MODELOS DE COMPUTACIÓN

RELACION DE PROBLEMAS III.

1. Para el lenguaje representado por la expresión regular $(01)^*0$, obtener

   - Una gramática lineal por la derecha que genera a L.
   - Una gramática lineal por la izquierda que genera a L.
   - El autómata finito determinístico minimal que acepta el lenguaje L.

2. Encontrar si es posible una gramática lineal por la derecha o una gramática libre del contexto que genere el lenguaje L supuesto que $L \subset \{a, b, c\}^*$ y verifica:

   - $u \in L$ si y solamente si verifica que u no contiene dos símbolos b consecutivos.
   - $u \in L$ si y solamente si verifica que u contiene dos símbolos b consecutivos.
   - $u \in L$ si y solamente si verifica que contiene un número impar de símbolos c.
   - $u \in L$ si y solamente si verifica que no contiene el mismo número de símbolos b que de símbolos c.

3. Encontrar un AFD minimal para el lenguaje

$$(a+b)^*(aa+bb)(a+b)^*$$

4. Para cada uno de los siguientes lenguajes regulares, encontrar el autómata minimal asociado, y a partir de dicho autómata minimal, determinar la gramática regular que genera el lenguaje:

   - a^+b^+
   - $a(a+b)^*b$

5. Considera la gramática cuyas producciones se presentan a continuación y donde el símbolo inicial es S:

$$S \rightarrow xN|x$$

$$N \rightarrow yM|y$$

$$M \rightarrow zN|z$$

   - Escribe el diagrama de transiciones para ab AFD que acepte el lenguaje $L(G)$ generado por G.
   - Encuentra una gramática regular por la izquierda que genere ese mismo lenguaje $L(G)$.

- Encuentra el AFD que acepte el complementario del lenguaje $L(G)$.

6. Construir un AFD minimal para el lenguaje dado por la expresión regular

$$1^{+}01^{*}$$

7. Obtener autómatas finitos determinísticos para los siguientes lenguajes sobre el alfabeto $\{0, 1\}$.

   - Palabras en las que el número de 1 es múltiplo de 3 y el número de 0 es par.
   - $\{(01)^{2i} \mid i \geq 0\}$
   - $\{(0^{2i}1^{2i}) \mid i \geq 0\}$

8. Construir un Autómata Finito Determinístico que acepte el lenguaje generado por la siguiente gramática:

$$S \rightarrow AB, \quad A \rightarrow aA, \quad A \rightarrow c$$

$$B \rightarrow bBb, \quad B \rightarrow d$$

9. Dar una expresión regular para la intersección de los lenguajes asociados a las expresiones regulares $(\mathbf{01} + \mathbf{1})^{*}\mathbf{0}$ y $(\mathbf{10} + \mathbf{0})^{*}$. Se valorará que se construya el autómata que acepta la intersección de estos lenguajes, se minimice y, a partir del resultado, se construya la expresión regular.

10. Construir un Autómata Finito Determinista Minimal que acepte el lenguaje sobre el alfabeto $\{a, b, c\}$ de todas aquellas palabras que verifiquen simultaneamente las siguientes condiciones

    a) La palabra contiene un número par de a's

    b) La longitud de la palabra es un múltiplo de 3.

    c) La palabra no contiene la subcadena abc.

11. Determinar si los siguientes lenguajes son regulares o libres de contexto. Justificar las respuestas.

    - $\{0^{i}b^{j} \mid i = 2j \text{ ó } 2i = j\}$
    - $\{uu^{-1} \mid u \in \{0, 1\}^{*}, |u| \leq 1000\}$
    - $\{uu^{-1} \mid u \in \{0, 1\}^{*}, |u| \geq 1000\}$

