

Neural Networks: Firing Rate Model

Diego Ismael García Tripiana and Alberto Mochón Paredes

Asignatura de Física de los Sistemas Complejos. Grado en Física de la universidad de Granada.

(Dated: 15 de Julio de 2024)

En este trabajo se estudia un sistema determinista no lineal basado en el modelo de tasa de disparo (Firing Rate Model), que trata de simular la actividad neuronal de una red de $N = 1000$ neuronas. Se simulan mapas de calor para la tasa de disparo media, la covarianza y el valor máximo de los autovalores de la matriz de acoplamiento de la red. Los resultados muestran que existen dos transiciones de fase diferenciadas en el sistema, en la de primer tipo no se encuentran resultados de interés, mientras que en la segunda se encuentran patrones periódicos con sincronía entre las neuronas en su tasa de disparo. Además, se analizan las distribuciones de autovalores de la matriz de acoplamiento del sistema, aplicando condiciones concretas a la misma para corregir su radio y obtener diferentes distribuciones. Se estudian también las trayectorias de la tasa de disparo en función del tiempo de las neuronas, haciendo un enfoque especial en los valores cercanos a la criticidad, pues es la zona de mayor relevancia en el modelo puesto que la evidencia ampara que el cerebro opera en un régimen crítico.

INTRODUCCIÓN

A la hora de estudiar el funcionamiento del cerebro, el *Firing Rate Model* o modelo de tasa de disparo es usado frecuentemente. Este se basa en la idea de que la información neuronal se puede codificar y transmitir a través de la tasa a la cual las neuronas disparan potenciales de acción, lo cual hace que el sistema se estudie en función de la tasa de disparo promedio de las neuronas, simplificando en gran medida estos sistemas para su análisis y simulación.

El modelo de este tipo de sistemas pretende simular un estado físico complejo como es el del cerebro, por tanto, se pretende entender como trabaja el mismo, para ello se proponen modelos que sean capaces de simularlo. Por tanto, aspectos matemáticos como la distribución de autovalores de las matrices creadas para el sistema [1] o los flujos caóticos de un sistema determinista no lineal [2] son usualmente discutidos.

A su vez, preguntas como en que régimen de estos sistemas opera el cerebro también son formuladas, la evidencia ampara en este caso que el cerebro opera en un régimen cercano a la criticidad [3][4].

Por tanto, es de vital interés el estudio del cerebro a través de la física de los sistemas complejos, puesto que se necesita de un rigor matemático y de un entendimiento de los sistemas caóticos que esta rama de la ciencia es capaz de proporcionar.

FUNDAMENTO TEÓRICO.

Se utiliza un modelo de tasa de disparo descrito por una ecuación dinámica que determina la tasa de disparo $r(t)$ de cada neurona (1).

$$\dot{r}_i(t) = -r_i(t) + \phi(g \sum_{j=1}^N W_{ij} r_j(t) + I) + \chi_i(t) \quad (1)$$

Donde $\phi(x)$ es lo que se conoce como función saturación, en nuestro caso $\phi(x) = \tanh(x)$. g es la fuerza de acoplamiento entre las neuronas, W es la matriz de acoplamiento, es decir, es una matriz que nos indica como de fuerte están conectadas dos neuronas. Por ejemplo la conexión sináptica de la neurona i con j vendría dada por W_{ij} . I es un input externo y $\chi_i(t)$ es una variable estocástica. Para nosotros, $I = 0$ y $\chi(t) = 0$.

Para nuestro sistema, se encontrarán dos tipos de regímenes: régimen inactivo y régimen activo. Donde el régimen inactivo será cuando la tasa de disparo de cada neurona sea 0 y el régimen activo cualquier caso diferente. La transición de fase entre los regímenes vendrá dada por la ecuación (2).

$$g\lambda_{max} = 1 \quad (2)$$

Donde λ_{max} es el autovalor mayor de la matriz W . Por tanto, si $g\lambda_{max} > 1$ estaremos en régimen activo, y si $g\lambda_{max} < 1$ estaremos en régimen inactivo. Para buscar la explicación de la condición de transición de fase hacemos un desarrollo en serie de Taylor de la tangente hiperbólica a primer orden, obteniendo:

$$\dot{r}_i(t) = -r_i(t) + g \sum_{j=1}^N W_{ij} r_j(t)$$

Esta ecuación diferencial se puede reescribir en forma matricial:

$$\dot{r}(t) = (gW - I)r(t)$$

siendo \mathbf{I} la matriz identidad. Es sencillo ver que la solución para esta ecuación diferencial matricial es:

$$\mathbf{r}(t) = e^{At} \mathbf{r}(0)$$

donde $\mathbf{r}(0)$ es el vector de condiciones iniciales y hemos sustituido $(gW - I)$ por A .

Para que $\mathbf{r}(t)$ no tienda a 0, es necesario que la matriz \mathbf{A} tenga al menos un autovalor con una parte real no negativa. Los autovalores de A serán $-1 + g\lambda_i$. λ_{max} es el autovalor mayor de W , con lo que para que se cumpla la condición de encendido se debe dar:

$$g\lambda_{max} > 1 \quad (3)$$

De modo que queda demostrado que la transición de fase es (2) bajo aproximación de Taylor a primer orden.

Estos resultados están dominados por la forma de la matriz W , por tanto, nos interesa estudiar la misma. La "Girko's circle law" [1], nos dice que para $N \rightarrow \infty$ los autovalores de una matriz cuadrada creada por una distribución aleatoria de media 0 y varianza $1/N$ se encontrarán en el círculo de radio 1 en el plano complejo. Pero este no es exactamente el caso de nuestra matriz W , que será creada de la siguiente manera:

- Un 80% de las neuronas serán excitadoras, es decir, su peso sináptico en la matriz de acoplamiento W será positivo. Esto es, el 80% de las columnas de la matriz tendrán elementos con valores positivos. En este caso se le darán valores entre $[0, g]$.
- El 20% restante de las neuronas serán inhibidoras, lo que significa que el resto de columnas de la matriz W tendrán valores negativos en todos sus elementos. En este caso se le darán valores entre $[-gw, 0]$, donde w es un parámetro positivo llamado fracción de fuerza, la cual mide la fracción de fuerza entre las neuronas inhibidoras y las excitadoras.

