FIGURAS

ELIPSE = $\boxed{\dfrac{(x-x_0)^2}{a^2}+\dfrac{(y-y_0)^2}{b^2}=1}$

centro $=(x_0, y_0)$

se desplaza "a" en "x" y b en "y"

HIPÉRBOLA =

$$\boxed{\pm\dfrac{(x-x_0)^2}{a^2}\pm\dfrac{(y-y_0)^2}{b^2}=1}$$

centro $=(x_0, y_0)$

$\left.\begin{matrix} a>0 \\ b>0 \end{matrix}\right\}$ semiejes (corrimiento)

CUADRICAS

ELIPSOIDE = $\boxed{\dfrac{\bar{x}^2}{a^2}+\dfrac{\bar{y}^2}{b^2}+\dfrac{\bar{z}^2}{c^2}=1}$

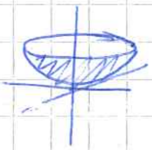
ESFERA = $\boxed{\bar{x}^2+\bar{y}^2+\bar{z}^2=1}$

$\bar{x}=(x-x_0)$
$\bar{y}=(y-y_0)$
$\bar{z}=(z-z_0)$

PARABOLOIDE = $\boxed{\bar{z}=\dfrac{x^2}{4}+y^2}$

$\bar{z}$: eje del paraboloide.

CILINDROS = $\boxed{x^2+y^2=4}$

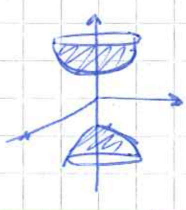


Hiperboloide de una hojas

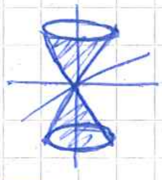
$\boxed{x^2+y^2-\dfrac{z^2}{4}=1}$ (lo que tiene signo diferente, se extiende sobre ese eje)

Hiperboloide de dos hojas / campanas.

$\boxed{-x^2-y^2+z^2=1}$

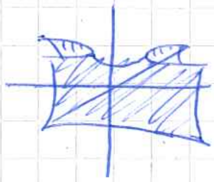


CONO = $\boxed{z^2=x^2+y^2}$



Silla de montar =
(paraboloide hiperbolico)

$\boxed{z=y^2-x^2}$



CONJUNTOS

PUNTOS =
- A es punto **interior** cuando $\exists$ $E(A) \in S$
- A es punto **exterior** cuando $\exists$ $E(A)$ que no tiene ptos de S.
- A es punto **frontera** cuando en todo $E(A)$ $\exists$ un pto de S y alguno que $\notin S$.

PARA COMPLETAR CUADRADOS

$$ax^2+bx+cy^2-dy=10.$$

$$\underline{ax^2+bx+\left(\tfrac{b}{2}\right)^2}-\left(\tfrac{b}{2}\right)^2+\overline{cy^2-dy+\left(\tfrac{d}{2}\right)^2}-\left(\tfrac{d}{2}\right)^2=10.$$

$$\left(x-\tfrac{b}{2}\right)^2+\left(y-\tfrac{d}{2}\right)^2=10+\left(\tfrac{b}{2}\right)^2+\left(\tfrac{d}{2}\right)^2$$

Conj. de nivel de f $\quad \boxed{L_k = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid f(x_1, \ldots, x_n) = k\}}$ (→ conj de nivel "k")

Polares = $\boxed{x = r \cdot \cos(\theta)}$ $\quad \boxed{y = r \operatorname{sen}(\theta)}$

Propiedades fundamentales del límite.

- si $\exists$ límite (L) es único
- $\lim\limits_{x \to A} \underbrace{f(x)}_{L \to 0} \cdot \underbrace{g(x)}_{L \to \text{acot.}} = 0$
- $\lim\limits_{x \to A} f(x)$, $\lim\limits_{x \to A} g(x)$ $\Big|$ $\lim\limits_{x \to A} f(x) \pm g(x) = L_f \pm L_g$

  $\lim\limits_{x \to} f(x)/g(x) = L_f / L_g$ con $L_g \neq 0$, $g(x) \neq 0$

Continuidad

- $\pm$, $\cdot$, $/$ de funciones continuas, son continuas (si "/", $\frac{f(x)}{g(x)}$, $g(x) \neq 0$)
- Composición de continuas es continuas.

Ec. paramétrica de la curva $= \mathcal{C} = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n \mid \bar{x} = g(t),\ t \in I\}$

Herramientas para analizar límites =

1) Cambio de variable (solo si f es cont.)
2) Límites por curva = • si $\exists L \Rightarrow \exists L_{\mathcal{C}}$

   • s $\nexists L \;\cancel{\Leftrightarrow}\; \nexists L_{\mathcal{C}}$ ($\Leftarrow$)

(definir una variable en función de la otra con una curva que pase por el pto al que tiende)

$\boxed{L_{\mathcal{C}} = \text{Límite por curva}}$

Análisis de continuidad en un pto $= \bar{A}$

1. $\exists f(\bar{A})$
2. $\exists L_{f(\bar{A})}$
3. $f(\bar{A}) = L_{f(\bar{A})}$

Derivadas (de campos)

sien $\bar{A} = (x_0, y_0)$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} = f'_x(\bar{A})$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0, y_0+h) - f(x_0, y_0)}{h} = f'_y(\bar{A})$$

} **Por definición**

$f'_x(x,y)$ = DERIVO POR REGLA PRACTICA (TABLA DE DERIVADAS) DEJANDO "Y" COMO UNA CONSTANTE.

