

Tema 2: Autómatas Finitos y Expresiones Regulares

Jose A. Garcia

Universidad de Granada

- Autómata Finito Determinista
- Autómata Finito No-Determinista
- Autómata Finito con Transiciones Nulas
- Expresiones Regulares
- Gramáticas Regulares

Son importantes en las siguientes tareas:

- Software para el diseño y verificación de circuitos digitales.
- Construcción de analizadores léxicos de compiladores.
- Software para analizar grandes conjuntos de textos para buscar palabras, estructuras u otros patrones (p.e. páginas web).
- Software para comprobar la corrección de cualquier tipo de sistemas que tengan un número finito de estados diferentes (p.e. protocolos de comunicación).

AUTOMATA FINITO DETERMINISTA

Un autómata finito es una quintupla $M = (Q, A, \delta, q_0, F)$ donde

- Q es un conjunto finito llamado **conjunto de estados**
- A es un alfabeto llamado **alfabeto de entrada**
- δ es una aplicación llamada **función de transición**

$$\delta : Q \times A \rightarrow Q$$

- q_0 es un elemento de Q , llamado **estado inicial**
- F es un subconjunto de Q , llamado **conjunto de estados finales**.

Ejemplo

Sea el autómata $M = (Q, A, q_0, \delta, F)$, donde

- $Q = \{q_0, q_1, q_2\}$
- $A = \{a, b\}$
- La función de transición viene dada por:

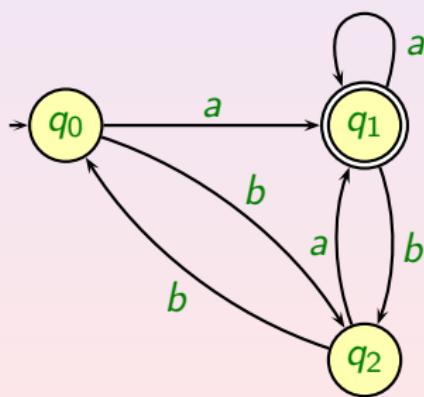
$$\begin{aligned}\delta(q_0, a) &= q_1, & \delta(q_0, b) &= q_2, \\ \delta(q_1, a) &= q_1, & \delta(q_1, b) &= q_2, \\ \delta(q_2, a) &= q_1, & \delta(q_2, b) &= q_0\end{aligned}$$

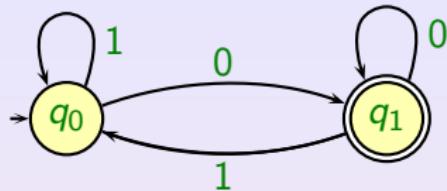
- $F = \{q_1\}$

Diagrama de Transición

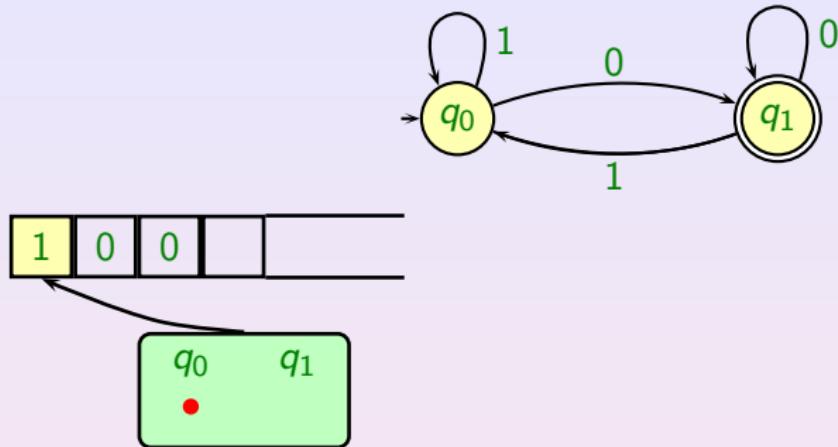
Es un grafo en el que:

- Hay un nodo por cada estado
- Por cada transición $\delta(q, a) = p$ hay un arco de q a p con la etiqueta a .
- El estado inicial está indicado con un ángulo entrante. Los estados finales están indicados con una doble circunferencia.

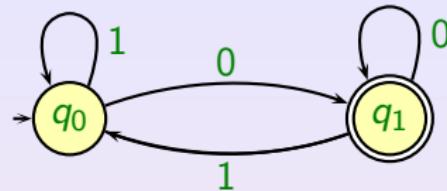




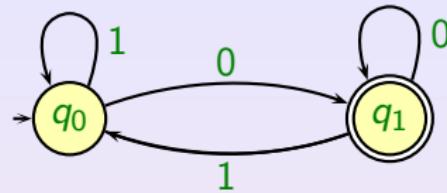
Cálculo Asociado. Traza



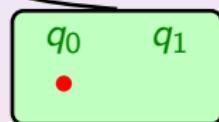
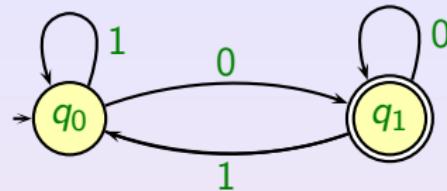
Cálculo Asociado. Traza



Cálculo Asociado. Traza



Cálculo Asociado. Traza



Estado final
SI

PROCESO DE CALCULO

Autómata $M = (Q, A, \delta, q_0, F)$

- **Descripción Instantánea o Configuración:**
Un elemento de $Q \times A^*$: (q, u) .
- **Configuración Inicial para** $u \in A^*$: (q_0, u)
- **Relación paso de cálculo entre dos configuraciones:**

$$((q, au) \vdash (p, u)) \Leftrightarrow \delta(q, a) = p$$

De una configuración sólo se puede pasar a lo máximo a una configuración en un paso de cálculo.

- Relación de cálculo entre dos configuraciones:

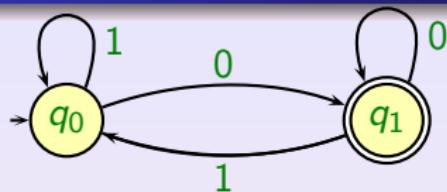
$((q, u) \xrightarrow{*} (p, v))$ si y solo si existe una sucesión de configuraciones C_0, \dots, C_n tales que $C_0 = (q, u)$, $C_n = (p, v)$ y $\forall i \leq n - 1, C_i \vdash C_{i+1}$.

Lenguaje Aceptado por un Autómata Finito

$$L(M) = \{u \in A^* : (q_0, u) \xrightarrow{*} (q, \varepsilon), q \in F\}$$

Las palabras de $L(M)$ se dicen **aceptadas por el autómata**.

Ejemplo. Cálculo Asociado



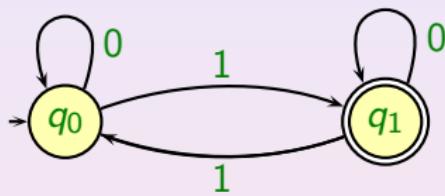
$(100, q_0) \vdash (00, q_0) \vdash (0, q_1) \vdash (\varepsilon, q_1)$

$(100, q_0) \stackrel{*}{\vdash} (\varepsilon, q_1)$, 100 **aceptada**

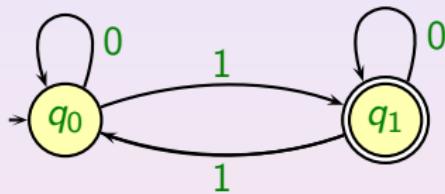


Estado final
SI

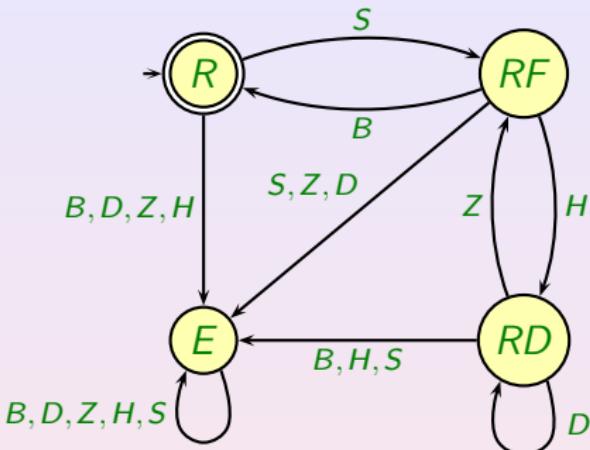
Ejemplo



Ejemplo



Acepta el conjunto de palabras con un número impar de 1.



R: Estado de espera

RD: Recepción de datos

S: Comienza recepción

H: Cabecera de fichero

D: Datos

RF: Estado de recepción de ficheros

E: Error

B: Fin de recepción

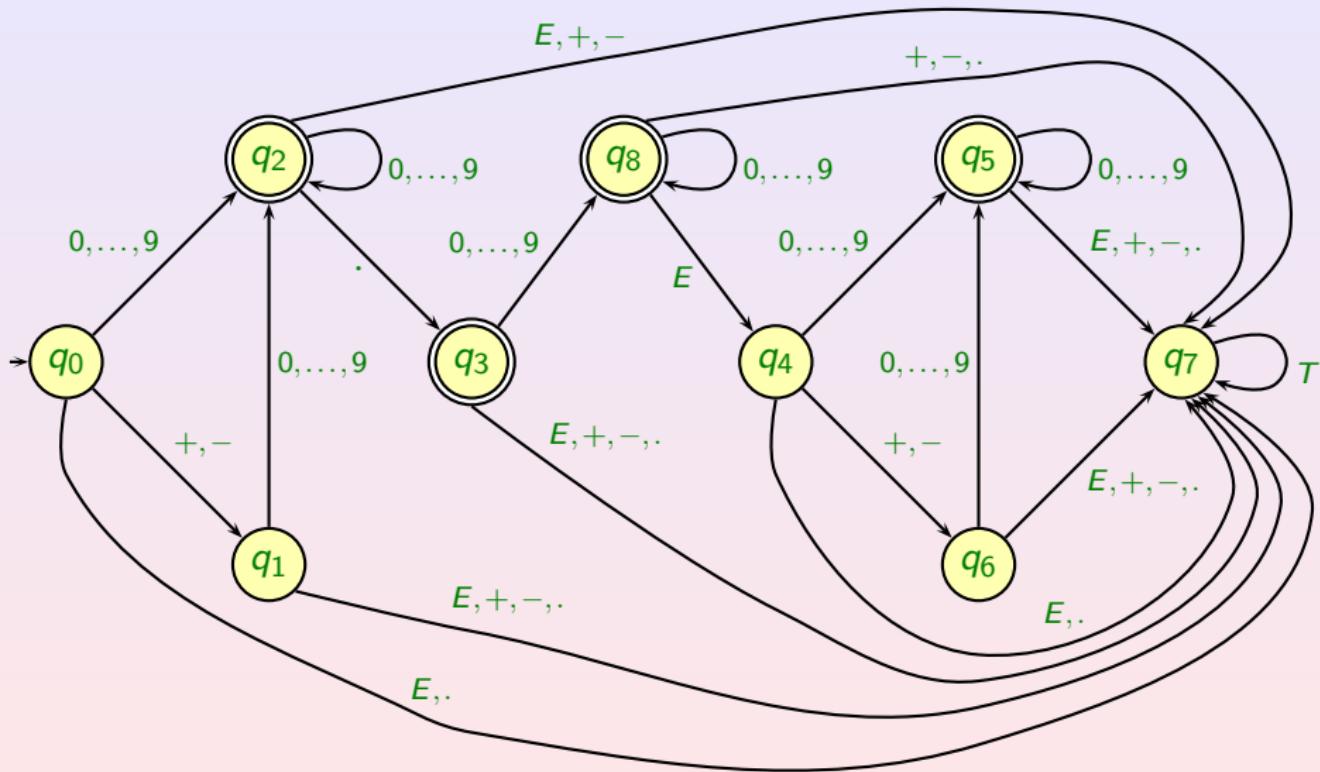
Z: Fin de fichero

Gramática $G = (V, T, P, S)$, donde

- $T = \{+, -, E, 0, 1, \dots, 9, .\}$
- $V = \{\langle \text{Signo} \rangle, \langle \text{Digito} \rangle, \langle \text{Natural} \rangle, \langle \text{Entero} \rangle, \langle \text{Real} \rangle\}$
- $S = \langle \text{Real} \rangle$
- P contiene las siguientes producciones
 - $\langle \text{Signo} \rangle \rightarrow + | -$
 - $\langle \text{Digito} \rangle \rightarrow 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9$
 - $\langle \text{Natural} \rangle \rightarrow \langle \text{Digito} \rangle | \langle \text{Digito} \rangle \langle \text{Natural} \rangle$
 - $\langle \text{Entero} \rangle \rightarrow \langle \text{Natural} \rangle | \langle \text{Signo} \rangle \langle \text{Natural} \rangle$
 - $\langle \text{Real} \rangle \rightarrow \langle \text{Entero} \rangle | \langle \text{Entero} \rangle .$
 - $\langle \text{Real} \rangle \rightarrow \langle \text{Entero} \rangle . \langle \text{Natural} \rangle$
 - $\langle \text{Real} \rangle \rightarrow \langle \text{Entero} \rangle . \langle \text{Natural} \rangle E \langle \text{Entero} \rangle$

Autómata Finito

T es el conjunto de los símbolos terminales.



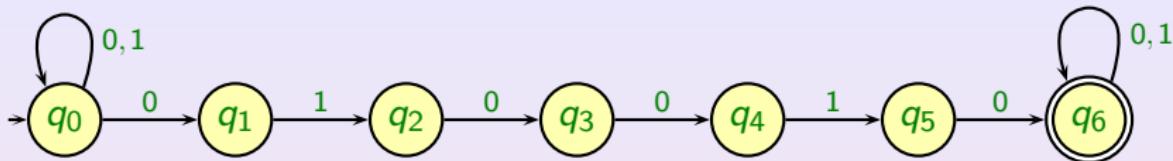
Un autómata finito no determinista es una quintupla
 $M = (Q, A, \delta, q_0, F)$ en la que

- Q es un conjunto finito llamado **conjunto de estados**
- A es un alfabeto llamado **alfabeto de entrada**
- δ es una aplicación llamada **función de transición**

$$\delta : Q \times A \rightarrow \wp(Q)$$

- q_0 es un elemento de Q , llamado **estado inicial**
- F es un subconjunto de Q , llamado **conjunto de estados finales**.

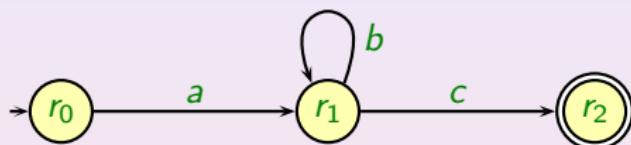
Ejemplo



- Se pueden usar también diagramas de transición.
- Puede haber estados que para una entrada tenga dos transiciones. Por ejemplo, q_0 cuando lee 0 puede quedarse en q_0 o pasar a q_1 .
- También puede haber estados que para una entrada no tengan ninguna transición: desde q_1 no se puede leer el 0.
- Acepta el conjunto de las palabras que tienen a 010010 como subcadena: palabras que se **pueden** leer pasando de q_0 a un estado final.

Ejemplos

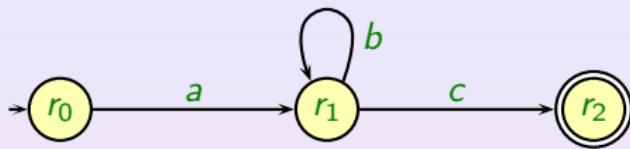
También es no-determinista:



Acepta cadenas formadas por una **a**, una sucesión de **b** y una **c**.

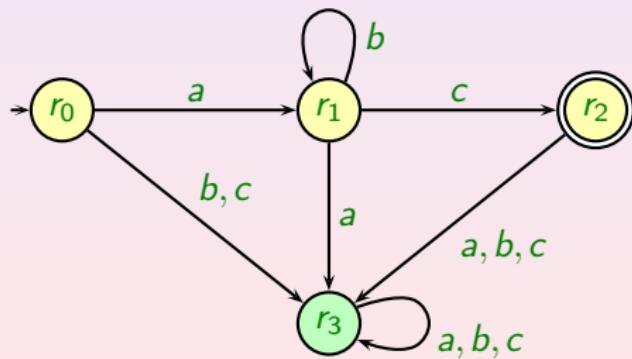
Ejemplos

También es no-determinista:



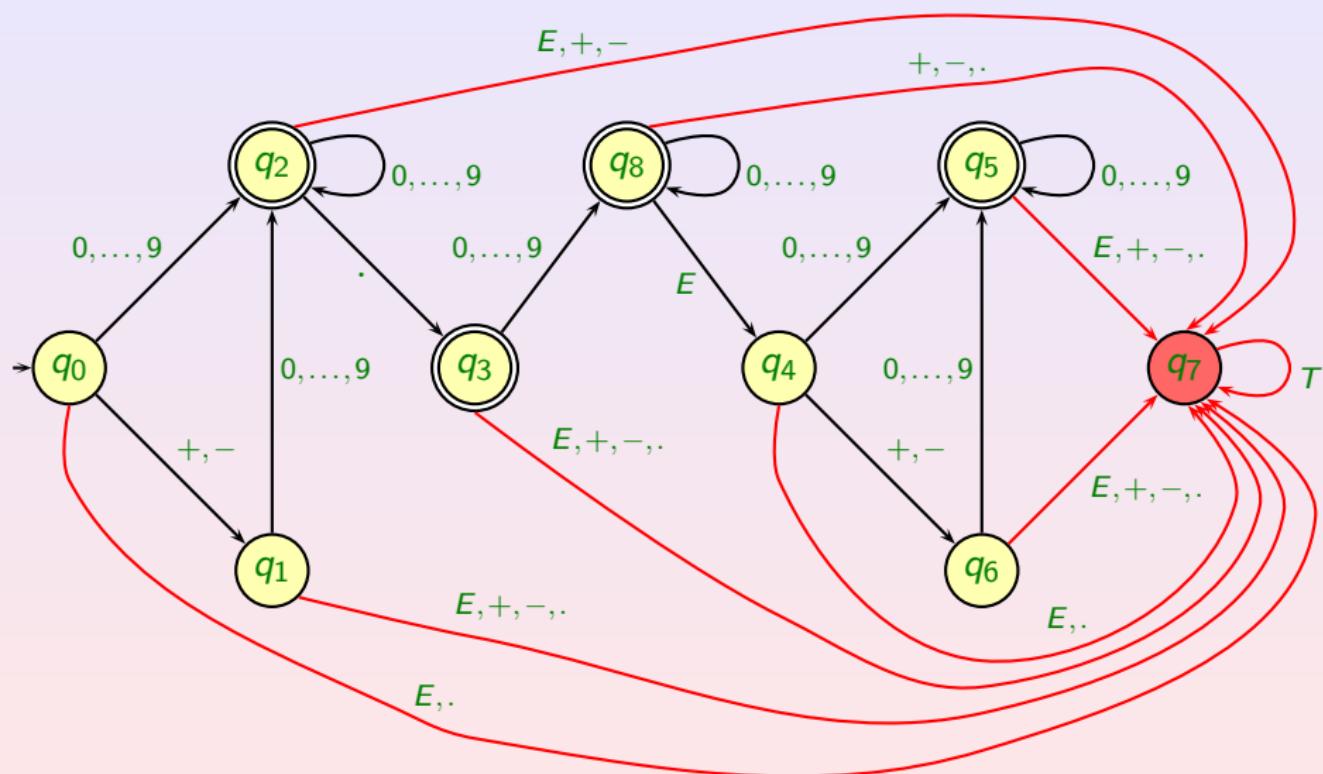
Acepta cadenas formadas por una **a**, una sucesión de **b** y una **c**.

Se puede transformar en uno determinista que acepte el mismo lenguaje añadiéndole un **estado de error** donde vayan todas las transiciones no definidas en el autómata anterior:



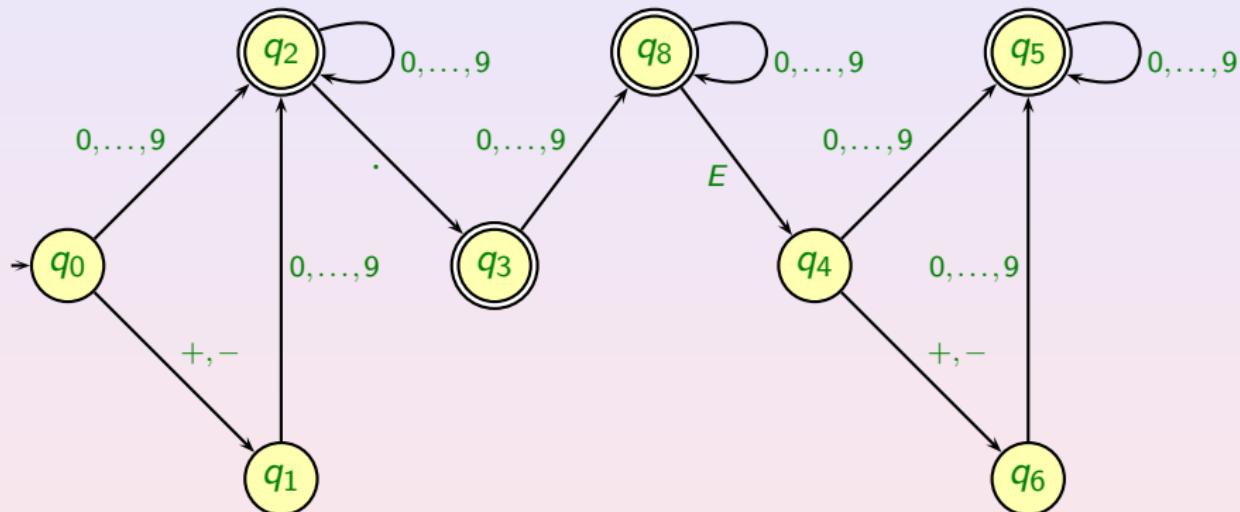
Ejemplo: Constantes reales

Autómata determinista:



Ejemplo: Constantes reales

Autómata no determinista:



PROCESO DE CALCULO

Autómata no determinista $M = (Q, A, \delta, q_0, F)$

- **Descripción Instantánea o Configuración:**
Un elemento de $Q \times A^*$: (q, u) .
- **Configuración Inicial para** $u \in A^*$: (q_0, u)
- **Relación paso de cálculo entre dos configuraciones:**

$$((q, au) \vdash (p, u)) \Leftrightarrow p \in \delta(q, a)$$

De una configuración se puede pasar a varias configuraciones distintas en un paso de cálculo, e incluso a ninguna.

- Relación de cálculo entre dos configuraciones:

$((q, u) \xrightarrow{*} (p, v))$ si y solo si existe una sucesión de configuraciones C_0, \dots, C_n tales que $C_0 = (q, u)$, $C_n = (p, v)$ y $\forall i \leq n - 1, C_i \vdash C_{i+1}$.

Lenguaje Aceptado por un AF no-determinista

$$L(M) = \{u \in A^* : \exists q \in F, (q_0, u) \xrightarrow{*} (q, \varepsilon)\}$$

Las palabras de $L(M)$ se dicen aceptadas por el autómata.

Dado un autómata $M = (Q, A, \delta, q_0, F)$, definimos

- Si $B \subseteq Q$,

$$\delta^*(B, a) = \bigcup_{q \in B} \delta(q, a)$$

- Si $B \subseteq Q$,

- $\delta^*(B, \varepsilon) = B$
- $\delta^*(B, au) = \delta^*(\delta^*(B, a), u)$

- $\delta^*(q, u) = \delta^*(\{q\}, u)$

$\delta^*(B, u)$ es igual a todos los estados a los que se puede llegar desde cualquiera de los estados de B después de leer la palabra u .

- Podemos considerar que todos los autómatas deterministas son también autómatas no-deterministas, en los que $\delta(q, a)$ tiene siempre un y sólo un estado.
- Así, todo lenguaje L aceptado por un autómata determinista es aceptado también por un autómata no-determinista (él mismo).
- Con los autómatas no-deterministas no aceptamos más lenguajes que con los deterministas: todo lenguaje aceptado por un autómata no-determinista lo será también por uno determinista (lo veremos a continuación).
- Con los autómatas no-deterministas no ampliamos la familia de lenguajes aceptados por los autómatas deterministas. Simplemente, tenemos más opciones para representar un lenguaje.

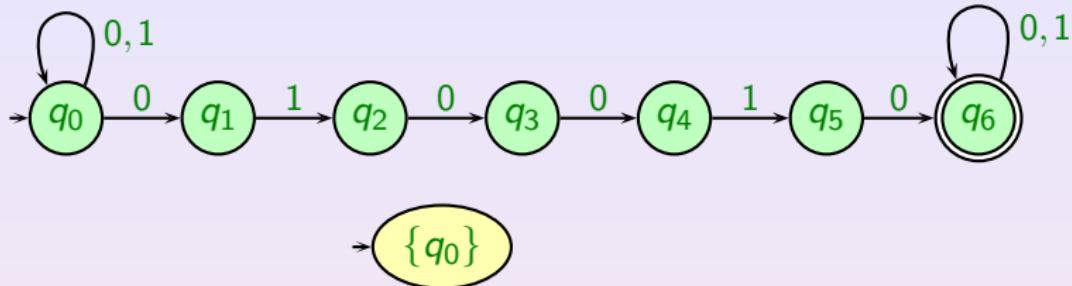
Dado un AFND $M = (Q, A, \delta, q_0, F)$ se llama autómata determinista asociado a M , al autómata $\bar{M} = (\bar{Q}, A, \bar{\delta}, \bar{q}_0, \bar{F})$ dado por

- $\bar{Q} = \wp(Q)$
- $\bar{q}_0 = \{q_0\}$
- $\bar{\delta}(B, a) = \delta^*(B, a) = \bigcup_{q \in B} \delta(q, a)$
- $\bar{F} = \{B \in \wp(Q) \mid B \cap F \neq \emptyset\}$

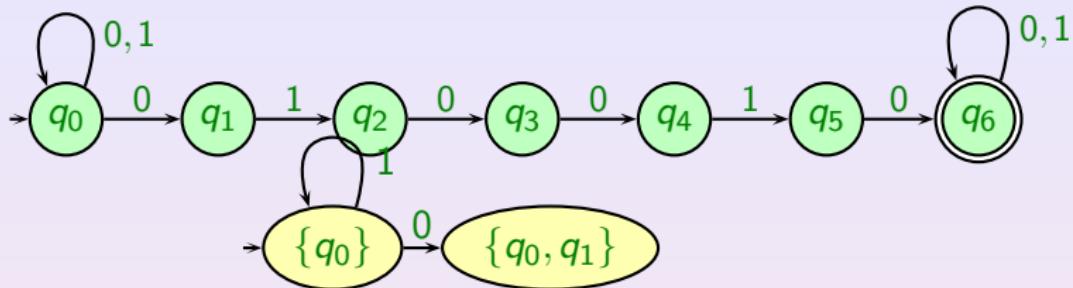
Dado un autómata no determinista se le hace corresponder uno determinista que recorre todos los caminos al mismo tiempo.

