

**Grado en Física**

FÍSICA COMPUTACIONAL

MISIÓN A MARTE

Autor:

Alberto Mochón Paredes

## Resumen

En este trabajo se ha realizado una simulación de la misión espacial de una nave desde la Tierra hasta Marte usando la órbita de Hohmann. El sistema se modela a través de las ecuaciones de Hamilton, que describen el movimiento de la nave bajo la influencia gravitatoria del Sol, la Tierra y Marte. Se utilizan las distancias entre la nave y los planetas según la regla del coseno y se aplican factores de reescalado para mejorar la precisión numérica. Se utiliza el método de Runge-Kutta de cuarto orden para resolver las ecuaciones del movimiento y obtener la órbita. Los resultados muestran que la misión tiene una duración de 391,2 días, con una energía total consumida de 1497,545 MJ/kg.

## Índice

<b>1. Fundamento teórico</b>	<b>1</b>
1.0.1. Órbita de Hohmann . . . . .	2
<b>2. Metodología</b>	<b>3</b>
2.0.1. Resolución del problema . . . . .	3
<b>3. Resultados y discusión</b>	<b>3</b>
<b>4. Conclusiones</b>	<b>4</b>

## 1. Fundamento teórico

Tenemos un problema de tres cuerpos. El hamiltoniano del sistema considerando la interacción de una nave de masa  $m$  con el Sol, la Tierra y Marte es el siguiente:

$$H = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\phi^2}{2mr^2} - \frac{GmM_S}{r} - \frac{GmM_T}{r_T(r, \phi, t)} - \frac{GmM_M}{r_M(r, \phi, t)} \quad (1)$$

Donde  $M_S$ ,  $M_T$  y  $M_M$  son las masas del Sol, la Tierra y Marte respectivamente.  $r$  es la distancia de la nave al sol,  $r_T(r, \phi, t)$  es la distancia de la nave a la Tierra y  $r_M(r, \phi, t)$  es la distancia de la nave a Marte.

Las distancias entre la nave y los respectivos planetas se pueden determinar utilizando la regla del coseno:

$$r_T(r, \phi, t) = \sqrt{r^2 + d_T^2 - 2rd_T \cos(\phi - \phi_T)} \quad (2)$$

$$r_M(r, \phi, t) = \sqrt{r^2 + d_M^2 - 2rd_M \cos(\phi - \phi_M)} \quad (3)$$

Donde  $d_M$  y  $d_T$  son los radios de las órbitas circulares de Marte y la Tierra alrededor del sol respectivamente, puesto que son órbitas circulares  $\phi_T = \omega_T * t$  y  $\phi_M = \omega_M^t + desfase$ .

Para minimizar los errores se ha reescalado el espacio en un factor D y el tiempo en un factor H.

En (1) el término  $\frac{m}{2}$  sale factor común y como es una constante proporcional a la masa del cohete no afecta a las ecuaciones de movimiento. Aplicando las ecuaciones de Hamilton, obtenemos las ecuaciones del movimiento del sistema (4), (5), (6) y (7). Las ‘’’ indican que las variables están reescaladas.

$$\dot{r} = p'_r \quad (4)$$

$$\dot{\phi} = \frac{p'_\phi}{r'^2} \quad (5)$$

$$\dot{p}'_r = \frac{p'^2_\phi}{r'^3} - G' \left( \frac{M_S}{r'^2} + \frac{M_T}{r_T^3} (r' - d'_T \cos(\phi - \phi_T)) + \frac{M_M}{r_M^3} (r' - d'_M \cos(\phi - \phi_M)) \right) \quad (6)$$

$$\dot{p}'_\phi = -G' \frac{M_T}{r_T^3} r' d'_T \sin(\phi - \phi_T) - G' \frac{M_M}{r_M^3} r' d'_M \sin(\phi - \phi_M) \quad (7)$$

### 1.0.1. Órbita de Hohmann

El factor de reescalado para el espacio elegido es D=2000000m y para el tiempo H=1h. Se ha decido escoger una D que no sea demasiado grande para evitar dividir entre números cercanos a 0 y que se pierda información.

Para calcular la velocidad que debe llevar la nave espacial en el punto A para alcanzar la órbita exterior en B, podemos aplicar las propiedades centrales y conservativas de la fuerza de atracción.