$f'_y(x,y)$ = DERIVO POR REGLA PRACTICA DEJANDO X

DERIVADAS PARCIALES (RESPECTO DE "Y" Y RESPECTO DE "X")

DERIVADAS DIRECCIONALES $\boxed{f'(\bar{A},\check{r})}$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(\bar{A}+h\check{r}) - f(\bar{A})}{h}$$

$A = (x_0, y_0)$
$h = h$
$\check{r} = (r_i, r_j)$

$= (x_0 + h r_i, y_0 + h r_j) = \bar{A} + h\check{r}$

$= \nabla f(A) \cdot \check{r}$ (si es diferenciable) (99) ($\bar{r}$ es la direc, tengo que multiplicar por $\check{r}$, normalizado)

DEF. MODULO =

$$|PP| = \begin{cases} PP & \text{CUANDO } PP \geq 0 \\ -PP & \text{CUANDO } PP < 0 \end{cases}$$

CURVA REGULAR

$g'(t) \neq 0, \quad \forall t \in I$ → intervalo.

CUANDO DERIVO POR REGLA PRACTICA Y CUANDO POR DEF. (cociente incremental)

POR DEF =
1. CUANDO $(\bar{A}) \notin D$
2. CUANDO LA DEFINICIÓN DE f ESTA PARTIDA
3. CUANDO AL EVALUAR POR REGLA PRACTICA DE $(\bar{A})$ SE LLEGA A ALGO SIN SENTIDO ALGEBRAICO.

+ CURVAS

- $\bar{A} = g(t_0) \in \mathcal{C}$ ES UN "PTO REGULAR" DE LA CURVA CUANDO
  - $\exists\ \bar{g}(t_0)$
  - $\bar{g}'(t_0) \neq 0$
- $\bar{A} = g(t_0) \in \mathcal{C}$ ES UN "PTO SIMPLE" CUANDO ES IMAGEN DE UN UNICO VALOR DE $t_0 \in I$ (intervalo)
- UNA CURVA ES SIMPLE CUANDO TODOS SUS PTOS LO SON.

RECTA TANGENTE A UNA CURVA (PTO SIMPLE Y REGULAR) EN UN PTO $(\bar{A})$

$$\boxed{L_{TANG} = \bar{A} + \lambda g'(t)}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

→ $g(t)$ = CURVA PARAMETRIZADA.

- CUANDO $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^3$ TAMBIEN ADMITE UN PLANO NORMAL EN $(\bar{A})$, QUE ES EL PERPENDICULAR A LA TANGENTE

$$\boxed{(\bar{x} - \bar{A}) \cdot \bar{g}'(t_0) = 0}$$

si $f \in C^2(E(\bar{A})) \Rightarrow f''_{xy} = f''_{yx}$

DIFERENCIABILIDAD $\xrightarrow[\text{(implica)}]{}$ CONTINUIDAD Y DERIVABILIDAD

si f no es continua $\rightarrow$ no es diferenciable.

si $\exists\ f'_x$ y f'_y y son continuas f es diferenciable

SI ES DIFERENCIABLE

si no $\exists \Rightarrow$ no es dif.

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y) - f(x_0,y_0) - f'_x(x_0,y_0)(x-x_0) - f'_y(x_0,y_0)(y-y_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}} = 0$$

APROXIMACION LINEAL

si $f \in C^1(E(\bar{A})) \Rightarrow f$ es dif en $(\bar{A})$

$$f(\bar{x}) \cong f(\bar{A}) + \nabla f(\bar{A})(\bar{x} - \bar{A}) \quad , \bar{x} \in E(\bar{A})$$

$$f(x,y) \cong f(x_0,y_0) + f'_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f'_y(x_0,y_0)(y-y_0)$$

SUPERFICIES

$\bar{T}_0 = \bar{F}(u_0,v_0) \in \Sigma$ es PTO REGULAR de la superficie ($\rightarrow$ (superficie))

cuando
- $\bar{F}$ es diferenciable en el pto.
- $\bar{n}_0 = \bar{F}'_u \wedge \bar{F}'_v \Big|_{(u_0,v_0)} \neq 0$

$\bar{T}_0 \in \Sigma$ es PTO SIMPLE de la superficie cuando ante $\bar{F}$ es imagen de un unico $(u_0,v_0) \in D$

PLANO TANGENTE Y RECTA NORMAL A UNA SUPERFICIE EN UN PTO DE LA MISMA ($T_0 \rightarrow$ REG y SIMPLE)