Un autómata no-determinista y su determinista asociado aceptan el mismo lenguaje

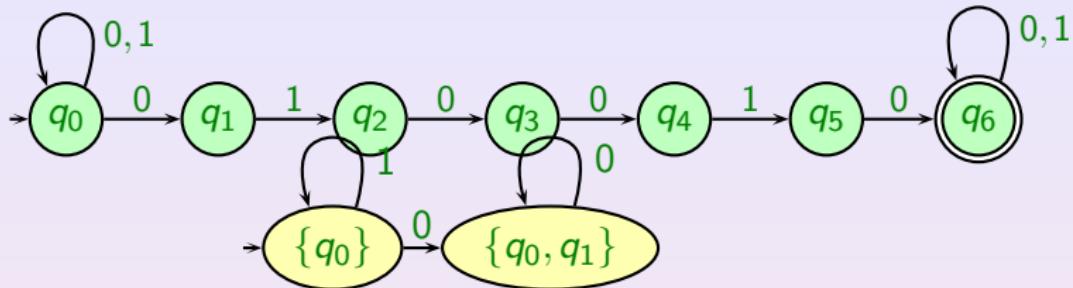
Ejemplo



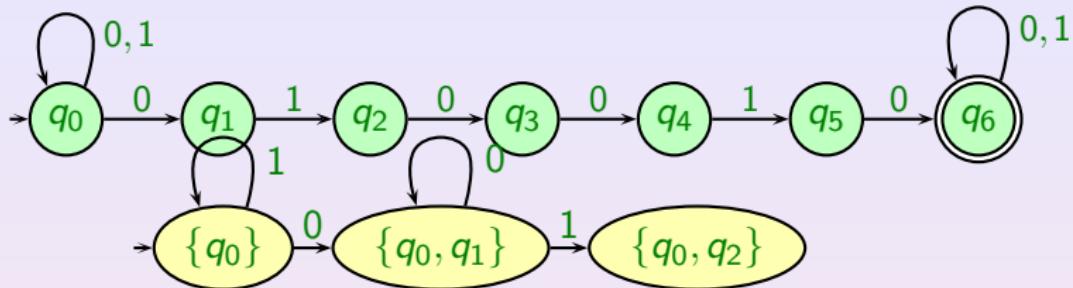
Ejemplo



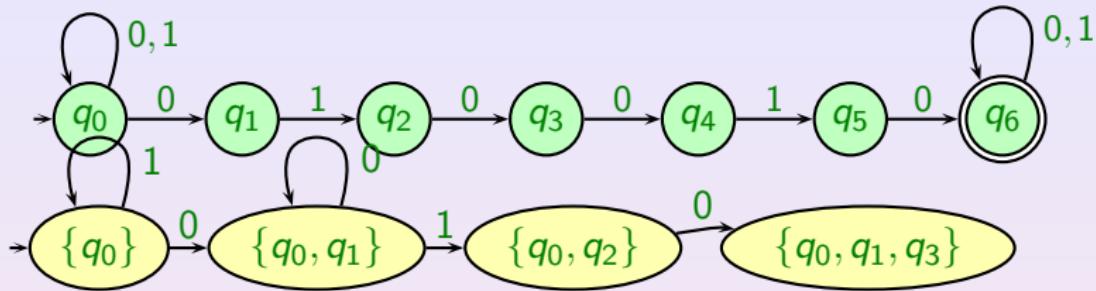
Ejemplo



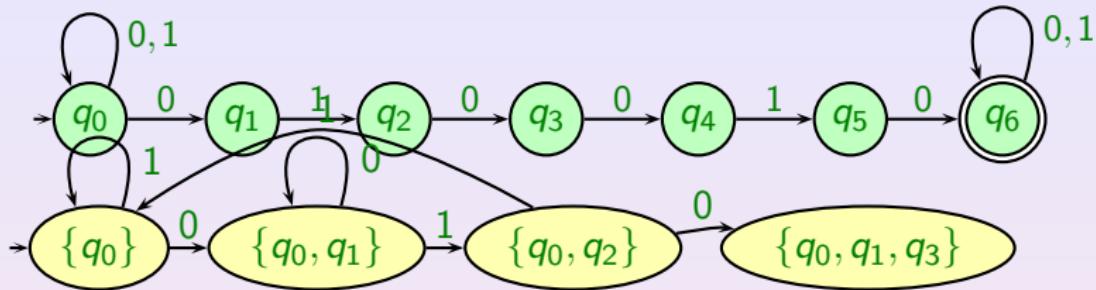
Ejemplo



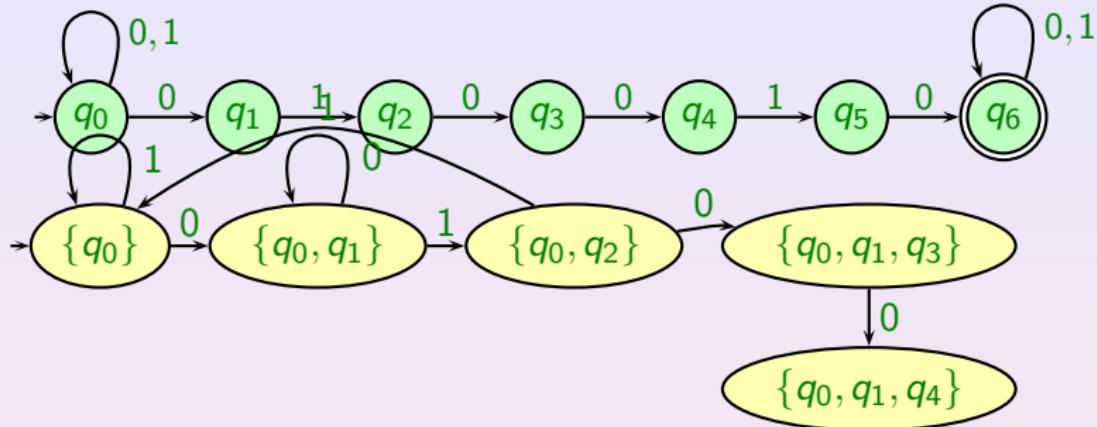
Ejemplo



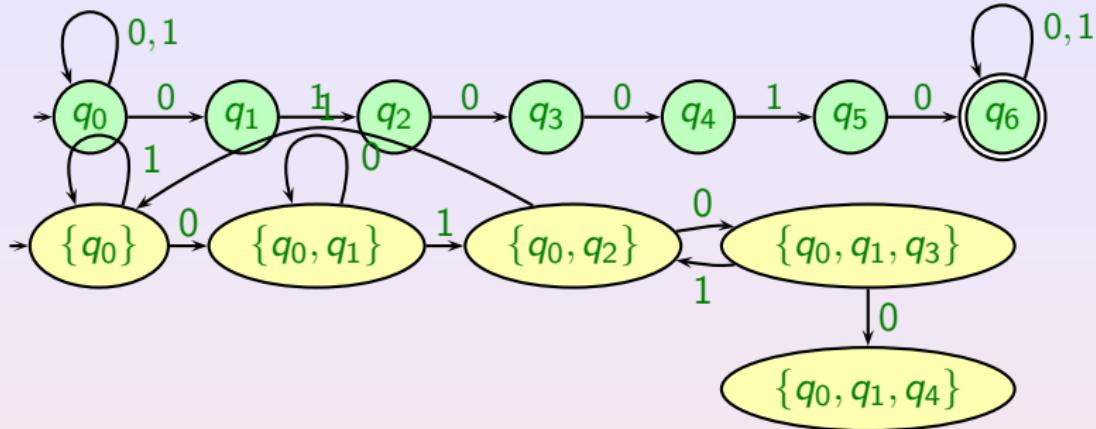
Ejemplo



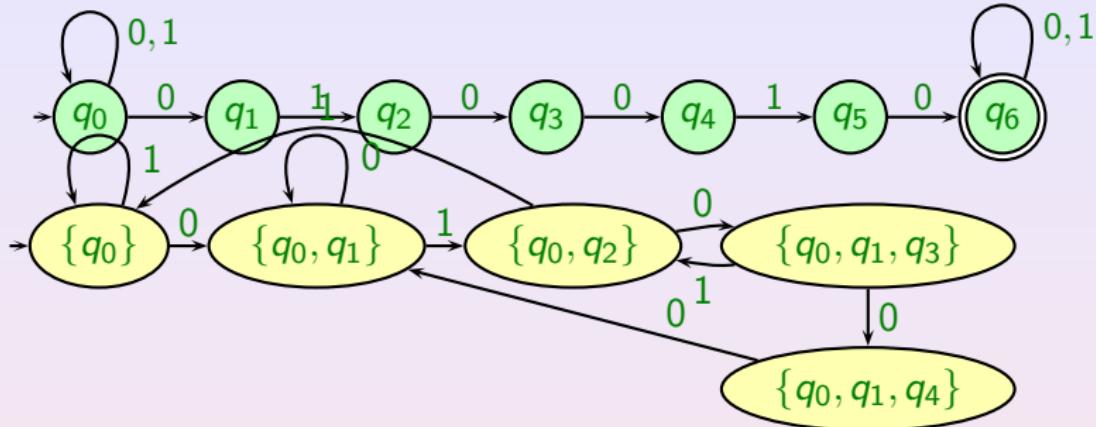
Ejemplo



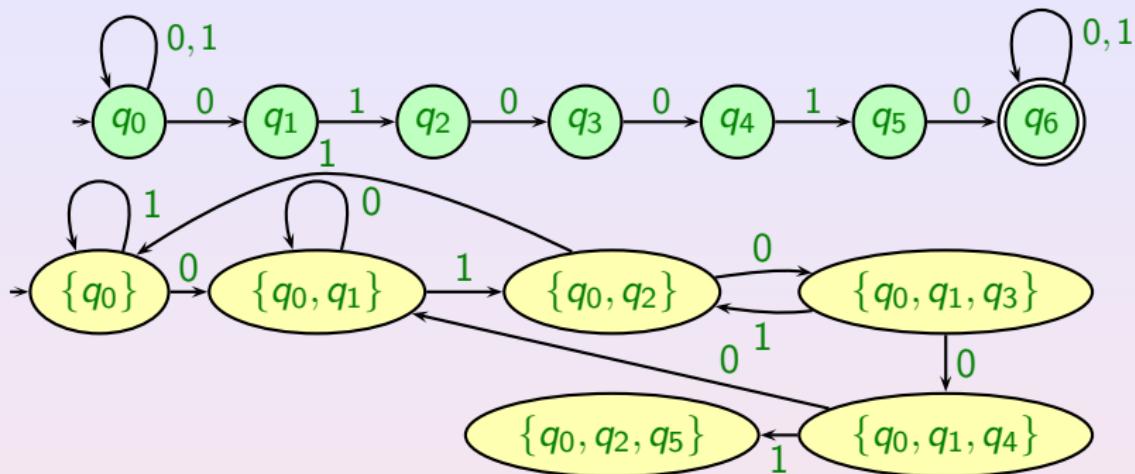
Ejemplo



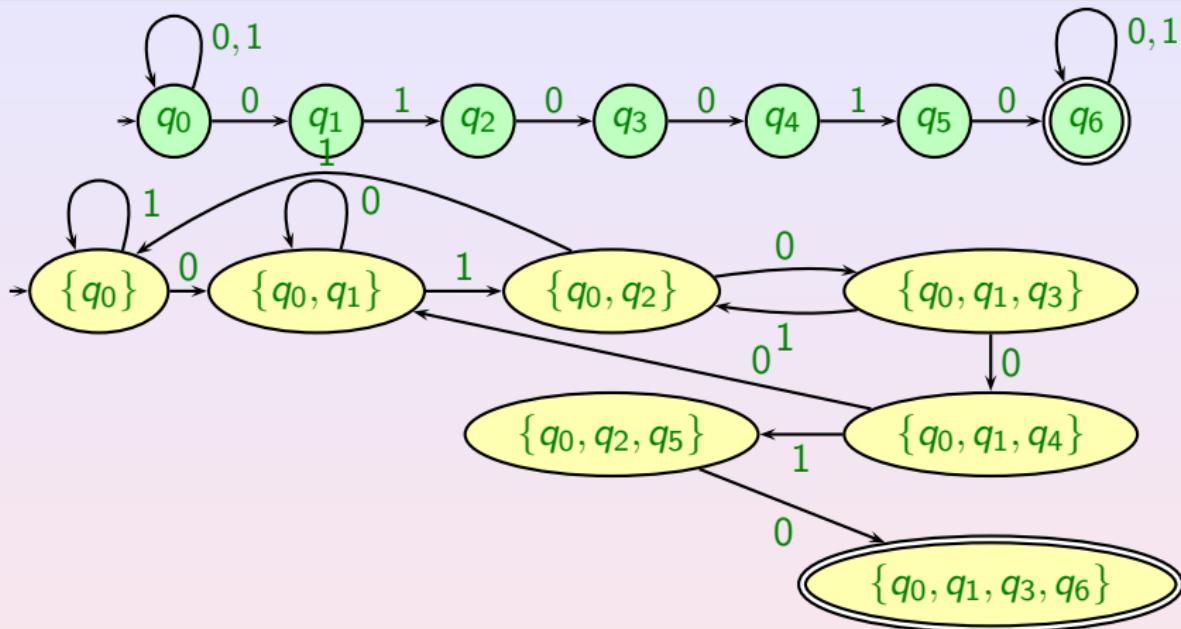
Ejemplo



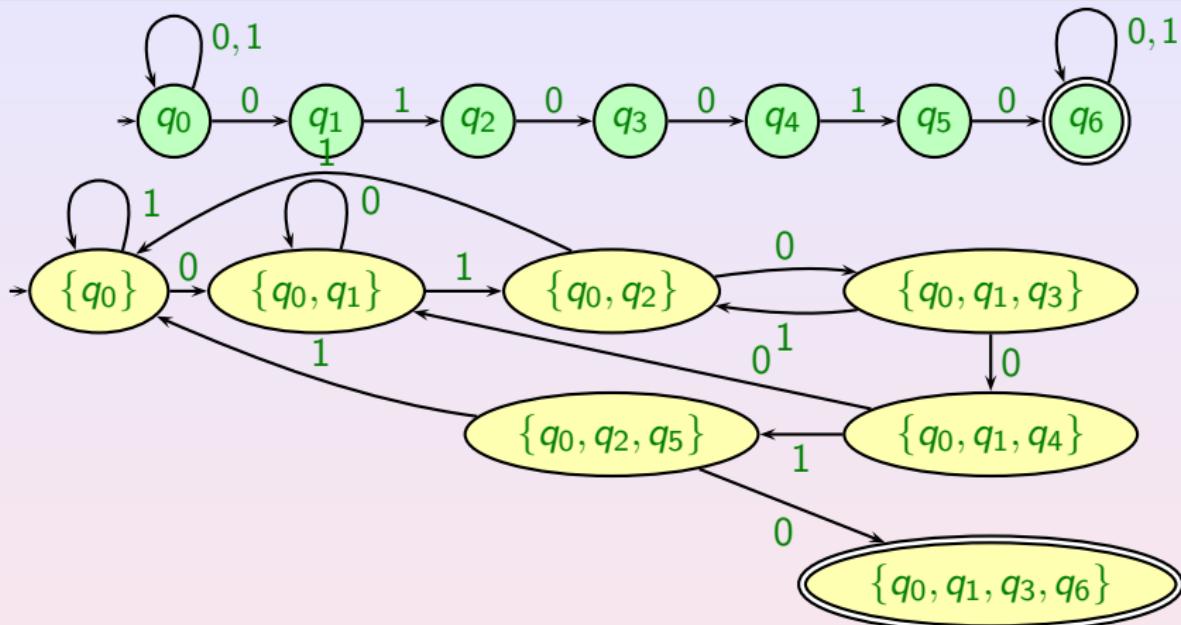
Ejemplo



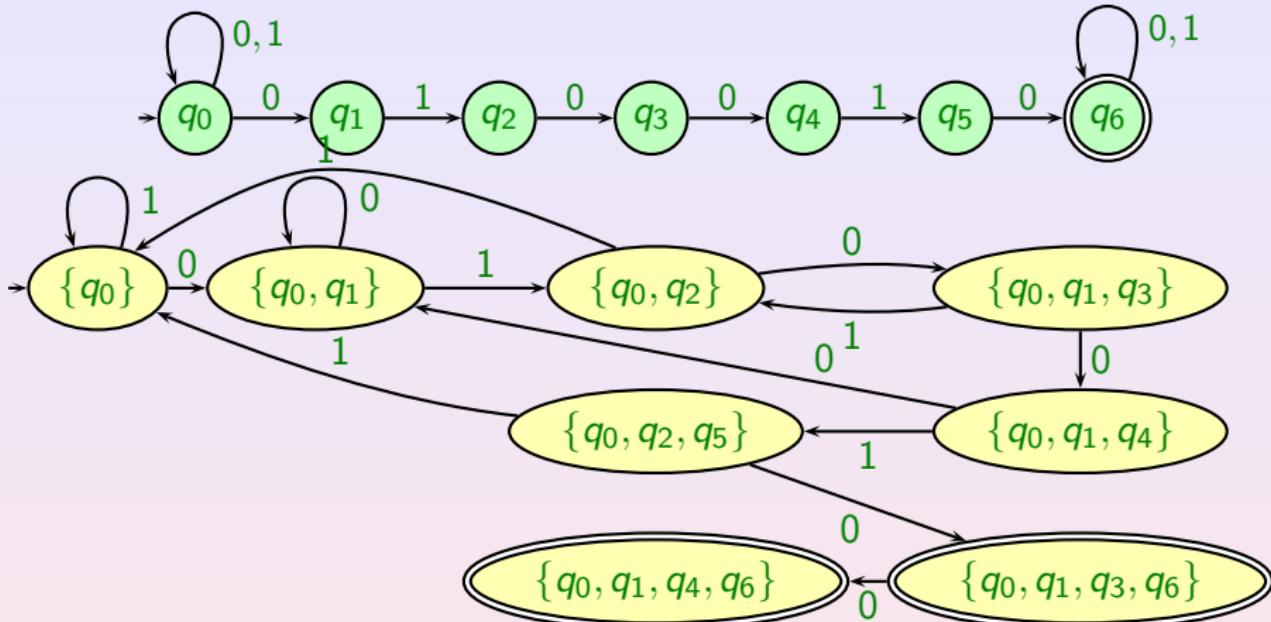
Ejemplo



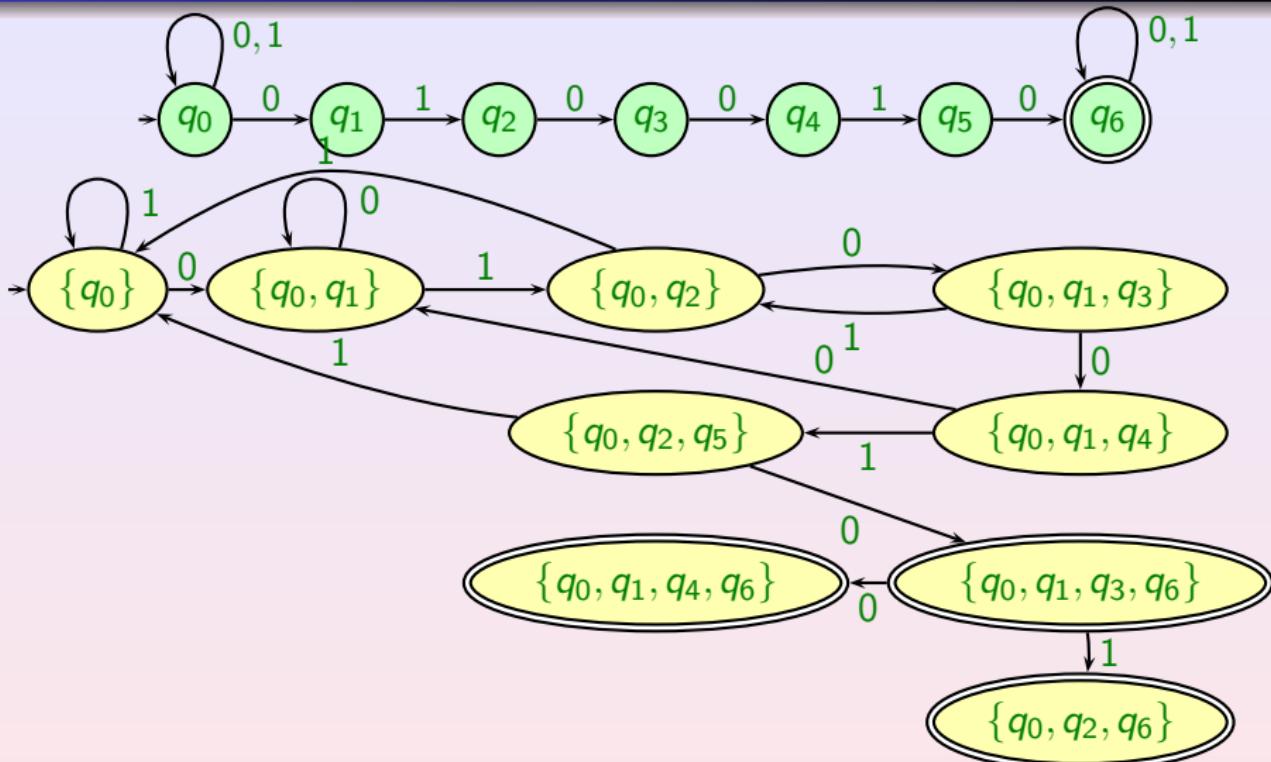
Ejemplo



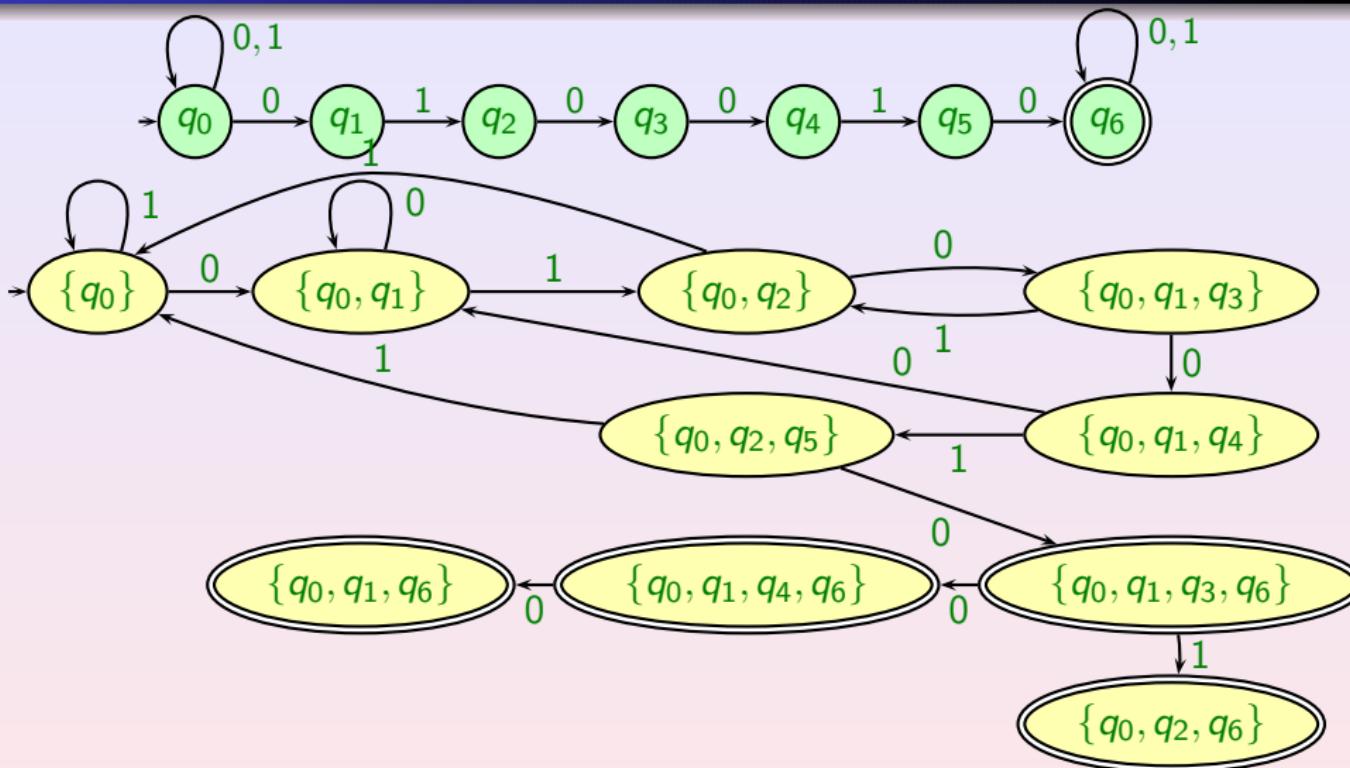
Ejemplo



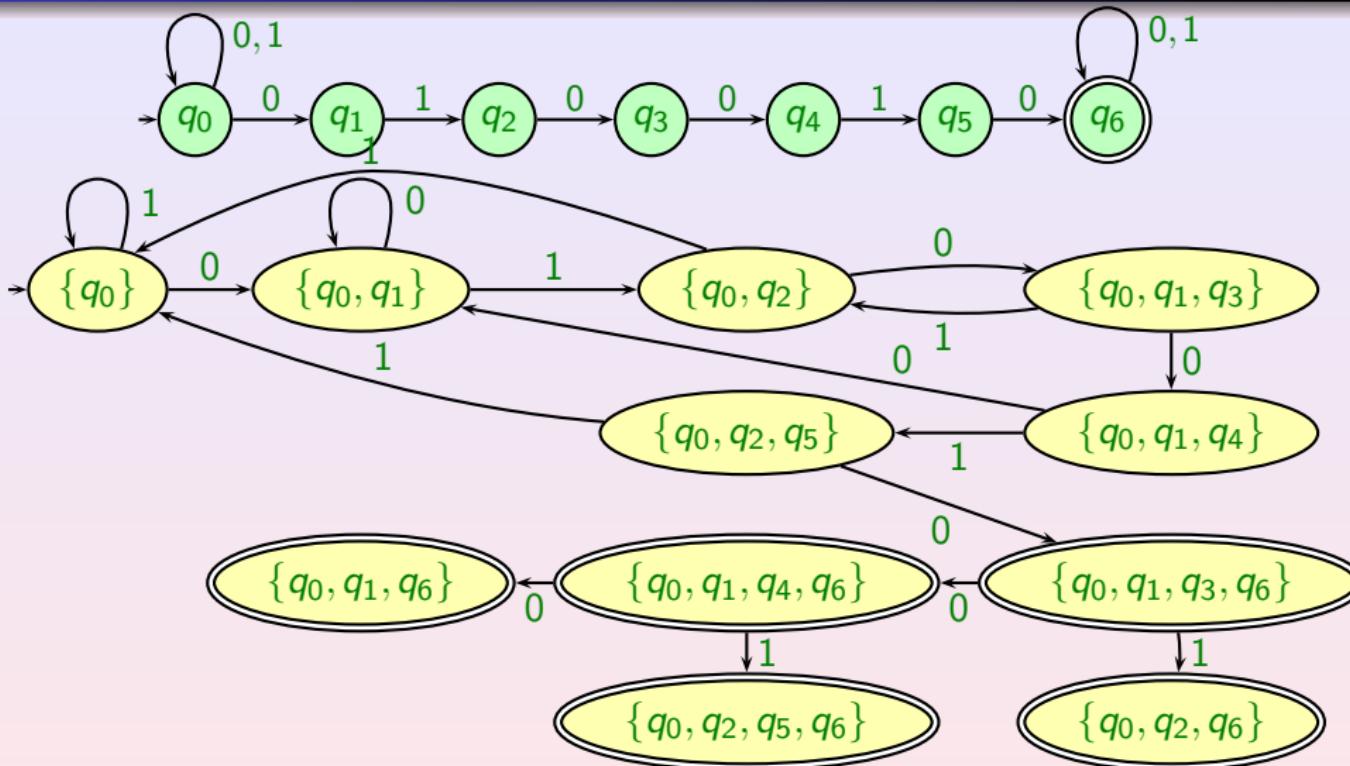
Ejemplo



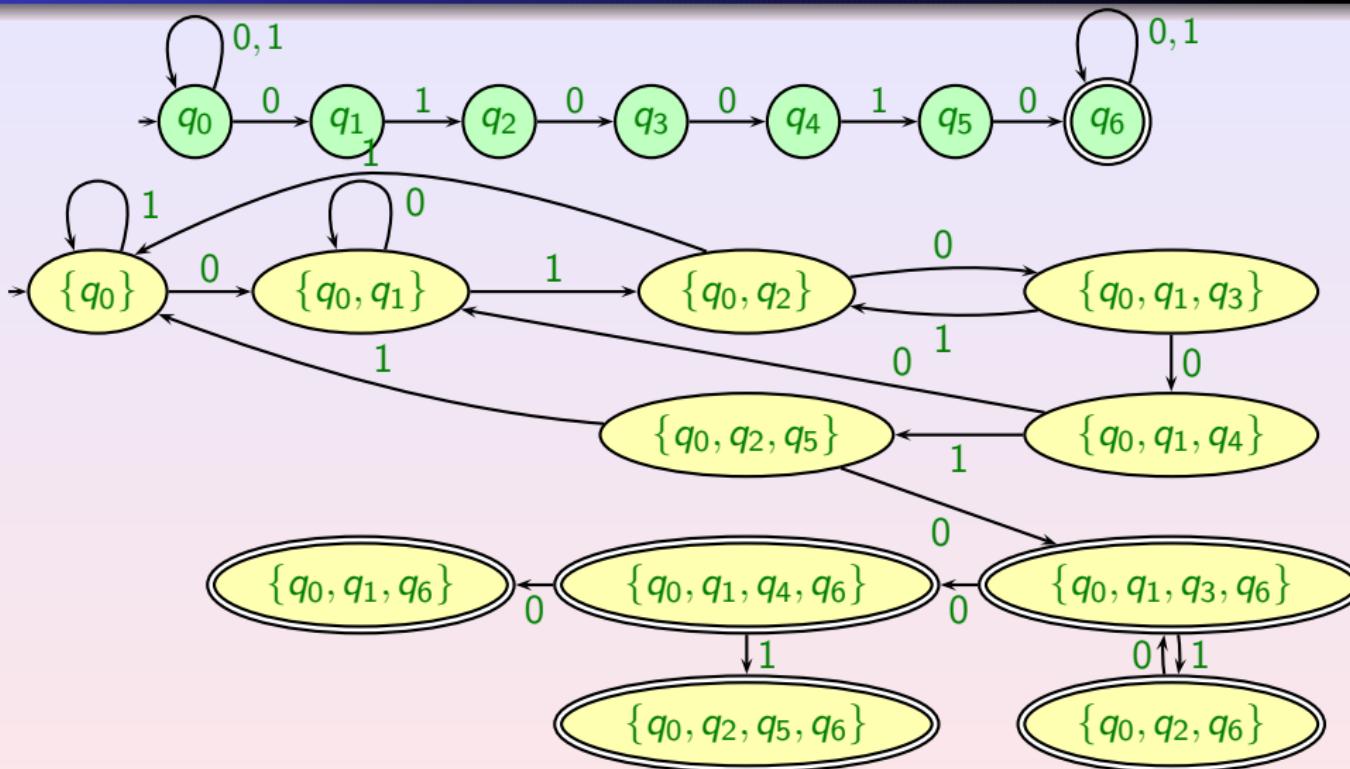
Ejemplo



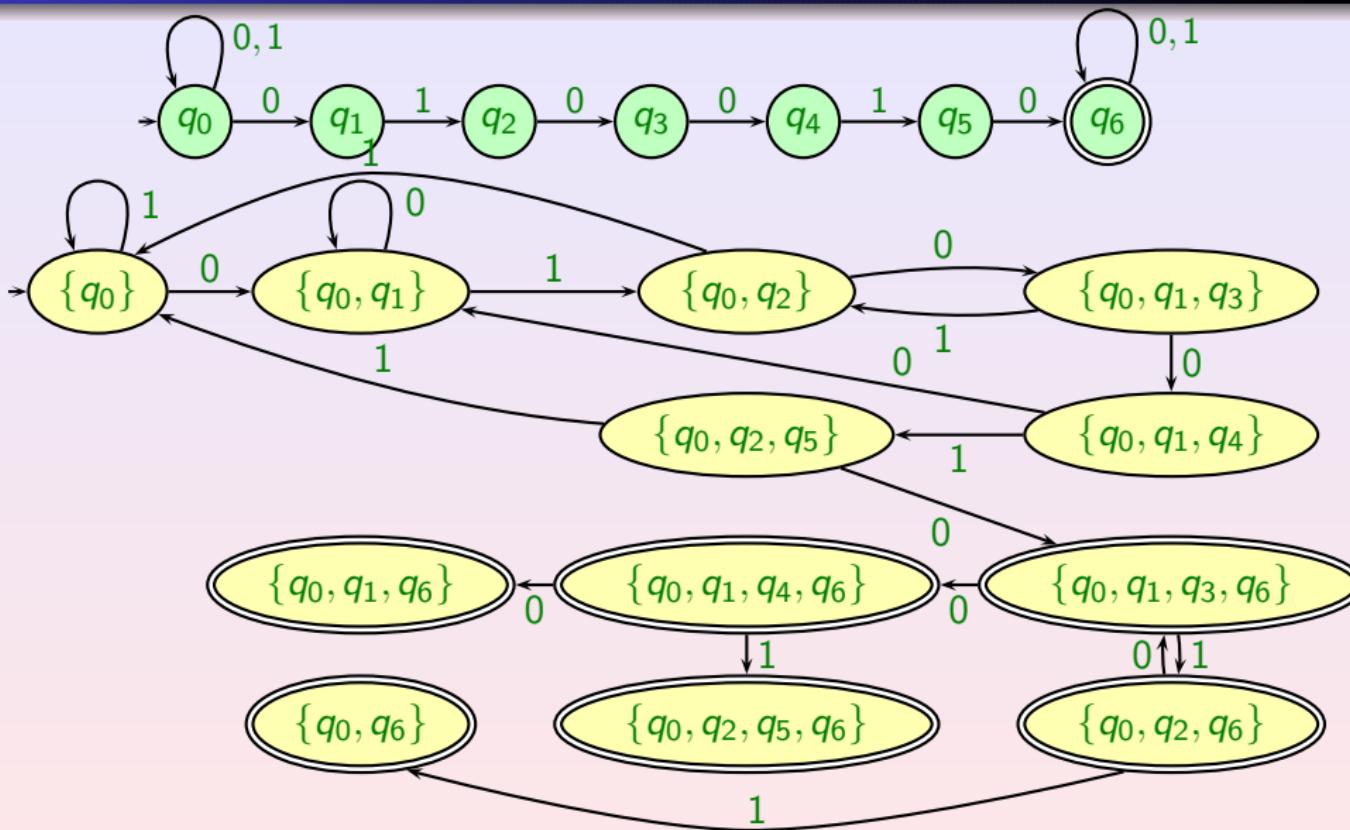
Ejemplo



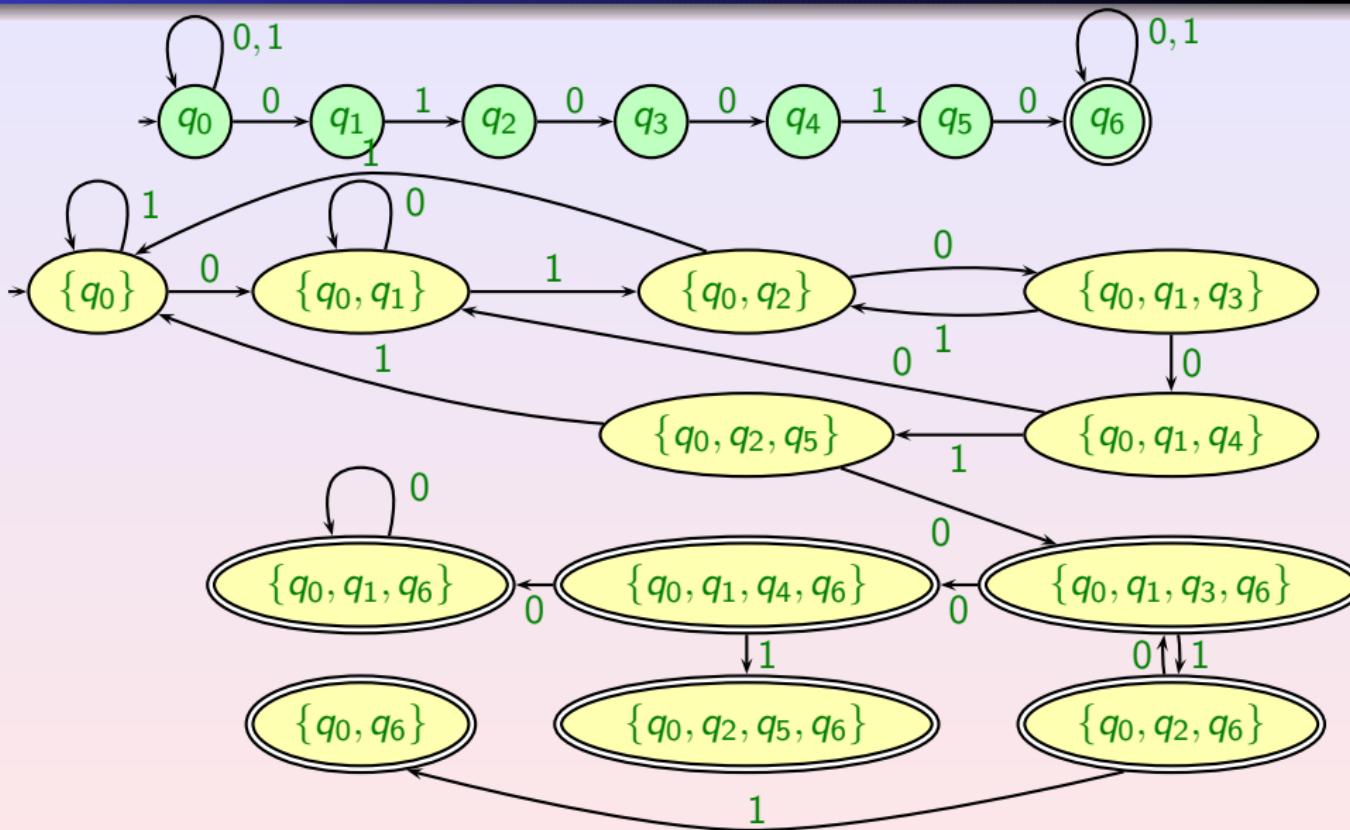
Ejemplo



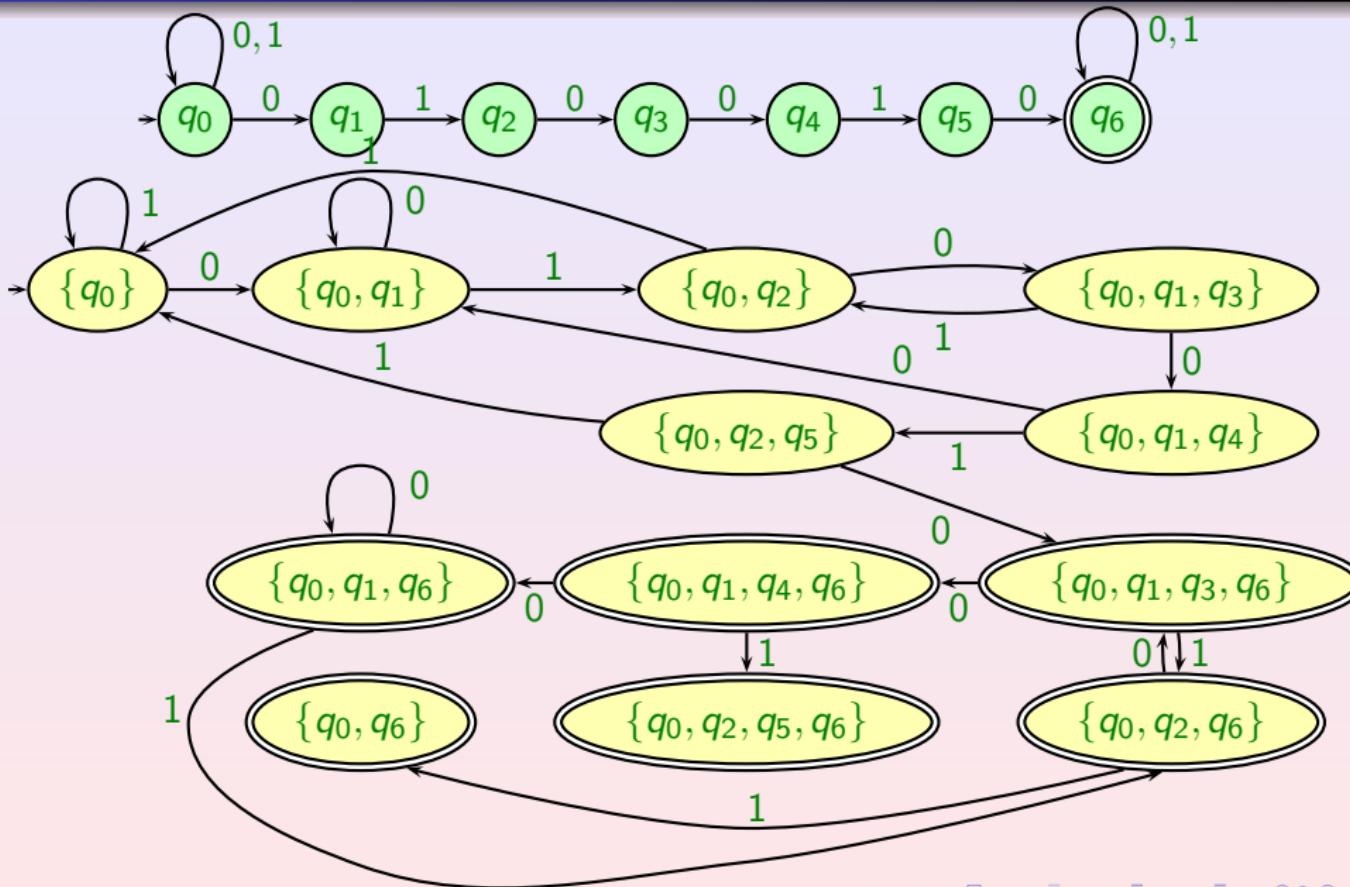
Ejemplo



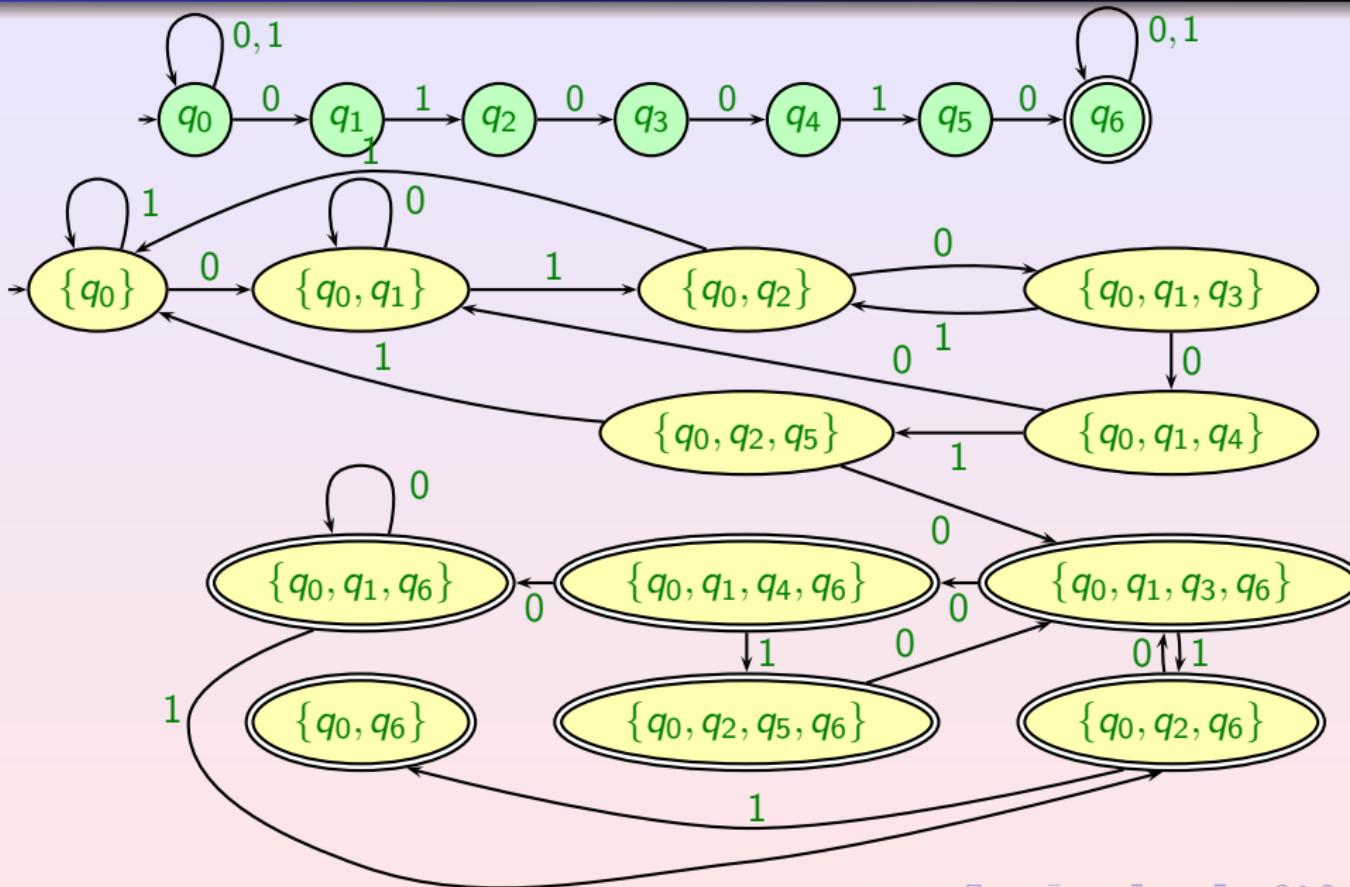
Ejemplo



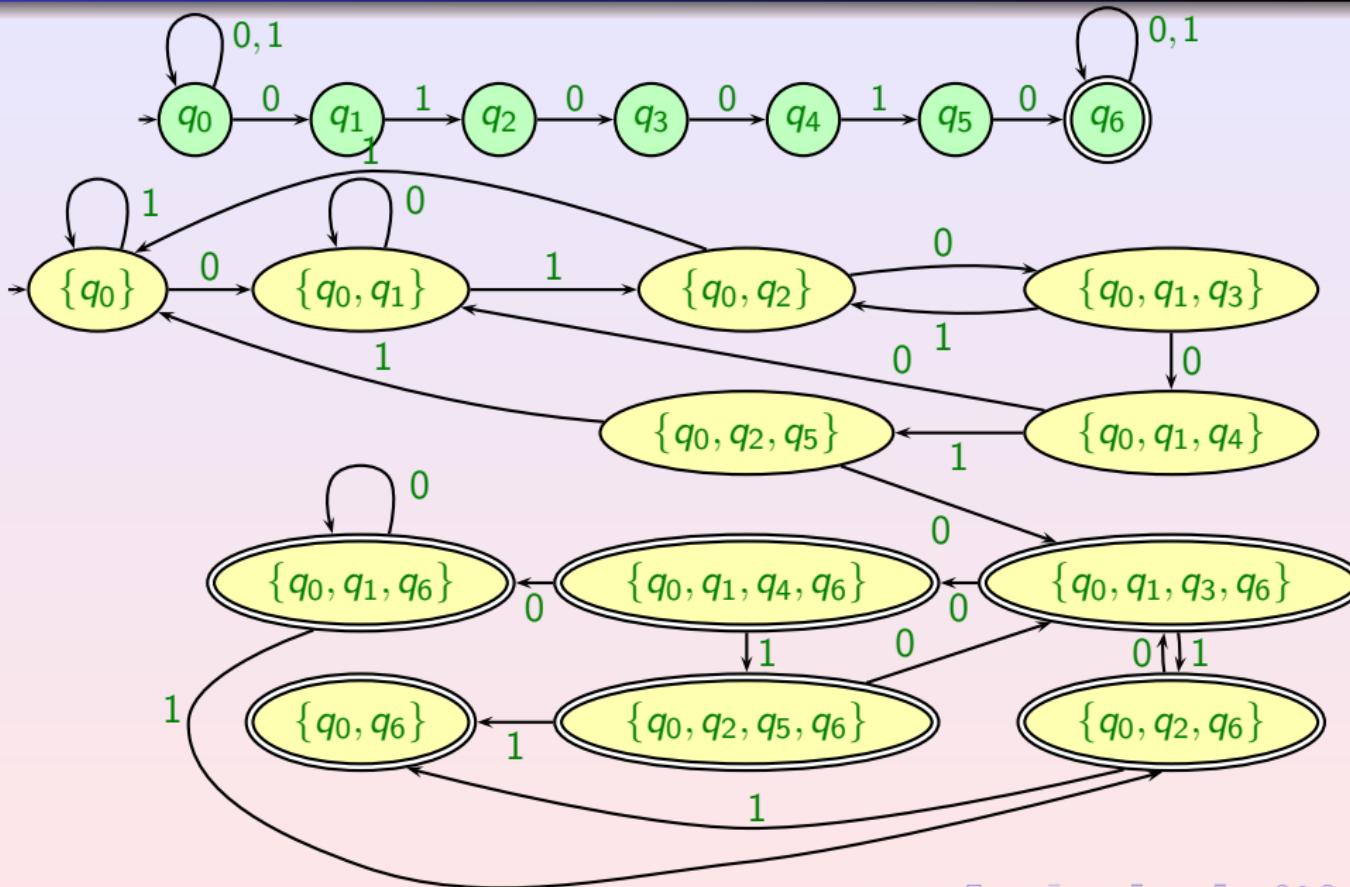
Ejemplo



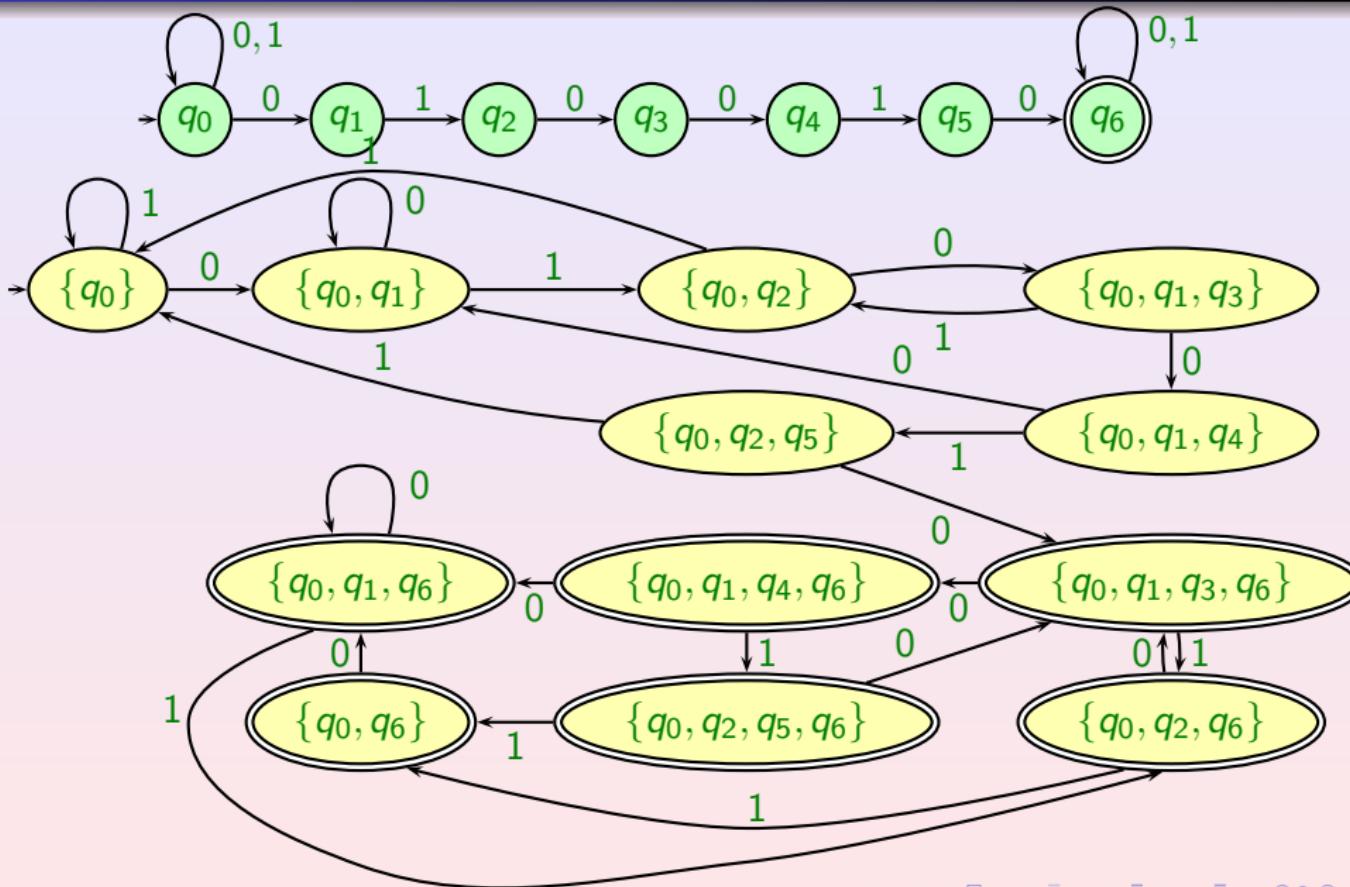
Ejemplo



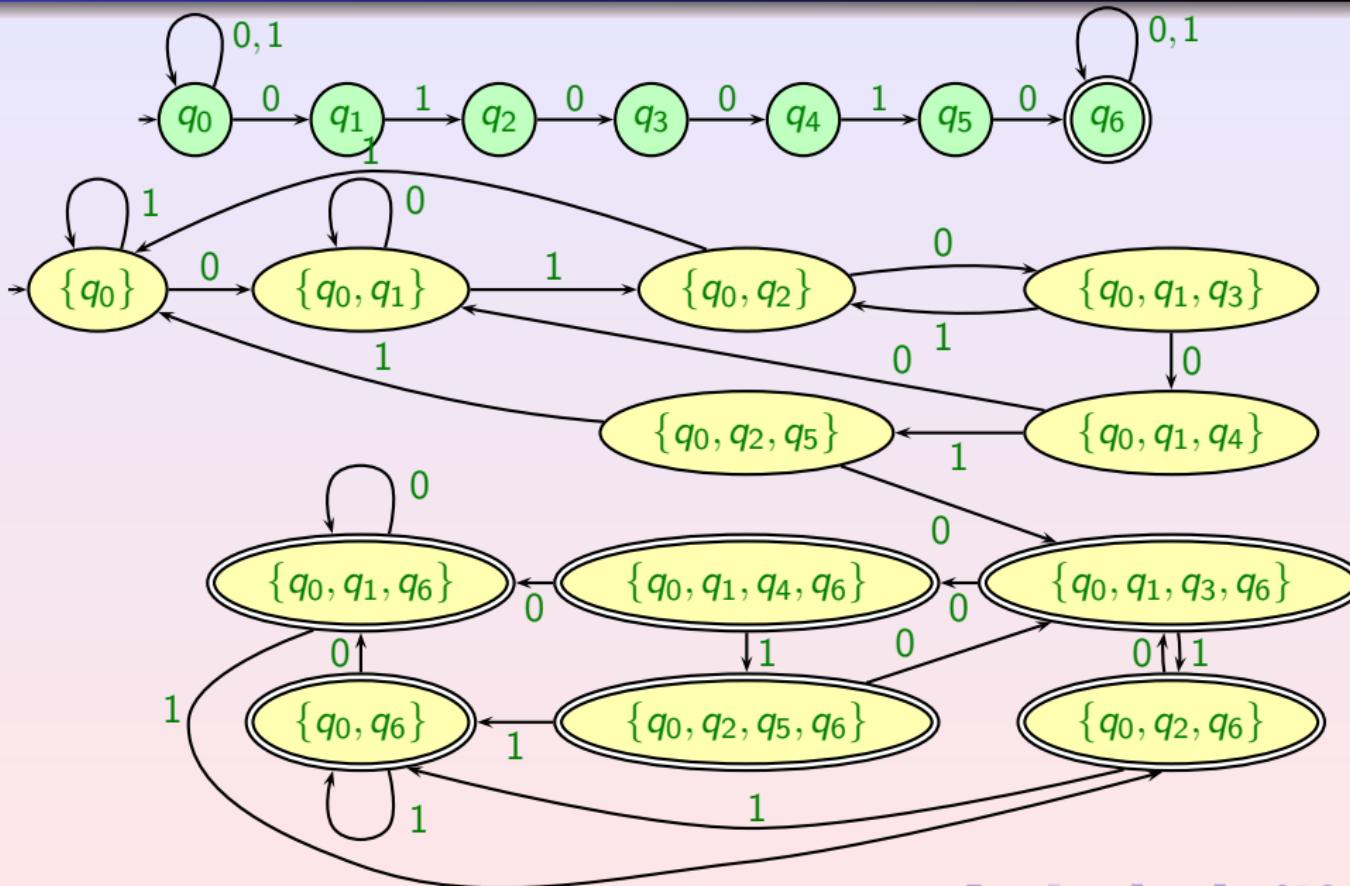
Ejemplo



Ejemplo



Ejemplo

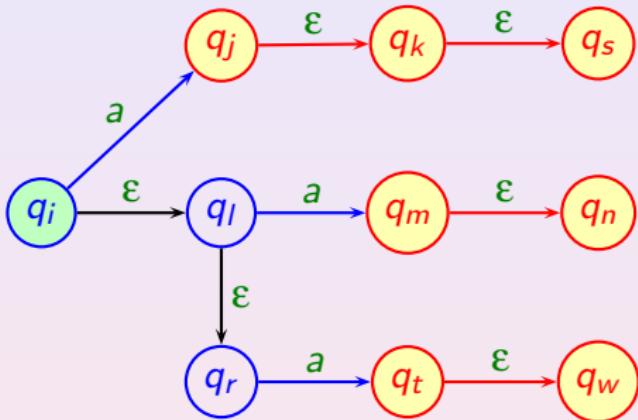


Un **autómata finito no determinista con transiciones nulas** es una quintupla $M = (Q, A, \delta, q_0, F)$ en la que

- Q es un conjunto finito llamado **conjunto de estados**
- A es un alfabeto llamado **alfabeto de entrada**
- δ es una aplicación llamada **función de transición**

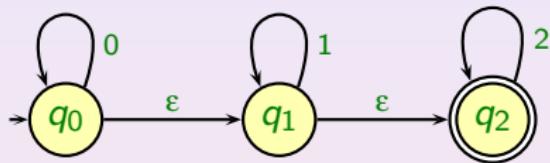
$$\delta : Q \times (A \cup \{\varepsilon\}) \rightarrow \wp(Q)$$

- q_0 es un elemento de Q , llamado **estado inicial**
- F es un subconjunto de Q , llamado **conjunto de estados finales**.

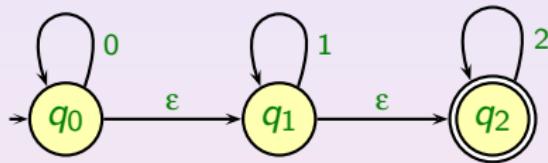


Desde el estado q_i se puede llegar a los estados:
 $q_j, q_k, q_s, q_m, q_n, q_t, q_w$ después de leer una a .

Ejemplo

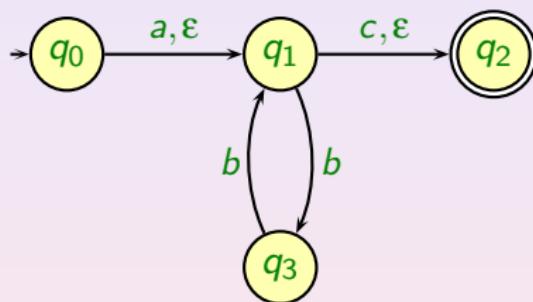


Ejemplo