Debido a la propiedad de fuerza central, el momento angular se conserva y tiene el mismo valor en A y en B  $mr_A v_A = mr_B v_B$

Por la propiedad de fuerza conservativa, la energía se conserva en todos los puntos de la trayectoria, por lo que es la misma en A y en B.

$$mv_A^2/2 - G \frac{Mm}{r_A} = mv_B^2/2 - G \frac{Mm}{r_B}$$

Dado que conocemos los valores de  $r_A$  y  $r_B$ , podemos utilizar este par de ecuaciones para determinar las incógnitas  $v_A$  y  $v_B$ .

$$v_A = \sqrt{\frac{2GM r_B}{r_A(r_A + r_B)}} \quad v_b = \sqrt{\frac{2GM r_A}{r_B(r_A + r_B)}} \quad (8)$$

La energía de la nave espacial es constante en todos los puntos de la trayectoria y se puede expresar como:

$$E = 1/2mv^2 - GMm/r$$

La energía que debemos suministrar a la nave espacial en la posición A para que pase de la órbita circular a la trayectoria de transferencia es la diferencia E2 - E1, que se puede calcular como:

$$\Delta E = E2 - E1 = -GMm(1/r_B - 1/r_A)$$

## 2. Metodología

En este caso tenemos más interés en la precisión que en la conservación de la energía con lo que se va a aplicar el método Runge-Kutta de cuarto orden. El algoritmo del método RK4 se puede resumir en los siguientes pasos: Dado un punto inicial  $(t_0, y_0)$  y un paso de tiempo  $h$ . Calcular  $k_1 = f(t_0, y_0)$ , donde  $f$  representa la función que define la EDO. Calcular  $k_2 = f(t_0 + h/2, y_0 + (h/2)*k_1)$ . Calcular  $k_3 = f(t_0 + h/2, y_0 + (h/2)*k_2)$ . Calcular  $k_4 = f(t_0 + h, y_0 + h*k_3)$ . Calcular la pendiente promedio  $k = (1/6) * (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$ . Actualizar el punto  $y(t_0 + h) = y_0 + h * k$ . Actualizar el tiempo  $t_0 = t_0 + h$ . En este caso tendremos que hacer esto con cuatro variables simultáneamente de forma iterativa ya que tenemos cuatro ecuaciones del movimiento.

### 2.0.1. Resolución del problema

En primer lugar se planteó la posibilidad de lanzar un cohete desde la Tierra con la velocidad de Hohmann pero las ecuaciones de la órbita de Hohmann desprecian la interacción cohete-Tierra. Por lo tanto lo primero que el cohete debe hacer es alejarse lo suficiente de la Tierra como para considerar esta interacción nula. La velocidad inicial del cohete no tiene que ser necesariamente la de escape de la tierra ya que no pretendemos escapar de su campo, solo alejarnos lo suficiente. Una vez estemos en condiciones de entrar en la órbita de Hohmann debemos tener en cuenta que en el punto A  $p_r = 0$  con lo que o buscamos un punto en el que este sea aproximadamente nulo o lo imponemos con los motores del cohete. En nuestro caso se ha elegido la primera opción para mayor eficiencia de la energía. Por último para entrar en la órbita de Marte nos encontramos con la misma situación, lo más conveniente es que  $p_r = 0$  aunque en este caso no será problema ya que para  $r = r_B$  esta condición se cumple. La velocidad necesaria será la velocidad orbital respecto al Sol más la velocidad orbital respecto a Marte.

$$v_m = \sqrt{GM_S/d_M} + \sqrt{GM_M/r_M} \quad (9)$$

## 3. Resultados y discusión

Como condiciones iniciales se ha elegido un ángulo en el plano de  $30^\circ$  y una velocidad inicial de  $v = v_{escape} = \sqrt{2GM_T/R_T}$ . Añadiendo los impulsos en los instantes previamente discutidos se obtiene la siguiente órbita 1. En este caso tenemos una órbita de Hohmann algo extraña porque lo normal sería que el punto inicial fuera el afelio o perihelio pero esto es igual de válido como se observa en la imagen. Si probamos con una velocidad inicial menor si obtenemos una órbita de Hohmann más común pero esta está perturbada por la tierra. En la figura 2 se puede ver como el afelio coincide la órbita de Marte con lo que sería mucho más complicado entrar en órbita. Para comprobar que el cohete ha entrado en órbita se ha representado  $\vec{r} = r_{cohete} - r_{Marte}$  en función de  $t$  obteniéndose la figura 3 en la cual se observa como el cohete se aproxima y acaba entrando en órbita y finalmente se mantiene estable después de haberle imprimido el impulso necesario.

El tiempo necesario para entrar en órbita con Marte en mi caso ha sido de 9388\*Hs, teniendo en cuenta que el reescalado en el tiempo es de una hora se obtiene un tiempo de misión de 391,2 con dos días. Si hubiéramos planteado la órbita de otra forma la misión habría durado menos pero habría sido más difícil llevarla a cabo.