- $\{0^i 1^j 2^k \mid i = j \text{ ó } j = k\}$

12. Determinar que lenguajes son regulares o libres de contexto de los siguientes:

    a) $\{u0u^{-1} \mid u \in \{0,1\}^*\}$

    b) Números en binario que sean múltiplos de 4

    c) Palabras de $\{0,1\}^*$ que no contienen la cabcadena 0110

13. Determinar autómatas minimales para los lenguajes $L(M_1) \cup L(M_2)$ y $L(M_1) \cap \overline{L(M_2)}$ donde,

    - $M_1 = (\{q_0, q_1, q_2, q_3\}, \{a, b, c\}, \delta_1, q_0, \{q_2\})$ donde

δ_1	q_0	q_1	q_2	q_3
a	q_1	q_1	q_3	q_3
b	q_2	q_1	q_1	q_3
c	q_3	q_3	q_0	q_3

    - $M_2 = (\{q_0, q_1, q_2, q_3\}, \{a, b, c\}, \delta_2, q_0, \{q_2\})$

δ_2	q_0	q_1	q_2	q_3
a	q_1	q_1	q_3	q_3
b	q_1	q_2	q_2	q_3
c	q_3	q_3	q_0	q_3

14. Determinar qué lenguajes son regulares y qué lenguajes son libres de contexto entre los siguientes:

    a) Conjunto de palabras sobre el alfabeto $\{0,1\}$ en las que cada 1 va precedido por un número par de ceros.

    b) Conjunto $\{0^i 1^2 j 0^{i+j} | i, j \geq 0\}$

    c) Conjunto $\{0^i 1^j 0^{i*j} | i, j \geq 0\}$

15. Dado el conjunto regular representado por la expresion regular $a^*b^* + b^*a^*$, construir un autómata finito determinístico minimal que lo acepte.

16. Sean los lenguajes:

    - $L_1 = (01 + 1)^*00$
    - $L_2 = 01(01 + 1)^*$

construir un autómata finito determinístico minimal que acepte el lenguaje $L_1 - L_2$, a partir de autómatas que acepten L_1 y L_2.

17. Dada una palabra $u = a_1 \ldots a_n \in A^*$, se llama $Per(u)$ al conjunto

$$\{a_{\sigma(1)}, \ldots, a_{\sigma(n)} \,:\, \sigma \text{ es una permutación de } \{1, \ldots, n\}\}$$

.

Dado un lenguaje L, se llama $Per(L) = \bigcup_{u \in L} Per(u)$.

Dar expresiones regulares y autómatas minimales para $Per(L)$ en los siguientes casos:

a) $L = (00 + 1)^*$

b) $L = (0 + 1)^*0$

c) $L = (01)^*$

¿Es posible que, siendo L regular, $Per(L)$ no lo sea?

18. Dados los alfabetos $A = \{0, 1, 2, 3\}$ y $B = \{0, 1\}$ y el homomorfismo f de A^* en B^* dado por:

- $f(0) = 00, \quad f(1) = 01, \quad f(2) = 10, \quad f(3) = 11$

Sea L el conjunto de las palabras de B^* en las que el número de símbolos 0 es par y el de símbolos 1 no es múltiplo de 3. Construir un autómata finito determinista que acepte el lenguaje $f^{-1}(L)$.

19. Determinar una autómata finito determinístico minimal para el el lenguaje sobre el alfabeto $A = \{a, b, c\}$ dado por la expresión regular $b(a + b)^* + cb^*$.

20. Dar expresiones regulares para los siguientes lenguajes sobre el alfabeto $A = \{a, b, c\}$,

- Palabras en las que cada c va precedida de una a o una b
- Palabras de longitud impar
- Palabras de longitud impar en las que el símbolo central es una c
- Palabras en las que los dos primero símbolos son iguales a los dos último símbolos en orden inverso: si la palabra empieza por ab, debe de terminar por ba.

21. Determinar si las expresiones regulares siguientes representan el mismo lenguaje:

a) $(b + (c + a)a^*(b + c))^*(c + a)a^*$

b) $b^*(c+a)((b+c)b^*(c+a))^*a^*$

c) $b^*(c+a)(a^*(b+c)b^*(c+a))^*a^*$

Justificar la respuesta.

22. Construir un autómata finito determinista minimal que acepte el conjunto de palabras sobre el alfabeto $A=\{0,1\}$ que representen números no divisibles por dos ni por tres.

23. Determinar una expresión regular para los siguientes lenguajes sobre el alfabeto $\{0,1\}$:

    - Palabras en las que el tercer símbolo es un 0.
    - Palabras en las que el antepenúltimo símbolo es un 1.

    Construir un autómata finito minimal que acepte la intersección de ambos lenguajes.