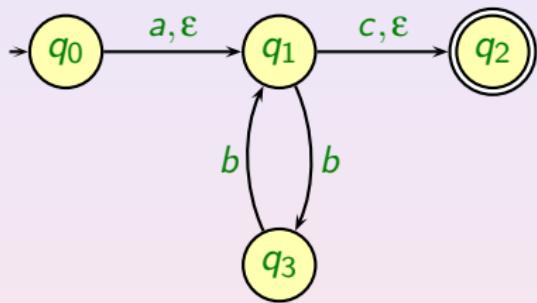


El lenguaje aceptado es $L = \{0^i 1^j 2^k : i, j, k \geq 0\}$.

Ejemplo

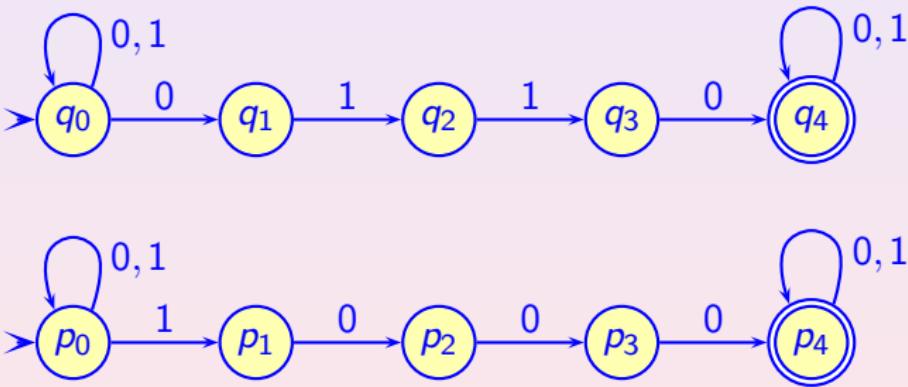


Ejemplo

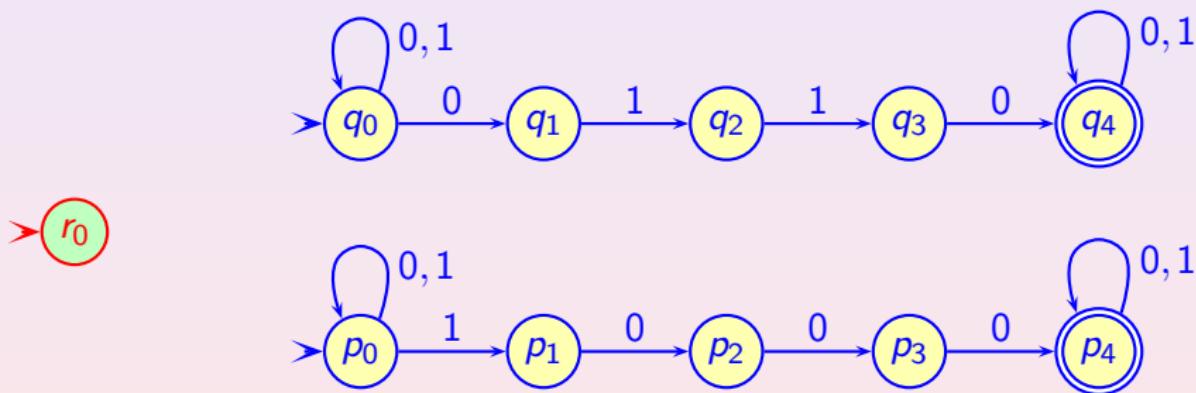


El lenguaje generado es $L = \{a^i b^{2j} c^k : i, k = 0, 1 \text{ y } j \geq 0\}$.

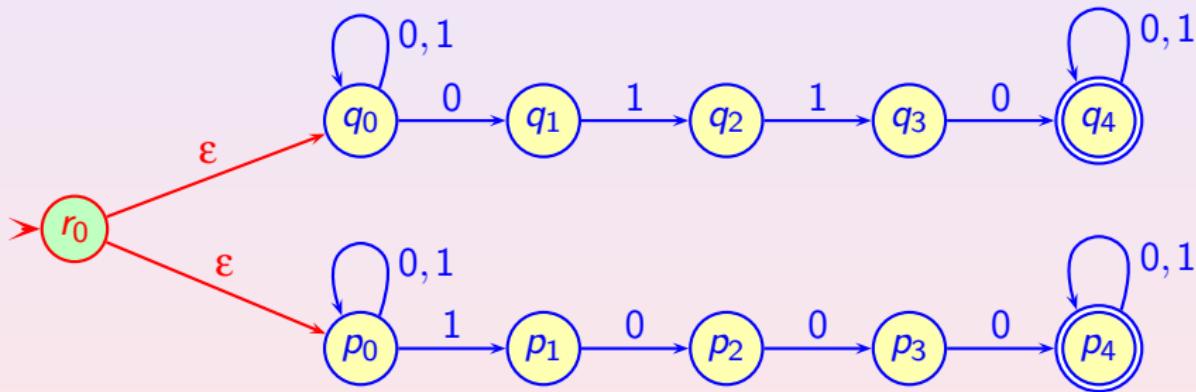
Conjunto de palabras que tienen a 0110 o a 1000 como subcadena.



Conjunto de palabras que tienen a 0110 o a 1000 como subcadena.



Conjunto de palabras que tienen a 0110 o a 1000 como subcadena.



PROCESO DE CALCULO

Para un Autómata Finito con Transiciones Nulas

$$M = (Q, A, \delta, q_0, F)$$

- **Descripción Instantánea o Configuración:**
Un elemento de $Q \times A^*$: (q, u) .
- **Configuración Inicial para** $u \in A^*$: (q_0, u)
- **Relación paso de cálculo entre dos configuraciones:**
 $((q, u) \vdash (p, v))$ si y solo si se da una de las condiciones
 - $((u = av) \wedge p \in \delta(q, a))$ (caso: $((q, av) \vdash (p, v))$)
 - $((u = v) \wedge p \in \delta(q, \epsilon))$ (caso: $((q, v) \vdash (p, v))$)

De una configuración se puede pasar a varias configuraciones distintas en un paso de cálculo, e incluso a ninguna.

- Relación de cálculo entre dos configuraciones:

$((q, u) \xrightarrow{*} (p, v))$ si y solo si existe una sucesión de configuraciones C_0, \dots, C_n tales que $C_0 = (q, u)$, $C_n = (p, v)$ y $\forall i \leq n - 1, C_i \vdash C_{i+1}$.

Lenguaje Aceptado por un ε -AF no-determinista

$$L(M) = \{u \in A^* : \exists q \in F, (q_0, u) \xrightarrow{*} (q, \varepsilon)\}$$

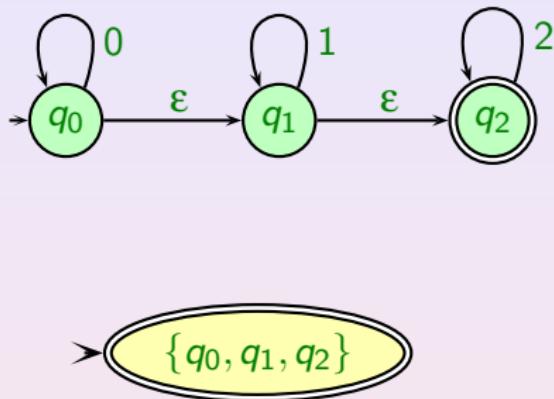
Las palabras de $L(M)$ se dicen aceptadas por el autómata.

- Dado un autómata finito determinista M existe un autómata no determinista con transiciones nulas \overline{M} que acepta el mismo lenguaje: $L(M) = L(\overline{M})$

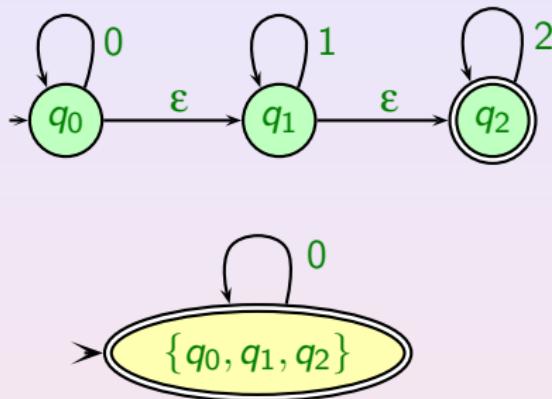
Es inmediato: sería un autómata en el que para cada símbolo del alfabeto de entrada hay siempre una opción y para cada estado $\delta(q, \epsilon) = \emptyset$.

