



# UNIVERSITÀ DI PISA

Ingegneria Robotica e dell'Automazione  
Controllo dei Robot

## Studenti

Alberto Regoli  
Sebastiano Bianco

Anno Accademico 2023/2024

# Controllo di Sistemi Robotici

## Completamenti Attuati

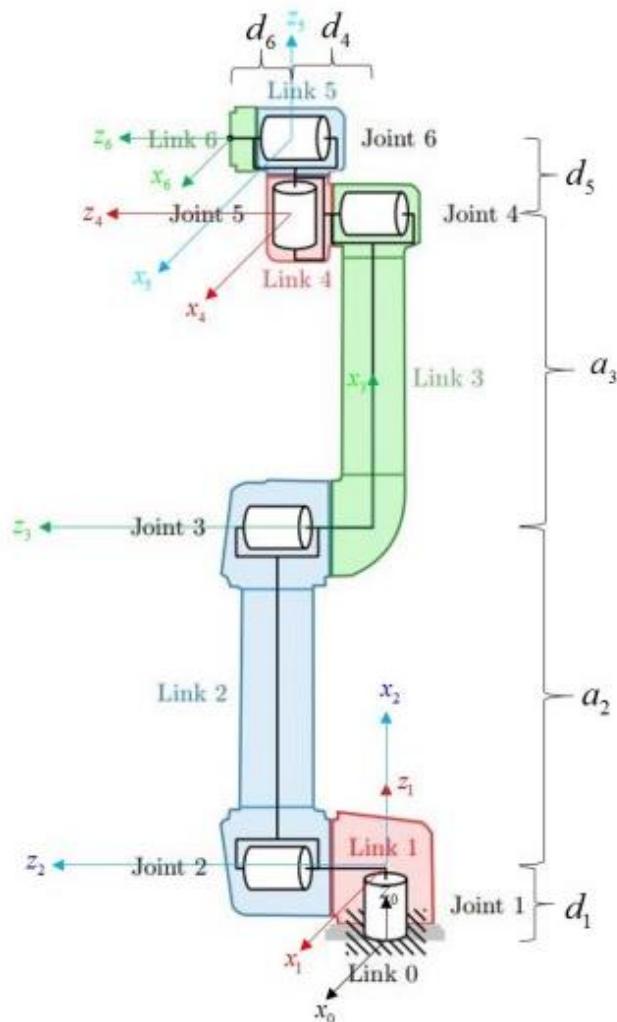
### Manipolatore UR5



6 DoF COBOT from *Universal Robots*

#### Tipologie di controlli:

- PD con compensazione di gravità
- Computed Torque
- Backstepping
- Backstepping Adattivo
- Li-Slotine Adattivo



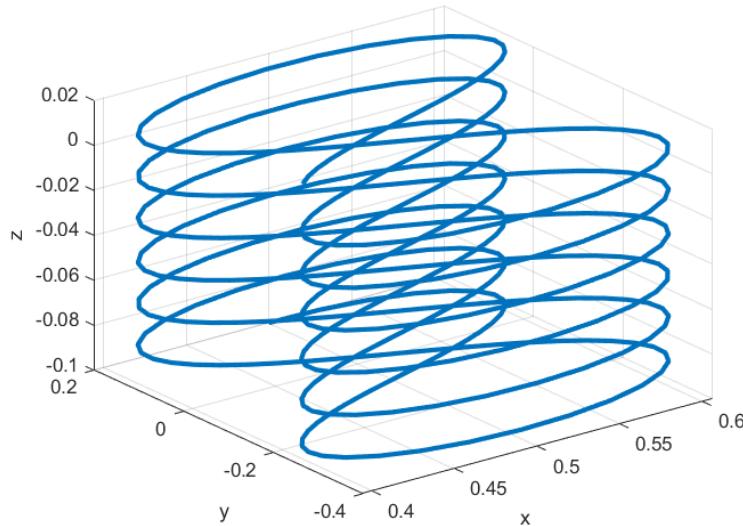
Denavit-Hartenberg parameters

<b>i</b>	$a_i$	$\alpha_i$	$d_i$	$\theta_i$
1	0	$\pi/2$	0.08916	$\theta_1$
2	0.425	0	0	$\theta_2$
3	0.39225	0	0	$\theta_3$
4	0	$\pi/2$	0.10915	$\theta_4$
5	0	$-\pi/2$	0.09456	$\theta_5$
6	0	0	0.0823	$\theta_6$

# Traiettorie

Lemniscata:

$$\begin{cases} x(t) = \frac{0,3 * \sin(t) * \cos(t)}{(1 + \sin^2(t))} + 0,5 \\ y(t) = \frac{0,3 * \cos(t)}{(1 + \sin^2(t))} - 0,1 \\ z(t) = 0,003 * t - 0,1 \end{cases}$$



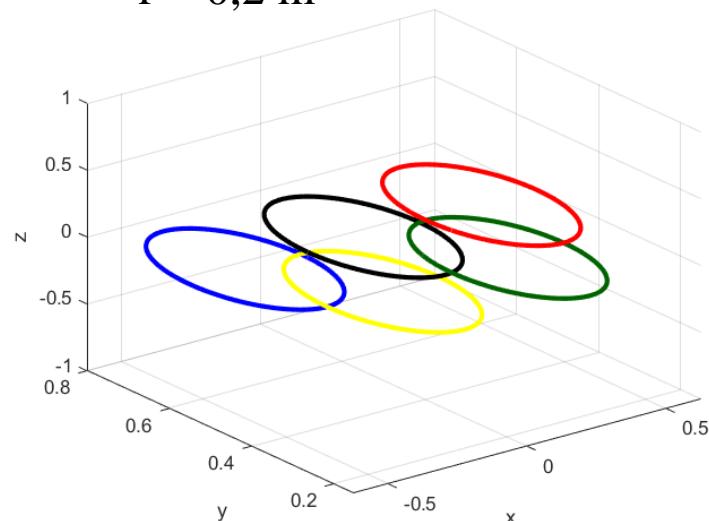
Cerchi Olimpici:

$$\begin{cases} x(t) = x_c + r * \cos(t) \\ y(t) = y_c + r * \sin(t) \\ z(t) = 0 \end{cases}$$

$x_c$        $y_c$

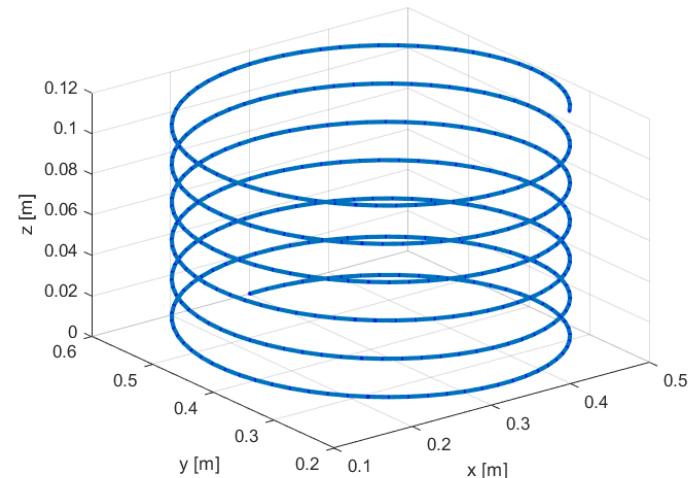
$$c = \begin{bmatrix} 0,55 & 0,425 \\ 0,35 & 0,225 \\ 0,55 & 0 \\ 0,35 & -0,225 \\ 0,55 & -0,425 \end{bmatrix}$$

$r = 0,2 \text{ m}$



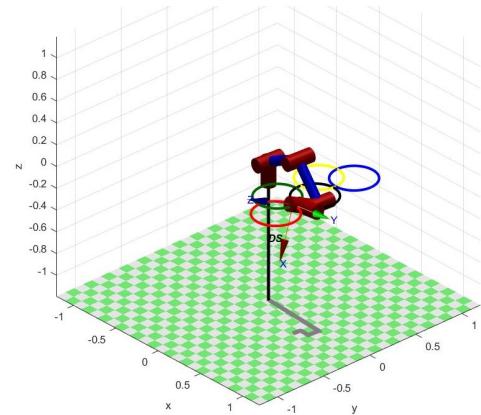
Spirale:

$$\begin{cases} x(t) = 0,2 * \sin(t) + 0,3 \\ y(t) = 0,2 * \cos(t) + 0,4 \\ z(t) = 0,3 * \sin(t) \end{cases}$$

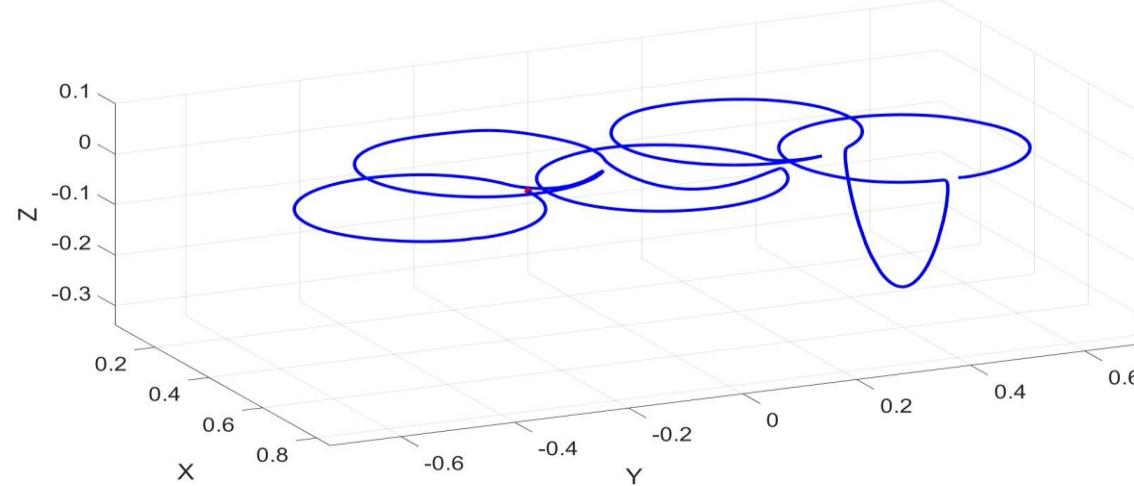


Misure in metri [m]

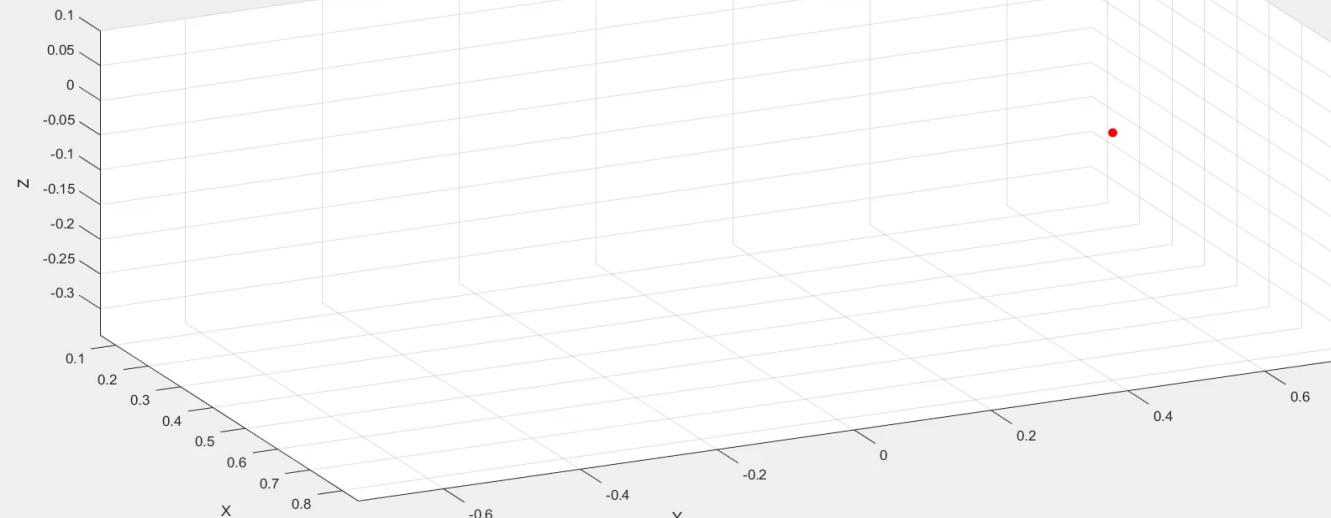
## Traiettoria cerchi olimpici:



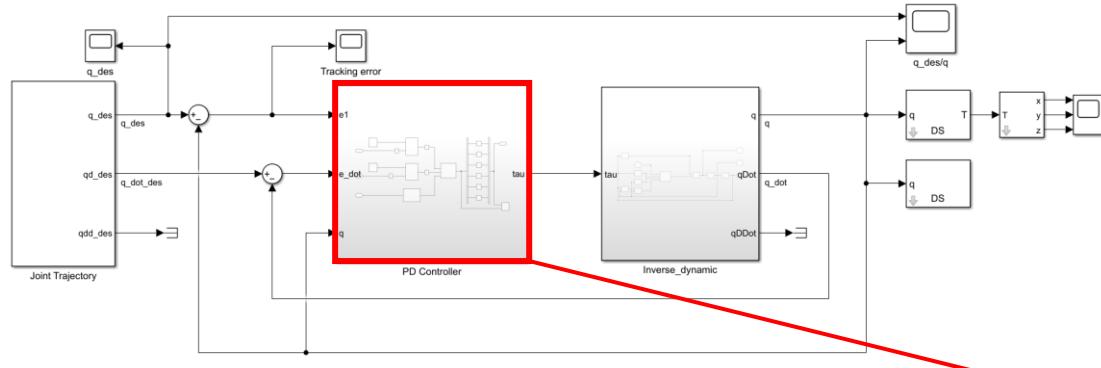
Animazione della Traiettoria del Robot nelle Coordinate XYZ



Animazione della Traiettoria del Robot nelle Coordinate XYZ



# Controllo Proporzionale Derivativo con compensazione di gravità

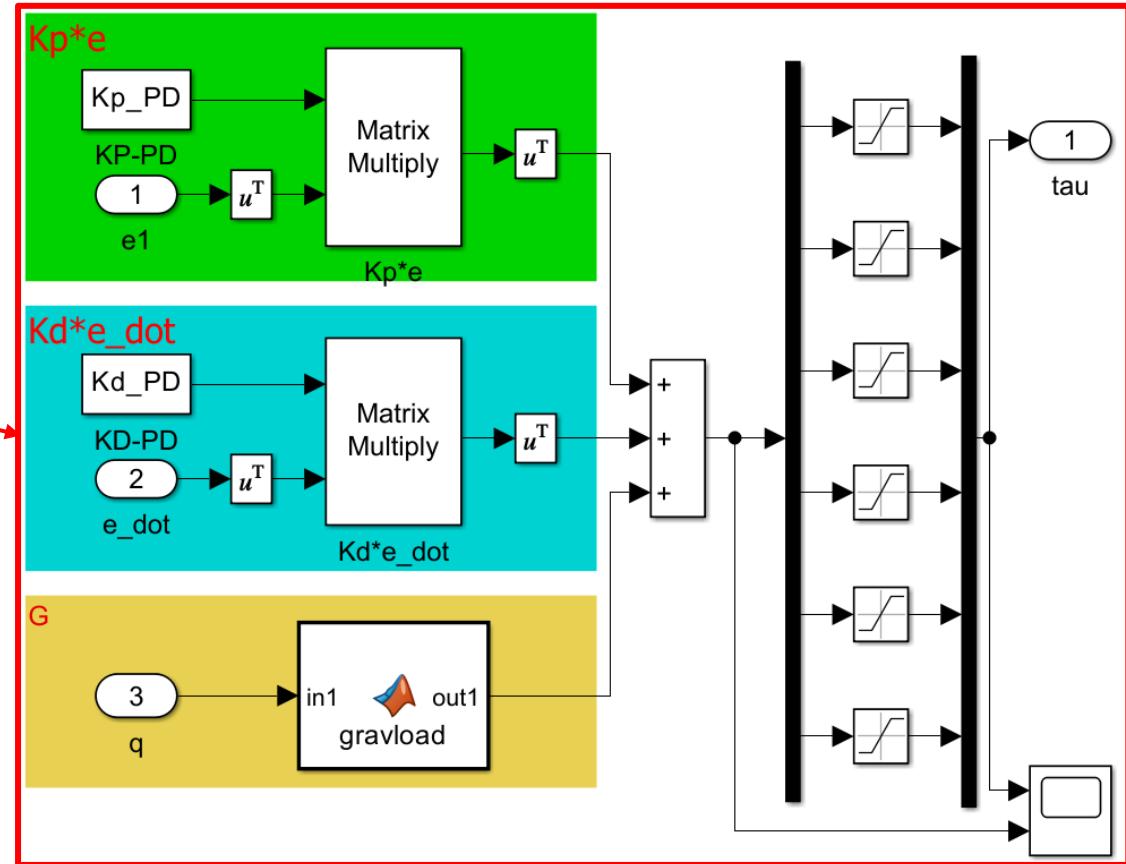


**Legge di controllo:**

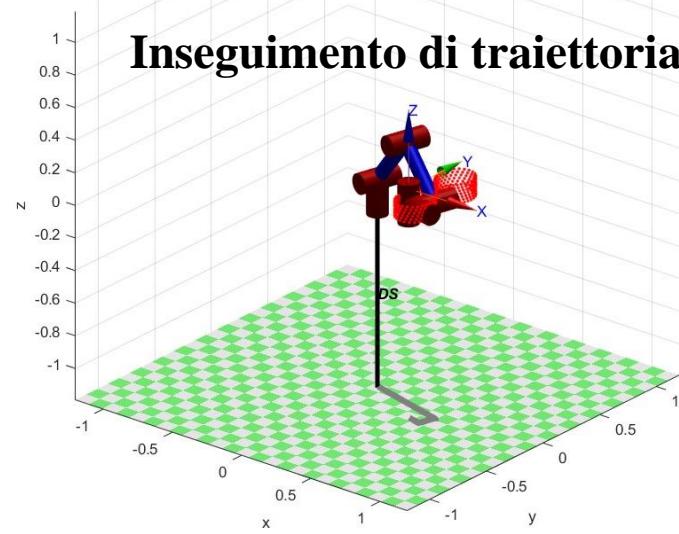
$$\tau = G(q) + K_p e_p + K_d \dot{e}_d$$

$$K_p = 150 \cdot \text{eye}(6)$$

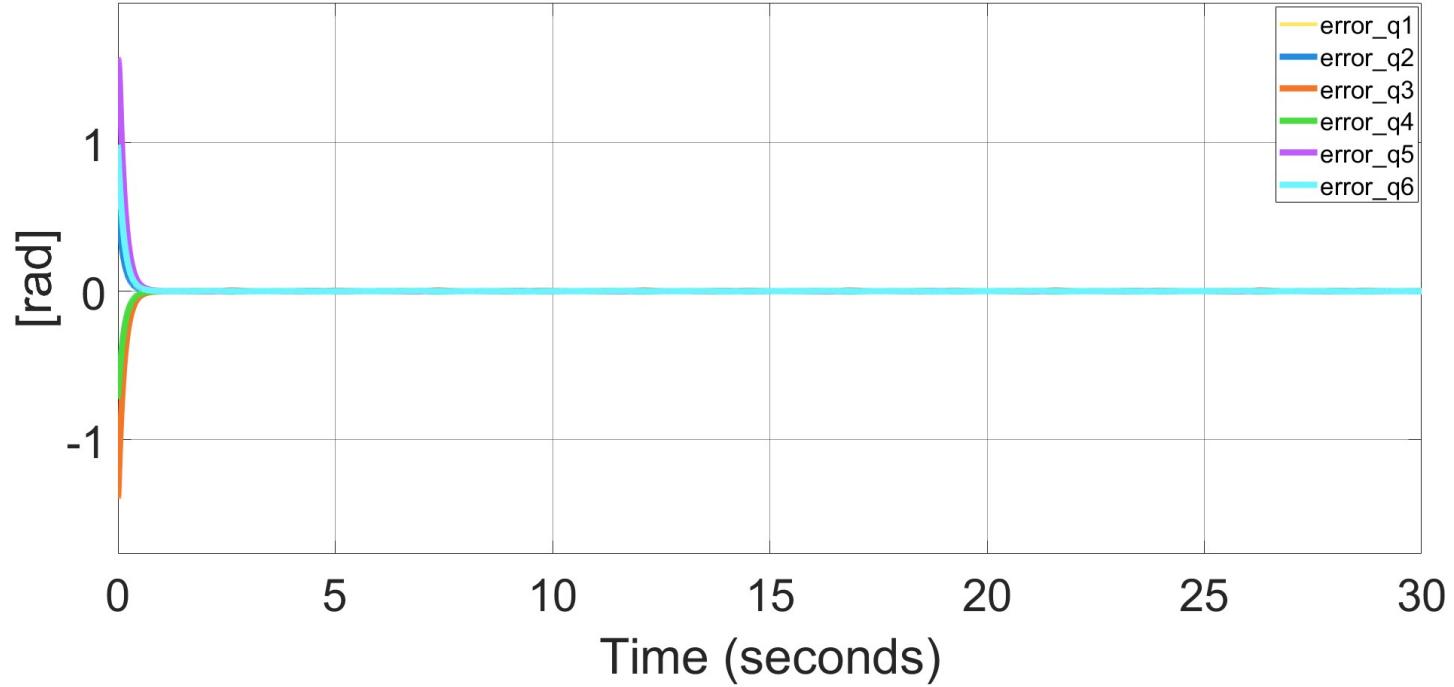
$$K_d = 1100 \cdot \text{eye}(6)$$



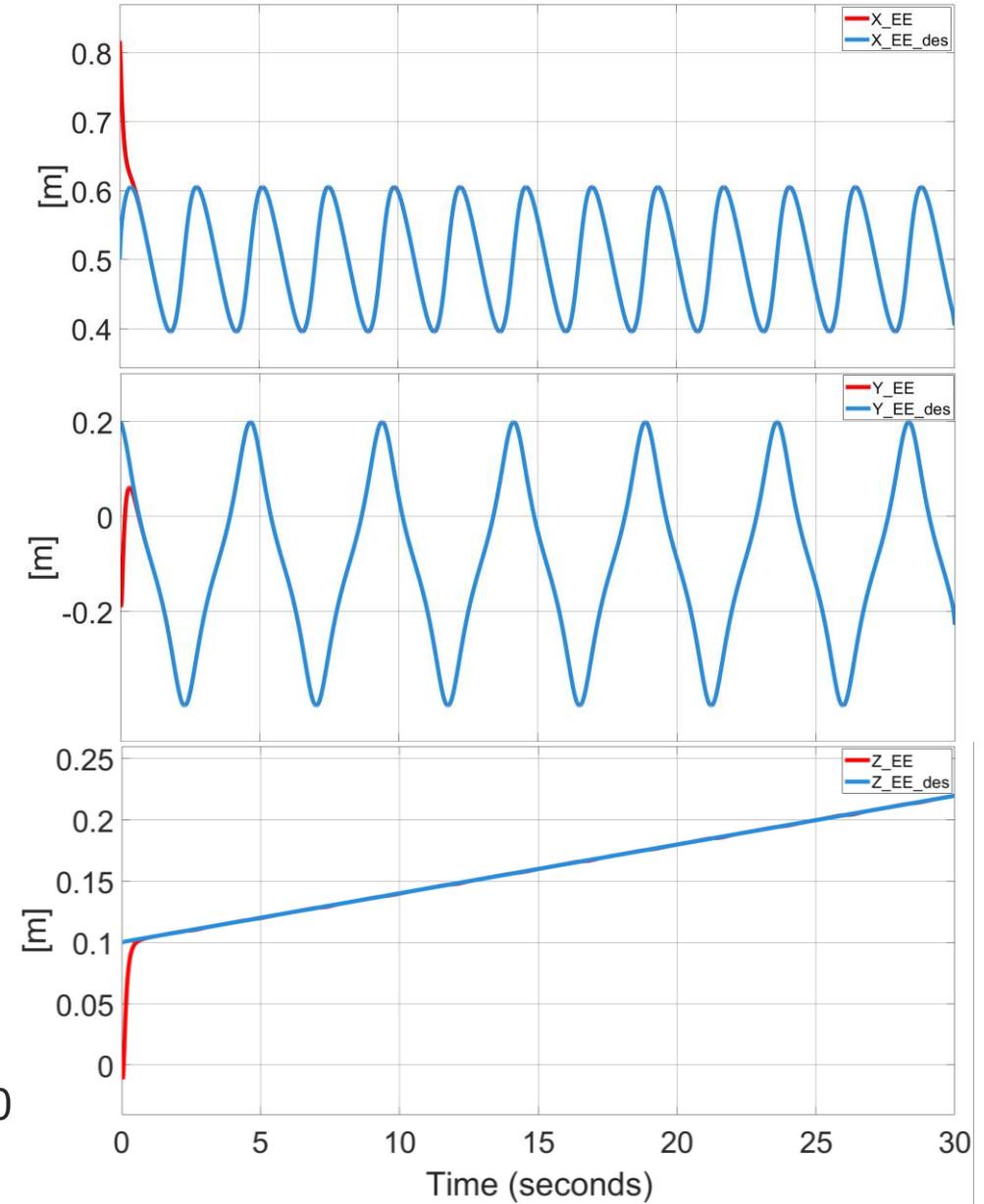
## Inseguimento di traiettoria lemniscata:



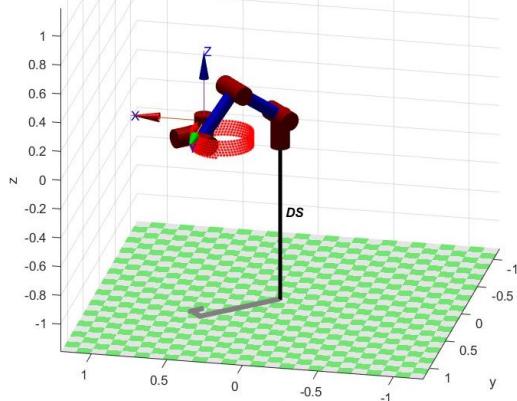
## • Errore ai giunti:



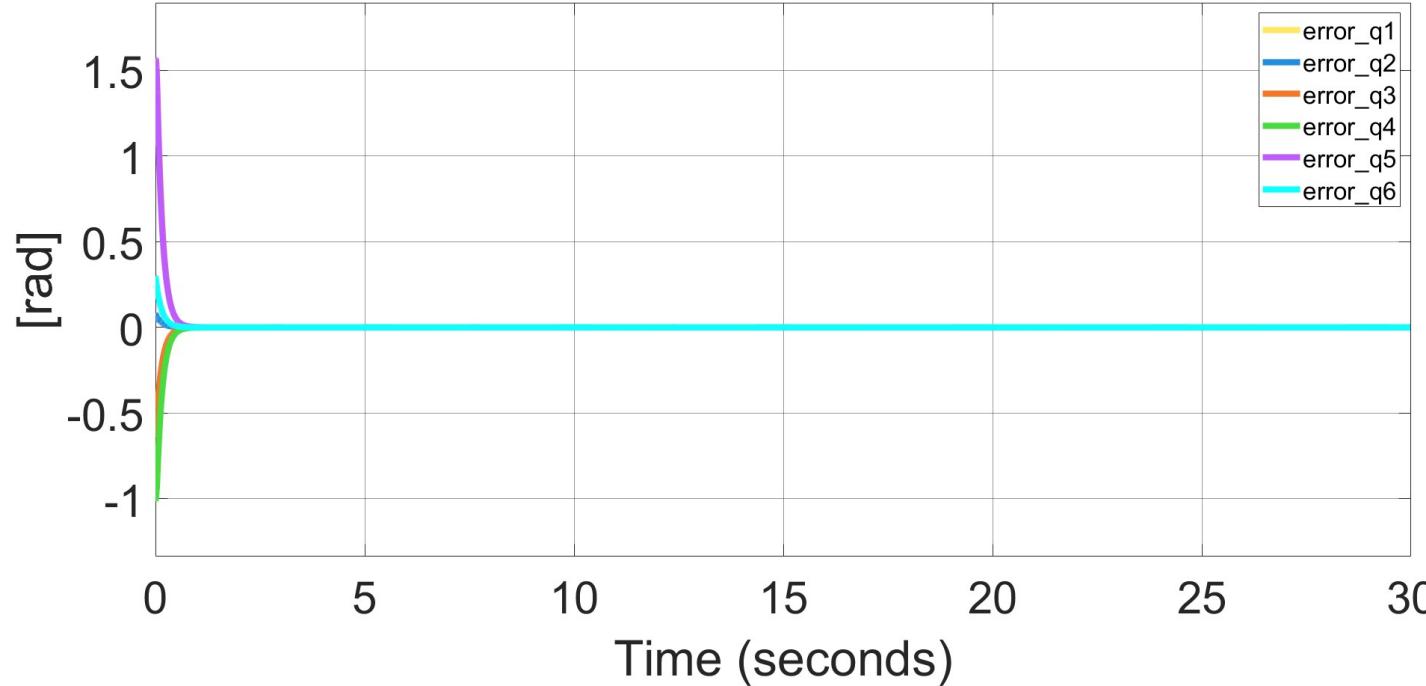
## • Errore all'E-E:



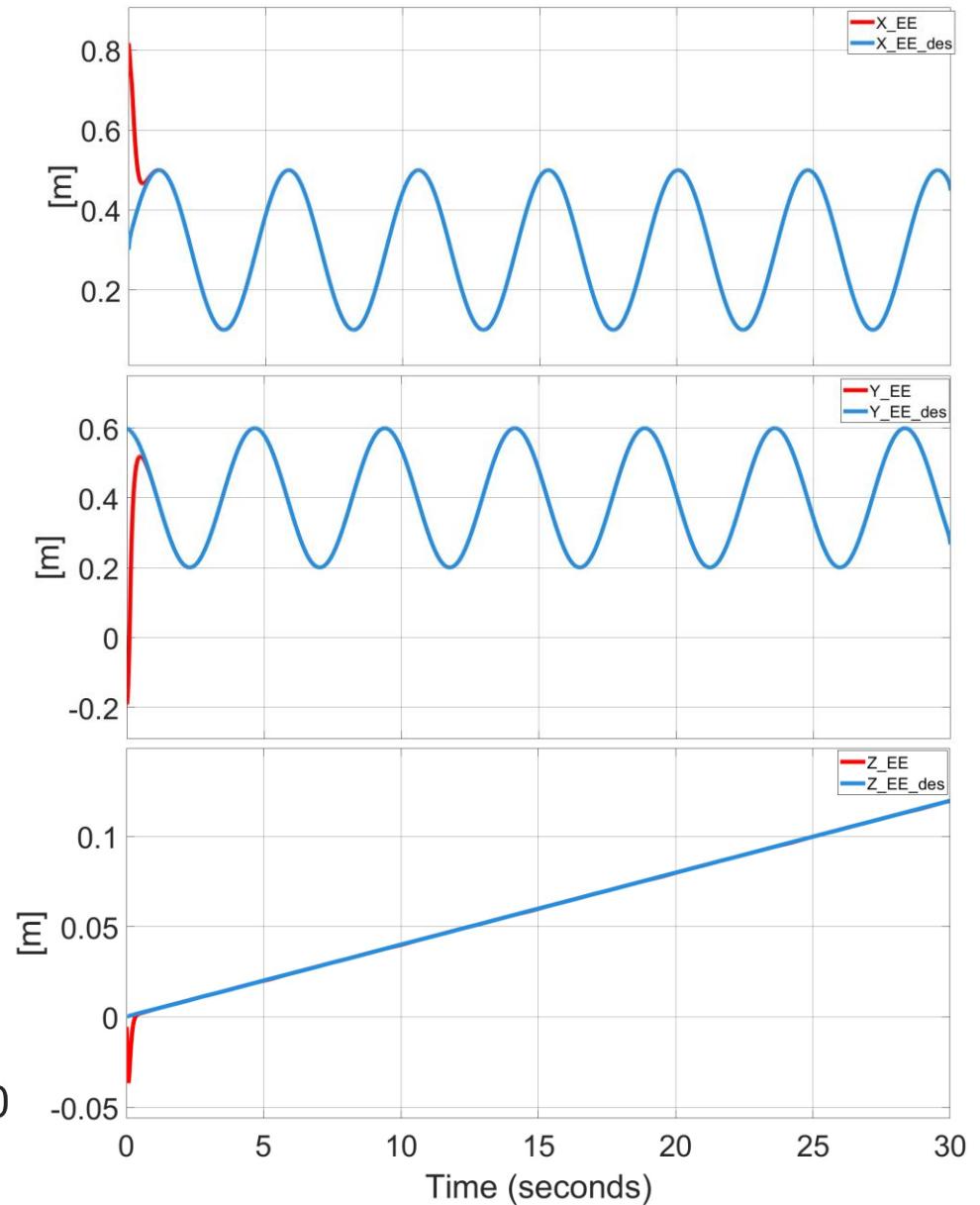
## Inseguimento di traiettoria spirale:



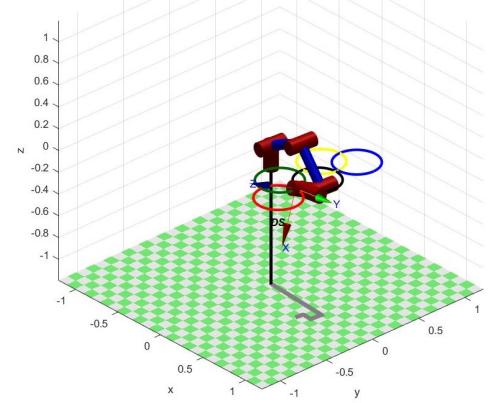
## • Errore ai giunti:



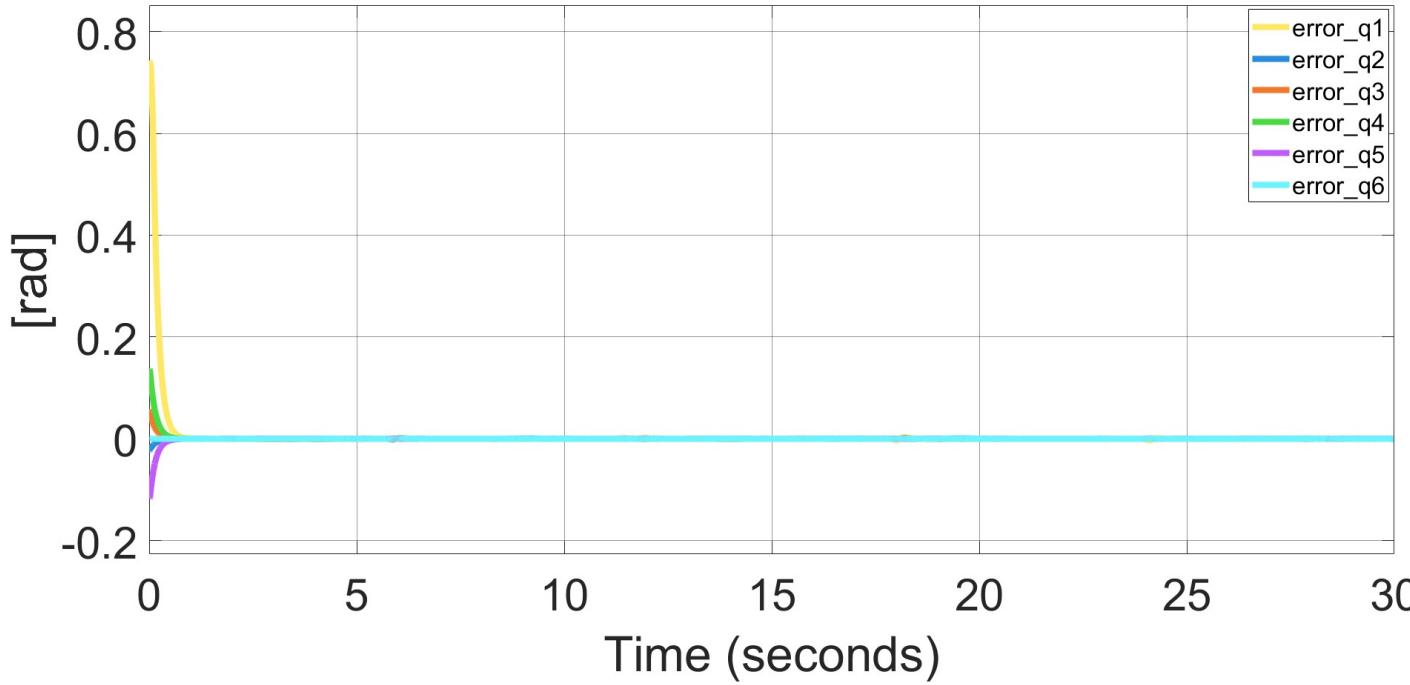
## • Errore all'E-E:



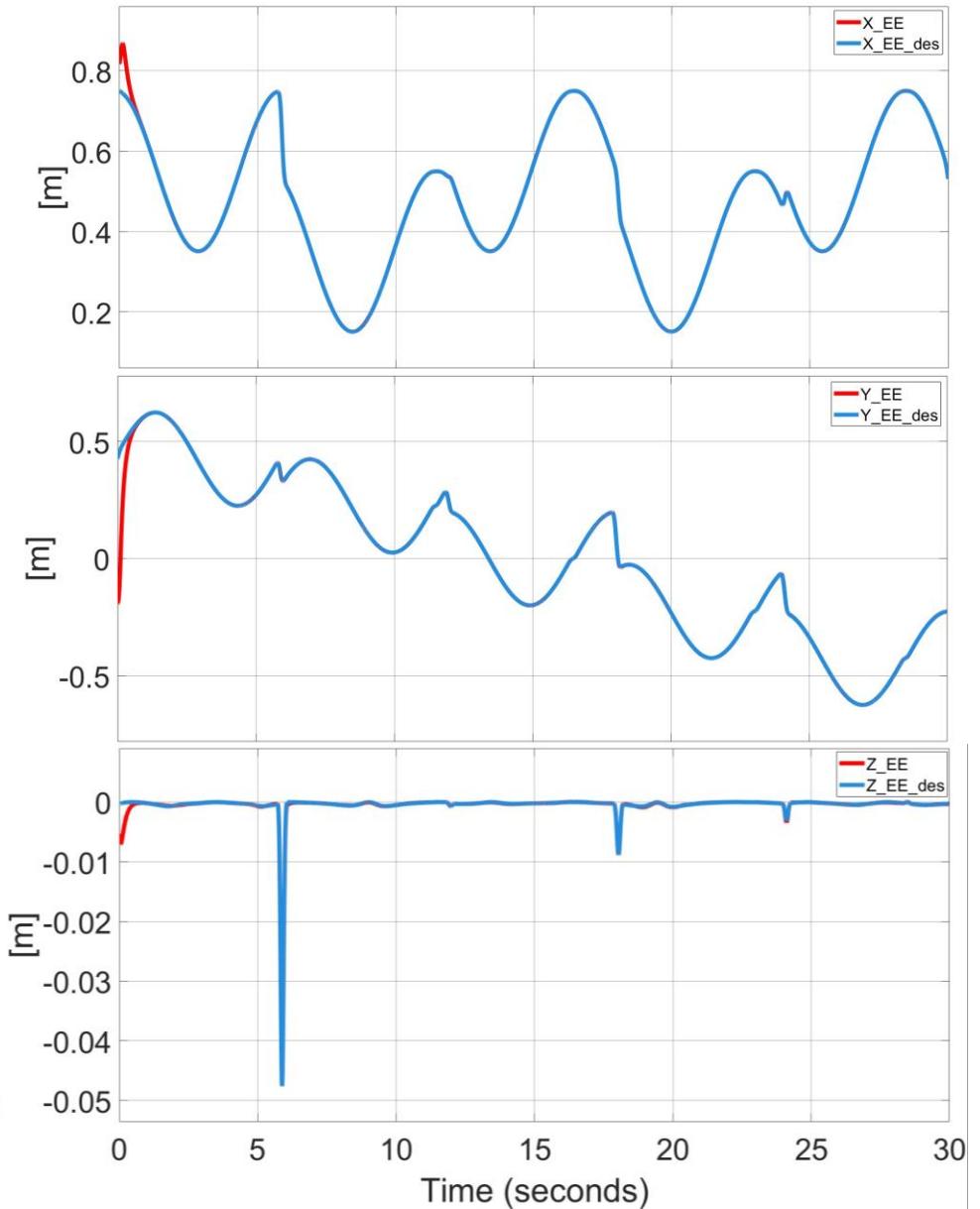
## Inseguimento di traiettoria cerchi olimpici:



- Errore ai giunti:



- Errore all'E-E:



# Controllo Computed Torque

Legge di controllo:

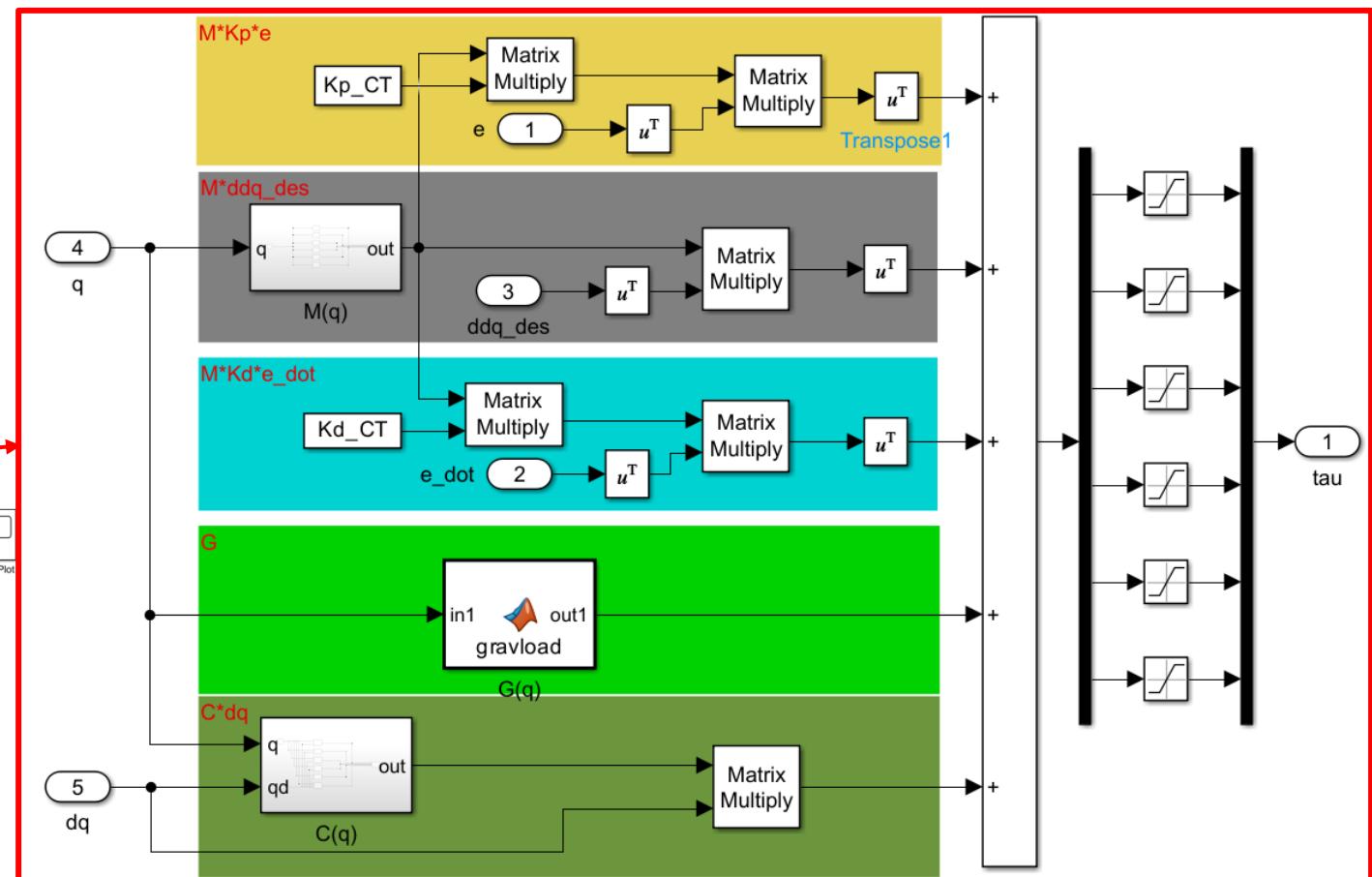
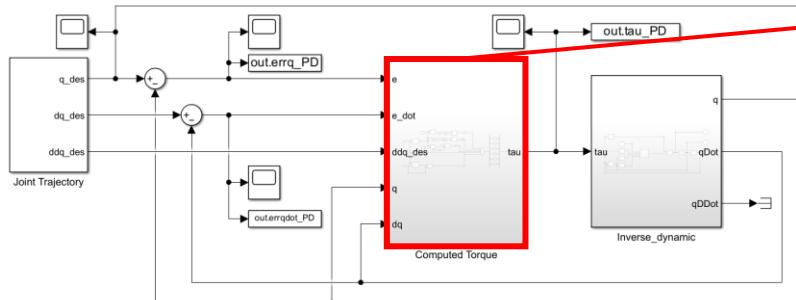
$$\tau(q, \dot{q}, e, \dot{e}) = M(q)\ddot{q}_{des} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) + K'_p e_q + K'_d \dot{e}_q$$

$$K'_p = M(q) \cdot K_p$$

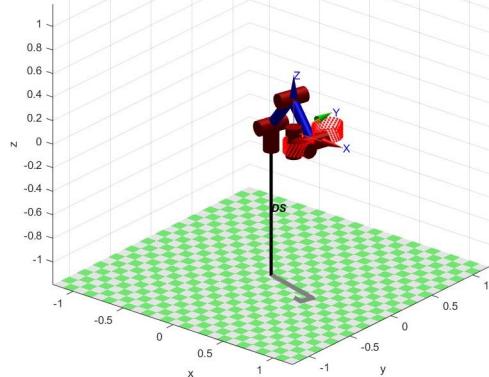
$$K_p = diag([10 11 12 15 15 18])$$

$$K'_d = M(q) \cdot K_d$$

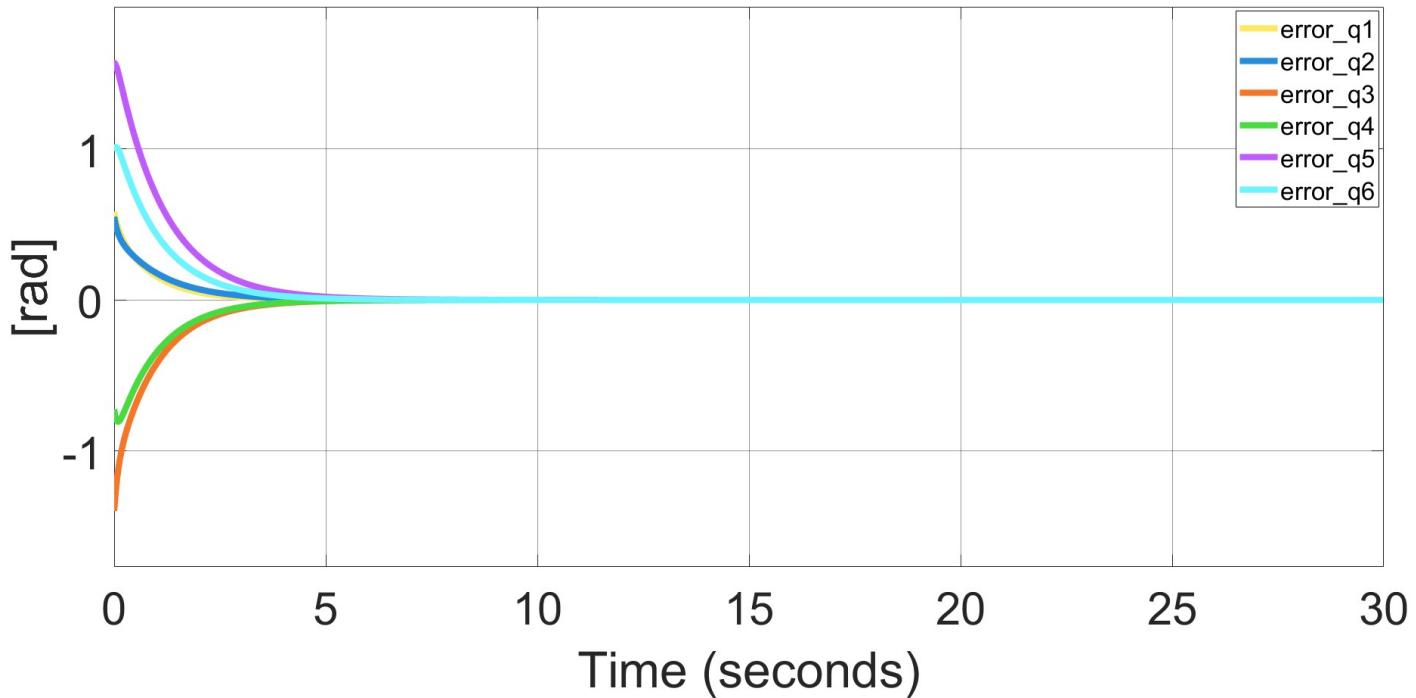
$$K_d = diag([10 13 13 16 18 20])$$



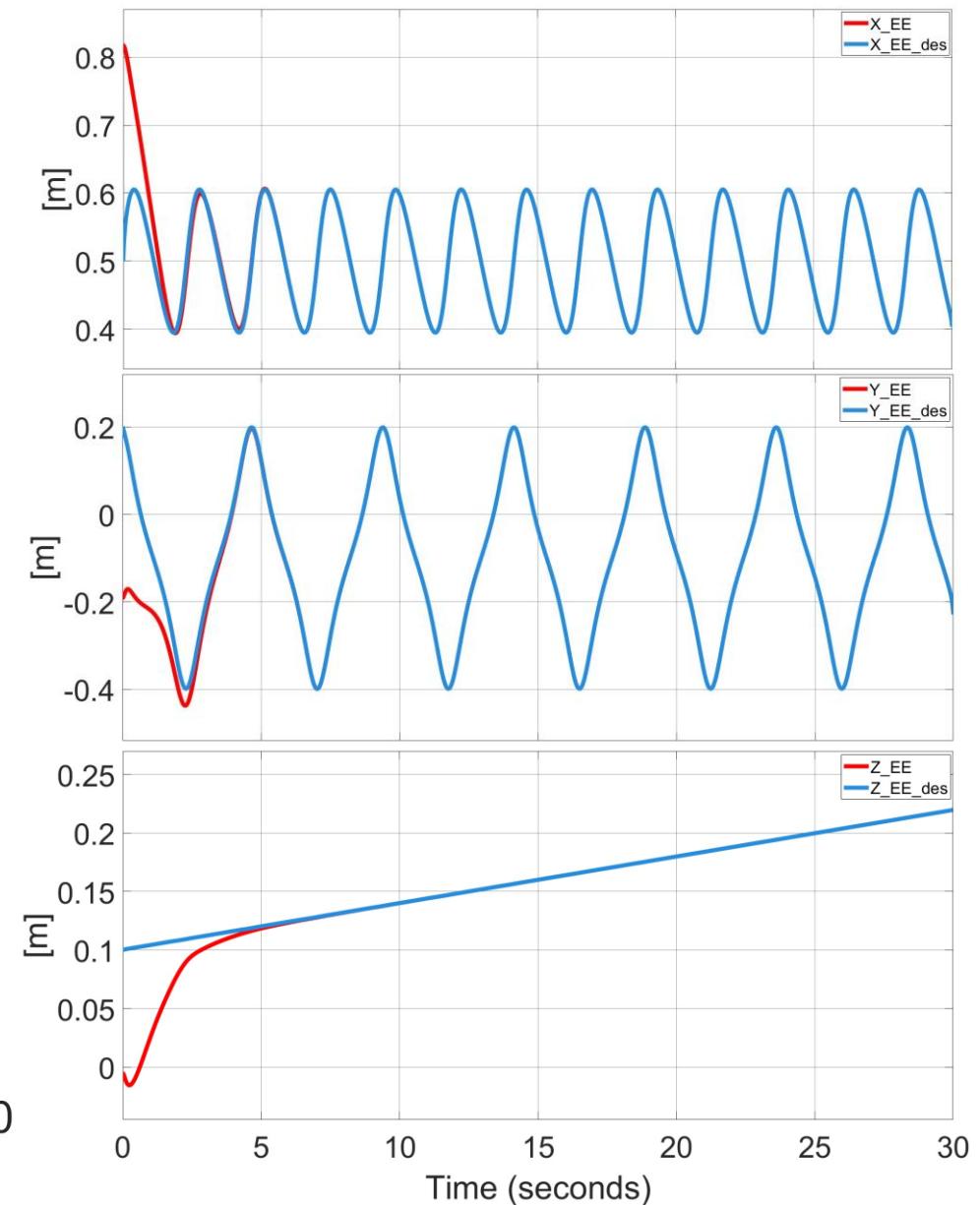
## Inseguimento di traiettoria lemniscata:



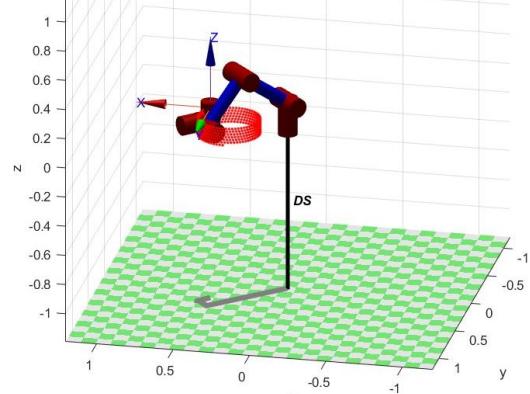
## • Errore ai giunti:



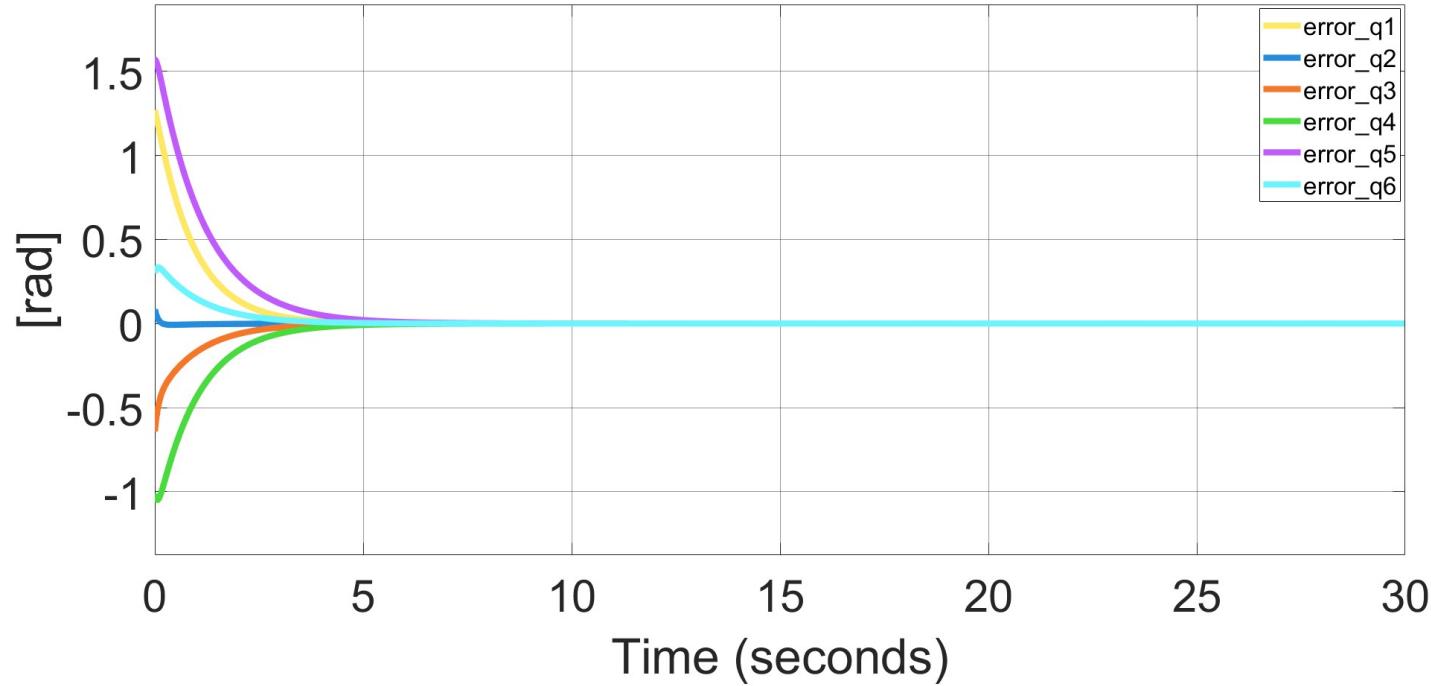
## • Errore all'E-E:



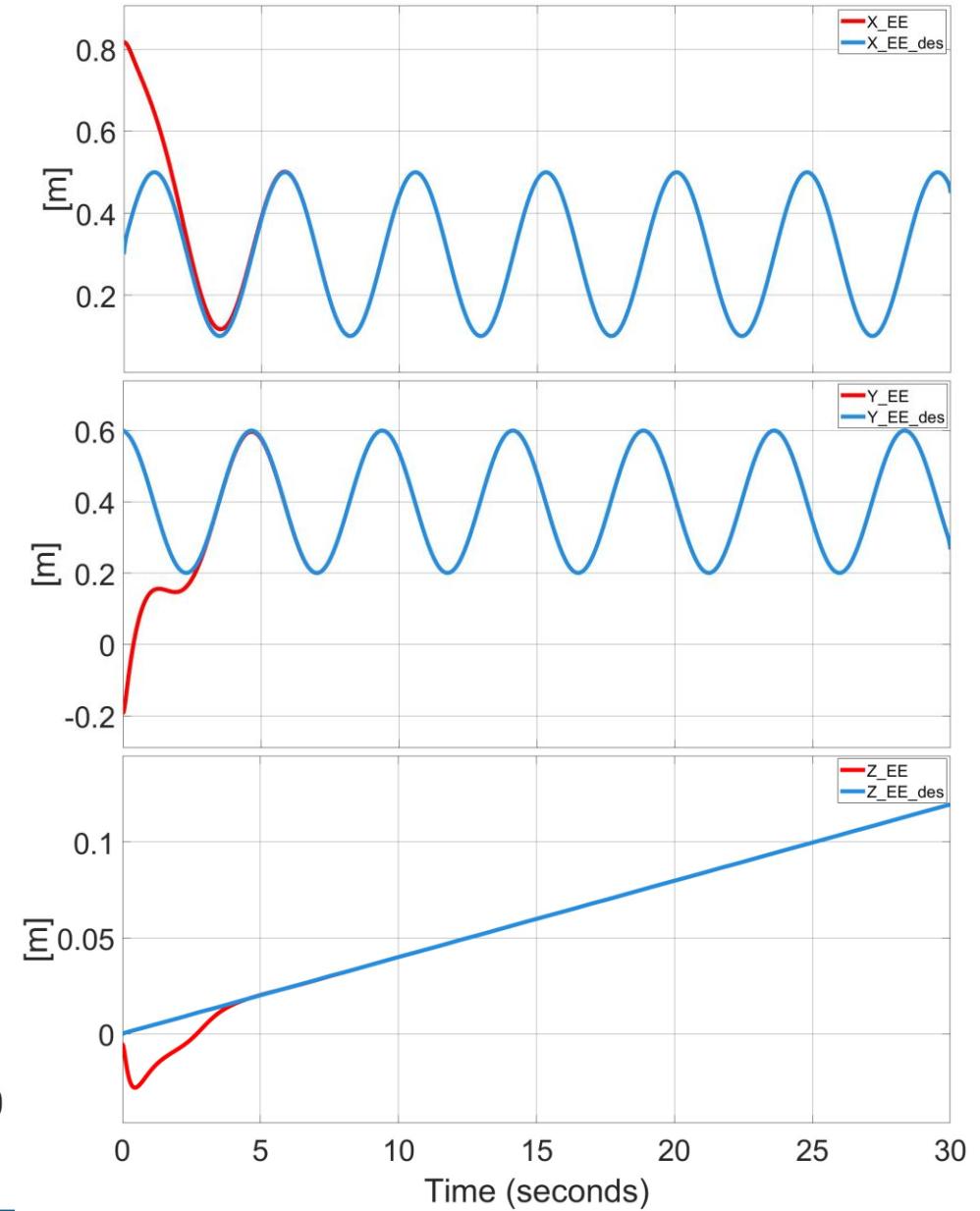
## Inseguimento di traiettoria spirale:



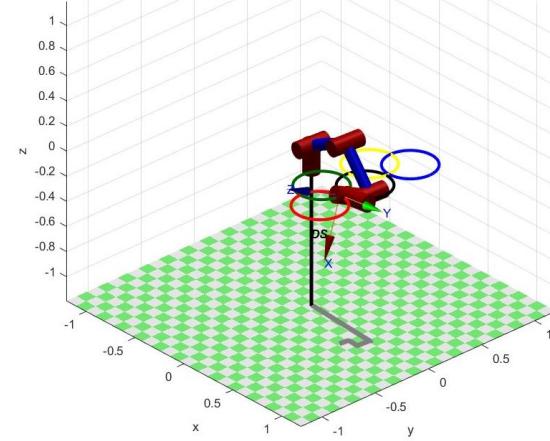
## • Errore ai giunti:



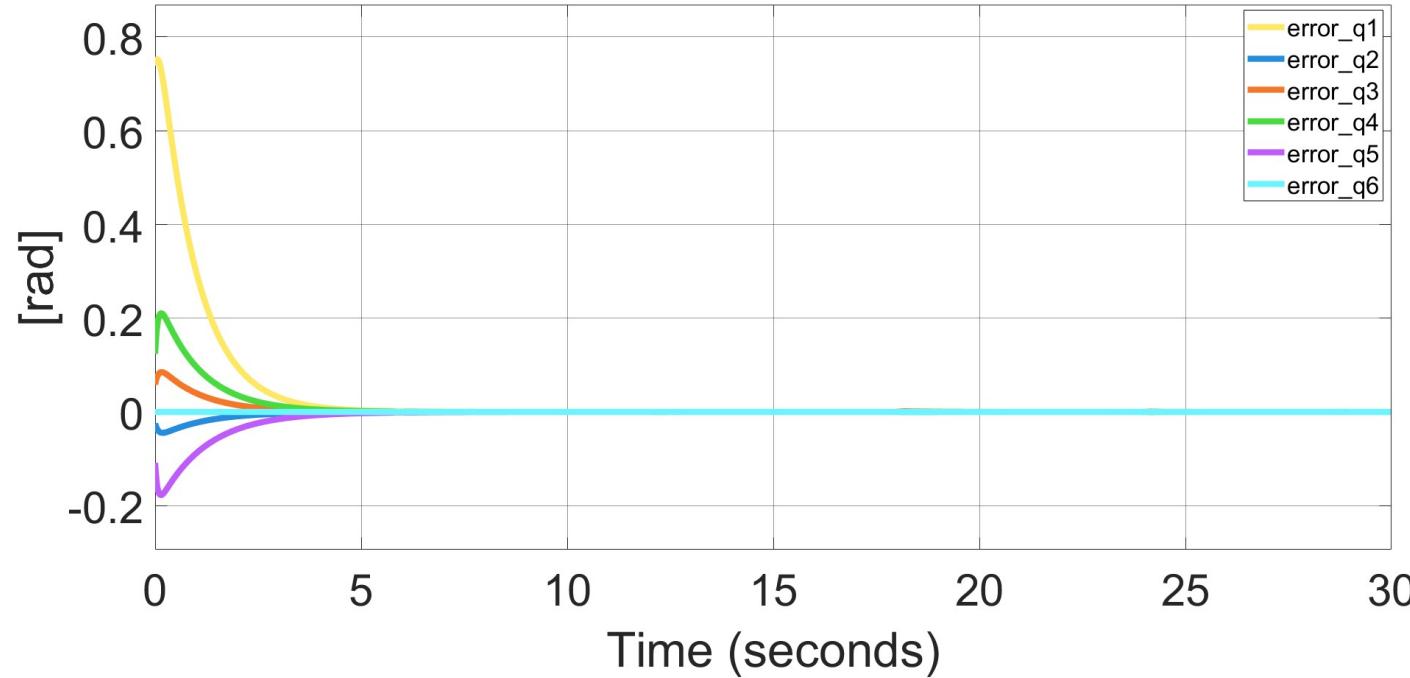
## • Errore all'E-E:



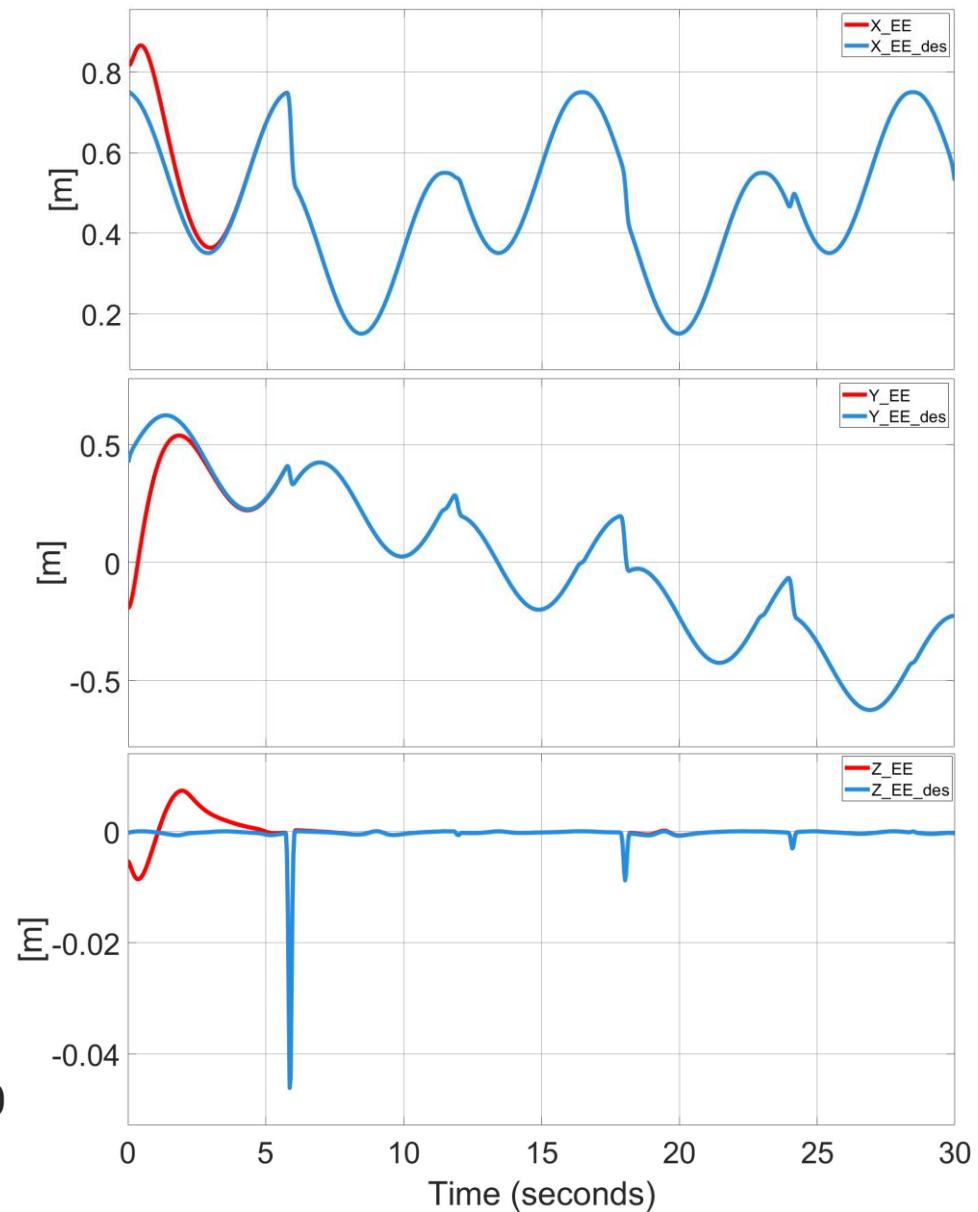
## Inseguimento di traiettoria cerchi olimpici:



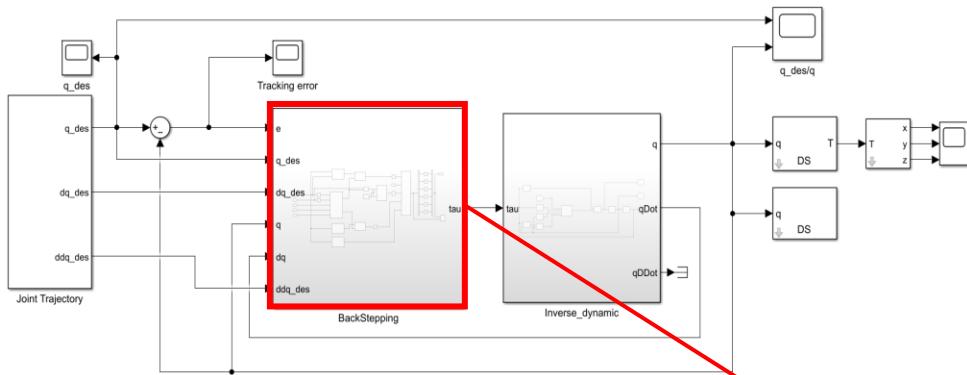
### • Errore ai giunti:



### • Errore all'E-E:



# Backstepping



**Legge di controllo:**

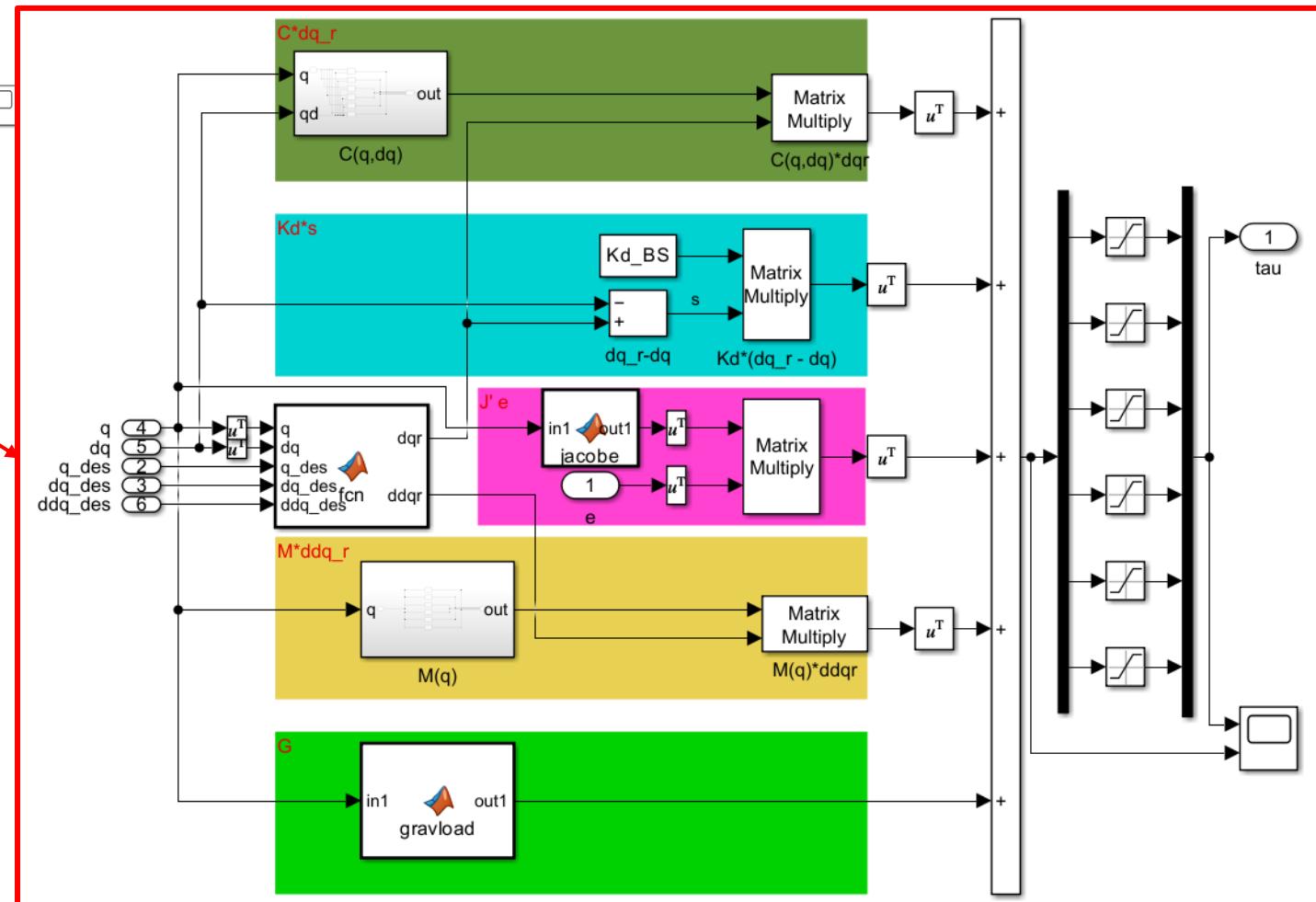
$$\tau = M(q)\ddot{q}_r + C(q, \dot{q})\dot{q}_r + G(q) + K_d s + J^T e$$

$$\begin{cases} \dot{q}_r = J^{-1}(\xi_{des} + \Lambda e) \\ \ddot{q}_r = J^{-1}(\ddot{\xi}_{des} + \Lambda \dot{e}) + J^{-1}(\dot{\xi}_{des} + \Lambda e) \end{cases}$$

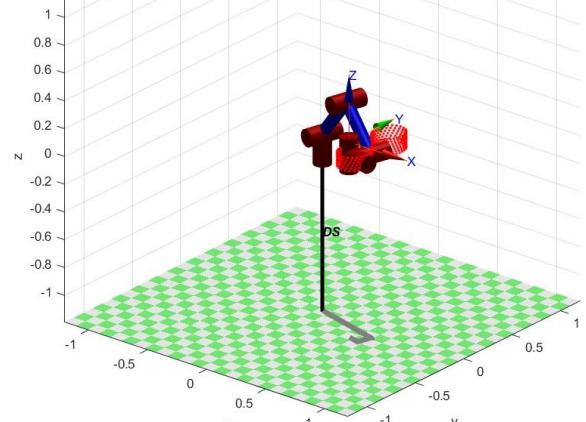
$$\begin{cases} s = \dot{q}_r - \dot{q} \\ e = \xi_{des} - \xi \end{cases}$$

$$K_d = diag([200 \ 500 \ 300 \ 10 \ 2 \ 1])$$

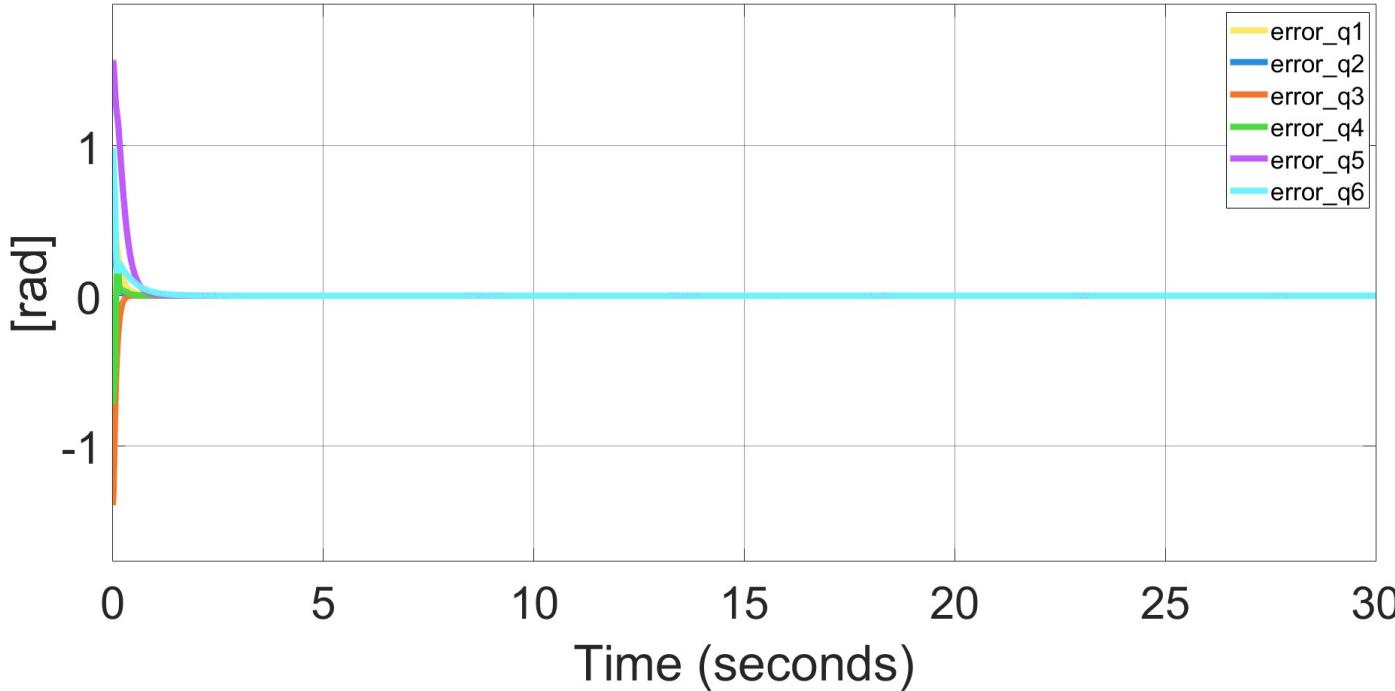
$$\Lambda = diag([30 \ 70 \ 60 \ 300 \ 100 \ 500]);$$



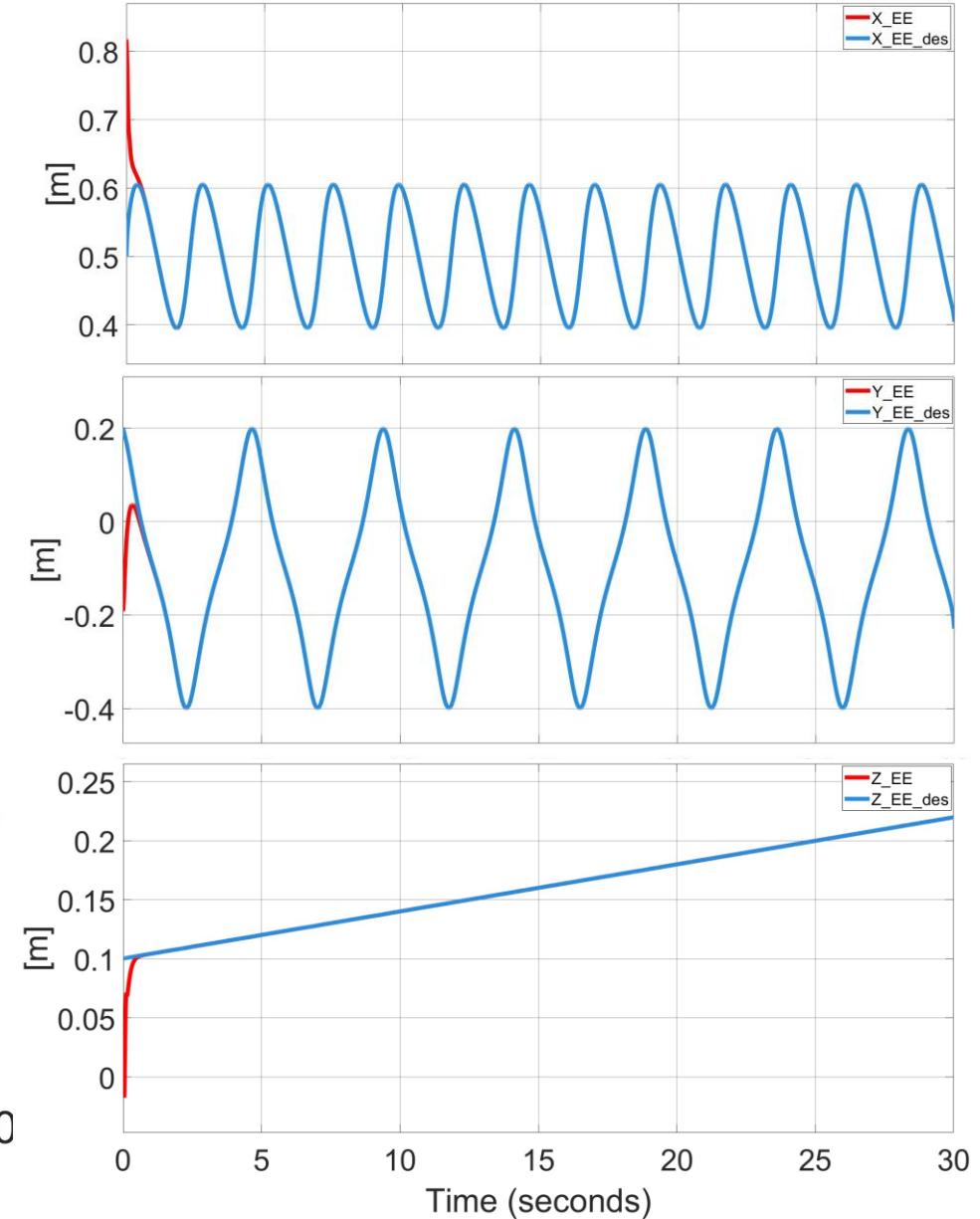
## Inseguimento di traiettoria lemniscata:



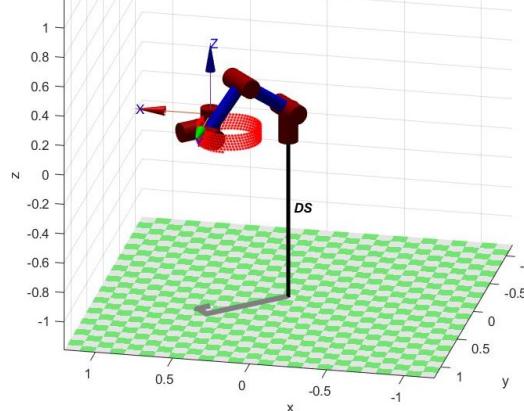
- Errore ai giunti:



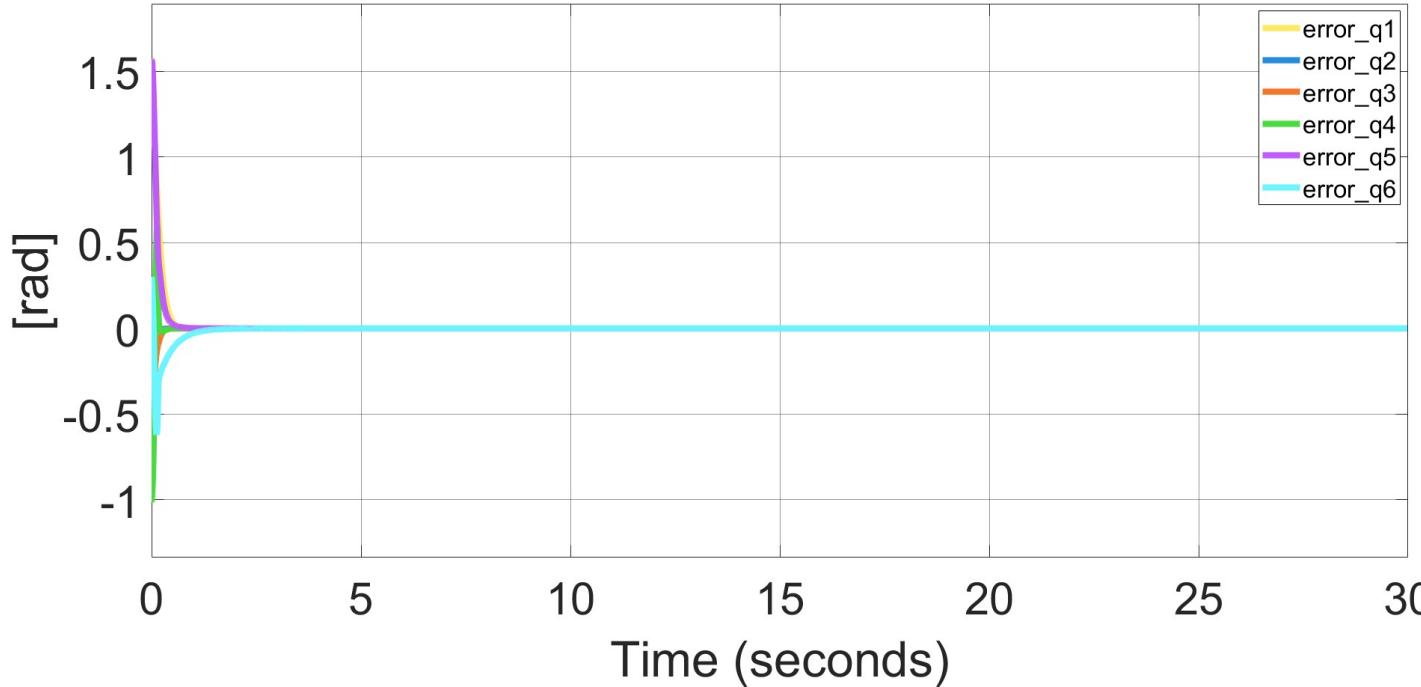
- Errore all'E-E:



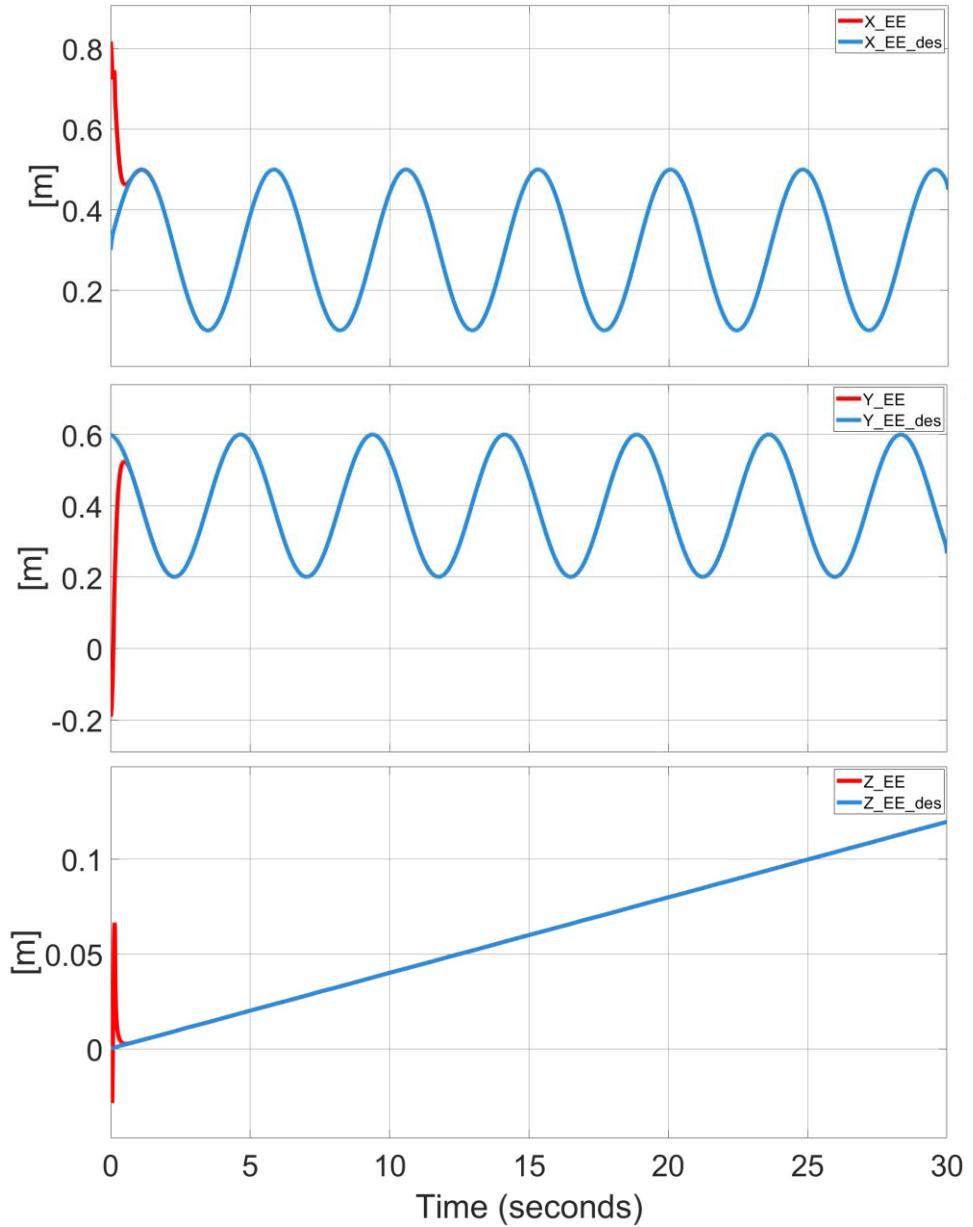
## Inseguimento di traiettoria spirale:



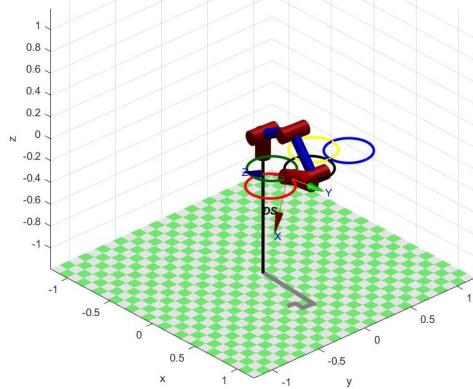
### • Errore ai giunti:



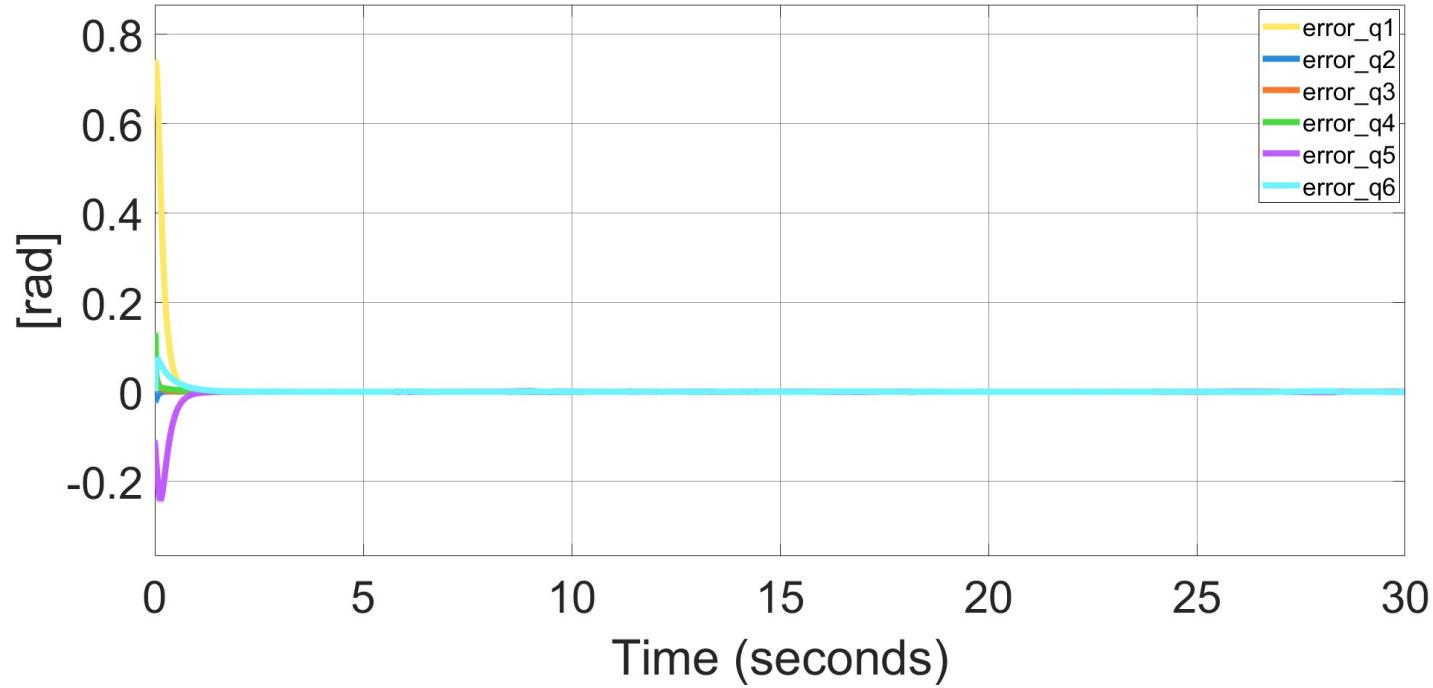
### • Errore all'E-E:



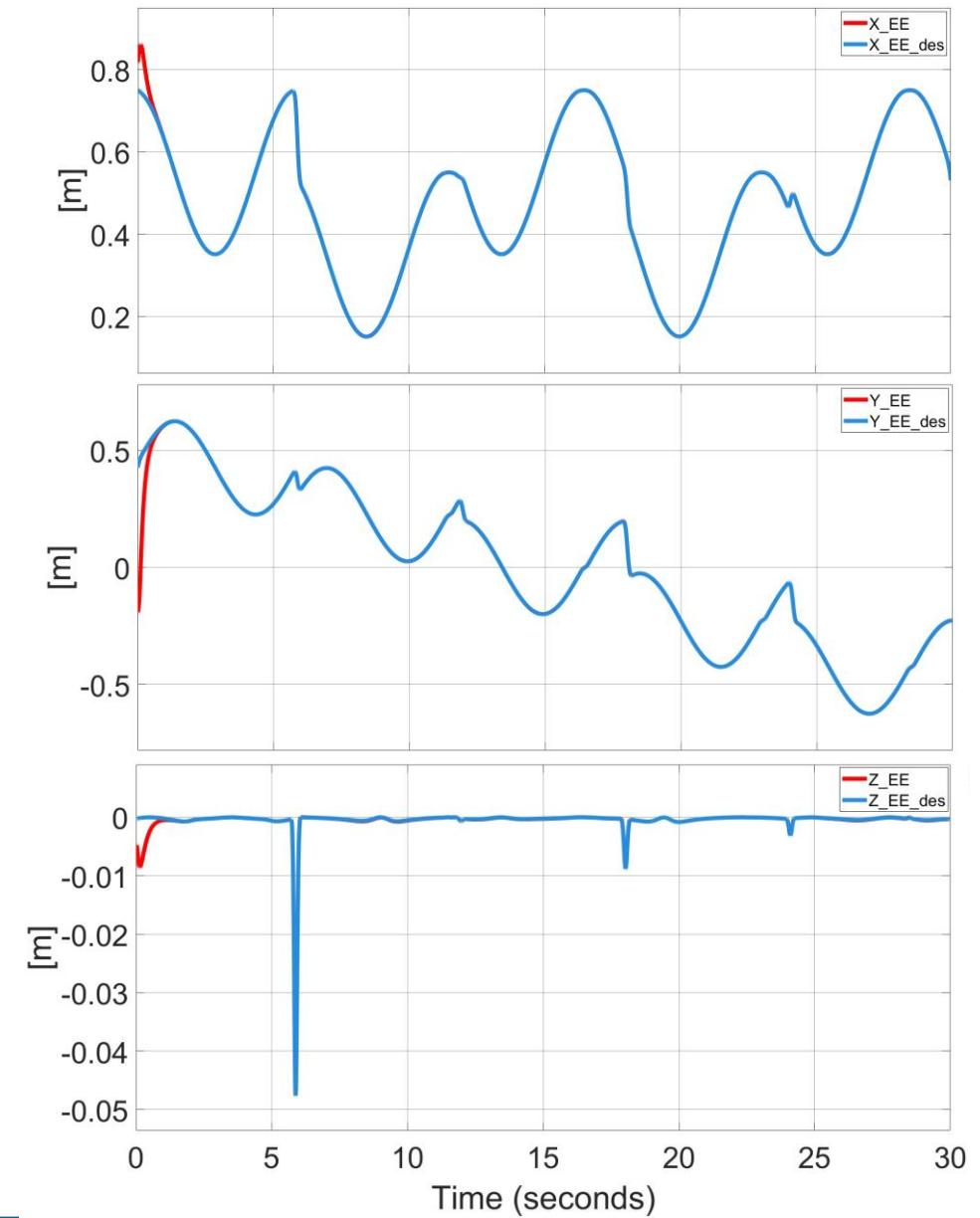
## Inseguimento di traiettoria cerchi olimpici:



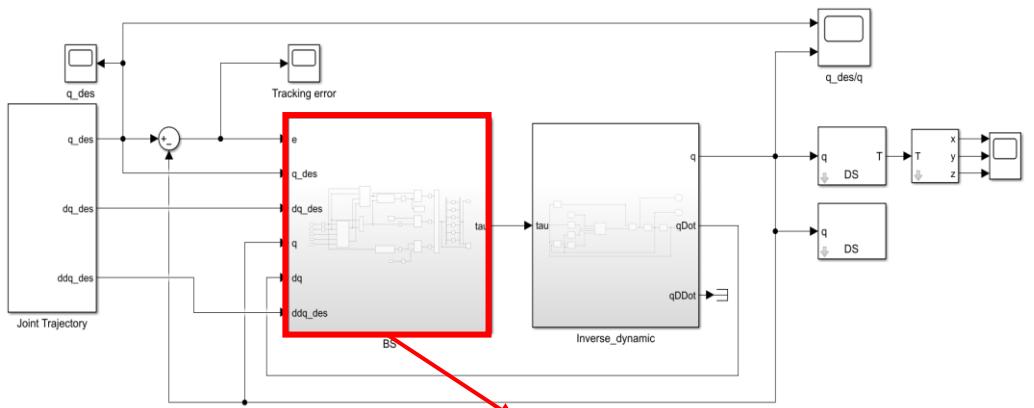
## • Errore ai giunti:



## • Errore all'E-E:



# Backstepping Adattivo



$$\begin{cases} s = \dot{q}_r - \dot{q} \\ e = \xi_{des} - \xi \end{cases}$$

**Legge di controllo:**

$$\tau = \hat{M}(q)\ddot{q}_r + \hat{C}(q, \dot{q})\dot{q}_r + \hat{G}(q) + K_d s + J^T e$$

$$\begin{cases} \dot{q}_r = J^{-1}(\dot{\xi}_{des} + \Lambda e) \\ \ddot{q}_r = J^{-1}(\ddot{\xi}_{des} + \Lambda \dot{e}) + J^{-1}(\dot{\xi}_{des} + \Lambda e) \end{cases}$$

in termini di regressore dinamico:

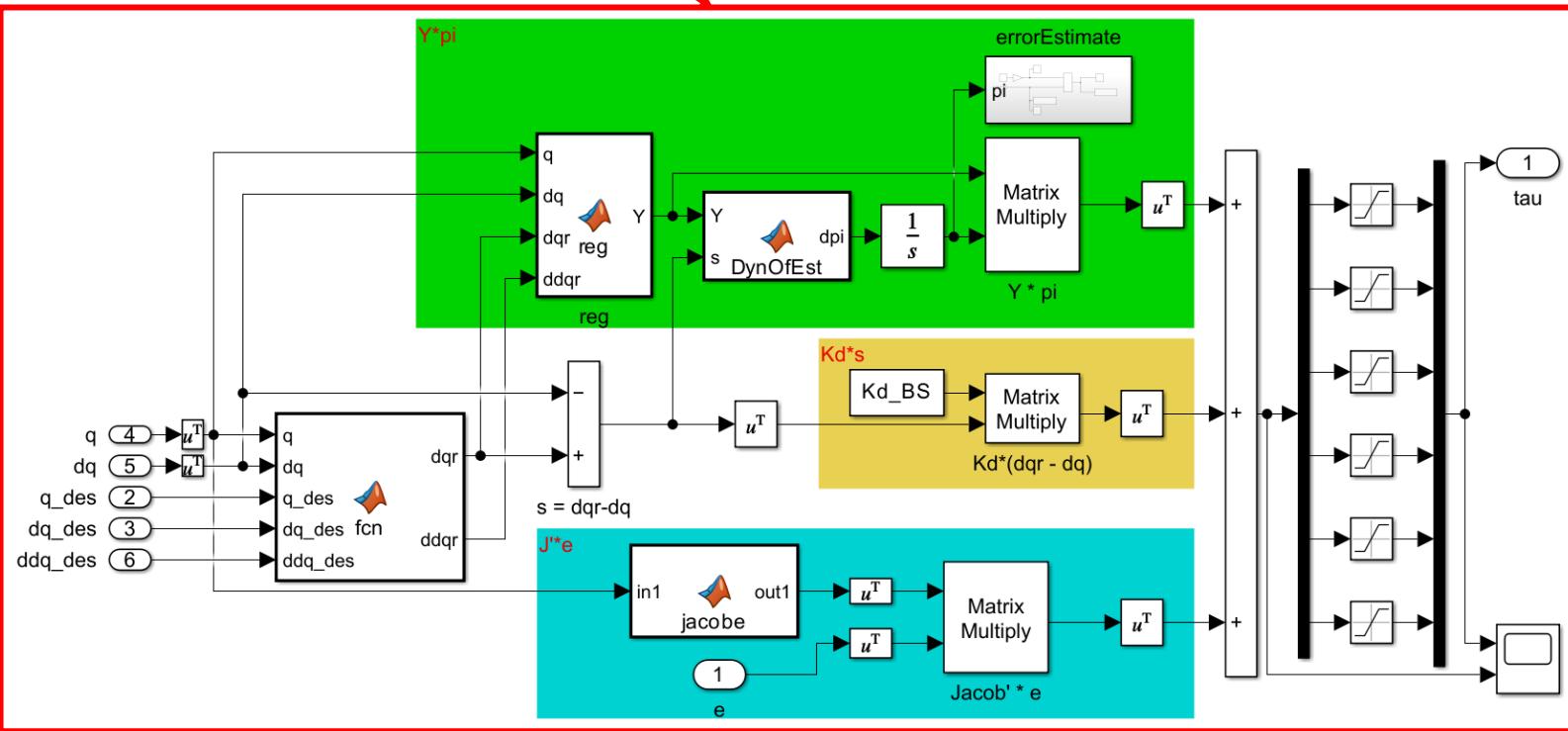
$$\tau = \hat{Y}(q, \dot{q}, \dot{q}_r, \ddot{q}_r)\hat{\pi} + K_p s + J^T e$$

Legge di aggiornamento delle stime dei parametri:

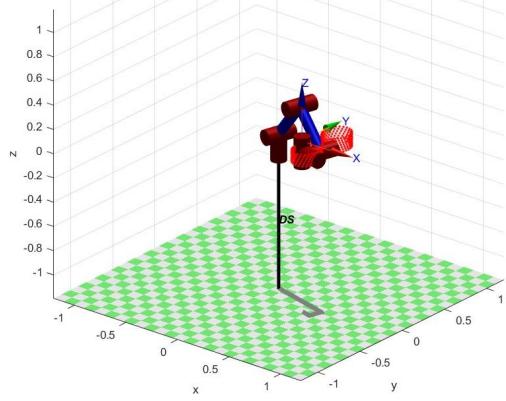
$$\dot{\hat{\pi}} = R^{-1} Y^T(q, \dot{q}, \dot{q}_r, \ddot{q}_r)s$$

I parametri stimati sono le masse dei link:

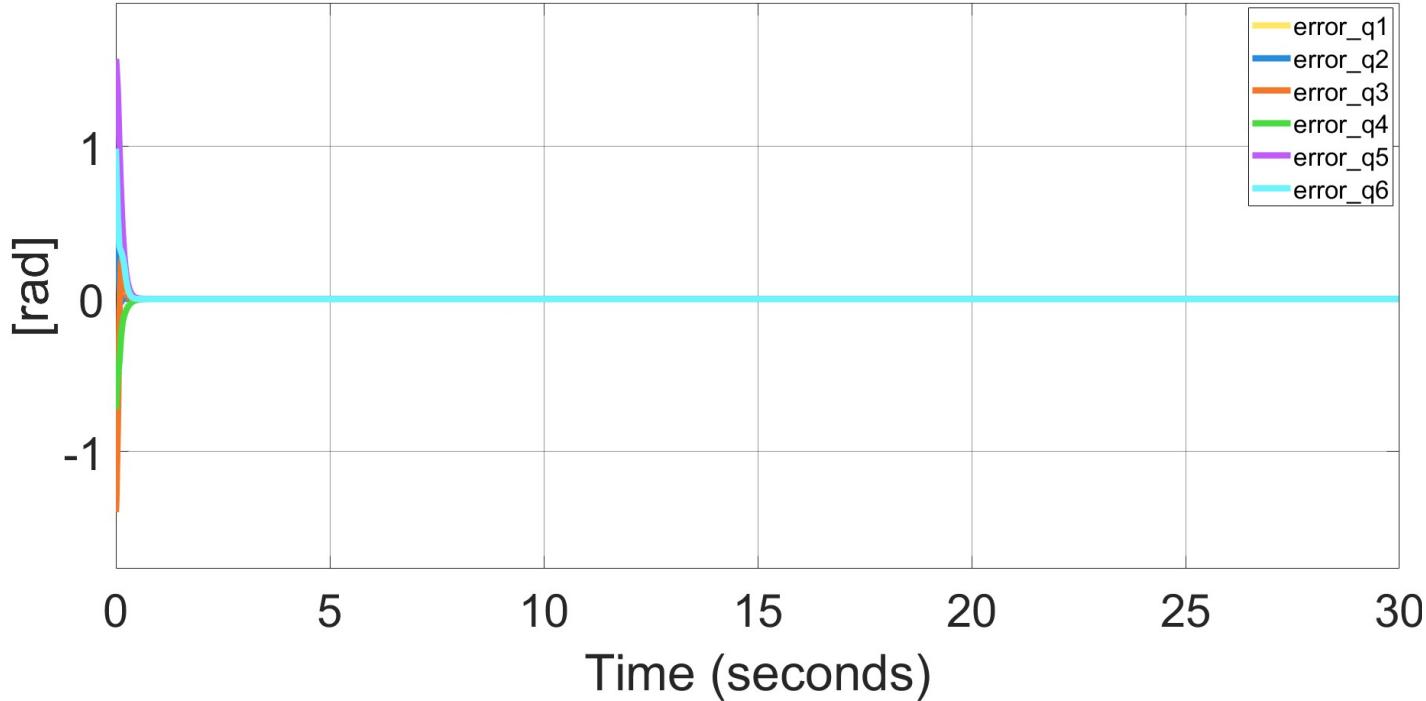
$$\pi = m = \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \\ m_4 \\ m_5 \\ m_6 \end{bmatrix}$$



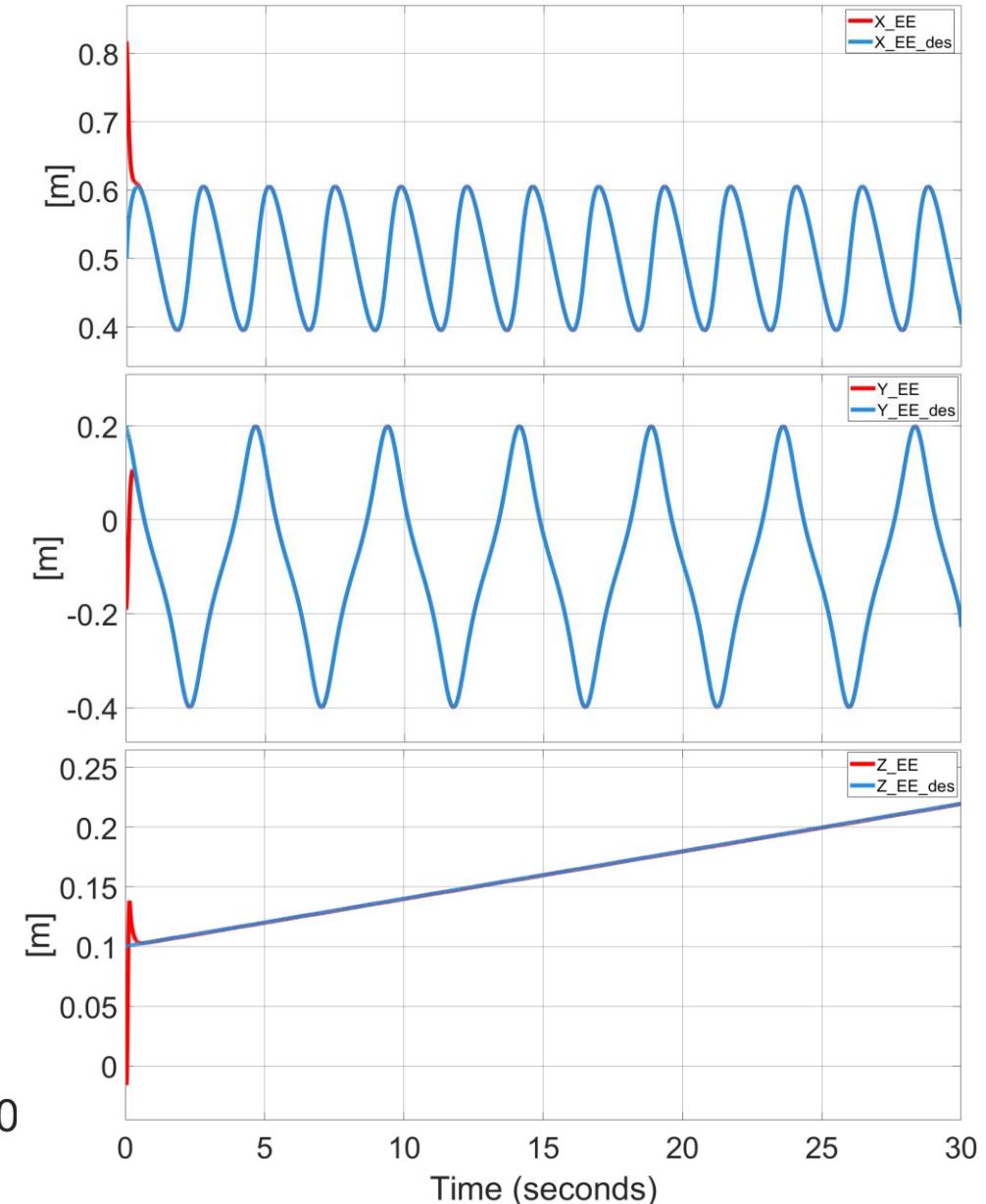
## Inseguimento di traiettoria lemniscata:



### • Errore ai giunti:



### • Errore all'E-E:

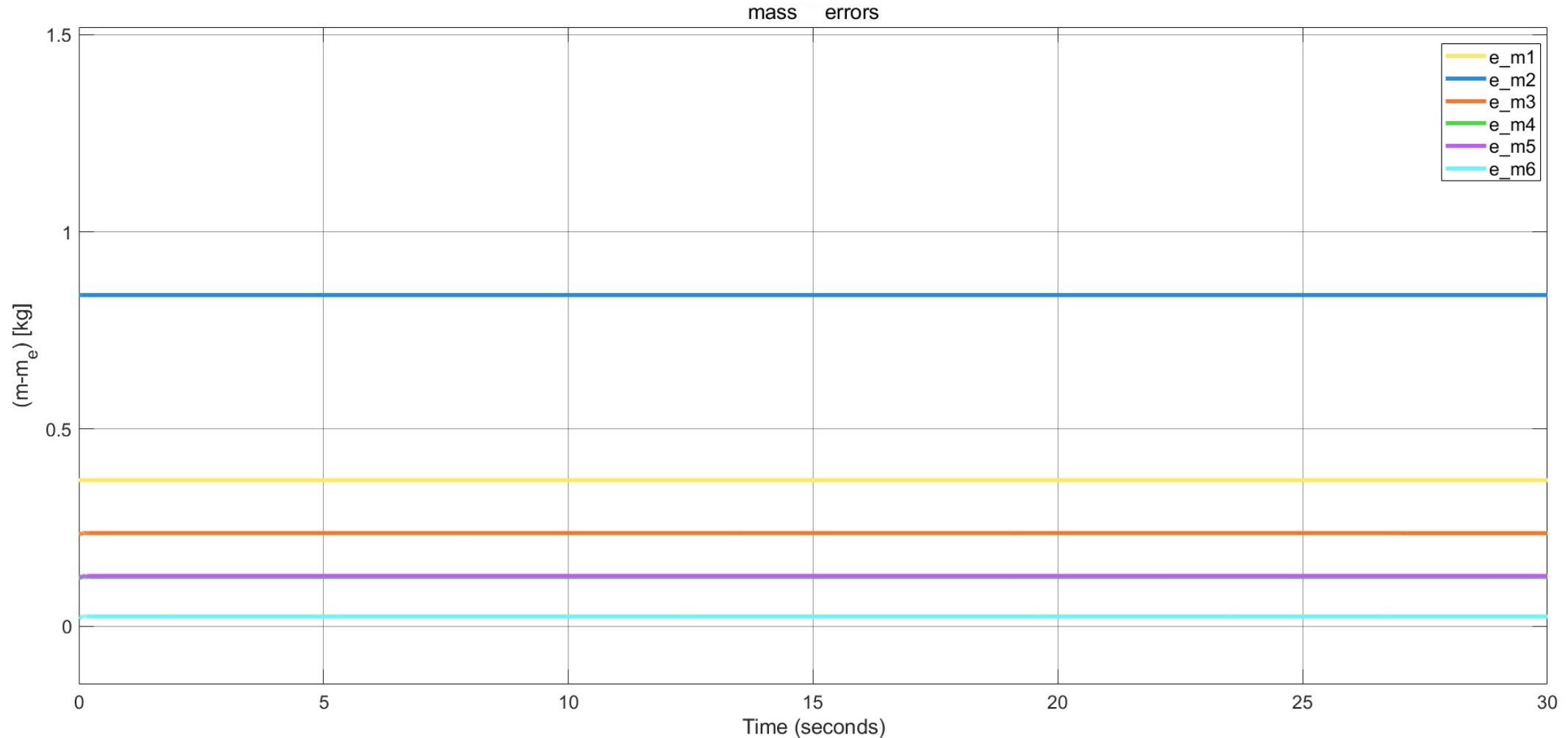


## Inseguimento di traiettoria cerchi olimpici:

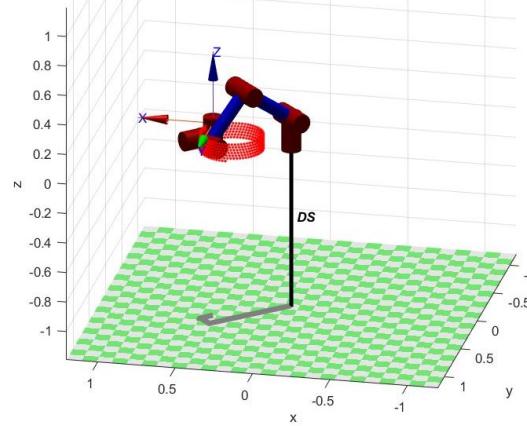
- Errore di stima dei parametri: massa link

Condizioni iniziale:  $m(0) = 0.9 * m$ ,

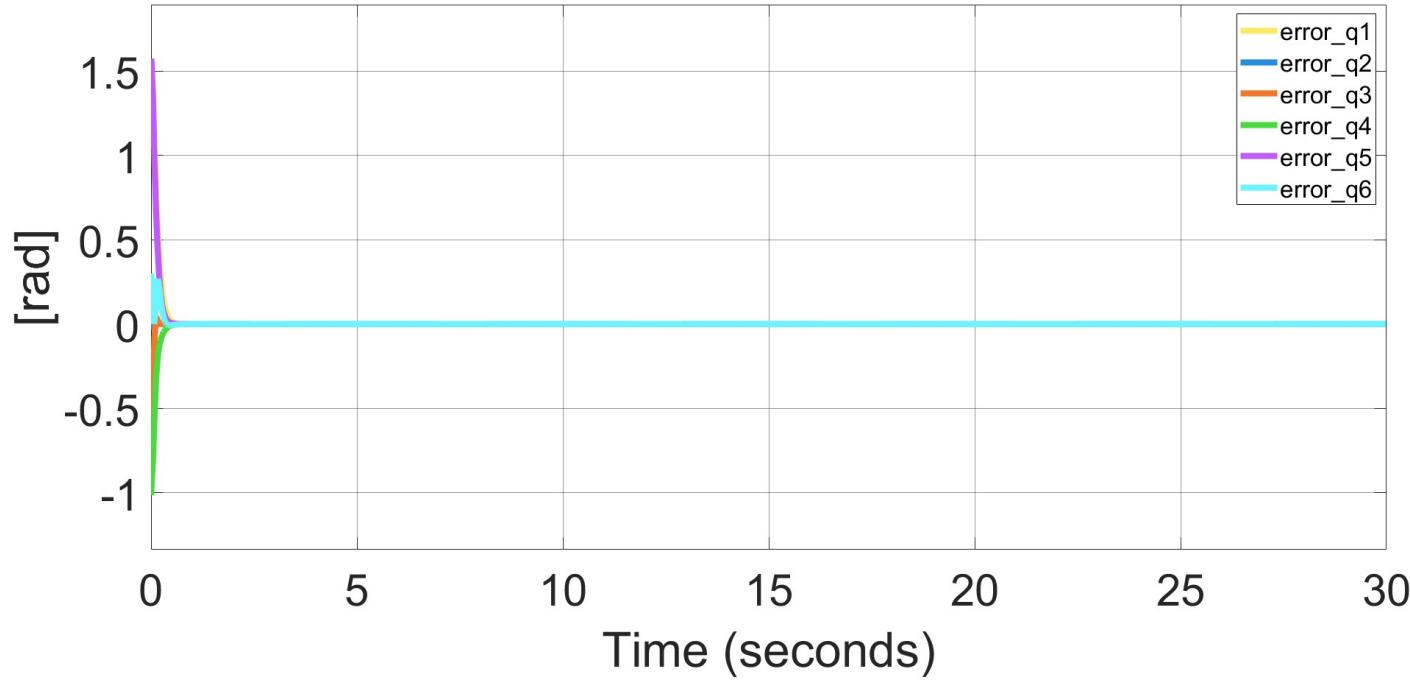
$m$ : vettore delle masse dei link



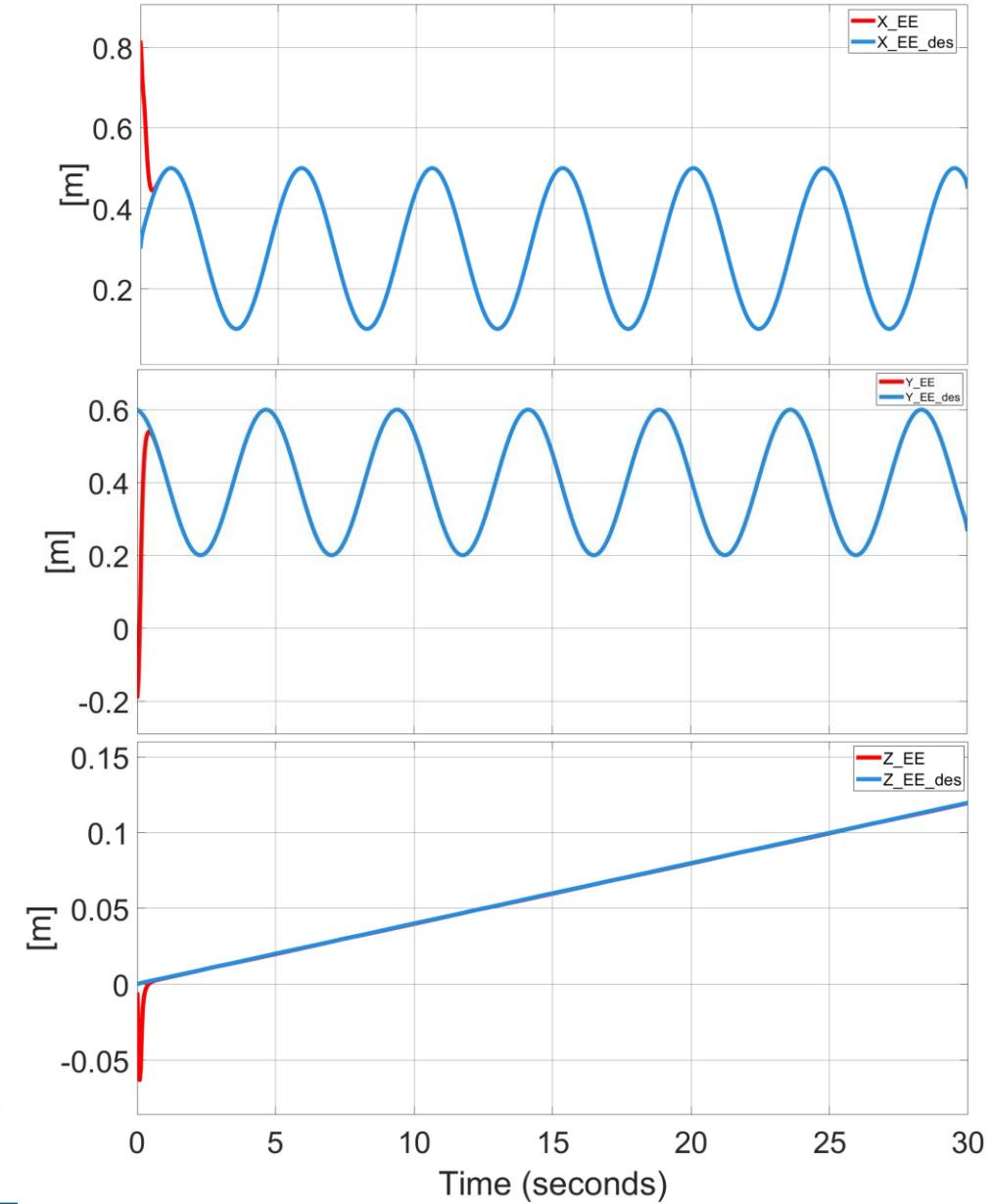
## Inseguimento di traiettoria spirale:



### • Errore ai giunti:



### • Errore all'E-E:

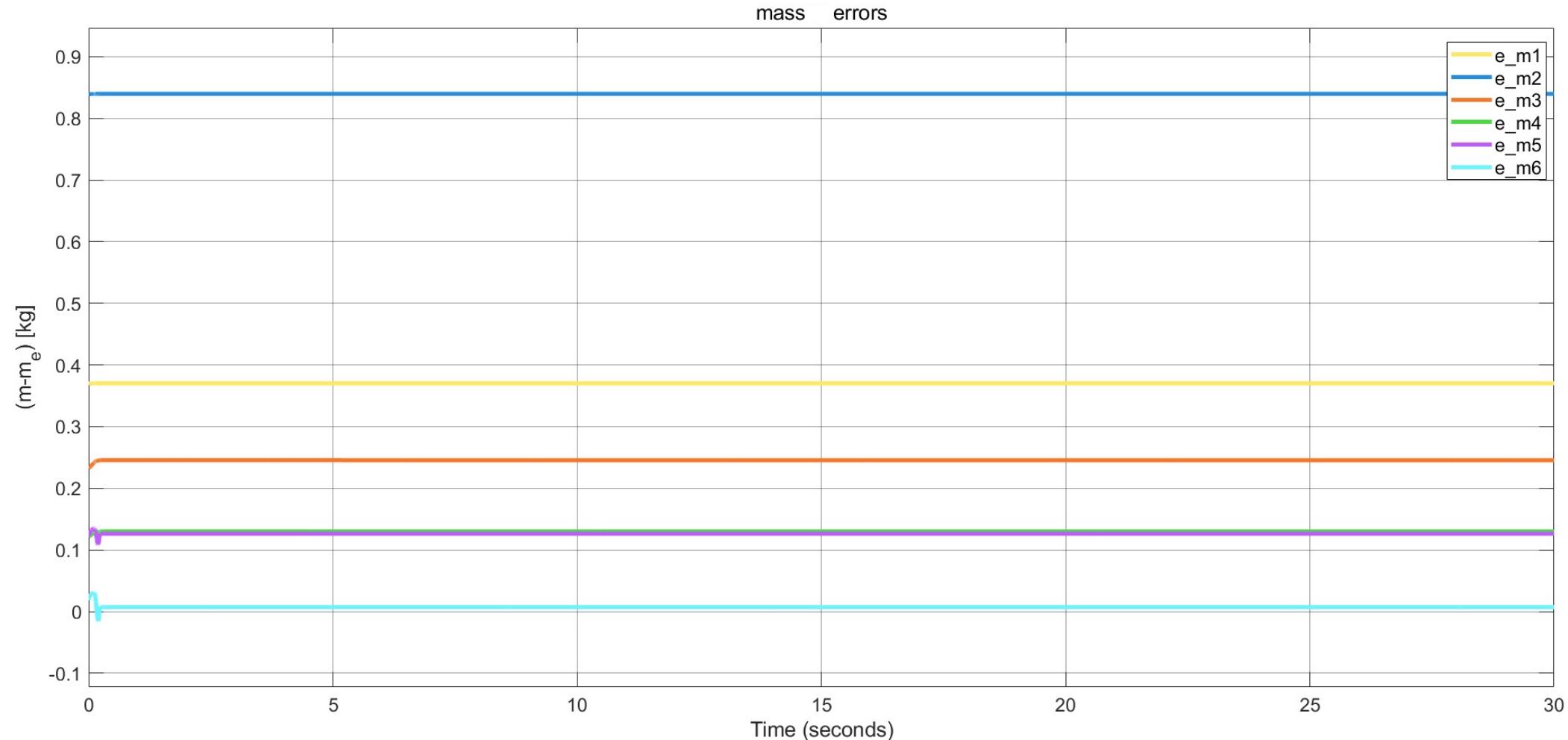


## Inseguimento di traiettoria cerchi olimpici:

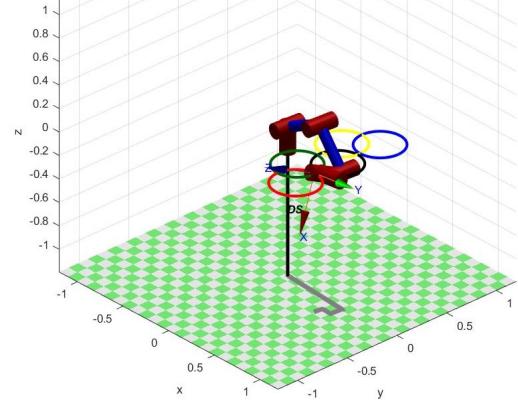
- Errore di stima dei parametri: massa link

Condizioni iniziale:  $m(0) = 0.9 * m$ ,

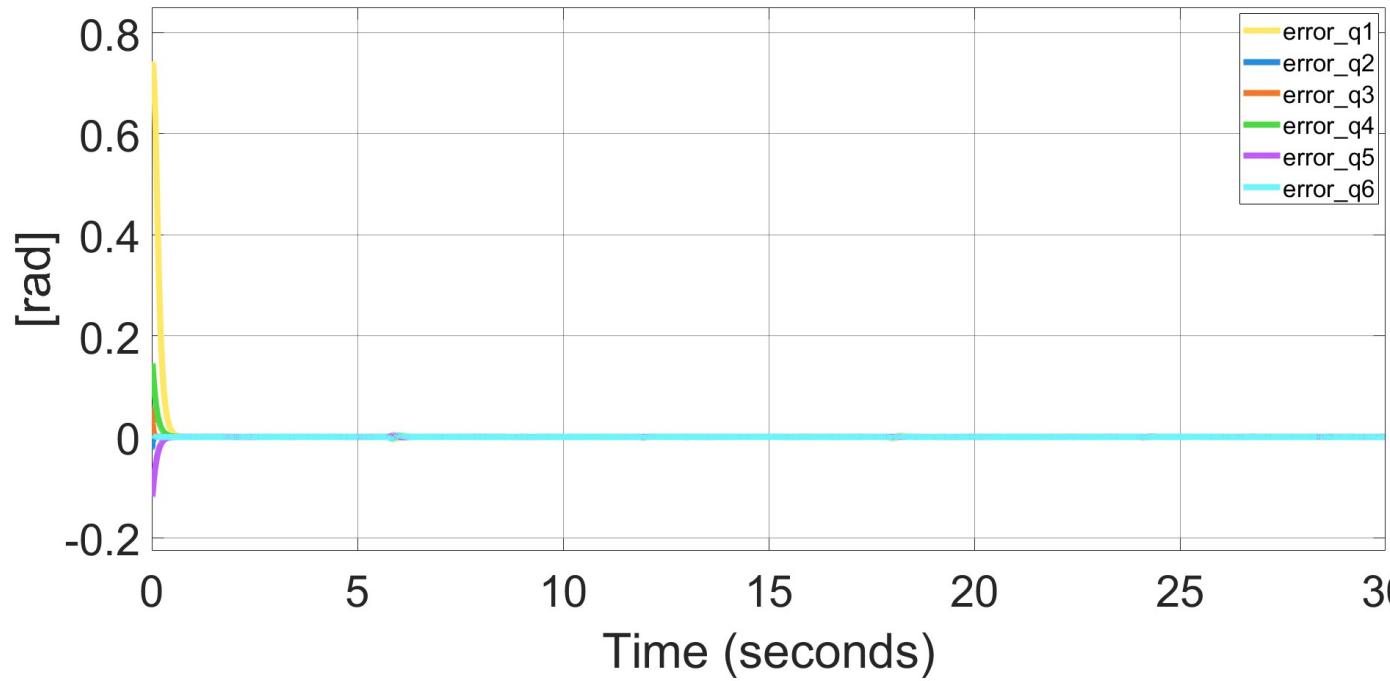
$m$ : vettore delle masse dei link



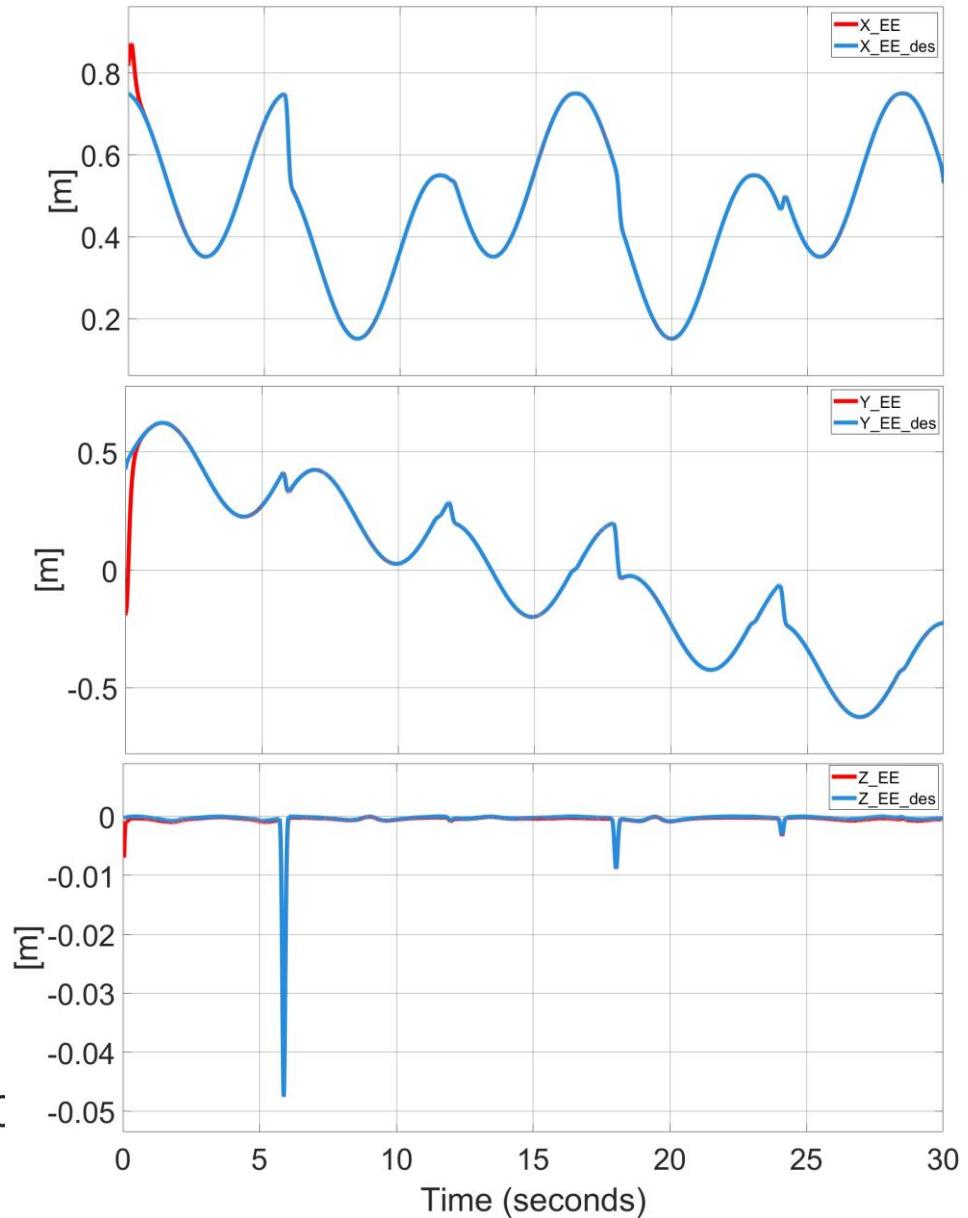
## Inseguimento di traiettoria cerchi olimpici:



- Errore ai giunti:



- Errore all'E-E:

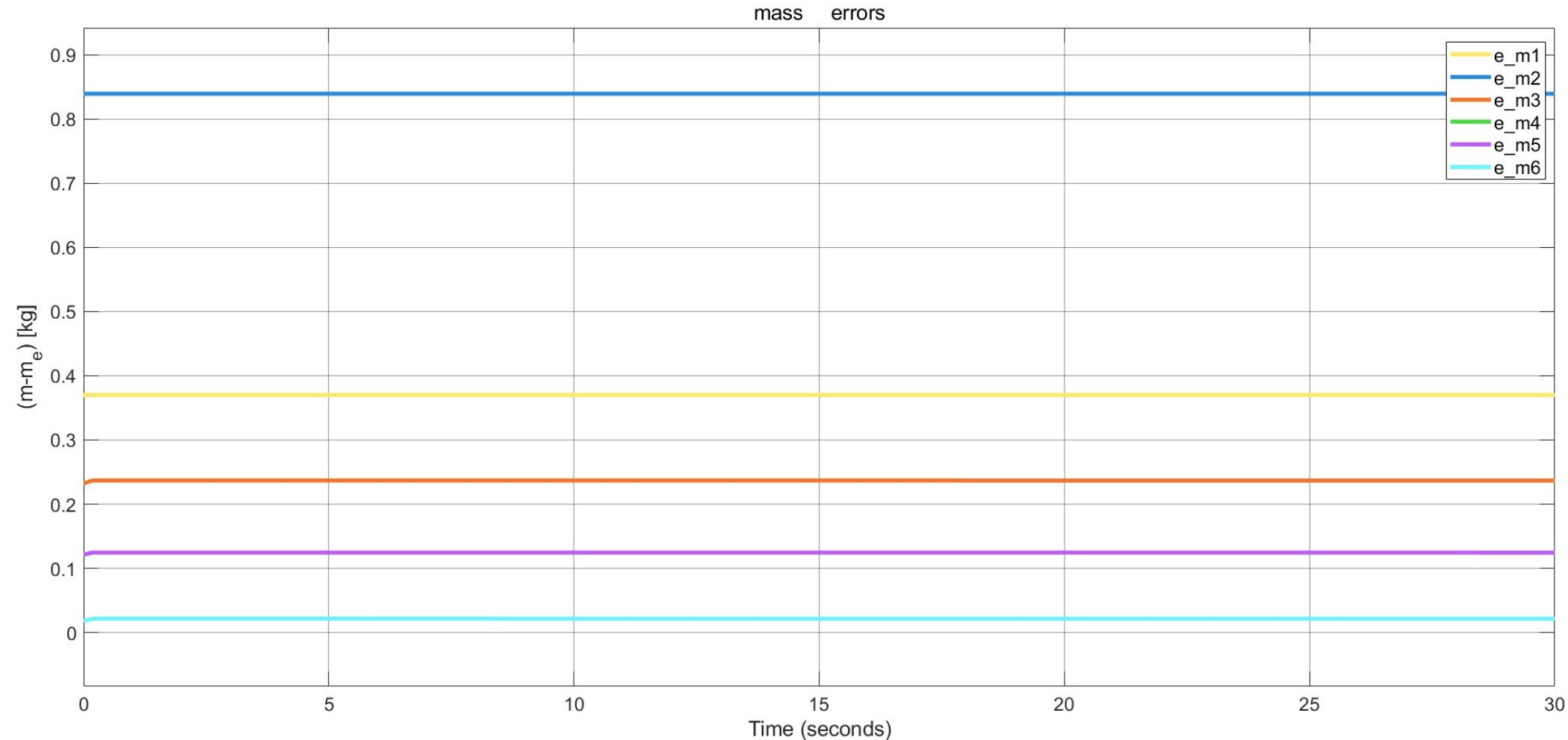


## Inseguimento di traiettoria cerchi olimpici:

- Errore di stima dei parametri: massa link

Condizioni iniziale:  $m(0) = 0.9 * m$ ,

$m$ : vettore delle masse dei link



# Li-Slotine Adattivo



**Legge di controllo:**

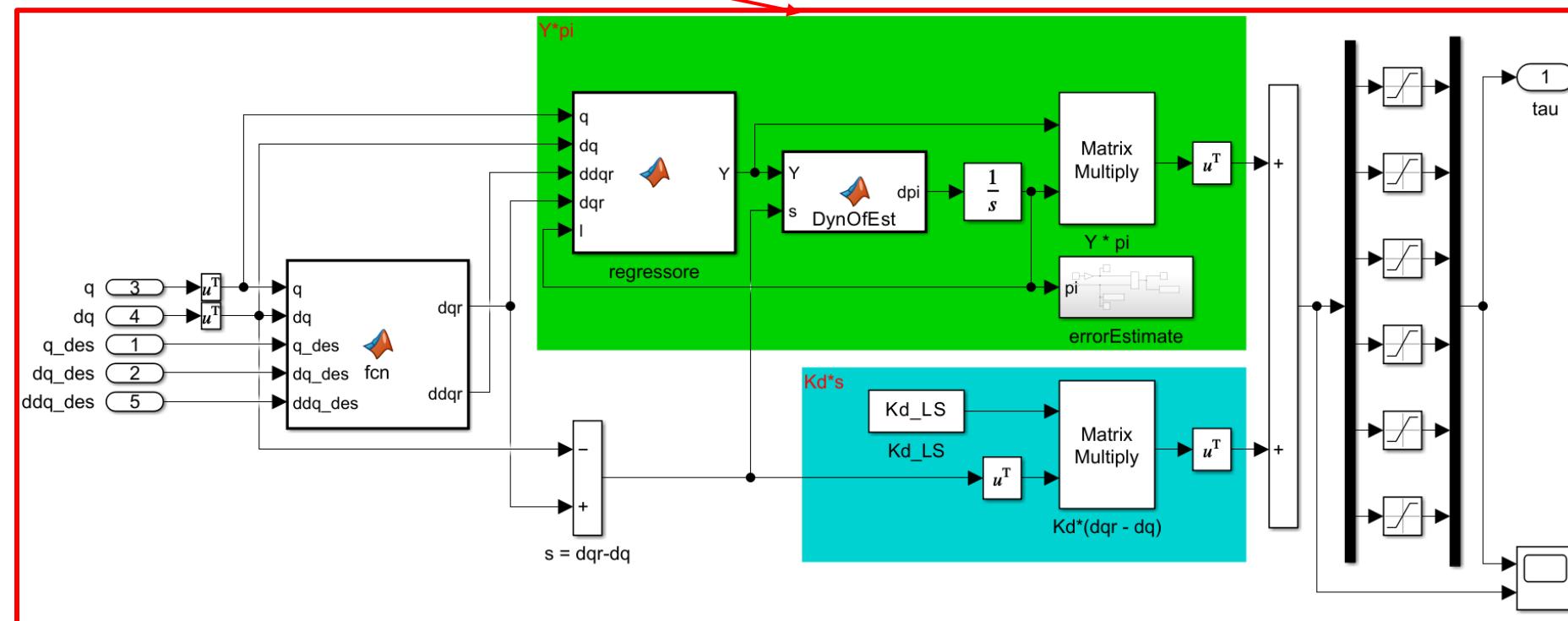
$$\tau = \hat{M}(q)\ddot{q}_r + \hat{C}(q, \dot{q})\dot{q}_r + \hat{G}(q) + K_p s$$

$$\begin{cases} s = \dot{q}_r - \dot{q} \\ e = q_d - q \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{q}_r = \dot{q}_{des} + \Lambda(q_{des} - q) \\ \ddot{q}_r = \ddot{q}_{des} + \Lambda(\dot{q}_{des} - \dot{q}) \end{cases}$$

in termini di regressore dinamico:

$$\tau = \hat{Y}(q, \dot{q}, \dot{q}_r, \ddot{q}_r)\hat{\pi} + K_p s$$



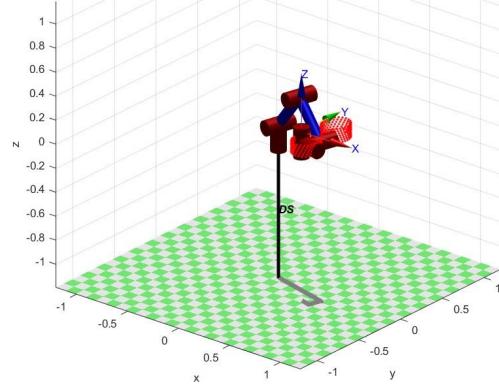
Legge di aggiornamento delle stime dei parametri:

$$\dot{\hat{\pi}} = R^{-1}Y^T(q, \dot{q}, \dot{q}_r, \ddot{q}_r)s$$

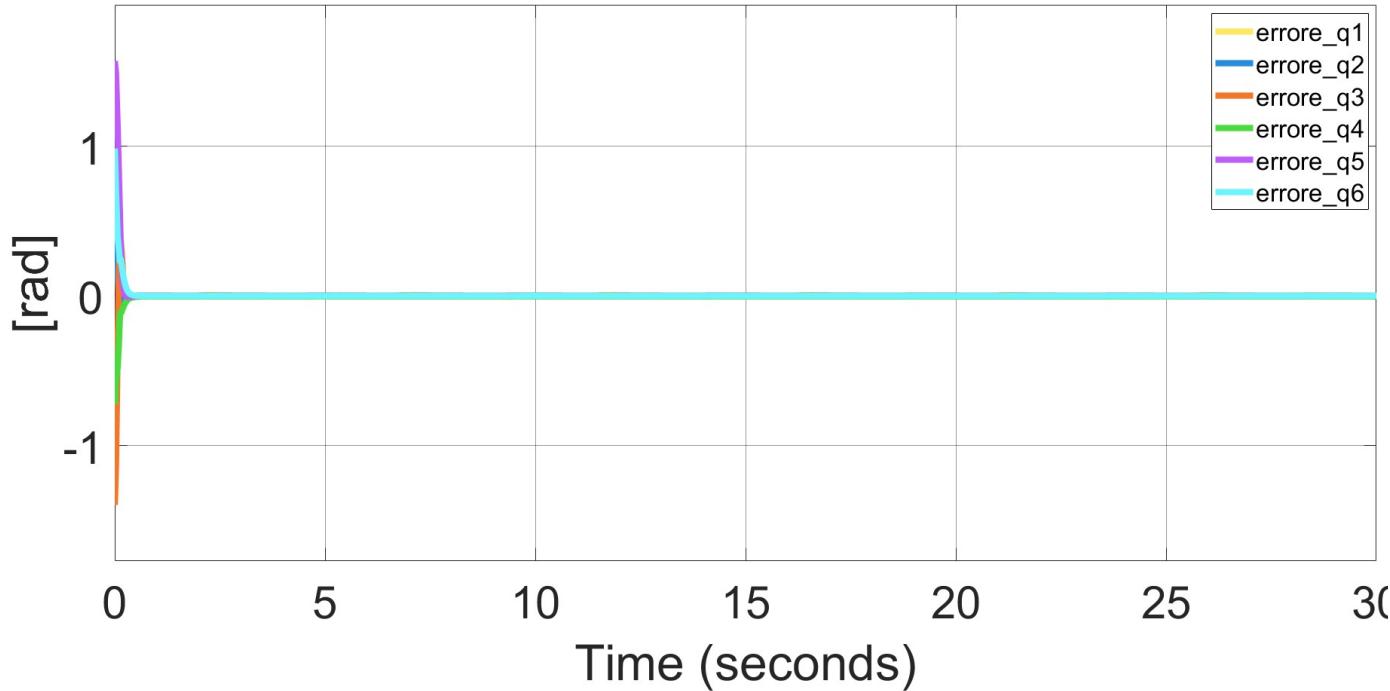
I parametri stimati sono le inerzie dei link:

$$\pi = I = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \\ I_6 \end{bmatrix}$$

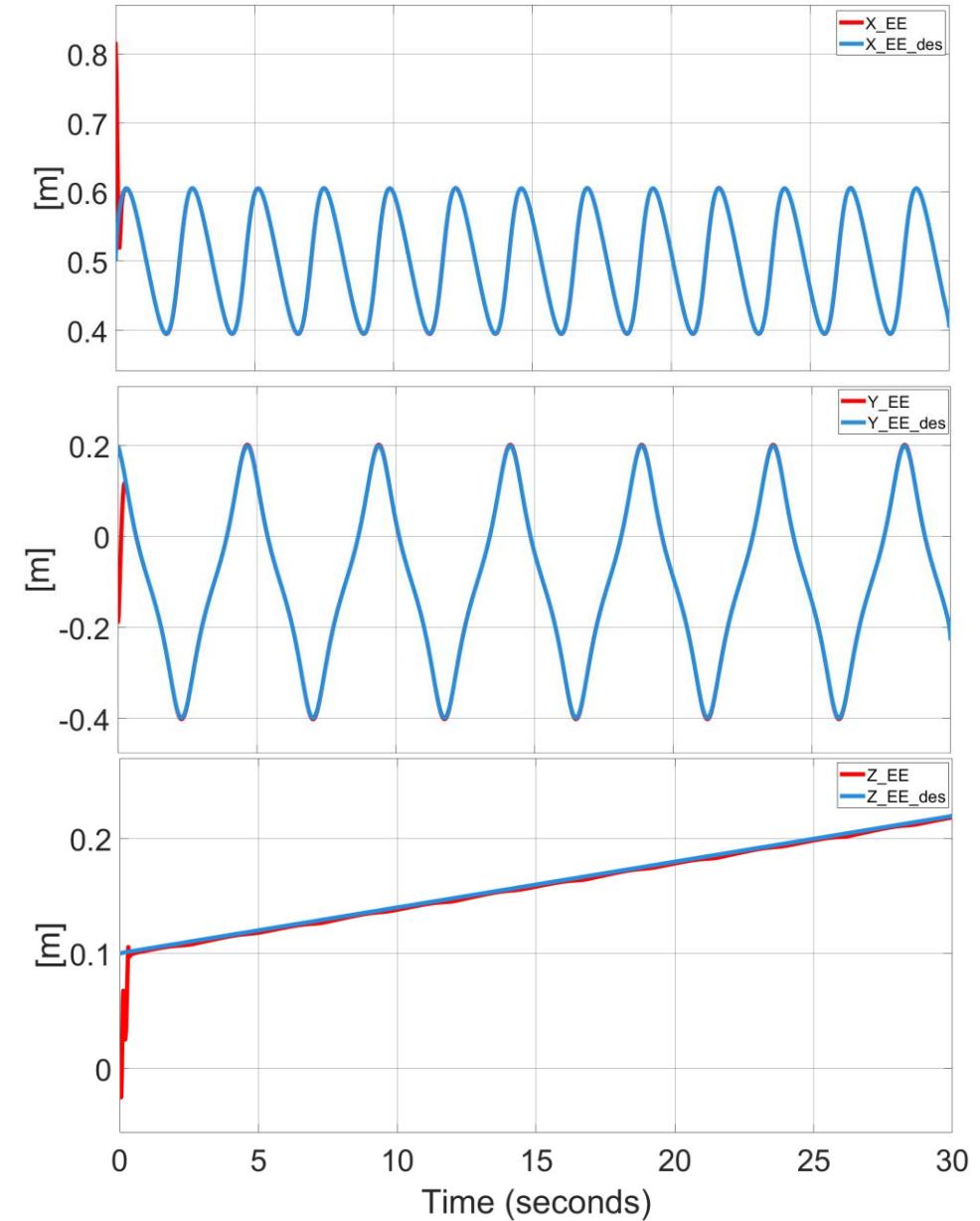
## Inseguimento di traiettoria lemniscata:



### • Errore ai giunti:



### • Errore all'E-E:



## Inseguimento di traiettoria lemniscata:

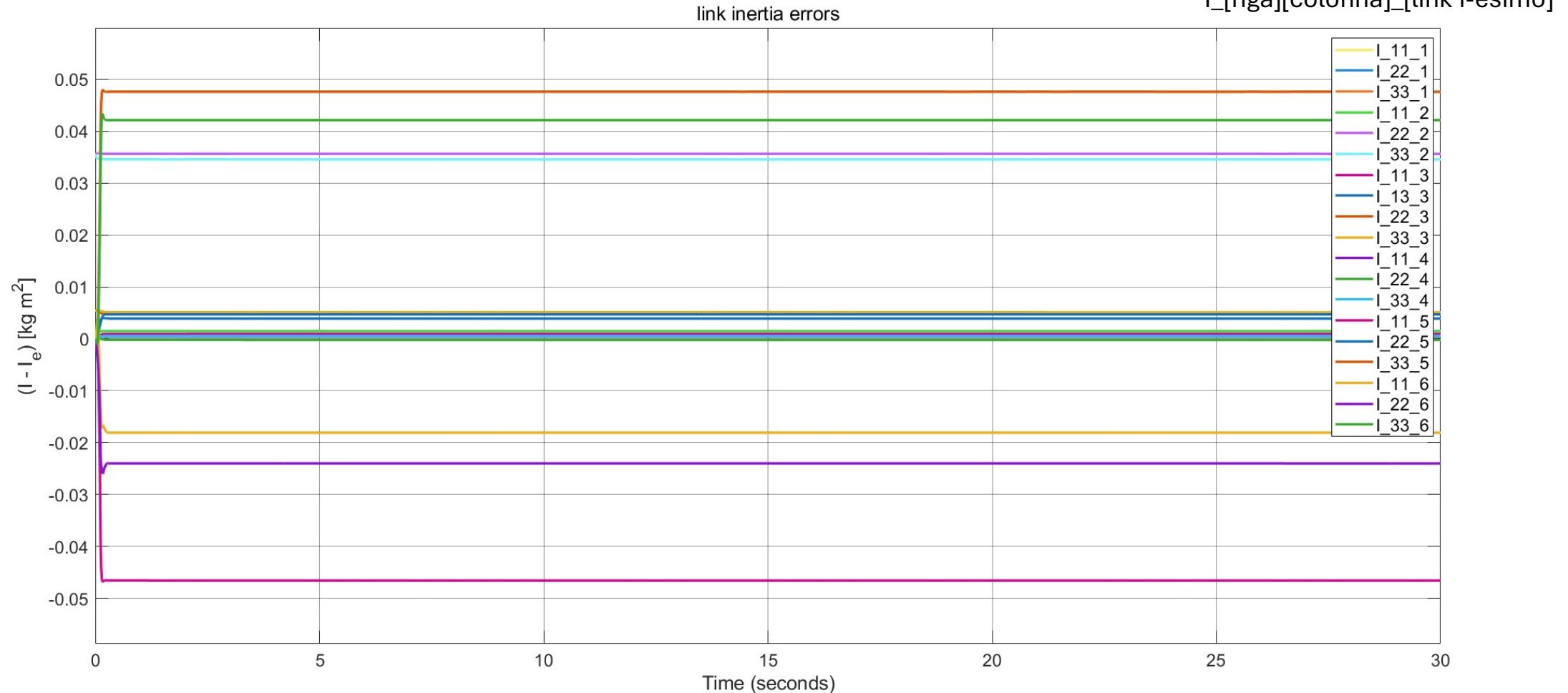
- Errore di stima dei parametri: componenti momento di inerzia dei link