Hay que notar que g está dentro de las distribuciones, es decir, la matriz W se construye con la g dentro y no haría falta multiplicarla por este valor. Es irrelevante si la g se incluye dentro de la distribución o se multiplica después puesto que el resultado es el mismo.

Siguiendo el artículo [1], para que los autovalores de la matriz entren dentro del radio de la ecuación (4), la matriz se divide en una suma de otras dos: $W = J + M$. Donde J es la matriz creada con distribuciones de media 0, y M es la matriz de medias. Esto es, las columnas de la matriz J serán distribuciones uniformes con media 0 con valores entre $(-gw/2, gw/2)$ si son inhibidoras y $(-g/2, g/2)$ si son activadoras y las columnas de M serán la media de la distribución según sea una columna de inhibidoras ($-gw/2$) o excitadoras ($g/2$). En la figura 1 se muestra una representación gráfica de como serían estas matrices. En este trabajo a esta condición se le

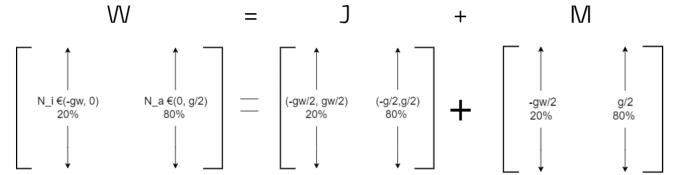


FIG. 1. Representación gráfica de $W = J + M$

llamará condición de Rajan y Abbott, y se abreviará como RA.

Además, se impondrá la condición de sparsity, la cual consiste en hacer 0 un número de elementos de la matriz. En nuestro caso se harán 0 el 80% de elementos, por lo que nuestra variable de sparsity será $p = 0.2$ (número de elementos que no son 0).

En estos casos, los autovalores de la matriz quedarán encerrados en un radio en el plano complejo con un valor dado por la expresión (4)

$$R = \sqrt{N\sigma_{eff}^2} \quad (4)$$

Donde N es el número de neurona de la red y σ_{eff}^2 la varianza efectiva de la distribución, en este caso, la suma de las varianzas de ambas distribuciones. Esta expresión será distinta dependiendo de la distribución que usemos.

Además de existir un círculo de autovalores, encontramos un autovalor real o outlier (λ) que sobresale de este círculo. El outlier viene dado por la expresión (5), siendo α el porcentaje de elementos de W que son 0.

$$\lambda_{outlier} = \frac{g}{2} Np(1 - \alpha) - \frac{gw}{2} Np\alpha \quad (5)$$

Si estudiamos cuál es el autovalor que cumple (3), veremos que en algunos casos el outlier está aislado y es mayor que cualquier otro autovalor perteneciente al círculo (o bulk). En este caso, dominará el outlier sobre el bulk, este comportamiento se asociará a criticidad tipo I. En otros casos, el outlier estará contenido en el bulk o será negativo, con lo que dominará el bulk sobre el outlier. Esto se llamará criticidad tipo II. La transición de fase para tipo I emerge de igualar $\lambda_{outlier} = 1$ y para tipo II $R = 1$.

METODOLOGÍA.

En este trabajo se estudiarán sistemas sin condiciones, solo con sparsity, solo con RA y con sparsity más RA.

Se ha creado un programa que genera una matriz W distinta dependiendo de la condición que impongamos, este nos muestra un histograma de los pesos de W , calcula los autovalores de la matriz y su correspondiente radio, y los muestra en pantalla en el plano complejo junto al círculo de radio R .

Se ha realizado otro programa con el fin de estudiar la evolución de la tasa de disparo en el tiempo. Para ello, se ha resuelto mediante el método de Runge Kutta 4 la ecuación diferencial (1). Se ha escogido que la condición inicial para r_i sea un valor aleatorio entre 0 y 1. Este representa la evolución de la media de r , de la covarianza σ y de la r correspondiente a algunas neuronas.

En el tercer y último programa se ejecuta una simulación similar a la del segundo programa en la que se calcula la evolución temporal de r en un bucle anidado sobre los valores de g y w . Se realizarán tres mapas de calor en los que se graficarán las variables de interés para cada g y w . En el primer mapa de calor se mostrará la media de la tasa de disparo, S (6) donde $\langle \cdot \rangle$ indica media sobre el tiempo. S sería una media sobre el tiempo y sobre las neuronas de r^2 . En otra gráfica se mostrará la covarianza σ encontrada entre la tasa de disparo de las neuronas promediada en el tiempo y en la tercera se mostrara el autovalor máximo λ_{max} .

$$S = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \langle r_i^2 \rangle \quad (6)$$

Con el fin de obtener un mapa de calor más preciso y teniendo en cuenta que dependiendo de la g y w los resultados son fuertemente dependientes de las condiciones iniciales, se ha realizado la simulación un número M de veces y se ha promediado el resultado, en nuestro caso se ha elegido un $M=3$. Para evitar fenómenos de inestabilidad numérica se ha elegido un paso suficientemente pequeño, para nuestra simulación es suficiente con $dt = 0.1$ y para asegurarnos de que el tiempo que dejamos evolucionar el sistema es suficiente para que este converja el numero de iteraciones debe ser suficientemente grande. En nuestro caso 1000, es decir el sistema evoluciona durante 50 segundos. Otro efecto de simulación numérica que debemos tener en cuenta es que en RA al generar la matriz J las distribuciones de las columnas no van a tener un media que sea exactamente 0 con lo que habrá que añadir un término más a la expresión $W = J + M - I$. Donde I será un matriz cuyas columnas serán la media de las distribuciones de J que aunque sean próximas a 0 hay que tenerlas en cuenta para que la condición de RA funcione correctamente.

RESULTADOS Y DISCUSIÓN.

