



# Analisi di robustezza di controllori applicati al sistema non lineare per il balancing di robot bipedi

## Sommario

*Questa trattazione si pone come obiettivo di analizzare la robustezza di controllori, ottenuti dallo studio di un modello linearizzato “Single-Input and Single-Output” (SISO), applicati al sistema non lineare per il balancing di robot bipedi. A tale scopo verranno fatte verifiche di stabilità (Regione di asintotica stabilità e posizione ZMP), controllo delle specifiche e studio degli effetti sul sistema dati dalla variazione della massa dei link e dalla presenza di disturbi.*

## 1. INTRODUZIONE

Quando viene progettato un robot bipede, uno degli elementi principali è lo studio dell'equilibrio. In questo lavoro si parte da un modello linearizzato di gamba multigiunto per la costruzione di controllori necessari per la stabilità e il rispetto delle specifiche date. Ottenuti i vari controllori, ci occuperemo di controllare se è possibile applicarli al sistema non lineare affinché il robot mantenga l'equilibrio.

Come primo passo si va a verificare, sul modello lineare, se i controllori presentano una corretta robustezza alla variazione della massa dei vari link studiando i diagrammi di Bode delle sensibilità degli anelli in retroazione e delle variazioni delle uscite. Per l'analisi della stabilità sul sistema non lineare sfrutteremo i concetti di **Regione di asintotica stabilità** e **Zero-Moment point (ZMP)** con lo scopo di definire una zona in cui il robot si possa muovere senza cadere. A questo punto si definisce una condizione iniziale al limite per la stabilità e si valuta le specifiche del sistema non lineare (sovraelongazione e tempo di assestamento) e l'effetto sulla posizione della gamba che genera una forza (disturbo) applicata al busto del robot.

## 2. MODELLO LINEARE E CONTROLLORI

La dinamica del sistema è fortemente non lineare e per poter fare un'analisi si fa uso di un modello

linearizzato basato sul **Controllo Decentralizzato**: la gamba viene vista come l'insieme di 3 link indipendenti fra di loro e l'interazione fra essi viene modellata come l'azione di una coppia resistente (come un disturbo). Inoltre si assume ZMP verificato.

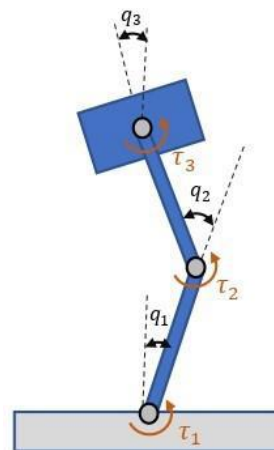


Figura 1: Modello catena seriale di link vincolata al telaio

Si definiscono i vettori  $q = [q_1 \ q_2 \ q_3]$  e  $\tau = [\tau_1 \ \tau_2 \ \tau_3]$ .  
**Sistema di equazioni non lineari gamba del robot:**

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) = \tau \quad (1)$$

dove  $M(q)$  rappresenta la matrice d'inerzia (3x3),  $C(q, \dot{q})$  la matrice di Coriolis (3x3) e  $g(q)$  il vettore di gravità.

**Sistema linearizzato MIMO:**

Si definisce lo stato  $x = [q_1 \ q_2 \ q_3 \ \dot{q}_1 \ \dot{q}_2 \ \dot{q}_3]^T$ ,  
 gli ingressi di controllo  $u = [\tau_1 \ \tau_2 \ \tau_3]^T$ , l'uscita  $h$  pari  
 agli angoli  $h = [q_1 \ q_2 \ q_3]^T$  e una configurazione di  
 equilibrio  $q = [-\pi/6 \ \pi/3 \ -\pi/6]^T$ .