- Dado un autómata finito determinista M existe un autómata no determinista con transiciones nulas \overline{M} que acepta el mismo lenguaje: $L(M) = L(\overline{M})$
Es inmediato: sería un autómata en el que para cada símbolo del alfabeto de entrada hay siempre una opción y para cada estado $\delta(q, \epsilon) = \emptyset$.
- Dado un autómata finito no determinista con transiciones nulas M existe un autómata finito determinista \overline{M} que acepta el mismo lenguaje: $L(M) = L(\overline{M})$

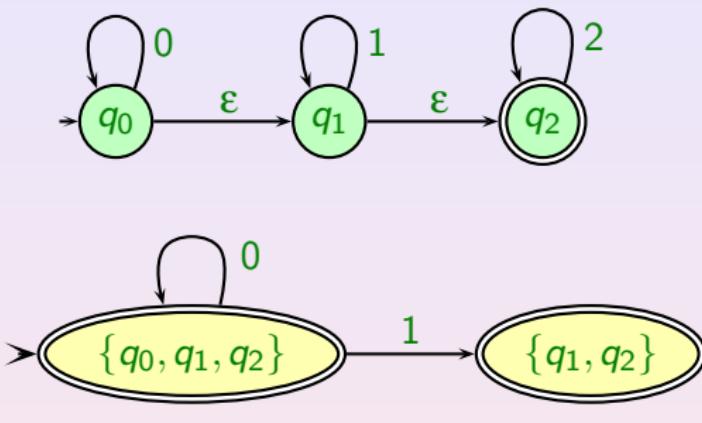
Ejemplo



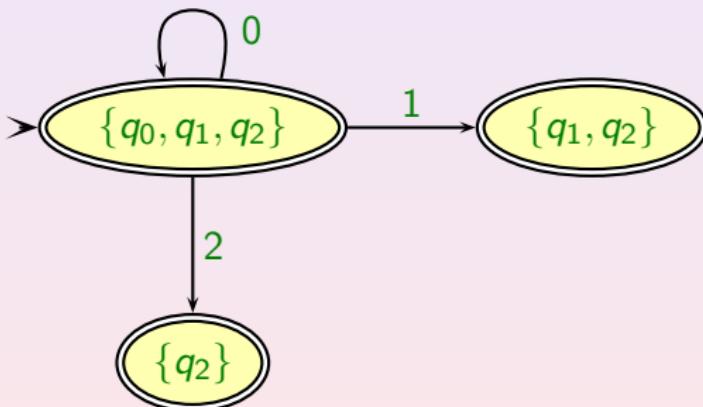
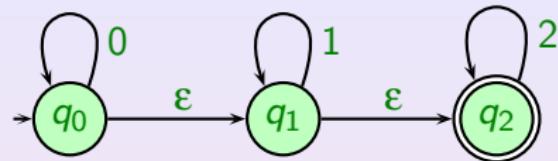
Ejemplo



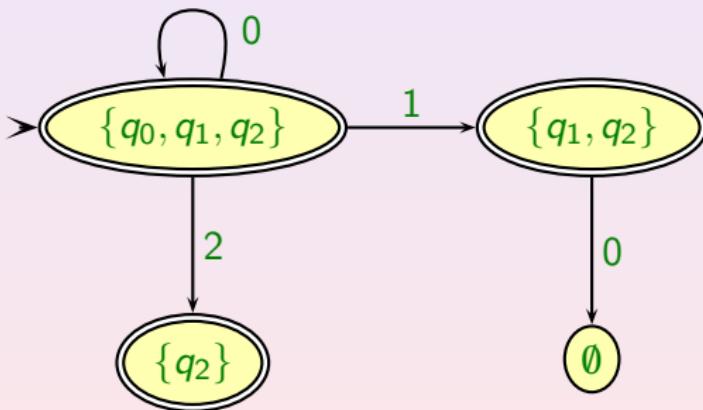
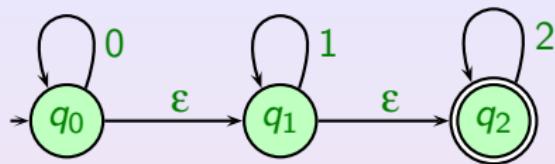
Ejemplo



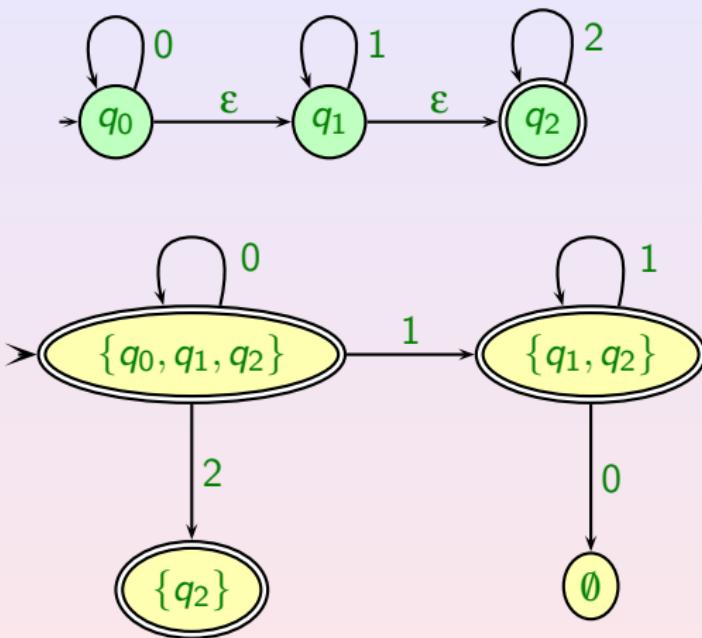
Ejemplo



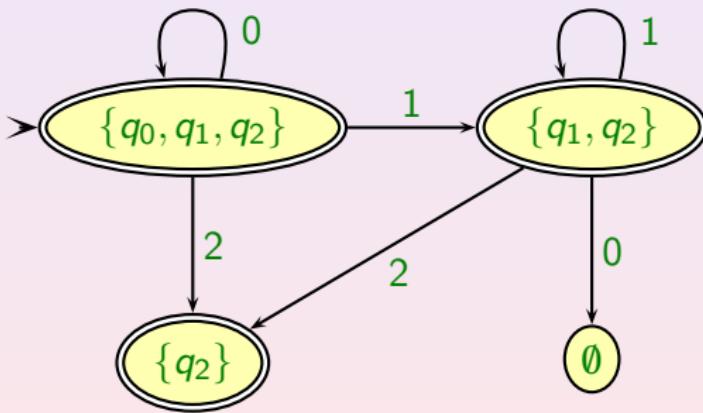
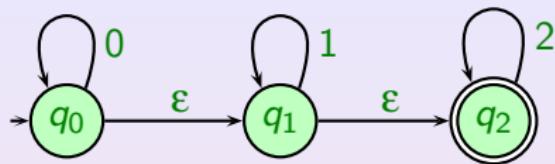
Ejemplo



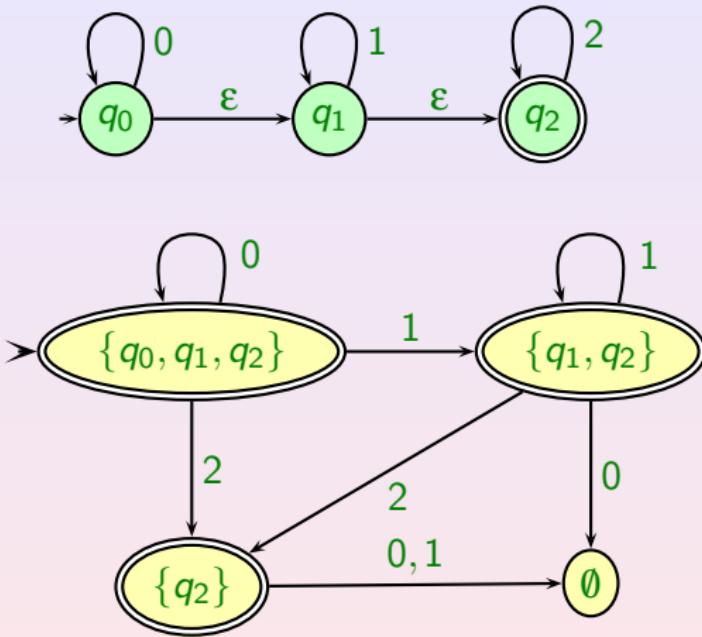
Ejemplo



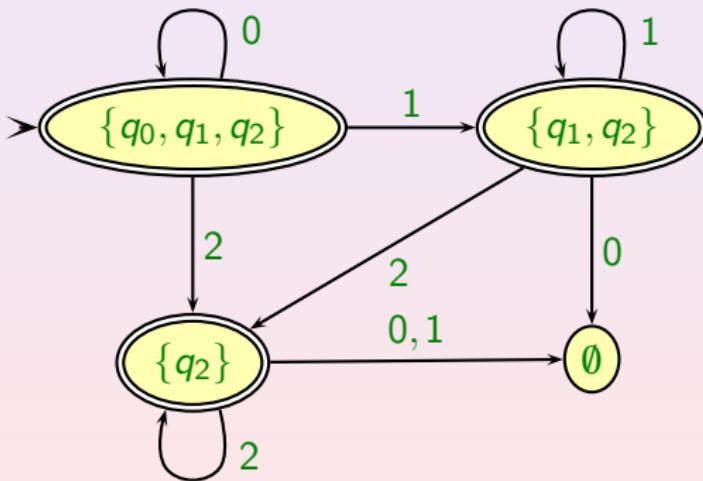
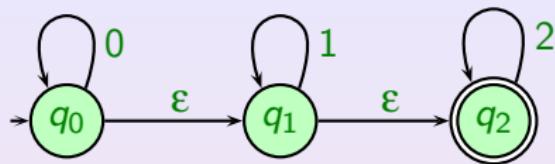
Ejemplo



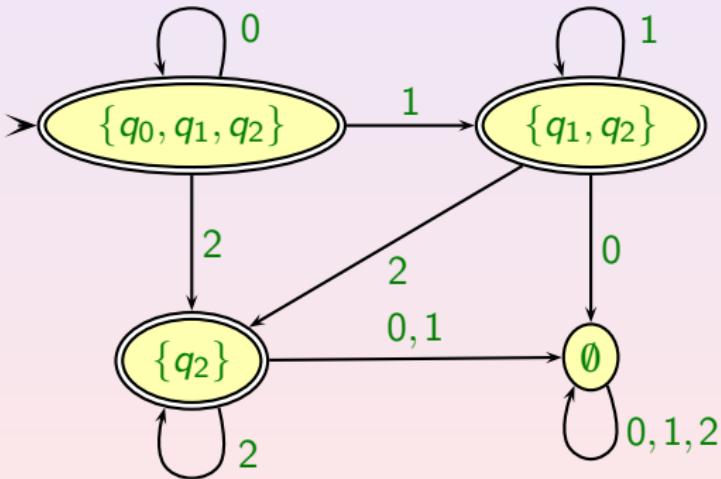
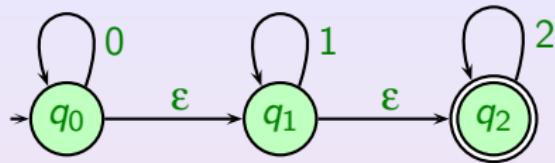
Ejemplo



Ejemplo



Ejemplo



Dado $M = (Q, A, \delta, q_0, F)$ se define:

Clasura de un estado:

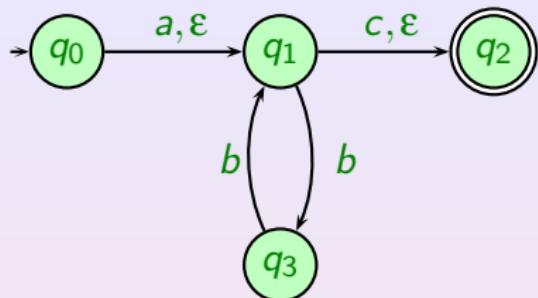
$$CI(q) = \{p : \exists p_1, \dots, p_n, p_1 = q, q_n = p, \quad p_i \in \delta(p_{i-1}, \varepsilon) \quad (i = 2, \dots, n)\}$$

Clasura de un conjunto de estados: $CI(P) = \bigcup_{q \in P} CI(q)$

Autómata Finito Determinista $\overline{M} = (\overline{Q}, A, \overline{\delta}, \overline{q_0}, \overline{F})$

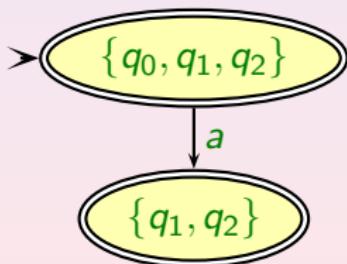
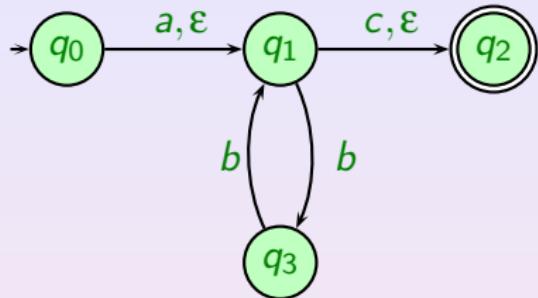
- $\overline{Q} = \wp(Q)$
- $\overline{\delta}(P, a) = CI(\bigcup_{q \in P} \delta(q, a))$
- $\overline{q_0} = CI(q_0)$
- $\overline{F} = \{P : P \cap F \neq \emptyset\}$

Ejemplo

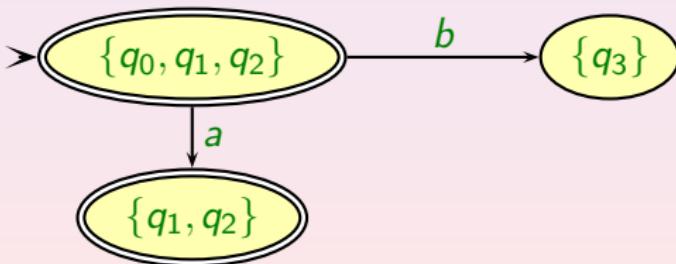
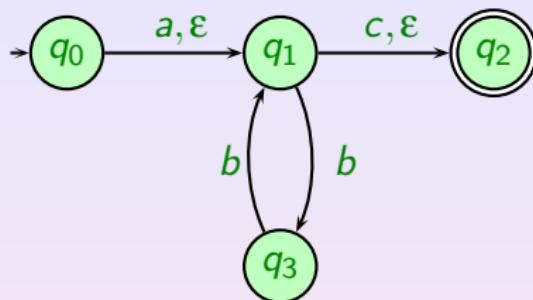


➤ $\{q_0, q_1, q_2\}$

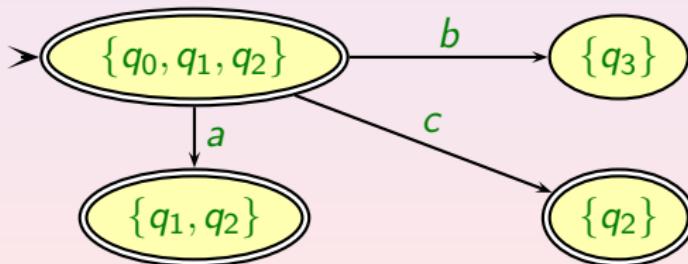
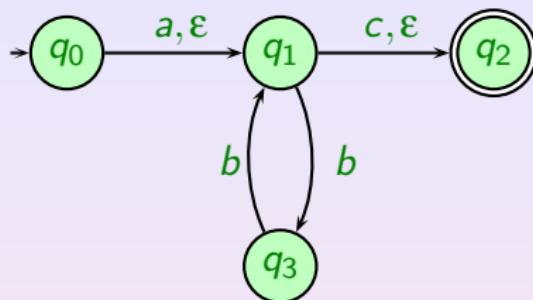
Ejemplo



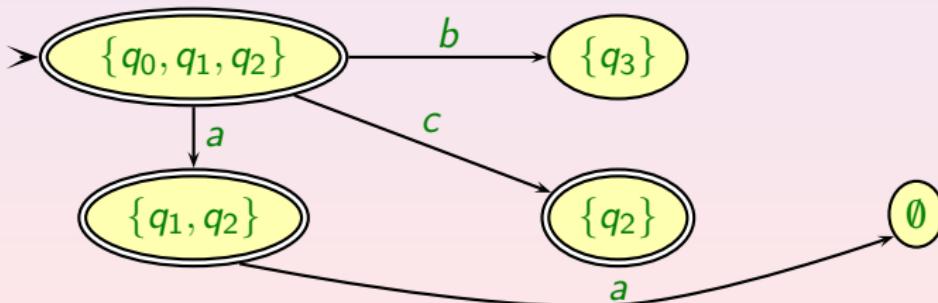
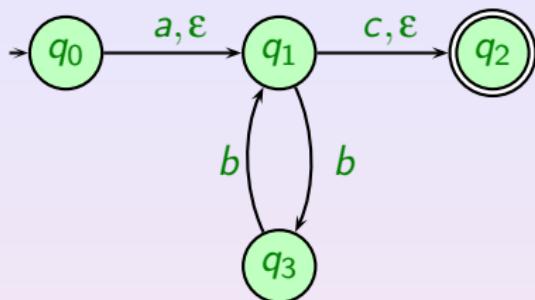
Ejemplo



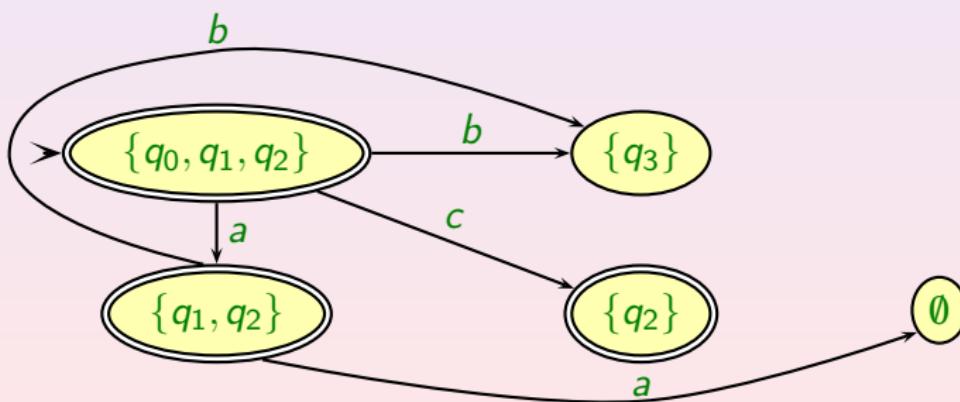
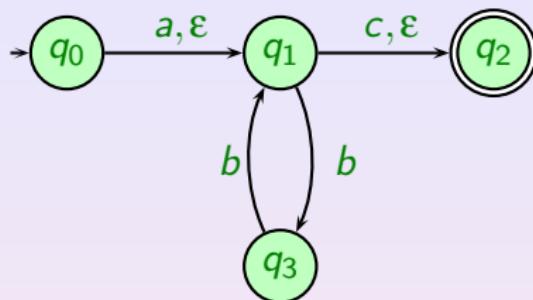
Ejemplo



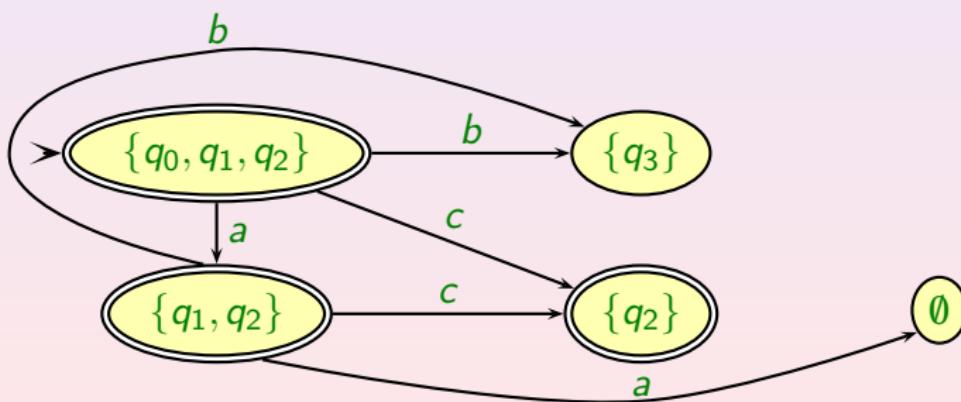
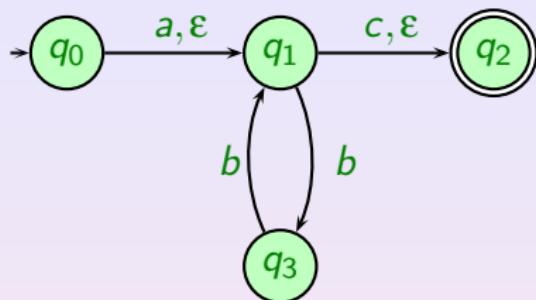
Ejemplo



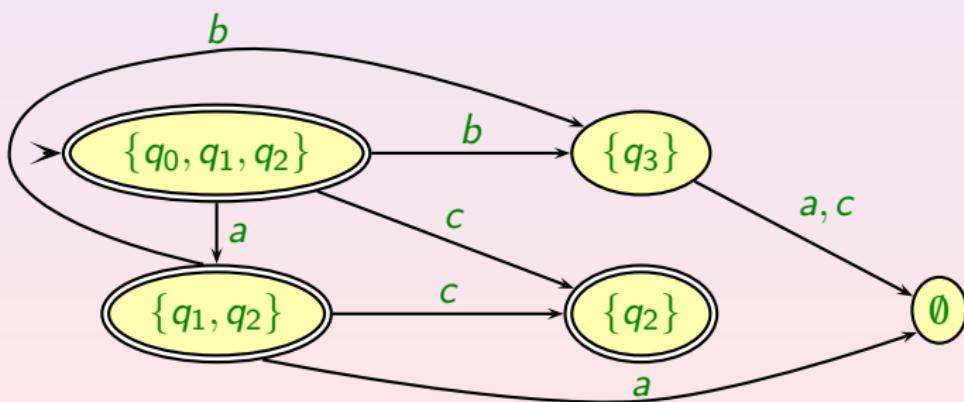
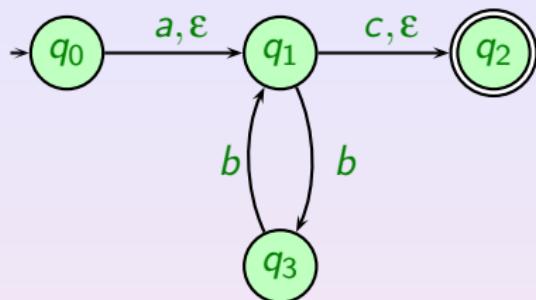
Ejemplo



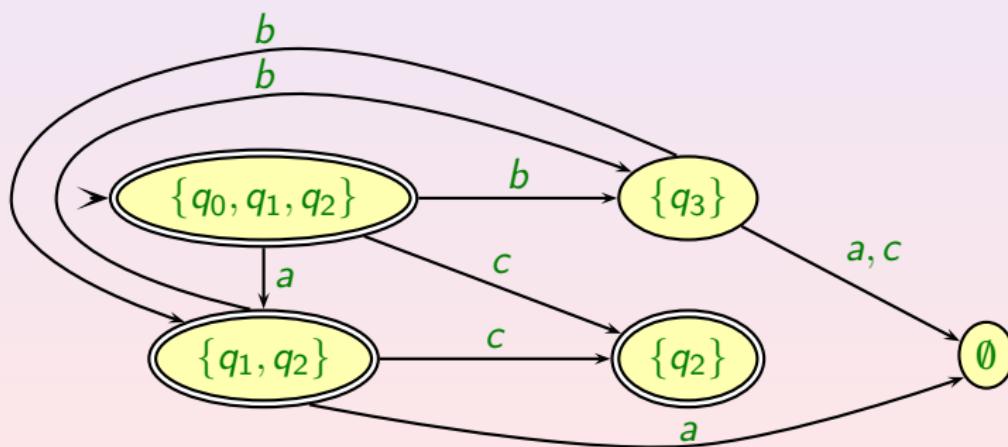
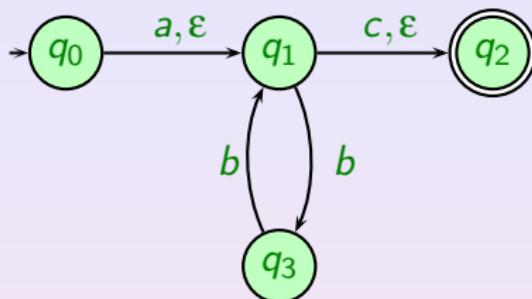
Ejemplo



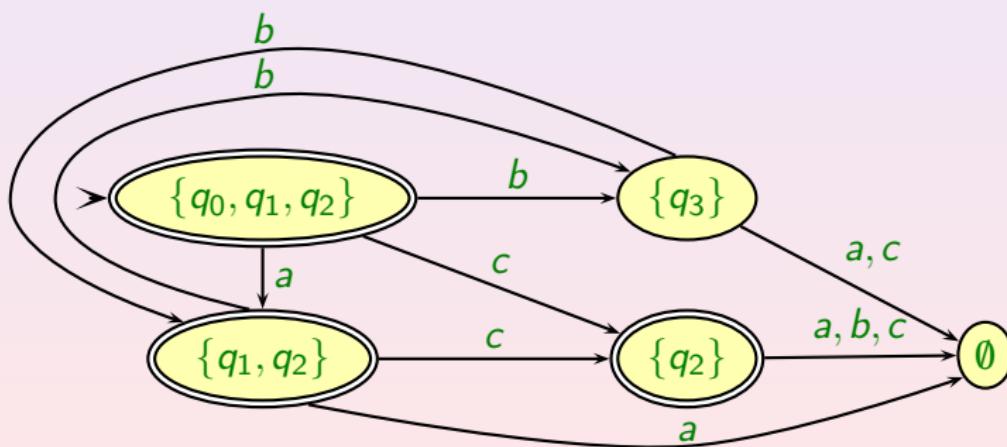
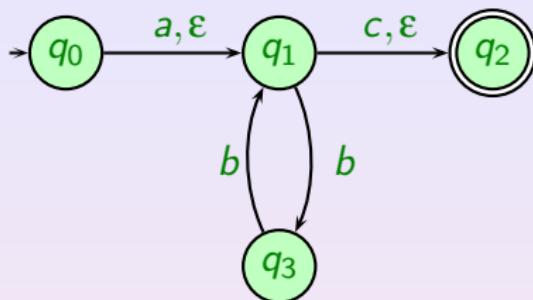
Ejemplo



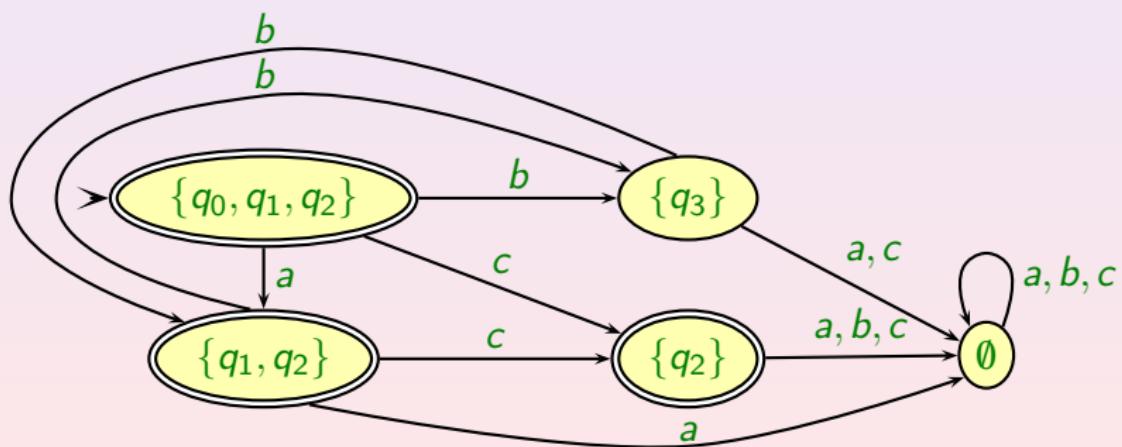
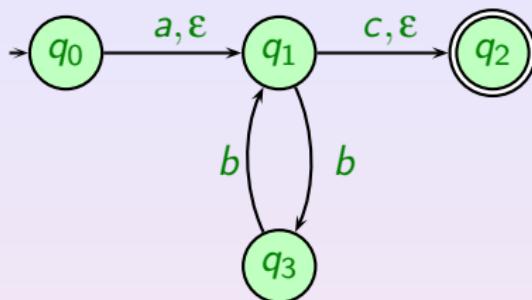
Ejemplo



Ejemplo



Ejemplo



EXPRESIONES REGULARES

Si A es un alfabeto, una **expresión regular** sobre este alfabeto se define de la siguiente forma:

- \emptyset es una expresión regular que denota el lenguaje vacío.
- ϵ es una expresión regular que denota el lenguaje $\{\epsilon\}$.
- Si $a \in A$, a es una expresión regular que denota el lenguaje $\{a\}$
- Si r y s son expresiones regulares denotando los lenguajes R y S entonces definimos las siguientes operaciones:
 - **Unión**: $(r+s)$ es una expresión regular que denota el lenguaje $R \cup S$.
 - **Concatenación**: (rs) es una expresión regular que denota el lenguaje RS .
 - **Clausura**: r^* es una expresión regular que denota el lenguaje R^* .

Ejemplos

$A = \{0,1\}$

• 00

Ejemplos

$$A = \{0, 1\}$$

• **00**

El conjunto {00}

Ejemplos

$$A = \{0,1\}$$

- **00** *El conjunto* $\{00\}$
- **01* + 0**

Ejemplos

$$A = \{0,1\}$$

- **00** *El conjunto {00}*
- **01* + 0** *Conjunto de palabras que empiezan por 0 y después tienen una sucesión de unos.*

$$A = \{0,1\}$$

- **00** *El conjunto {00}*
- **01* + 0** *Conjunto de palabras que empiezan por 0 y después tienen una sucesión de unos.*
- **(1+10)***

Ejemplos

$$A = \{0, 1\}$$

- **00** *El conjunto {00}*
- **01* + 0** *Conjunto de palabras que empiezan por 0 y después tienen una sucesión de unos.*
- **(1+10)*** *Conjunto de palabras en las que los ceros están precedidos siempre por unos*

Ejemplos

$$A = \{0,1\}$$

- **00** *El conjunto $\{00\}$*
- **01* + 0** *Conjunto de palabras que empiezan por 0 y después tienen una sucesión de unos.*
- **(1+10)*** *Conjunto de palabras en las que los ceros están precedidos siempre por unos*
- **(0+1)*011**

Ejemplos

$$A = \{0,1\}$$

- **00** *El conjunto {00}*
- **01* + 0** *Conjunto de palabras que empiezan por 0 y después tienen una sucesión de unos.*
- **(1+10)*** *Conjunto de palabras en las que los ceros están precedidos siempre por unos*
- **(0+1)*011** *Conjunto de palabras que terminan en 011*

Ejemplos

$$A = \{0,1\}$$

- **00** *El conjunto {00}*
- **01* + 0** *Conjunto de palabras que empiezan por 0 y después tienen una sucesión de unos.*
- **(1 + 10)*** *Conjunto de palabras en las que los ceros están precedidos siempre por unos*
- **(0 + 1)*011** *Conjunto de palabras que terminan en 011*
- **0*1***

Ejemplos

$$A = \{0,1\}$$

- **00** *El conjunto {00}*
- **01* + 0** *Conjunto de palabras que empiezan por 0 y después tienen una sucesión de unos.*
- **(1+10)*** *Conjunto de palabras en las que los ceros están precedidos siempre por unos*
- **(0+1)*011** *Conjunto de palabras que terminan en 011*
- **0*1*** *Conjunto de palabras formadas por una sucesión de ceros seguida de una sucesión de unos. Ambas sucesiones pueden ser vacías*

Ejemplos

$$A = \{0,1\}$$

- **00** El conjunto $\{00\}$
- **01* + 0** Conjunto de palabras que empiezan por 0 y después tienen una sucesión de unos.
- **(1 + 10)*** Conjunto de palabras en las que los ceros están precedidos siempre por unos
- **(0 + 1)*011** Conjunto de palabras que terminan en 011
- **0*1*** Conjunto de palabras formadas por una sucesión de ceros seguida de una sucesión de unos. Ambas sucesiones pueden ser vacías
- **00*11***

Ejemplos

$$A = \{0,1\}$$

- **00** *El conjunto {00}*
- **01* + 0** *Conjunto de palabras que empiezan por 0 y después tienen una sucesión de unos.*
- **(1+10)*** *Conjunto de palabras en las que los ceros están precedidos siempre por unos*
- **(0+1)*011** *Conjunto de palabras que terminan en 011*
- **0*1*** *Conjunto de palabras formadas por una sucesión de ceros seguida de una sucesión de unos. Ambas sucesiones pueden ser vacías*
- **00*11*** *Conjunto de palabras formadas por una sucesión de ceros seguida de una sucesión de unos. Niguna de las sucesiones puede ser vacía*

Ejemplos

$$A = \{0, 1\}$$

- **00** *El conjunto {00}*
- **01* + 0** *Conjunto de palabras que empiezan por 0 y después tienen una sucesión de unos.*
- **(1 + 10)*** *Conjunto de palabras en las que los ceros están precedidos siempre por unos*
- **(0 + 1)*011** *Conjunto de palabras que terminan en 011*
- **0*1*** *Conjunto de palabras formadas por una sucesión de ceros seguida de una sucesión de unos. Ambas sucesiones pueden ser vacías*
- **00*11*** *Conjunto de palabras formadas por una sucesión de ceros seguida de una sucesión de unos. Niguna de las sucesiones puede ser vacía*

A r^*r se le denota como r^+ . La última expresión regular quedaría 0^+1^+

Construir una expresión regular para las palabras en las que el número de ceros es par.

Construir una expresión regular para las palabras en las que el número de ceros es par.

$$1^* (01^*01^*)^*$$

Construir una expresión regular para las palabras en las que el número de ceros es par.

$$1^* (01^*01^*)^*$$

Construir una expresión regular para las palabras que contengan a 0110 como subcadena.

Construir una expresión regular para las palabras en las que el número de ceros es par.

$$1^* (01^*01^*)^*$$

Construir una expresión regular para las palabras que contengan a 0110 como subcadena.

$$(0 + 1)^*0110(0 + 1)^*$$

Construir una expresión regular para las palabras en las que el número de ceros es par.

$$1^* (01^*01^*)^*$$

Construir una expresión regular para las palabras que contengan a 0110 como subcadena.

$$(0+1)^*0110(0+1)^*$$

Construir una expresión regular para el conjunto de palabras que empiezan por 000 y tales que esta subcadena sólo se encuentra al principio de la palabra.