Distribución uniforme y distribución gaussiana.

Usualmente en el estudio de redes neuronales se usan distribuciones gaussianas a la hora de crear la matriz de peso W . Sin embargo, en nuestro estudio se han usado distribuciones uniformes.

Con el fin de estudiar la diferencia entre el uso de estas distribuciones, se han representado los resultados del

mapa de calor de S para una matriz creada con una distribución uniforme entre $[0, g]$ para las neuronas excitadoras y entre $[-gw, 0]$ para las inhibidoras (ver figura 2). Y para una matriz creada con una distribución normal con $\mu_E = \frac{g}{2}$ y $\sigma_E = \frac{g}{\sqrt{12}}$ para las neuronas excitadoras y con $\mu_I = \frac{-gw}{2}$ y $\sigma_I = \frac{gw}{\sqrt{12}}$ para las neuronas inhibidoras (ver figura 3). Estas distribuciones tienen la misma media y la misma varianza independientemente del uso de distribuciones uniformes o gaussianas.

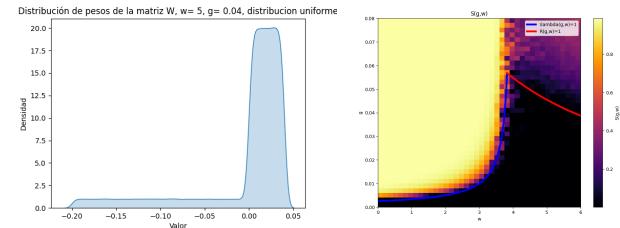


FIG. 2. Izquierda: Densidad de pesos de la matriz W creada con dos distribuciones uniformes. Derecha: Valor de S para distintos valores de g y w para matrices W creadas con la distribución de la izquierda.

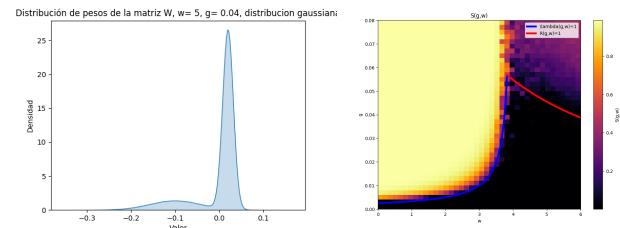


FIG. 3. Izquierda: Densidad de pesos de la matriz W creada con dos distribuciones gaussianas. Derecha: Valor de S para distintos valores de g y w para matrices W creadas con la distribución de la izquierda.

Como se puede observar, los resultados son idénticos, por tanto no es relevante para este trabajo la distribución utilizada. Esto es justificable por la ley de los grandes números la cual asegura que, con un número suficientemente grande de observaciones (N en nuestro caso), el promedio de las observaciones se acercará al valor esperado, sin importar si la distribución es uniforme o gaussiana, siempre y cuando las observaciones sean independientes y tengan un valor esperado finito. Por tanto, al construir W con distribuciones diferentes pero con igual media y varianza, el resultado no tendría que variar. Esto justifica que, para ambas distribuciones con un valor de N suficientemente grande, los resultados tienden a ser iguales, puesto que las funciones para $R = 1$ y $\lambda_{outlier} = 1$ que definen las transiciones de fase son las mismas.

Condición de sparsity

Li y Shew en su artículo [5] aplican sparsity en una matriz creada con distribuciones uniformes iguales a las presentadas en el apartado anterior. Sustituyendo en (4) la varianza efectiva el radio que obtienen para el volumen de autovalores se recoge en la ecuación 7.

$$R = \sqrt{N \left[(1 - \alpha) \left(\frac{p}{3} - \frac{p^2}{4} \right) g^2 + \alpha \left(\frac{p}{3} - \frac{p^2}{4} \right) (gw)^2 \right]} \quad (7)$$

Si igualamos el valor del outlier y el del radio a 1, obtenemos las funciones (8) y (9).

$$g_\lambda = \frac{2}{Np[(1 - \alpha) - \alpha w]} \quad (8)$$

$$g_R = \frac{1}{\sqrt{N \left(\frac{p}{3} - \frac{p^2}{4} \right) ((1 - \alpha) + \alpha w^2)}} \quad (9)$$

Si igualamos $R = \lambda_{outlier}$, se obtiene el punto de corte en el eje x entre ambas funciones. Para $p = 0.2$, el punto de corte es $w^* = 3.34$. A partir de w^* el sistema pasará de ser de tipo I a tipo II ya que el bulk empezará a dominar sobre el outlier.

En la figura 4 se muestra la distribución de pesos de W para sparsity. El pico en 0 es debido a la condición de que el 80 % de los elementos de W son 0.

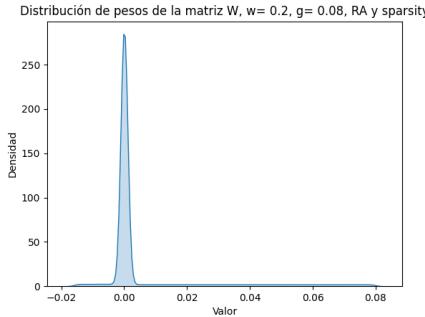


FIG. 4. Distribución de pesos de la matriz W para el caso de sparsity.

Como se observa en la figura 5, donde se muestran distribuciones de autovalores para $g = 0.07$ y diferentes w , es en w^* donde se produce esta transición en la criticidad, aunque siga habiendo un outlier, está tan cerca del bulk de autovalores que ya no domina y contaría como parte de este. La primera de ellas con $w = 3$ correspondería al tipo I ya que el outlier es positivo y sobresale del bulk y la tercera con $w = 4$ sería tipo II ya que no hay outlier.