Rappresentazione del sistema in forma di stato:

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}} = A\tilde{x} + B\tilde{u} \\ \tilde{h} = C\tilde{x} + D\tilde{u} \end{cases}$$

**Sistema linearizzato SISO:**

Applicando la tecnica del Controllo Decentralizzato  
 si ottengono 3 sistemi linearizzati SISO nella forma:

$$\begin{cases} \dot{x}_i = A_{ii}x_i + B_{ii}u_i \\ y_i = C_{ii}x_i \end{cases}$$

**Controllori per stabilità**

$$C_{11} = \frac{5(1+0.1s)}{1+0.01s} \quad C_{21} = \frac{6(1+0.059s)}{1+0.01s} \quad C_{31} = \frac{2.5(1+0.083s)}{1+0.01s}$$

**Controllori per rispetto specifiche**

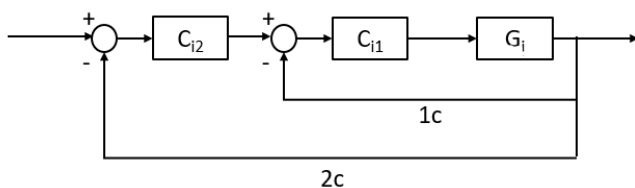
$$C_{12} = \frac{68(1+0.025s)(1+0.067s)}{s(1+1.3 \cdot 10^{-6})(1+3.2 \cdot 10^{-6})}$$

$$C_{22} = \frac{85(1+0.025s)(1+0.067s)}{s(1+1.3 \cdot 10^{-6})(1+3.2 \cdot 10^{-6})}$$

$$C_{32} = \frac{75(1+0.025s)(1+0.067s)}{s(1+1.3 \cdot 10^{-6})(1+3.2 \cdot 10^{-6})}$$

### 3. SENSIBILITÀ AL PARAMETRO M PER IL SISTEMA LINEARIZZATO

Quando si studia il moto teorico dell'uscita, tramite la  
 soluzione delle equazioni differenziali della dinamica,  
 si riscontra sempre un errore tra l'uscita desiderata  
 (valore nominale  $\bar{Y}(s)$ ) e quella che si ottiene a causa  
 delle imprecisioni sui parametri di ingresso. Attraverso  
 i controllori e gli anelli di feedback si cerca di limitare  
 la variazione di uscita.



L'errore sull'uscita si scrive come combinazione lineare  
 degli errori sulle funzioni di trasferimento degli  
 elementi che compongono il sistema retroazionato.  
 In questo caso varia solamente la massa  $m$  dei link e  
 quindi solo la funzione di trasferimento dell'impianto  
 $G_i$  verrà considerata per il calcolo dell'errore.  
 $\hat{m} = 0.5 \text{ kg}$  è il valore nominale e le variabili con stesso  
 apice sono calcolate nel caso nominale.

Si definiscono le varie sensibilità per calcolare  $\frac{\Delta Y}{\bar{Y}}$ :

**Sensibilità in open loop di G rispetto a m:**

$$S_{o,m} = \left. \frac{\partial G_i}{\partial m} \right|_{m=\hat{m}} \times \frac{\hat{m}}{\bar{G}_i} \quad (2)$$

**Sensibilità 1° closed loop di G rispetto a m:**

$$S_{1c,m} = \left( \frac{1}{1 + \hat{C}_{i1} \times \bar{G}_i} \right) \quad (3)$$

**Sensibilità 2° closed loop di G rispetto a m:**

$$S_{2c,m} = \left( \frac{1}{1 + \hat{C}_{i1} \times \bar{G}_i \times (1 + \hat{C}_{i2})} \right) \quad (4)$$

**Variazione uscita 1° closed loop:**

$$\frac{\Delta Y}{\bar{Y}} = S_{1c,m} \times S_{o,m} \times \left( \frac{\Delta m}{\bar{m}} \right)$$