Π_0 TANG.:

$\boxed{(\bar{x} - \bar{T}_0) \cdot \bar{n}_0 = 0}$ EC. CARTESIANA

$\boxed{\bar{x} = \bar{T}_0 + \alpha\, \bar{F}'_u(u_0,v_0) + \beta\, \bar{F}'_v(u_0,v_0)}$, $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$

EC. VECTORIAL

$(*_2)$ PTO — VECTOR NORMAL $(\nabla f$ EXT.$)$ $(*_1)$

Γ_0 ORTOGONAL $\rightarrow$ $\boxed{\bar{x} = \bar{T}_0 + \lambda \bar{n}_0}$

PLANO TANGENTE A LA GRAFICA EN UN (x_0, y_0)

$$z = f(x_0,y_0) + f'_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f'_y(x_0,y_0)(y-y_0)$$

RECTA NORMAL A LA ~~curva~~ SUPERF. EN ESE PTO

$(*_1)$ $\vec{V}_d = (f'_x(x_0,y_0), f'_y(x_0,y_0), -1)$

$(*_2)$ PTO DE PASO $= (x_0, y_0, f(x_0,y_0))$

RECTA $= L: \bar{x} / \lambda \bar{V}_d +$ PTO DE PASO

Funciones compuestas

si "g" es diferenciable en $(\bar{A})$ y f es diferenciable en $g(\bar{A})$ entonces $h = f \circ g$ es diferenciable en A siendo:

$$Dh(A) = Df(g(A)) \cdot Dg(A)$$

Funciones Implicitas

① $f(A) = 0$

② $f \in C^1, E(A)$

③ $\nabla f(\bar{A}) \neq 0$

③ queda definida una curva que pasa por $(\bar{A})$

si $f'_x(\bar{A}) \neq 0 \Rightarrow x = f(yz)$

si $f'_x(\bar{A}) = 0 \Rightarrow$ NO SE PUEDE ASEGURAR

RECTA TANGENTE A UNA CURVA DADA POR 2 ECUACIONES DE FORMA IMPLICITA EN UN PTO $\bar{A}$

$$0 \neq \nabla f(\bar{x})\Big]_{\bar{A}} \times \nabla G(\bar{x})\Big]_{\bar{A}} = V_d \rightarrow L_{TANG}: \bar{x} / \lambda(V_d) + \bar{A}$$

Ej = $F_1(x,y,z,u,v)$, $F_2(x,y,z,u,v)$ define $u(x,y,z)$, $v(x,y,z)$

si quiero $\dfrac{\partial v}{\partial z} = - \dfrac{\dfrac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(u,z)}(\bar{A})}{\dfrac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(u,v)}(\bar{A})}$ → calculamos este determinante → calculado en ③

DERIVADAS DIRECCIONALES MÁXIMAS / MÍNIMAS

$V_{máx}$ $\dfrac{\nabla f(\bar{A})}{\|\nabla f(\bar{A})\|}$ $V_{mín} = -\dfrac{\nabla f(\bar{A})}{\|\nabla f(\bar{A})\|}$ (solo es vector cuando tiene EN UNA DIRECCIÓN)

vector

VALOR MAX $= \|\nabla f(A)\|$ VALOR MÍN $= \|\nabla f(\bar{A})\|$

Vector nulo $\dfrac{\nabla f(A)}{\|\nabla f(A)\|} \begin{cases} + - \\ + - \end{cases}$ (DERIVADA DIRECCIONAL siempre es versor)

SI ME ROBAN LAS DERIVADAS... QUE HAGO?

$P(x,y) = PP \rightarrow$ (Polinomio de TAYLOR)

$PP'_x\Big]_{(P_0)} = f'_x\Big]_{(P_0)}$ $f'_y\Big]_{(P_0)} = PP'_y\Big]_{(P_0)}$ $PP\Big]_{(P_0)} = f\Big]_{(P_0)}$

PLANO HORIZONTAL (con $z = cte$ o $\parallel (0,0,1)$) Pi

Tengo que pedir que $\boxed{f'_x = 0}$ y $\boxed{f'_y = 0}$

MATRIZ JACOBIANA

$F(x,y,z) = (\sim i, \sim j, \sim k)$

$$DF(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial i}{\partial x} & \frac{\partial i}{\partial y} & \frac{\partial i}{\partial z} \\ \frac{\partial j}{\partial x} & \frac{\partial j}{\partial y} & \frac{\partial j}{\partial z} \\ \frac{\partial k}{\partial x} & \frac{\partial k}{\partial y} & \frac{\partial k}{\partial z} \end{pmatrix}$$

EXTREMOS

Ptos críticos:
- $\bar{A}$ donde la f no es dif.
- Ptos estacionarios = donde las deriv. parciales se anulan

$$Hf = \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{vmatrix} = d$$

f''_{xx}: si < 0 es MÁX, si es > 0 es MÍN

d:
- $> 0 \rightarrow$ EXTREMO
- $< 0 \rightarrow$ NO ES EXTREMO
- $= 0$ (NO SE NADA)

PASOS PARA EXTREMOS.