24. Construir autómatas finitos minimales para los siguientes lenguajes sobre el alfabeto $\{0,1\}$:

    a) Palabras que contienen como subcadena una palabra del conjunto $\{00,11\}^2$.

    b) Palabras que contienen como subcadena una palabra del conjunto $\{0011,1100\}$.

25. Encuentra para cada uno de los siguientes lenguajes una gramática de tipo 3 que lo genere o un autómata finito que lo reconozca:

    a) $L=\{u\in\{a,b\}^* \,:\, u \text{ no contiene la subcadena } 'abab'\}$

    b) $L=\{a^nb^mc^p \,:\, n\geq 0 \text{ y mltiplo de } 3, m\geq 0, p>0\}$

    c) $L=\{(ab)^j(cd)^i \,:\, j\geq i\geq 0\}$

26. - Construye una gramática regular que genere el siguiente lenguaje:

    $$L_1=\{u\in\{0,1\}^* \mid \text{ el número de 1's y el número de 0's en } u \text{ es par}\}$$

    - Construye un autómata que reconozca el siguiente lenguaje:

    $$L_2=\{0^n1^m \mid n\geq 1, m\geq 0, n \text{ múltiplo de } 3, m \text{ par}\}$$

    - Diseña el AFD mínimo que reconoce el lenguaje $(L_1\cup L_2)$.

27. Construir expresiones regulares para los siguientes lenguajes sobre el alfabeto $\{0,1\}$:

    a) Palabras en las que el número de símbolos 0 es múltiplo de 3.

b) Palabras que contienen como subcadena a 1100 ó a 00110

c) Palabras en las que cada cero forma parte de una subcadena de 2 ceros y cada 1 forma parte de una subcadena de 3 unos.

d) Palabras en las que el número de ocurrencias de la subcadena 011 es menor o igual que el de ocurrencias de la subcadena 110.

28. Sobre el alfabeto $\{0, 1\}$:

   a) Construye una gramática regular que genere el lenguaje L_1 de las palabras u tales que:

   - Si $|u| < 5$ entonces el número de 1's es impar.
   - Si $|u| \geq 5$ entonces el número de 1's es par.
   - u tiene al menos un símbolo 1.

   b) Construye un autómata que reconozca el lenguaje L_2 dado por:

$$L_2 = \{0^n 1^m \,:\, n \geq 0, m \geq 1, m \text{ es múltiplo de } 6\}$$

   c) Diseña el AFD mínimo que reconozca el lenguaje $(L_1 \cup L_2)$.

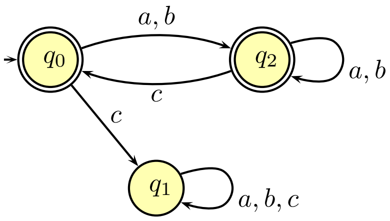
29. Encuentra para cada uno de los siguientes lenguajes una gramática de tipo 3 que lo genere o un autómata finito que lo reconozca:

   - $L_1 = \{u \in \{0, 1\}^* \,:\, u \text{ no contiene la subcadena } 'abab'\}$
   - $L_2 = \{0^i 1^j 0^k \,:\, i \geq 1, k \geq 0, \, i \text{ impar}, k \text{ múltiplo de 3 y } j \geq 2\}$.

   Diseña el AFD mínimo que reconoce el lenguaje $(L_2 \cap L_1)$.

30. Encuentra una expresión regular para los siguientes lenguajes sobre el alfabeto $A = \{a, b, c\}$:

   a) el aceptado por el siguiente AFD:



   b) el generado por la siguiente gramática:

$$S \to aA|bA|cA, \qquad A \to \epsilon|aS|bS|cS$$

c) el generado por la siguiente gramática:

$$S \to TST|c, \qquad T \to a|b|c$$

31. Dado el alfabeto $A = \{a, b, c\}$, encuentra:

    a) Un AFD que reconozca las palabras en las que cada $'c'$ va precedida de una $'a'$ o una $'b'$.

    b) Una expresión regular que represente el lenguaje compuesto por las palabras de longitud impar en las que el símbolo central es una $'c'$.

    c) Una gramática regular que genere las palabras de longitud impar.