Respecto de la energía consumida esta se puede averiguar haciendo una sencilla representación. En la figura 4 se representa la energía total  $E$ , la cinética  $T$  y la potencial  $V$ . El hecho de que la

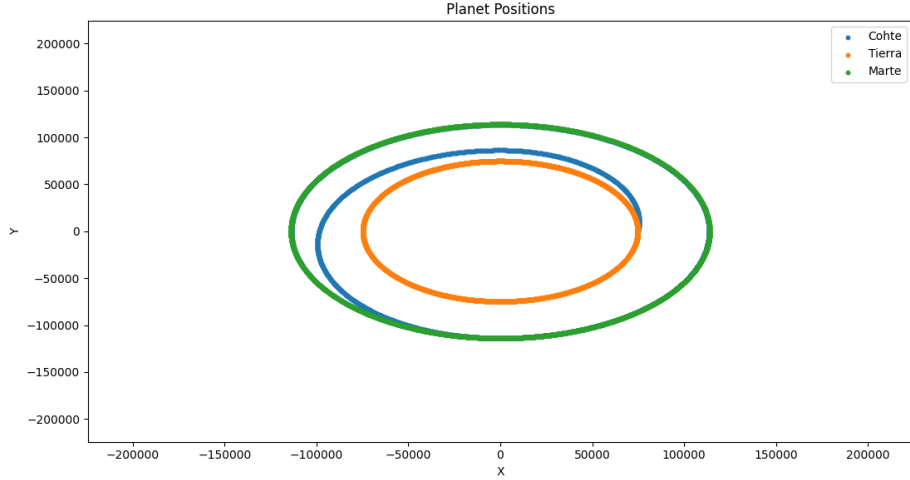


Figura 1: Orbita cohete

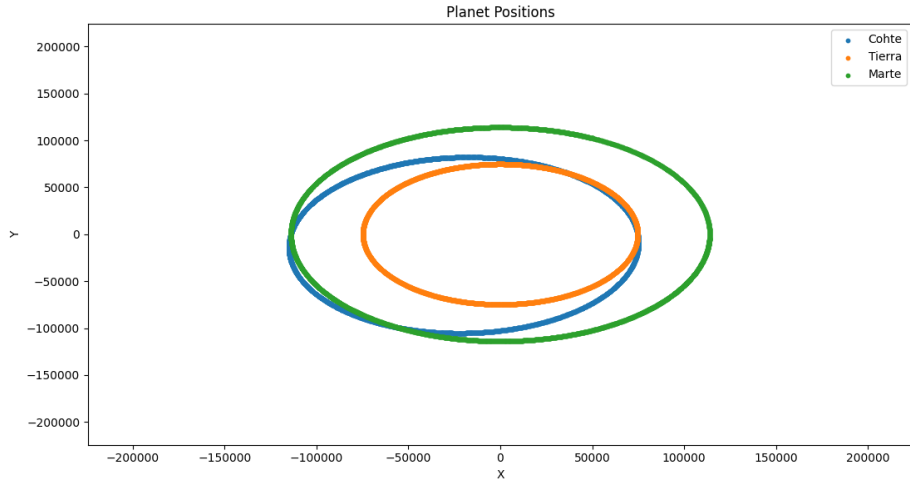


Figura 2: Orbita perturbada

energía sea constantes es un buen indicador de que el programa funciona bien ya que  $T$  y  $V$  se están compensando. La energía necesaria para la misión será la diferencia entre la energía inicial y la final

$$\Delta E = E_f - E_i = (-945,24 + 1410,44)D^2/H^2 = 465,2D^2/H^2 = 143589Kj/kg$$

. A esto hay que añadirle la energía de despegue que viene a ser la de escape de la Tierra  $GM_T/R_T = 6165,441Kj$  con lo que la energía total consumida sería  $E_{consumida} = 1497,545MJ/kg$ .