Construir una expresión regular para las palabras en las que el número de ceros es par.

$$1^* (01^*01^*)^*$$

Construir una expresión regular para las palabras que contengan a 0110 como subcadena.

$$(0 + 1)^*0110(0 + 1)^*$$

Construir una expresión regular para el conjunto de palabras que empiezan por 000 y tales que esta subcadena sólo se encuentra al principio de la palabra.

$$(000)(1 + 10 + 100)^*$$

Construir una expresión regular para las palabras en las que el número de ceros es par.

$$1^* (01^*01^*)^*$$

Construir una expresión regular para las palabras que contengan a 0110 como subcadena.

$$(0 + 1)^*0110(0 + 1)^*$$

Construir una expresión regular para el conjunto de palabras que empiezan por 000 y tales que esta subcadena sólo se encuentra al principio de la palabra.

$$(000)(1 + 10 + 100)^*$$

Construir una expresión regular para el conjunto de palabras que tienen a 000 o a 101 como subcadena

Ejemplos - Alfabeto {0, 1}

Construir una expresión regular para las palabras en las que el número de ceros es par.

$$1^* (01^*01^*)^*$$

Construir una expresión regular para las palabras que contengan a 0110 como subcadena.

$$(0 + 1)^*0110(0 + 1)^*$$

Construir una expresión regular para el conjunto de palabras que empiezan por 000 y tales que esta subcadena sólo se encuentra al principio de la palabra.

$$(000)(1 + 10 + 100)^*$$

Construir una expresión regular para el conjunto de palabras que tienen a 000 o a 101 como subcadena

$$(0 + 1)^*(000 + 101)(0 + 1)^*$$

Propiedades de las Expresiones Regulares

- | | |
|--|---------------------------------------|
| ① $r_1 + r_2 = r_2 + r_1$ | ⑧ $r_1(r_2 + r_3) = r_1r_2 + r_1r_3$ |
| ②
$r_1 + (r_2 + r_3) = (r_1 + r_2) + r_3$ | ⑨ $(r_1 + r_2)r_3 = r_1r_3 + r_2r_3$ |
| ③ $r_1(r_2r_3) = (r_1r_2)r_3$ | ⑩ $r^+ + \epsilon = r^*$ |
| ④ $r\epsilon = r$ | ⑪ $r^* + \epsilon = r^*$ |
| ⑤ $r\emptyset = \emptyset$ | ⑫ $(r + \epsilon)^* = r^*$ |
| ⑥ $r + \emptyset = r$ | ⑬ $(r + \epsilon)^+ = r^*$ |
| ⑦ $\epsilon^* = \epsilon$ | ⑭ $(r_1^* + r_2^*)^* = (r_1 + r_2)^*$ |

Preguntas sobre Expresiones Regulares

¿Verdadero o falso?

- 1 Si r y s son expresiones regulares, tenemos que siempre se verifica que $(rs)^* = r^*s^*$
- 2 Si r y s son expresiones regulares, tenemos que siempre se verifica que $(r+s)^* = r^* + s^*$
- 3 Si r_1 y r_2 son expresiones regulares, tales que su lenguaje asociado contiene la palabra vacía, entonces $(r_1r_2)^* = (r_2r_1)^*$.
- 4 Si r y s son expresiones regulares, tenemos que siempre se verifica que $(r+\epsilon)^+ = r^*$
- 5 Si r y s son expresiones regulares, tenemos que siempre se verifica que $r(r+s)^* = (r+s)^*r$
- 6 Si r_1 y r_2 son expresiones regulares, entonces $r_1^*r_2^* \subseteq (r_1r_2)^*$, en el sentido de que los lenguajes asociados están incluidos.
- 7 Si r_1 , r_2 y r_3 son expresiones regulares, entonces $(r_1+r_2)^*r_3 = r_1^*r_3 + r_2^*r_3$.
- 8 Si r_1 y r_2 son expresiones regulares entonces: $(r_1^*r_2^*)^* = (r_1+r_2)^*$

Preguntas sobre Expresiones Regulares

¿Verdadero o falso?

- 1 Si r_1 y r_2 son expresiones regulares, entonces $(r_1.r_2)^* = (r_1 + r_2)^*$.
- 2 Si r es una expresión regular, entonces $r^*r^* = r^*$.
- 3 Si r es una expresión regular, entonces $r\emptyset = r + \emptyset$.
- 4 Si r es una expresión regular, entonces se verifica que $r^*\epsilon = r^+\epsilon$.
- 5 Si r_1 y r_2 son expresiones regulares, entonces siempre $r_1(r_2r_1)^* = (r_1r_2)^*r_1$
- 6 Si r y s son expresiones regulares, entonces $(r^*s^*)^* = (r+s)^*$.
- 7 Si r es una expresión regular, entonces $(rr)^* \subseteq r^*$.
- 8 Si r_1 y r_2 son expresiones regulares, tales que su lenguaje asociado contiene la palabra vacía, entonces $(r_1r_2)^* = (r_1 + r_2)^*$.
- 9 Si r_1, r_2, r_3 son expresiones regulares, entonces $r_1(r_2^* + r_3^*) = r_1r_2^* + r_1r_3^*$.

- La familia de los lenguajes aceptados por los autómatas finitos coincide con la familia de lenguajes que pueden representarse mediante expresiones regulares.
- Esto se demostrará comprobando:
 - Dada una expresión regular, existe un autómata que acepta el mismo lenguaje que el representado por la expresión regular.
 - Dado un autómata finito existe siempre una expresión regular que representa el lenguaje aceptado por el autómata.
- La primera transformación es más útil, ya que inicialmente los lenguajes se representan mediante expresiones regulares y después necesitamos algoritmos (autómatas) que reconozcan estos lenguajes.

Dada una expresión regular existe un autómata finito que acepta el lenguaje asociado a esta expresión regular.

Dada una expresión regular existe un autómata finito que acepta el lenguaje asociado a esta expresión regular.

Vamos a demostrar que existe un AFND con transiciones nulas. A partir de él se podría construir el autómata determinista asociado.

La construcción del autómata va a ser recursiva.

Para las expresiones regulares iniciales tenemos los siguientes autómatas:

Dada una expresión regular existe un autómata finito que acepta el lenguaje asociado a esta expresión regular.

Vamos a demostrar que existe un AFND con transiciones nulas. A partir de él se podría construir el autómata determinista asociado.

La construcción del autómata va a ser recursiva.

Para las expresiones regulares iniciales tenemos los siguientes autómatas:

- \emptyset

Dada una expresión regular existe un autómata finito que acepta el lenguaje asociado a esta expresión regular.

Vamos a demostrar que existe un AFND con transiciones nulas. A partir de él se podría construir el autómata determinista asociado.

La construcción del autómata va a ser recursiva.

Para las expresiones regulares iniciales tenemos los siguientes autómatas:



Dada una expresión regular existe un autómata finito que acepta el lenguaje asociado a esta expresión regular.

Vamos a demostrar que existe un AFND con transiciones nulas. A partir de él se podría construir el autómata determinista asociado.

La construcción del autómata va a ser recursiva.

Para las expresiones regulares iniciales tenemos los siguientes autómatas:



Dada una expresión regular existe un autómata finito que acepta el lenguaje asociado a esta expresión regular.

Vamos a demostrar que existe un AFND con transiciones nulas. A partir de él se podría construir el autómata determinista asociado.

La construcción del autómata va a ser recursiva.

Para las expresiones regulares iniciales tenemos los siguientes autómatas:

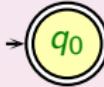


Dada una expresión regular existe un autómata finito que acepta el lenguaje asociado a esta expresión regular.

Vamos a demostrar que existe un AFND con transiciones nulas. A partir de él se podría construir el autómata determinista asociado.

La construcción del autómata va a ser recursiva.

Para las expresiones regulares iniciales tenemos los siguientes autómatas:

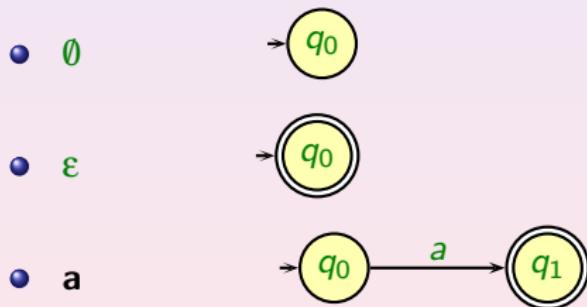
- \emptyset 
- ϵ 
- a

Dada una expresión regular existe un autómata finito que acepta el lenguaje asociado a esta expresión regular.

Vamos a demostrar que existe un AFND con transiciones nulas. A partir de él se podría construir el autómata determinista asociado.

La construcción del autómata va a ser recursiva.

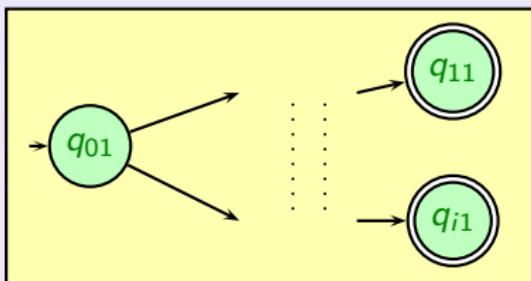
Para las expresiones regulares iniciales tenemos los siguientes autómatas:



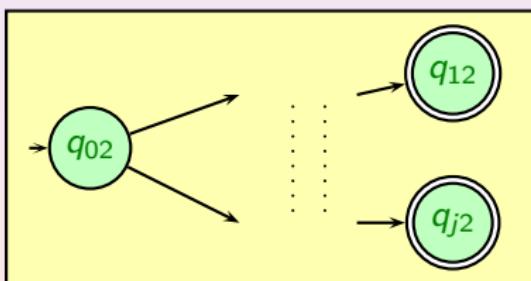
Autómatas Compuestos: Unión

Si M_1 es el autómata que acepta el mismo lenguaje que el representado por r_1 y M_2 el que acepta el mismo lenguaje que el de r_2 , entonces

- **Unión** ($r_1 + r_2$)



M_1

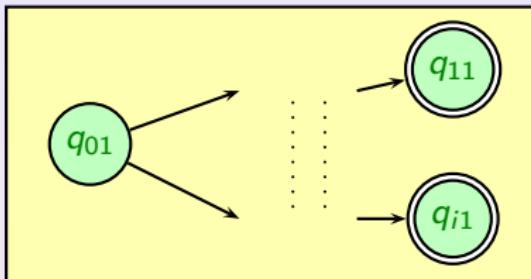


M_2

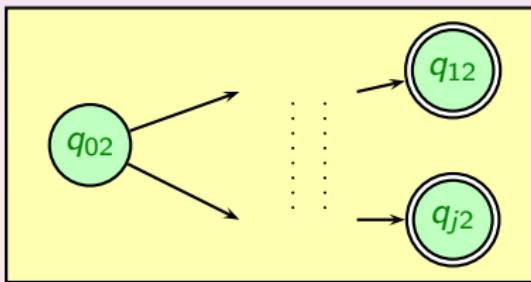
Autómatas Compuestos: Unión

Si M_1 es el autómata que acepta el mismo lenguaje que el representado por r_1 y M_2 el que acepta el mismo lenguaje que el de r_2 , entonces

- **Unión** ($r_1 + r_2$)



M_1

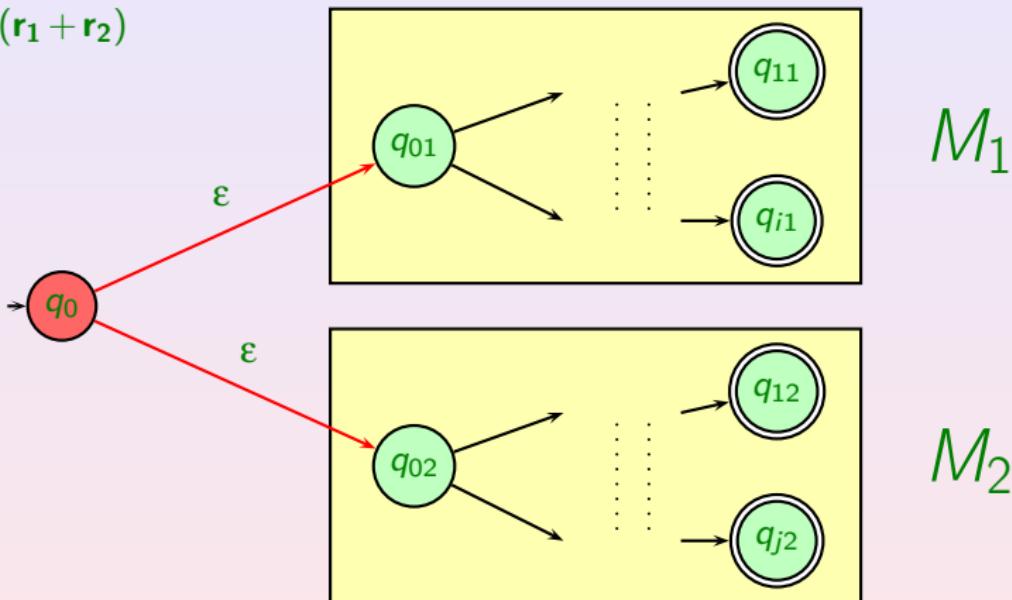


M_2

Autómatas Compuestos: Unión

Si M_1 es el autómata que acepta el mismo lenguaje que el representado por r_1 y M_2 el que acepta el mismo lenguaje que el de r_2 , entonces

- **Unión** ($r_1 + r_2$)



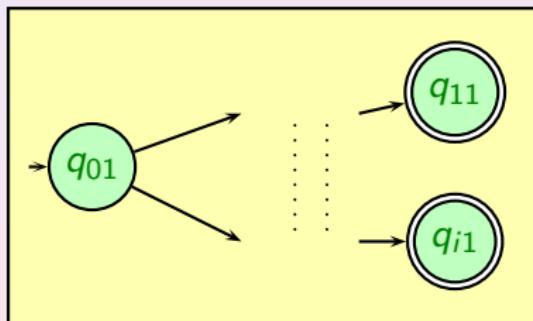
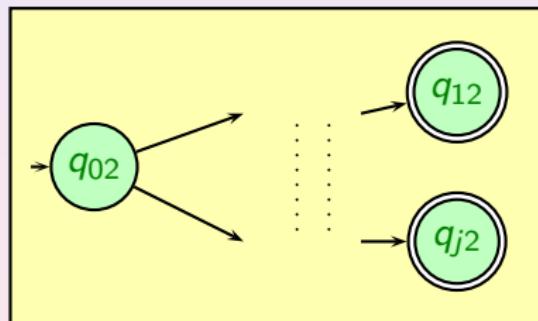
En lenguaje matemático, la unión se puede expresar de la siguiente forma. Si $M_1 = (Q_1, A, \delta_1, q_0^1, F_1)$ y $M_2 = (Q_2, A, \delta_2, q_0^2, F_2)$ con $Q_1 \cap Q_2 = \emptyset$, entonces el autómata que acepta la **unión** es $M = (Q, A, \delta, q_0, F)$ donde

En lenguaje matemático, la unión se puede expresar de la siguiente forma. Si $M_1 = (Q_1, A, \delta_1, q_0^1, F_1)$ y $M_2 = (Q_2, A, \delta_2, q_0^2, F_2)$ con $Q_1 \cap Q_2 = \emptyset$, entonces el autómata que acepta la **unión** es $M = (Q, A, \delta, q_0, F)$ donde

- $Q = Q_1 \cup Q_2 \cup \{q_0\}$ donde $q_0 \notin (Q_1 \cup Q_2)$ es un nuevo estado.
- δ viene definida por
 - $\delta(q, a) = \delta_1(q, a)$ si $q \in Q_1$
 - $\delta(q, a) = \delta_2(q, a)$ si $q \in Q_2$
 - $\delta(q_0, a) = \emptyset$ si $a \in A$
 - $\delta(q_0, \varepsilon) = \{q_0^1, q_0^2\}$
- $F = F_1 \cup F_2$

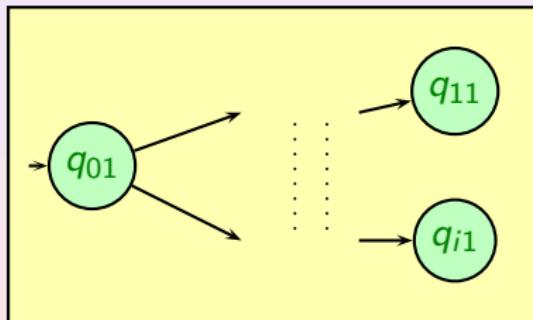
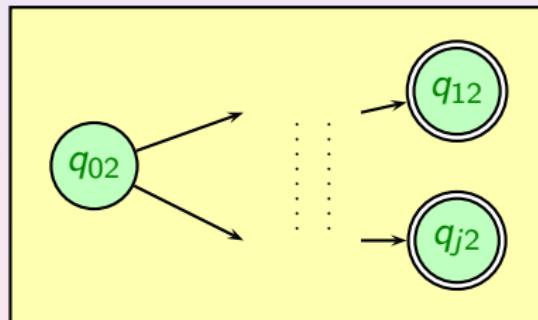
Autómatas Compuestos: Concatenación

- **Concatenación:** El autómata para la expresión $(r_1 r_2)$ es

 M_1  M_2

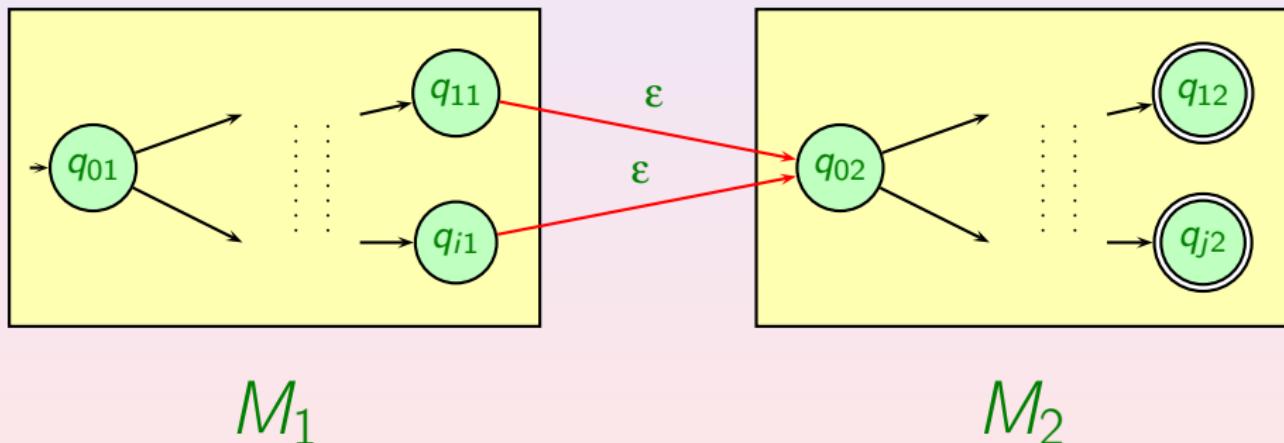
Autómatas Compuestos: Concatenación

- **Concatenación:** El autómata para la expresión $(r_1 r_2)$ es

 M_1  M_2

Autómatas Compuestos: Concatenación

- **Concatenación:** El autómata para la expresión $(r_1 r_2)$ es



Concatenación: Expresión Matemática

En lenguaje matemático, la concatenación se puede expresar de la siguiente forma. Si $M_1 = (Q_1, A, \delta_1, q_0^1, F_1)$ y $M_2 = (Q_2, A, \delta_2, q_0^2, F_2)$ con $Q_1 \cap Q_2 = \emptyset$, entonces el autómata que acepta la concatenación es $M = (Q, A, \delta, q_0, F)$ donde:

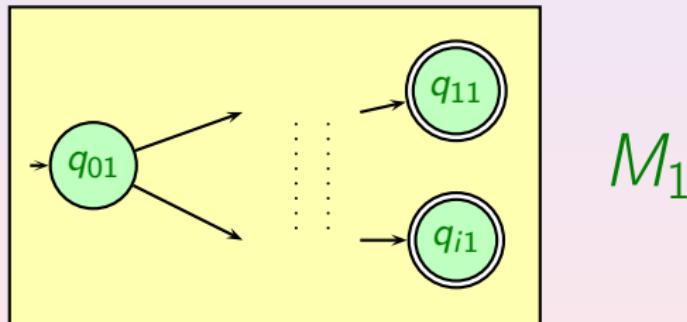
Concatenación: Expresión Matemática

En lenguaje matemático, la concatenación se puede expresar de la siguiente forma. Si $M_1 = (Q_1, A, \delta_1, q_0^1, F_1)$ y $M_2 = (Q_2, A, \delta_2, q_0^2, F_2)$ con $Q_1 \cap Q_2 = \emptyset$, entonces el autómata que acepta la concatenación es $M = (Q, A, \delta, q_0, F)$ donde:

- $Q = Q_1 \cup Q_2$.
- δ viene definida por
 - $\delta(q, a) = \delta_1(q, a)$ si $q \in Q_1 - F_1$
 - $\delta(q, a) = \delta_1(q, a)$ si $q \in F_1, a \in A$
 - $\delta(q, \varepsilon) = \delta_1(q, \varepsilon) \cup \{q_0^2\}$ si $q \in F_1$
 - $\delta(q, a) = \delta_2(q, a)$ si $q \in Q_2$
- $q_0 = q_0^1$
- $F = F_2$

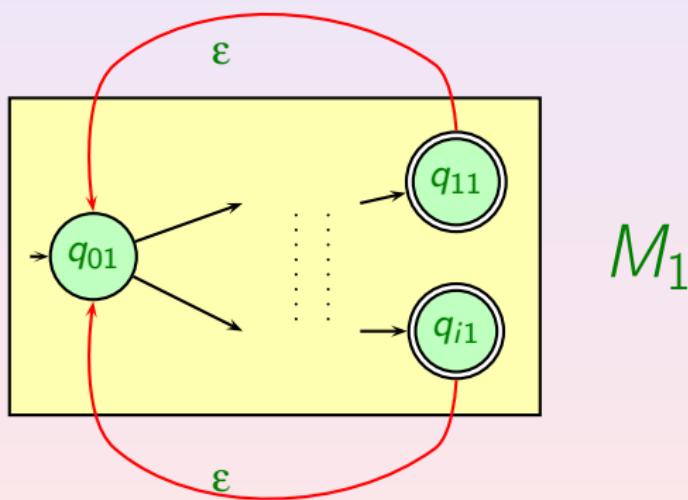
Autómatas Compuestos: Clausura

- **Clausura:** El autómata para r_1^* es



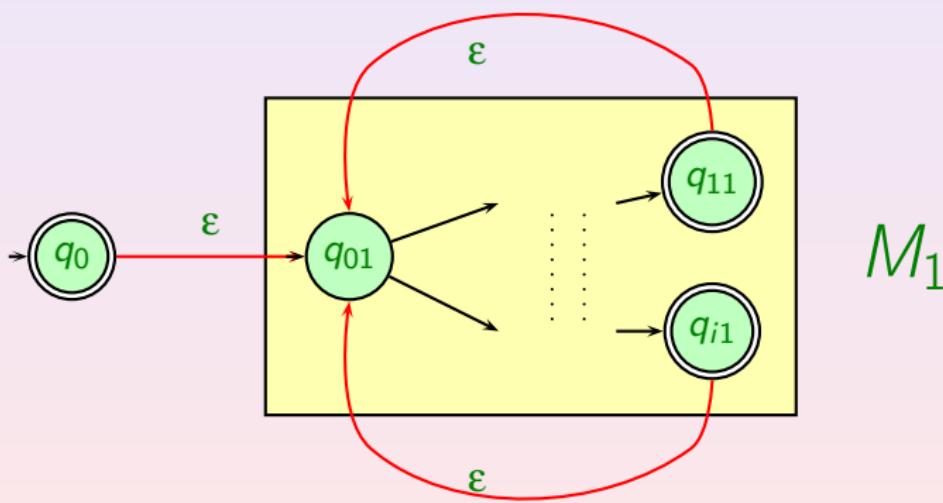
Autómatas Compuestos: Clausura

- **Clausura:** El autómata para r_1^* es



Autómatas Compuestos: Clausura

- **Clausura:** El autómata para r_1^* es



En lenguaje matemático: si $M_1 = (Q_1, A, \delta_1, q_0^1, F_1)$, entonces el autómata que acepta la clausura es $M = (Q, A, \delta, q_0, F)$ donde:

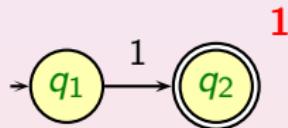
- $Q = Q_1 \cup \{q_0\}$, donde $q_0 \notin Q_1$.
- δ viene definida por
 - $\delta(q, a) = \delta_1(q, a)$ si $q \in Q_1 - F_1$
 - $\delta(q, a) = \delta_1(q, a)$ si $q \in F_1, a \in A$
 - $\delta(q, \varepsilon) = \delta_1(q, \varepsilon) \cup \{q_0\}$ si $q \in F_1$
 - $\delta(q_0, a) = \emptyset$ si $a \in A$
 - $\delta(q_0, \varepsilon) = \{q_0^1\}$
- q_0
- $F = F_1 \cup \{q_0\}$

Ejemplo

Encontrar un autómata que acepte el mismo lenguaje que el asociado a la expresión regular $(0+10)^*011$

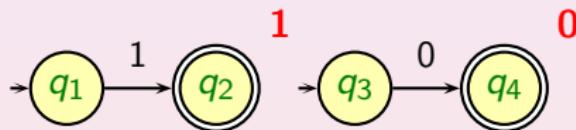
Ejemplo

Encontrar un autómata que acepte el mismo lenguaje que el asociado a la expresión regular $(0+10)^*011$



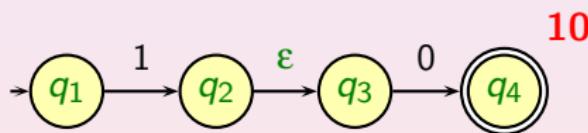
Ejemplo

Encontrar un autómata que acepte el mismo lenguaje que el asociado a la expresión regular $(0+10)^*011$



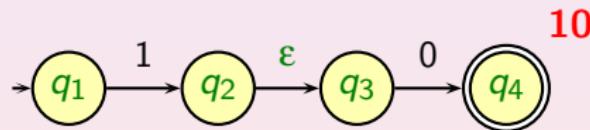
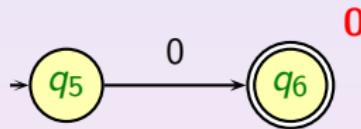
Ejemplo

Encontrar un autómata que acepte el mismo lenguaje que el asociado a la expresión regular $(0+10)^*011$



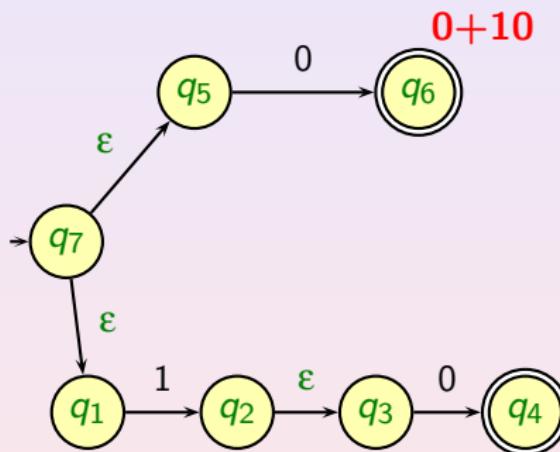
Ejemplo

Encontrar un autómata que acepte el mismo lenguaje que el asociado a la expresión regular $(0+10)^*011$



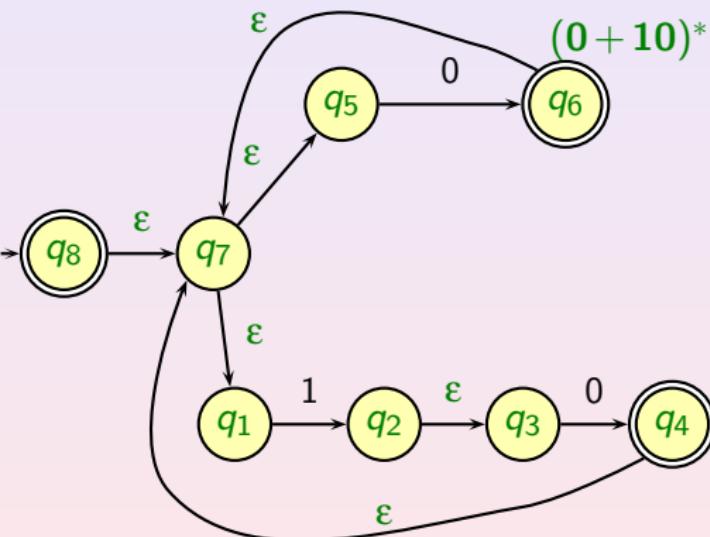
Ejemplo

Encontrar un autómata que acepte el mismo lenguaje que el asociado a la expresión regular $(0+10)^*011$



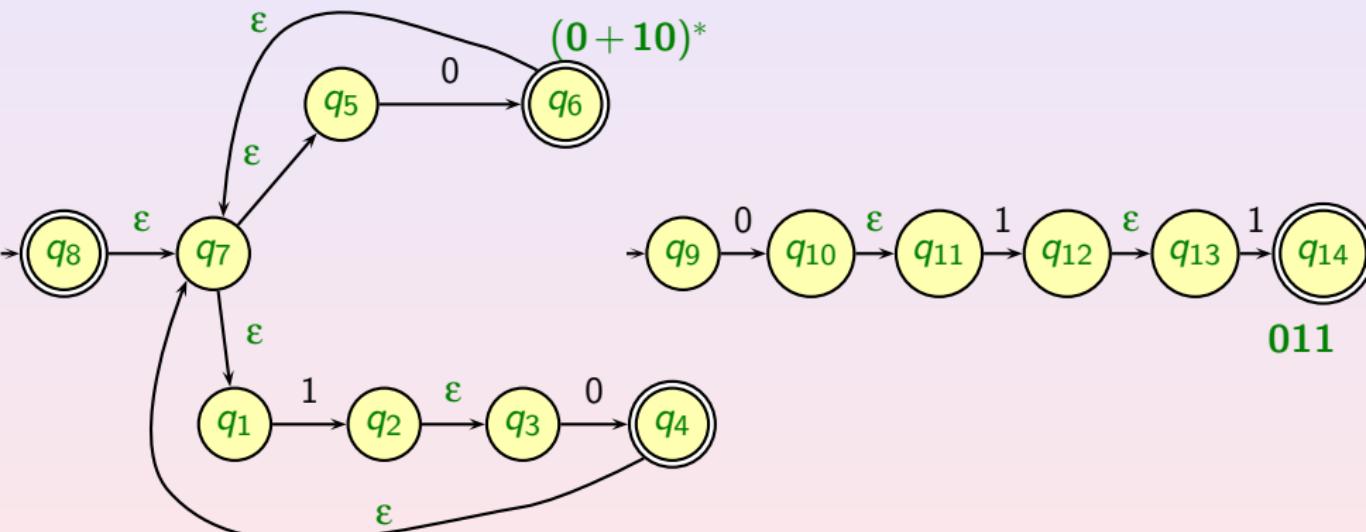
Ejemplo

Encontrar un autómata que acepte el mismo lenguaje que el asociado a la expresión regular $(0 + 10)^*011$



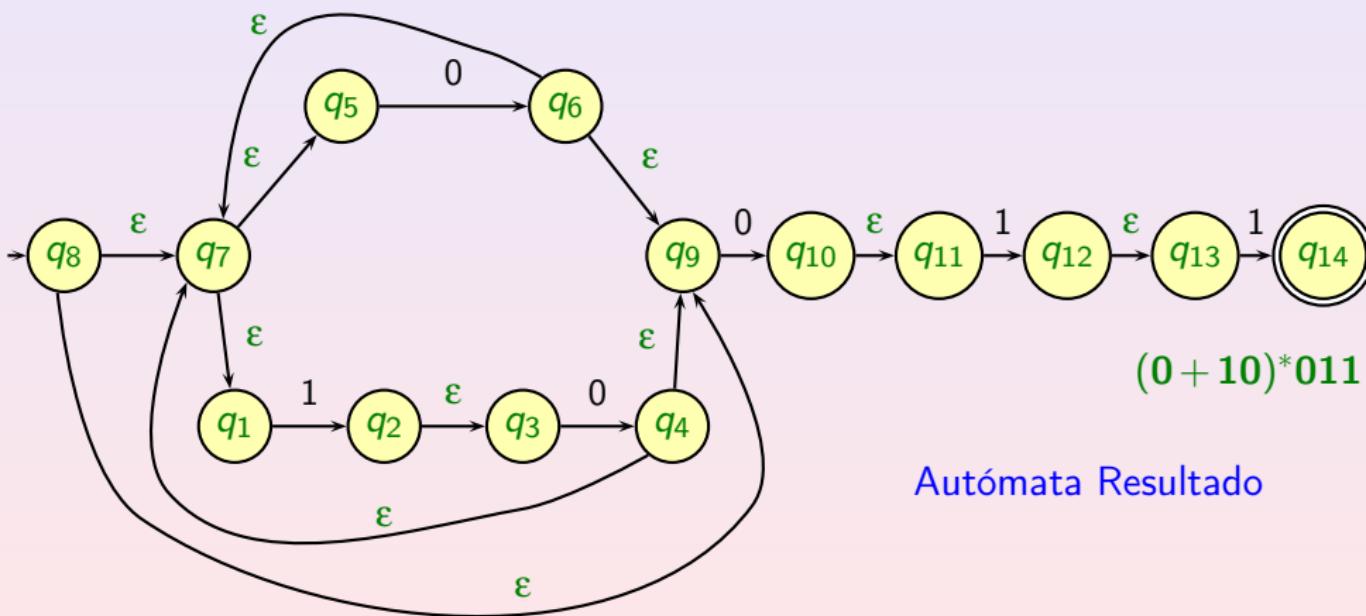
Ejemplo

Encontrar un autómata que acepte el mismo lenguaje que el asociado a la expresión regular $(0 + 10)^*011$



Ejemplo

Encontrar un autómata que acepte el mismo lenguaje que el asociado a la expresión regular $(0 + 10)^*011$



Autómata Resultado

Autómata → Expresión Regular

Si L es aceptado por un autómata finito determinista, entonces puede venir expresado mediante una expresión regular.