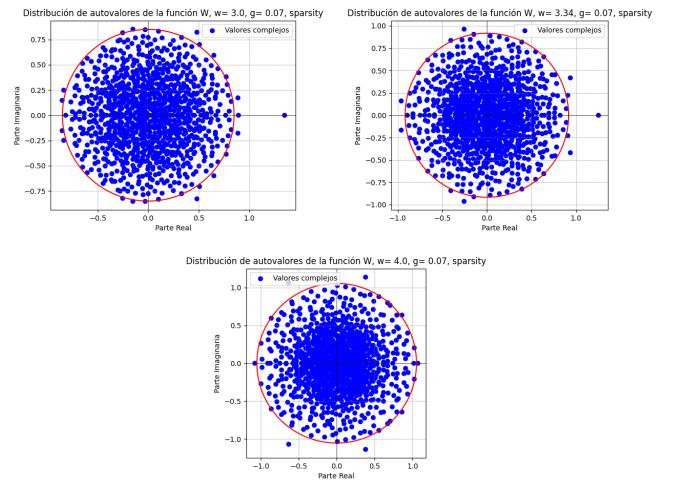


FIG. 5. Representación de los autovalores de la matriz W para condición de sparsity.

Cabe destacar que como se había discutido en el fundamento teórico no todos los autovalores están contenidos en el círculo de radio R .

En la figura 7 se ven tres ejemplos de evolución temporal de la tasa de disparo de las neuronas. El primero correspondería con el estado apagado ya que r_{medio} tiende a 0. En el segundo vemos que se satura en 1 y que todos los r_i convergen al mismo punto aunque tengan condiciones iniciales distintas. En el tercero se ve que el r_{medio} no acaba de converger a un valor claro pero oscila alrededor de 0, los r_i no convergen a ningún punto, cada uno sigue una trayectoria distinta y la covarianza es bastante grande ya que en este caso se podría decir que nos encontramos en un sistema caótico.

En la figura 6, se muestran los mapas de calor para el sistema resuelto con la matriz W creada con la condición de sparsity. Es aquí donde se muestra a nivel general que los resultados de la evolución temporal de la tasa de neuronas y de la representación de los autovalores de W son capaces de describir el sistema y darnos información detallada sobre este.

Fijándonos en el mapa de calor para S , podemos distinguir perfectamente el régimen inactivo, que corresponde al área bajo las curvas de $R = 1$ (línea roja) y $\lambda_{outlier} = 1$ (línea azul), donde el sistema está totalmente apagado. El tipo de evolución que encontraremos en esta zona será parecido al de la primera imagen en 7. El resto del sistema está encendido, aunque para w menores a w^* (el punto donde se cortan las líneas roja y azul) estamos en criticidad tipo I, que conduce a un estado totalmente encendido del sistema, en esta zona encontraremos evoluciones parecidas a las de la segunda imagen en la figura 7. A la derecha de w^* estamos en tipo de criticidad II, que conduce a un estado del sistema más caótico, donde el sistema no está completamente encendido, si no que converge hacia un estado de semi-

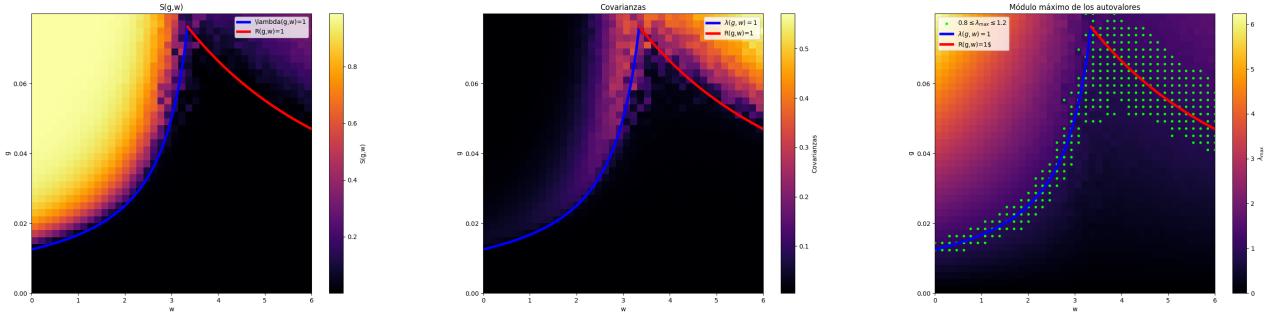


FIG. 6. Mapas de calor en función de los valores de g y w para las medias, la covarianza y los autovalores de la matriz W para el caso de sparsity. Izquierda: valor de S . Centro:media temporal de las covarianzas espaciales. Derecha: autovalores máximos.

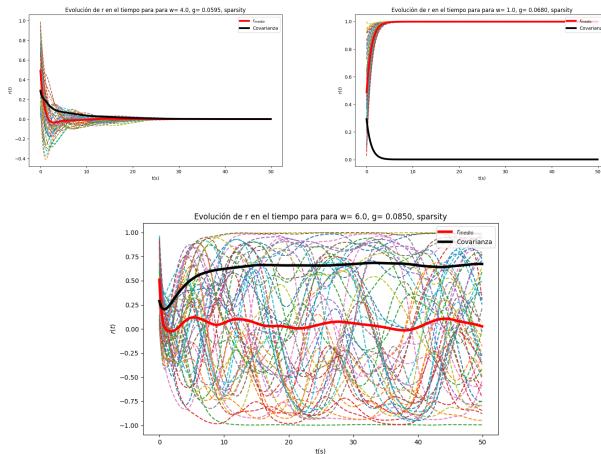


FIG. 7. Evolución de r en el tiempo en tres casos representativos

encendido, caracterizado además por una gran covarianza en sus datos la imagen de abajo en la figura 7 sería un ejemplo de este tipo de comportamiento. Además, vemos que las líneas azul y roja se ajustan perfectamente al caso donde el autovalor máximo es 1, el cual indica, como se expresa en (2), la transición de fase del sistema. Por tanto, el resultado teórico se ajusta a la simulación.

Este análisis es general para todo este tipo de mapas de calor que se muestran durante el trabajo, por tanto, a partir de ahora este se enfocará en las diferencias en este tipo de gráficos dependiendo de las condiciones utilizadas y se evitará repetir este análisis general si no es necesario.