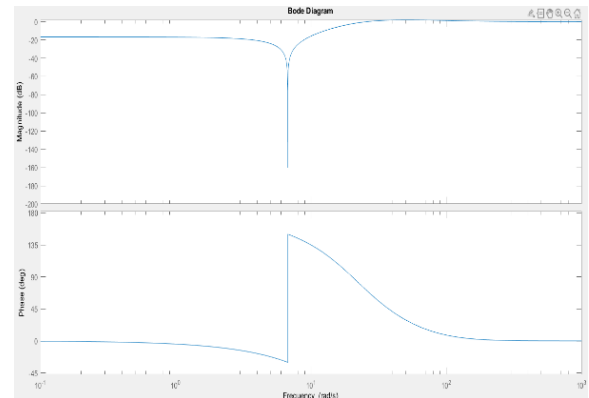


Figura 2: Diagramma di Bode  $\frac{\Delta Y}{\bar{Y}}$  1° closed loop  
 per  $G_1$  (analogo per  $G_2$  e  $G_3$ )

**Variazione uscita 2° closed loop:**

$$\frac{\Delta Y}{\bar{Y}} = S_{2c,m} \times S_{o,m} \times \left( \frac{\Delta m}{\bar{m}} \right)$$

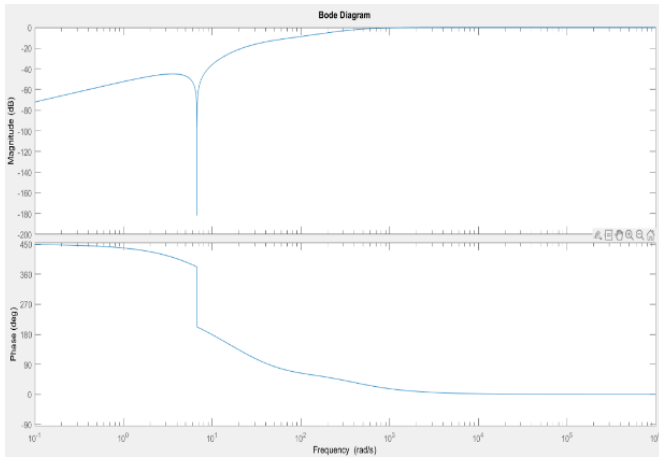


Figura 3: Diagramma di Bode  $\frac{\Delta Y}{Y}$  2° closed loop per  $G_1$  (analogo per  $G_2$  e  $G_3$ )

Dai diagrammi di Bode di entrambi i closed loop si nota che i controllori utilizzati, nel range di frequenze tipiche della camminata di un robot (1-5 Hz), hanno una buona robustezza e comportamento passabasso tale da riuscire ad attenuare la variazione di uscita.

#### 4. VERIFICA STABILITA' E POSIZIONE ZMP

Dato un punto di equilibrio di un sistema non lineare e dato il sistema linearizzato, controllato in modo da essere asintoticamente stabile, attorno a tale punto, si definisce **Regione di asintotica stabilità** (RAS) del sistema non lineare controllato la regione dello spazio di stato a partire dalla quale ogni traiettoria del sistema converge al punto di equilibrio asintoticamente.

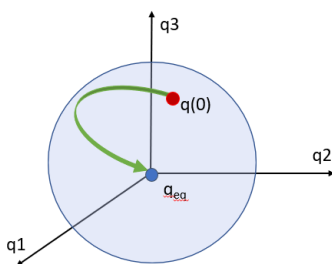


Figura 4: Regione di asintotica stabilità e generica traiettoria del sistema

Data la precedente condizione di equilibrio di riferimento  $q = [-\pi/6 \ \pi/3 \ -\pi/6]$  e  $\dot{q} = [0 \ 0 \ 0]$ , tramite l'ambiente Matlab-Simulink si valuta al variare delle condizioni iniziali il settore che mi permette di avere i moti desiderati.