Sea el autómata $M = (Q, A, \delta, q_1, F)$, $Q = \{q_1, \dots, q_n\}$ y q_1 es el estado inicial.

Sea R_{ij}^k el conjunto de las cadenas de A^* que permiten pasar del estado q_i al estado q_j y no pasa por ningún estado intermedio de numeración mayor que k (q_i y q_j si pueden tener numeración mayor que k).

R_{ij}^k se puede definir de forma recursiva:

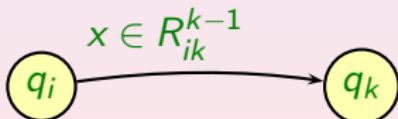
$$R_{ij}^0 = \begin{cases} \{a : \delta(q_i, a) = q_j\} & \text{si } i \neq j \\ \{a : \delta(q_i, a) = q_i\} \cup \{\varepsilon\} & \text{si } i = j \end{cases}$$

Para $k \geq 1$, tenemos que R_{ij}^k está compuesto de dos tipos de palabras:

- Palabras que para ir de q_i a q_j no pasan por q_k : pertenecen a R_{ij}^{k-1}
- Palabras que para ir de q_i a q_j pasan por q_k .
Una palabra de este lenguaje está compuesta de tres partes:

Para $k \geq 1$, tenemos que R_{ij}^k está compuesto de dos tipos de palabras:

- Palabras que para ir de q_i a q_j no pasan por q_k : pertenecen a R_{ij}^{k-1}
 - Palabras que para ir de q_i a q_j pasan por q_k .
- Una palabra de este lenguaje está compuesta de tres partes:



Demostración

Para $k \geq 1$, tenemos que R_{ij}^k está compuesto de dos tipos de palabras:

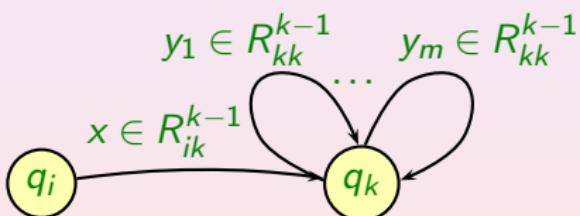
- Palabras que para ir de q_i a q_j no pasan por q_k : pertenecen a R_{ij}^{k-1}
 - Palabras que para ir de q_i a q_j pasan por q_k .
- Una palabra de este lenguaje está compuesta de tres partes:



Demostración

Para $k \geq 1$, tenemos que R_{ij}^k está compuesto de dos tipos de palabras:

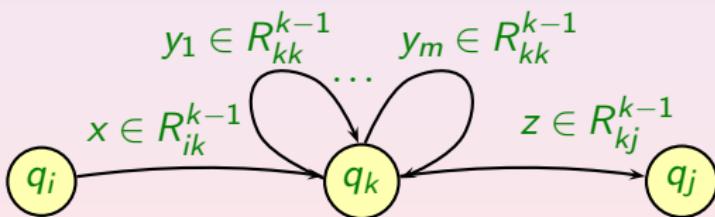
- Palabras que para ir de q_i a q_j no pasan por q_k : pertenecen a R_{ij}^{k-1}
 - Palabras que para ir de q_i a q_j pasan por q_k .
- Una palabra de este lenguaje está compuesta de tres partes:



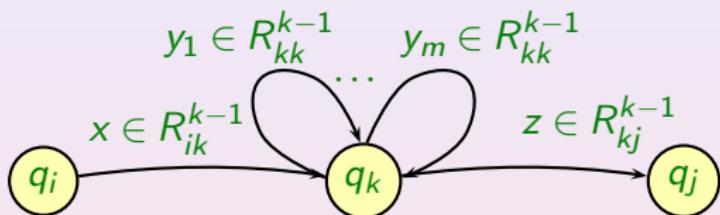
Demostración

Para $k \geq 1$, tenemos que R_{ij}^k está compuesto de dos tipos de palabras:

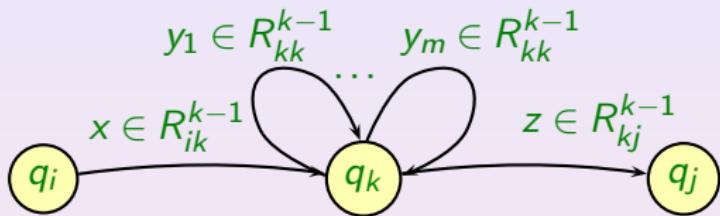
- Palabras que para ir de q_i a q_j no pasan por q_k : pertenecen a R_{ij}^{k-1}
 - Palabras que para ir de q_i a q_j pasan por q_k .
- Una palabra de este lenguaje está compuesta de tres partes:



Demostración



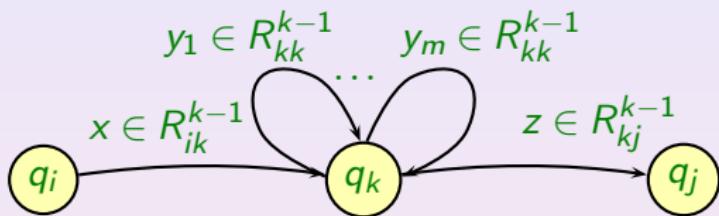
Demostración



Como la palabra $y_1 \dots y_m \in (R_{kk}^{k-1})^*$, entonces la palabra completa está en

$$R_{ik}^{k-1} (R_{kk}^{k-1})^* R_{kj}^{k-1}$$

Demostración



Uniendo las dos partes, obtenemos:

$$R_{ij}^k = R_{ij}^{k-1} \cup R_{ik}^{k-1} \left(R_{kk}^{k-1} \right)^* R_{kj}^{k-1}$$

Demostración

Expresión regular asociada a $R_{ij}^k \rightarrow r_{ij}^k$

Para $k = 0$ es inmediato.

$$r_{ij}^0 = \begin{cases} a_1 + \dots + a_l & \text{si } i \neq j \\ a_1 + \dots + a_l + \varepsilon & \text{si } i = j \end{cases}$$

donde $\{a_1, \dots, a_l\}$ es el conjunto $\{a : \delta(q_i, a) = q_j\}$.

Si este conjunto es vacío la expresión regular sería:

$$r_{ij}^0 = \begin{cases} \emptyset & \text{si } i \neq j \\ \varepsilon & \text{si } i = j \end{cases}$$

Cálculo de las expresiones r_{ij}^k , calculadas las r_{ij}^{k-1}

$$R_{ij}^k = R_{ij}^{k-1} \cup R_{ik}^{k-1} (R_{kk}^{k-1})^* R_{kj}^{k-1} \rightarrow r_{ij}^{k-1} + r_{ik}^{k-1} (r_{kk}^{k-1})^* r_{kj}^{k-1}$$

Expresión Regular del lenguaje aceptado por el autómata

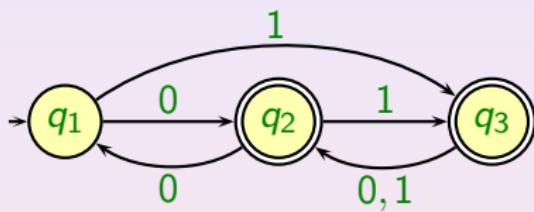
$$L(M) = \bigcup_{q_j \in F} R_{1j}^n$$

Por tanto, $L(M)$ viene denotado por la expresión regular

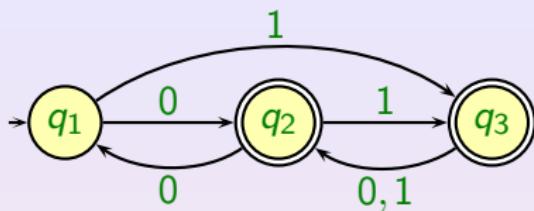
$$r_{1j_1}^n + \dots + r_{1j_k}^n$$

donde $F = \{q_{j_1}, \dots, q_{j_k}\}$.

Ejemplo



Ejemplo



$$r_{11}^0 = \varepsilon$$

$$r_{12}^0 = 0$$

$$r_{13}^0 = 1$$

$$r_{21}^0 = 0$$

$$r_{22}^0 = \varepsilon$$

$$r_{23}^0 = 1$$

$$r_{31}^0 = \emptyset$$

$$r_{32}^0 = 0 + 1$$

$$r_{33}^0 = \varepsilon$$

Ejemplo

$$\left\{ \begin{array}{l} r_{11}^0 = \varepsilon \\ r_{12}^0 = 0 \\ r_{13}^0 = 1 \\ r_{21}^0 = 0 \\ r_{22}^0 = \varepsilon \\ r_{23}^0 = 1 \\ r_{31}^0 = \emptyset \\ r_{32}^0 = 0 + 1 \\ r_{33}^0 = \varepsilon \end{array} \right\}$$

Ejemplo

$$\left\{ \begin{array}{l} r_{11}^0 = \varepsilon \\ r_{12}^0 = 0 \\ r_{13}^0 = 1 \\ r_{21}^0 = 0 \\ r_{22}^0 = \varepsilon \\ r_{23}^0 = 1 \\ r_{31}^0 = \emptyset \\ r_{32}^0 = 0 + 1 \\ r_{33}^0 = \varepsilon \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} r_{11}^1 = r_{11}^0 + r_{11}^0(r_{11}^0)^*r_{11}^0 \end{array} \right.$$

Ejemplo

$$\left\{ \begin{array}{l} r_{11}^0 = \varepsilon \\ r_{12}^0 = 0 \\ r_{13}^0 = 1 \\ r_{21}^0 = 0 \\ r_{22}^0 = \varepsilon \\ r_{23}^0 = 1 \\ r_{31}^0 = \emptyset \\ r_{32}^0 = 0 + 1 \\ r_{33}^0 = \varepsilon \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} r_{11}^1 = r_{11}^0 + r_{11}^0(r_{11}^0)^*r_{11}^0 = \varepsilon + \varepsilon(\varepsilon)^*\varepsilon \end{array} \right.$$

Ejemplo

$$\left\{ \begin{array}{l} r_{11}^0 = \varepsilon \\ r_{12}^0 = 0 \\ r_{13}^0 = 1 \\ r_{21}^0 = 0 \\ r_{22}^0 = \varepsilon \\ r_{23}^0 = 1 \\ r_{31}^0 = \emptyset \\ r_{32}^0 = 0 + 1 \\ r_{33}^0 = \varepsilon \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} r_{11}^1 = r_{11}^0 + r_{11}^0(r_{11}^0)^*r_{11}^0 = \varepsilon + \varepsilon(\varepsilon)^*\varepsilon = \varepsilon \end{array} \right.$$

Ejemplo

$$\left\{ \begin{array}{l} r_{11}^0 = \varepsilon \\ r_{12}^0 = 0 \\ r_{13}^0 = 1 \\ r_{21}^0 = 0 \\ r_{22}^0 = \varepsilon \\ r_{23}^0 = 1 \\ r_{31}^0 = \emptyset \\ r_{32}^0 = 0 + 1 \\ r_{33}^0 = \varepsilon \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} r_{11}^1 = r_{11}^0 + r_{11}^0(r_{11}^0)^*r_{11}^0 = \varepsilon + \varepsilon(\varepsilon)^*\varepsilon = \varepsilon \\ r_{12}^1 = r_{12}^0 + r_{11}^0(r_{11}^0)^*r_{12}^0 \end{array} \right.$$

Ejemplo

$$\left\{ \begin{array}{l} r_{11}^0 = \varepsilon \\ r_{12}^0 = 0 \\ r_{13}^0 = 1 \\ r_{21}^0 = 0 \\ r_{22}^0 = \varepsilon \\ r_{23}^0 = 1 \\ r_{31}^0 = \emptyset \\ r_{32}^0 = 0 + 1 \\ r_{33}^0 = \varepsilon \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} r_{11}^1 = r_{11}^0 + r_{11}^0(r_{11}^0)^*r_{11}^0 = \varepsilon + \varepsilon(\varepsilon)^*\varepsilon = \varepsilon \\ r_{12}^1 = r_{12}^0 + r_{11}^0(r_{11}^0)^*r_{12}^0 = 0 + \varepsilon(\varepsilon)^*0 \end{array} \right.$$

Ejemplo

$$\left\{ \begin{array}{l} r_{11}^0 = \varepsilon \\ r_{12}^0 = 0 \\ r_{13}^0 = 1 \\ r_{21}^0 = 0 \\ r_{22}^0 = \varepsilon \\ r_{23}^0 = 1 \\ r_{31}^0 = \emptyset \\ r_{32}^0 = 0 + 1 \\ r_{33}^0 = \varepsilon \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} r_{11}^1 = r_{11}^0 + r_{11}^0(r_{11}^0)^*r_{11}^0 = \varepsilon + \varepsilon(\varepsilon)^*\varepsilon = \varepsilon \\ r_{12}^1 = r_{12}^0 + r_{11}^0(r_{11}^0)^*r_{12}^0 = 0 + \varepsilon(\varepsilon)^*0 = 0 \end{array} \right.$$

Ejemplo

$$\left\{ \begin{array}{l} r_{11}^0 = \varepsilon \\ r_{12}^0 = 0 \\ r_{13}^0 = 1 \\ r_{21}^0 = 0 \\ r_{22}^0 = \varepsilon \\ r_{23}^0 = 1 \\ r_{31}^0 = \emptyset \\ r_{32}^0 = 0 + 1 \\ r_{33}^0 = \varepsilon \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} r_{11}^1 = r_{11}^0 + r_{11}^0(r_{11}^0)^*r_{11}^0 = \varepsilon + \varepsilon(\varepsilon)^*\varepsilon = \varepsilon \\ r_{12}^1 = r_{12}^0 + r_{11}^0(r_{11}^0)^*r_{12}^0 = 0 + \varepsilon(\varepsilon)^*0 = 0 \\ r_{13}^1 = r_{13}^0 + r_{11}^0(r_{11}^0)^*r_{13}^0 = 1 + \varepsilon(\varepsilon)^*1 \end{array} \right.$$

Ejemplo

$$\left\{ \begin{array}{l} r_{11}^0 = \varepsilon \\ r_{12}^0 = 0 \\ r_{13}^0 = 1 \\ r_{21}^0 = 0 \\ r_{22}^0 = \varepsilon \\ r_{23}^0 = 1 \\ r_{31}^0 = \emptyset \\ r_{32}^0 = 0 + 1 \\ r_{33}^0 = \varepsilon \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} r_{11}^1 = r_{11}^0 + r_{11}^0(r_{11}^0)^*r_{11}^0 = \varepsilon + \varepsilon(\varepsilon)^*\varepsilon = \varepsilon \\ r_{12}^1 = r_{12}^0 + r_{11}^0(r_{11}^0)^*r_{12}^0 = 0 + \varepsilon(\varepsilon)^*0 = 0 \\ r_{13}^1 = r_{13}^0 + r_{11}^0(r_{11}^0)^*r_{13}^0 = 1 + \varepsilon(\varepsilon)^*1 = 1 \end{array} \right.$$

Ejemplo

$$\left\{ \begin{array}{l} r_{11}^0 = \varepsilon \\ r_{12}^0 = 0 \\ r_{13}^0 = 1 \\ r_{21}^0 = 0 \\ r_{22}^0 = \varepsilon \\ r_{23}^0 = 1 \\ r_{31}^0 = \emptyset \\ r_{32}^0 = 0 + 1 \\ r_{33}^0 = \varepsilon \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} r_{11}^1 = r_{11}^0 + r_{11}^0(r_{11}^0)^*r_{11}^0 = \varepsilon + \varepsilon(\varepsilon)^*\varepsilon = \varepsilon \\ r_{12}^1 = r_{12}^0 + r_{11}^0(r_{11}^0)^*r_{12}^0 = 0 + \varepsilon(\varepsilon)^*0 = 0 \\ r_{13}^1 = r_{13}^0 + r_{11}^0(r_{11}^0)^*r_{13}^0 = 1 + \varepsilon(\varepsilon)^*1 = 1 \\ r_{21}^1 = r_{21}^0 + r_{21}^0(r_{11}^0)^*r_{11}^0 = 0 + 0(\varepsilon)^*\varepsilon \end{array} \right.$$

Ejemplo

$$\left\{ \begin{array}{l} r_{11}^0 = \varepsilon \\ r_{12}^0 = 0 \\ r_{13}^0 = 1 \\ r_{21}^0 = 0 \\ r_{22}^0 = \varepsilon \\ r_{23}^0 = 1 \\ r_{31}^0 = \emptyset \\ r_{32}^0 = 0 + 1 \\ r_{33}^0 = \varepsilon \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} r_{11}^1 = r_{11}^0 + r_{11}^0(r_{11}^0)^*r_{11}^0 = \varepsilon + \varepsilon(\varepsilon)^*\varepsilon = \varepsilon \\ r_{12}^1 = r_{12}^0 + r_{11}^0(r_{11}^0)^*r_{12}^0 = 0 + \varepsilon(\varepsilon)^*0 = 0 \\ r_{13}^1 = r_{13}^0 + r_{11}^0(r_{11}^0)^*r_{13}^0 = 1 + \varepsilon(\varepsilon)^*1 = 1 \\ r_{21}^1 = r_{21}^0 + r_{21}^0(r_{11}^0)^*r_{11}^0 = 0 + 0(\varepsilon)^*\varepsilon = 0 \end{array} \right.$$

Ejemplo

$$\left\{ \begin{array}{l} r_{11}^0 = \varepsilon \\ r_{12}^0 = 0 \\ r_{13}^0 = 1 \\ r_{21}^0 = 0 \\ r_{22}^0 = \varepsilon \\ r_{23}^0 = 1 \\ r_{31}^0 = \emptyset \\ r_{32}^0 = 0 + 1 \\ r_{33}^0 = \varepsilon \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} r_{11}^1 = r_{11}^0 + r_{11}^0(r_{11}^0)^*r_{11}^0 = \varepsilon + \varepsilon(\varepsilon)^*\varepsilon = \varepsilon \\ r_{12}^1 = r_{12}^0 + r_{11}^0(r_{11}^0)^*r_{12}^0 = 0 + \varepsilon(\varepsilon)^*0 = 0 \\ r_{13}^1 = r_{13}^0 + r_{11}^0(r_{11}^0)^*r_{13}^0 = 1 + \varepsilon(\varepsilon)^*1 = 1 \\ r_{21}^1 = r_{21}^0 + r_{21}^0(r_{11}^0)^*r_{11}^0 = 0 + 0(\varepsilon)^*\varepsilon = 0 \\ r_{22}^1 = r_{22}^0 + r_{21}^0(r_{11}^0)^*r_{12}^0 = \varepsilon + 0(\varepsilon)^*0 \end{array} \right.$$

Ejemplo

$$\left\{ \begin{array}{l} r_{11}^0 = \varepsilon \\ r_{12}^0 = 0 \\ r_{13}^0 = 1 \\ r_{21}^0 = 0 \\ r_{22}^0 = \varepsilon \\ r_{23}^0 = 1 \\ r_{31}^0 = \emptyset \\ r_{32}^0 = 0 + 1 \\ r_{33}^0 = \varepsilon \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} r_{11}^1 = r_{11}^0 + r_{11}^0(r_{11}^0)^*r_{11}^0 = \varepsilon + \varepsilon(\varepsilon)^*\varepsilon = \varepsilon \\ r_{12}^1 = r_{12}^0 + r_{11}^0(r_{11}^0)^*r_{12}^0 = 0 + \varepsilon(\varepsilon)^*0 = 0 \\ r_{13}^1 = r_{13}^0 + r_{11}^0(r_{11}^0)^*r_{13}^0 = 1 + \varepsilon(\varepsilon)^*1 = 1 \\ r_{21}^1 = r_{21}^0 + r_{21}^0(r_{11}^0)^*r_{11}^0 = 0 + 0(\varepsilon)^*\varepsilon = 0 \\ r_{22}^1 = r_{22}^0 + r_{21}^0(r_{11}^0)^*r_{12}^0 = \varepsilon + 0(\varepsilon)^*0 = \varepsilon + 00 \end{array} \right.$$

Ejemplo

$$\left\{ \begin{array}{l} r_{11}^0 = \varepsilon \\ r_{12}^0 = 0 \\ r_{13}^0 = 1 \\ r_{21}^0 = 0 \\ r_{22}^0 = \varepsilon \\ r_{23}^0 = 1 \\ r_{31}^0 = \emptyset \\ r_{32}^0 = 0 + 1 \\ r_{33}^0 = \varepsilon \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} r_{11}^1 = r_{11}^0 + r_{11}^0(r_{11}^0)^*r_{11}^0 = \varepsilon + \varepsilon(\varepsilon)^*\varepsilon = \varepsilon \\ r_{12}^1 = r_{12}^0 + r_{11}^0(r_{11}^0)^*r_{12}^0 = 0 + \varepsilon(\varepsilon)^*0 = 0 \\ r_{13}^1 = r_{13}^0 + r_{11}^0(r_{11}^0)^*r_{13}^0 = 1 + \varepsilon(\varepsilon)^*1 = 1 \\ r_{21}^1 = r_{21}^0 + r_{21}^0(r_{11}^0)^*r_{11}^0 = 0 + 0(\varepsilon)^*\varepsilon = 0 \\ r_{22}^1 = r_{22}^0 + r_{21}^0(r_{11}^0)^*r_{12}^0 = \varepsilon + 0(\varepsilon)^*0 = \varepsilon + 00 \\ r_{23}^1 = r_{23}^0 + r_{21}^0(r_{11}^0)^*r_{13}^0 = 1 + 0(\varepsilon)^*1 \end{array} \right.$$

Ejemplo

$$\left\{ \begin{array}{l} r_{11}^0 = \varepsilon \\ r_{12}^0 = 0 \\ r_{13}^0 = 1 \\ r_{21}^0 = 0 \\ r_{22}^0 = \varepsilon \\ r_{23}^0 = 1 \\ r_{31}^0 = \emptyset \\ r_{32}^0 = 0 + 1 \\ r_{33}^0 = \varepsilon \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} r_{11}^1 = r_{11}^0 + r_{11}^0(r_{11}^0)^*r_{11}^0 = \varepsilon + \varepsilon(\varepsilon)^*\varepsilon = \varepsilon \\ r_{12}^1 = r_{12}^0 + r_{11}^0(r_{11}^0)^*r_{12}^0 = 0 + \varepsilon(\varepsilon)^*0 = 0 \\ r_{13}^1 = r_{13}^0 + r_{11}^0(r_{11}^0)^*r_{13}^0 = 1 + \varepsilon(\varepsilon)^*1 = 1 \\ r_{21}^1 = r_{21}^0 + r_{21}^0(r_{11}^0)^*r_{11}^0 = 0 + 0(\varepsilon)^*\varepsilon = 0 \\ r_{22}^1 = r_{22}^0 + r_{21}^0(r_{11}^0)^*r_{12}^0 = \varepsilon + 0(\varepsilon)^*0 = \varepsilon + 00 \\ r_{23}^1 = r_{23}^0 + r_{21}^0(r_{11}^0)^*r_{13}^0 = 1 + 0(\varepsilon)^*1 = 1 + 01 \end{array} \right.$$

Ejemplo

$$\left\{ \begin{array}{l} r_{11}^0 = \varepsilon \\ r_{12}^0 = 0 \\ r_{13}^0 = 1 \\ r_{21}^0 = 0 \\ r_{22}^0 = \varepsilon \\ r_{23}^0 = 1 \\ r_{31}^0 = \emptyset \\ r_{32}^0 = 0 + 1 \\ r_{33}^0 = \varepsilon \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} r_{11}^1 = r_{11}^0 + r_{11}^0(r_{11}^0)^*r_{11}^0 = \varepsilon + \varepsilon(\varepsilon)^*\varepsilon = \varepsilon \\ r_{12}^1 = r_{12}^0 + r_{11}^0(r_{11}^0)^*r_{12}^0 = 0 + \varepsilon(\varepsilon)^*0 = 0 \\ r_{13}^1 = r_{13}^0 + r_{11}^0(r_{11}^0)^*r_{13}^0 = 1 + \varepsilon(\varepsilon)^*1 = 1 \\ r_{21}^1 = r_{21}^0 + r_{21}^0(r_{11}^0)^*r_{11}^0 = 0 + 0(\varepsilon)^*\varepsilon = 0 \\ r_{22}^1 = r_{22}^0 + r_{21}^0(r_{11}^0)^*r_{12}^0 = \varepsilon + 0(\varepsilon)^*0 = \varepsilon + 00 \\ r_{23}^1 = r_{23}^0 + r_{21}^0(r_{11}^0)^*r_{13}^0 = 1 + 0(\varepsilon)^*1 = 1 + 01 \\ r_{31}^1 = r_{31}^0 + r_{31}^0(r_{11}^0)^*r_{11}^0 = \emptyset + \emptyset(\varepsilon)^*\varepsilon \end{array} \right.$$

Ejemplo

$$\left\{ \begin{array}{l} r_{11}^0 = \varepsilon \\ r_{12}^0 = 0 \\ r_{13}^0 = 1 \\ r_{21}^0 = 0 \\ r_{22}^0 = \varepsilon \\ r_{23}^0 = 1 \\ r_{31}^0 = \emptyset \\ r_{32}^0 = 0 + 1 \\ r_{33}^0 = \varepsilon \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} r_{11}^1 = r_{11}^0 + r_{11}^0(r_{11}^0)^*r_{11}^0 = \varepsilon + \varepsilon(\varepsilon)^*\varepsilon = \varepsilon \\ r_{12}^1 = r_{12}^0 + r_{11}^0(r_{11}^0)^*r_{12}^0 = 0 + \varepsilon(\varepsilon)^*0 = 0 \\ r_{13}^1 = r_{13}^0 + r_{11}^0(r_{11}^0)^*r_{13}^0 = 1 + \varepsilon(\varepsilon)^*1 = 1 \\ r_{21}^1 = r_{21}^0 + r_{21}^0(r_{11}^0)^*r_{11}^0 = 0 + 0(\varepsilon)^*\varepsilon = 0 \\ r_{22}^1 = r_{22}^0 + r_{21}^0(r_{11}^0)^*r_{12}^0 = \varepsilon + 0(\varepsilon)^*0 = \varepsilon + 00 \\ r_{23}^1 = r_{23}^0 + r_{21}^0(r_{11}^0)^*r_{13}^0 = 1 + 0(\varepsilon)^*1 = 1 + 01 \\ r_{31}^1 = r_{31}^0 + r_{31}^0(r_{11}^0)^*r_{11}^0 = \emptyset + \emptyset(\varepsilon)^*\varepsilon = \emptyset \end{array} \right.$$

Ejemplo

$$\left\{ \begin{array}{l} r_{11}^0 = \varepsilon \\ r_{12}^0 = 0 \\ r_{13}^0 = 1 \\ r_{21}^0 = 0 \\ r_{22}^0 = \varepsilon \\ r_{23}^0 = 1 \\ r_{31}^0 = \emptyset \\ r_{32}^0 = 0 + 1 \\ r_{33}^0 = \varepsilon \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} r_{11}^1 = r_{11}^0 + r_{11}^0(r_{11}^0)^*r_{11}^0 = \varepsilon + \varepsilon(\varepsilon)^*\varepsilon = \varepsilon \\ r_{12}^1 = r_{12}^0 + r_{11}^0(r_{11}^0)^*r_{12}^0 = 0 + \varepsilon(\varepsilon)^*0 = 0 \\ r_{13}^1 = r_{13}^0 + r_{11}^0(r_{11}^0)^*r_{13}^0 = 1 + \varepsilon(\varepsilon)^*1 = 1 \\ r_{21}^1 = r_{21}^0 + r_{21}^0(r_{11}^0)^*r_{11}^0 = 0 + 0(\varepsilon)^*\varepsilon = 0 \\ r_{22}^1 = r_{22}^0 + r_{21}^0(r_{11}^0)^*r_{12}^0 = \varepsilon + 0(\varepsilon)^*0 = \varepsilon + 00 \\ r_{23}^1 = r_{23}^0 + r_{21}^0(r_{11}^0)^*r_{13}^0 = 1 + 0(\varepsilon)^*1 = 1 + 01 \\ r_{31}^1 = r_{31}^0 + r_{31}^0(r_{11}^0)^*r_{11}^0 = \emptyset + \emptyset(\varepsilon)^*\varepsilon = \emptyset \\ r_{32}^1 = r_{32}^0 + r_{31}^0(r_{11}^0)^*r_{12}^0 = 0 + 1 + \emptyset(\varepsilon)^*0 \end{array} \right.$$

Ejemplo

$$\left\{ \begin{array}{l} r_{11}^0 = \varepsilon \\ r_{12}^0 = 0 \\ r_{13}^0 = 1 \\ r_{21}^0 = 0 \\ r_{22}^0 = \varepsilon \\ r_{23}^0 = 1 \\ r_{31}^0 = \emptyset \\ r_{32}^0 = 0 + 1 \\ r_{33}^0 = \varepsilon \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} r_{11}^1 = r_{11}^0 + r_{11}^0(r_{11}^0)^*r_{11}^0 = \varepsilon + \varepsilon(\varepsilon)^*\varepsilon = \varepsilon \\ r_{12}^1 = r_{12}^0 + r_{11}^0(r_{11}^0)^*r_{12}^0 = 0 + \varepsilon(\varepsilon)^*0 = 0 \\ r_{13}^1 = r_{13}^0 + r_{11}^0(r_{11}^0)^*r_{13}^0 = 1 + \varepsilon(\varepsilon)^*1 = 1 \\ r_{21}^1 = r_{21}^0 + r_{21}^0(r_{11}^0)^*r_{11}^0 = 0 + 0(\varepsilon)^*\varepsilon = 0 \\ r_{22}^1 = r_{22}^0 + r_{21}^0(r_{11}^0)^*r_{12}^0 = \varepsilon + 0(\varepsilon)^*0 = \varepsilon + 00 \\ r_{23}^1 = r_{23}^0 + r_{21}^0(r_{11}^0)^*r_{13}^0 = 1 + 0(\varepsilon)^*1 = 1 + 01 \\ r_{31}^1 = r_{31}^0 + r_{31}^0(r_{11}^0)^*r_{11}^0 = \emptyset + \emptyset(\varepsilon)^*\varepsilon = \emptyset \\ r_{32}^1 = r_{32}^0 + r_{31}^0(r_{11}^0)^*r_{12}^0 = 0 + 1 + \emptyset(\varepsilon)^*0 = 0 + 1 \end{array} \right.$$