- PTOS CRITICOS
- ARMO el (Hf)
- CALCULO DETERMINANTE

$$Hf = \begin{pmatrix} f''_{xx} & \cdots & f''_{xn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f''_{mx} & \cdots & f''_{mn} \end{pmatrix}$$

CRITERIO DE EXTREMO CON H de (3x3)

$$Hf \neq 0 \equiv \begin{cases} H_1 < 0,\ H_2 > 0, \ldots \ (1) \\ H_1 > 0,\ H_2 > 0, \ldots \ (2) \\ \text{OTRA COSA } (3) \end{cases}$$

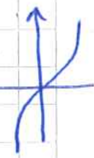
(1) f(A) es máx local
(2) f(A) es mín local
(3) no es extremo.

si $Hf = 0$ (NO SE NADA)

sen y cos hiperbolicos.

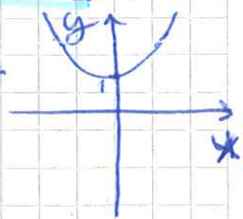
$$f(x) = \operatorname{sen} h(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

→ simetrica respecto del origen
→ $f(-x) = -f(x)$ → Impar
→ si lo derivo $[\cos h(x)]$



$$f(x) = \cos h(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

→ $f(-x) = f(x)$ → Par
→ simetrico del eje y



RECURSOS PARA SACAR LIMITES

- FACTORIZANDO
- 0. ACOTADA → FUNCIONES ACOTADAS

$$f(x,y) = \frac{y^2}{x^2+y^2} \qquad g(x,y) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$h(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

- Limite por curva (sirve para ver que no hay lim)

si son (≠) ⇒ ∄ lim
si son (=) ⇒ no puedo decir nada, pero si existiese sería el valor que me dio.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{y} = \lim_{(x,mx^2)} \frac{x^2+(mx^2)^2}{mx^2} =$$

$(y = mx^2)$ $(m \neq 0)$

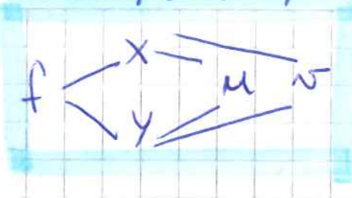
$$\lim_{(x,mx^2)} \frac{x^2+m^2x^4}{mx^2} = \frac{1+m^2x^2}{m} = \frac{1}{0} = \nexists$$

- CAMBIO DE VARIABLE + (L'H) ;)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = 1$$

- LIMITES CONOCIDOS
- Limites sucesivos → $\lim_{x\to x_0}\left(\lim_{y\to y_0} f(x,y)\right) \wedge \lim_{y\to y_0}\left(\lim_{x\to x_0} f(x,y)\right)$

$f(x,y)$ $\quad x(u,v)$, $y(u,v)$ $\rightarrow f'_u$



$$\frac{df}{dv} = f'_x(x,y)\, x'_{v}(u,v) + f'_y(x,y) \cdot y'_{v}(u,v)$$

$$\boxed{\frac{df}{du} = f'_x(x,y)\, x'_u(u,v) + f'_y(x,y)\, y'_u(u,v)}$$

DEFINICION PARA DERIVAR FUNCIONES IMPLICITAS

$$\begin{cases} x^2 + \ln(x+z) - y = 0 \\ yz + e^{xz} - 1 = 0 \end{cases} \quad \text{si} \quad \begin{cases} y = y(x) \\ z = z(x) \end{cases}$$

$$\left.\begin{cases} 2x + \dfrac{1}{x+z}(1 + z'_x) - y'_x = 0 \\ y'_x z + y z'_x + e^{xz}(z + x z'_x) = 0 \end{cases}\right|_{(P_0)} \quad (x' = 1)$$

$=$ hallo $z'_x(P_{0_z})$ y $y'_x(P_{0_y})$

$$\text{vd } r_{tg} = \bar{N}_{plano} = (1, y'_x, z'_x)\Big|_{(P_0)}$$

TAYLOR DE ORDEN 2

Relaciones ~~IDENTIDADES~~ TRIGONOMETRICAS

- $\text{sen}(2x) = 2\,\text{sen}(x)\cos(x)$
- $\text{sen}^2(x) + \cos^2(x) = 1$
- $tg(x) = \dfrac{\text{sen}(x)}{\cos(x)}$
- $\cot g(x) = \dfrac{\cos(x)}{\text{sen}(x)}$
- $\sec(x) = \dfrac{1}{\cos(x)}$
- $\text{cosec}(x) = \dfrac{1}{\text{sen}(x)}$

Fin Analisis II (1er PARCIAL) $\rightarrow$ (unico)

ECUACIONES DIFERENCIALES | AM II POST PARCIAL

LAS SOLUCIONES SE DEFINEN EN UN INTERVALO CONTINUO, NO EN UNIONES DE INTERVALOS !