Cabe destacar que hay otra zona además de la asociada a criticidad tipo II con covarianza no nula y esa es la transición de apagado a encendido con criticidad tipo I. Como se ve en la figura 8 lo que ocurre es que cada neurona converge a un valor distinto por eso la covarianza es no nula. Este fenómeno es seguramente debido a que no todos los autovalores están contenidos en el radio, al ser esto así cada neurona puede converger a distintos

valores.

En valores cercanos a w^* nos encontramos con lo siguiente: En la figura 9 se ven tres trayectorias distintas para la misma w y g . En la primera ocurre lo mismo que en la transición para criticidad tipo I pero para las otras dos hay un comportamiento periódico. Por lo tanto, dependiendo de las condiciones iniciales la evolución de r cambia. Esto podría explicar porqué cerca de este punto el mapa deja de ser continuo ya que encontramos cambios muy grandes en S de un punto a otro al cambiar las condiciones iniciales.

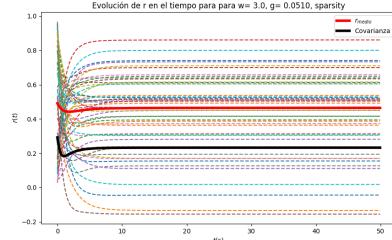
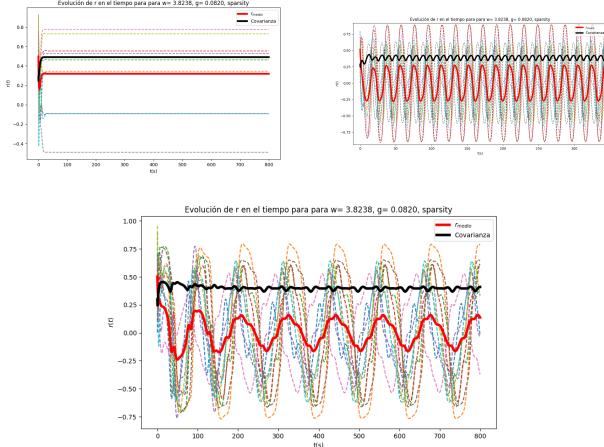
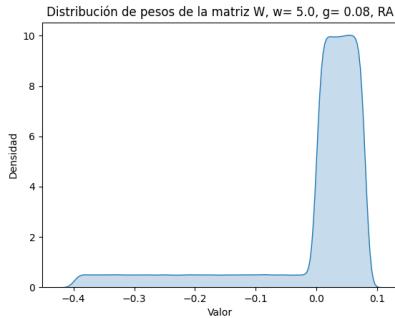


FIG. 8. Evolución de r en el tiempo en la zona de transición para criticidad tipo I para sparsity.

Condición de RA.

En esta sección se probará como la condición de RA es usada para crear matrices W cuyos autovalores estén dentro de un círculo con radio definido en el plano complejo. La distribución de pesos de la matriz W tras aplicar RA se representa en la figura 10.

Se grafican los autovalores de la matriz W creada sin ninguna condición en la figura 11, junto a la misma gráfica para los valores de g y w para la matriz W creada con RA. Se observa que en este caso, algunos autovalores se salen del círculo. Es por esto que se aplica la condición RA, ya que hace que los autovalores se adapten al círculo con radio (10).

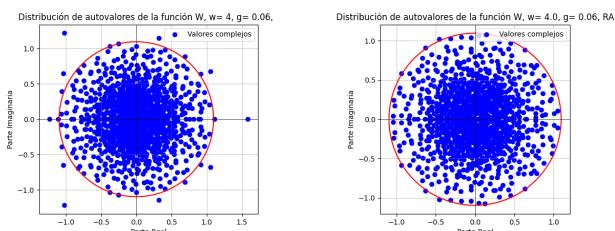
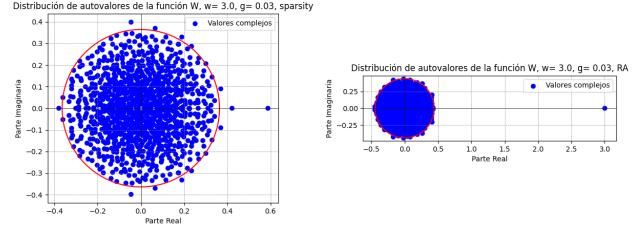
FIG. 9. Evolución de r para $w=w^*$ y $g=0.082$ FIG. 10. Distribución de pesos de la matriz W para el caso de RA.

$$R = g\sqrt{N}[(1 - \alpha) + w^2\alpha] \quad (10)$$

En este caso g_λ tiene la misma expresión (8) con $p = 1$, pero:

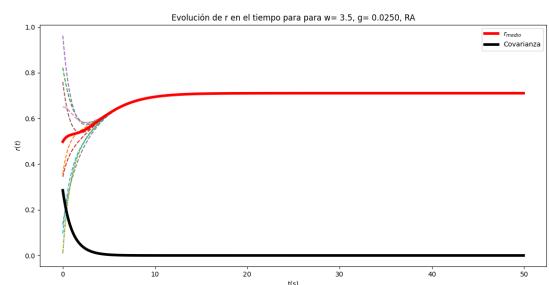
$$g_R = \frac{1}{\sqrt{\frac{N}{12}[(1 - \alpha) + w^2\alpha]}}$$

El punto de corte entre ambas es, para nuestros datos: $w^* = 3.8238$.

FIG. 11. Representación de los autovalores de la matriz W para distribución sin condiciones y condición de RA.FIG. 12. Representación de los autovalores de la matriz W para sparsity y RA cerca de la transición de fase tipo I.

En la figura 14 se muestran los mapas de calor al aplicar esta condición a W . Se pueden notar algunas diferencias sustanciales si se comparan con el caso de sparsity en la figura 6. En el caso de la representación de S , el cambio de estado apagado a encendido es más abrupto para RA, es decir, esta transición de fase es casi inmediata, pasando del estado apagado con $S = 0$ a encendido con $S = 1$ de manera prácticamente instantánea si nos fijamos en la zona de criticidad tipo I (a la izquierda de w^*). Este resultado es debido a que en RA el valor del outlier es mucho más pronunciado que en sparsity (ver figura 12). Esto hace que domine con mucha más intensidad, de manera que se da esta transición con más rapidez que en sparsity.