32. Construir autómatas finitos para los siguientes lenguajes sobre el alfabeto $\{a, b, c\}$:

    a) L_1: palabras del lenguaje $(\mathbf{a} + \mathbf{b})^*(\mathbf{b} + \mathbf{c})^*$.

    b) L_2: palabras en las que nunca hay una $'a'$ posterior a una $'c'$.

    c) $(L_1 \setminus L_2) \cup (L_2 \setminus L_1)$

    ¿Qué podemos concluir sobre L_1 y L_2?

33. Si $f : \{0, 1\}^* \to \{a, b, c\}^*$ es un homomorfismo dado por $f(0) = aab, f(1) = bbc$, dar autómatas finitos deterministas minimales para los lenguajes L y $f^{-1}(L)$ donde $L \subseteq \{a, b, c\}^*$ es el lenguaje en el que el número de símbolos a no es múltiplo de 4.

34. Encuentra para los siguientes lenguajes una gramatica regular que lo genere, una expresion regular que lo represente o un automata finito que lo acepte:

    a) Cadenas aceptadas (aceptada $\equiv$ devuelve lata) por una maquina que devuelve refrescos a un precio de 1.20 euros, donde las monedas de entrada solo son: e (1 euro), v (20 centimos) y d (10 centimos).

    b) $L_2 = \{u \in \{0, 1\}^* \mid$ el numero de ceros y de unos en u es par $\}$

    c) $L_3 =$ Palabras sobre $\{0, 1\}$ en que cada símbolo que ocupa una posicion multiplo de 3 es un 1.

    d) $L_4 = \{uu \mid u \in \{0, 1\}^+\}$

35. Si L_1 es el lenguage asociado a la expresión regular $01(01 + 1)^*$ y L_2 el lenguaje asociado a la expresión $(1 + 10)^*01$, encontrar un autómata minimal que acepte el lenguaje $L_1 \setminus L_2$.

36. Determina si los siguientes lenguajes son regulares. Encuentra una gramática que los genere o un reconocedor que los acepte.

    a) $L_1 = \{0^i 1^j \,:\, j < i\}$.

    b) $L_2 = \{001^i 0^j 11 \,:\, i, j \geq 1\}$.

    c) $L_3 = \{010u \,:\, u \in \{0,1\}^*, u \text{ no contiene la subcadena } 010\}$.

37. Sean los alfabetos $A_1 = \{a, b, c, d\}$ y $A_2 = \{0, 1\}$ y el lenguaje $L \subseteq A_2^*$ dado por la expresión regular $(\mathbf{0} + \mathbf{1})^* \mathbf{0} (\mathbf{0} + \mathbf{1})$, calcular una expresión regular para el lenguaje $f^{-1}(L)$ donde f es el homomorfismo entre A_1^* y A_2^* dado por

$$f(a) = 01, \qquad f(b) = 1, \qquad f(c) = 0, \qquad f(d) = 00$$

38. Obtener un autómata finito determinista para el lenguaje asociado a la expresión regular: $(\mathbf{01})^+ + (\mathbf{010})^*$. Minimizarlo.

39. Construye gramáticas regulares que generen los siguientes lenguajes en el alfabeto a,b:

    a) $L_1 = \{u \in \{a, b\}^* \mid u \text{ no contiene la subcadena } 'aba'\}$

    b) $L_2 = \{u \in \{a, b\}^* \mid$ el número de a's en u es múltiplo de 3 y u no contiene la subcadena $'aba'\}$

    c) $L_3 = \{a^m b^n \mid m \neq n\}$

40. Dado el lenguaje L asociado a la expresión regular $(01 + 011)^*$ y el homomorfismo $f : \{0,1\}^* \to \{0,1\}^*$ dado por $f(0) = 01, f(1) = 1$, construir una expresión regular para el lenguaje $f^{-1}(L)$.

41. Dar expresiones regulares para los siguientes lenguajes sobre el alfabeto $A_1 = \{0, 1, 2\}$:

    a) L dado por el conjunto de palabras en las que cada 0 que no sea el último de la palabra va seguido por un 1 y cada 1 que no sea el último símbolo de la palabra va seguido por un 0.

    b) Considera el homomorfimos de A_1 en $A_2 = \{0, 1\}$ dado por $f(0) = 001$, $f(1) = 100$, $f(2) = 0011$. Dar una expresión regular para $f(L)$.

    c) Dar una expresión regular para LL^{-1}.