SOLUCION GENERAL → de ORDEN "n" → tiene "n" ctes ARBITRARIAS → NO SE PUEDEN REAGRUPAR.

→ GRAFICA: FAMILIA DE CURVAS → CANTIDAD DE CTES = ORDEN DE INFINITUD

→ SG

SOLUCIÓN SINGULAR → AQUELLA QUE NO SURGE DE LA SG

$$\text{EDO} \xrightarrow{\text{RESOLVER EDO}} \text{SG} \xrightarrow{\text{(DATOS iniciales)}} \text{SP} \to \text{"SOLUCION PARTICULAR"}$$

$$\text{SG} \xrightarrow{\text{FORMAR EDO}} \text{EDO}$$

FORMAR EDO:

DATO: SG ⇒ DERIVO TANTAS VECES COMO CTES TENGA

⇒ BUSCO llegar A UNA expresión sin las ctes

Del TIPO

VARIABLES SEPARABLES

CUANDO PUEDE EXPRESARSE

$$\boxed{g(y)\,dy = h(x)\,dx} \underset{\text{(integro)}}{\Longrightarrow} \boxed{G(y) = H(x) + C}$$

IMPORTANT FOR PRACTICE

r tg: $\boxed{y - y_0 = y'_0 (x - x_0)}$

r normal

$$\boxed{y - y_0 = \frac{-1}{y'_0}(x - x_0)}$$

TRAYECTORIAS ORTOGONALES

DOS FAMILIAS, simplemente infinitas, de curvas que son ortogonales en cada pto. q' se tocan/CORTAN, es decir que sus r. tgs en este pto. son (⊥) ORTOGONALES

Procedimiento: dada F_1 hallar F_2 → (flia ⊥ a F_1)

1) DATO F_1 A implícitas $F_1(x, y, c) = 0$

2) FORMAR EDO de F_1: $G_1(x, y, y') = 0$

3) REEMPLAZAR y' POR $-\frac{1}{y'}$: $G(x, y, -\frac{1}{y'}) = 0$: EDO de F_2

4) Resuelvo EDO 2 ⇒ $H(x, y, k) = 0$ obtengo F_2 → IMPORTANT: poner ≠ cte entre DATO Y RESULTADO

Del TIPO ("")

Homogéneas

: f escalar $f(tx, ty) = f(x, y)$ ⇒ f homogénea de grado '0' (cero)

obs: $f(tx, ty) = t^k f(x, y)$ ⇒ Homogénea de grado 'k'

Procedimiento: 1) DAR VUELTA LA HOJA PARA ver "2)"

2) $\boxed{y' = F(x,y)}$ llevamos a esta manera de expresar y verificamos que sea homogenea por definición

3) Reemplazo a realizar: $\boxed{y = x\,z(x)}$ => Reemplazo en (2) → $\boxed{y' = z(x) + x z'(x)}$

obtengo $\boxed{z + x z' = f(x, xz)}$ y por def de Homogéneo $\boxed{f(x.1, x.z) = f(1,z)}$

3) Calculamos la nueva EDO y a "y" con $\boxed{z = y/x}$ • muchas veces no se puede despejar "y"

COLOR DATA: $\# \int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)|$

Del tipo (" ")

Lineal: LLEVAR SIEMPRE A FORMA ESTANDAR!! $\boxed{y' + P(x)\,y = q(x)}$ (1)

Procedimiento (1)

1) Proponemos $\boxed{y = \mu(x)\,v(x)}$, reemplazando en (1) una vez derivado, sacando factor común en e imponiendo uno igual a cero se llega a:

$$\begin{cases} v' + P(x)\,v = 0 \longrightarrow \text{VAR SEP: obtengo una (SP!) y remplazo abajo} \\ \mu' v = q(x) \longrightarrow \text{usando } v\text{, obtengo } \mu \text{ por VAR SEP, } \mu \text{ (SG)!} \end{cases}$$

2) Finalmente obtengo $\boxed{y = \mu v}$

Procedimiento (2): FACTOR INTEGRANTE

$$\boxed{y = e^{-\int P(x)\,dx} \cdot \left[\int q(x)\, e^{\int P(x)\,dx}\,dx + C\right]}$$

a) factor integrante $= e^{\int P(x)\,dx} = \mu(x)$

b) $P(x)$ y $q(x)$ continuas

c) c_1) multiplico ambos miembros por el factor int

c_2) $\mu(x)\,[y' + P(x)\,y] = [\mu(x)\,y]'$

c_3) $\int [\mu(x)\,y]' = \int {/\!/\!/}\,dx$

Del tipo (" ")

TOTAL EXACTA $\boxed{\nabla f(x,y)\,(dx\,dy)} \iff \boxed{f'_x(x,y)\,dx + f'_y(x,y)\,dy = 0}$