Además, la covarianza en la transición a encendido con criticidad tipo I es nula, es decir, el fenómeno que se encontraba en la figura 8 ya no existe para RA. En lugar de eso nos encontramos con un comportamiento del tipo de la figura 13, esto es debido al hecho de que ningún autovalor sobresale del círculo asociado al bulk. Para valores de w cercanos a w^* seguimos encontrando un comportamiento periódico y sensible a las condiciones iniciales. La zona de criticidad tipo II no sufre mucho cambio, excepto que empieza en un valor más alto de w debido a que el punto crítico es mayor.

FIG. 13. Evolución de r en el tiempo en la zona de transición para criticidad tipo I para RA.

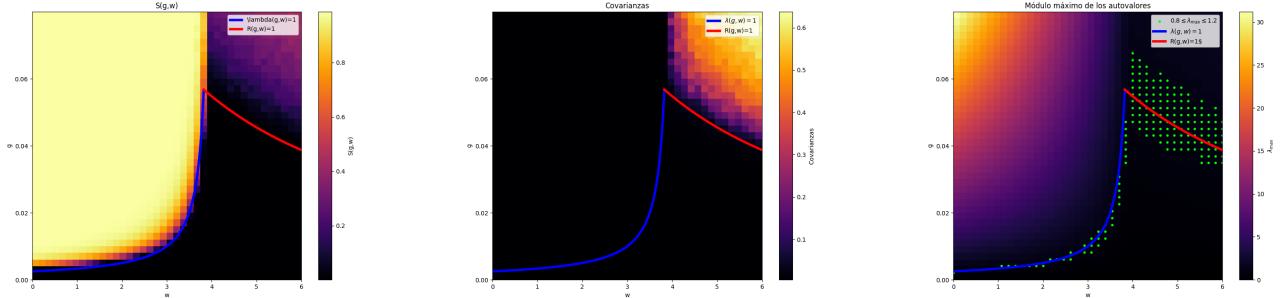


FIG. 14. Mapas de calor en función de los valores de g y w para las medias, la covarianza y los autovalores de la matriz W para el caso de RA. Izquierda: valor de S . Centro:media temporal de las covarianzas espaciales. Derecha: autovalores máximos.

Condición de RA y sparsity

Se ha visto que en el caso de sparsity, los autovalores no se ajustan al círculo en el plano complejo en todos los casos, es por esto que se aplica RA. Se aplican ambas condiciones de la siguiente manera:

- Se crea la matriz J .
- Se aplica sparsity a la matriz J .
- Se obtiene $W = J + M$.

Por tanto, este proceso equivaldría a primero aplicar sparsity y generar un pico en cero en la distribución y luego desplazar el pico en 0 a las medias de cada distribución es decir a $g/2$ si es activadora o $-gw/2$ si es inhibidora. La densidad de pesos de la matriz W se representan en la figura 15.

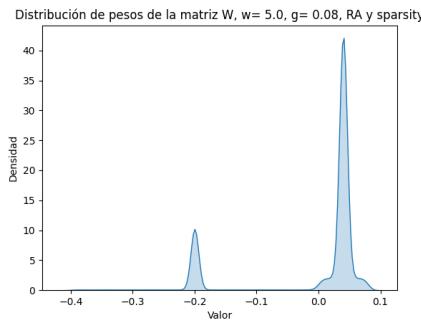


FIG. 15. Distribución de pesos de la matriz W para el caso de RA y sparsity.

Como se observa en la figura 16, el problema del radio se soluciona. El radio usado es 11, donde $h = 0.2$ es la cantidad de valores de la matriz que han sido cambiados por la media y por tanto no afectan a la varianza.

$$R = g\sqrt{Nh[(1 - \alpha) + w^2\alpha]} \quad (11)$$

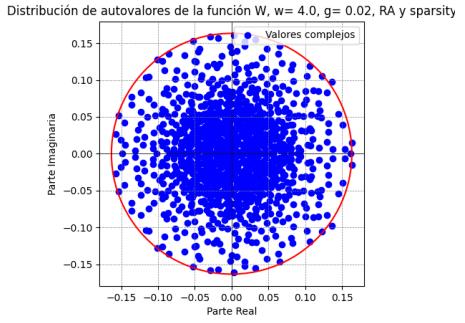


FIG. 16. Representación de los autovalores de la matriz W para condición de RA y sparsity.

En el caso de g_λ tenemos el mismo que para RA. Para $R = 1$ tenemos $g_R = \frac{1}{\sqrt{Nh[(1 - \alpha) + w^2\alpha]}}$. El punto de corte entre ambas distribuciones será: $w^* = 3.9197$.

En la figura 17 se muestran los mapas de calor al aplicar estas condiciones a W . Se observa que el resultado es similar al caso de aplicar solo RA, aunque los valores de g (eje y) son mayores aquí, puesto que el punto de corte entre la línea azul y la línea roja es mucho mayor en este caso debido al añadido de la variable h .

Por tanto, es cierto que al aplicar ambas condiciones juntas se obtiene un resultado teórico correcto debido a que el círculo de los autovalores se ajusta a los resultados obtenidos. Sin embargo, los resultados generales no difieren significativamente de los obtenidos al aplicar solo la condición de RA, lo cual es esperable debido a la distribución que se obtiene. Se concluye de esta manera que es de mayor interés el estudio del sistema aplicando ambas condiciones por separado.

Es de relevancia discutir otras formas de crear la matriz de acoplamiento W con ambas condiciones a la vez. Por ejemplo, se podría hacer en el orden inverso, es decir, crear la matriz W como en el caso de RA y tras ello, aplicar la condición de sparsity. Sin embargo, este proceso nos devuelve al caso en el que se aplica solo la condición de sparsity, como se observa en la figura 18.

