



UNIVERSIDAD DE GRANADA

Facultad de Ciencias

GRADO EN FÍSICA

TRABAJO FIN DE GRADO

**Modelado Numérico de Problemas de Propagación
Mediante el Uso de Líneas de Transmisión**

Presentado por:
Alberto Mochón Paredes

Curso Académico 2024/2025

Resumen

El método numérico de modelado por líneas de transmisión es un modelo conceptual que resuelve problemas de propagación de ondas electromagnéticas. Consiste en la discretización del espacio y el tiempo, sustituyendo cada porción de espacio por un circuito de líneas de transmisión equivalente por el que se propagan pulsos de tensión e intensidad de manera análoga a como lo hacen los campos en el problema original. A lo largo de este TFG, se explicará la teoría subyacente a este método y se aplicará a diversos sistemas físicos empleando el nudo tridimensional.

Abstract

The numerical method of transmission line modeling is a conceptual model that solves electromagnetic wave propagation problems. It involves discretizing space and time, replacing each portion of space with an equivalent transmission line circuit through which voltage and current pulses propagate analogously to how the fields behave in the original problem. Throughout this final degree project, the underlying theory of this method will be explained and applied to various physical systems using the three-dimensional node.

Índice

1	Introducción	3
2	Fundamento teórico	4
2.1	Conceptos fundamentales de las líneas de transmisión	4
2.1.1	Características de una línea de transmisión ideal	5
2.1.2	Coeficientes de transmisión y reflexión	6
2.1.3	Condensador como línea de transmisión	6
2.1.4	El Equivalente Thevenin de una línea de transmisión	7
2.2	El método TLM	9
2.2.1	El nudo serie.	9
2.2.2	El nudo paralelo.	13
2.2.3	Nudo 3D	13
2.3	Dispersión numérica	19
2.4	Fundamentos de la simulación	20
2.5	Condiciones de contorno	21

3	Resultados y discusión	21
3.1	Propagación unidireccional	21
3.1.1	Condición de simetría	21
3.1.2	Resultados	22
3.2	Pulso con dispersión numérica.	23
3.3	Cavidades resonantes	24
3.3.1	Cavidad unidimensional	25
3.3.2	Cavidad bidimensional.	27
3.4	Cavidad tridimensional	28
3.5	Guías de onda	30
3.6	Interfases	34
4	Conclusiones	36
	Referencias	38

1 Introducción

A lo largo de la historia de la física, se han realizado numerosas analogías entre sistemas físicos y circuitos eléctricos. Por ejemplo, en sistemas mecánicos, la masa, el resorte y el amortiguador son análogos al inductor, el capacitor y el resistor (RLC) [Bad17]. En el método numérico de modelado por líneas de transmisión (TLM) se emplea una analogía similar, estableciendo una correspondencia entre ondas electromagnéticas y circuitos mediante un mallado del espacio, donde cada porción se sustituye por un circuito elemental o nudo. Según lo que se desee simular, se empleará un tipo de nudo específico. Por ejemplo, en sistemas bidimensionales donde las ondas se propagan en el modo TE_z ($E_z = 0$), se utiliza el nudo serie. Esto se debe a que, al comparar las ecuaciones que relacionan la intensidad y el voltaje en el nudo serie con las ecuaciones que describen el modo TE_z, se observa que son análogas, permitiendo establecer una correspondencia entre la intensidad y el campo magnético, y entre el voltaje y el campo eléctrico. Esto implica que al resolver uno de estos problemas se resuelve el otro [Joh74]. De manera similar, en el modo bidimensional TM_z ($H_z = 0$), se utiliza el nudo paralelo.

Para formar estos nudos, es necesario emplear líneas de transmisión, LT. Una línea de transmisión es un sistema, como por ejemplo un cable, que transporta ondas electromagnéticas transversales. Se utilizan LT debido a que, dependiendo de la frecuencia de operación, es necesario considerar ciertos efectos: cuando la longitud de onda de la señal es comparable al tamaño del cable, la onda experimenta un cambio de fase a lo largo de su recorrido y se producen fenómenos de transmisión y reflexión parcial al alcanzar cargas o discontinuidades.

El método TLM consiste en simular iterativamente la evolución del voltaje y la intensidad en la malla, calculando el campo eléctrico y magnético en cada paso. Cada iteración consta de dos etapas: primero, cuando los pulsos incidentes alcan-

zan el centro del nudo, se calculan los pulsos reflejados aplicando la matriz de scattering, que establece la relación entre ellos. Luego, en la etapa de evolución temporal, los pulsos reflejados viajan a través de las líneas, convirtiéndose en los pulsos incidentes de los nudos adyacentes.

Este trabajo se centrará en el nudo simétrico condensado, ya que permite analizar ondas electromagnéticas mediante el método TLM en casos generales tridimensionales [Joh87]. En particular, se estudiará la simulación de cavidades resonantes electromagnéticas, guías de onda rectangulares, interfaces y láminas. En todos los casos, los resultados numéricos se compararán con las predicciones teóricas.

Este TFG está dividido en dos capítulos principales: un capítulo teórico, donde se profundizará en los fundamentos del método TLM, y un capítulo de resultados y discusión, en el que se analizarán los resultados obtenidos para los sistemas mencionados.

2 Fundamento teórico

En este capítulo se presentarán los conceptos teóricos esenciales para comprender el método TLM. Se abordarán los principios de funcionamiento de las líneas de transmisión para comprender la física de los nudos. Se describen los modelos de nudo serie y paralelo, que permiten simular modos electromagnéticos bidimensionales, y se introduce el nudo tridimensional condensado, que será el que emplearemos en las simulaciones de este TFG.

2.1 Conceptos fundamentales de las líneas de transmisión

Las líneas de transmisión, LT, son estructuras fundamentales en la ingeniería eléctrica y de telecomunicaciones, utilizadas para transportar señales eléctricas de un punto a otro con la menor distorsión posible. Una línea de transmisión se puede entender como un sistema que transporta ondas transversales electromagnéticas. En un sistema de transmisión de ondas constituido por un generador que proporciona energía, un sistema que recibe la energía y el cable que los conecta, la línea de transmisión sería el cable que conecta el generador y el receptor y por el cual se propaga la señal electromagnética. Algunos ejemplos son un cable de alta tensión o un cable coaxial.

Normalmente, en teoría de circuitos se considera que las señales que viajan a través de los cables lo hacen sin que se produzca retardo de un punto a otro y sin que haya reflexiones ni transmisiones. Esto se cumple cuando la longitud de onda de la señal electromagnética es mucho mayor que la longitud del cable. Sin embargo, para el caso en el que la longitud de onda es del orden de la longitud del cable debemos considerar que la onda se propaga con una velocidad finita ya que esta cambia de fase a lo largo del cable y sufre procesos de transmisión y reflexión parciales al alcanzar una carga o una discontinuidad. Para este caso, los cables por los que viaja la señal son líneas de transmisión.

2.1.1 Características de una línea de transmisión ideal

Considérese una línea de transmisión ideal sin pérdidas, con intensidad, i , y voltaje, v . La línea viene definida por su capacidad, C , e inductancia, L , por unidad de longitud. Estos parámetros determinan cómo se propagan las señales a lo largo de la línea.

Si tomamos una porción elemental de línea, de longitud dx , esta se suele representar como se indica en la figura 1. Sustituyendo la capacitancia y la inductancia por unidad de longitud por un capacitor, con capacidad Cdx , y un inductor, con inductancia Ldx , se obtiene la figura 2 para esta porción elemental. Es importante destacar que, debido al hecho de que las propiedades de la LT están distribuidas a lo largo la misma y que, al trabajar en alta frecuencias, el estado estacionario no se alcanzará instantáneamente, tanto la corriente como el voltaje son función de la posición y del tiempo [CE18].

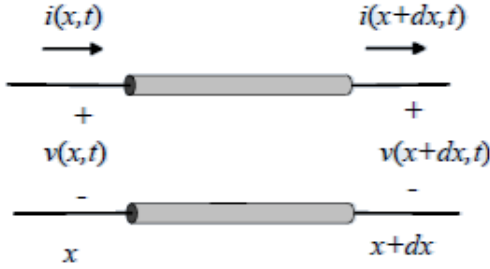


Figura 1: Línea de transmisión. Imagen extraída de [Por].

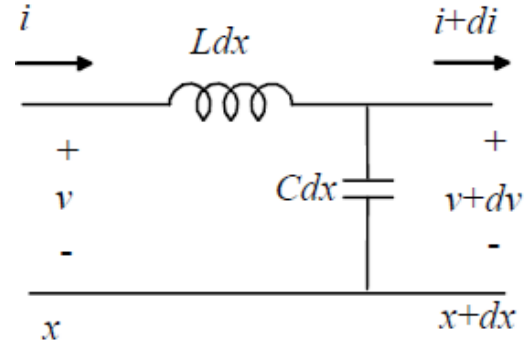


Figura 2: Línea de transmisión como circuito. Imagen extraída de [Por].

Al aplicar las leyes de Kirchhoff a la figura 2 se obtienen las ecuaciones

$$v = Ldx \frac{\partial i}{\partial t} + (v + dv), \quad i = Cdx \frac{\partial v}{\partial t} + (i + di), \quad (2.1)$$

de las que se deducen las ecuaciones

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -L \frac{\partial i}{\partial t}, \quad \frac{\partial i}{\partial x} = -C \frac{\partial v}{\partial t}, \quad (2.2)$$

conocidas como las ecuaciones del telegrafista [Plo94].

Derivando (2.2) respecto a x , y sustituyendo $\frac{\partial v}{\partial x}$ y $\frac{\partial i}{\partial x}$, se obtiene la ecuación

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - LC \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0 \quad \frac{\partial^2 i}{\partial x^2} - LC \frac{\partial^2 i}{\partial t^2} = 0, \quad (2.3)$$

que es la ecuación de onda, con velocidad de propagación $v_l = 1/\sqrt{LC}$, y cuya solución es

$$V(t, x) = V^i f(t - x/v_l) + V^r f(t + x/v_l) \quad I(t, x) = I^i f(t - x/v_l) + I^r f(t + x/v_l), \quad (2.4)$$

siendo f una función arbitraria y V^i , V^r , I^i y I^r constantes que describen la amplitud de las ondas incidente y reflejada. Esto nos indica que la tensión e intensidad se van a propagar por la línea como una onda, con parte incidente y reflejada. La impedancia se define como $Z_0 \equiv \frac{V^i}{I^i} = -\frac{V^r}{I^r}$ y en este caso su valor es $Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}}$ [CE18].

En general, $Z = \frac{V}{I} \neq Z_0$, pero el caso en el que solo haya onda incidente y no reflejada $V = V^i$ y $I = I^i$, ya que $V^r = I^r = 0$. Esto implica que $Z_0 = V^i / I^i$, con lo que $V = Z_0 I$, es decir, la línea de transmisión se comportará como una resistencia de valor Z_0 .

2.1.2 Coeficientes de transmisión y reflexión

Para casos como el de la figura 3, en el que una línea de transmisión, con impedancia Z_i , se conecta a una carga Z_L , habrá que estudiar qué parte de la onda se transmite y se refleja, es decir, el coeficiente de transmisión, T , y reflexión, Γ .

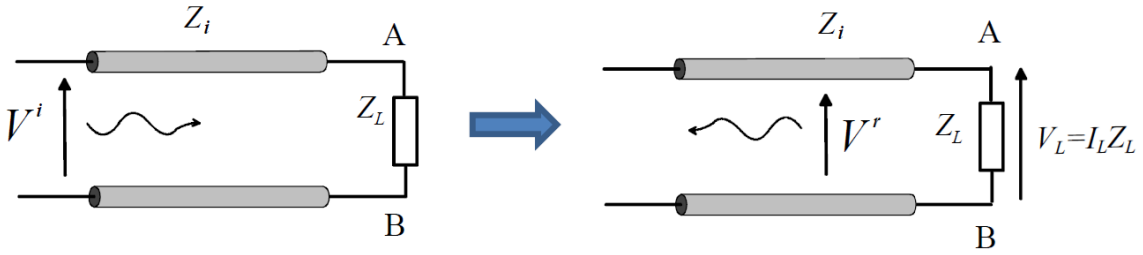


Figura 3: Línea de transmisión conectada a una carga. Imagen extraída de [Por].

En el instante en el que la onda incidente V^i alcanza la carga, la onda incidente y reflejada estarán superpuestas, con lo que la amplitud de la intensidad (I_l) y el potencial de la carga (V_l) vendrán dados por

$$V_l = V^i + V^r \quad \frac{V_l}{Z_l} = I_l = I^i + I^r = \frac{V^i - V^r}{Z_0}. \quad (2.5)$$

De estas dos ecuaciones se deducen los coeficientes de transmisión y reflexión [Plo94]:

$$\Gamma = \frac{V^r}{V^i} = \frac{Z_l - Z_i}{Z_l + Z_i} \quad T = \frac{V_l}{V^i} = \frac{2Z_l}{Z_l + Z_i} = 1 + \Gamma, \quad (2.6)$$

2.1.3 Condensador como línea de transmisión

Ahora que los coeficientes de transmisión y reflexión son conocidos, se va a estudiar cómo se comporta una línea de transmisión abierta de longitud, l , con una fuente conectada que suministra un voltaje de amplitud V_b . La fuente tiene resistencia interna $R_s = 3Z_0$. En la figura 4 se representa el sistema descrito.

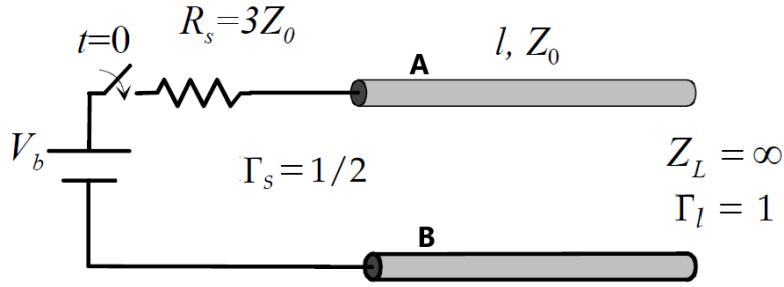


Figura 4: Línea de transmisión abierta. Imagen extraída de [Por].

Supóngase que en $t=0$ se conecta la fuente, entonces se generará un pulso incidente V^i . Puesto que todavía no hay pulso reflejado, se cumple que $V = IZ_0$, por lo que el pulso incidente resultará en un divisor de tensiones, con lo que el voltaje y la intensidad vendrán dado por

$$V^i = \frac{Z_0}{Z_0 + R_s} V_b = \frac{V_b}{4} \quad I^i = \frac{V^i}{Z_0} = \frac{V_b}{4Z_0}. \quad (2.7)$$

Después de un tiempo $T = l/v_l$, la onda incidente llegará al extremo del circuito. De acuerdo con la ecuación (2.6), al ser $Z_L = \infty$, el coeficiente de reflexión será $\Gamma_L = 1$. Por tanto, la onda reflejada vendrá dada por

$$V^r = \frac{V_b}{4} \quad I^r = -\frac{V^i}{4Z_0}. \quad (2.8)$$

En $t = 2T$ la onda V^r llegará a la fuente y se reflejará según el coeficiente de reflexión en la fuente. Se supondrá que este tiene un valor de $\Gamma_s = 1/2$, por lo que $V^{r'} = \frac{V_b}{8}$ y $I^{r'} = \frac{V_b}{8Z_0}$. Esta onda se volverá a reflejar y así sucesivamente.