$\boxed{SG}$: $\boxed{f(x,y) = cte}$

Me pregunto si el vector que tengo es gradiente: $\bar{F}(x,y) = (\ldots, \ldots)$
defino $\bar{F}$ si va de un dominio abierto y conexo y su Jacobiana $DF(x,y)$ es simetrica => es un campo de gradiente

⇒ obtenemos un sistema de ecuaciones ⇒ vamos integrando y las constantes son $k(x)$ ó $K(y)$ una vez despejado todo recordar que la S.G es de la forma $\boxed{f(x,y) = cte}$ muchas veces no puedo despejar "y"

Del tipo (" "): Reducible a total exacta: cuando NO cumplen el "criterio de exactitud"

el Jacobiano no es simétrico $\boxed{P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0}$

⇒ sucede que $P'_y(x,y) \neq Q'_x(x,y)$

Multiplicamos ambos lados por el factor integrante

$$\boxed{\mu(x)\,P(x,y)\,dx + \mu(x)\,Q(x,y)\,dy = 0} \quad (1)$$

, operando se puede obtener

$$\boxed{\mu(x) = e^{\int \frac{P'_y - Q'_x}{Q}\,dx}}$$

$$\boxed{\mu(y) = e^{\int \frac{Q'_x - P'_y}{P}\,dy}}$$

uso dependiendo si el cociente depende de 'x' o 'y'

remplazo en (1) y resuelvo la total exacta.

Longitud de curva

$$\boxed{Long(\mathcal{C}) = \int_a^b \|g'(t)\|\,dt}$$

siendo g la parametrización continua de $\mathcal{C}$

Diferencial de arco: ($\mathcal{C}$ regular y $\bar{g}'$ contin.)

- Diferencial escalar de longitud de ~~curva~~ arco de curva $\boxed{ds = \|g'(t)\|dt}$

- Diferencial vectorial de la longitud de arco de curva $\boxed{d\bar{s} = g'(t)\,dt}$

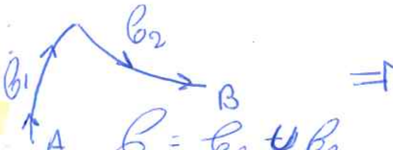
Integral de línea ó curvilínea

f campo escalar: $$\boxed{\int_{\mathcal{C}} f.ds = \int_a^b F(\bar{g}(t)).\|g'(t)\|\,dt}$$

f campo vectorial (circulación): $$\boxed{\int_{\mathcal{C}} \bar{F}.d\bar{s} = \int_a^b \bar{F}(\bar{g}(t)).g'(t)\,dt}$$

Tener cuidado con la orientación de la parametrización

Propiedad de int de lín



$$\Rightarrow \boxed{\int_{\mathcal{C}} f ds = \int_{\mathcal{C}_1} f ds + \int_{\mathcal{C}_2} f ds}$$

$\mathcal{C}$ es suave a trozos.

Nomenclatura:

- $\oint_{\mathcal{C}}$: Arco de curva cerrada.

$\oint_{\mathcal{C}^+}$ $\mathcal{C}^+$: Recorrer $\partial D / D$ quede a la izquierda

- $\mathcal{C} = \partial D$: frontera de D

Independencia del Camino

$\bar{f}$ admite función potencial / es campo conservativo / es campo de gradiente en un D S.A $\Longleftrightarrow$ $D\bar{F}(\bar{x})$ es simetrica y continua, es decir

$\boxed{\bar{f} = \nabla \phi}$.

$$\boxed{\int_{\mathcal{C}_{\bar{A}\bar{B}}} \bar{f} \cdot d\bar{s} = \phi(\bar{B}) - \phi(\bar{A})}$$

Obs: si $\bar{f}$ es f. potencial $\Rightarrow$ $\boxed{\oint_{\mathcal{C}} \bar{f} \cdot d\bar{s} = 0}$

y si $\underbrace{\int_{\mathcal{C}} \bar{F} \cdot d\bar{s} = 0 \Rightarrow \underbrace{\phi(\bar{B}) - \phi(\bar{A})}_{=0}}_{\bar{f} \text{ es función potencial}}$ por lo tanto $\boxed{\phi(\bar{B}) = \phi(\bar{A})}$

Def de Conj. equipotenciales

↳ Conj. de nivel de mi función $\phi(\bar{x})$

Líneas de campo vectorial: son aquellas que pto a pto, el campo es tg a la línea $\Rightarrow$ $\boxed{\bar{f}(\bar{g}(t)) = \bar{g}'(t)}$ o bien $\boxed{\bar{f} \parallel d\bar{s}}$ con ~~$d\bar{s} = (dx, dy)$~~

$d\bar{s} = (dx, dy) \wedge \bar{f}(x,y) = (P(x,y), Q(x,y)) \Rightarrow \boxed{\dfrac{dx}{P(x,y)} = \dfrac{dy}{Q(x,y)}}$ EDO

OBS!: Las líneas de campo vect. y los conj equipotenciales son trayectorias ortogonales!