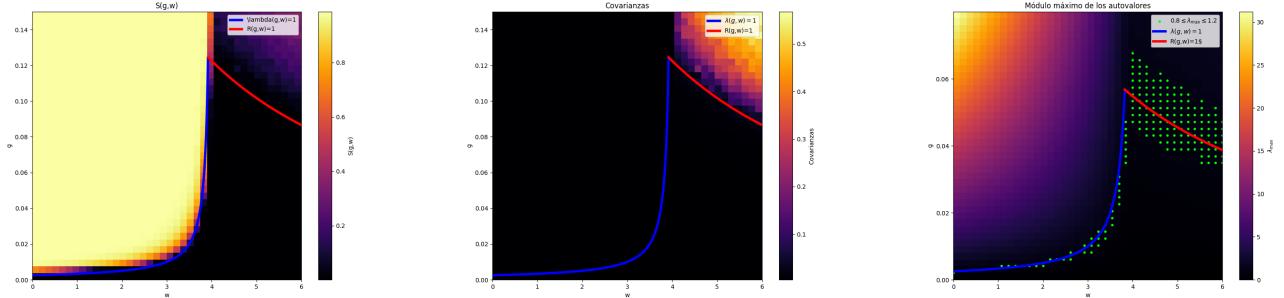


FIG. 17. Mapas de calor en función de los valores de g y w para las medias, la covarianza y los autovalores de la matriz W para el caso de RA y sparsity. Izquierda: valor de S . Centro:media temporal de las covarianzas espaciales. Derecha: autovalores máximos.

En este caso, tampoco se soluciona el problema de que los autovalores queden contenidos en el círculo, por tanto no es una correcta solución.

Otras formas de aplicar estas dos condiciones pueden ser posibles, sin embargo, no son discutidas en este estudio.

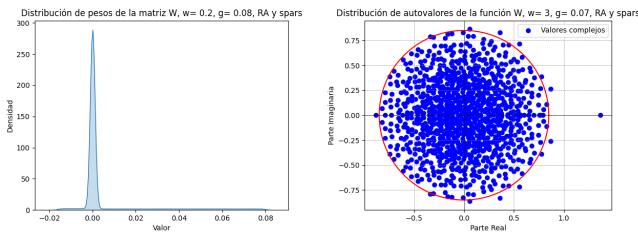


FIG. 18. Izquierda: Densidad de pesos de la matriz W creada con la condición de RA y sparsity. Derecha: representación de los autovalores para la condición de RA y sparsity.

y $g^* = 0.075$ y en el caso de RA $w^* = 3.82$ y $g^* = 0.057$. Los resultados se recogen en las figuras 19(RA) y 20 (sparsity). Se observa que en ambos casos se reproducen patrones de periodicidad en los que las neuronas disparan de forma síncrona. No se encuentran grandes diferencias entre las trayectorias para RA y sparsity, de hecho si nos fijamos se encuentran patrones que son similares entre sí. Este tipo de resultados, al estar al borde del caos, son susceptibles a las condiciones iniciales, dependiendo de estas condiciones iniciales obtendremos un patrón distinto con frecuencias más altas o más bajas y con distintas formas. En este caso las condiciones iniciales son escogidas aleatoriamente, es por esto que se consiguen resultados diferentes, aunque en su mayoría se observe este comportamiento síncrono de las neuronas. En un significado físico del sistema, estos picos de disparo de las neuronas se pueden traducir a una respuesta síncrona del cerebro a un cierto estímulo, el cual se traduce a las condiciones iniciales del sistema. [6]

Análisis del comportamiento de la red en la transición de fase.

En el estudio de las redes neuronales y sistemas biológicos , se señala la importancia del comportamiento de la red en los puntos cercanos a la criticidad [4]. En los puntos previos del trabajo se ha tratado de estudiar, explicar y comentar los resultados del modelo. En este apartado se pretende hacer un análisis más detallado del comportamiento de la red cerca de la criticidad en base a los resultados obtenidos.

Se ha realizado un barrido de simulaciones de la tasa de disparo con respecto al tiempo de cada neurona cerca del punto de corte entre la línea azul y la línea roja ($R = \lambda = 1$) en los mapas de calor, puesto que se entiende que este es el punto de mayor criticidad del sistema, ya que se pasa tanto del tipo de criticidad I al tipo II , como de régimen de encendido a apagado.

En el caso de sparsity el punto de corte es $w^* = 3.34$

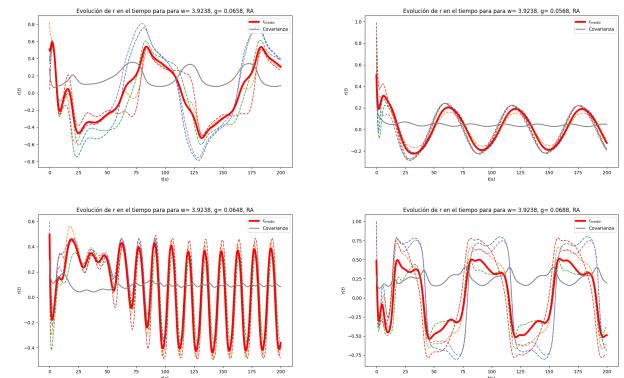


FIG. 19. Evolución de r cerca de la criticidad para RA

En las figuras 21 y 22 se observa que para ambos casos el comportamiento síncrono también se da en puntos alejados del punto de corte $R = \lambda = 1$, pero en puntos cercanos a la transición de fase de tipo II. Como se ha comentado anteriormente, en la figura 8 no se observa

este resultado para la transición de fase de tipo *I*. Esto significa que para encontrar un comportamiento síncrono es suficiente con estar en la transición a encendido con criticidad tipo *II*, no es necesario estar en w próximas a la w^* .