Siguiendo este proceso, la tensión y la intensidad en AB cambia cada intervalo de tiempo $2T$, en las figuras 5 y 6 se muestran los histogramas que reflejan la evolución de V e I respectivamente. Como se observa, este proceso de reflexión y superposición lleva a que el voltaje alcance un valor de saturación mientras que la corriente tiende a cero. Si la línea es corta, los histogramas se asemejan a una función continua idéntica a la de un condensador. Concluimos que una línea de transmisión suficientemente corta y en circuito abierto equivale a un condensador con $C_{equivalente} = C \cdot l$ [Plo94].

Mediante un proceso análogo, se deduce que si la línea estuviese cortocircuitada, esta equivaldría a una autoinducción de $L_{equivalente} = L \cdot l$ [Plo94].

Finalmente, si tenemos una línea infinitamente larga o adaptada en su extremo, $Z_L = Z_0$, solo hay onda incidente y la línea equivale a una resistencia de valor Z_0 [Plo94].

2.1.4 El Equivalente Thevenin de una línea de transmisión

El concepto de equivalente Thevenin es bien conocido y útil en teoría de circuitos, ya que, generalmente, simplifica redes complejas en una fuente de voltaje

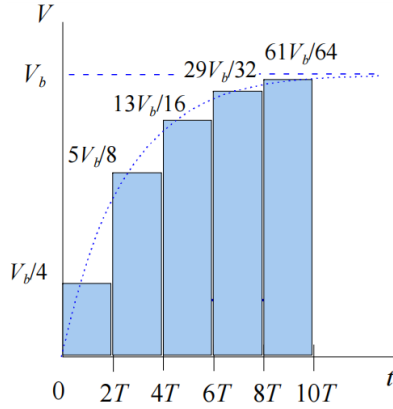


Figura 5: Evolución de V en el punto A y B. Imagen extraída de [Por].

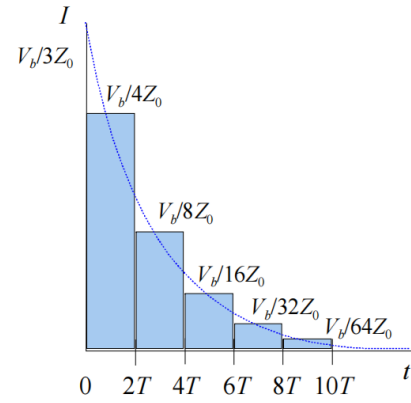


Figura 6: Evolución de I en el punto A y B. Imagen extraída de [Por].

y una resistencia. En esta sección se va a estudiar cómo extender este concepto a líneas de transmisión. Para ello, se considera una línea de transmisión como la de la figura 7, donde V_{AB} es la tensión entre los puntos A y B. La línea está abierta y tiene un pulso incidente, V^i , que llega al extremo del circuito AB y se refleja, generándose un pulso reflejado, V^r . Existe un corolario que afirma que, en el momento en el que V^i y V^r están superpuestos, se puede calcular un equivalente Thevenin de la línea de transmisión obteniéndose el circuito de la figura 7 donde Z^T es la impedancia equivalente de Thevenin, V^T es la fuente de tensión equivalente de Thevenin e I es la corriente en el circuito equivalente de Thevenin [Chr07].

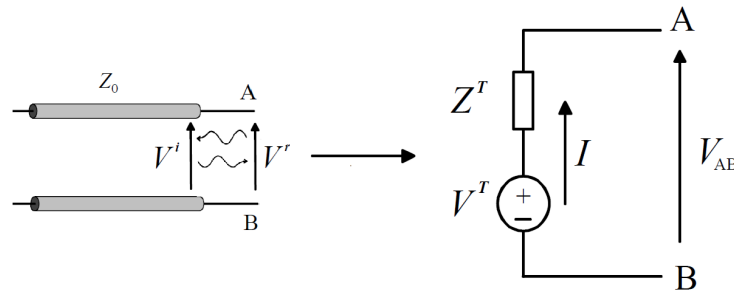


Figura 7: Equivalente Thevenin línea de transmisión. Imagen extraída de [Por].

Teniendo en cuenta lo siguiente: $V_{AB} = V^i + V^r$, $I = I^i + I^r = \frac{V^i}{Z_0} - \frac{V^r}{Z_0}$, la condición de $I = 0$ equivale a $V^i = V^r$, y la condición de $V_{AB} = 0$ equivale a $V^i = -V^r$. La tensión y la impedancia Thevenin se calculan mediante las siguientes expresiones [Chr07]:

$$V_{AB} = V^T - IZ^T \quad \left| \quad \begin{aligned} V^T &= V_{AB}|_{I=0} = V^i + V^r = 2V^i \\ Z^T &= \left(\frac{V^T}{I} \right)_{V_{AB}=0} = \frac{2V^i}{V^i/Z_0 - (-V^i/Z_0)} = Z_0 \end{aligned} \right. \quad (2.9)$$

2.2 El método TLM

El método de líneas de transmisión, TLM, fue desarrollado en la década de 1970 por Peter B. Johns como una alternativa conceptual al método de diferencias finitas, puramente matemático, para resolver ecuaciones de onda en electromagnetismo

El método numérico de modelado por líneas de transmisión (TLM) se basa en discretizar el espacio en porciones de dimensión Δl y sustituir cada porción por circuitos elementales análogos o nudos contruidos con líneas de transmisión, estableciendo una analogía entre el voltaje y la corriente de las líneas de transmisión que forman estos nudos y el campo eléctrico y magnético. De esta forma, se podrá simular la propagación de ondas electromagnéticas bajo diferentes condiciones a través del estudio de cómo se transmiten y reflejan los pulsos de tensión en una malla de líneas de transmisión formada por nudos TLM conectados, la malla TLM.

En este método, cada línea modela una componente del campo eléctrico y magnético relacionándolos con su voltaje e intensidad. Esta relación viene dada por las expresiones

$$E_i \equiv \frac{V_i}{\Delta l}, \quad H_i \equiv \frac{I_i}{\Delta l}, \quad (2.10)$$

siendo el subíndice i la componente de cada vector. Hay que tener en cuenta que, por razones históricas, la polaridad está invertida para ambos campos.

Los diferentes modos de propagación electromagnéticos se modelan a través de nudos específicos. A continuación se van a estudiar algunos de ellos.

2.2.1 El nudo serie.

El primer nudo serie se desarrolló en 1974 para resolver problemas bidimensionales en los que las ondas electromagnéticas se propagan en un plano en el modo TE_z [Joh74]. Este nudo está compuesto por cuatro líneas de igual impedancia, Z_0 , capacidad, C , inducción, L , y longitud, $\Delta l/2$. En la figura 8 se muestra cómo se conectan estas líneas, siendo V_1 , V_2 , V_3 y V_4 el voltaje correspondiente a las líneas 1, 2, 3 y 4 respectivamente y I_z la corriente común a todas las líneas, que no tiene el sentido $-\hat{z}$ debido a la polaridad invertida mencionada anteriormente.

El modo 2D TE_z consiste en una configuración de las ondas electromagnéticas en donde la componente z del campo eléctrico es nula, $E_z = 0$, y por consecuencia las componentes x e y del campo magnético también, $H_x = H_y = 0$, y es simétrico respecto al eje z , $\left(\frac{\partial}{\partial z} = 0\right)$, es decir, solo se produce propagación en el plano xy .

Se puede establecer una analogía entre el modo 2D TE_z y el nudo serie. A continuación, se va a estudiar como establecer esta analogía siguiendo el procedimiento descrito en [Chr07]. Para ello, se parte de las ecuaciones de Maxwell

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \vec{E} &= 0 & \nabla \cdot \vec{H} &= 0 \\
\nabla \times \vec{E} &= -\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} & \nabla \times \vec{H} &= \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t},
\end{aligned} \tag{2.11}$$

donde ϵ_0 es la permitividad eléctrica del vacío y μ_0 es la permeabilidad magnética del vacío. Teniendo en cuenta que $E_z = 0$ y que $\left(\frac{\partial}{\partial z} = 0\right)$, se deducen las siguientes ecuaciones para el modo TE_z:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} &= -\mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial t} \\
\frac{\partial H_z}{\partial y} &= \epsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial t} \\
-\frac{\partial H_z}{\partial x} &= \epsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t}
\end{aligned} \tag{2.12}$$

Con el fin de hallar las ecuaciones que describen el nudo serie, Johns propuso el modelo representado en la figura 9 para el nudo serie [Chr07; Joh74]. Agrupando elementos afines, es decir, agrupando condensadores e inductores obtenemos el circuito de la figura 10, siendo V_x , V_y , I_x y I_y los voltajes e intensidades correspondientes a cada eje.

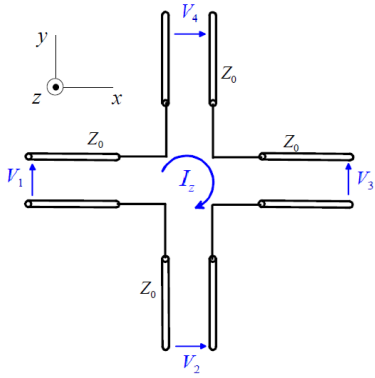


Figura 8: Nudo serie. Imagen extraída de [Por].

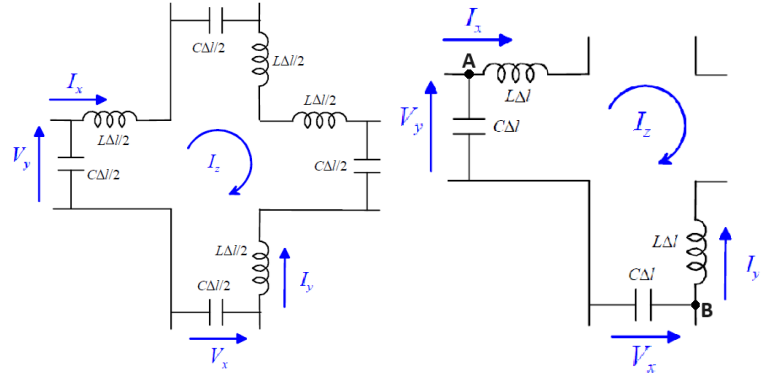


Figura 9: Modelo del nudo serie. Imagen extraída de [Por].

Figura 10: Modelo agrupado del nudo serie. Imagen extraída de [Por].

Aplicando la primera ley de Kirchhoff en los puntos A y B del circuito 10 y la segunda ley de Kirchhoff en un camino que compare las tensiones antes y después de las inducciones, se obtienen las ecuaciones

$$\begin{aligned}
I_x(x, y) &= C\Delta l \frac{\partial V_y}{\partial t} + I_x(x + \Delta l, y), & V_x(x, y) &= L\Delta l \frac{\partial I_y}{\partial t} + V_x(x, y + \Delta l), \\
I_y(x, y) &= C\Delta l \frac{\partial V_x}{\partial t} + I_y(x, y + \Delta l), & V_y(x, y) &= L\Delta l \frac{\partial I_x}{\partial t} + V_y(x + \Delta l, y).
\end{aligned} \tag{2.13}$$

Agrupando, aplicando la definición de la derivada y teniendo en cuenta que la corriente I_z del circuito se conserva, es decir, que $I_z = I_x = -I_y$, se llega a las expresiones finales para el nudo serie:

$$\begin{aligned}\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} &= -2L \frac{\partial I_z}{\partial t} \\ -\frac{\partial I_z}{\partial x} &= C \frac{\partial V_y}{\partial t} \\ \frac{\partial I_z}{\partial y} &= C \frac{\partial V_x}{\partial t}\end{aligned}\tag{2.14}$$

Comparando la ecuación diferencial del modo 2D TEz, (2.12), y la ecuación diferencial del nudo serie, (2.14), se observa que son análogas. Por lo tanto, se puede establecer la siguiente relación directa entre sus parámetros:

$$\begin{aligned}V_x &\leftrightarrow E_x & C &\leftrightarrow \epsilon_0 \\ V_y &\leftrightarrow E_y & 2L &\leftrightarrow \mu_0 \\ I_z &\leftrightarrow H_z\end{aligned}\tag{2.15}$$

Esto implica que, ya que son problemas análogos, al resolver uno de los dos, también se resuelve el otro. De la analogía (2.15) se deducen las siguientes relaciones entre los parámetros del medio y las líneas:

$$\begin{aligned}v_m = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} &\leftrightarrow v_m = \frac{1}{\sqrt{2LC}} = \frac{v_l}{\sqrt{2}} = \frac{\Delta l}{\sqrt{2}\Delta t}, \\ Z_m = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} &\leftrightarrow Z_m = \sqrt{\frac{2L}{C}} = Z_m = \sqrt{2}Z_0,\end{aligned}\tag{2.16}$$

donde Z_m es la impedancia del medio modelado, v_m es la velocidad a la que viajan las señales en el medio modelado y $\Delta t = \Delta l / v_l$ es el paso temporal del método. Esto implica que, en el caso bidimensional, el medio modelado tiene impedancia $\sqrt{2}$ veces la de las líneas de transmisión y una velocidad de señal en el medio modelado $\sqrt{2}$ menor que la de las líneas.

Como se ha explicado anteriormente, mediante esta analogía es posible resolver el problema del modo 2D TEz utilizando el nudo serie. Para ello, se discretiza el espacio en porciones de dimensión Δl , sustituyendo cada una de ellas por un nudo serie y se estudia la evolución de V e I en el circuito global con el fin de determinar la evolución de E y H .

Para estudiar cómo se distribuye un pulso incidente al llegar a un nudo, se debe tener en cuenta que, al no haber todavía pulso reflejado, las líneas de transmisión se comportan como resistencias. De este modo, en un nudo serie con un pulso incidente $V_1 = V^i$, se sustituyen las líneas de transmisión por resistencias, lo que resulta en el circuito de la figura 11.

Este caso es análogo al de la figura 3, por lo que podemos aplicar ecuación (2.6), sustituyendo Z_i por Z_0 y Z_l por $3Z_0$, obteniendo los coeficientes de reflexión

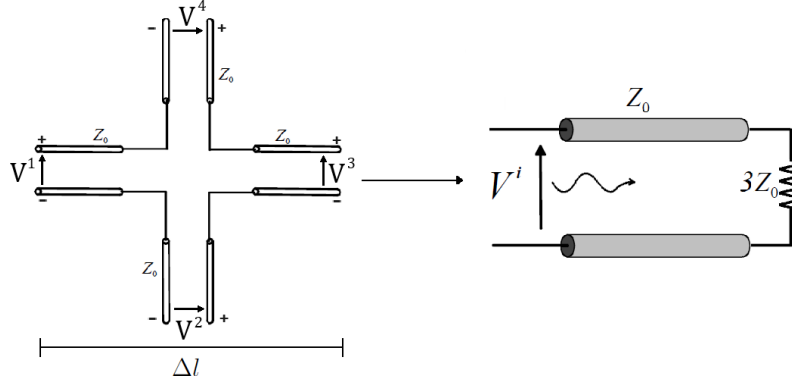


Figura 11: Nudo en serie con un pulso incidente. Imagen extraída de [Por].

y transmisión $\Gamma = \frac{1}{2}$ y $T = \frac{3}{2}$. Por tanto, el pulso reflejado será $V^r = V^i/2$ y el transmitido $V^t = \frac{3}{2}V^i$. El pulso transmitido se distribuirá uniformemente por las líneas 2, 3 y 4, es decir, se distribuirá en tres pulsos iguales.