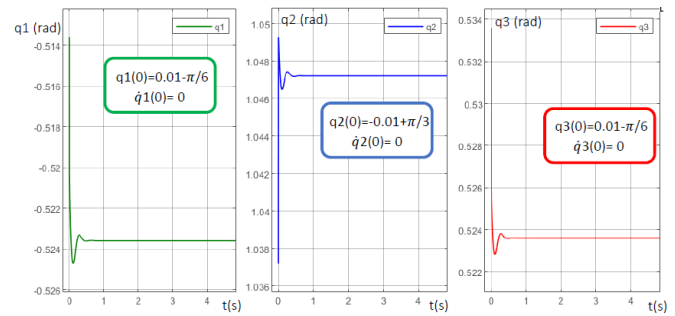


Figura 5: Andamento di  $q_1, q_2, q_3$  per una condizione iniziale all'interno della Regione di asintotica stabilità

Dalla campagna di simulazioni per varie condizioni iniziali si ottiene che i limiti sugli angoli  $q$  sono i seguenti:

$$\begin{aligned} q_1 &\in [-0.1 - \pi/6 ; 0.1 + \pi/6] \\ q_2 &\in [-0.1 + \pi/3 ; 0.1 + \pi/3] \\ q_3 &\in [-0.1 - \pi/6 ; 0.1 + \pi/6] \end{aligned}$$

Quindi il sistema modellato come catena seriale di link rigidamente vincolata al telaio (piede fissato al terreno) ha una regione di stabilità molto ampia per i nostri scopi. In realtà, la trattazione fino ad ora si è basata sull'ipotesi di ZMP verificato ed è necessario controllarla per la stabilità.

Lo **Zero-Moment Point** viene definito come il punto sul piano rispetto al quale è nullo il momento risultante dovuto alla forza peso ed alle forze inerziali agenti sul robot. Se lo ZMP si trova all'interno del poligono di supporto il balancing del robot risulta verificato. Questo garantisce che le forze di contatto fra piede e terreno abbiano il corretto verso per garantire il vincolo unilatero.

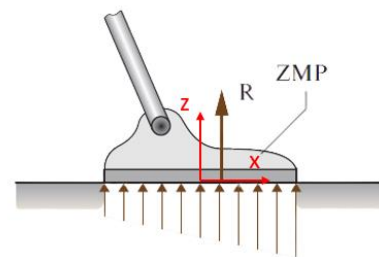


Figura 5: ZMP

Il piede del robot è lungo  $a = 80$  mm e largo  $b = 50$  mm. Per la valutazione della posizione dello ZMP si utilizza la seconda equazione cardinale con polo ZMP:

$$\tau_{ZMP} = \dot{L} - c \times Mg + (\dot{P} - Mg) \times p \quad (5)$$

dove  $p$  è la posizione dello ZMP,  $c$  la posizione del centro di massa  $M$ ,  $\dot{L}$  la derivata temporale del momento angolare e  $\dot{P}$  sono le forze inerziali. Si valuta la posizione lungo l'asse  $x$  dello ZMP imponendo  $\tau_{ZMP}=0$  e imponendo queste ipotesi semplificative:

- Camminata allo stesso livello del sistema di riferimento ( $p_z = 0$ )
- Masse dei link sul piano  $x$ - $z$  ( $c_{yi} = 0$ )
- Trascuro effetto rotazionale ( $\dot{L} \sim 0$ )

$$p_x = \frac{Mg x}{Mg + \dot{P}_x}$$

Inserendo  $x$  e  $\dot{P}_x$  in funzione di  $q, \dot{q}$  e  $\ddot{q}$  si ottengono i seguenti grafici tramite Matlab-Simulink.