Ejemplo

$$\left\{ \begin{array}{l} r_{11}^0 = \varepsilon \\ r_{12}^0 = 0 \\ r_{13}^0 = 1 \\ r_{21}^0 = 0 \\ r_{22}^0 = \varepsilon \\ r_{23}^0 = 1 \\ r_{31}^0 = \emptyset \\ r_{32}^0 = 0 + 1 \\ r_{33}^0 = \varepsilon \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} r_{11}^1 = r_{11}^0 + r_{11}^0(r_{11}^0)^*r_{11}^0 = \varepsilon + \varepsilon(\varepsilon)^*\varepsilon = \varepsilon \\ r_{12}^1 = r_{12}^0 + r_{11}^0(r_{11}^0)^*r_{12}^0 = 0 + \varepsilon(\varepsilon)^*0 = 0 \\ r_{13}^1 = r_{13}^0 + r_{11}^0(r_{11}^0)^*r_{13}^0 = 1 + \varepsilon(\varepsilon)^*1 = 1 \\ r_{21}^1 = r_{21}^0 + r_{21}^0(r_{11}^0)^*r_{11}^0 = 0 + 0(\varepsilon)^*\varepsilon = 0 \\ r_{22}^1 = r_{22}^0 + r_{21}^0(r_{11}^0)^*r_{12}^0 = \varepsilon + 0(\varepsilon)^*0 = \varepsilon + 00 \\ r_{23}^1 = r_{23}^0 + r_{21}^0(r_{11}^0)^*r_{13}^0 = 1 + 0(\varepsilon)^*1 = 1 + 01 \\ r_{31}^1 = r_{31}^0 + r_{31}^0(r_{11}^0)^*r_{11}^0 = \emptyset + \emptyset(\varepsilon)^*\varepsilon = \emptyset \\ r_{32}^1 = r_{32}^0 + r_{31}^0(r_{11}^0)^*r_{12}^0 = 0 + 1 + \emptyset(\varepsilon)^*0 = 0 + 1 \\ r_{33}^1 = r_{33}^0 + r_{31}^0(r_{11}^0)^*r_{13}^0 = \varepsilon + \emptyset(\varepsilon)^*1 \end{array} \right.$$

Ejemplo

$$\left\{ \begin{array}{l} r_{11}^0 = \varepsilon \\ r_{12}^0 = 0 \\ r_{13}^0 = 1 \\ r_{21}^0 = 0 \\ r_{22}^0 = \varepsilon \\ r_{23}^0 = 1 \\ r_{31}^0 = \emptyset \\ r_{32}^0 = 0 + 1 \\ r_{33}^0 = \varepsilon \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} r_{11}^1 = r_{11}^0 + r_{11}^0(r_{11}^0)^*r_{11}^0 = \varepsilon + \varepsilon(\varepsilon)^*\varepsilon = \varepsilon \\ r_{12}^1 = r_{12}^0 + r_{11}^0(r_{11}^0)^*r_{12}^0 = 0 + \varepsilon(\varepsilon)^*0 = 0 \\ r_{13}^1 = r_{13}^0 + r_{11}^0(r_{11}^0)^*r_{13}^0 = 1 + \varepsilon(\varepsilon)^*1 = 1 \\ r_{21}^1 = r_{21}^0 + r_{21}^0(r_{11}^0)^*r_{11}^0 = 0 + 0(\varepsilon)^*\varepsilon = 0 \\ r_{22}^1 = r_{22}^0 + r_{21}^0(r_{11}^0)^*r_{12}^0 = \varepsilon + 0(\varepsilon)^*0 = \varepsilon + 00 \\ r_{23}^1 = r_{23}^0 + r_{21}^0(r_{11}^0)^*r_{13}^0 = 1 + 0(\varepsilon)^*1 = 1 + 01 \\ r_{31}^1 = r_{31}^0 + r_{31}^0(r_{11}^0)^*r_{11}^0 = \emptyset + \emptyset(\varepsilon)^*\varepsilon = \emptyset \\ r_{32}^1 = r_{32}^0 + r_{31}^0(r_{11}^0)^*r_{12}^0 = 0 + 1 + \emptyset(\varepsilon)^*0 = 0 + 1 \\ r_{33}^1 = r_{33}^0 + r_{31}^0(r_{11}^0)^*r_{13}^0 = \varepsilon + \emptyset(\varepsilon)^*1 = \varepsilon \end{array} \right.$$

Ejemplo

$$\left\{ \begin{array}{l} r_{11}^1 = \varepsilon \\ r_{12}^1 = 0 \\ r_{13}^1 = 1 \\ r_{21}^1 = 0 \\ r_{22}^1 = \varepsilon + 00 \\ r_{23}^1 = 1 + 01 \\ r_{31}^1 = \emptyset \\ r_{32}^1 = 0 + 1 \\ r_{33}^1 = \varepsilon \end{array} \right\} \quad r_{11}^2 = r_{11}^1 + r_{12}^1(r_{22}^1)^*r_{21}^1 = \varepsilon + 0(\varepsilon + 00)^*0$$

Ejemplo

$$\left\{ \begin{array}{l} r_{11}^1 = \varepsilon \\ r_{12}^1 = 0 \\ r_{13}^1 = 1 \\ r_{21}^1 = 0 \\ r_{22}^1 = \varepsilon + 00 \\ r_{23}^1 = 1 + 01 \\ r_{31}^1 = \emptyset \\ r_{32}^1 = 0 + 1 \\ r_{33}^1 = \varepsilon \end{array} \right\} \quad r_{11}^2 = r_{11}^1 + r_{12}^1(r_{22}^1)^*r_{21}^1 = \varepsilon + 0(\varepsilon + 00)^*0 = (00)^*$$

Ejemplo

$$\left\{ \begin{array}{l} r_{11}^1 = \epsilon \\ r_{12}^1 = 0 \\ r_{13}^1 = 1 \\ r_{21}^1 = 0 \\ r_{22}^1 = \epsilon + 00 \\ r_{23}^1 = 1 + 01 \\ r_{31}^1 = \emptyset \\ r_{32}^1 = 0 + 1 \\ r_{33}^1 = \epsilon \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{l} r_{11}^2 = r_{11}^1 + r_{12}^1(r_{22}^1)^*r_{21}^1 = \epsilon + 0(\epsilon + 00)^*0 = (00)^* \\ r_{12}^2 = r_{12}^1 + r_{12}^1(r_{22}^1)^*r_{22}^1 = 0 + 0(\epsilon + 00)^*(\epsilon + 00) \end{array} \right.$$

Ejemplo

$$\left\{ \begin{array}{l} r_{11}^1 = \epsilon \\ r_{12}^1 = 0 \\ r_{13}^1 = 1 \\ r_{21}^1 = 0 \\ r_{22}^1 = \epsilon + 00 \\ r_{23}^1 = 1 + 01 \\ r_{31}^1 = \emptyset \\ r_{32}^1 = 0 + 1 \\ r_{33}^1 = \epsilon \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{l} r_{11}^2 = r_{11}^1 + r_{12}^1(r_{22}^1)^*r_{21}^1 = \epsilon + 0(\epsilon + 00)^*0 = (00)^* \\ r_{12}^2 = r_{12}^1 + r_{12}^1(r_{22}^1)^*r_{22}^1 = 0 + 0(\epsilon + 00)^*(\epsilon + 00) = 0(00)^* \end{array} \right.$$

Ejemplo

$$\left\{ \begin{array}{l} r_{11}^1 = \varepsilon \\ r_{12}^1 = 0 \\ r_{13}^1 = 1 \\ r_{21}^1 = 0 \\ r_{22}^1 = \varepsilon + 00 \\ r_{23}^1 = 1 + 01 \\ r_{31}^1 = \emptyset \\ r_{32}^1 = 0 + 1 \\ r_{33}^1 = \varepsilon \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{l} r_{11}^2 = r_{11}^1 + r_{12}^1(r_{22}^1)^*r_{21}^1 = \varepsilon + 0(\varepsilon + 00)^*0 = (00)^* \\ r_{12}^2 = r_{12}^1 + r_{12}^1(r_{22}^1)^*r_{22}^1 = 0 + 0(\varepsilon + 00)^*(\varepsilon + 00) = 0(00)^* \\ r_{13}^2 = r_{13}^1 + r_{12}^1(r_{22}^1)^*r_{23}^1 = 1 + 0(\varepsilon + 00)^*(1 + 01) \end{array} \right.$$

Ejemplo

$$\left\{ \begin{array}{l} r_{11}^1 = \varepsilon \\ r_{12}^1 = 0 \\ r_{13}^1 = 1 \\ r_{21}^1 = 0 \\ r_{22}^1 = \varepsilon + 00 \\ r_{23}^1 = 1 + 01 \\ r_{31}^1 = \emptyset \\ r_{32}^1 = 0 + 1 \\ r_{33}^1 = \varepsilon \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{l} r_{11}^2 = r_{11}^1 + r_{12}^1(r_{22}^1)^*r_{21}^1 = \varepsilon + 0(\varepsilon + 00)^*0 = (00)^* \\ r_{12}^2 = r_{12}^1 + r_{12}^1(r_{22}^1)^*r_{22}^1 = 0 + 0(\varepsilon + 00)^*(\varepsilon + 00) = 0(00)^* \\ r_{13}^2 = r_{13}^1 + r_{12}^1(r_{22}^1)^*r_{23}^1 = 1 + 0(\varepsilon + 00)^*(1 + 01) = 0^*1 \end{array} \right.$$

Ejemplo

$$\left\{ \begin{array}{l} r_{11}^1 = \varepsilon \\ r_{12}^1 = 0 \\ r_{13}^1 = 1 \\ r_{21}^1 = 0 \\ r_{22}^1 = \varepsilon + 00 \\ r_{23}^1 = 1 + 01 \\ r_{31}^1 = \emptyset \\ r_{32}^1 = 0 + 1 \\ r_{33}^1 = \varepsilon \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{l} r_{11}^2 = r_{11}^1 + r_{12}^1(r_{22}^1)^*r_{21}^1 = \varepsilon + 0(\varepsilon + 00)^*0 = (00)^* \\ r_{12}^2 = r_{12}^1 + r_{12}^1(r_{22}^1)^*r_{22}^1 = 0 + 0(\varepsilon + 00)^*(\varepsilon + 00) = 0(00)^* \\ r_{13}^2 = r_{13}^1 + r_{12}^1(r_{22}^1)^*r_{23}^1 = 1 + 0(\varepsilon + 00)^*(1 + 01) = 0^*1 \\ r_{21}^2 = r_{21}^1 + r_{22}^1(r_{22}^1)^*r_{21}^1 = 0 + (\varepsilon + 00)(\varepsilon + 00)^*0 \end{array} \right.$$

Ejemplo

$$\left\{ \begin{array}{l} r_{11}^1 = \varepsilon \\ r_{12}^1 = 0 \\ r_{13}^1 = 1 \\ r_{21}^1 = 0 \\ r_{22}^1 = \varepsilon + 00 \\ r_{23}^1 = 1 + 01 \\ r_{31}^1 = \emptyset \\ r_{32}^1 = 0 + 1 \\ r_{33}^1 = \varepsilon \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{l} r_{11}^2 = r_{11}^1 + r_{12}^1(r_{22}^1)^*r_{21}^1 = \varepsilon + 0(\varepsilon + 00)^*0 = (00)^* \\ r_{12}^2 = r_{12}^1 + r_{12}^1(r_{22}^1)^*r_{22}^1 = 0 + 0(\varepsilon + 00)^*(\varepsilon + 00) = 0(00)^* \\ r_{13}^2 = r_{13}^1 + r_{12}^1(r_{22}^1)^*r_{23}^1 = 1 + 0(\varepsilon + 00)^*(1 + 01) = 0^*1 \\ r_{21}^2 = r_{21}^1 + r_{22}^1(r_{22}^1)^*r_{21}^1 = 0 + (\varepsilon + 00)(\varepsilon + 00)^*0 = (00)^*0 \end{array} \right.$$

Ejemplo

$$\left\{ \begin{array}{l} r_{11}^1 = \varepsilon \\ r_{12}^1 = 0 \\ r_{13}^1 = 1 \\ r_{21}^1 = 0 \\ r_{22}^1 = \varepsilon + 00 \\ r_{23}^1 = 1 + 01 \\ r_{31}^1 = \emptyset \\ r_{32}^1 = 0 + 1 \\ r_{33}^1 = \varepsilon \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} r_{11}^2 = r_{11}^1 + r_{12}^1(r_{22}^1)^*r_{21}^1 = \varepsilon + 0(\varepsilon + 00)^*0 = (00)^* \\ r_{12}^2 = r_{12}^1 + r_{12}^1(r_{22}^1)^*r_{22}^1 = 0 + 0(\varepsilon + 00)^*(\varepsilon + 00) = 0(00)^* \\ r_{13}^2 = r_{13}^1 + r_{12}^1(r_{22}^1)^*r_{23}^1 = 1 + 0(\varepsilon + 00)^*(1 + 01) = 0^*1 \\ r_{21}^2 = r_{21}^1 + r_{22}^1(r_{22}^1)^*r_{21}^1 = 0 + (\varepsilon + 00)(\varepsilon + 00)^*0 = (00)^*0 \\ r_{22}^2 = r_{22}^1 + r_{22}^1(r_{22}^1)^*r_{22}^1 = \varepsilon + 00 + (\varepsilon + 00)(\varepsilon + 00)^*(\varepsilon + 00) \end{array} \right.$$

Ejemplo

$$\left\{ \begin{array}{l} r_{11}^1 = \varepsilon \\ r_{12}^1 = 0 \\ r_{13}^1 = 1 \\ r_{21}^1 = 0 \\ r_{22}^1 = \varepsilon + 00 \\ r_{23}^1 = 1 + 01 \\ r_{31}^1 = \emptyset \\ r_{32}^1 = 0 + 1 \\ r_{33}^1 = \varepsilon \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} r_{11}^2 = r_{11}^1 + r_{12}^1(r_{22}^1)^*r_{21}^1 = \varepsilon + 0(\varepsilon + 00)^*0 = (00)^* \\ r_{12}^2 = r_{12}^1 + r_{12}^1(r_{22}^1)^*r_{22}^1 = 0 + 0(\varepsilon + 00)^*(\varepsilon + 00) = 0(00)^* \\ r_{13}^2 = r_{13}^1 + r_{12}^1(r_{22}^1)^*r_{23}^1 = 1 + 0(\varepsilon + 00)^*(1 + 01) = 0^*1 \\ r_{21}^2 = r_{21}^1 + r_{22}^1(r_{22}^1)^*r_{21}^1 = 0 + (\varepsilon + 00)(\varepsilon + 00)^*0 = (00)^*0 \\ r_{22}^2 = r_{22}^1 + r_{22}^1(r_{22}^1)^*r_{22}^1 = \varepsilon + 00 + (\varepsilon + 00)(\varepsilon + 00)^*(\varepsilon + 00) = (00)^* \end{array} \right.$$

Ejemplo

$$\left\{ \begin{array}{l} r_{11}^1 = \varepsilon \\ r_{12}^1 = 0 \\ r_{13}^1 = 1 \\ r_{21}^1 = 0 \\ r_{22}^1 = \varepsilon + 00 \\ r_{23}^1 = 1 + 01 \\ r_{31}^1 = \emptyset \\ r_{32}^1 = 0 + 1 \\ r_{33}^1 = \varepsilon \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} r_{11}^2 = r_{11}^1 + r_{12}^1(r_{22}^1)^*r_{21}^1 = \varepsilon + 0(\varepsilon + 00)^*0 = (00)^* \\ r_{12}^2 = r_{12}^1 + r_{12}^1(r_{22}^1)^*r_{22}^1 = 0 + 0(\varepsilon + 00)^*(\varepsilon + 00) = 0(00)^* \\ r_{13}^2 = r_{13}^1 + r_{12}^1(r_{22}^1)^*r_{23}^1 = 1 + 0(\varepsilon + 00)^*(1 + 01) = 0^*1 \\ r_{21}^2 = r_{21}^1 + r_{22}^1(r_{22}^1)^*r_{21}^1 = 0 + (\varepsilon + 00)(\varepsilon + 00)^*0 = (00)^*0 \\ r_{22}^2 = r_{22}^1 + r_{22}^1(r_{22}^1)^*r_{22}^1 = \varepsilon + 00 + (\varepsilon + 00)(\varepsilon + 00)^*(\varepsilon + 00) = (00)^* \\ r_{23}^2 = r_{23}^1 + r_{22}^1(r_{22}^1)^*r_{23}^1 = 1 + 01 + (\varepsilon + 00)(\varepsilon + 00)^*(1 + 01) \end{array} \right.$$

Ejemplo

$$\left\{ \begin{array}{l} r_{11}^1 = \varepsilon \\ r_{12}^1 = 0 \\ r_{13}^1 = 1 \\ r_{21}^1 = 0 \\ r_{22}^1 = \varepsilon + 00 \\ r_{23}^1 = 1 + 01 \\ r_{31}^1 = \emptyset \\ r_{32}^1 = 0 + 1 \\ r_{33}^1 = \varepsilon \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} r_{11}^2 = r_{11}^1 + r_{12}^1(r_{22}^1)^*r_{21}^1 = \varepsilon + 0(\varepsilon + 00)^*0 = (00)^* \\ r_{12}^2 = r_{12}^1 + r_{12}^1(r_{22}^1)^*r_{22}^1 = 0 + 0(\varepsilon + 00)^*(\varepsilon + 00) = 0(00)^* \\ r_{13}^2 = r_{13}^1 + r_{12}^1(r_{22}^1)^*r_{23}^1 = 1 + 0(\varepsilon + 00)^*(1 + 01) = 0^*1 \\ r_{21}^2 = r_{21}^1 + r_{22}^1(r_{22}^1)^*r_{21}^1 = 0 + (\varepsilon + 00)(\varepsilon + 00)^*0 = (00)^*0 \\ r_{22}^2 = r_{22}^1 + r_{22}^1(r_{22}^1)^*r_{22}^1 = \varepsilon + 00 + (\varepsilon + 00)(\varepsilon + 00)^*(\varepsilon + 00) = (00)^* \\ r_{23}^2 = r_{23}^1 + r_{22}^1(r_{22}^1)^*r_{23}^1 = 1 + 01 + (\varepsilon + 00)(\varepsilon + 00)^*(1 + 01) = 0^*1 \end{array} \right.$$

Ejemplo

$$\left\{ \begin{array}{l} r_{11}^1 = \varepsilon \\ r_{12}^1 = 0 \\ r_{13}^1 = 1 \\ r_{21}^1 = 0 \\ r_{22}^1 = \varepsilon + 00 \\ r_{23}^1 = 1 + 01 \\ r_{31}^1 = \emptyset \\ r_{32}^1 = 0 + 1 \\ r_{33}^1 = \varepsilon \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} r_{11}^2 = r_{11}^1 + r_{12}^1(r_{22}^1)^*r_{21}^1 = \varepsilon + 0(\varepsilon + 00)^*0 = (00)^* \\ r_{12}^2 = r_{12}^1 + r_{12}^1(r_{22}^1)^*r_{22}^1 = 0 + 0(\varepsilon + 00)^*(\varepsilon + 00) = 0(00)^* \\ r_{13}^2 = r_{13}^1 + r_{12}^1(r_{22}^1)^*r_{23}^1 = 1 + 0(\varepsilon + 00)^*(1 + 01) = 0^*1 \\ r_{21}^2 = r_{21}^1 + r_{22}^1(r_{22}^1)^*r_{21}^1 = 0 + (\varepsilon + 00)(\varepsilon + 00)^*0 = (00)^*0 \\ r_{22}^2 = r_{22}^1 + r_{22}^1(r_{22}^1)^*r_{22}^1 = \varepsilon + 00 + (\varepsilon + 00)(\varepsilon + 00)^*(\varepsilon + 00) = (00)^* \\ r_{23}^2 = r_{23}^1 + r_{22}^1(r_{22}^1)^*r_{23}^1 = 1 + 01 + (\varepsilon + 00)(\varepsilon + 00)^*(1 + 01) = 0^*1 \\ r_{31}^2 = r_{31}^1 + r_{32}^1(r_{22}^1)^*r_{21}^1 = 0 + (0 + 1)(\varepsilon + 00)^*0 \end{array} \right.$$

Ejemplo

$$\left\{ \begin{array}{l} r_{11}^1 = \varepsilon \\ r_{12}^1 = 0 \\ r_{13}^1 = 1 \\ r_{21}^1 = 0 \\ r_{22}^1 = \varepsilon + 00 \\ r_{23}^1 = 1 + 01 \\ r_{31}^1 = \emptyset \\ r_{32}^1 = 0 + 1 \\ r_{33}^1 = \varepsilon \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} r_{11}^2 = r_{11}^1 + r_{12}^1(r_{22}^1)^*r_{21}^1 = \varepsilon + 0(\varepsilon + 00)^*0 = (00)^* \\ r_{12}^2 = r_{12}^1 + r_{12}^1(r_{22}^1)^*r_{22}^1 = 0 + 0(\varepsilon + 00)^*(\varepsilon + 00) = 0(00)^* \\ r_{13}^2 = r_{13}^1 + r_{12}^1(r_{22}^1)^*r_{23}^1 = 1 + 0(\varepsilon + 00)^*(1 + 01) = 0^*1 \\ r_{21}^2 = r_{21}^1 + r_{22}^1(r_{22}^1)^*r_{21}^1 = 0 + (\varepsilon + 00)(\varepsilon + 00)^*0 = (00)^*0 \\ r_{22}^2 = r_{22}^1 + r_{22}^1(r_{22}^1)^*r_{22}^1 = \varepsilon + 00 + (\varepsilon + 00)(\varepsilon + 00)^*(\varepsilon + 00) = (00)^* \\ r_{23}^2 = r_{23}^1 + r_{22}^1(r_{22}^1)^*r_{23}^1 = 1 + 01 + (\varepsilon + 00)(\varepsilon + 00)^*(1 + 01) = 0^*1 \\ r_{31}^2 = r_{31}^1 + r_{32}^1(r_{22}^1)^*r_{21}^1 = 0 + (0 + 1)(\varepsilon + 00)^*0 = (0 + 1)(00)^*0 \end{array} \right.$$

Ejemplo

$$\left\{ \begin{array}{l} r_{11}^1 = \varepsilon \\ r_{12}^1 = 0 \\ r_{13}^1 = 1 \\ r_{21}^1 = 0 \\ r_{22}^1 = \varepsilon + 00 \\ r_{23}^1 = 1 + 01 \\ r_{31}^1 = \emptyset \\ r_{32}^1 = 0 + 1 \\ r_{33}^1 = \varepsilon \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} r_{11}^2 = r_{11}^1 + r_{12}^1(r_{22}^1)^*r_{21}^1 = \varepsilon + 0(\varepsilon + 00)^*0 = (00)^* \\ r_{12}^2 = r_{12}^1 + r_{12}^1(r_{22}^1)^*r_{22}^1 = 0 + 0(\varepsilon + 00)^*(\varepsilon + 00) = 0(00)^* \\ r_{13}^2 = r_{13}^1 + r_{12}^1(r_{22}^1)^*r_{23}^1 = 1 + 0(\varepsilon + 00)^*(1 + 01) = 0^*1 \\ r_{21}^2 = r_{21}^1 + r_{22}^1(r_{22}^1)^*r_{21}^1 = 0 + (\varepsilon + 00)(\varepsilon + 00)^*0 = (00)^*0 \\ r_{22}^2 = r_{22}^1 + r_{22}^1(r_{22}^1)^*r_{22}^1 = \varepsilon + 00 + (\varepsilon + 00)(\varepsilon + 00)^*(\varepsilon + 00) = (00)^* \\ r_{23}^2 = r_{23}^1 + r_{22}^1(r_{22}^1)^*r_{23}^1 = 1 + 01 + (\varepsilon + 00)(\varepsilon + 00)^*(1 + 01) = 0^*1 \\ r_{31}^2 = r_{31}^1 + r_{32}^1(r_{22}^1)^*r_{21}^1 = 0 + (0 + 1)(\varepsilon + 00)^*0 = (0 + 1)(00)^*0 \\ r_{32}^2 = r_{32}^1 + r_{32}^1(r_{22}^1)^*r_{22}^1 = 0 + 1 + (0 + 1)(\varepsilon + 00)^*(\varepsilon + 00) \end{array} \right.$$

Ejemplo

$$\left\{ \begin{array}{l} r_{11}^1 = \varepsilon \\ r_{12}^1 = 0 \\ r_{13}^1 = 1 \\ r_{21}^1 = 0 \\ r_{22}^1 = \varepsilon + 00 \\ r_{23}^1 = 1 + 01 \\ r_{31}^1 = \emptyset \\ r_{32}^1 = 0 + 1 \\ r_{33}^1 = \varepsilon \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} r_{11}^2 = r_{11}^1 + r_{12}^1(r_{22}^1)^*r_{21}^1 = \varepsilon + 0(\varepsilon + 00)^*0 = (00)^* \\ r_{12}^2 = r_{12}^1 + r_{12}^1(r_{22}^1)^*r_{22}^1 = 0 + 0(\varepsilon + 00)^*(\varepsilon + 00) = 0(00)^* \\ r_{13}^2 = r_{13}^1 + r_{12}^1(r_{22}^1)^*r_{23}^1 = 1 + 0(\varepsilon + 00)^*(1 + 01) = 0^*1 \\ r_{21}^2 = r_{21}^1 + r_{22}^1(r_{22}^1)^*r_{21}^1 = 0 + (\varepsilon + 00)(\varepsilon + 00)^*0 = (00)^*0 \\ r_{22}^2 = r_{22}^1 + r_{22}^1(r_{22}^1)^*r_{22}^1 = \varepsilon + 00 + (\varepsilon + 00)(\varepsilon + 00)^*(\varepsilon + 00) = (00)^* \\ r_{23}^2 = r_{23}^1 + r_{22}^1(r_{22}^1)^*r_{23}^1 = 1 + 01 + (\varepsilon + 00)(\varepsilon + 00)^*(1 + 01) = 0^*1 \\ r_{31}^2 = r_{31}^1 + r_{32}^1(r_{22}^1)^*r_{21}^1 = 0 + (0 + 1)(\varepsilon + 00)^*0 = (0 + 1)(00)^*0 \\ r_{32}^2 = r_{32}^1 + r_{32}^1(r_{22}^1)^*r_{22}^1 = 0 + 1 + (0 + 1)(\varepsilon + 00)^*(\varepsilon + 00) = (0 + 1)(00)^* \end{array} \right.$$

Ejemplo

$$\left\{ \begin{array}{l} r_{11}^1 = \varepsilon \\ r_{12}^1 = 0 \\ r_{13}^1 = 1 \\ r_{21}^1 = 0 \\ r_{22}^1 = \varepsilon + 00 \\ r_{23}^1 = 1 + 01 \\ r_{31}^1 = \emptyset \\ r_{32}^1 = 0 + 1 \\ r_{33}^1 = \varepsilon \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} r_{11}^2 = r_{11}^1 + r_{12}^1(r_{22}^1)^*r_{21}^1 &= \varepsilon + 0(\varepsilon + 00)^*0 = (00)^* \\ r_{12}^2 = r_{12}^1 + r_{12}^1(r_{22}^1)^*r_{22}^1 &= 0 + 0(\varepsilon + 00)^*(\varepsilon + 00) = 0(00)^* \\ r_{13}^2 = r_{13}^1 + r_{12}^1(r_{22}^1)^*r_{23}^1 &= 1 + 0(\varepsilon + 00)^*(1 + 01) = 0^*1 \\ r_{21}^2 = r_{21}^1 + r_{22}^1(r_{22}^1)^*r_{21}^1 &= 0 + (\varepsilon + 00)(\varepsilon + 00)^*0 = (00)^*0 \\ r_{22}^2 = r_{22}^1 + r_{22}^1(r_{22}^1)^*r_{22}^1 &= \varepsilon + 00 + (\varepsilon + 00)(\varepsilon + 00)^*(\varepsilon + 00) = (00)^* \\ r_{23}^2 = r_{23}^1 + r_{22}^1(r_{22}^1)^*r_{23}^1 &= 1 + 01 + (\varepsilon + 00)(\varepsilon + 00)^*(1 + 01) = 0^*1 \\ r_{31}^2 = r_{31}^1 + r_{32}^1(r_{22}^1)^*r_{21}^1 &= 0 + (0 + 1)(\varepsilon + 00)^*0 = (0 + 1)(00)^*0 \\ r_{32}^2 = r_{32}^1 + r_{32}^1(r_{22}^1)^*r_{22}^1 &= 0 + 1 + (0 + 1)(\varepsilon + 00)^*(\varepsilon + 00) = (0 + 1)(00)^* \\ r_{33}^2 = r_{33}^1 + r_{32}^1(r_{22}^1)^*r_{23}^1 &= \varepsilon + (0 + 1)(\varepsilon + 00)^*(1 + 01) \end{array} \right.$$

Ejemplo

$$\left\{ \begin{array}{l} r_{11}^1 = \varepsilon \\ r_{12}^1 = 0 \\ r_{13}^1 = 1 \\ r_{21}^1 = 0 \\ r_{22}^1 = \varepsilon + 00 \\ r_{23}^1 = 1 + 01 \\ r_{31}^1 = \emptyset \\ r_{32}^1 = 0 + 1 \\ r_{33}^1 = \varepsilon \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} r_{11}^2 = r_{11}^1 + r_{12}^1(r_{22}^1)^*r_{21}^1 = \varepsilon + 0(\varepsilon + 00)^*0 = (00)^* \\ r_{12}^2 = r_{12}^1 + r_{12}^1(r_{22}^1)^*r_{22}^1 = 0 + 0(\varepsilon + 00)^*(\varepsilon + 00) = 0(00)^* \\ r_{13}^2 = r_{13}^1 + r_{12}^1(r_{22}^1)^*r_{23}^1 = 1 + 0(\varepsilon + 00)^*(1 + 01) = 0^*1 \\ r_{21}^2 = r_{21}^1 + r_{22}^1(r_{22}^1)^*r_{21}^1 = 0 + (\varepsilon + 00)(\varepsilon + 00)^*0 = (00)^*0 \\ r_{22}^2 = r_{22}^1 + r_{22}^1(r_{22}^1)^*r_{22}^1 = \varepsilon + 00 + (\varepsilon + 00)(\varepsilon + 00)^*(\varepsilon + 00) = (00)^* \\ r_{23}^2 = r_{23}^1 + r_{22}^1(r_{22}^1)^*r_{23}^1 = 1 + 01 + (\varepsilon + 00)(\varepsilon + 00)^*(1 + 01) = 0^*1 \\ r_{31}^2 = r_{31}^1 + r_{32}^1(r_{22}^1)^*r_{21}^1 = 0 + (0 + 1)(\varepsilon + 00)^*0 = (0 + 1)(00)^*0 \\ r_{32}^2 = r_{32}^1 + r_{32}^1(r_{22}^1)^*r_{22}^1 = 0 + 1 + (0 + 1)(\varepsilon + 00)^*(\varepsilon + 00) = (0 + 1)(00)^* \\ r_{33}^2 = r_{33}^1 + r_{32}^1(r_{22}^1)^*r_{23}^1 = \varepsilon + (0 + 1)(\varepsilon + 00)^*(1 + 01) = \varepsilon + (0 + 1)0^*1 \end{array} \right.$$

Ejemplo

$$\begin{aligned}r_{11}^2 &= (00)^* \\r_{12}^2 &= 0(00)^* \\r_{13}^2 &= 0^*1 \\r_{21}^2 &= (00)^*0 \\r_{22}^2 &= (00)^* \\r_{23}^2 &= 0^*1 \\r_{31}^2 &= (0+1)(00)^*0 \\r_{32}^2 &= (0+1)(00)^* \\r_{33}^2 &= \varepsilon + (0+1)0^*1\end{aligned}$$

Finalmente la expresión regular para el lenguaje aceptado es:

$$r_{12}^3 + r_{13}^3 =$$

Ejemplo

$$\begin{aligned}r_{11}^2 &= (00)^* \\r_{12}^2 &= 0(00)^* \\r_{13}^2 &= 0^*1 \\r_{21}^2 &= (00)^*0 \\r_{22}^2 &= (00)^* \\r_{23}^2 &= 0^*1 \\r_{31}^2 &= (0+1)(00)^*0 \\r_{32}^2 &= (0+1)(00)^* \\r_{33}^2 &= \varepsilon + (0+1)0^*1\end{aligned}$$

Finalmente la expresión regular para el lenguaje aceptado es:

$$r_{12}^3 + r_{13}^3 = r_{12}^2 + r_{13}^2(r_{33}^2)^*r_{32}^2 + r_{13}^2 + r_{13}^2(r_{33}^2)^*r_{33}^2 =$$

Ejemplo

$$\begin{aligned}r_{11}^2 &= (00)^* \\r_{12}^2 &= 0(00)^* \\r_{13}^2 &= 0^*1 \\r_{21}^2 &= (00)^*0 \\r_{22}^2 &= (00)^* \\r_{23}^2 &= 0^*1 \\r_{31}^2 &= (0+1)(00)^*0 \\r_{32}^2 &= (0+1)(00)^* \\r_{33}^2 &= \varepsilon + (0+1)0^*1\end{aligned}$$

Finalmente la expresión regular para el lenguaje aceptado es:

$$\begin{aligned}r_{12}^3 + r_{13}^3 &= r_{12}^2 + r_{13}^2(r_{33}^2)^*r_{32}^2 + r_{13}^2 + r_{13}^2(r_{33}^2)^*r_{33}^2 = \\0(00)^* + 0^*1(\varepsilon + (0+1)0^*1)^*(0+1)(00)^* + 0^*1 + 0^*1(\varepsilon + (0+1)0^*1)^*(\varepsilon + (0+1)0^*1) &= \end{aligned}$$

Ejemplo

$$\begin{aligned}r_{11}^2 &= (00)^* \\r_{12}^2 &= 0(00)^* \\r_{13}^2 &= 0^*1 \\r_{21}^2 &= (00)^*0 \\r_{22}^2 &= (00)^* \\r_{23}^2 &= 0^*1 \\r_{31}^2 &= (0+1)(00)^*0 \\r_{32}^2 &= (0+1)(00)^* \\r_{33}^2 &= \varepsilon + (0+1)0^*1\end{aligned}$$

Finalmente la expresión regular para el lenguaje aceptado es:

$$\begin{aligned}r_{12}^3 + r_{13}^3 &= r_{12}^2 + r_{13}^2(r_{33}^2)^*r_{32}^2 + r_{13}^2 + r_{13}^2(r_{33}^2)^*r_{33}^2 = \\0(00)^* + 0^*1(\varepsilon + (0+1)0^*1)^*(0+1)(00)^* + 0^*1 + 0^*1(\varepsilon + (0+1)0^*1)^*(\varepsilon + (0+1)0^*1) &= \\0(00)^* + 0^*1((0+1)0^*1)^*(0+1)(00)^* + 0^*1 + 0^*1((0+1)0^*1)^* &\end{aligned}$$

Método alternativo: Eliminar estados

- Para cada estado final $q \in F$ construir un autómata finito equivalente que tenga sólo el estado inicial y ese final y con transiciones que vienen etiquetadas por expresiones regulares. A cada uno de esos autómatas se le asocia de forma sencilla una expresión regular: si r_q es la expresión regular del autómata que corresponde al estado final $q \in F$, entonces la expresión regular del autómata $\sum_{q \in F} r_q$ (la suma de todas las expresiones regulares que se obtienen para los distintos estados finales).