Con esta información se deduce cómo se distribuirá el pulso incidente. Partiendo de una situación inicial en la que los pulsos incidentes son $V_1 = V^i$, $V_2 = 0$, $V_3 = 0$ y $V_4 = 0$, obtenemos como pulso reflejado $V_1 = \frac{V^i}{2}$ y como pulsos transmitidos $V_2 = \frac{V^i}{2}$, $V_3 = \frac{V^i}{2}$ y $V_4 = -\frac{V^i}{2}$. Nótese que el signo negativo de V_4 se debe al hecho de que las líneas de transmisión 1 y 4 tienen distinta polaridad. Aplicando este procedimiento para cada línea se ha calculado la matriz de Scattering, \tilde{S} , obteniéndose

$$\tilde{S} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.17)$$

Esta matriz relaciona los voltajes incidentes y reflejados según la expresión

$$\vec{V}_n^r = \tilde{S} \vec{V}_n^i, \quad (2.18)$$

donde \vec{V}_n^i son los voltajes incidentes, en el instante $t_n = n\Delta t$, en forma de vectores columna y \vec{V}_n^r son los voltajes reflejados también en forma de vectores columna.

La simulación se llevaría a cabo de la siguiente manera: en un tiempo t_n , cuatro pulsos incidentes llegan al centro del nudo y se les aplica la matriz de Scattering para obtener los pulsos reflejados. Estos pulsos reflejados tardarán un tiempo Δt en recorrer una distancia Δl , alcanzando así los nudos vecinos, donde se convierten en pulsos incidentes para el siguiente intervalo temporal.

En definitiva, el método se resume en dos pasos: primero, los pulsos inciden en cada nudo generando pulsos reflejados; segundo, estos pulsos reflejados se propagan hasta llegar al siguiente nudo. Esto se puede resumir en las siguientes dos expresiones:

$$\vec{V}_n^r = \tilde{S} \vec{V}_n^i \quad y \quad \vec{V}_n^r = \tilde{T} \vec{V}_n^i, \quad (2.19)$$

donde \tilde{T} es la matriz de evolución temporal, y el subíndice n indica la iteración en la que estamos, es decir, el paso discreto en el tiempo correspondiente a $t_n = n\Delta t$. Cada iteración consiste en aplicar Scattering y luego aplicar la evolución temporal.

2.2.2 El nudo paralelo.

De igual manera que para simular el modo 2D TE_z se presentó el nudo serie, también se propuso el nudo paralelo para simular el modo TM_z, representado en la figura 12. En este modo tenemos una onda plana caracterizada por tener simetría respecto al eje z y $H_z = 0$, de modo que las variables no nulas son E_z , H_x y H_y . En lugar de impedancias, para el nudo paralelo, se emplean admitancias ($Y_0 = 1/Z_0$).

Para deducir la matriz de Scattering del nudo paralelo se supone una onda incidente por la línea de transmisión 1, $V_1 = V^i$. Sustituyendo las impedancias por admitancias en la ecuación (2.6) obtenemos los coeficientes de reflexión y transmisión para el nudo paralelo: $\Gamma = \frac{Y_i - Y_l}{Y_i + Y_l} = -\frac{1}{2}$ y $T = \frac{2Y_i}{Y_i + Y_l} = \frac{1}{2}$, donde Y_i es la admitancia de la línea correspondiente al pulso incidente y Y_l es la admitancia equivalente del resto de las líneas. Asociando las admitancias de las líneas 2, 3 y 4 se obtiene una admitancia equivalente $Y_l = 3Y_0$. Con esto se puede calcular la matriz de Scattering [Chr07]

$$\tilde{S} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.20)$$

En este caso, para la onda reflejada se invierte el signo mientras que para el resto no, ya que todas tienen la misma polaridad.

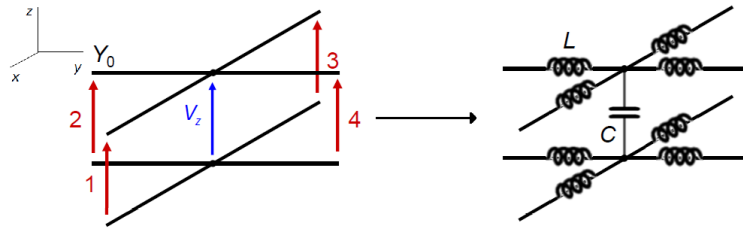


Figura 12: Nudo paralelo. Imagen extraída de [Por].

2.2.3 Nudo 3D

El nudo simétrico condensado fue propuesto en 1987 por P.B. Johns con el fin de analizar ondas electromagnéticas mediante el método TLM en casos generales tridimensionales. Este nuevo nudo tiene la ventaja de condensar los componentes

De la ecuación de Maxwell

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -\mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial t}, \quad (2.22)$$

se deduce que la línea 1 está relacionada con la línea 12, como se sabía, y también con las líneas 3 y 11, ya que tienen componentes E_y y H_z propagándose en la dirección x . Por lo tanto, se asocia una amplitud d al pulso transmitido V_3^t y $-d$ al pulso transmitido V_{11}^t , en este caso tienen la misma amplitud pero distinto signo debido a la simetría del nudo.

En este punto es necesario aplicar conservación de la energía, de la carga y del potencial, lo que lleva a un sistema de ecuaciones con cuatro soluciones distintas, correspondiendo cada una a un modo de propagación distinto [Por93].

Este método es complejo, ya que cada vez que un pulso llega al nudo, es necesario escoger una de las soluciones de una ecuación cuadrática.

Un método mejor y más moderno para determinar la matriz de Scattering se describe en [PMC98]. Este método consiste en asociar un nudo a cada una de las ecuaciones de Maxwell asociadas a las componentes del campo eléctrico y magnético y trabajar con su equivalente de Thévenin. Dado que este método es más potente, se aplicará al nudo simétrico condensado con seis stubs, es decir, con un total de 18 líneas. Los stubs tienen una impedancia $Z_i Z_0$ y una admitancia $Y_i Y_0$, donde el índice i se refiere al eje correspondiente (x , y o z). Estos, se añaden para modificar ϵ y μ . A continuación, se mostrará cómo.

Un aumento en la permeabilidad magnética se asocia con un incremento de la inductancia en los nudos en serie, que son los que definen el campo magnético. Esto se modela mediante la inclusión de una nueva línea de transmisión con terminación cortocircuitada en el nudo serie, denominada stub inductivo, tal y cómo se muestra en la figura 14, donde V_{18} corresponde a la línea añadida para modificar I_z .

En este stub, la señal entra, se refleja cambiando de signo y regresa al nudo. Es importante que la longitud del stub sea un múltiplo de $\Delta l/2$ para que la señal reflejada regrese en sincronía con las ondas incidentes. Este stub tiene impedancia $Z_i Z_0$ siendo el subíndice i el eje de la corriente del circuito, en este caso z , y siendo $Z_z = 2 \left(\frac{\mu \Delta x \Delta y}{Z_0 \Delta z \Delta t} - 2 \right)$. En la siguiente ecuación se muestran las fórmulas para $Z_x = Z_y = Z_z$ en el caso en el que líneas principales se eligen de forma que su impedancia sea la del vacío [Por93]:

$$Z_x = 2 \left(\frac{\mu_r \Delta y \Delta z}{\Delta x c \Delta t} - 2 \right), \quad Z_y = 2 \left(\frac{\mu_r \Delta x \Delta z}{\Delta y c \Delta t} - 2 \right), \quad Z_z = 2 \left(\frac{\mu_r \Delta x \Delta y}{\Delta z c \Delta t} - 2 \right), \quad (2.23)$$

$\mu_r = \mu / \mu_0$ es la permeabilidad relativa.

Un aumento en la permitividad eléctrica se asocia con un incremento en la capacitancia de los nudos que definen el campo eléctrico. Este efecto se representa mediante la introducción de una nueva línea de transmisión con terminación abierta en el nudo paralelo, que es un stub capacitivo, como se ilustra en la figura

15. En este caso, el proceso es análogo al del stub capacitivo con la diferencia de que la onda se refleja en la línea 13 sin invertir su signo. Para el caso en el que la impedancia de las líneas principales sea la del vacío, las admitancias vendrán dadas por la siguiente ecuación [Por93]:

$$Y_x = 2 \left(\frac{\epsilon_r \Delta y \Delta z}{\Delta x c \Delta t} - 2 \right), \quad Y_y = 2 \left(\frac{\epsilon_r \Delta x \Delta z}{\Delta y c \Delta t} - 2 \right), \quad Y_z = 2 \left(\frac{\epsilon_r \Delta x \Delta y}{\Delta z c \Delta t} - 2 \right), \quad (2.24)$$

siendo $\epsilon_r = \epsilon / \epsilon_0$ la permitividad relativa.

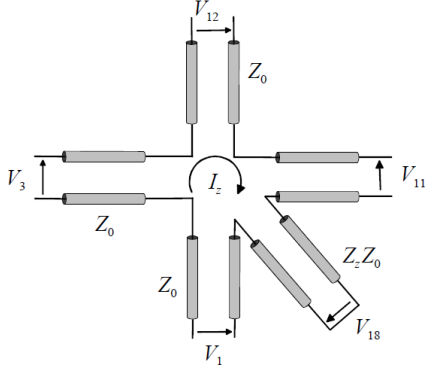


Figura 14: Nudo serie con stub cortocircuitado. Imagen extraída de [Por].

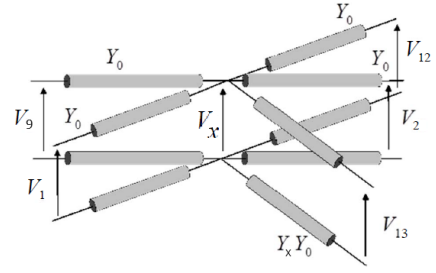


Figura 15: Nudo paralelo con stub. Imagen extraída de [Por].

Las pérdidas en el sistema se asocian a la energía disipada a través del campo eléctrico. Estas pérdidas se representan mediante una línea de transmisión de longitud infinita conectada al nudo paralelo, de modo que las señales que llegan nunca regresan, simulando una pérdida de la energía. Este caso es similar al representado en la figura 15 pero con la diferencia de que la línea 13 tendría una longitud infinita.

Ahora que los stubs y su propósito son conocidos, se va a continuar con el método mencionado anteriormente. Se analizarán E_x y H_z , ya que son las componentes asociadas al pulso incidente, V_1 . A la componente E_x de V_1 se le asocia la ecuación (2.21), que a su vez está relacionada con el nudo paralelo y su equivalente de Thévenin, como se muestra en la figura 16.

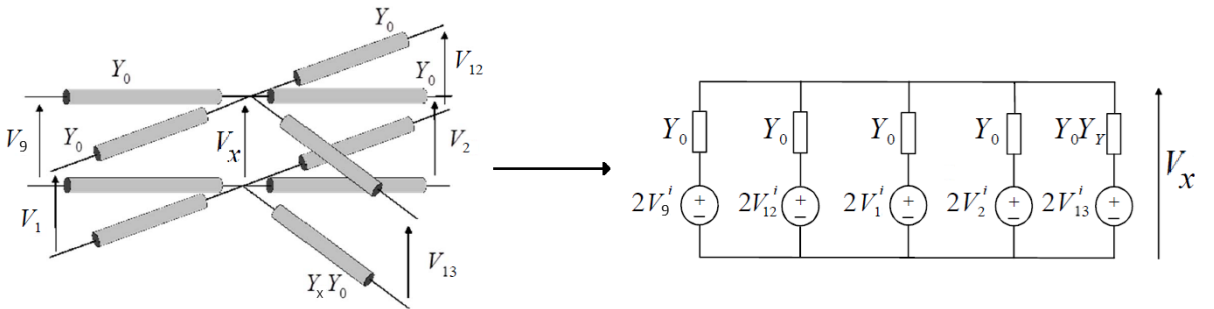


Figura 16: Nudo paralelo y su equivalente Thevenin. Imagen extraída de [Por].

Por otro lado, a la componente H_z le corresponde la ecuación (2.22) y al nudo

serie con su correspondiente equivalente Thévenin, representados ambos en la figura 17.

Aplicando las leyes de Kirchhoff al nudo paralelo, es posible derivar una expresión para calcular E_x , tal y como se muestra en la ecuación

$$E_x \equiv \frac{V_x}{\Delta l} = 2 \frac{V_1^i + V_2^i + V_9^i + V_{12}^i + Y_y V_{13}^i}{\Delta l (4 + Y_y)} \quad (2.25)$$

De manera similar, al aplicar las mismas leyes al nudo serie se obtiene, para H_z , la ecuación

$$H_z \equiv \frac{I_z}{\Delta l} = 2 \frac{-V_1^i + V_3^i - V_{11}^i + V_{12}^i + V_{18}^i}{\Delta l Z_0 (4 + Z_z)} \quad (2.26)$$

De esta forma se podrán calcular las componentes del campo eléctrico y magnético en función de los voltajes incidentes de las líneas.

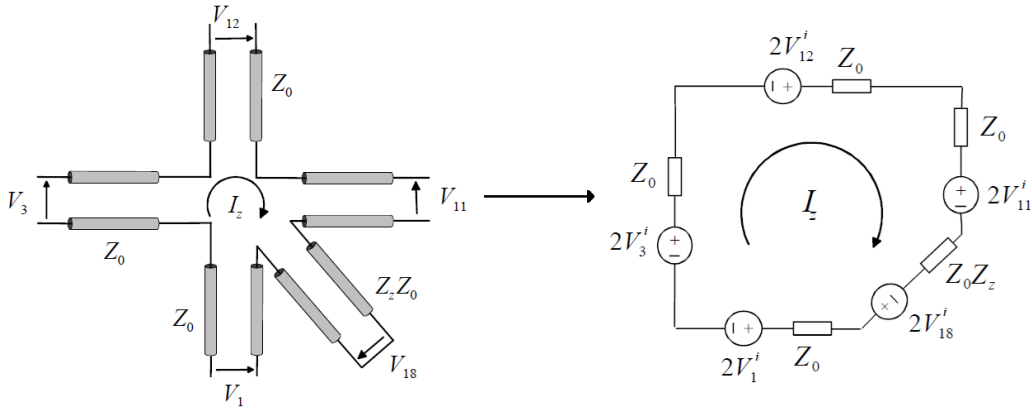


Figura 17: Nudo serie y su equivalente Thevenin. Imagen extraída de [Por].

Para calcular cómo se relaciona el pulso incidente, V_1 , con los pulsos reflejados y transmitidos, hay que resolver las ecuaciones (2.21) y (2.22) simultáneamente, o lo que es lo mismo, los circuitos 16 y 17. Al fijarse en ambos circuitos, es fácil ver que las líneas 1 y 12 son comunes a ambos y el resto de líneas son independientes.

Como ya se ha discutido, para el nudo paralelo, el coeficiente de transmisión viene dado por la expresión $T = \frac{2Y_i}{Y_l + Y_i} = \frac{2}{4 + Y_x}$, donde $Y_i = Y_0$ es la admitancia de la línea por donde incide el pulso, y $Y_l = 3Y_0 + Y_x Y_0$ es la admitancia equivalente de las líneas 2, 9, 12 y 13. Dado que las líneas 1 y 12 están acopladas, igual que las ecuaciones (2.21) y (2.22), no se puede realizar un análisis directo sobre ellas. Por otro lado, es sencillo ver que la señal se transmitirá de igual manera a las líneas 2, 9 y 13, con lo que $b = e = T = \frac{2}{4 + Y_x}$, siendo e la amplitud transmitida a la línea

Para el nudo serie, el coeficiente de transmisión es $T = \frac{2Z_l}{Z_l + Z_i} = 2 \frac{Z_0(3 + Z_z)}{4Z_0 + Z_z Z_0}$, donde $Z_i = Z_0$ y $Z_l = 3Z_0 + Z_z Z_0$. El potencial se repartirá según un divisor de

tensiones, por lo tanto, las tensiones de las líneas 3, 11 y 18 vendrán dadas por las expresiones

$$-V_{11} = V_3 = d = TV_1^i \cdot \frac{Z_3}{Z_l} = \frac{2}{4 + Z_z}, \quad V_{18} = f = TV_1^i \cdot \frac{Z_{18}}{Z_l} = \frac{2Z_z}{4 + Z_z}, \quad (2.27)$$

donde f es la amplitud transmitida a la línea 18, $Z_3 = Z_0$ es la impedancia de la línea 3 y $Z_{18} = Z_z Z_0$ es la impedancia de la línea 18.