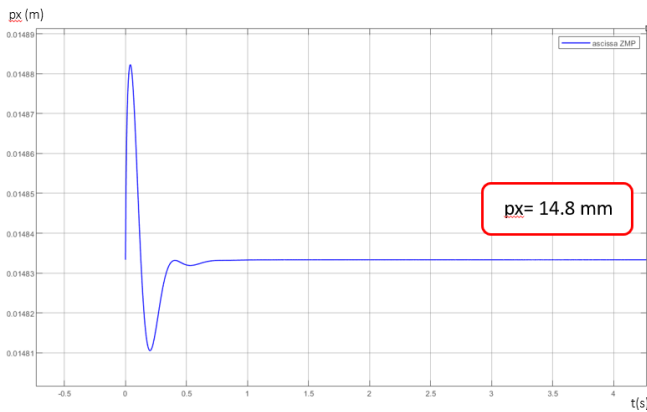


Figura 6: Valutazione della posizione dello ZMP lungo l'asse  $x$  per la condizione massima della RAS

Per una migliore analisi dei dati sono stati inseriti dei filtri ( $C=1/(1+0.01s)$ ) sui rami delle accelerazioni angolari e si riscontra che è verificata per ogni condizione iniziale nella Regione di asintotica stabilità la disequazione

$$|p_x(t)| < \frac{a}{2}$$

Lo ZMP rimane sempre all'interno del poligono di supporto e i limiti sugli angoli rimangono quelli precedentemente valutati. Inoltre la verifica positiva della posizione dello ZMP permette di accettare il modello di catena seriale di link rigidamente vincolata al telaio (piede fissato al terreno).

## 5. VERIFICA DELLE SPECIFICHE

Garantita la stabilità del robot, si definisce delle condizioni iniziali per valutare il rispetto delle specifiche sul sistema non lineare.

$$\begin{aligned} q_1 &= [-0.01 - \pi/6] & \dot{q}_1 &= 0 \\ q_2 &= [-0.01 + \pi/3] & \dot{q}_2 &= 0 \\ q_3 &= [-0.1 - \pi/6] & \dot{q}_3 &= 0 \end{aligned}$$

Le specifiche desiderate da rispettare sono sovraelongazione nulla, tempo di assestamento

$T_a = \frac{1}{10}$  s, errore a regime nullo e reiezione dei disturbi costanti e sinusoidali.

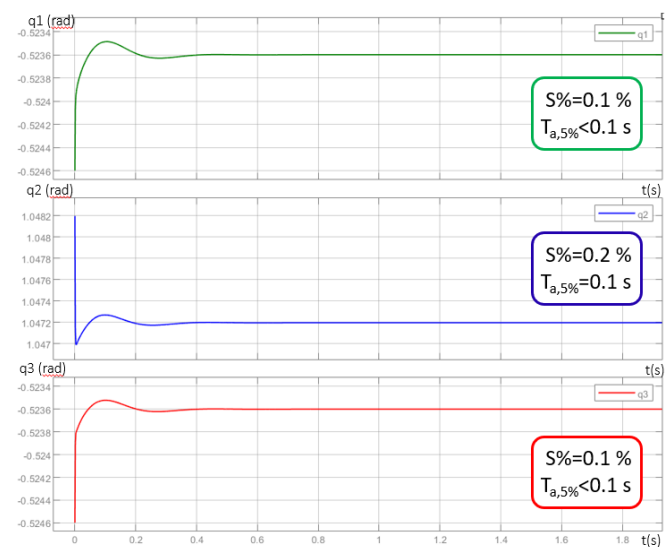


Figura 7: Grafici  $q_1, q_2, q_3$  per verifica delle specifiche sul sistema non lineare

L'errore a regime e il tempo di assestamento sono garantiti per tutte tre le uscite. La sovraelongazione non è nulla per nessun angolo, ma il valore ottenuto è piccolo e accettabile per la trattazione.

## 6. REIEZIONE DEI DISTURBI

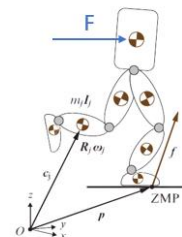


Figura 8: Disturbi dati da forze agenti sul busto del robot

Il robot viene perturbato da una forza  $F$  che genera una coppia applicata sul busto di 10 Nm in modo costante.