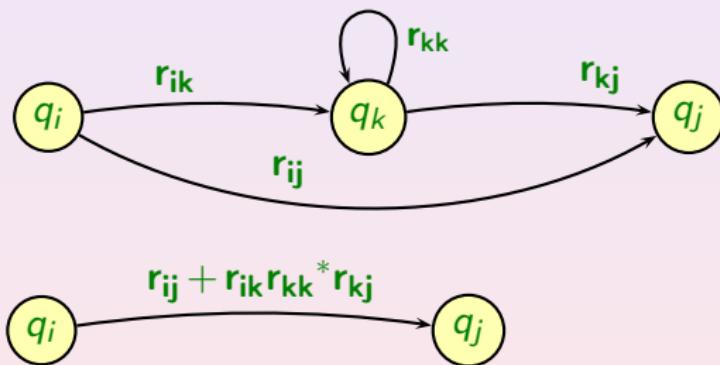
- Para cada estado final $q \in F$ construir un autómata finito equivalente que tenga sólo el estado inicial y ese final y con transiciones que vienen etiquetadas por expresiones regulares. A cada uno de esos autómatas se le asocia de forma sencilla una expresión regular: si r_q es la expresión regular del autómata que corresponde al estado final $q \in F$, entonces la expresión regular del autómata $\sum_{q \in F} r_q$ (la suma de todas las expresiones regulares que se obtienen para los distintos estados finales). Hay que tener en cuenta que si el estado inicial es final, habrá que construir un autómata equivalente con un solo estado y r_q será la la etiqueta de la transición que vaya de ese estado a él mismo.

- Para cada estado final $q \in F$ construir un autómata finito equivalente que tenga sólo el estado inicial y ese final y con transiciones que vienen etiquetadas por expresiones regulares. A cada uno de esos autómatas se le asocia de forma sencilla una expresión regular: si r_q es la expresión regular del autómata que corresponde al estado final $q \in F$, entonces la expresión regular del autómata $\sum_{q \in F} r_q$ (la suma de todas las expresiones regulares que se obtienen para los distintos estados finales). Hay que tener en cuenta que si el estado inicial es final, habrá que construir un autómata equivalente con un solo estado y r_q será la la etiqueta de la transición que vaya de ese estado a él mismo.
- Para construir un autómata equivalente con expresiones regulares en las transiciones y con sólo estado inicial y final se procede con un proceso de eliminación de estados intermedios que comienza con el autómata de partida.

Eliminación de estado intermedio

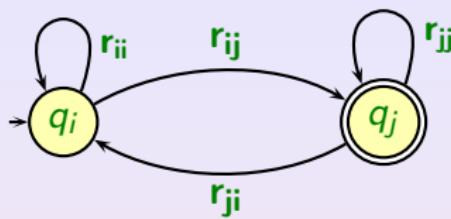
Para eliminar todo estado intermedio q_k , la etiqueta r_{ij} de cada transición de q_i a q_j se actualiza con

$$r_{ij} \leftarrow r_{ij} + r_{ik}r_{kk}^*r_{kj}$$



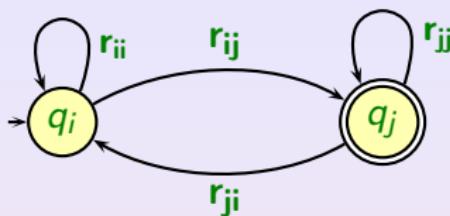
Si una transición no existe, entonces se supone que es vacía \emptyset .

Asociar expresión regular a autómata simplificado

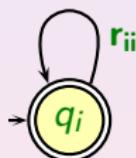


Se le asocia: $(r_{ii} + r_{ij}r_{jj}^*r_{ji})^*r_{ij}r_{jj}^*$

Asociar expresión regular a autómata simplificado

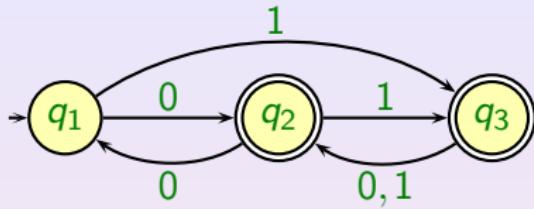


Se le asocia: $(r_{ii} + r_{ij}r_{jj}^*r_{ji})^*r_{ij}r_{jj}^*$

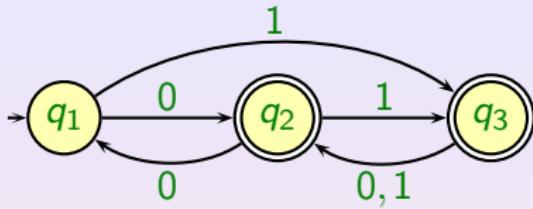


Se le asocia: r_{ii}^*

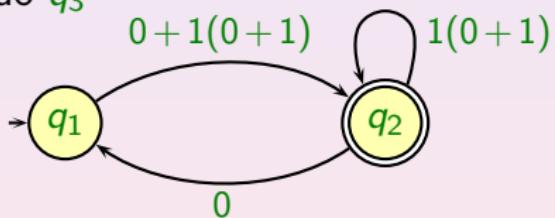
Ejemplo



Ejemplo



Obtenemos la expresión regular r_2 para el estado final q_2 eliminando q_3

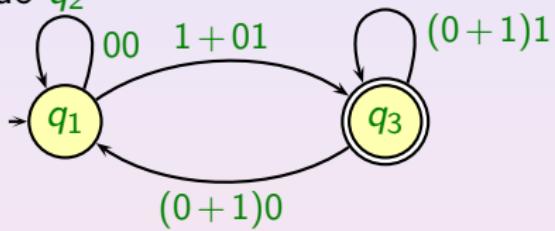


Expresión regular:

$$r_2 = (0 + 1(0 + 1))(1(0 + 1))^*0^*(0 + 1(0 + 1))(1(0 + 1))^*$$

Ejemplo

Obtenemos la expresión regular r_3 para el estado final q_3 eliminando q_2

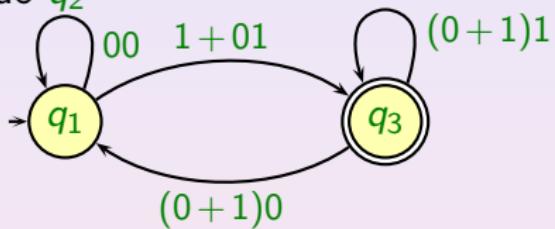


Expresión regular:

$$r_3 = (00 + (1 + 01)((0 + 1)1)^*((0 + 1)0)^*(1 + 01)((0 + 1)1)^*$$

Ejemplo

Obtenemos la expresión regular r_3 para el estado final q_3 eliminando q_2



Expresión regular:

$$r_3 = (00 + (1 + 01)((0 + 1)1)^*(0 + 1)0)^*(1 + 01)((0 + 1)1)^*$$

Expresión regular final

$$\begin{aligned} r_2 + r_3 = & (0 + 1(0 + 1))(1(0 + 1))^*0)^*(0 + 1(0 + 1))(1(0 + 1))^* + \\ & (00 + (1 + 01)((0 + 1)1)^*(0 + 1)0)^*(1 + 01)((0 + 1)1)^* \end{aligned}$$

Expresión Regular	Significado
Caracteres Normales	Ellos mismos
+,*	Superíndices +,*
	La unión de los lenguajes
[...]	Cualquier símbolo entre corchetes
[a – b]	todos los caracteres entre <i>a</i> y <i>b</i>
[^...]	El complementario de [...]
?	0 ó 1 repetición de lo anterior
{nombre}	Se substituye la e.r. <i>nombre</i>
{n}	<i>n</i> repeticiones de la anterior e.r.
{n, m}	entre <i>n</i> y <i>m</i> repeticiones de la anterior e.r.
*	El carácter *
"..."	Los caracteres entre comillas literalmente
^,\$	Principio, fin de línea

Estructura de un fichero lex

```
nombre1      er1
nombre2      er2
nombrei      eri
              declaglobal1
              declaglobal2
%%                      declalocal1
                      declalocal2
er1          accion1;
er2          accion2;
er3          accion3;
%%
```

definiciones de funciones en C

- `yylex()` – Programa que reconoce las expresiones regulares y ejecuta las acciones.
- `main()` – Programa principal. Por defecto sólo llama a `yylex()`. Se puede redefinir después de los últimos % %
- `yywrap()` – Función que se ejecuta cuando `yylex()` encuentra un fin de fichero. Si devuelve 1 (lo único que hace la versión por defecto) `yylex()` termina. Si devuelve un 0, `yylex()` sigue leyendo de la entrada.
- `yyin` – Fichero de entrada (stdin por defecto)
- `yyout` – Fichero de salida (stdout por defecto)
- `yytext` – Variable que contiene la cadena reconocida por `yylex()`
- `yylen` – Longitud de la cadena reconocida

Ejemplo

```
car          [a-zA-Z]
digito       [0-9]
signo        (\-|\\+)
suc          ({digito}+)
enter        ({signo}?{suc})
real1        ({enter}\\.{digito}*)
real2        ({signo}?\\.{suc})
int    ent=0, real=0, ident=0, sumaent=0;
%%
int    i;
{enter}        {ent++; sscanf(yytext,"%d",&i); sumaent += i;
                printf("Numero entero%s\n",yytext);}
({real1}|{real2}) {real++; printf("Num. real%s\n",yytext);}
{car}({car}|{digito})* {ident++; printf("Var. ident.%s\n",yytext);}
.|\\n           {}
%%
yywrap() {printf("Numero de Enteros%d, reales%d, ident%d,
                  Suma de Enteros%d",ent,real,ident,sumaent); return 1;}
```

- ① Crear fichero ejemplo con el contenido anterior
- ② Ejecutar lex con el fichero creado:
`lex ejemplo`
- ③ Compilar el programa que crea lex:
`gcc lex.yy.c -o prog -lfl`
- ④ ejecutar el programa `prog < Entrada > Salida`
- ⑤ NOTA: Si usais flex en lugar de lex quizás tendréis que cambiar las opciones de compilación:
`gcc lex.yy.c -o prog -lfl`

- Para búsqueda de patrones (buscar direcciones, enlaces o números de teléfono en páginas web).
- Fueron centrales en el desarrollo de Unix:
K. Thompson (1968) Regular expressions search algorithms.
Comm. ACM. 11, 419–422.
Existen instrucciones como **grep**: '*Global (Search for) Regular Expressions and Print*'

- *Common Applications of Regular Expressions* By Richard Lowe en
<http://www.4guysfromrolla.com/webtech/120400-1.shtml>
contiene 4 aplicaciones de expresiones regulares, desde verificación de direcciones de correo electrónico a dividir un documento en secciones para incorporarlo en una base de datos.
- En <http://www.webreference.com/js/column5/> podeis ver el uso de expresiones regulares en navegadores.

Gramáticas Regulares ó tipo 3

- *Lineales por la derecha.*- Cuando todas las producciones tienen la forma

$$A \rightarrow uB$$

$$A \rightarrow u$$

Gramáticas Regulares ó tipo 3

- *Lineales por la derecha.*- Cuando todas las producciones tienen la forma

$$A \rightarrow uB$$

$$A \rightarrow u$$

- *Lineales por la izquierda.*- Cuando todas las producciones tienen la forma

$$A \rightarrow Bu$$

$$A \rightarrow u$$

Gramática Lineal por la Derecha:

$S \rightarrow 0A, \quad A \rightarrow 10A, \quad A \rightarrow \epsilon$

Ejemplo

Gramática Lineal por la Derecha:

$$S \rightarrow 0A, \quad A \rightarrow 10A, \quad A \rightarrow \epsilon$$

Expresión Regular

$$0(10)^*$$

Ejemplo

Gramática Lineal por la Derecha:

$$S \rightarrow 0A, \quad A \rightarrow 10A, \quad A \rightarrow \epsilon$$

Expresión Regular

$$0(10)^*$$

Gramática Lineal por la Izquierda:

$$S \rightarrow S10, \quad S \rightarrow 0$$

Si L es un lenguaje generado por una gramática regular, entonces existe un autómata finito determinista que lo reconoce.

L es un lenguaje generado por la gramática $G = (V, T, P, S)$ lineal por la derecha. AFND con movimientos nulos que acepta L : $M = (Q, T, \delta, q_0, F)$ donde

- $Q = \{[\alpha] : (\alpha = S) \vee (\exists A \in V, u \in T, \text{ tales que } A \rightarrow u\alpha \in P)\}$
- $q_0 = [S]$
- $F = \{[\varepsilon]\}$
- δ viene definida por
 - Si A es una variable: $\delta([A], \varepsilon) = \{[\alpha] : (A \rightarrow \alpha) \in P\}$
 - Si $a \in T$ y $\alpha \in (T^*V \cup T^*)$, entonces

$$\delta([a\alpha], a) = [\alpha]$$

Ejemplo

Sea la gramática:

$$S \rightarrow 0A, \quad A \rightarrow 10A, \quad A \rightarrow \epsilon$$

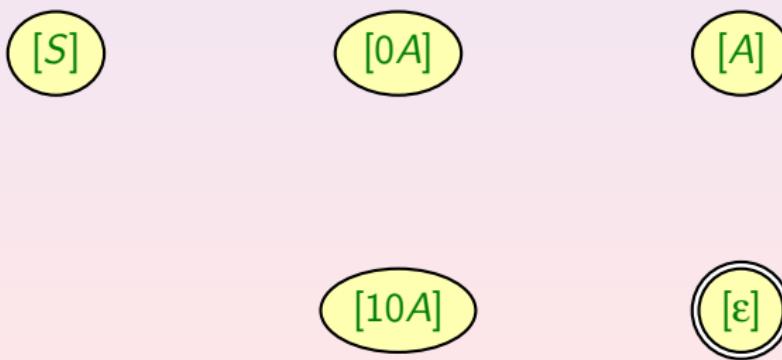
El autómata que se obtiene es el siguiente:

Ejemplo

Sea la gramática:

$$S \rightarrow 0A, \quad A \rightarrow 10A, \quad A \rightarrow \epsilon$$

El autómata que se obtiene es el siguiente:

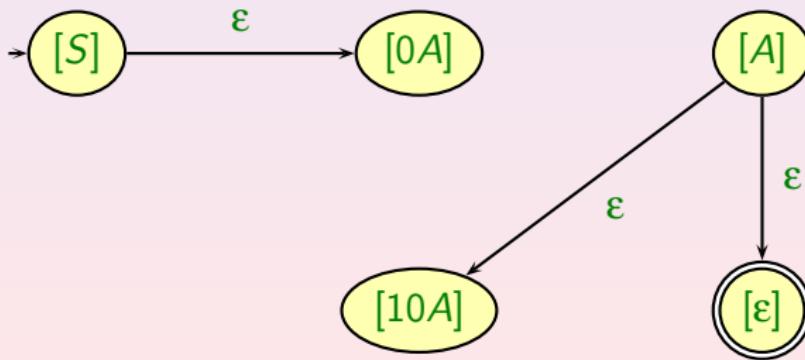


Ejemplo

Sea la gramática:

$$S \rightarrow 0A, \quad A \rightarrow 10A, \quad A \rightarrow \epsilon$$

El autómata que se obtiene es el siguiente:

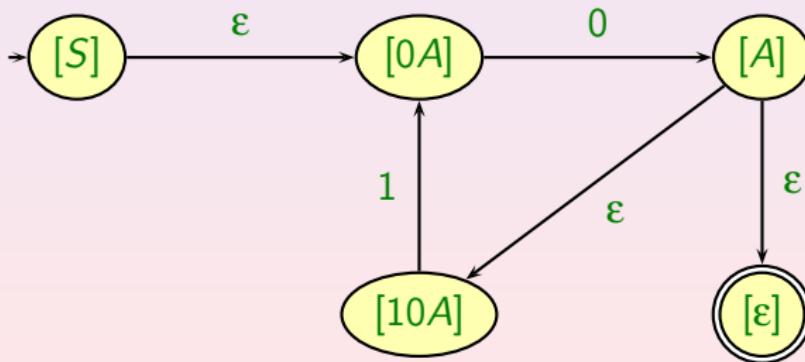


Ejemplo

Sea la gramática:

$$S \rightarrow 0A, \quad A \rightarrow 10A, \quad A \rightarrow \epsilon$$

El autómata que se obtiene es el siguiente:



Gramáticas Lineales por la Izquierda

Gramática lineal por la izquierda, $G = (V, T, P, S)$

1. Consideraremos la gramática $G' = (V, T, P', S)$ donde

$$P' = \{A \rightarrow \alpha : A \rightarrow \alpha^{-1} \in P\}$$

Es inmediato que $L(G') = L(G)^{-1}$.

2. Sea M' el autómata finito no-determinista que acepta el lenguaje $L(G')$.
3. Calcular M a partir de M' invirtiendo el autómata:

- Dejar sólo un estado final (ocurre siempre en nuestro caso).
- Invertir las transiciones
- Intercambiar el estado inicial y el final.

El lenguaje aceptado por M es: $L(M')^{-1} = L(G')^{-1} = (L(G)^{-1})^{-1} = L(G)$

Ejemplo

$S \rightarrow S10, \quad S \rightarrow 0$

Para construir un AFND con transiciones nulas que acepte este lenguaje se dan los siguientes pasos:

Ejemplo

$$S \rightarrow S10, \quad S \rightarrow 0$$

Para construir un AFND con transiciones nulas que acepte este lenguaje se dan los siguientes pasos:

- Invertir la parte derecha de las producciones:

$$S \rightarrow 01S$$

$$S \rightarrow 0$$

Ejemplo

$$S \rightarrow S10, \quad S \rightarrow 0$$

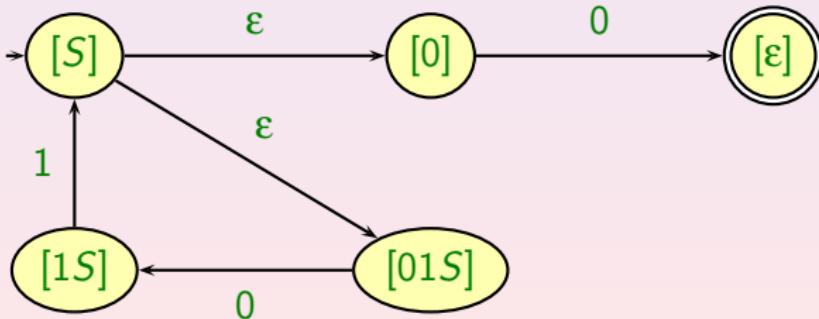
Para construir un AFND con transiciones nulas que acepte este lenguaje se dan los siguientes pasos:

- Invertir la parte derecha de las producciones:

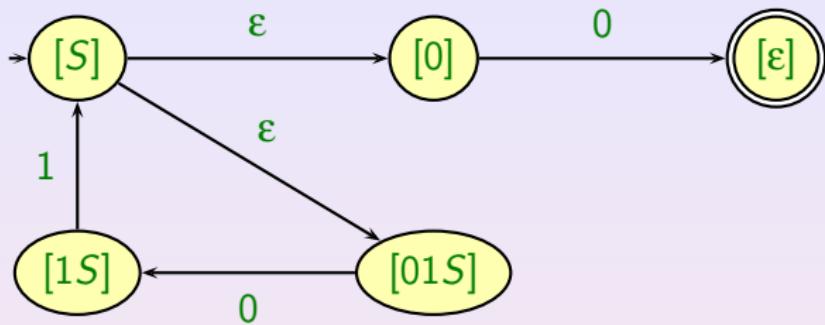
$$S \rightarrow 01S$$

$$S \rightarrow 0$$

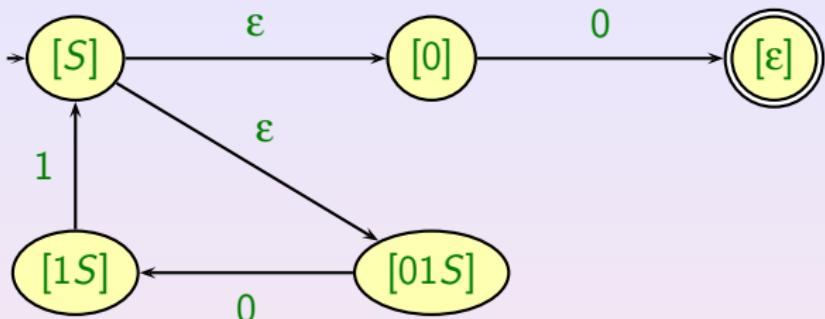
- Construir el AFND con transiciones nulas asociado



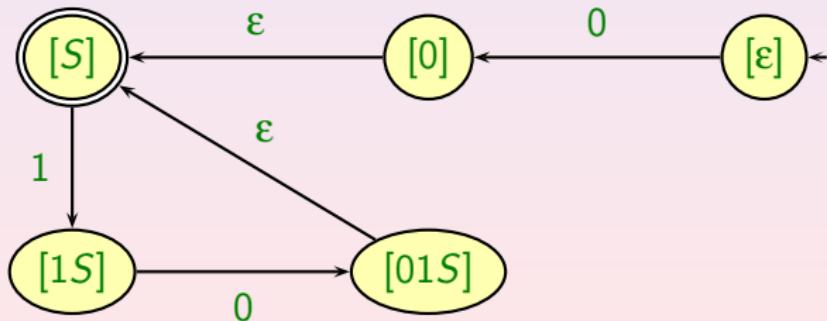
Ejemplo Cont.



Ejemplo Cont.



- Invertimos el autómata



Si L es aceptado por un Autómata Finito Determinístico entonces L puede generarse mediante una gramática lineal por la derecha y por una lineal por la izquierda.

Si L es aceptado por un Autómata Finito Determinístico entonces L puede generarse mediante una gramática lineal por la derecha y por una lineal por la izquierda.

Sea $L = L(M)$ donde $M = (Q, A, \delta, q_0, F)$ es un autómata finito determinista.

La **gramática lineal por la derecha** es $G = (Q, A, P, q_0)$ donde las variables son los estados, la variable inicial es q_0 y P contiene las producciones,

$$p \rightarrow aq, \quad \text{si } \delta(p, a) = q$$

$$p \rightarrow \varepsilon, \quad \text{si } p \in F$$

Autómata → Gramática lineal

Si L es aceptado por un Autómata Finito Determinístico entonces L puede generarse mediante una gramática lineal por la derecha y por una lineal por la izquierda.

Sea $L = L(M)$ donde $M = (Q, A, \delta, q_0, F)$ es un autómata finito determinista.

La **gramática lineal por la derecha** es $G = (Q, A, P, q_0)$ donde las variables son los estados, la variable inicial es q_0 y P contiene las producciones,

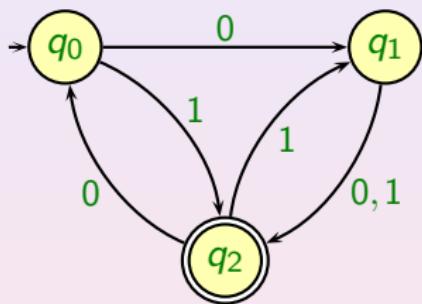
$$p \rightarrow aq, \quad \text{si } \delta(p, a) = q$$

$$p \rightarrow \epsilon, \quad \text{si } p \in F$$

Para el caso de una **gramática lineal por la izquierda**, invertimos el autómata, construimos la gramática lineal por la derecha asociada e invertimos la parte derecha de las producciones.

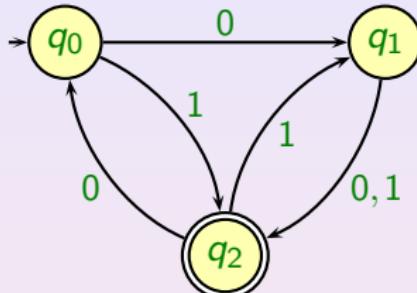
Ejemplo: Gramática Lineal por la Derecha

Consideremos el autómata:



Ejemplo: Gramática Lineal por la Derecha

Consideremos el autómata:



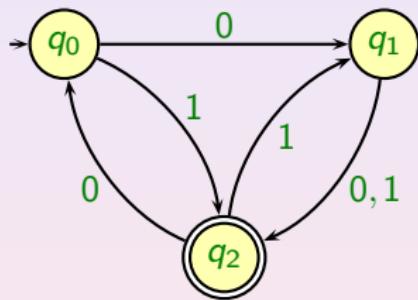
La gramática es (variable inicial q_0):

$$q_0 \rightarrow 0q_1, \quad q_0 \rightarrow 1q_2, \quad q_1 \rightarrow 0q_2, \quad q_1 \rightarrow 1q_2$$

$$q_2 \rightarrow 0q_0, \quad q_2 \rightarrow 1q_1, \quad q_2 \rightarrow \epsilon$$

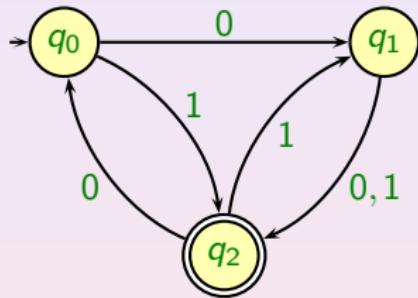
Ejemplo: Gramática Lineal por la Izquierda

Autómata de Partida:

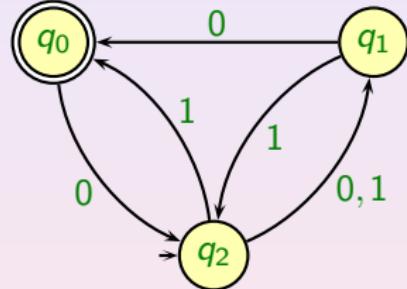


Ejemplo: Gramática Lineal por la Izquierda

Autómata de Partida:

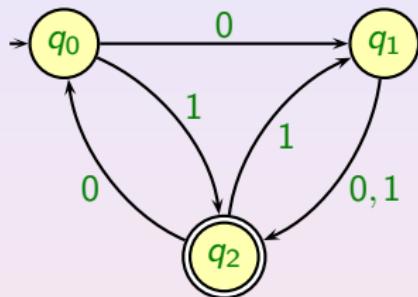


Invertimos el autómata:

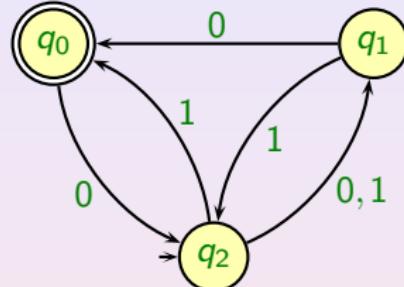


Ejemplo: Gramática Lineal por la Izquierda

Autómata de Partida:



Invertimos el autómata:



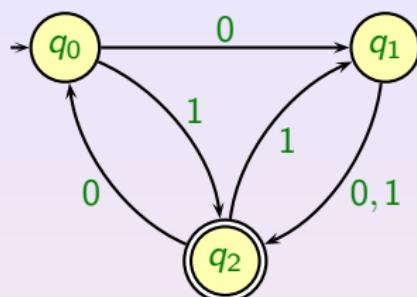
La gramática asociada a este autómata es (variable inicial q_2):

$$q_1 \rightarrow 0q_0, \quad q_2 \rightarrow 1q_0, \quad q_2 \rightarrow 0q_1, \quad q_2 \rightarrow 1q_1$$

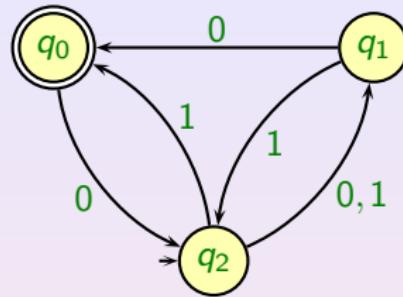
$$q_0 \rightarrow 0q_2, \quad q_1 \rightarrow 1q_2, \quad q_0 \rightarrow \epsilon$$

Ejemplo: Gramática Lineal por la Izquierda

Autómata de Partida:



Invertimos el autómata:



La gramática asociada a este autómata es (variable inicial q_2):

$$q_1 \rightarrow 0q_0, \quad q_2 \rightarrow 1q_0, \quad q_2 \rightarrow 0q_1, \quad q_2 \rightarrow 1q_1$$

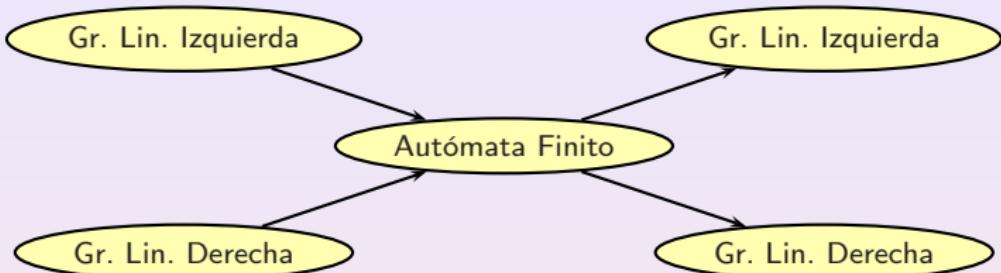
$$q_0 \rightarrow 0q_2, \quad q_1 \rightarrow 1q_2, \quad q_0 \rightarrow \epsilon$$

Invertimos la parte derecha de las producciones:

$$q_1 \rightarrow q_00, \quad q_2 \rightarrow q_01, \quad q_2 \rightarrow q_10, \quad q_2 \rightarrow q_11 \\ q_0 \rightarrow q_20, \quad q_1 \rightarrow q_21, \quad q_0 \rightarrow \epsilon$$

Equivalencia Gramáticas Lineales por la Derecha y Lineales por la izquierda

Hemos demostrado:



Componiendo dos de estas transformaciones se puede conseguir pasar de una gramática lineal por la izquierda a una lineal por la derecha que genere el mismo lenguaje y, de la misma forma, pasar de una gramática lineal por la derecha a una lineal por la izquierda que genere el mismo lenguaje.

Resultado

Dada una gramática lineal por la izquierda existe una gramática lineal por la derecha que genere el mismo lenguaje.

Dada una gramática lineal por la derecha existe una gramática lineal por la izquierda que genere el mismo lenguaje.