Las expresiones de $V_1 = a$ y $V_{12} = c$ se deducen de aplicar conservación de la carga al equivalente Thevennin del nudo paralelo (figura 16) y conservación del potencial al equivalente Thevennin del nudo serie (figura 17). En la siguiente ecuación se muestran las expresiones deducidas:

$$\sum I_i = 0 \rightarrow 1 = a + c + (2 + Y_x)b, \quad \sum V_i = 0 \rightarrow 1 = -a + c + 2d + f. \quad (2.28)$$

Conocemos todos los coeficientes menos a y c , por lo que tenemos un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas. En la ecuación

$$a = \frac{2 + Z_z}{4 + Z_z} - \frac{2 + Y_x}{4 + Y_x}, \quad c = 1 - \frac{2 + Y_x}{4 + Y_x} - \frac{2 + Z_z}{4 + Z_z}, \quad (2.29)$$

se muestra la solución a este sistema. Haciendo este procedimiento para el resto de líneas se obtienen el resto de relaciones y con ellas la matriz \tilde{S} . En la figura 18 se muestra la matriz junto con los los componentes asociadas a cada línea para el caso en el que $Z_x = Z_y = Z_z = Z$ y $Y_x = Y_y = Y_z = Y$.

		Línea: 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18																	
Línea:		E: x x y y z z z y x x z y x x y z																	
		H: z y z x x y x x y y z z x y z																	
1	x z	a	b	d					b		-d	c	g						i
2	x y	b	a			d			c	-d		b	g					-i	
3	y z	d		a	b			b		c	-d		g						-i
4	y x			b	a			-d	c		b			g				i	
5	z x				d	a	b	c	-d		b				g	-i			
6	z y			d		b	a	b		-d	c				g			i	
7	z x				-d	c	b	a	d		b				g	i			
8	y x				b	c	-d		d	a		b		g		-i			
9	x y		b	c		-d			a	d		b	g				i		
10	z y		-d			b	c	b		d	a			g			-i		
11	y z		-d		c	b			b		a	d		g				i	
12	x z		c	b	-d				b		d	a	g					-i	
13	x		e	e					e		e	h							
14	y			e	e				e				h						
15	z				e	e	e		e					h					
16	x				f	-f		f	-f							j			
17	y			-f			f		f	-f							j		
18	z		f	-f						f	-f							j	

Figura 18: Matriz de Scattering del nudo 3D. Imagen extraída de [Por].

Los coeficientes h y g corresponden a la amplitud reflejada y transmitida, respectivamente, para un pulso incidente en las líneas 13, 14 o 15. Los coeficientes j e i representan la amplitud reflejada y transmitida, respectivamente, para un pulso incidente en las líneas 16, 17 y 18. En la siguiente ecuación se presentan estos coeficientes, junto con los demás ya deducidos [Por93]

$$\begin{aligned}
a &= \frac{2+Z}{4+Z} - \frac{2+Y}{4+Y'}, & b &= e = \frac{2}{4+Y'}, \\
c &= 1 - \frac{2+Y}{4+Y} - \frac{2+Z}{4+Z'}, & d &= i = \frac{2}{4+Z'}, \\
f &= \frac{2Z}{4+Z'}, & g &= \frac{2Y}{4+Y'}, \\
h &= \frac{Y-4}{Y+4}, & j &= \frac{4-Z}{4+Z}.
\end{aligned} \tag{2.30}$$

2.3 Dispersión numérica

En esta sección se van a tratar algunos aspectos numéricos a tener en cuenta en la simulación. En concreto, vamos a estudiar cómo evitar los errores numéricos que se generan al discretizar el espacio y el tiempo en la simulación de las ecuaciones de Maxwell.

Para que la simulación funcione correctamente, se debe tener en cuenta el fenómeno llamado dispersión numérica, el cual provoca la distorsión de las señales. Este suceso se debe a que mientras que en el caso continuo la velocidad de fase del medio es constante e independiente de la frecuencia, en el caso discreto, la velocidad de fase numérica depende de la frecuencia y de los parámetros Δt , Δx , Δy y Δz empleados. Esta dependencia genera que diferentes componentes de frecuencia se propaguen a distintas velocidades, lo cual provoca una distorsión en la forma de onda a medida que se propaga.

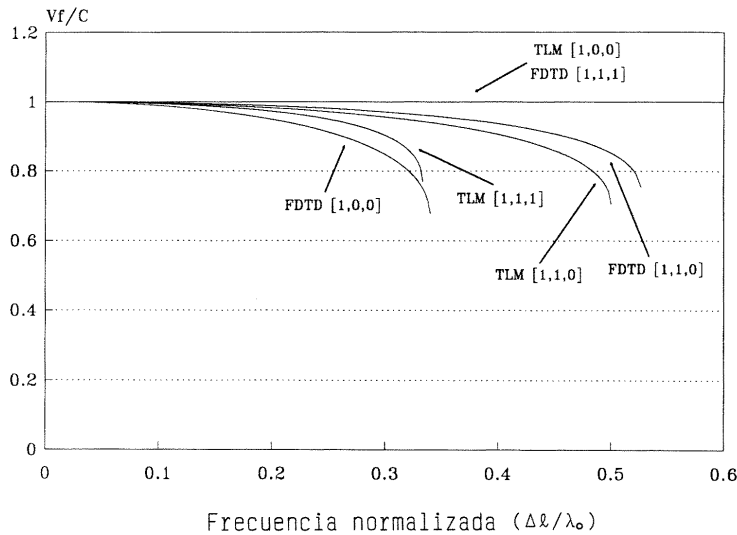


Figura 19: Velocidad de fase para las tres direcciones fundamentales para los métodos TLM y FD-TD. Imagen extraída de [Por93].

La relación entre la velocidad de fase numérica, v_f , y la frecuencia describe esta discrepancia entre las velocidades y se denomina relación de dispersión. En la figura 19 se muestra esta relación de dispersión para distintas direcciones, tanto para el método TLM como para el método de diferencias finitas, siendo v_f/c la

velocidad de fase entre la velocidad de propagación del medio, en este caso el vacío [Mor+94].

Se observa que en el vacío no hay dispersión para la dirección $[1, 0, 0]$ en el método TLM y para la dirección $[1, 1, 1]$ en el método de diferencias finitas, mientras que en el resto de las direcciones sí se presenta dispersión. Ya se ha visto que dependiendo de la dirección de propagación de la onda, esta relación cambia pero se suele admitir que para valores de $\Delta x / \lambda$ inferiores a 0.1 la velocidad de fase numérica se aproxima a la teórica, $v_f \approx c$. Por lo tanto, la longitud de onda mínima, λ_{min} , y la frecuencia máxima, f_{max} , del pulso deberán cumplir

$$\Delta l \leq 0.1 \lambda_{min} = 0.1 \frac{c}{f_{max}} \quad (2.31)$$

para que el resultado numérico sea aceptable. Si en vez de el vacío, se emplea un medio con ϵ_r o μ_r distintos de uno, se encuentra un comportamiento en la dispersión numérica algo distinto debido al efecto de los stubs. Por ejemplo, en este caso la dirección $[1, 0, 0]$ sí que presenta dispersión. Sin embargo, la condición para que el resultado numérico sea aceptable sigue siendo (2.31), sustituyendo c por la velocidad de propagación del medio [Mor+94].

2.4 Fundamentos de la simulación

En este apartado se van a discutir algunos de los aspectos fundamentales del programa Fortran de ordenador diseñado en este trabajo. Como ya se ha explicado, el método TLM se basa en discretizar el espacio en porciones de dimensión $\Delta x \Delta y \Delta z$, sustituyendo cada porción por un circuito elemental, en este caso el nudo 3D. Para simular la propagación de \vec{E} y \vec{H} , se trabajará con un programa en el que se calcula iterativamente la propagación del voltaje. Cada iteración consiste en aplicar Scattering a los pulsos incidentes de cada nudo para obtener los pulsos reflejados y en aplicar el paso del tiempo a estos pulsos reflejados para convertirlos en los pulsos incidentes de los nudos adyacentes, es decir, se aplican las ecuaciones (2.19) a cada paso.

Puesto que tenemos un voltaje para cada una de las 18 líneas del nudo 3D, se trabajará con el tensor voltaje $V(18, i_{max}, j_{max}, k_{max})$ donde el primer índice se refiere al número de líneas de transmisión. Los índices i_{max} , j_{max} y k_{max} se refieren a la cantidad de divisiones del espacio en cada dirección, es decir, una cavidad tiene dimensiones $L_x = i_{max} \Delta x$, $L_y = j_{max} \Delta y$ y $L_z = k_{max} \Delta z$. En todas las simulaciones se ha empleado un nudo simétrico, es decir, $\Delta x = \Delta y = \Delta z = \Delta l$. En general, se ha elegido $\Delta t = \Delta l / 2c$. Sustituyendo en (2.23) y (2.24), para el vacío, obtenemos $Z_x = Z_y = Z_z = Y_x = Y_y = Y_z = 0$, lo que implica que los stubs no intervendrán cuando se simule el vacío con $\Delta t = \Delta l / 2c$.

De esta forma, se excita el voltaje de alguna de las líneas en un punto elegido y aplicando las ecuaciones (2.25), (2.26) y sus análogos, se calcula el campo eléctrico y magnético en cada iteración.

2.5 Condiciones de contorno

Al trabajar en una cavidad de dimensiones finitas, como por ejemplo una cavidad electromagnética, es necesario definir las condiciones de contorno, es decir, establecer los coeficientes de reflexión ($\Gamma_x, \Gamma_y, \Gamma_z$) correspondientes a cada límite de la malla TLM. Por ejemplo, Γ_x se asociaría con los límites $x = 0$ y $x = L_x$.

Para simular cavidades electromagnéticas, Γ en los límites es -1 , pues las paredes actúan como conductores perfectos. Otros sistemas se modelan de forma similar. El hecho de que $|\Gamma| = 1$ asegura que toda la energía sea reflejada de vuelta hacia el interior de la cavidad. También se podrían usar paredes absorbentes, en cuyo caso $|\Gamma| < 1$.

Otro caso de interés será emplear coeficientes de reflexión según ciertas condiciones de simetría con el fin de reducir las dimensiones de un espacio infinito a un espacio manejable equivalente.

3 Resultados y discusión

En este trabajo se ha desarrollado un código Fortran para la simulación TLM de diferentes casos. A continuación se muestran los resultados obtenidos.

3.1 Propagación unidireccional

En esta sección se va a simular la propagación unidireccional de una onda plana en el vacío con forma de pulso gaussiano. Para la simulación, se ha implementado un programa basado en el método TLM usando nudos 3D de dimensión Δl , siendo $\Delta l = 0.1$ m y $\Delta t = \frac{\Delta l}{2c} = 1.67 \cdot 10^{-10}$ s, siendo c la velocidad de la luz en el vacío.

Para una onda plana que se propaga a lo largo del eje x , hay simetría en los ejes y y z . Esto implica que el comportamiento de los campos electromagnéticos en cualquier plano $y = y_0$ o $z = z_0$ es idéntico en los planos paralelos correspondientes. Como resultado, la dependencia del campo en y y z es nula, simplificando el problema a una dimensión en x . Teniendo esto en cuenta, la mejor opción sería usar una distribución espacial en la que, en vez de tener que excitar y simular todo el plano $x = x_0$, se alimente solo un punto y se obtenga una evolución idéntica a la de la onda plana. Esto se consigue implementando $j_{max} = k_{max} = 1$ y i_{max} libre y aplicando condiciones de contorno apropiadas a la simetría del sistema.

3.1.1 Condición de simetría

Los coeficientes de reflexión deben establecerse de tal manera que simulen una propagación idéntica en los nodos adyacentes contenidos en el plano $x = i\Delta x$, ya que se está tratando con un frente de ondas en el que hay simetría en y y en z . Se considera que los límites en el eje x son conductores perfectos, por lo tanto, $\Gamma_x = -1$.

Dependiendo de que componente del campo eléctrico y magnético se quiera estimular, alimentaremos V_3 para excitar E_y y H_z o V_6 para excitar H_y y E_z . Con el fin de deducir el valor de Γ_y , se va a estudiar la reflexión en la dirección y . En

el caso de excitar la línea 3 el pulso se transmitirá desde esta al resto de las líneas mediante Scattering; en particular nos interesan las líneas 1 y 12.

La condición de simetría debe simular la existencia de otros nudos vecinos, por los cuales se transmite la onda plana. Para entender mejor esto, en la figura 20 se ha ilustrado un nudo junto con sus dos nudos vecinos en el eje y . Se ha indicado con azul cómo se propagaría el pulso de V_3 a V_1 y V_{12} y se ha añadido un superíndice que indica la posición del nudo respecto al eje y . Puesto que V_{12}^1 y V_1^2 tienen signos contrarios y V_1^1 V_{12}^0 también se concluye que $\Gamma_y = -1$. Haciendo un análisis similar se llega a que $\Gamma_z = 1$. Si en lugar de excitar la línea 3, se hubiese excitado la línea 6, los coeficientes serían $\Gamma_y = 1$ y $\Gamma_z = -1$.

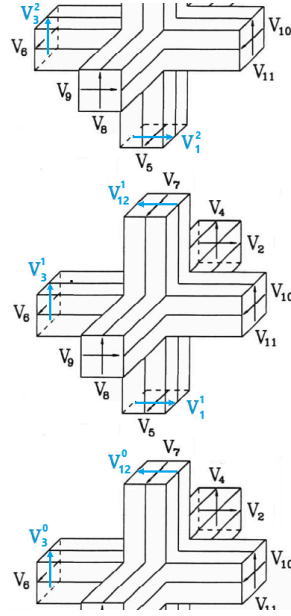


Figura 20: Ilustración de la condición de simetría. Diseño propio

3.1.2 Resultados

Para esta simulación se ha escogido la distribución espacial $i_{max} = 150$, $j_{max} = 1$, $k_{max} = 1$ con $\Delta l = 0.1$ m. Se ha alimentado la línea 3 en el punto $i_{alim} = 20$ con un pulso gaussiano. Por lo tanto, $V(3, 20, 1, 1)$ será $s(t) = V_0 e^{-g^2(t-t_m)^2}$, siendo t el tiempo, $t_m = 40\Delta t$ el retardo añadido para usar $t > 0$, $V_0 = 1$ V es la amplitud del pulso y g un parámetro de la función. Al aplicar la transformada de Fourier a $s(t)$, se obtiene $S(f) = A e^{-4\pi^2 f^2 / (4g^2)}$, para $f = 0.5g$ $S(f)$ toma un valor 0.008 veces la amplitud máxima, A . Por ello, se considera que este pulso gaussiano excita hasta una frecuencia, $f_{exc} = 0.5g$. Para asegurar que no haya dispersión numérica, se elige $f_{exc} = f_{max} = 0.1c / \Delta l = 299.79$ MHz, es decir, $g = 2f_{max} = 599.58$ MHz.