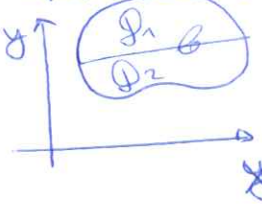
- $\bar{f}$ da la orientación de la línea.

Integral Doble

$$\boxed{\iint_{D} 1 \, dxdy = \text{area}(D)}$$

Área de una D

Propiedad



$$\boxed{\iint_{D} f(x,y)\,dxdy = \iint_{D_1} f(\bar{x})\,d\bar{x} + \iint_{D_2} f(\bar{x})\,d\bar{x}}$$

Cambio de Variables

$$\iint_{D_{xy}} f(\bar{x})\,dxdy = \iint_{D_{uv}} f(\overbrace{x(u,v), y(u,v)}^{h(u,v)}) \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| du\,dv$$

Modulo del Determinante.

$$J(u,v) = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix}$$

Resolver una integral doble

$$\boxed{\int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dy} \;\vee\; \boxed{\int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\,dx}$$

según mi conveniencia

Caso polares

$$\boxed{J(r,\theta) = r}$$

$$\boxed{\iint_{D_{xy}} f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{D_{r\theta}} f(r\cos(\theta), r\,sen(\theta))\,r\,dr\,d\theta}$$

Caso elipses

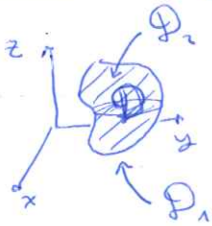
$$\begin{cases} x - x_0 = a\,r\cos(\theta) \\ y - y_0 = b\,r\,sen(\theta) \end{cases}$$

$$\boxed{J(r,\theta) = abr} \qquad \boxed{\frac{x^2}{(ar)^2} + \frac{y^2}{(br)^2} = 1}$$

$$\boxed{0 \leq r \leq 1}$$

Integrales Triples

$$\boxed{\iiint_D 1\,dx\,dy\,dz = Vol(D)}$$



Propiedad:

$$\boxed{\iiint_D dx\,dy\,dz = \iiint_{D_1} dx\,dy\,dz + \iiint_{D_2} dx\,dy\,dz}$$

Como resolver una $\iiint$

$$\boxed{\iiint_D f(\bar{x})\,dx\,dy\,dz = \iint_{D_{xy}} dx\,dy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz}$$

Coordenadas cilíndricas

usamos polares en el plano de proyección

$$\begin{cases} x = r\cos(\theta) \\ y = r\,sen(\theta) \\ z = z \end{cases} \qquad J(r,\theta,z) = r$$

$$r^2 = x^2 + y^2, \quad z = z, \quad \theta \left\{ \begin{array}{l} \text{idem} \\ \text{polares} \end{array} \right.$$

Coordenadas Esféricas.

$$\begin{cases} x = \rho\,sen(\varphi)\cos(\theta) \\ y = \rho\,sen(\varphi)\,sen(\theta) \\ z = \rho\cos(\varphi) \end{cases} = \begin{cases} \rho^2 = x^2 + y^2 + z^2 \\ \varphi = \arccos\left(\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right) \\ \theta = \text{idem polares} = \operatorname{arctg}(y/x) \end{cases}$$

$$J(\rho,\varphi,\theta) = \rho^2 sen(\varphi)$$

$$\rho \geq 0 \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$0 \leq \varphi \leq \pi$$

Superficies Coordenadas

$\boxed{\text{Esferas} \rightarrow \rho = cte}$

$\boxed{\text{Semiplano} \rightarrow \theta = cte}$

$\boxed{\text{Conos} \rightarrow \varphi = cte}$

Orden conveniente de integración

$$\boxed{\int d\theta \int d\varphi \int \rho^2 sen(\varphi)\,d\rho}$$

Area de una Superficie

$$\text{área}(\Sigma) = \iint_{D_{uv}} \|\bar{\sigma}'_u \wedge \bar{\sigma}'_v\| \, du\,dv$$

$$d\sigma = \|\bar{\sigma}'_u \wedge \bar{\sigma}'_v\| \, du\,dv$$

Integral de Superficie de campo escalar

$$\iint_{\Sigma} f \, d\sigma = \iint_{D} f(\sigma(u,v)) \, \|\sigma'_u \wedge \sigma'_v\| \, du\,dv$$

$\sigma(u,v)$ = una parametrización de Σ

Integral de Superficie de un campo Vectorial (flujo)

$$\iint_{\Sigma} \bar{f} \cdot \check{n} \, d\sigma = \iint_{D_{uv}} \bar{f}(\sigma(u,v)) \cdot (\sigma'_u \wedge \sigma'_v) \, du\,dv$$

