ es satisfacible. (De esta forma vemos que la restricción que adoptamos en clase de teoría al considerar sólo fórmulas que son sentencias, no impide aplicar los métodos estudiados a cualquier conjunto de fórmulas.)

30. En cada apartado, aplique el método de refutación por resolución para estudiar si la implicación semántica planteada es o no correcta:

a) $\forall x (R(x,y) \to R(y,x)),\ \exists z \neg R(y, f(z)) \models \exists x \neg R(x,y)$.

b)
$$\left.\begin{array}{l} \forall x \forall y (S(x,y,z_1) \vee \neg S(y,z_1,x)) \\ S(f(b), z_1, a) \\ \forall x (S(a,x,z_1) \to R(x,z_2)) \end{array}\right\} \models \exists x R(f(x), z_2).$$

31. En cada uno de los apartados siguientes, traduzca los enunciados a un lenguaje de predicados de primer orden, y demuestre mediante refutación por resolución, que la conclusión es correcta:

    a) *A ningún niño le gusta la verdura. A todos los ecologistas les gusta la verdura. Por tanto, ningún niño es ecologista.*

    b) *Algunos aficionados al fútbol, son aficionados al baloncesto. Ningún aficionado al fútbol va al cine los domingos por la tarde. Por tanto, algún aficionado al baloncesto no va al cine los domingos por la tarde.*

    c) *Todos los que juegan en bolsa, consultan las páginas económicas de la prensa. No existen personas que consulten las páginas económicas de la prensa y no tengan dinero. Pepe no tiene dinero. Por tanto, existen personas que no juegan en bolsa.*

32. Un estudiante de la asignatura LMD es abordado por un aficionado a los problemas de lógica, el cual le plantea lo siguiente: *Si establezco que:*

    a) *Todo delito ha sido cometido por alguien.*

    b) *Sólo los malvados comenten delitos.*

    c) *No son detenidos más que los malvados.*

    d) *Los malvados detenidos no cometen delitos.*

    e) *Se cometen delitos.*

    ¿Tú qué me contestas?. El estudiante responde: *"Hay malvados que aún no han sido detenidos"*. Traduzca esta información a un lenguaje de predicados de primer orden, y a continuación justifique la veracidad de la respuesta proporcionada por el estudiante usando la técnica de refutación por resolución.