Se ha calculado E_y y H_z a lo largo de la simulación en los puntos $i_1 = 50$ y $i_2 = 100$ durante $N_{iters} = 450$ iteraciones. En la figura 21 se muestran los resultados de la simulación, siendo $E1$ y $H1$ los campos calculados en i_1 y $E2$ y $H2$ los correspondientes a i_2 . Como se observa, el pulso reflejado que llega a i_2 presenta

una inversión en el signo de E_y ya que el coeficiente de reflexión en el eje x es $\Gamma_x = -1$. La componente H_z no cambia de signo tras la reflexión. Esto se debe a que el campo eléctrico y el campo magnético deben mantener la relación correcta para satisfacer las ecuaciones de Maxwell con lo que la inversión en el signo de E_y y el cambio en la dirección de propagación se cancelan entre sí, implicando que H_z no cambie de signo.

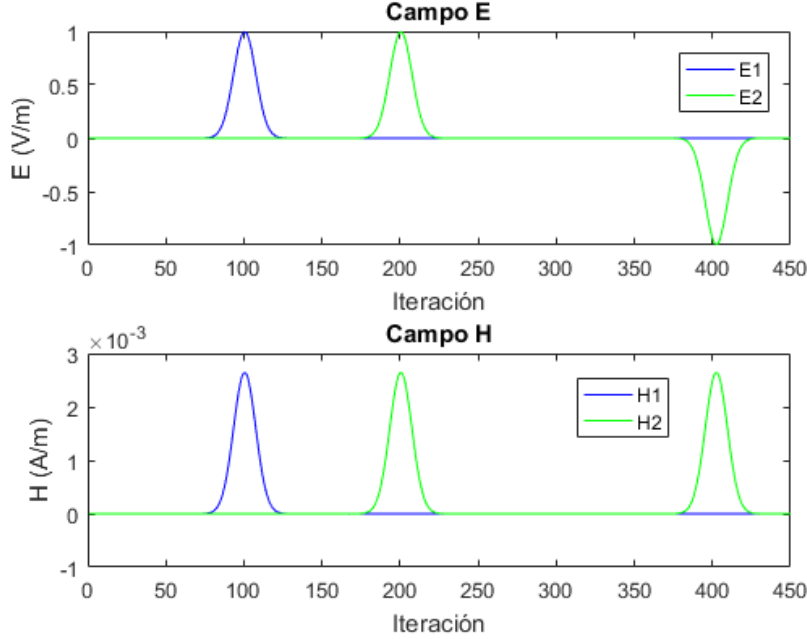


Figura 21: Pulso gaussiano unidireccional

A modo de comprobación, se analiza el tiempo que tarda en propagarse cada pulso. Para ello, debemos tener en cuenta que en una propagación unidireccional, $v_m = c/2$ [Chr07]. Desde la alimentación hasta i_1 hay una distancia de $30\Delta l$, que será recorrida en un tiempo de $60\Delta t$, es decir, en 60 iteraciones. A esto se le debe añadir el tiempo de retardo $t_m = 40\Delta t$, 40 iteraciones, por lo que se espera que el pico del pulso llegue en la iteración 100. Por otro lado, las iteraciones necesarias para que el pulso se propague desde i_1 hasta i_2 son 100, por lo que el pico del pulso llegará a i_2 en la iteración 200. Para que el pulso se propague de i_2 hasta el límite $i_{max} = 150$ serán necesarias 100 iteraciones, ya que hay una distancia de $50\Delta l$ entre ambos puntos, y para que vuelva se necesitarán otras 100 iteraciones. De este modo, el pulso volverá reflejado a i_2 en la iteración 400. Como se puede observar en la figura 21 todas estas predicciones se cumplen con lo que la simulación ha sido satisfactoria.

3.2 Pulso con dispersión numérica.

En esta sección se va a estudiar que ocurre cuando aparece el fenómeno de dispersión numérica. Para ello se ha simulado la propagación unidireccional de un pulso en un medio con $\epsilon_r = 8$. No se ha escogido el vacío porque, como se explicó en la sección 2.3, para la dirección de propagación $[1, 0, 0]$ no

hay dispersión en el vacío, mientras que sí la hay en un medio con ϵ_r mayor de uno. Se ha realizado una simulación muy similar a la del apartado anterior con la diferencia de que en este caso la frecuencia máxima que excita el pulso es $f_{exc} = 2f_{max} = 2 \cdot 0.1v_m/\Delta l$, siendo v_m la velocidad del medio. Por lo tanto, según (2.31), cabrá esperar efectos de dispersión numérica. En la figura 22 se muestran los resultados. Como se observa, debido a la dispersión numérica, la amplitud máxima disminuye mientras que la cola del pulso se deforma y alarga.

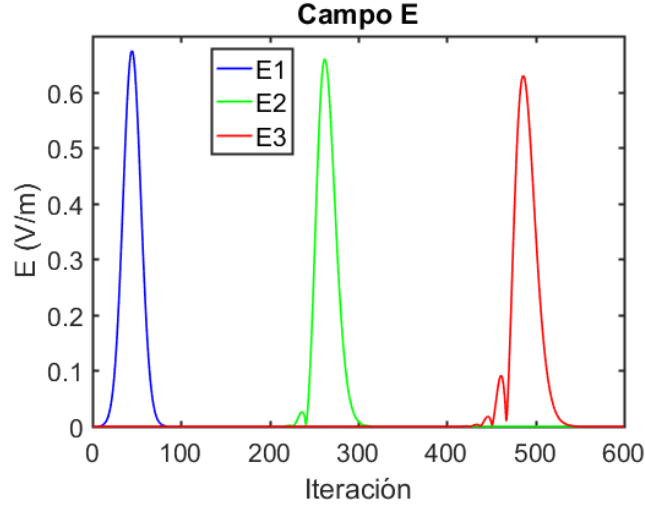


Figura 22: Propagación unidireccional con dispersión numérica.

3.3 Cavidades resonantes

Las cavidades resonantes, ampliamente conocidas y estudiadas en el electromagnetismo, se describen en [CE18; Poz21] y tienen numerosas aplicaciones en distintos campos, como en superconductores [Gao+08], o en detección de ondas gravitacionales [Ber+23]. En esta sección se estudiarán dichas cavidades, analizando los modos de resonancia en cavidades unidimensionales, bidimensionales y tridimensionales. Para ello, se excitará el sistema con una función delta de Dirac y se dejará evolucionar durante un tiempo suficiente, calculando los campos eléctricos y magnéticos en cada iteración. Posteriormente, se aplicará la transformada de Fourier a los campos calculados para identificar las frecuencias de los modos resonantes en cada caso.

En lugar de utilizar un modelo diferente para cada tipo de cavidad, se empleará el nudo tridimensional en todos los casos, aunque cada uno tenga distintas dimensiones. Esto implica que no se simularán cavidades unidimensionales o bidimensionales en el sentido estricto, sino sistemas tridimensionales en los que la propagación está limitada a una o dos direcciones, lo cual resulta equivalente. Para las cavidades unidimensionales y bidimensionales se impondrán las condiciones de simetría necesarias.

Para determinar las frecuencias de resonancia en una cavidad será necesario resolver las ecuaciones de Maxwell y a partir de ellas identificar las frecuencias de los modos.

Para simular las tres cavidades se ha empleado la siguiente discretización: $\Delta l = 0.1$ m y $\Delta t = \frac{\Delta l}{2c} = 1.67 \cdot 10^{-10}$ s.

3.3.1 Cavidad unidimensional

En primer lugar se va a estudiar la cavidad unidimensional. Ya se ha explicado que la cavidad simulada no es estrictamente unidimensional, sino que se trata de un sistema en el cual la propagación se produce únicamente en la dirección x con simetría en y y z . Se puede interpretar como una onda plana que se propaga en la dirección x , reflejándose hasta alcanzar un estado compuesto por modos estacionarios. Este caso es idéntico al de propagación unidimensional con la diferencia de que, con el fin de que aparezcan los modos, se ha escogido un número de iteraciones mucho mayor, $N_{\text{iters}} = 1000000$, y una tamaño más pequeño, $L = i_{\text{max}} \Delta l = 50$ m con $i_{\text{max}} = 500$.

Debido a la simetría existente en y y z , la solución a las ecuaciones de Maxwell en esta cavidad solo dependerá de x . La solución viene dada por la siguiente expresión

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(x) &= E_{0y} \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \hat{y} + E_{0z} \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \hat{z}, \\ \mathbf{H}(x) &= \frac{E_{0y}}{Z_0} \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \hat{z} + \frac{E_{0z}}{Z_0} \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \hat{y}, \end{aligned} \quad (3.1)$$

donde E_{0y} y E_{0z} son las amplitudes del campo eléctrico en las direcciones \hat{y} y \hat{z} , expresados en forma de fasor, $Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}$ es la impedancia del vacío, y m es un parámetro que toma los valores $m = 1, 2, \dots$

Las frecuencias de resonancia, f_r , vendrán dadas por la ecuación

$$f_r = \frac{1}{2\sqrt{\mu_0\epsilon_0}} \frac{m}{L} \quad (3.2)$$

Se ha excitado la línea V_3 , es decir, E_y y H_z , mediante un impulso unitario en el punto $i_{\text{alim}} = 27$ en tiempo $t = 0$. Posteriormente, se han realizado iteraciones midiendo E_y en los puntos $i_1 = 50$ y $i_2 = 250$, correspondientes a $x_1 = L/10$ y $x_2 = L/2$. A continuación, se ha aplicado la transformada de Fourier a E_y con el objetivo de identificar las frecuencias de los modos resonantes.

De acuerdo con la ecuación (3.1), es fácil ver que los modos pares no se manifestarán en i_2 , ya que $\sin(m\pi/2) = 0$ para todo m par. De igual forma, los modos múltiplos de 10 no aparecerán en el punto i_1 , ya que $\sin(m\pi/10) = 0$ para tales valores de m .

En la figura 23 se muestra el campo eléctrico en función de la iteración y su transformada de Fourier en función de la frecuencia en MHz junto a las frecuencias teóricas, siendo $E1$ el campo eléctrico calculado en i_1 y $E2$ el calculado en i_2 . Como se puede observar en la transformada de Fourier aparecen picos que corresponden a los modos resonantes y todos estos coinciden con las frecuencias teóricas. Tal y como se había predicho, los picos pares no se manifiestan en $FFT(E2)$

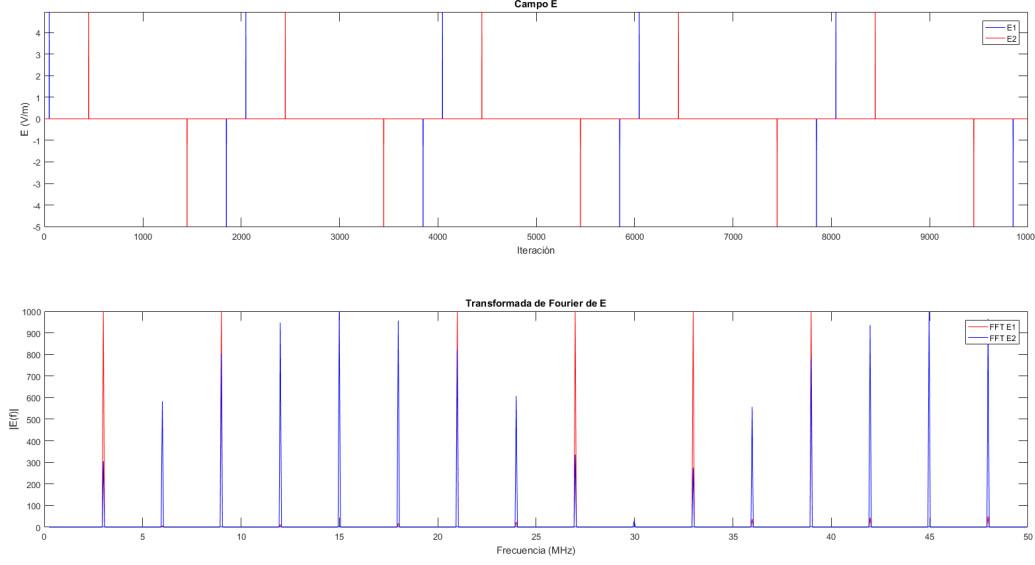


Figura 23: Campo eléctrico junto a su transformada de Fourier en una cavidad unidimensional, siendo E_1 el campo en $L/10$ y E_2 en $L/2$

y el décimo no aparece ni en $FFT(E_1)$ ni en $FFT(E_2)$, dado que es par y múltiplo de 10.

En la tabla 1 se presentan las seis primeras frecuencias numéricas, f_{num} , comparadas con las frecuencias teóricas, f_{teor} , junto con la diferencia porcentual, η . La frecuencia numérica se ha considerado como la frecuencia correspondiente al valor del máximo de cada pico en la transformada de Fourier, para esta medida la incertidumbre se ha elegido como la resolución en frecuencia, df , que viene dada por la siguiente expresión

$$df = \frac{1}{N_{iters} \cdot \Delta t} \quad (3.3)$$

Analizando esta ecuación se ve que cuanto mayor sea el número de iteraciones mejor será la resolución y menor la incertidumbre en la frecuencia. La frecuencia teórica se ha calculado a partir de la ecuación (3.2) y la diferencia porcentual se ha determinado mediante la expresión $\eta = \left| \frac{f_{teor} - f_{exp}}{f_{teor}} \right|$.

Tabla 1: Frecuencias de resonancia 1D

f_{exp} MHz	f_{teor} MHz	η %
$2,998 \pm 0,006$	2,998	0,00012
$5,996 \pm 0,006$	5,996	0,00013
$8,994 \pm 0,006$	8,994	0,00012
$11,992 \pm 0,006$	11,992	0,00013
$14,990 \pm 0,006$	14,990	0,00013
$17,988 \pm 0,006$	17,988	0,00013

Se observa que todas las frecuencias teóricas se encuentran dentro del intervalo de incertidumbre de las frecuencias numéricas, y que la diferencia porcentual es prácticamente nula. Por lo tanto, se concluye que la simulación se ajusta de

manera satisfactoria a la teoría.

3.3.2 Cavidad bidimensional.

En este caso la propagación de las ondas electromagnéticas se produce en solo dos direcciones dentro del plano xy , mientras que en la dirección z se impone simetría. Esto equivale a suponer que el campo no varía a lo largo del eje z , por lo tanto $k_{max} = 1$. Las dimensiones de la cavidad son $l_x = i_{max}\Delta l = 2m$ y $l_y = j_{max}\Delta l = 3m$, siendo $i_{max} = 20$, $j_{max} = 30$ y el número de iteraciones empleadas en la simulación $N_{iters} = 1000000$.

Dado que existe una condición de simetría en z , el valor de Γ_z dependerá de la línea que se excite. Si se alimenta en V_3 (es decir, se excita E_y), entonces $\Gamma_z = 1$. Por otro lado, si se alimenta en V_6 (excitando E_x), se tiene que $\Gamma_z = -1$. En ambos casos, $\Gamma_x = \Gamma_y = -1$ debido a que estas son paredes formadas por conductores perfectos.