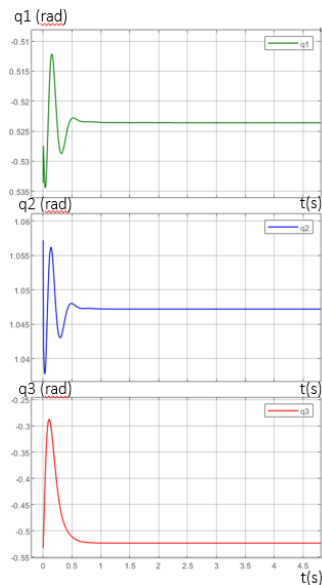


Figura 9: Grafici angoli  $q$  quando è applicata una coppia costante sul terzo link

Si osserva che l'effetto del disturbo è presente solamente nei primi 0.5 s, dopo di che il sistema raggiunge la sua condizione di equilibrio richiesta. Successivamente il disturbo diventa sinusoidale con ampiezza 10 Nm e pulsazione  $5\pi$  rad/s applicato sempre sul busto.

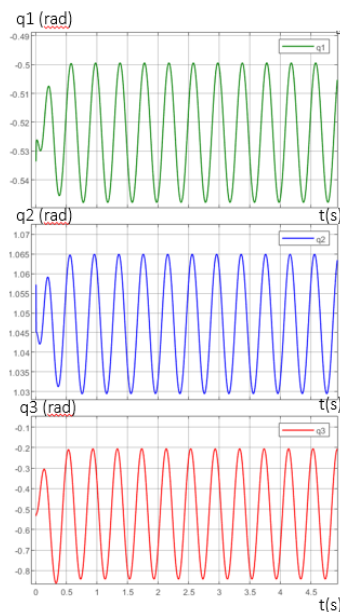


Figura 10: Grafici angoli  $q$  quando è applicata una coppia con andamento sinusoidale sul terzo link

Il sistema oscilla sempre e non raggiunge mai una posizione di equilibrio. E' possibile comunque accettare questi andamenti perché le ampiezze delle oscillazioni di  $q_1$  e  $q_2$  sono molto piccole e si può limitare quelle di  $q_3$  con successive analisi.

## 7. CONCLUSIONI

In questo lavoro è stata fatta un'analisi di robustezza di controllori sul sistema non lineare per verificare il balancing di un robot bipede. Partendo da un modello lineare, affrontato con la tecnica del Controllo Decentralizzato, si valuta il comportamento del sistema linearizzato alla variazione della massa dei link. In seguito, spostandosi sul sistema non lineare, sono stati verificati la corretta stabilità (RAS e posizione ZMP) e il rispetto delle specifiche di lavoro in assenza e in presenza di disturbi attraverso l'ambiente Simulink. Un possibile sviluppo futuro di questo lavoro potrebbe essere quello di studiare un modello con due gambe in modo da far compiere dei passi al robot.

## RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

1. Kajita, S. et al. (2003) *Biped walking pattern generation by using preview control of zero-moment point in "2003 IEEE International Conference on Robotics and Automation"* (Cat. No. 03CH37422) 2 (2003), 1620\_1626.
2. Vukobratovic, M. & Borovac, B. (2004), *Zero-moment point – thirty five years of its life, in "International journal of Humanoid Robotics", n.1, 157-173*
3. Kim, J.Y., Park, I.W., Oh, J.H. (2007), *Walking Control Algorithm of Biped Humanoid Robot on Uneven and Inclined Floor, in "Journal of Intelligent and Robotic Systems", n.48, 457-484.*
4. Bicchi, A. (2019), *Fondamenti di Automatica - I Parte.*
5. Raffaelli Provenzali, L.(2021) *Regolazione di postura di robot dotati di gambe attraverso tecniche di controllo decentralizzato*, Prova finale per il CdL triennale in Ingegneria Meccanica, Università di Pisa.