42. Dados los lenguajes: $L_1 = \{0^i 1^j \mid i \geq 1,\ j \text{ es par y } j \geq 2\}$ y $L_2 = \{1^j 0^k \mid k \geq 1,\ j \text{ es impar y } j \geq 1\}$ encuentra:

    a) Una gramática regular que genere el lenguaje L_1.

b) Una expresión regular que represente al lenguaje L_2.

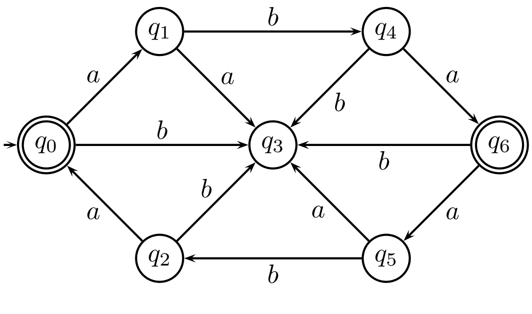
c) Un autómata finito determinista que acepte las cadenas de la concatenación de los lenguajes, L_1L_2. Aplica el algoritmo para minimizar este autómata.

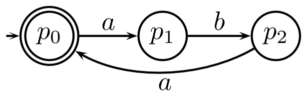
43. Determinar si los siguientes autómatas finitos aceptan el mismo lenguaje justificando la respuesta ($\rightarrow$ y $*$ indican el estado inicial y estado final respectivamente; los estados se indican con letras mayúsculas). Justificar la respuesta.

	0	1
$\rightarrow$ A	B	F
B	G	C
*C	A	C
D	C	G
E	H	F
F	C	G
G	G	E
H	G	C

	0	1
$\rightarrow$ A	G	C
B	B	A
C	D	B
*D	A	D
G	B	D

44. Comprobar si los siguientes autómatas son equivalentes:





45. Sea el alfabeto $A = \{0, 1, +, =\}$, demostrar que el lenguaje

$$ADD = \{x = y + z \,|\, x, y, z \text{ son números en binario, y } x \text{ es la suma de } y \text{ y } z\}$$

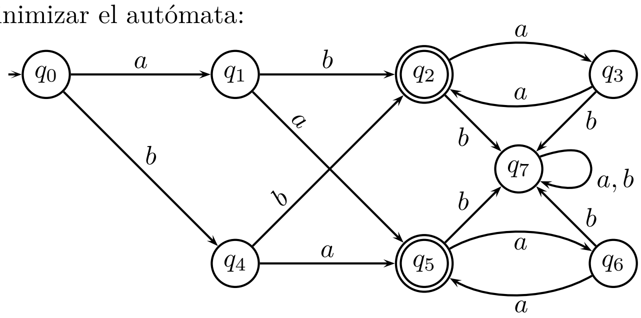
no es regular.

46. Si L_1, L_2 son lenguajes sobre el alfabeto A, entonces la *mezcla perfecta* de estos lenguajes se define como el lenguaje

$$\{w \mid w = a_1 b_1 \dots a_k b_k \text{ donde } a_1 \dots a_k \in L_1, b_1 \dots b_k \in L_2, a_i, b_i \in A\}$$

Demostrar que si L_1 y L_2 son regulares, entonces la mezcal perfecta de L_1 y L_2 es regular.

47. Minimizar el autómata:



48. Si $L \subseteq A^*$, define la relación $\equiv$ en A^* como sigue: si $u, v \in A^*$, entonces $u \equiv v$ si y solo si para toda $z \in A^*$, tenemos que ($uz \in L \Leftrightarrow vz \in L$).

   a) Demostrar que $\equiv$ es una relación de equivalencia.

   b) Calcular las clases de equivalencia de $L = \{a^i b^i \mid i \geq 0\}$

   c) Calcular las clases de equivalencia de $L = \{a^i b^j \mid i, j \geq 0\}$

   d) Demostrar que L es aceptado por un autómata finito determinístico si y solo si el número de clases de equivalencia es finito.

   e) ¿Qué relación existe entre el número de clases de equivalencia y el autómata finito minimal que acepta L?