En este contexto, la solución a las ecuaciones de Maxwell está compuesta por los modos TMz dados por la siguiente ecuación

$$\begin{aligned}\vec{E} &= E_0 \sin\left(\frac{m\pi x}{l_x}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{l_y}\right) \hat{z}, \\ \vec{H} &= E_0 \frac{jn\pi}{\mu_0\omega l_y} \sin\left(\frac{m\pi x}{l_x}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{l_y}\right) \hat{x} + E_0 \frac{-jm\pi}{\mu_0\omega l_x} \cos\left(\frac{m\pi x}{l_x}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{l_y}\right) \hat{y},\end{aligned}\quad (3.4)$$

donde E_0 es la amplitud del campo en forma de fasor y m, n son números enteros con valor $m = 1, \dots$ y $n = 1, \dots$ que representan los modos en las direcciones x y y , respectivamente, y los modos TEz

$$\begin{aligned}\vec{E} &= H_0 \frac{jn\pi}{\epsilon_0\omega l_y} \cos\left(\frac{m\pi x}{l_x}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{l_y}\right) \hat{x} + H_0 \frac{-jm\pi}{\epsilon_0\omega l_x} \sin\left(\frac{m\pi x}{l_x}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{l_y}\right) \hat{y}, \\ \vec{H} &= H_0 \cos\left(\frac{m\pi x}{l_x}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{l_y}\right) \hat{z},\end{aligned}\quad (3.5)$$

siendo H_0 la amplitud como fasor y $m = 0, 1, \dots$ y $n = 0, 1, \dots$, excluyéndose el caso $m = n = 0$. Las frecuencias de resonancia están dadas por la siguiente expresión

$$f_r = \frac{1}{2\sqrt{\mu_0\epsilon_0}} \sqrt{\left(\frac{m}{l_x}\right)^2 + \left(\frac{n}{l_y}\right)^2}. \quad (3.6)$$

La excitación se ha realizado aplicando un impulso unitario en $i_{alim} = 7$ y $j_{alim} = 13$ en $t = 0$, y calculando la evolución de los campos E y H en $i_1 = 19$ y $j_1 = 27$. En la figura 24 se muestra la transformada de Fourier del campo eléctrico junto a las frecuencias teóricas, obtenidas a partir de la ecuación (3.6), habiendo excitado en cada caso V_6 , es decir, E_z y por lo tanto los modos TM y V_3 , es decir, E_y y los modos TE. En este caso, aparecen todos los picos correspondientes a f_r , ya que el punto de medida no presenta ninguna simetría respecto a la cavidad.

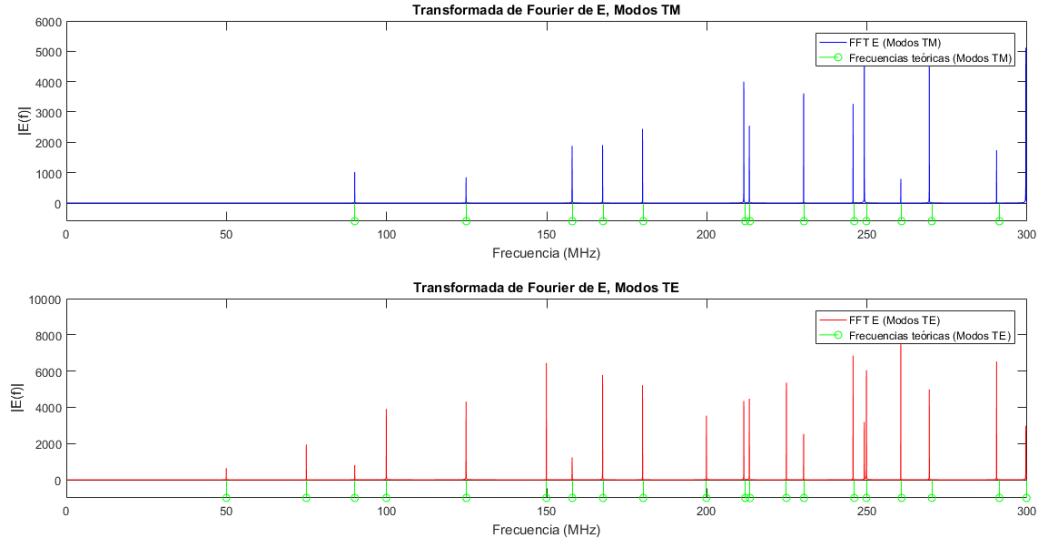


Figura 24: Transformada de Fourier del campo eléctrico para los modos TE y TM en una cavidad bidimensional.

Las seis primeras frecuencias numéricas de cada caso, f_{num} , se comparan con las frecuencias teóricas correspondientes, f_{teor} en la tabla 2, habiendo tomado como incertidumbre la resolución en frecuencia, df , y siendo η la diferencia porcentual.

A diferencia del caso unidimensional, no todas las frecuencias numéricas están contenidas en el intervalo de incertidumbre; sin embargo, la diferencia porcentual sigue siendo prácticamente nula, lo que indica que en este caso la simulación también se ajusta de manera satisfactoria a la teoría.

Tabla 2: Frecuencias de resonancia 2D

Modos TE			Modos TM		
f_{exp} MHz	f_{teor} MHz	η %	f_{exp} MHz	f_{teor} MHz	η %
$49,945 \pm 0,006$	49,965	0,03997	$90,046 \pm 0,006$	90,076	0,03402
$74,948 \pm 0,006$	74,948	0,00003	$124,834 \pm 0,006$	124,914	0,06387
$90,058 \pm 0,006$	90,076	0,02081	$157,937 \pm 0,006$	158,004	0,04280
$99,951 \pm 0,006$	99,931	0,02003	$167,452 \pm 0,006$	167,589	0,08162
$124,834 \pm 0,006$	124,914	0,06397	$179,924 \pm 0,006$	180,153	0,12721
$149,896 \pm 0,006$	149,896	0,00003	$211,546 \pm 0,006$	211,985	0,20731

3.4 Cavidad tridimensional

Por último, se va a estudiar la cavidad tridimensional, esta viene descrita por los parámetros $l_x = i_{max}\Delta l = 2$ m, $l_y = j_{max}\Delta l = 2.5$ m y $l_z = k_{max}\Delta l = 3$ m, siendo $i_{max} = 20$, $j_{max} = 25$ y $k_{max} = 30$. El numero de iteraciones viene dado por $N_{iters} = 100000$. Como en este caso no hay condiciones de simetría, $\Gamma_x = \Gamma_y = \Gamma_z = -1$, ya que las paredes se consideran conductores perfectos.

La solución a las ecuaciones de Maxwell en la cavidad está compuesta por dos modos: los modos transversales magnéticos ,TMz, que se caracterizan por tener

$H_z = 0$ y $E_z \neq 0$, estos modos vienen descritos por las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned}
 E_z(x, y, z) &= E_0 \sin\left(\frac{m\pi x}{l_x}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{l_y}\right) \cos\left(\frac{p\pi z}{l_z}\right), \\
 E_x(x, y, z) &= E_0 \frac{-1}{(m\pi/l_x)^2 + (n\pi/l_y)^2} \frac{m\pi}{l_x} \frac{p\pi}{l_z} \cos\left(\frac{m\pi x}{l_x}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{l_y}\right) \sin\left(\frac{p\pi z}{l_z}\right), \\
 E_y(x, y, z) &= E_0 \frac{-1}{(m\pi/l_x)^2 + (n\pi/l_y)^2} \frac{n\pi}{l_y} \frac{p\pi}{l_z} \sin\left(\frac{m\pi x}{l_x}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{l_y}\right) \sin\left(\frac{p\pi z}{l_z}\right), \\
 H_x(x, y, z) &= E_0 \frac{1}{(m\pi/l_x)^2 + (n\pi/l_y)^2} \frac{j\epsilon_0 \omega n\pi}{l_y} \sin\left(\frac{m\pi x}{l_x}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{l_y}\right) \cos\left(\frac{p\pi z}{l_z}\right), \\
 H_y(x, y, z) &= E_0 \frac{1}{(m\pi/l_x)^2 + (n\pi/l_y)^2} \frac{-j\epsilon_0 \omega m\pi}{l_x} \cos\left(\frac{m\pi x}{l_x}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{l_y}\right) \cos\left(\frac{p\pi z}{l_z}\right),
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

siendo m , n y p números enteros que describen los modos, toman los valores $m = 1, 2, \dots$, $n = 1, 2, \dots$ y $p = 0, 1, \dots$, E_0 es la amplitud en forma de fasor y ω es la frecuencia angular del campo, y los modos de resonancia transversales eléctricos, TE_z, para los cuales $E_z = 0$ y $H_z \neq 0$ y se reflejan en las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned}
 H_z(x, y, z) &= H_0 \cos\left(\frac{m\pi x}{l_x}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{l_y}\right) \sin\left(\frac{p\pi z}{l_z}\right), \\
 E_x(x, y, z) &= H_0 \frac{1}{(m\pi/l_x)^2 + (n\pi/l_y)^2} \frac{j\mu_0 \omega n\pi}{l_y} \cos\left(\frac{m\pi x}{l_x}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{l_y}\right) \sin\left(\frac{p\pi z}{l_z}\right), \\
 E_y(x, y, z) &= H_0 \frac{1}{(m\pi/l_x)^2 + (n\pi/l_y)^2} \frac{-j\mu_0 \omega m\pi}{l_x} \sin\left(\frac{m\pi x}{l_x}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{l_y}\right) \sin\left(\frac{p\pi z}{l_z}\right), \\
 H_x(x, y, z) &= H_0 \frac{-1}{(m\pi/l_x)^2 + (n\pi/l_y)^2} \frac{m\pi}{l_x} \frac{p\pi}{l_z} \sin\left(\frac{m\pi x}{l_x}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{l_y}\right) \cos\left(\frac{p\pi z}{l_z}\right), \\
 H_y(x, y, z) &= H_0 \frac{-1}{(m\pi/l_x)^2 + (n\pi/l_y)^2} \frac{n\pi}{l_y} \frac{p\pi}{l_z} \cos\left(\frac{m\pi x}{l_x}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{l_y}\right) \cos\left(\frac{p\pi z}{l_z}\right),
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

donde $m = 0, 1, \dots$, $n = 0, 1, \dots$ y $p = 1, 2, \dots$ excluyendo el caso $m = n = 0$ y H_0 la amplitud expresada como fasor. Las frecuencias de resonancia vienen dadas por la expresión

$$f_r = \frac{1}{2\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} \sqrt{\left(\frac{m}{l_x}\right)^2 + \left(\frac{n}{l_y}\right)^2 + \left(\frac{p}{l_z}\right)^2}. \tag{3.9}$$

Se ha alimentado el punto (3,7,11) con un impulso unitario en $t = 0$ y se ha medido en el punto (11,13,17). Se han excitado las 18 líneas a la vez, la razón de esto es que, a diferencia de la cavidad bidimensional, en este caso no es posible excitar uno de los dos modos únicamente. Esto se debe a que las ecuaciones de los modos TM_z (3.7) y TE_z (3.8) muestran que ambos modos están acoplados, ya que las componentes en x , y y z de los campos eléctricos y magnéticos

están presentes en ambas soluciones. En consecuencia, cualquier excitación afecta simultáneamente a los dos modos.

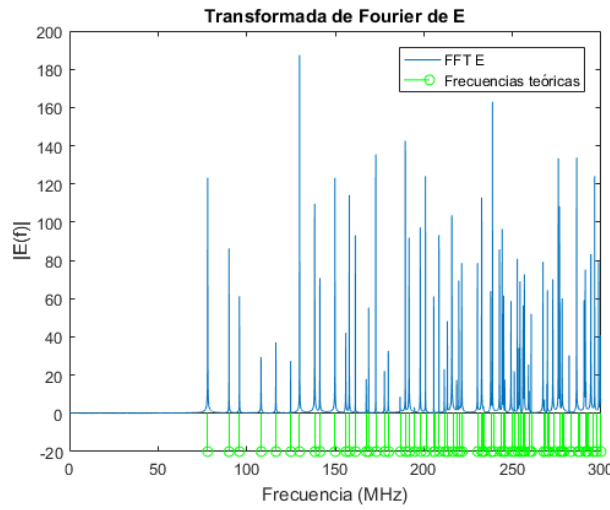


Figura 25: Transformada de Fourier del campo eléctrico en una cavidad tridimensional.

En la Figura 25 se presenta la transformada de Fourier del campo eléctrico en función de la frecuencia en MHz, comparada con las frecuencias teóricas de todos los modos. En este caso, debido a que el punto de medición no presenta simetría respecto a la cavidad, se observan todas las frecuencias.

En la tabla 3 se comparan las frecuencias experimentales con las frecuencias teóricas. La diferencia porcentual, η es próxima a 0 para todas las frecuencias con lo que la simulación se ajusta satisfactoriamente a la teoría.

Tabla 3: Frecuencias de resonancia 3D

f_{exp} MHz	f_{teor} MHz	η %
$78,01 \pm 0,06$	78,05	0,054
$90,06 \pm 0,06$	90,08	0,021
$95,93 \pm 0,06$	95,98	0,049
$108,11 \pm 0,06$	108,21	0,094
$116,50 \pm 0,06$	116,54	0,033
$124,83 \pm 0,06$	124,91	0,064
$129,87 \pm 0,06$	129,91	0,031
$138,38 \pm 0,06$	138,56	0,126
$141,32 \pm 0,06$	141,41	0,063
$149,84 \pm 0,06$	149,98	0,095

3.5 Guías de onda

Las guías de onda presentan numerosas aplicaciones, como en dispositivos de diagnóstico médico [WD20], o en antenas para redes 5G [RFZ18]. En esta sección se estudiará una guía de onda rectangular, en concreto, se simulará y estudiarán las propiedades del modo transversal eléctrico, TE_{10} , de la guía.

Esta guía se extiende en el eje x y viene descrita por los parámetros $a = 0.5842$ m, $b = 0.292$ m, que describen los lados del rectángulo en el eje y y z , respectivamente. Las paredes que la conforman son conductores perfectos. La discretización empleada es $\Delta l = a/j_{max} = 2.782 \cdot 10^{-02}$ m y $\Delta t = \Delta l/2c = 4.640 \cdot 10^{-11}$ s.

El campo eléctrico y magnético están descritos por los modos TM y los modos TE. En esta sección, el estudio se centrará en el modo TE_{10} ($m = 1$ y $n = 0$), reflejado en la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned} E_z(x, y) &= H_0 e^{-\gamma x} \frac{1}{\gamma^2 + \mu_0 \epsilon_0 \omega^2} \left(-j \mu_0 \omega \frac{\pi}{a} \right) \sin \left(\frac{\pi y}{a} \right), \\ H_x(x, y) &= H_0 e^{-\gamma x} \cos \left(\frac{\pi y}{a} \right), \\ H_y(x, y) &= H_0 e^{-\gamma x} \frac{1}{\gamma^2 + \mu_0 \epsilon_0 \omega^2} \left(\gamma \frac{\pi i}{a} \right) \sin \left(\frac{\pi y}{a} \right), \end{aligned} \quad (3.10)$$

siendo ω la frecuencia angular de la señal y γ la constante de propagación de la guía, dada por

$$\gamma = j \sqrt{\mu_0 \epsilon_0 \omega^2 - \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2} \quad (3.11)$$

Hay que tener en cuenta que si γ es real, no habrá propagación de la onda en la guía, sino que el modo será evanescente, ya que el campo se atenúa exponencialmente. Al igualar la constante de propagación a cero, se obtiene la frecuencia de corte, f_c ,

$$f_c = \frac{1}{2\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2}, \quad (3.12)$$

por lo tanto, para $m = 1$ y $n = 0$, la longitud de onda de corte será $\frac{\lambda_c}{2} = a$.