## 4. Conclusiones

Los resultados obtenidos de la simulación de la misión a Marte han sido los siguientes: se han determinado los tiempos de viaje, la energía necesaria y la posición relativa entre los planetas

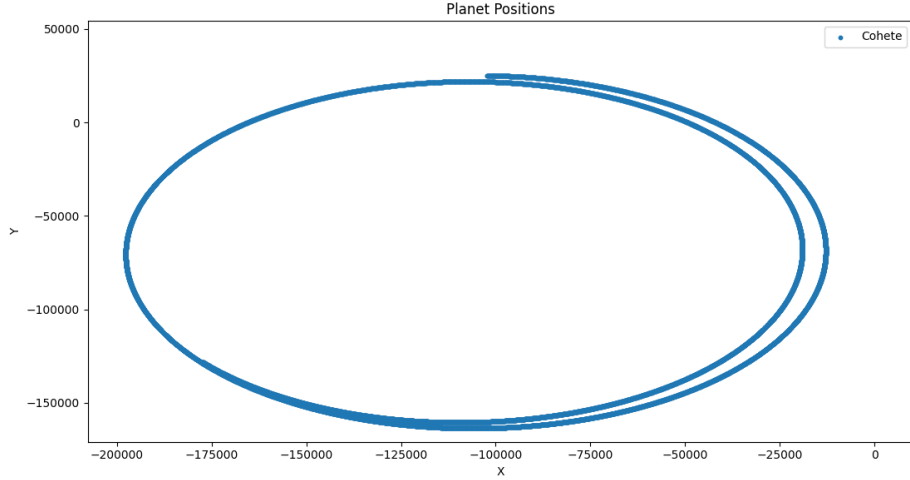


Figura 3: Órbita respecto de Marte

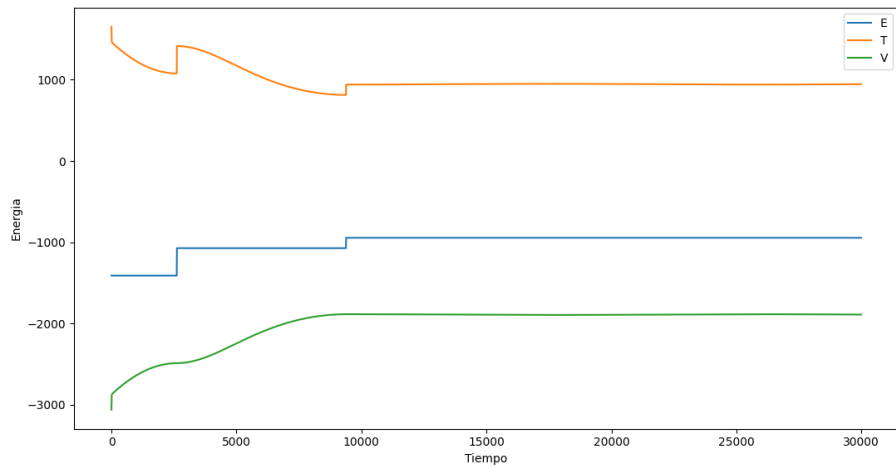


Figura 4: Energía respecto del tiempo

requerida para enviar la nave desde la Tierra a una órbita alrededor de Marte. Con condiciones iniciales específicas y mediante el uso del algoritmo de Runge-Kutta de 4<sup>º</sup> orden, se ha obtenido una órbita de Hohmann algo particular. Además, se ha comprobado que el cohete ha entrado en órbita a través de la representación de la posición relativa respecto a Marte.

El tiempo de misión ha resultado ser de 391,2 días. Se ha observado que la duración de la misión habría sido menor si se hubiera planteado la órbita de una manera diferente, aunque con un mayor nivel de dificultad para su ejecución.

En cuanto a la energía consumida, se ha representado la energía total, cinética y potencial en función del tiempo, observando que la energía se mantiene constante. La energía necesaria para la misión ha sido de 1497.545 MJ/kg.

En conclusión, mediante la simulación de la misión a Marte, se ha logrado determinar los

tiempos de viaje, la energía requerida y la posición relativa necesaria para llevar a cabo la misión. Minimizar el consumo de energía en las misiones espaciales es de vital importancia debido a los altos costos asociados. Los resultados obtenidos proporcionan información relevante para el diseño y planificación de futuras misiones espaciales.

## Referencias

- [1] Hopfield, J. J. (1982). Neural networks and physical systems with emergent collective computational abilities. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 79(8), 2554–2558.
- [2] Amit, D. J., Gutfreund, H., & Sompolinsky, H. (1985). Storing infinite numbers of patterns in a spin-glass model of neural networks. *Physical Review Letters*, 55(14), 1530–1533.
- [3] Hertz, J., Krogh, A., & Palmer, R. G. (1991). *Introduction to the Theory of Neural Computation*. Addison-Wesley.
- [4] Metropolis, N., Rosenbluth, A. W., Rosenbluth, M. N., Teller, A. H., & Teller, E. (1953). Equation of state calculations by fast computing machines. *The Journal of Chemical Physics*, 21(6), 1087–1092.
- [5] Hinton, G. E., & Sejnowski, T. J. (1983). Optimal perceptual inference. In *Proceedings of the IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition* (pp. 448–453).