Calculo de integrales de Superficie con nabla (∇)

$$\iint_{\Sigma} f \, d\sigma = \iint_{D_{xy}} \left[f \, \frac{\|\nabla G\|}{|G'_z|} \right]_{z=z(x,y)} dx\,dy \longrightarrow f \text{ escalar}$$

$$\iint_{\Sigma} \bar{f} \cdot \check{n} \, d\sigma = \iint_{D_{xy}} \left[\bar{f} \cdot \frac{\nabla G}{|G'_z|} \right]_{z=z(x,y)} dx\,dy \longrightarrow \bar{f} \text{ vectorial}$$

Caso particular

$\Sigma \parallel xy$ o xz o yz

$$\iint_{D_{xy}} \left[\bar{f} \cdot (0,0,1) \right]_{z=z_0} dx\,dy$$

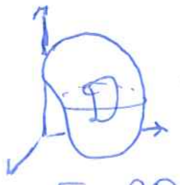
Def.: de Conjunto simplemente conexo: Toda $\mathcal{C}$ cerrada que dibuje en el conjunto (pudiéndola mover), la puedo degenerar en un punto.

Función Potencial: (ϕ)

Si DF es continua y simétrica pero no es simplemente conexo, si por una curva que rodea al punto o región que molesta la $\boxed{\oint \bar{f} \cdot d\bar{s} = 0}$ $\Rightarrow$ Hay función potencial

Teoremas Integrales

Gauss (Divergencia)



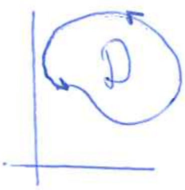
$\Sigma = \partial D$

$$\Rightarrow \boxed{\oiint_{\partial D} \bar{f} \circ \check{n}\, d\sigma = \iiint_{D} \operatorname{div}(\bar{f})\, dx\,dy\,dz}$$

Hipotesis:

1. $f \in C^1$ en D y Σ (∂D)
2. D cuerpo acotado y volumen nulo
3. Σ superficie cerrada, simple, suave a trozos y orientada en sentido positivo.

Green:



$$\Rightarrow \boxed{\oint_{\mathcal{C}^+} \bar{f} \circ d\bar{s} = \iint_{D} \overbrace{(Q'_x - P'_y)}^{3^{er}\ \text{comp. del rotor}}\, dx\,dy}$$

$\bar{f} = (P, Q)$

Hipotesis:

1. $f \in C^1$ en D y ∂D
2. D acotado, ∂D area nula
3. ∂D curva, cerrada, simple, suave a trozos y orientada en sentido positivo

Stokes (Rotor):

$$\Rightarrow \boxed{\oint_{\mathcal{C}} \bar{f} \circ d\bar{s} = \iint_{\Sigma} \operatorname{rot}(f) \circ \check{n}\, d\sigma}$$

Hipotesis

1. $f \in C^1$ en Σ y $\mathcal{C}$
2. $\mathcal{C}$ cerrada, simple y SAT.
3. Σ abierta, "cualq" que tenga de borde a $\mathcal{C}$ SAT y orientable

$$\text{Rotor}(\bar{f}) = \begin{vmatrix} \check{i} & \check{j} & \check{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \nabla \wedge \bar{f}$$

$$\text{divergencia}(\bar{f}) = (\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z) \cdot (P\ Q\ R) = \nabla . \bar{f}$$

$$\text{gradiente}(\bar{f}) = P\,(\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z) = \nabla f$$

f solenoidal $\longrightarrow \operatorname{div}(\bar{f}) = 0 \longrightarrow$ "sus lineas de campo no tienen ni origen ni fin"

f irrotacional $\longrightarrow \operatorname{rot}(\bar{f}) = 0$

f armonica $\longrightarrow \operatorname{Lapl}(f) = 0$

Metodo de Lagrange para buscar Pto Criticos

Tengo $f(a,b)$ una funcion y (R) una restricción, $(R) = 0$

$$G(a,b,\lambda) = f(a,b) - \lambda(R)$$

$$\begin{cases} G'_a = 0 \\ G'_b = 0 \\ G'_\lambda = 0 \end{cases}$$

Propiedades de los logaritmos

definición: $\log_a b = c \Rightarrow b = a^c$

① $n^{\log_n(x)} = x$

② $\log(a \cdot b) = \log(a) + \log(b)$

③ $\log\left(\frac{a}{b}\right) = \log(a) - \log(b)$

④ $\log(a)^b = b \cdot \log(a)$

⑤ $\log(\sqrt[b]{a}) = \frac{\log(a)}{b}$

EXTREMOS CONDICIONADOS

① PARAMETRIZO LA RESTRICCIÓN

② LA EVALUO en la funcion $\to$ función de 1 VAR.

③ A ESA FUNCIÓN LE CALCULAS LA DERIVADA $F'(t) = 0$ (Y LA IGUALAS A "0") $\to$ obtenes Ptos criticos. (1 nº)

④ $F''(t) \leftarrow$ CALCULAS Y EVALUO en Ptos $\to$ $(F''(\text{Pto})\ldots)$

⑤ si $F''(t_0) > 0 \Rightarrow$ MÍN   si $F''(t_1) < 0 \Rightarrow$ MÁX