Suponiendo que $\gamma = j\beta$, siendo β real, es decir, existe propagación en la guía, la longitud de onda en la guía, λ , la velocidad de fase, v_f , y la velocidad de grupo, v_g , están descritas por las ecuaciones

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{2\pi}{\lambda_0} \sqrt{1 - (f_c/f)^2}, & \lambda &\equiv \frac{2\pi}{\beta} = \lambda_0 \frac{1}{\sqrt{1 - (f_c/f)^2}}, \\ v_f &\equiv \frac{\omega}{\beta} = \frac{c}{\sqrt{1 - (f_c/f)^2}}, & v_g &\equiv \frac{d\omega}{d\beta} = c \sqrt{1 - (f_c/f)^2}, \end{aligned} \quad (3.13)$$

siendo $\lambda_0 = c/f$. La velocidad de propagación depende de la frecuencia. Esto implica que, mientras que para frecuencias próximas a f_c , v_f tiende a 0, para altas frecuencias, v_f se aproxima a c . Esto indica que en la guía habrá una dispersión física de la señal. La impedancia característica se calcula como $Z \equiv -\frac{E_z}{H_y}$ y viene dada por la ecuación

$$Z_{TE} = \frac{\mu_0 \omega}{\beta} = \frac{\sqrt{\mu_0 / \epsilon_0}}{\sqrt{1 - (f_c / f)^2}} \quad (3.14)$$

$$(3.15)$$

A continuación se muestra como se comportan las variables cuando f tiende a f_c y sus implicaciones. La longitud de onda en la guía, λ , tiende a infinito, indicando que no puede haber propagación efectiva en la guía. La velocidad de fase, v_f , tiende a infinito, con lo que las ondas se viajan a una velocidad infinita, aunque estas no transportan energía. Esto se debe a que no se propagan a lo largo de la guía, ya que la velocidad de grupo v_g tiende a cero. Esto se interpreta de modo que, cuando $\lambda_0/2 = a$, media longitud de onda coincide exactamente con la dimensión en el eje z de la guía, lo cual genera una onda estacionaria sin propagación en el eje longitudinal. A esta longitud de onda, la onda no dispone de energía adicional para desplazarse, limitándose a oscilar en el eje transversal de la guía.

Por otro lado, para altas frecuencias, los parámetros dados por la ecuación (3.13) coinciden con los de una onda en el vacío. Esto se debe a que, para altas frecuencias, la longitud de onda es muy pequeña respecto al tamaño de la guía y, por ello, estas ondas no perciben el efecto de las paredes de la guía, comportándose como ondas en el vacío.

Puesto que, para el modo TE_{10} hay simetría en z , podemos tratar este sistema de forma similar al del caso bidimensional. Para ello, se ha empleado la distribución $imax = 4000$, $jmax = 21$, $kmax = 1$, con $\Delta l = a/jmax = 0.0029$ m y $\Delta t = 4.87 \cdot 10^{-12}$ s. Con el objetivo de excitar el modo TE_{10} , se ha alimentado en $i_{alim} = 2000$ la línea V_6 , es decir E_z , con un pulso gaussiano modulado en y según la forma del modo TE_{10} y modulado en t de tal forma que solo se excite el modo TE_{10} . Esto último se consigue excitando las frecuencias entre f_1 y f_2 , siendo $f_1 = c/2a = 256.58$ MHz la frecuencia de corte para TE_{10} y $f_2 = c/a = 513.17$ MHz la frecuencia de corte para TE_{20} . Así, la alimentación empleada toma la forma $V(y, t) = e^{-g^2(t-t_m)^2} \sin(\pi y/a) \sin(2\pi f_m t)$, siendo $f_m = (f_1 + f_2)/2$, $g = f_2 - f_1$.

A lo largo de $n = 10000$ iteraciones se ha calculado E_z y H_y en $i = 2500$ y $j = 11$. En la figura 26 se muestran los resultados de esta simulación. En primer lugar, se muestra el campo electromagnético, donde se observa un pulso incidente acompañado de una cola asociada a las frecuencias cercanas a f_1 , que se propagan a menor velocidad, así como un pulso reflejado. Por otro lado, para los otros tres gráficos se ha calculado la impedancia numérica en función de la frecuencia, $Z_{numerico} = -E_z/H_y$, y se ha comparado con la teórica, dada por la ecuación (3.14), tanto en modulo como parte real e imaginaria. Se observa que, en las frecuencias en las que se produce propagación, es decir, para $f \in [f_1, f_2]$, Z_{teor} y Z_{num} si que ajusta bien, aunque conforme más nos acercamos a la discontinuidad de f_1 menos ajusta. Para frecuencias menores a la de corte Z_{teor} y Z_{num} toman valores distintos, esto es porque, como ya se ha discutido, para estas frecuencias no se produce propagación.

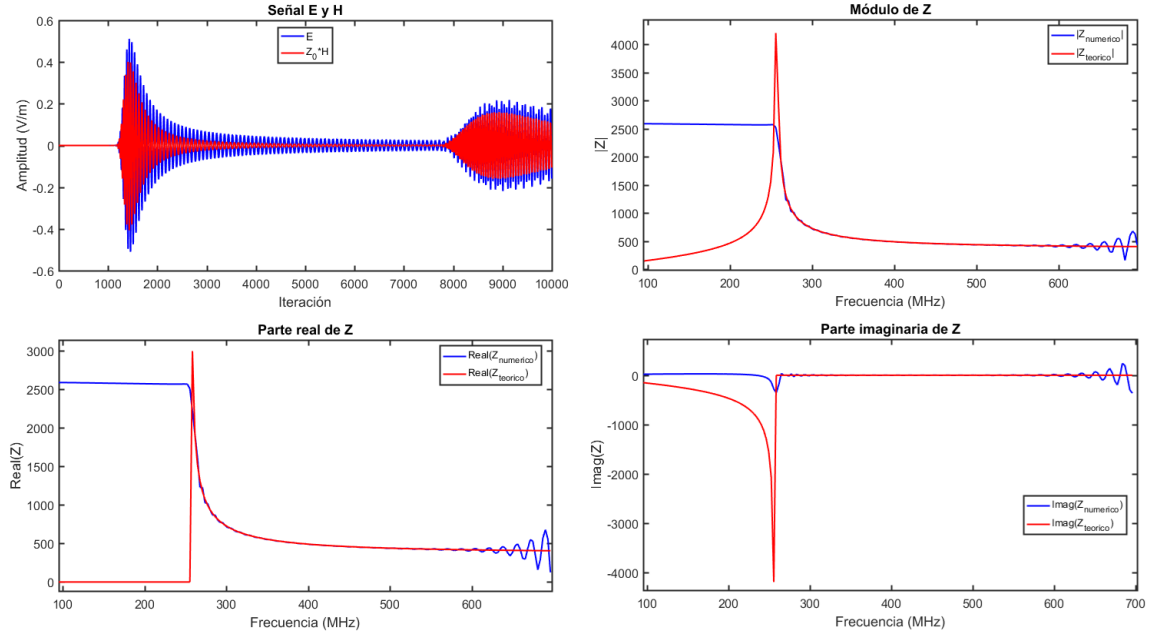


Figura 26: Campo electromagnético e impedancia en la guía.

A modo de comprobación, se ha calculado el coeficiente de correlación, r , entre Z_{teor} y Z_{num} para el intervalo $f \in [265\text{MHz}, f_2]$. En vez tomar f_1 , se ha escogido 265MHz para evitar la discontinuidad que hay en f_1 . Se ha obtenido $r_{mod} = 0.99849$ y $r_{real} = 0.99846$, para el caso imaginario no se ha calculado r ya que Z_{teor} es nulo en el intervalo y, por lo tanto, se obtiene una indeterminación en r . Ya que en ambos caso r es muy próximo a 1, podemos afirmar que el modelo numérico se ajusta a la teoría.

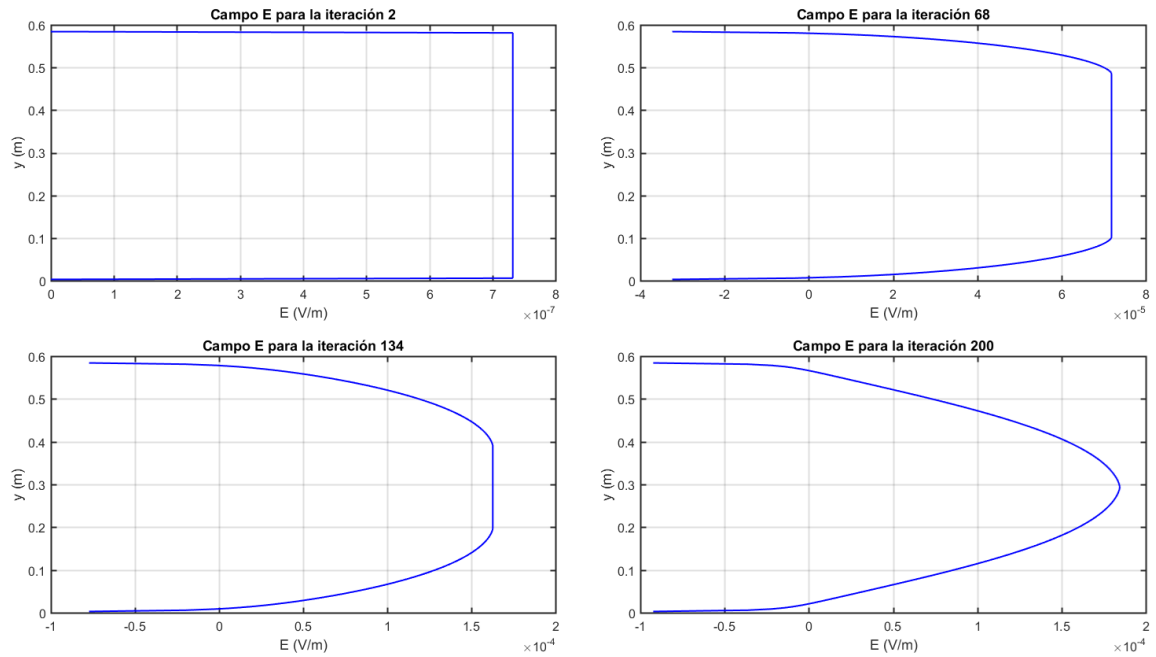


Figura 27: Evolución de un pulso cuadrado.

Se va a estudiar que ocurre si en vez de excitar con un pulso modulado en y , se excita con un pulso cuadrado de la forma $V(t) = e^{-g^2(t-t_m)^2} \sin(2\pi f_m t)$. Se ha calculado E_z en el mismo punto donde se excita para la iteración 2, 68, 134 y 200. Como se observa en las gráficas de la figura 27, en cuestión de 200 iteraciones, es decir 10^{-9} s, el pulso cuadrado toma la forma correspondiente al modo TE₁₀ que es el único modo posible de propagación para las frecuencias excitadas.

3.6 Interfases

El estudio de las interfases entre medios desempeña un papel crucial en aplicaciones de energía y tecnología óptica, como en el desarrollo de recubrimientos antirreflectantes para células solares [Ji+22], o en recubrimientos que mejoran la absorción en dispositivos nanométricos [Váz+18]. En esta sección se analizarán las propiedades de las interfases y láminas mediante el método TLM.

En un cambio de un medio a otro, es decir una interfase, se definen el coeficiente de reflexión y transmisión según $\Gamma \equiv E_{r0}/E_{i0}$ y $\tau \equiv E_{t0}/E_{i0}$, siendo E_{i0} , E_{r0} y E_{t0} las amplitudes de los pulsos incidente, reflejado y transmitido. Para el caso de incidencia normal, estos coeficiente vienen dados por la siguiente ecuación:

$$\Gamma = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_1 + Z_2}, \quad \tau = \frac{2Z_2}{Z_1 + Z_2}, \quad (3.16)$$

siendo Z_1 y Z_2 las impedancias de cada medio [CE18].

También se va a estudiar que ocurre cuando hay dos interfases, un caso de especial interés será el de una lámina de espesor l en el vacío. Para este sistema, el coeficiente de reflexión viene dado por

$$\Gamma_{12} = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0}, \quad (3.17)$$

siendo

$$Z_L = \frac{Z_0 \cos \beta_2 l + jZ_2 \sin \beta_2 l}{Z_2 \cos \beta_2 l + jZ_0 \sin \beta_2 l},$$

donde $\beta_2 = 2\pi/\lambda_2$, con λ_2 la longitud de onda dentro de la lámina. Por lo tanto, no habrá pulso reflejado para $Z_L = Z_0$ y esto ocurrirá si $\sin \beta_2 l = 0$, es decir, no habrá reflexión para las longitudes de onda $\lambda_2 = 2l/n$ y las frecuencias $f = nv_2/2l$ siendo n un entero y v_2 la velocidad de propagación de la lámina [CE18].

En primer lugar, se ha simulado una interfase entre el vacío y un medio con $\epsilon_r = 1$ y $\mu_r = 9$. Para ello, se ha empleado una distribución unidimensional siendo $i_{max} = 2000$, la discretización viene dada por $\Delta l = 0.1$ m y la interfase se ha escogido en $i_{inter} = 1000$. Se ha alimentado la línea V_3 con un pulso gaussiano en $i_{alim} = 940$, para asegurar que no haya dispersión se ha tomado $g = 2f_{max}$ siendo $f_{max} = 0.1v_2/\Delta l = 99.93$ MHz. Se ha medido E_y y H_z en los puntos $i_1 = 950$ y $i_2 = 1100$.

En la figura 28 se muestran los resultados. Como se esperaba, en i_1 se observan tanto el pulso incidente como el reflejado y en i_2 el transmitido.

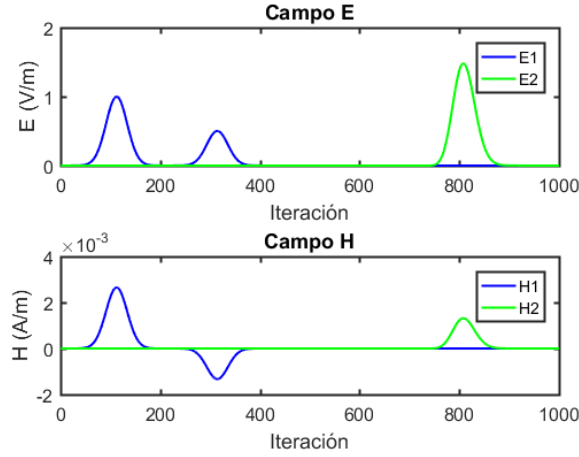


Figura 28: Pulso reflejado y transmitido en una interfase.

A modo de comprobación se ha tomado el máximo de cada pulso y se han calculado los coeficientes de transmisión y reflexión numéricos para E y H . Para H los coeficientes son $\Gamma_H = -\Gamma$ y $\tau_H = Z_1\tau/Z_2$. En la tabla 4 se comparan los coeficientes teóricos y numéricos junto a su diferencia porcentual, η . Puesto que, en todos los casos η es próximo a 0 se concluye que la simulación se ajusta a la teoría.