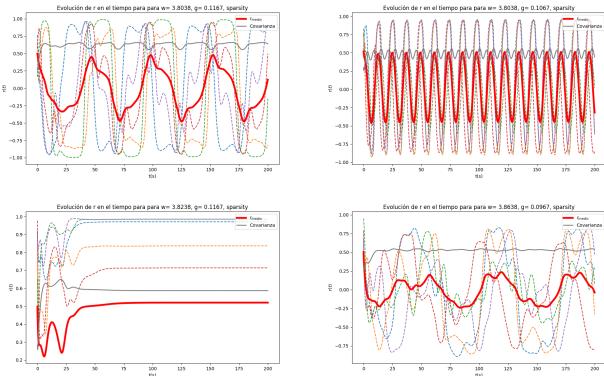


FIG. 20. Evolución de r cerca de la criticidad para sparsity

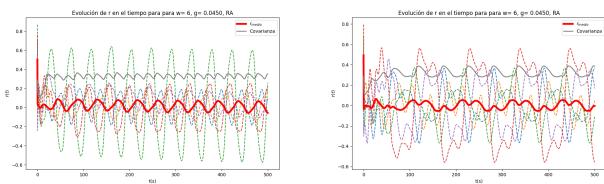


FIG. 21. Evolución de r en la transición con criticidad tipo *II* para RA

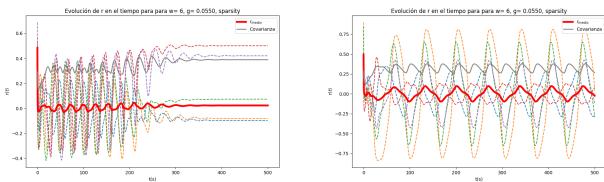


FIG. 22. Evolución de r en la transición con criticidad tipo *II* para sparsity

CONCLUSIÓN.

→ Se han comparado los resultados para dos distribuciones diferentes, una uniforme y otra gaussiana, ambas con la misma media y covarianza. Se ha obtenido el mismo resultado para ambas, por tanto, se concluye que, debido a la ley de los grandes números, no es relevante el uso de una distribución en específico. De esta manera se justifica el hecho de usar distribuciones uniformes en el trabajo.

→ La condición de RA ha sido satisfactoria a la hora de encerrar los autovalores de la matriz de acoplamiento

entre neuronas del sistema en el círculo de radio R (4). Como consecuencia, el fenómeno que encontrábamos en sparsity para la transición de fase tipo *I* en el que cada neurona converge a un valor distinto ya no ocurre.

→ Al imponer la condición de RA más sparsity se han obtenido resultado satisfactorios y muy similares a los obtenidos para RA, por esa razón se ha decidido estudiar solo RA. Hay otra razón por la cual se ha descartado esta distribución, al aplicar RA más sparsity uno esperaría obtener distribución con un pico en 0 y que además tenga un bulk contenido en un círculo. Esto último si que se cumple pero el pico en 0 como ya se ha comentado es desplazado a los centros de las distribuciones de las neuronas inhibidoras y activadoras con lo cual ya no tenemos una distribución que cumpla la condición de sparsity. La condición de sparsity intenta hacer el sistema más realista con lo que si desplazamos el pico en 0 imponiendo una condición que no es a priori justificable en un sentido físico, como es la condición de RA, pierde el sentido aplicar primero sparsity. Por como son ambas condiciones se podría decir que son incompatibles, si aplicamos primero sparsity y luego RA se pierde la condición de sparsity y también ocurre lo mismo al contrario, es decir si aplicáramos primero RA y luego sparsity se perdería la condición de sparsity. Para solucionar este problema habría que buscar una forma de aplicar ambas condiciones a la vez sin que se pierda ninguna de las dos.

→ Los resultados más interesantes se han encontrado en la transición de fase tipo *II*, donde se han obtenido trayectorias con distintos patrones periódicos en la tasa de disparo de las neuronas. Estos patrones se han observado tanto en RA como en sparsity, indicando que las neuronas responden de manera sincrónica a ciertos estímulos iniciales. Este comportamiento sincrónico sugiere una respuesta coordinada del cerebro ante un estímulo específico. Los picos de disparo de las neuronas y sus patrones sincrónicos pueden interpretarse físicamente como una respuesta del cerebro a ciertos estímulos, los cuales se traducen a las condiciones iniciales del sistema.

→ Lo que habría que preguntarse ahora es: ¿Cuál de las dos condiciones es mejor o tiene mas sentido físico? Por un lado sparsity se podría decir que es mas realista ya que no todas las neuronas suelen estar interconectadas, solo algunas de ellas. Por otro lado en la transición a encendido para criticidad tipo *I* se da un comportamiento en el cual cada neurona converge a un valor distinto lo cual no tiene mucho sentido físico. El fenómeno de periodicidad en la transición de fase tipo *II*, el cual es el más interesante, se encuentra para ambas distribuciones.

-
- [1] K. Rajan and L. F. Abbott, Eigenvalue spectra of random matrices for neural networks, *Phys. Rev. Lett.* **97**, 188104 (2006).
 - [2] H. Sompolinsky, A. Crisanti, and H. J. Sommers, Chaos in random neural networks, *Phys. Rev. Lett.* **61**, 259 (1988).
 - [3] G. Scott, E. D. Fagerholm, H. Mutoh, R. Leech, D. J. Sharp, W. L. Shew, and T. Knöpfel, Voltage imaging of waking mouse cortex reveals emergence of critical neuronal dynamics, *Journal of Neuroscience* **34**, 16611 (2014), <https://www.jneurosci.org/content/34/50/16611.full.pdf>.
 - [4] M. A. Muñoz, Colloquium: Criticality and dynamical scaling in living systems, *Rev. Mod. Phys.* **90**, 031001 (2018).
 - [5] J. Li and W. L. Shew, Tuning network dynamics from criticality to an asynchronous state, *PLOS Computational Biology* **16**, 1 (2020).
 - [6] S. Yu, T. L. Ribeiro, C. Meisel, S. Chou, A. Mitz, R. Saunders, and D. Plenz, Maintained avalanche dynamics during task-induced changes of neuronal activity in nonhuman primates, *eLife* **6**, e27119 (2017).