Condizioni iniziale:  $I(0) = 0.9 * I$ ,

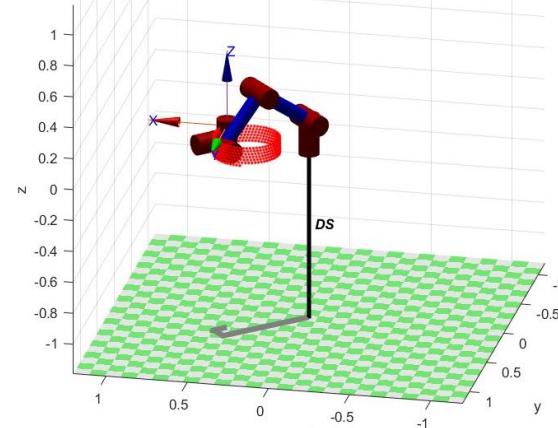
$I$ : vettore della matrice di inerzia dei link

Legenda:

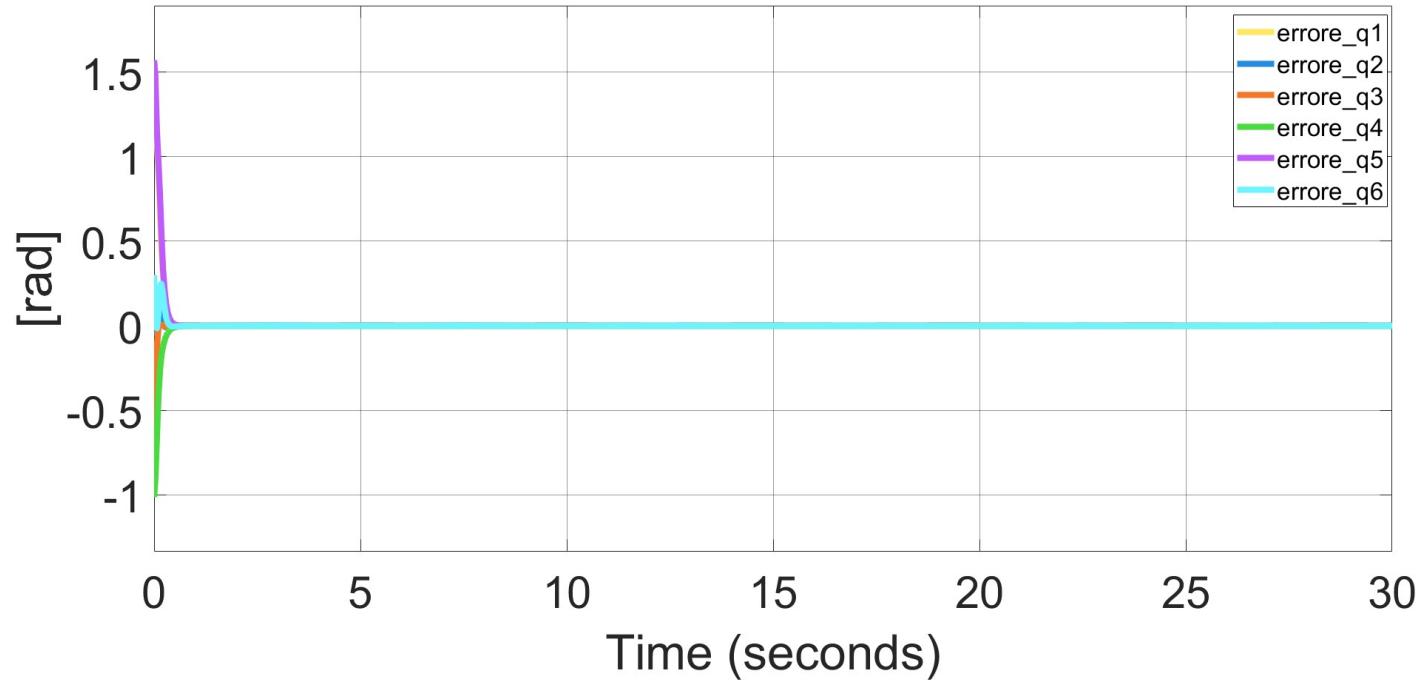
$I_{[riga][colonna]}_{[link i-esimo]}$



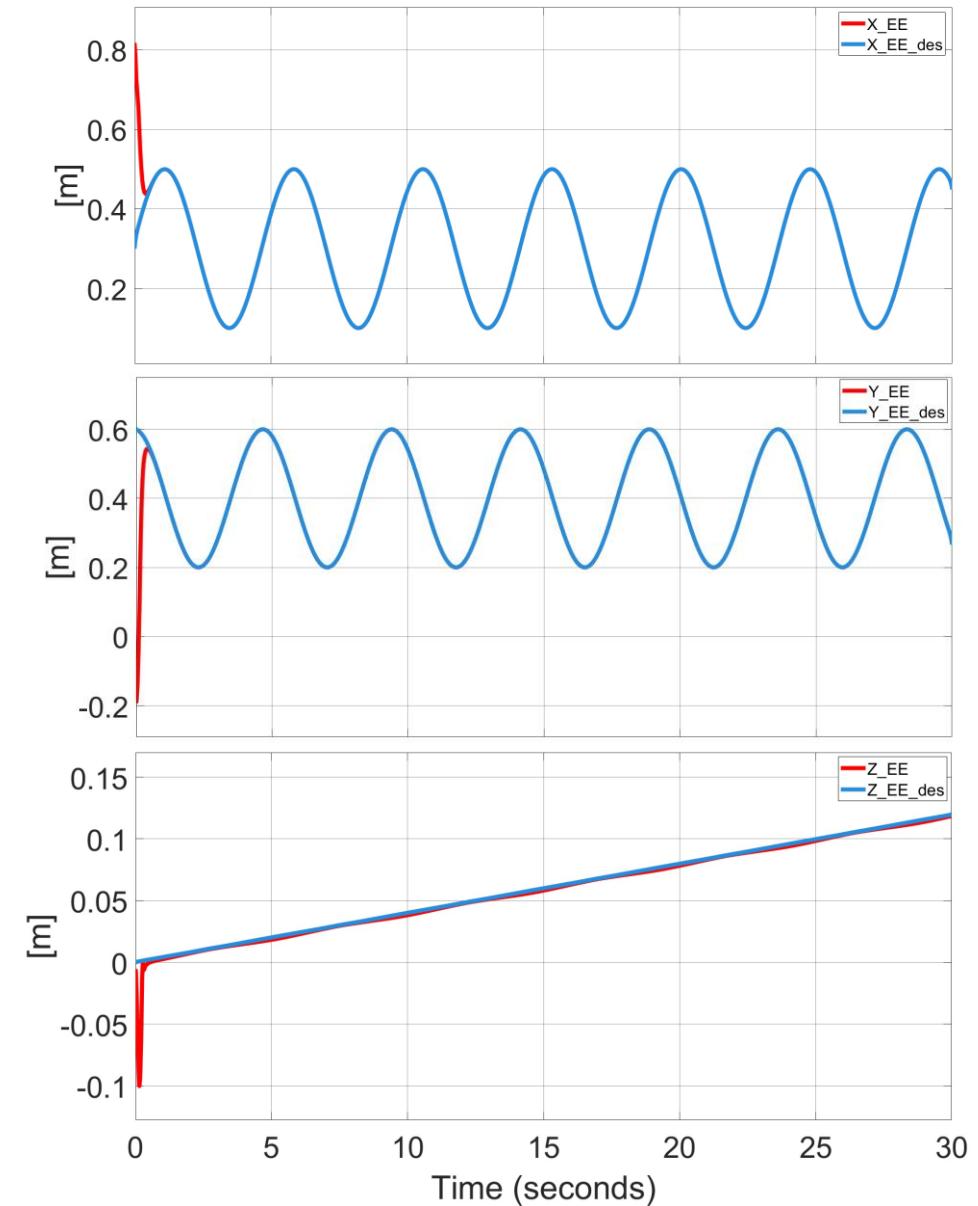
## Inseguimento di traiettoria spirale:



### • Errore ai giunti:



### • Errore all'E-E:



## Inseguimento di traiettoria spirale:

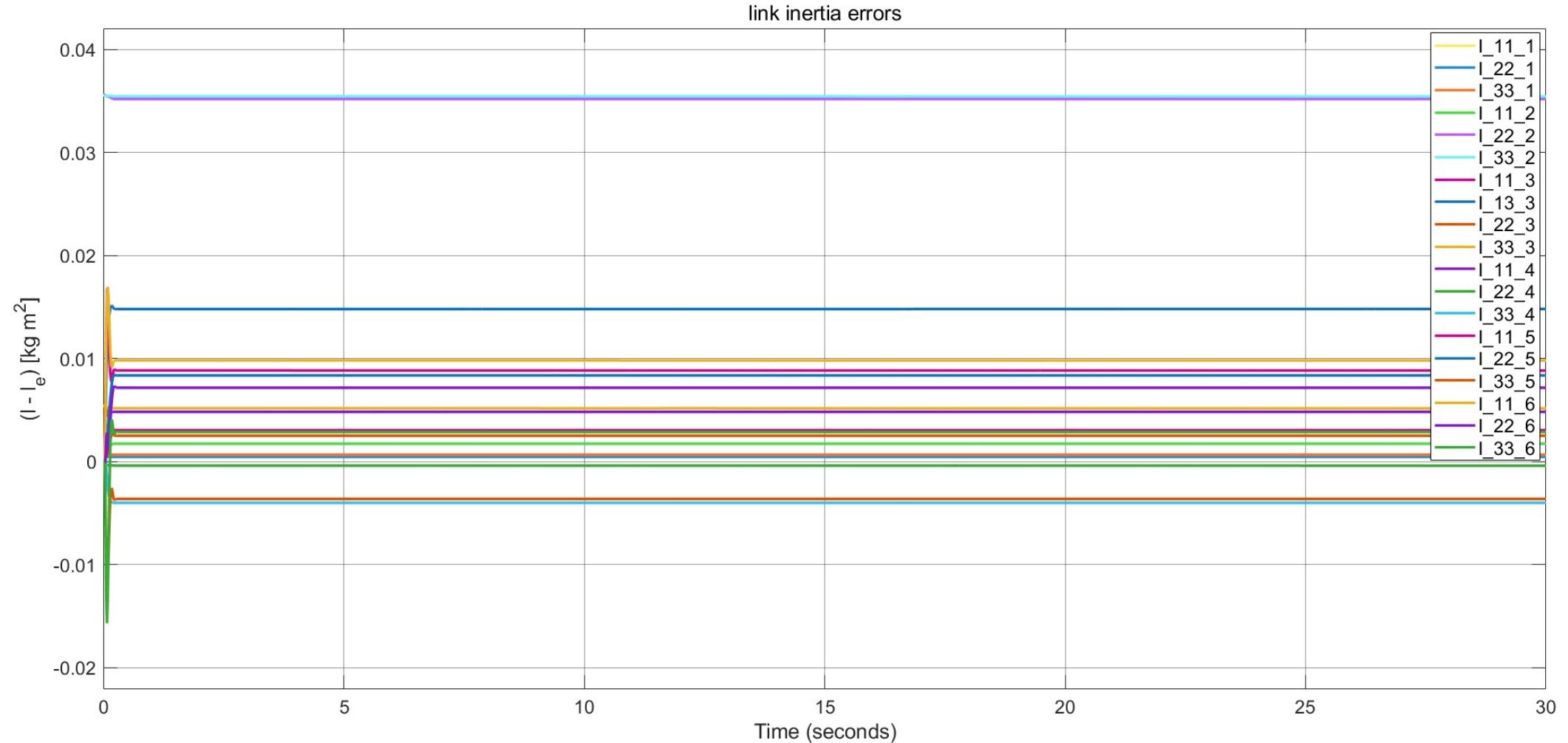
- Errore di stima dei parametri: componenti momento di inerzia dei link

Condizioni iniziale:  $I(0) = 0.9 * I$ ,

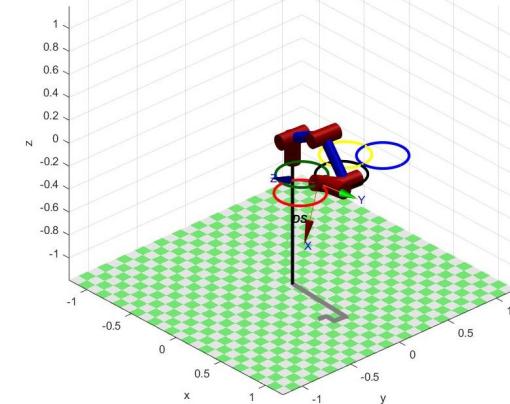
$I$ : vettore della matrice di inerzia dei link

Legenda:

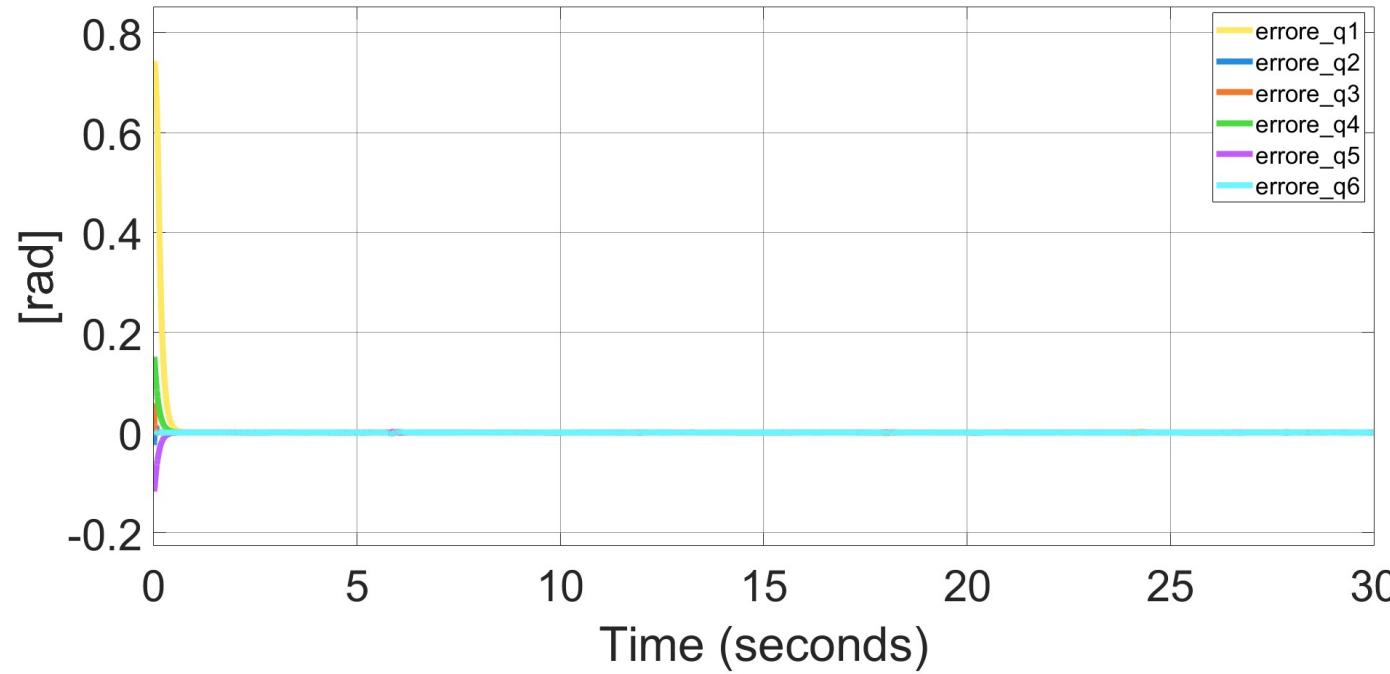
$I_{[riga][colonna]}_{[link i-esimo]}$



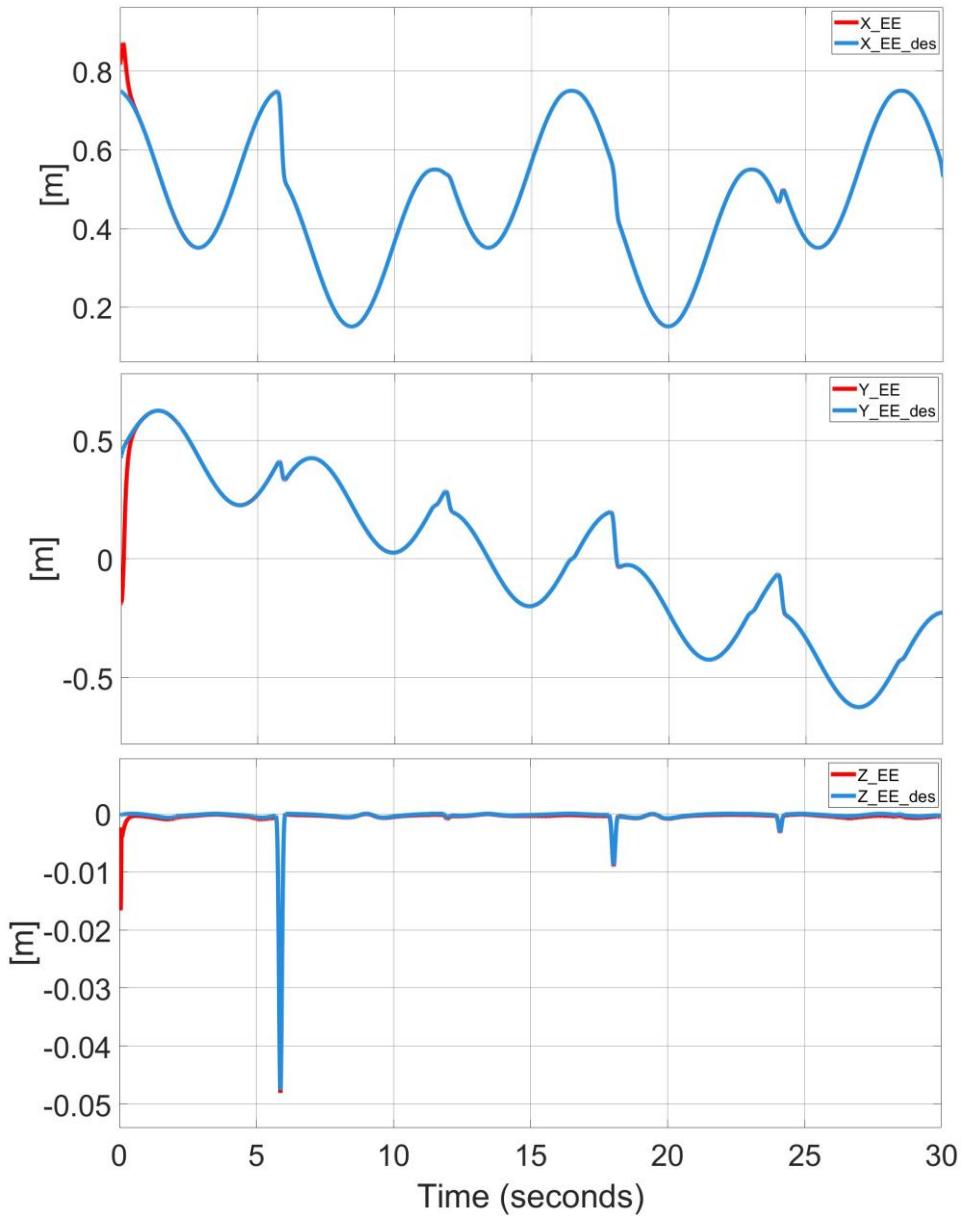
## Inseguimento di traiettoria cerchi olimpici:



### • Errore ai giunti:



### • Errore all'E-E:



## Inseguimento di traiettoria cerchi olimpici:

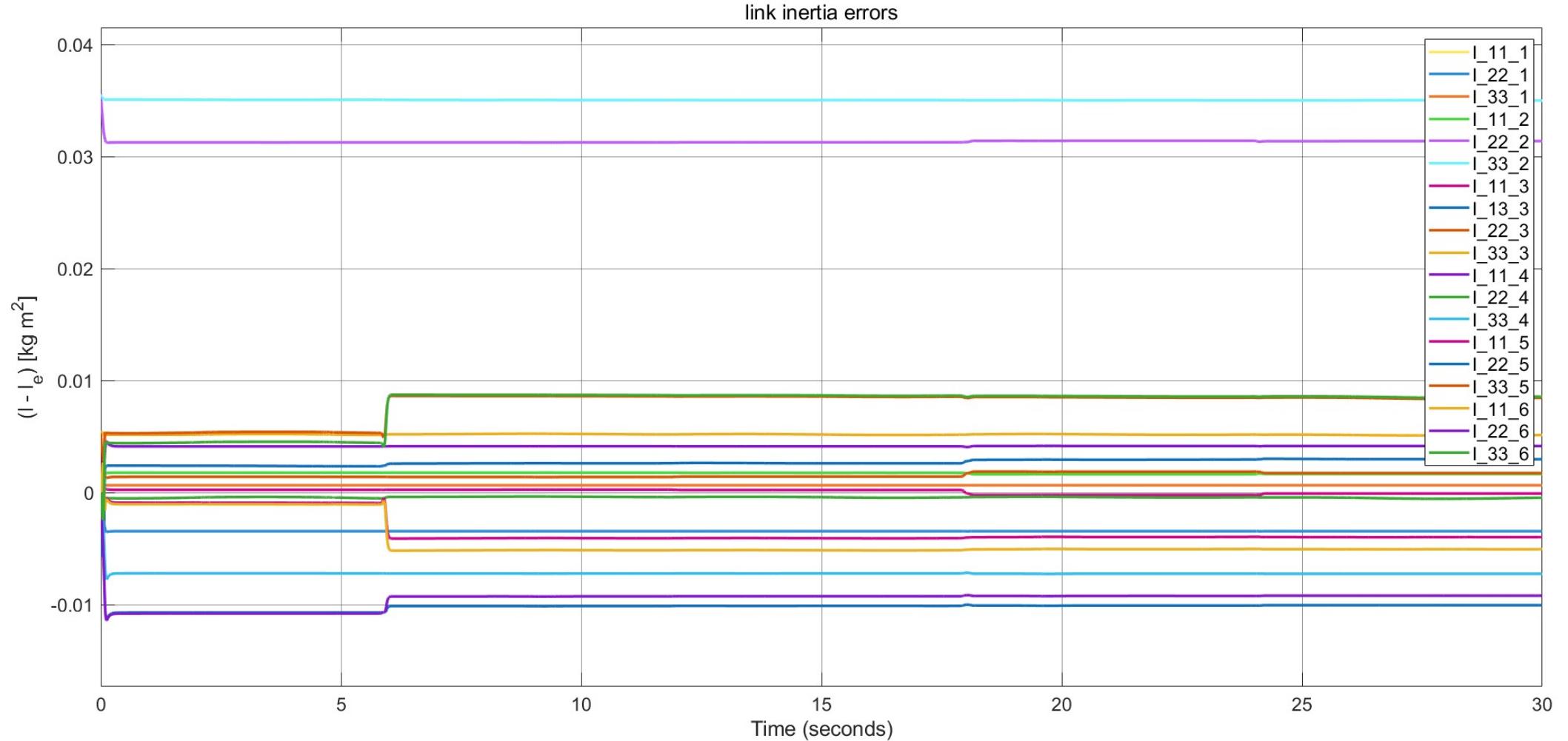
- Errore di stima dei parametri: componenti momento di inerzia dei link

Condizioni iniziale:  $I(0) = 0.9 * I$ ,

$I$ : vettore della matrice di inerzia dei link

Legenda:

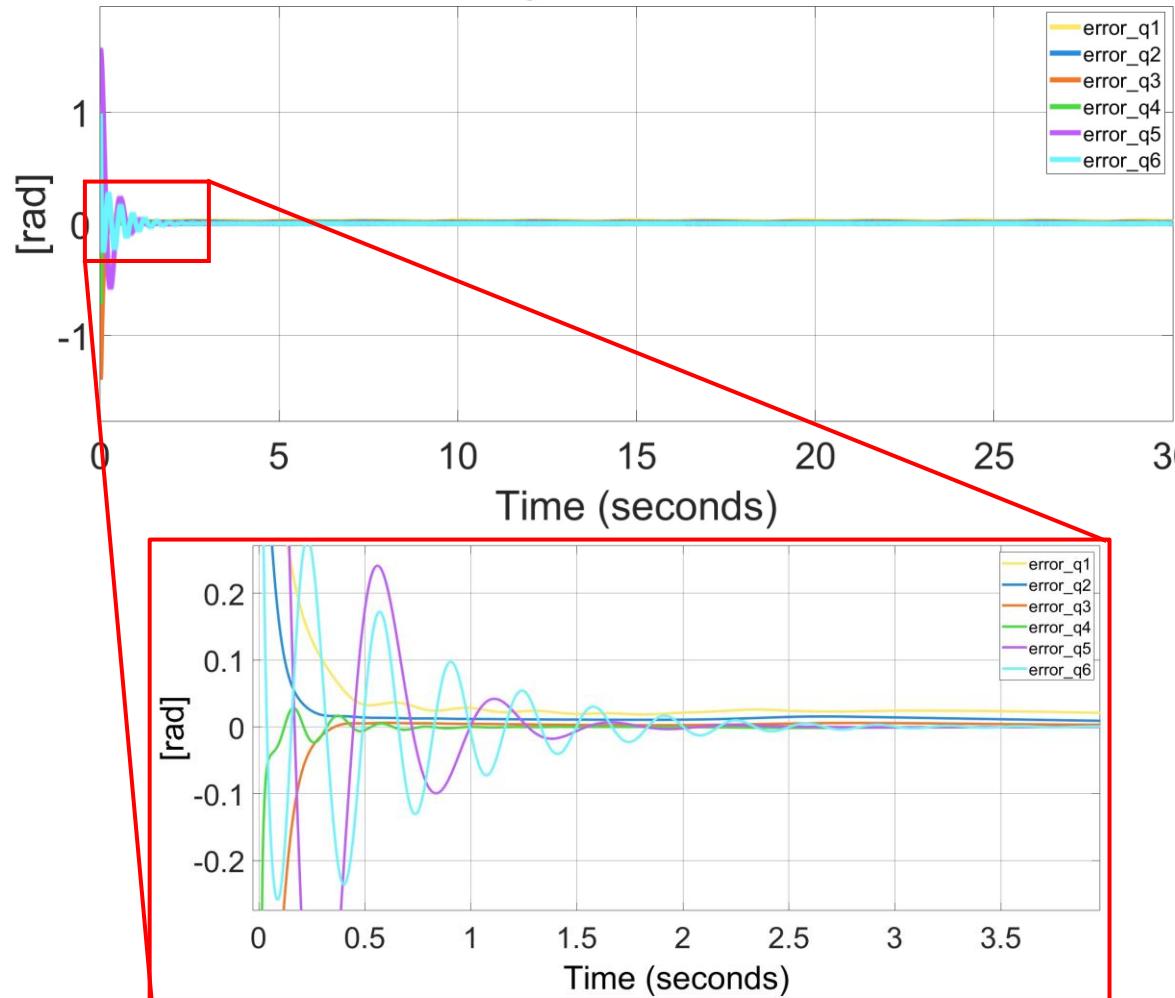
$I_{[riga][colonna]}_{[link i-esimo]}$



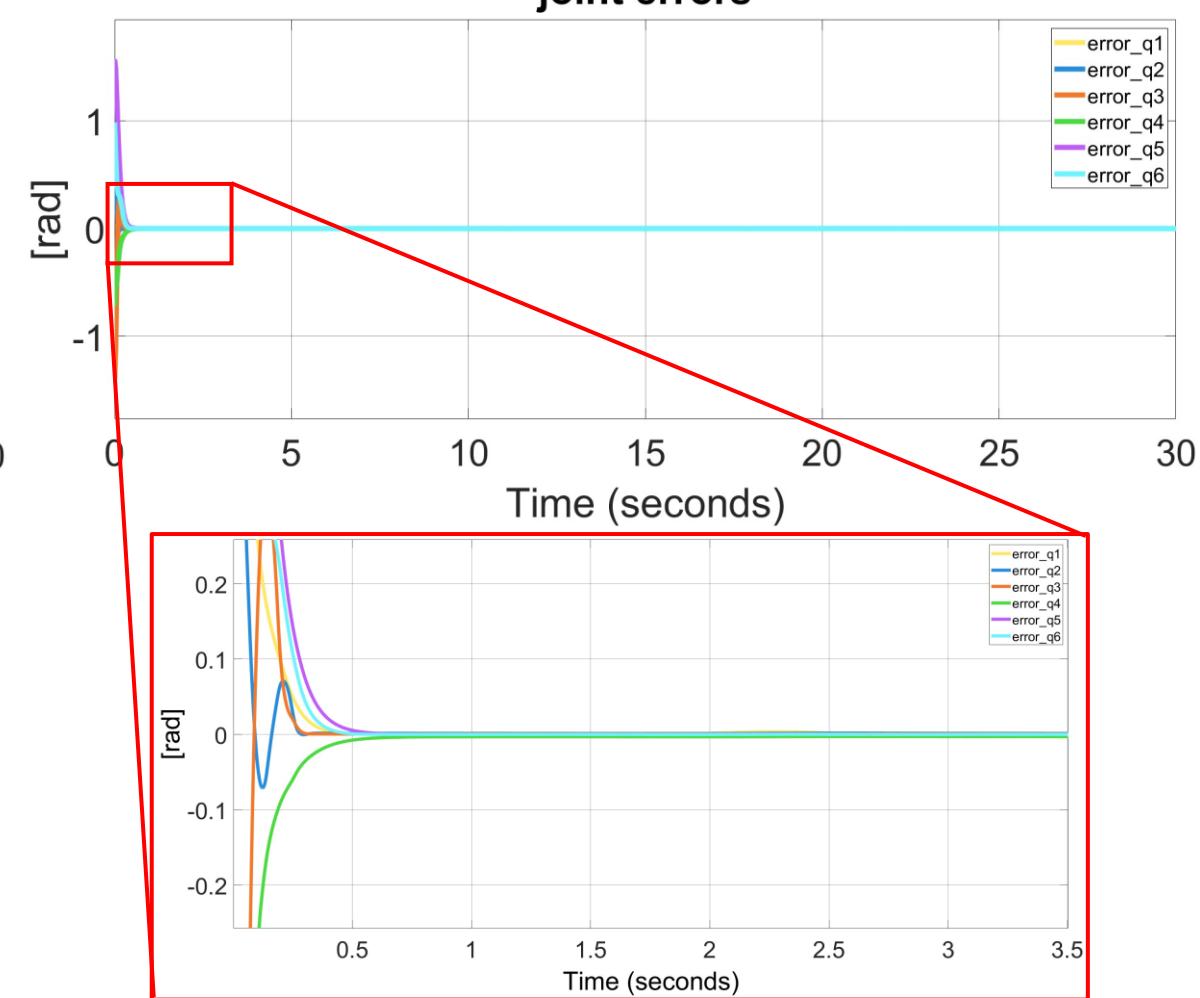
# Backstepping e Backstepping adattivo

Si mette in evidenza la presenza di un errore del 10% sulla misura delle masse dei link per i controllori in gioco:

Traiettoria Lemniscata: Backstepping  
joint errors



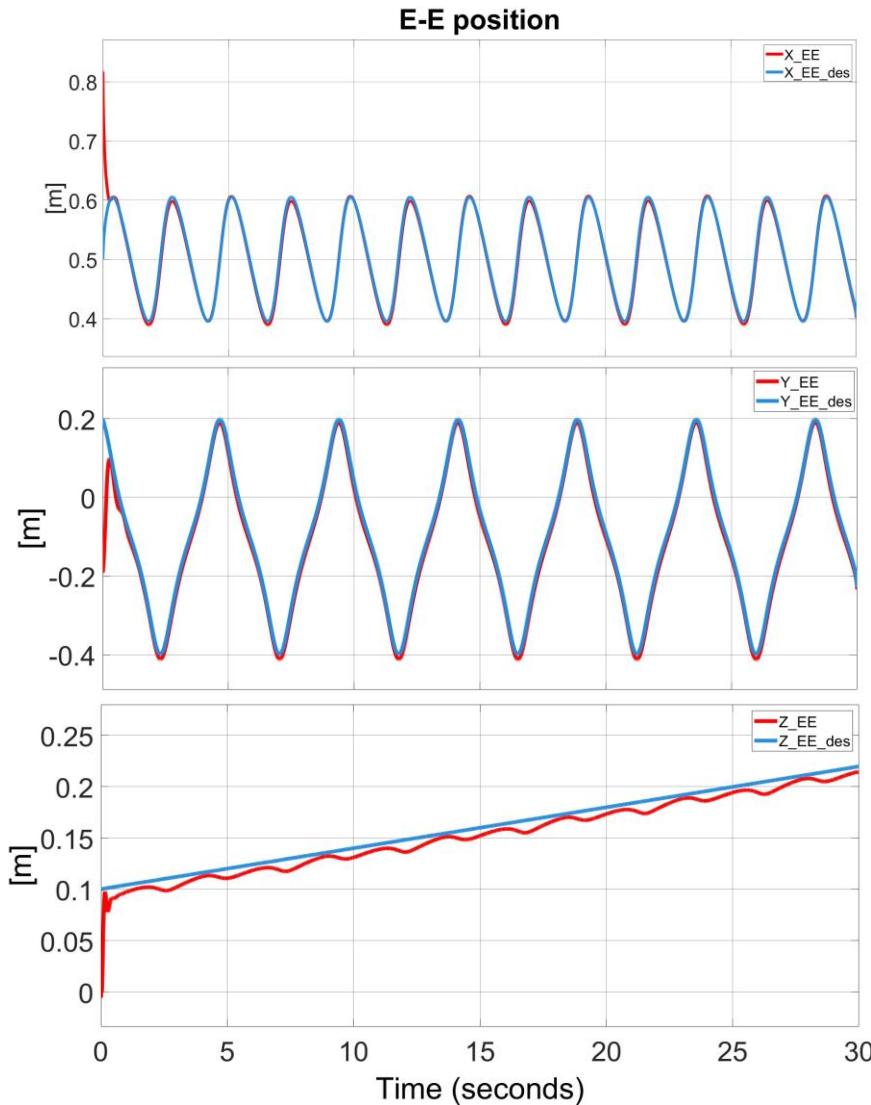
Backstepping adattivo  
joint errors



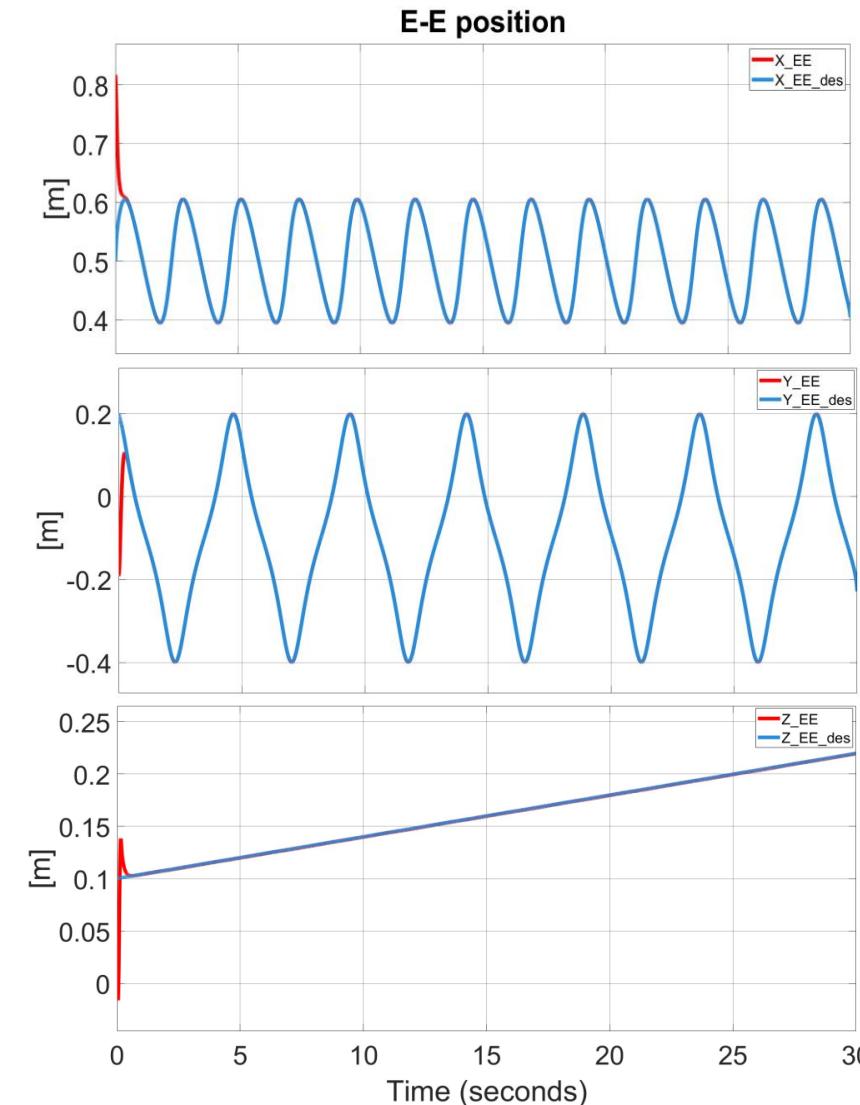
# Backstepping e Backstepping adattivo

- Traiettoria Lemniscata:

## Backstepping



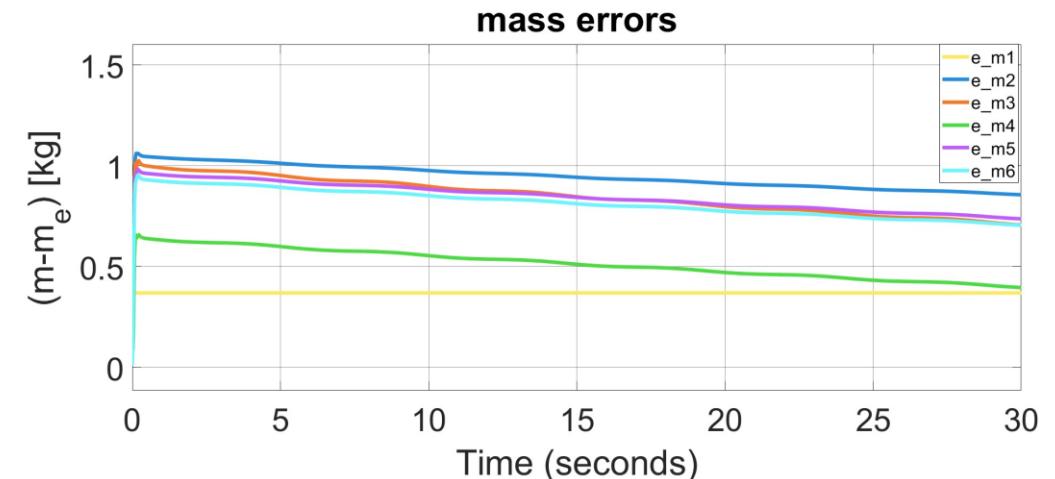
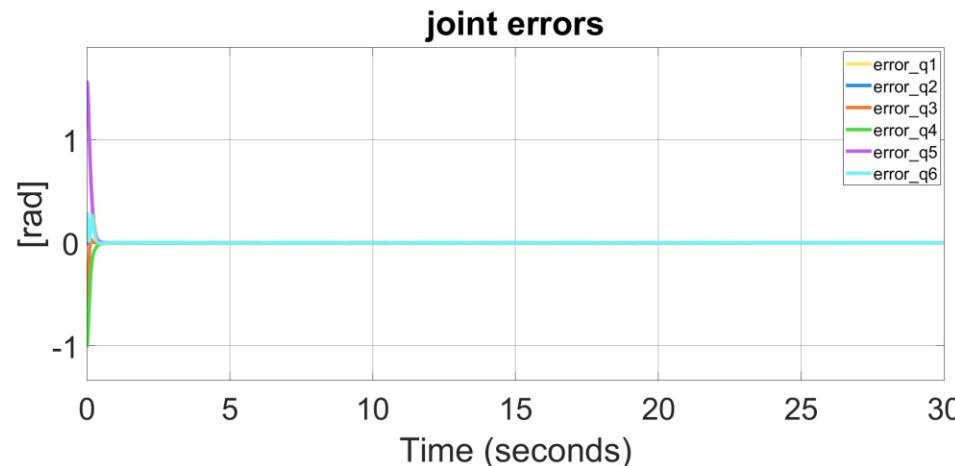
## Backstepping adattivo



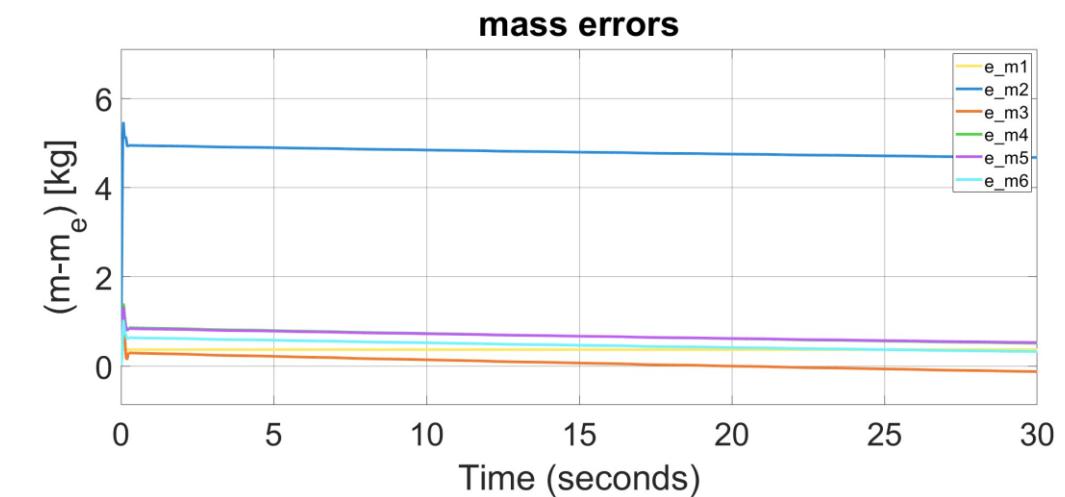
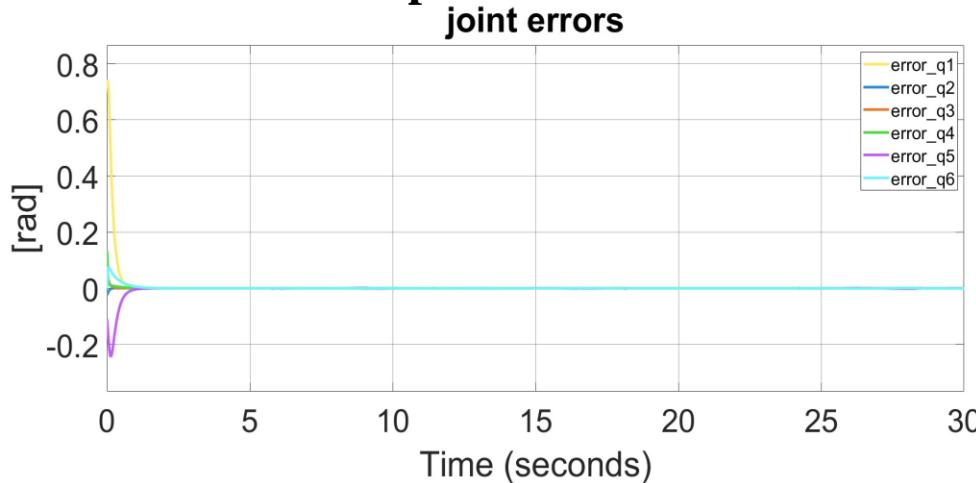
# Osservazioni Controllo adattivo

Al variare della matrice R della dinamica dei parametri  $\pi$  varia l'andamento dell'errore,  $e = \hat{\pi} - \pi$ . Ecco il controllore Backstepping adattivo nelle due traiettorie la cui differenza è più significativa rispetto ai risultati precedenti.

- **Traiettoria Spirale:**



- **Traiettoria Cerchi olimpici:**

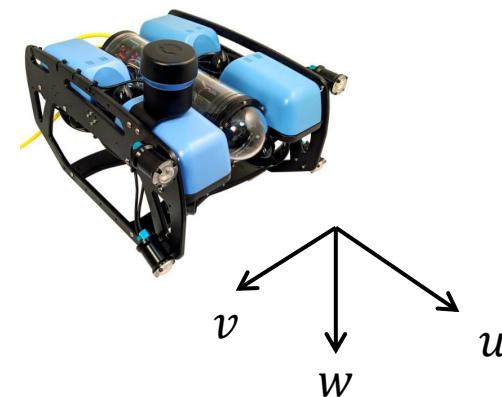
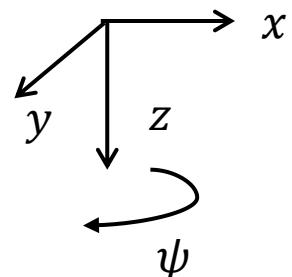


# Studio di Stabilità, Controllabilità, Osservabilità, del ROV BlueROV2



Ipotesi di lavoro:

- Gradi di libertà del robot  $[x \ y \ z \ \psi]$
- Sistema sovra-attuato (4 motori sul piano e 2 verticali)
- Sensori per acquisire posa, assetto e relative velocità lineari e angolari



# Modello cinematico e dinamico del BlueROV2

Posizione e orientazione in terna inerziale

$$\zeta = [x \ y \ z \ \psi]^T$$

Velocità lineari e angolari in terna body

$$\eta = [u \ v \ w \ r]^T$$

Modello cinematico

$$\dot{\zeta} = J * \eta$$

$$J = \begin{bmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Modello dinamico ( Fossen )

$$M\ddot{\eta} + (C + D)\eta + G = \tau$$

$M$  matrice di inerzia del robot e delle masse aggiunte

$C$  matrice di Coriolis del robot e delle masse aggiunte

$D$  matrice di damping

$G$  vettore delle azioni gravitazionali

$$\tau = [\tau_u \ \tau_v \ \tau_z \ \tau_\psi] = B_{all}F \quad \text{con } F \text{ vettore delle azioni date dai 6 motori}$$

Matrice di massa



$$M = M_{rb} + M_a$$

$$M_{rb} = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 & -my_g \\ 0 & m & 0 & mx_g \\ 0 & 0 & m & 0 \\ -my_g & mx_g & 0 & I_z \end{bmatrix}$$

$$M_a = \begin{bmatrix} X_{\dot{u}} & X_{\dot{v}} & X_{\dot{w}} & X_{\dot{r}} \\ Y_{\dot{u}} & Y_{\dot{v}} & Y_{\dot{w}} & Y_{\dot{r}} \\ Z_{\dot{u}} & Z_{\dot{v}} & Z_{\dot{w}} & Z_{\dot{r}} \\ N_{\dot{u}} & N_{\dot{v}} & N_{\dot{w}} & N_{\dot{r}} \end{bmatrix}$$

Matrice di Coriolis



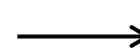
$$C = C_{rb} + C_a$$

$$C_{rb} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -m(x_g r + v) \\ 0 & 0 & 0 & -m(y_g r - u) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ m(x_g r + v) & m(y_g r - u) & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

rb = corpo rigido  
a = masse aggiunte

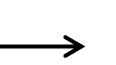
$$C_a = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & X_{\dot{v}}u + Y_{\dot{v}}v + Y_{\dot{w}}w + Y_{\dot{r}}r \\ 0 & 0 & 0 & 0 - (X_{\dot{u}}u + X_{\dot{v}}v + X_{\dot{w}}w + X_{\dot{r}}r) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -(X_{\dot{v}}u + Y_{\dot{v}}v + Y_{\dot{w}}w + Y_{\dot{r}}r) & (X_{\dot{u}}u + X_{\dot{v}}v + X_{\dot{w}}w + X_{\dot{r}}r) & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matrice di Damping



$$D = \begin{bmatrix} A_x|u| & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_y|v| & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_z|w| & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_r|r| \end{bmatrix}$$

Vettore gravità



$$G = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Matrice allocazione  
spinte motori



$$B_{all} = \begin{bmatrix} b & b & -b & -b & 0 & 0 \\ -b & b & b & -b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ -b(x_r + y_r) & b(x_r + y_r) & -b(x_r + y_r) & b(x_r + y_r) & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$b = \cos(\pi/4)$$

# Sistema in forma di stato

Stato del sistema

$$x = [x \ y \ z \ \psi \ u \ v \ w \ r]^T$$

Ingresso del sistema

$$u = [u_1 \ u_2 \ u_3 \ u_4 \ u_5 \ u_6]^T$$

Sistema in forma di stato

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \\ \dot{\psi} \\ \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \\ \dot{r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u\cos\psi & -v\sin\psi \\ u\sin\psi & v\cos\psi \\ w \\ r \\ \frac{2(m-Y_{\dot{v}})}{a_1}rv - \frac{A_x}{a_1}u|u| \\ \frac{2(X_{\dot{u}}-m)}{a_2}ru - \frac{A_y}{a_2}v|v| \\ -\frac{A_z}{a_3}w|w| \\ \frac{2(Y_{\dot{v}}-X_{\dot{u}}-m)}{a_4}uv - \frac{A_r}{a_4}r|r| \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{b_1}{a_1} \\ \frac{b_1}{a_2} \\ 0 \\ -\frac{b_2}{a_4} \end{bmatrix} u_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{b_1}{a_1} \\ \frac{b_1}{a_2} \\ 0 \\ -\frac{b_2}{a_4} \end{bmatrix} u_2 + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{b_1}{a_1} \\ \frac{b_1}{a_2} \\ 0 \\ -\frac{b_2}{a_4} \end{bmatrix} u_3 + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{b_1}{a_1} \\ \frac{b_1}{a_2} \\ 0 \\ -\frac{b_2}{a_4} \end{bmatrix} u_4 + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{a_3} \\ 0 \end{bmatrix} u_5 + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{a_3} \end{bmatrix} u_6$$

$$a_1 = 2(X_{\dot{u}} + m)$$

$$a_2 = 2(Y_{\dot{v}} + m)$$

$$a_3 = (Z_{\dot{w}} + m)$$

$$a_4 = (N_{\dot{r}} + I_z)$$

$$b_1 = \cos(\frac{\pi}{4})$$

$$b_2 = \cos(\frac{\pi}{4})(x_r + y_r)$$

# Modello linearizzato in forma di stato

$$A = \frac{\partial f(x, u)}{\partial x} \Bigg|_{\substack{x=x_{eq} \\ u=u_{eq}}} \in \mathbb{R}^{8 \times 8}$$

$$B = \frac{\partial f(x, u)}{\partial u} \Bigg|_{\substack{x=x_{eq} \\ u=u_{eq}}} \in \mathbb{R}^{8 \times 6}$$

Equilibrio

$$x_{eq} = \left[ 0 \ 0 \ 0 \ 1.5 \ \frac{\pi}{4} \ 0 \ 0 \ 0 \right]^T$$

$$u_{eq} = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0.7071 & -0.7071 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.7071 & 0.7071 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0420 & 0.0420 & -0.0420 & -0.0420 & 0 & 0 \\ -0.0420 & 0.0420 & 0.0420 & -0.0420 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0594 & -0.0594 \\ -0.3818 & 0.3818 & -0.3818 & 0.3818 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

# Studio della stabilità del modello linearizzato

Valutazione degli autovalori della matrice A  $\longrightarrow \lambda_i = 0 \quad \forall i = 1, \dots, 8$

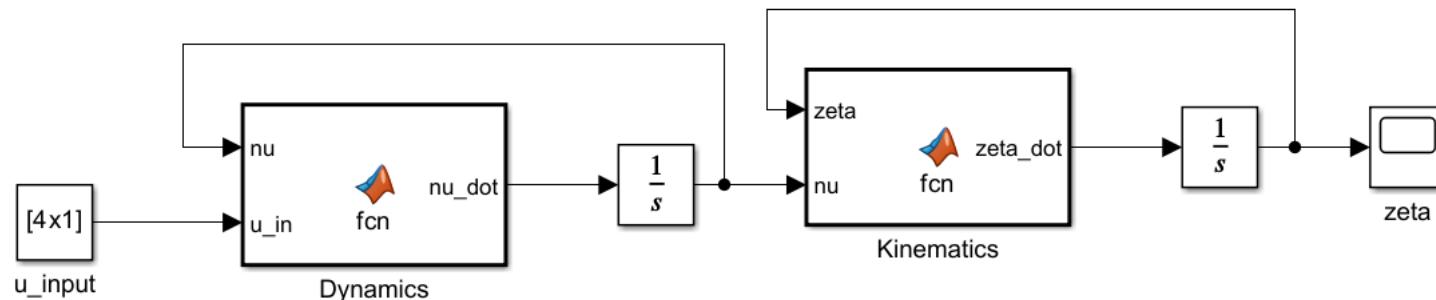
Sistema è stabile SSE  $ma(\lambda_i) = mg(\lambda_i)$   $\longrightarrow ma(\lambda_i) = 8$   $mg(\lambda_i) = 4$

Sistema è POLINOMIALMENTE DIVERGENTE

Il teorema di Lyapunov indiretto non permette di definire la stabilità del sistema non lineare attraverso la valutazione del linearizzato in presenza di modi polinomialmente divergenti.

# Studio della stabilità del modello non lineare

Il sistema può essere studiato come la serie di due sottosistemi: modello dinamico e modello cinematico. Se entrambi sono asintoticamente stabili, allora lo è anche il complessivo.



Per lo studio della stabilità viene fatto uso del Teorema diretto di Lyapunov per il primo sottosistema e delle simulazioni per il secondo.

## Teorema diretto di Lyapunov

Sia  $x = 0$  un punto di equilibrio per il sistema tempo-invariante  $\dot{x} = f(x)$ . Si consideri una funzione  $V(x) \in C^1$  positiva definita, e si consideri la sua derivata direzionale lungo il campo  $f(x)$ , cioè  $L_f V(x) = \frac{\partial V(x)}{\partial x} f(x)$ . Se  $L_f V(x)$  è negativa semi-definita, l'origine è stabile; se è negativa definita, l'origine è asintoticamente stabile; se è positiva definita, l'origine è instabile.

# Studio della stabilità del modello non lineare

## Sottosistema dinamica

$$\begin{aligned} V &= 0.5\eta^T\eta \quad \text{P.D.} \\ \dot{\eta} &= -M^{-1}(C + D)\eta \end{aligned} \longrightarrow \quad \dot{V} = \frac{\partial V}{\partial \eta} \dot{\eta} = -a_u u^2 |u| - a_v v^2 |v| - a_w w^2 |w| - a_r r^2 |r| \quad \text{con } a_u, a_v, a_w, a_r > 0$$

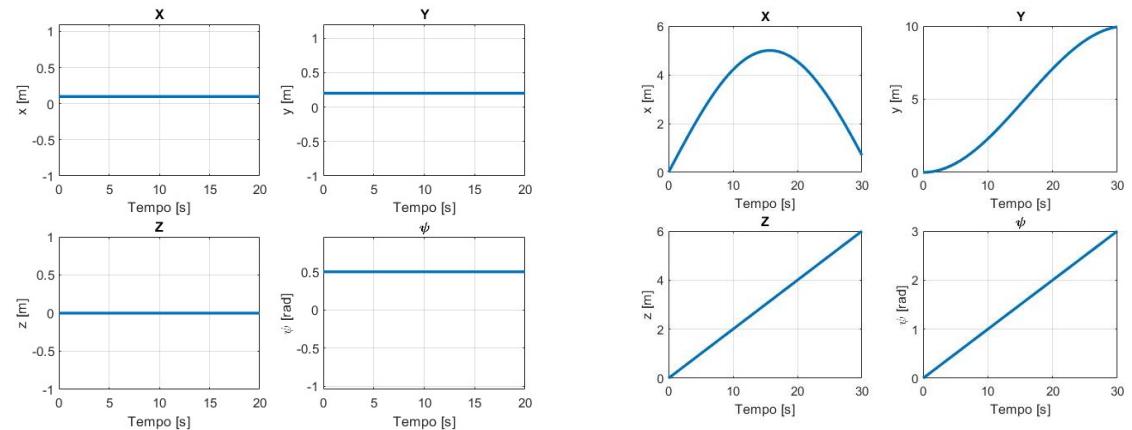
Poiché  $V > 0$  e  $\dot{V} < 0 \ \forall \eta$  allora il sottosistema della dinamica è asintoticamente stabile.

## Sottosistema cinematica

Il modello del sistema dipende fortemente dall'ingresso e quindi dalle uscite della dinamica; per questo motivo è stato studiato il sottosistema con simulazioni al variare dell'ingresso  $\eta$ .

$$\dot{\zeta} = J * \eta \quad J = \begin{bmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La traiettoria del sistema raggiunge l'origine solo se le condizioni iniziali e  $\eta$  sono nulli. Quindi non è asintoticamente stabile.



Ingresso nullo e condizioni iniziali non nulle.

Ingresso costante e condizioni iniziali nulle.

# Studio della stabilità del modello non lineare

Il sistema totale, dato dalla serie del modello dinamico e cinematico, non è asintoticamente stabile. Quindi posto in una condizione iniziale diversa da quella di equilibrio, il sistema evolve in un punto dello spazio di stato che ha  $\eta = 0$ , ma  $\zeta$  diverso dall'equilibrio.