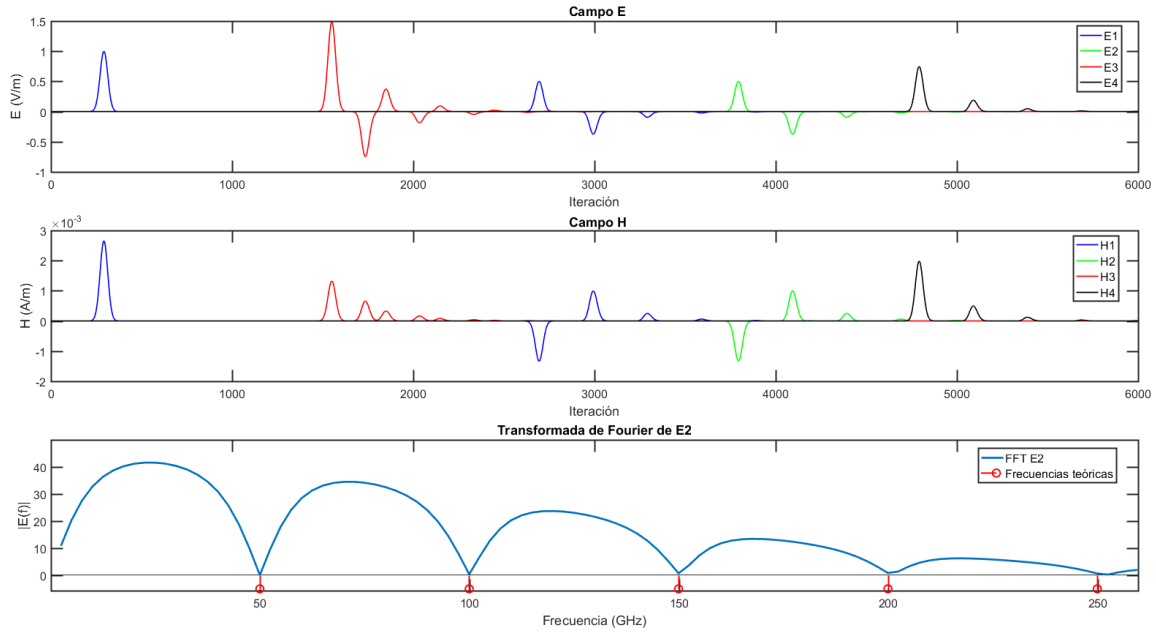
Tabla 4: Coeficientes de transmisión y reflexión.

	Γ (Ω)	τ (Ω)	Γ_H (Ω)	τ_H (Ω)
Teórico	0,500	1,500	-0,500	0,500
Numérico	0,502	1,483	-0,502	0,497
η (%)	0,34	1,13	0,34	0,70

En segundo lugar, se ha simulado una lámina de longitud $l = 0.001m$ con $\epsilon_r = 1$ y $\mu_r = 9$. Las frecuencias para las que no se presentará reflexión serán $f = n50$ GHz. Con el fin de que se no se presente dispersión hasta las primeras cinco frecuencias, es decir, hasta $f_{max} = 250$ GHz, escogemos $\Delta l = 0.1v_2/f_{max} = 0.0004m$. La distribución empleada es $i_{max} = 4000$ y la interfase se extiende desde $i = 2000$ hasta $i = 2025$.

Se ha alimentado en la línea V_3 con un pulso gaussiano en $i_{alim} = 1300$ que excita hasta una frecuencia $f_{exc} = f_{max} = 250$ GHz. Se ha calculado E_y y H_z en los puntos $i_1 = 1400$, $i_2 = 850$, $i_3 = 2010$ y $i_4 = 3600$. En la figura 29 se representan E y H y la transformada de Fourier del campo eléctrico medido en i_2 . En i_1 se observan el pulso incidente y los pulsos reflejados, mientras que en i_2 solo se observan los reflejados. Por otro lado, en i_3 se observa la parte del pulso incidente que se transmite a la lámina y como esta va reflejándose parcialmente al llegar a las interfases con el vacío. Por último, en i_4 se observan los pulsos transmitidos que atraviesan la lámina.

Al realizar la transformada de Fourier de los pulsos reflejados obtenidos en i_2 se observan mínimos que coinciden con las frecuencias para las que la reflexión se había predicho nula. En la tabla 5 se comparan las frecuencias numéricas aso-

Figura 29: Lámina $\lambda/2$.

ciadas a cada mínimo con las teóricas junto a su diferencia porcentual, η . Puesto que η es próximo a cero en todos los casos, concluimos que el modelo se ajusta a la teoría.

Tabla 5: Frecuencias numéricas y experimentales para una lámina de $l = 1\text{mm}$.

f_{num} (GHz)	f_{teor} (GHz)	η (%)
$50,0 \pm 2,5$	49,97	0,0006
$99,9 \pm 2,5$	99,93	0,0006
$149,9 \pm 2,5$	149,90	0,0006
$199,9 \pm 2,5$	199,86	0,0006
$252,3 \pm 2,5$	249,83	0,9994

4 Conclusiones

En este trabajo, se ha explorado la aplicación del método numérico TLM a distintos sistemas físicos comparando los resultados de cada simulación con lo predicho por la teoría.

En primer lugar, se ha simulado la propagación unidireccional de una onda plana en el vacío en forma de pulso gaussiano. Para ello, se han establecido los coeficientes de reflexión según las condiciones de simetría pertinentes. Al comparar el tiempo que toma cada pulso en propagarse cierta distancia en la simulación, con la velocidad de propagación predicha, $c/2$, se ha llegado a que los resultados se ajustan satisfactoriamente a la teoría.

En segundo lugar, con el objetivo de observar los efectos de la dispersión numérica, se ha simulado la propagación unidireccional de un pulso gaussiano con frecuencias por encima de f_{max} , que determina a partir de que frecuencia los re-

sultados no son aceptables por la dispersión numérica, en un medio con $\epsilon_r = 8$. Observando que conforme se propaga, su amplitud máxima disminuye y el pulso se deforma generándose una cola.

En segundo lugar, con el objetivo de analizar los efectos de la dispersión numérica, se ha simulado la propagación unidireccional de un pulso gaussiano en un medio con $\epsilon_r = 8$. Se observa que, conforme se propaga, su amplitud máxima disminuye y el pulso se deforma, generándose una cola.

En tercer lugar, se han simulado cavidades resonantes electromagnéticas en una, dos y tres dimensiones. Se ha aplicado la transformada de Fourier a los campos electromagnéticos calculados, obteniendo los picos en frecuencia correspondientes a cada modo de resonancia con una diferencia porcentual muy próxima a cero para todas las frecuencias. También se ha comprobado que, dependiendo de la posición respecto a la cavidad, hay ciertos modos que no se manifiestan y que, por lo tanto, al representar el campo en función de la frecuencia, no aparecen. Por ejemplo, para $L/2$ en la cavidad unidimensional, los picos pares no aparecen, ya que, según la teoría, los modos pares son nulos en ese punto.

En cuarto lugar, se ha simulado una guía de ondas rectangular, para la cual se ha excitado únicamente el modo transversal electromagnético TE_{10} . Al representar el campo electromagnético, se ha observado un pulso deformado debido a la dispersión física. También se ha comparado la impedancia numérica con la teórica, obteniéndose unos coeficientes de correlación muy cercanos a uno, lo cual indica que los resultados han sido satisfactorios. Por último, se ha comprobado cómo al alimentar la guía con un pulso que no corresponde al modo TE_{10} , este acaba tomando la forma correspondiente al único modo de propagación posible para las frecuencias excitadas, el modo TE_{10} .

En último lugar, se han simulado interfases. En primera instancia, se ha simulado una única interfase y se han comparado los coeficientes de transmisión y reflexión numéricos con los teóricos, observándose una diferencia porcentual próxima a 0. Posteriormente, se ha simulado una lámina en el vacío. Mediante la aplicación de la transformada de Fourier, se ha comprobado que el pulso reflejado se anula para las frecuencias esperadas.

A modo de cierre, se concluye que los resultados obtenidos para todas las simulaciones se han ajustado a lo esperado según la teoría. El método TLM ha demostrado ser un método con una gran versatilidad capaz de simular una gran variedad de sistemas físicos obteniendo muy buenos resultados en todos los casos. Es cierto que, igual que ocurre en el método de diferencias finitas, este método presenta dispersión numérica no deseada debida a la discretización del espacio y el tiempo. Sin embargo, como se ha mostrado a lo largo del TFG, escogiendo los parámetros adecuados para cada simulación, estos inconvenientes son evitables.

Referencias

- [Bad17] Munaf F. Badr. "Modeling and simulation of the analogous mechanical and electrical systems". En: *International Journal of Science and Research* 6.5 (2017), págs. 1931-1934.
- [Ber+23] Asher Berlin et al. "Electromagnetic cavities as mechanical bars for gravitational waves". En: *Physical Review D* 108.8 (2023), pág. 084058.
- [CE18] Jesús Fco Fornieles Callejón y Alfonso Salinas Extremera. *Transmisión de Ondas*. Editorial Técnica Avicam, 2018.
- [Chr07] Christos Christopoulos. *The Transmission-Line Modeling Method: TLM*. Springer, 2007.
- [Gao+08] Jiansong Gao et al. "Experimental evidence for a surface distribution of two-level systems in superconducting lithographed microwave resonators". En: *Applied Physics Letters* 92.15 (2008).
- [Ji+22] Chunxue Ji et al. "Recent applications of antireflection coatings in solar cells". En: *Photonics*. Vol. 9. 12. MDPI. 2022, pág. 906.
- [Joh74] Peter B Johns. "The solution of inhomogeneous waveguide problems using a transmission-line matrix". En: *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques* 22.3 (1974), págs. 209-215.
- [Joh87] Peter B Johns. "A symmetrical condensed node for the TLM method". En: *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques* 35.4 (1987), págs. 370-377.
- [Mor+94] Juan A. Morente et al. "Group and phase velocities in the TLM-symmetrical-condensed node mesh". En: *IEEE transactions on microwave theory and techniques* 42.3 (1994), págs. 514-517.
- [Plo94] Martin A. Plonus. *Electromagnetismo aplicado*. Reverte, 1994.
- [PMC98] J.A. Portí, J.A. Morente y M.C. Carrión. "Simple derivation of scattering matrix for TLM nodes". En: *Electronics Letters* 34.18 (1998), págs. 1763-1764.
- [Por] J. A. Portí. *El método numérico de Modelado por Líneas de Transmisión (TLM)*. Apuntes de la asignatura "Complementos Matemáticos y Numéricos", Máster Universitario en Física: Radiaciones, Nanotecnología, Partículas y Astrofísica, Universidad de Granada, curso 2024-2025.
- [Por93] J.A. Portí. "Contribución al estudio del nudo simétrico condensado en el método numérico TLM". Ph.D. Thesis. University of Granada, 1993.
- [Poz21] David M. Pozar. *Microwave engineering: theory and techniques*. John wiley & sons, 2021.
- [RFZ18] Eva Rajo-Iglesias, Miguel Ferrando-Rocher y Ashraf Uz Zaman. "Gap Waveguide Technology for Millimeter-Wave Antenna Systems". En: *IEEE Communications Magazine* 56.7 (2018), págs. 14-20. DOI: [10.1109/MCOM.2018.1700998](https://doi.org/10.1109/MCOM.2018.1700998).
- [Váz+18] Abraham Vázquez-Guardado et al. "Broadband angle-independent antireflection coatings on nanostructured light trapping solar cells". En: *Physical Review Materials* 2.3 (2018), pág. 035201.
- [WD20] Jiayu Wang y Jianfei Dong. "Optical waveguides and integrated optical devices for medical diagnosis, health monitoring and light therapies". En: *Sensors* 20.14 (2020), pág. 3981.



1. DATOS BÁSICOS DEL TFG:

Título: Modelado numérico de problemas de propagación mediante el uso de líneas de transmisión

Descripción general (resumen y metodología):

Breve descripción del trabajo:

Los métodos numéricos generalmente abordan los problemas a través de la resolución numérica de ecuaciones analíticas que, a su vez, modelan el fenómeno que se pretende estudiar. Esta visión prácticamente limita el trabajo físico a la obtención de las ecuaciones iniciales, momento a partir del cual prácticamente todo el trabajo es de índole matemática.

Las analogías son otra opción de mayor contenido físico. La ley de Ohm, por ejemplo, tiene aplicaciones acústicas o térmicas. Un circuito eléctrico RLC funciona de modo análogo a una partícula sometida a una fuerza elástica lineal en un entorno con pérdidas proporcionales a la velocidad de dicha partícula. El conocimiento del comportamiento del circuito RLC proporciona de manera casi automática conocimiento sobre el movimiento armónico de la partícula sin más que deshacer la analogía.

El TFG que se propone pretende iniciar al estudiante en el uso de líneas de transmisión para la simulación numérica en lo que se conoce como método de Modelado por Líneas de Transmisión o método TLM. Más que resolviendo ecuaciones analíticas, esta tarea numérica se lleva a cabo a través del uso de circuitos de líneas de transmisión que se comportan de modo análogo al que se observa en algunos problemas dinámicos. Ejemplos de tales problemas son la propagación de ondas electromagnéticas o acústicas, difusión o incluso resolución de circuitos eléctricos de parámetros localizados.

En este TFG, además del conocimiento de un concepto poco tratado en el grado, la línea de transmisión, y sobre todo de la profundización en el uso de analogías basadas en su uso para comprender otros fenómenos, el método TLM, se aborda la mayoría de los aspectos que usualmente acompañan a la simulación numérica de un problema de propagación: alimentación, dispersión numérica condiciones de frontera cerradas y abiertas y análisis espectral de resultados. El campo sobre el que se aplica el método (acústico, electromagnético, difusión,...) se deja a la elección del estudiante.

Metodología:

Inicialmente se estudian los aspectos fundamentales de una línea de transmisión, tanto en el dominio de la frecuencia, importante para la situación estacionaria, como la transitoria, fundamental en la aplicación de este TFG y se inicia al estudiante en el método TLM.

En primer lugar y fundamental en el TLM, el funcionamiento conceptual de las diferentes configuraciones (línea abierta, cortocircuitada o de longitud infinita) se comprenderá mediante su aplicación a la resolución mediante el uso de líneas de transmisión de circuitos de parámetros localizados de diversa complejidad, incluyendo acoplamientos y no linealidades.

A continuación, se hará se aplicará el TLM a un problema de propagación acústico, electromagnético o de difusión en 1 y 2 dimensiones en el que se abordarán los diferentes

aspectos necesarios en toda simulación numérica de esta índole: la definición de la analogía, los distintos modos de alimentación, el comportamiento numérico, condiciones de contorno,...

Tipología: Estudio de casos, teóricos o prácticos, relacionados con la temática del Grado.

Objetivos planteados:

Objetivos planteados:

Familiarización del estudiante con el concepto de líneas de transmisión y de su aplicación a la resolución numérica mediante analogías eléctricas.

Familiarización con el método numérico TLM y los aspectos necesarios en un problema de simulación mediante un método de baja frecuencia (TLM, Diferencias Finitas,...): discretización, dispersión numérica, alimentación, análisis de resultados, condiciones de frontera,...

Bibliografía básica:

Bibliografía:

- Christopoulos, "The Transmission-line Modeling Method: TLM", IEEE Press (1995)
- de Coogan, "Transmission Line Matrix (TLM) Techniques for Diffusion Applications" Ed. CRC Press, 1998
- Kinsler Lawrence, E. "Fundamentos de acústica." Editorial Limusa, Noriega Editores (1988).
- Beranek, Leo L., and Tim Mellow. Acoustics: sound fields and transducers. Academic Press, 2012
- Matthew N. O. Sadiku, "Elementos De Electromagnetismo" - 3ra Edición - Ed. Oxford University Press, 2003
- A. Plonus, Electromagnetismo Aplicado. Ed. Reverté, 1994.

Recomendaciones y orientaciones para el estudiante:

Plazas: 1

2. DATOS DEL TUTOR/A:

Nombre y apellidos: JORGE ANDRÉS PORTÍ DURÁN

Ámbito de conocimiento/Departamento: FÍSICA APLICADA

Correo electrónico: jporti@ugr.es

3. COTUTOR/A DE LA UGR (en su caso):

Nombre y apellidos:

Ámbito de conocimiento/Departamento:

Correo electrónico:

4. COTUTOR/A EXTERNO/A (en su caso):

Nombre y apellidos:

Correo electrónico:

Nombre de la empresa o institución:

Dirección postal:

Puesto del tutor en la empresa o institución:

5. DATOS DEL ESTUDIANTE:

Nombre y apellidos: ALBERTO MOCHON PAREDES

Correo electrónico: albertomopa@correo.ugr.es