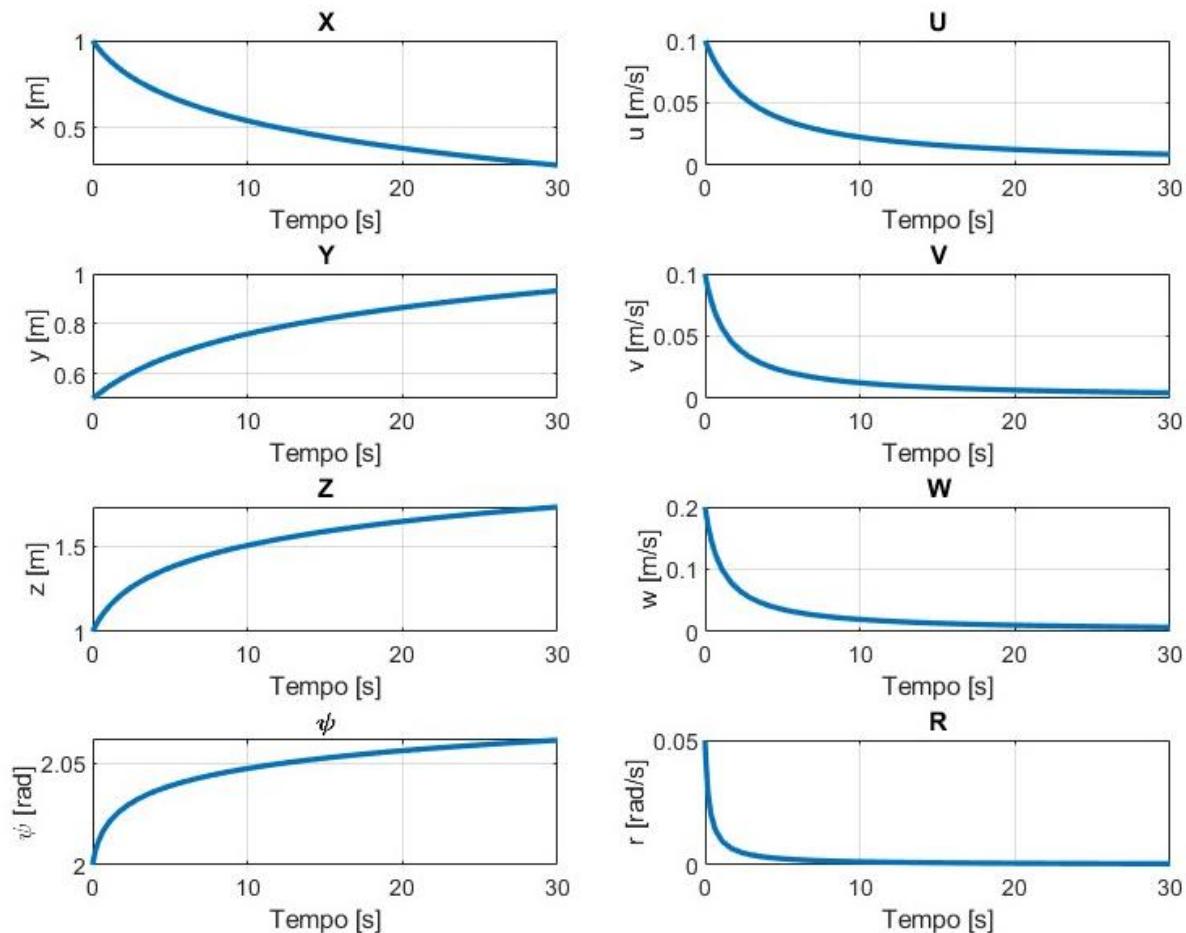
Condizione iniziale per il sistema serie

$$x_0 = [1 \ 0.5 \ 1 \ 2 \ 0.1 \ 0.1 \ 0.2 \ 0.05]^T$$

$$\eta = 0, \ \zeta \neq 0$$



NON ASINTOTICAMENTE STABILE



# Raggiungibilità del sistema linearizzato

Analisi della controllabilità R del sistema linearizzato valutando il rango della matrice di Raggiungibilità

$$R = [B \mid AB \mid A^2B \mid \cdots \mid A^{n-1}B] \quad n = 8$$

Motore i	Rank(R)	Controllabilità
$u_1$	2	No
$u_1, u_2$	4	No
$u_1, u_2, u_3$	6	No
$u_1, u_2, u_3, u_4$	6	No
$u_1, u_2, u_3, u_4, u_5$	8	Si
$u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6$	8	Si
$u_1, u_2, u_3, u_5$	8	Si

Il sistema linearizzato approssimato è completamente controllabile SSE si applicano tutti gli ingressi o 4 specifici garantendo la **locale controllabilità** del sistema **non Lineare**.



Controllabilità con numero minimo di motori (3 sul piano e 1 perpendicolare)

# Accessibilità del sistema non lineare

Calcolo la distribuzione di accessibilità  $\langle \Delta, \Delta_0 \rangle$  e valutazione della distribuzione di accessibilità:

$$\begin{aligned}
 \Delta_0 &= \text{span} \{B + R(x)\}; \quad \Delta = \text{span} \{Ax + P(x), B + R(x)\} \\
 \Delta_1 &= \Delta_0 + [\Delta_0, \Delta] \\
 &= \text{span} \{B, R(x), AB, [B, P(x)], [R(x)Ax], [R(x), P(x)]\} \\
 &= \text{span} \{B, AB\} + O(\|x\|^2) \\
 \vdots &= \vdots \\
 \Delta_k &= \{B, AB, \dots, A^n B\} + O(\|x\|^2)
 \end{aligned}$$

$n = 8$

Motore i	$\dim(\langle \Delta, \Delta_0 \rangle)$	Accessibilità
$u_1$	2	No
$u_1, u_2$	4	No
$u_1, u_2, u_3$	6	No
$u_1, u_2, u_3, u_4$	6	No
$u_1, u_2, u_3, u_4, u_5$	8	Si
$u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6$	8	Si
$u_1, u_2, u_3, u_5$	8	Si
$u_1, u_2, u_5$	8	Si

Il teorema di Chow afferma che se  $\dim(\langle \Delta, \Delta_0 \rangle) = n$ , allora il sistema è accessibile **small-time small-space** localmente nel punto di equilibrio.

Configurazione minima di motori è 3 ed è inferiore a quelli richiesti per lineare  
(2 sul piano e 1 perpendicolare)

# Controllabilità del sistema non lineare

L'accessibilità di un sistema non garantisce sempre la controllabilità, perciò è necessario verificare le seguenti condizioni per avere il controllo nel punto di equilibrio:

- i)  $f(x) \equiv 0, \forall x \in B_\epsilon(x_0);$
- ii)  $f(x) \in \text{span} \{g_1(x) \cdots g_m(x)\}, \forall x \in B_\epsilon(x_0);$
- iii)  $f(x_0) = 0$  and  $\dim \Delta_L(x_0) = n$ , where  $\Delta_L = \text{span} \{g_i, [f, g_i], \dots, ad_f^{\mu_i} g_i, \dots\}$ , with  $i = 1, \dots, m$  and for all  $\mu_i \in \mathbb{N};$
- iv)  $f(x_0) = 0$  and  $\dim (\Delta_L(x_0) + \Delta_{G1}(x_0)) = n$ , where  $\Delta_{G1} = \text{span} \{[g_i, g_j]\}$ , for all  $i, j$  from 1 to  $m;$
- v)  $f(x_0) = 0$ , and every Lie bracket between  $f$  and  $g$  with an odd number of  $f$  and an even number (not zero) of  $g$  ("bad brackets"), is a linear combination of brackets with a smaller total number of  $f$  e  $g$  ("good brackets");
- vi) If the accessibility condition is verified in all points in a compact set  $M$  and the system is weakly reversible in  $M$  (i.e.  $q_1 \in M$  is reachable from  $q_0 \in M$  if and only if  $q_0$  is reachable from  $q_1$ ), then the system is reachable on  $M.$

Sviluppando la condizione iv) si nota che:

$$\begin{aligned}\Delta_0 &= \text{span} \{B + R(x)\}; \quad \Delta = \text{span} \{Ax + P(x), B + R(x)\} \\ \Delta_1 &= \Delta_0 + [\Delta_0, \Delta] \\ &= \text{span} \{B, R(x), AB, [B, P(x)], [R(x)Ax], [R(x), P(x)]\} \\ &= \text{span} \{B, AB\} + O(\|x\|^2) \\ &\vdots \\ &\vdots \\ \Delta_k &= \{B, AB, \dots, A^n B\} + O(\|x\|^2)\end{aligned},$$



Garantita la controllabilità del sistema linearizzato  
e verificate le sei condizioni



s.t.l.a. implica s.t.l.c. in un intorno di  $x_0$

# Osservabilità del sistema

I sensori disponibili a bordo del BlueROV2 sono i seguenti:

Sensore	Grandezza misurata	$Y = h(x)$
SONAR	Posizione nel piano	$Y_{sonar} = [x \ y]$
ALTIMETRO	Profondità	$Y_{altimetro} = [z]$
DVL	Velocità lineari	$Y_{DVL} = [u \ v \ w]$
AHRS	Velocità angolari e assetto	$Y_{AHRS} = [\psi \ r]$

$$Y = \begin{bmatrix} x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & z & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \psi & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & u & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & v & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & w & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & r \end{bmatrix}$$

# Osservabilità del sistema linearizzato

Analisi dell'osservabilità  $O$  del sistema linearizzato valutando il rango della matrice di Osservabilità

$$O = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \dots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

Sensori	$Y = h(x)$	Rank(O)	Osservabilità
Sonar, Altimetro	$[x \ y \ z]^T$	4	No
Sonar, Altimetro, DVL	$[x \ y \ z \ u \ v \ w]^T$	6	No
Sonar, Altimetro, DVL, AHRS	$[x \ y \ z \ u \ v \ w \ \psi \ r]^T$	8	Si
Sonar, Altimetro, AHRS	$[x \ y \ z \ \psi]^T$	8	Si

Si evince che il sistema linearizzato è completamente osservabile se vengono utilizzati tutti i sensori disponibili o trascurando solo le misurazioni del DVL. Quindi il sistema non lineare è localmente osservabile nell'intorno dell'origine.

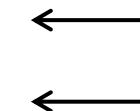
# Osservabilità del sistema non lineare

Per procedere con l'analisi dell'osservabilità del sistema si calcola la codistribuzione di osservabilità

$$dO = \text{span}\{dh(x), dL_g h(x), dL_f L_g h(x), \dots\}$$

La condizione per la locale osservabilità è che la dimensione della  $dO$  sia pari alla dimensione dello stato

Sensori	$Y = h(x)$	Rank(O)	Osservabilità
Sonar, Altimetro	$[x \ y \ z]^T$	8	Si
Sonar, Altimetro, DVL	$[x \ y \ z \ u \ v \ w]^T$	8	Si
DVL, AHRS	$[u \ v \ w \ \psi \ r]^T$	4	No
Sonar, Altimetro, DVL, AHRS	$[x \ y \ z \ u \ v \ w \ \psi \ r]^T$	8	Si
Sonar, Altimetro, AHRS	$[x \ y \ z \ r]^T$	8	Si



Differenza con  
modello  
linearizzato.

Il sistema risulta localmente osservabile con una configurazione di sensori che contiene sempre Sonar e Altimetro, accanto ai quali può essere associata una misura di assetto o di velocità lineare.

# Feedback Linearization BlueROV2

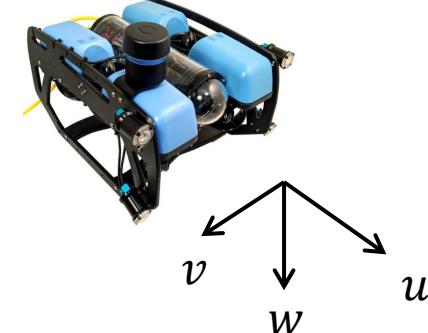
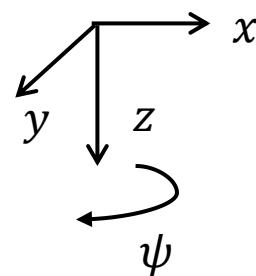
Condizioni di lavoro:

- Gradi di libertà del robot  $[x \ y \ z \ \psi]$
- Controllo con linearizzazione approssimata con 4 ingressi e 4 uscite
- Controllo con feedback linearization con 3 ingressi (2 sul piano e 1 perpendicolare) e 3 uscite
- Controllo con feedback linearization con 4 ingressi e 4 uscite



Task:

- Stabilizzazione del sistema
- Inseguimento di traiettoria rettilinea e sinusoidale



# Sistema in forma di stato

Stato del sistema

$$x = [x \ y \ z \ \psi \ u \ v \ w \ r]^T$$

Ingresso del sistema

$$u = [u_1 \ u_2 \ u_3 \ u_5]^T$$

Sistema in forma di stato

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \\ \dot{\psi} \\ \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \\ \dot{r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u\cos\psi & -v\sin\psi \\ u\sin\psi & v\cos\psi \\ w \\ r \\ \frac{2(m - Y_{\dot{v}})}{a_1}rv - \frac{A_x}{a_1}u|u| \\ \frac{2(X_{\dot{u}} - m)}{a_2}ru - \frac{A_y}{a_2}v|v| \\ -\frac{A_z}{a_3}w|w| \\ \frac{2(Y_{\dot{v}} - X_{\dot{u}} - m)}{a_4}uv - \frac{A_r}{a_4}r|r| \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{b_1}{a_1}u_1 + \frac{b_1}{a_2}u_2 + \frac{b_1}{a_3}u_3 + \frac{b_1}{a_4}u_5 \\ -\frac{b_1}{a_2}u_1 + \frac{b_1}{a_2}u_2 + \frac{b_1}{a_3}u_3 + \frac{b_1}{a_4}u_5 \\ 0 \\ -\frac{b_2}{a_4}u_1 + \frac{b_2}{a_4}u_2 + \frac{b_2}{a_4}u_3 + \frac{b_2}{a_4}u_5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} a_1 &= 2(X_{\dot{u}} + m) \\ a_2 &= 2(Y_{\dot{v}} + m) \\ a_3 &= (Z_{\dot{w}} + m) \\ a_4 &= (N_{\dot{r}} + I_z) \\ b_1 &= \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \end{aligned}$$

# Analisi con sistema linearizzato

Il sistema linearizzato non è completamente controllabile con 3 ingressi, quindi è stato dovuto inserire un altro motore agente nel piano per gestire il grado di libertà rotazionale.

Verifica delle prestazioni del controllore:

- Stabilità del sistema
- Inseguimento di una traiettoria rettilinea
- Inseguimento di una traiettoria sinusoidale

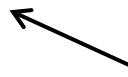
Costruzione di un controllore basandosi sul modello linearizzato del sistema e applicarlo successivamente al modello non lineare:

$$u = K(ref - x) + B^+(r\dot{e}f - Aref)$$

Feedback



Feedforward

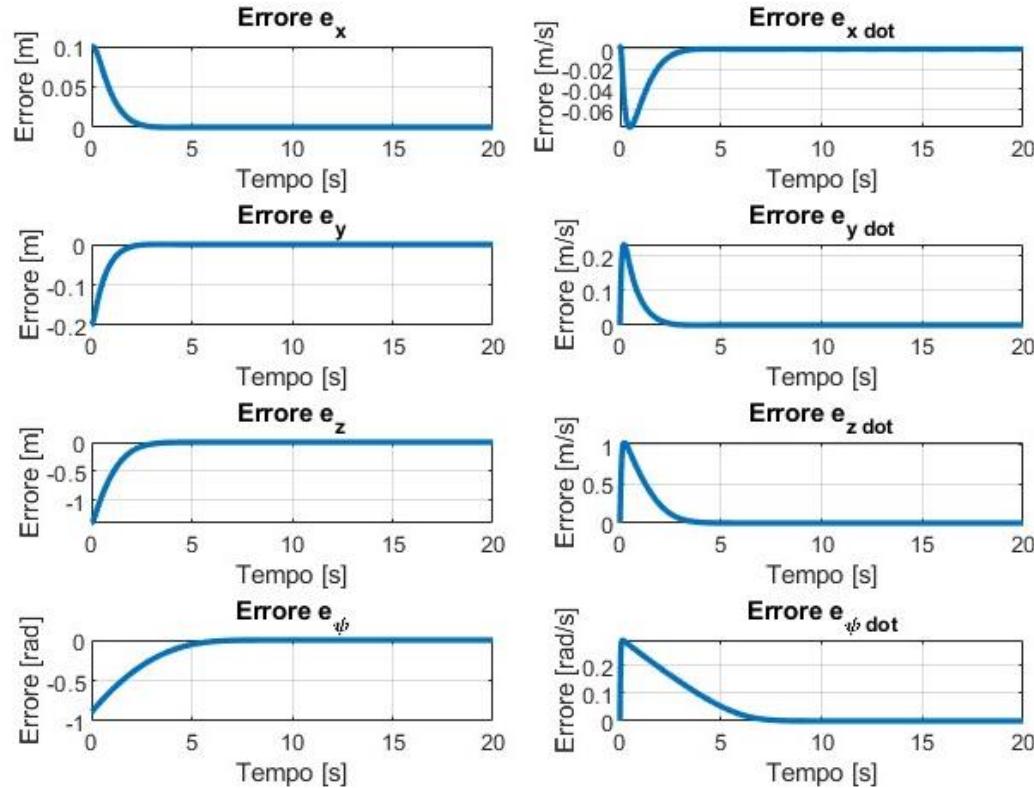


con  $ref$  e  $r\dot{e}f$  i riferimenti da inseguire,  $A$  e  $B$  le matrici ottenute dalla linearizzazione di Taylor e  $K$  la matrice per stabilizzare il sistema.

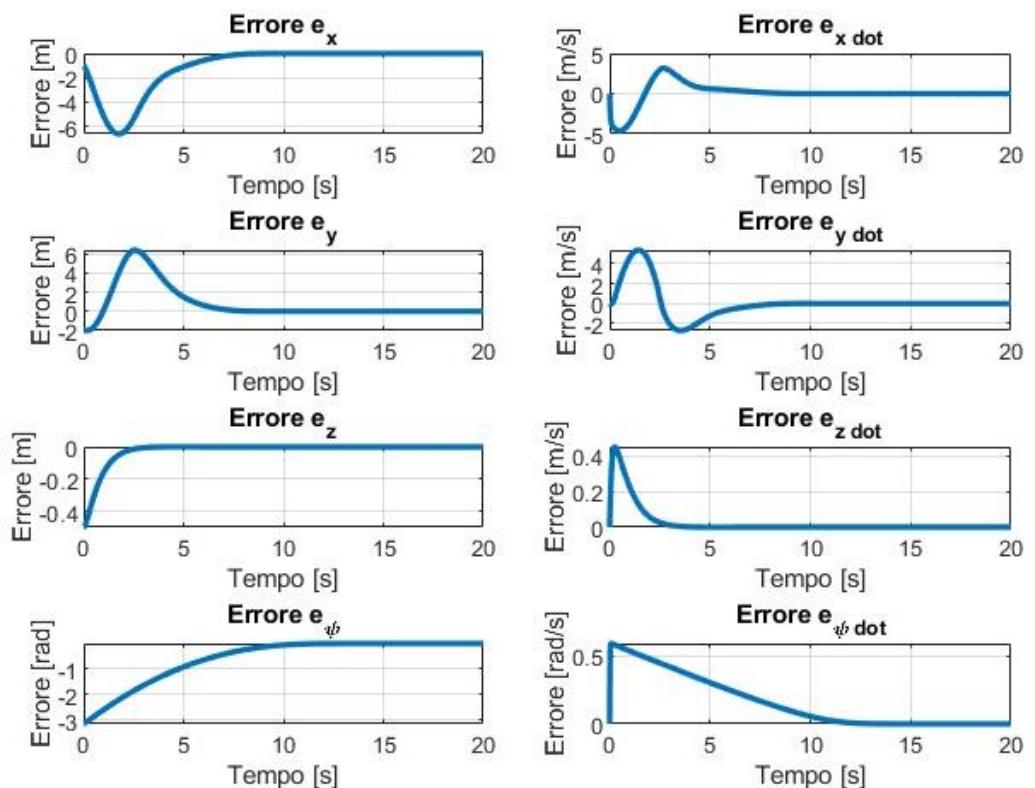
# Analisi di stabilità

$$\text{Poli} = [-2 -2 -2 -5 -5 -5 -5 -5 -10]^T$$

Condizione iniziale  $x_0 = [-0.1 \ 0.2 \ 1.4 \ 0.886 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$



Condizione iniziale  $x_0 = [1 \ 2 \ 0.5 \ pi \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$



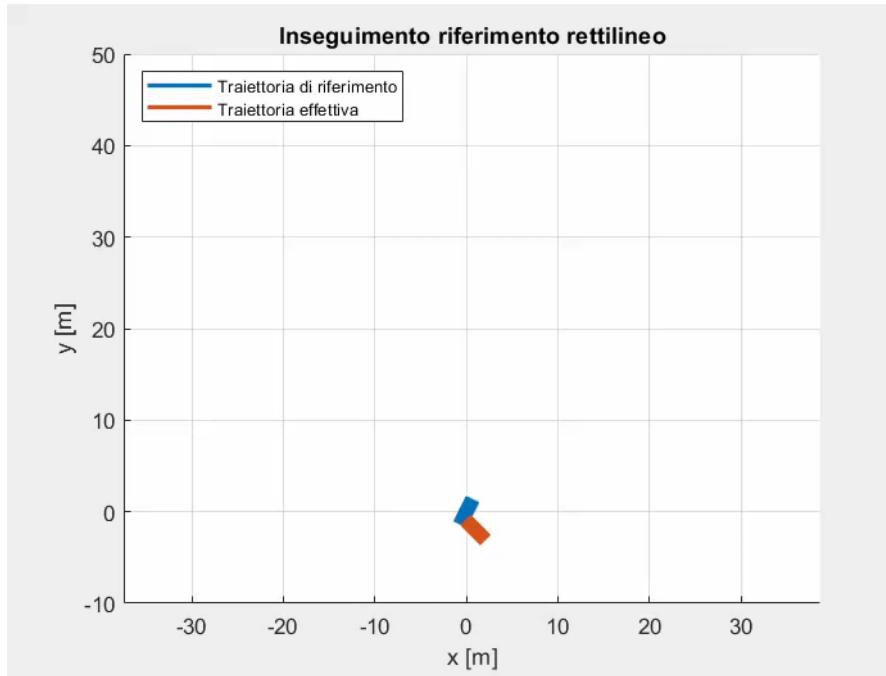
La stabilizzazione è garantita, ma più il sistema parte lontano dall'equilibrio per la linearizzazione e più elevate sono le sovraelongazioni.

# Controllo di traiettoria - RETTA

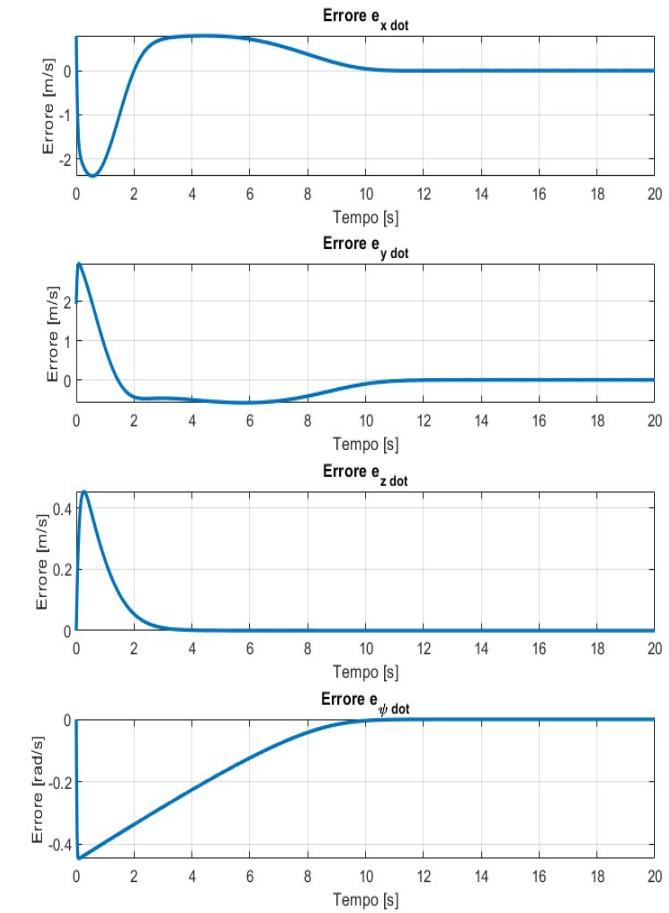
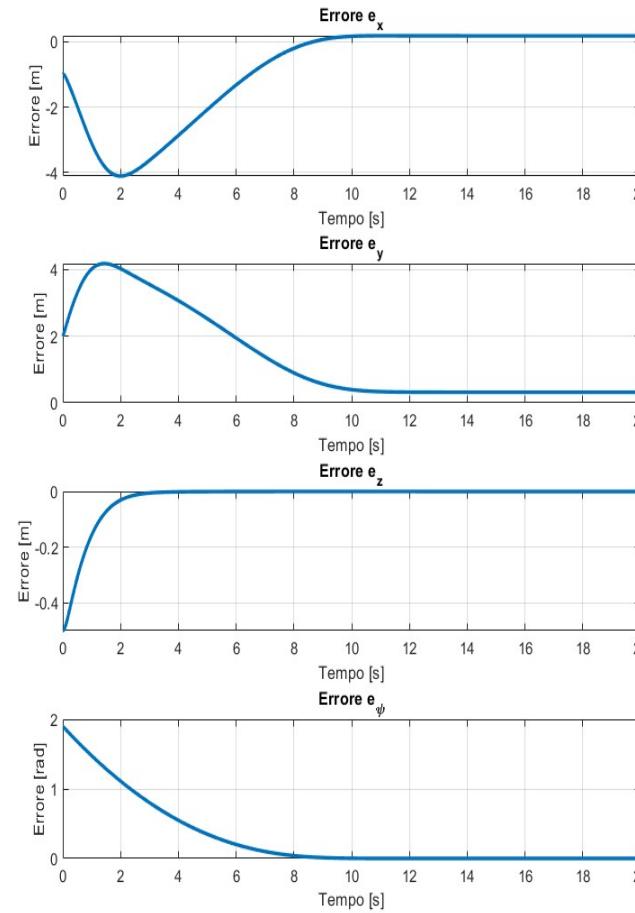
Condizione iniziale  $x_0 = [1 \ -2 \ 0.5 \ -pi/4 \ 0.1 \ 0.2 \ 0 \ 0]^T$

Riferimento

$$\{x_r = t \ y_r = 2t \ z_r = 0$$

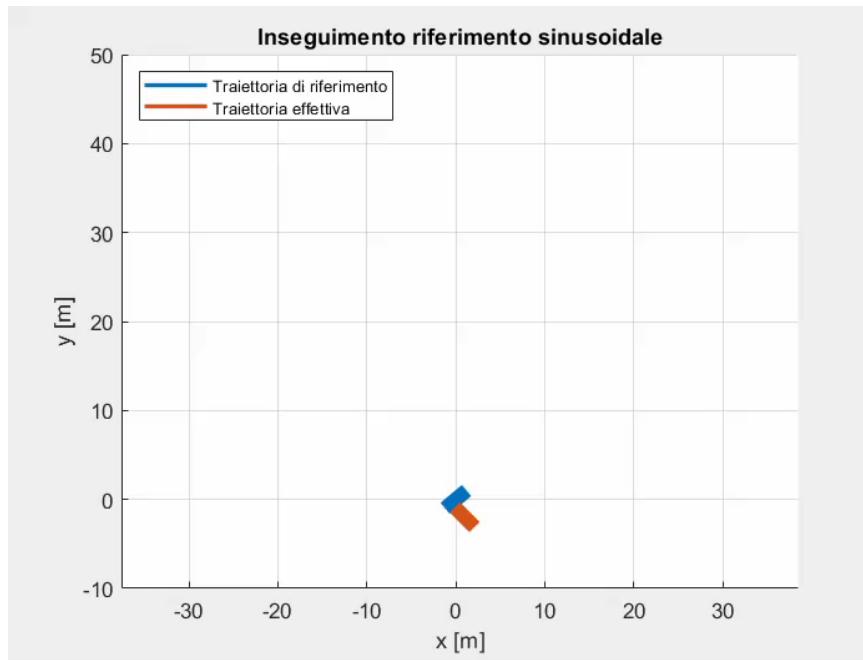


Errore diverso da zero in posizione a regime con sovraelongazioni iniziali



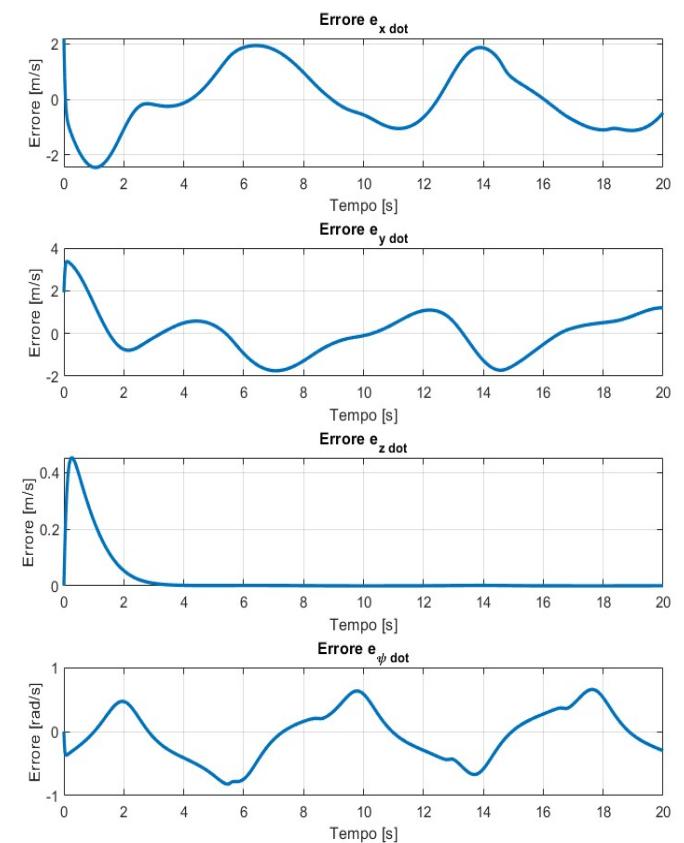
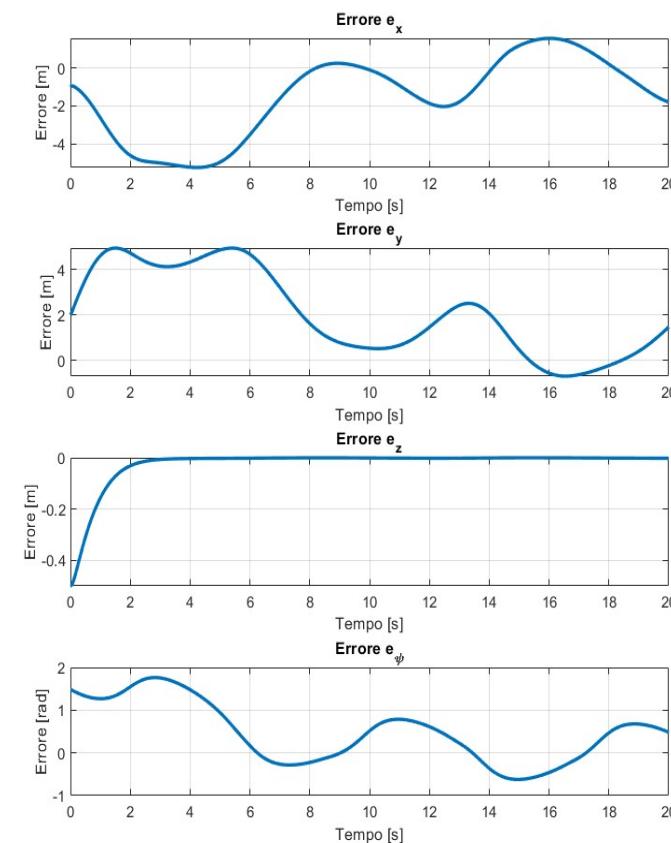
# Controllo di traiettoria - SINUSOIDALE

Condizione iniziale  $x_0 = [1 \ -2 \ 0.5 \ -pi/4 \ 0.1 \ 0.2 \ 0 \ 0]^T$  Riferimento  $\rightarrow \{x_r = R\sin(at) \ y_r = bt \ z_r = 0\}$

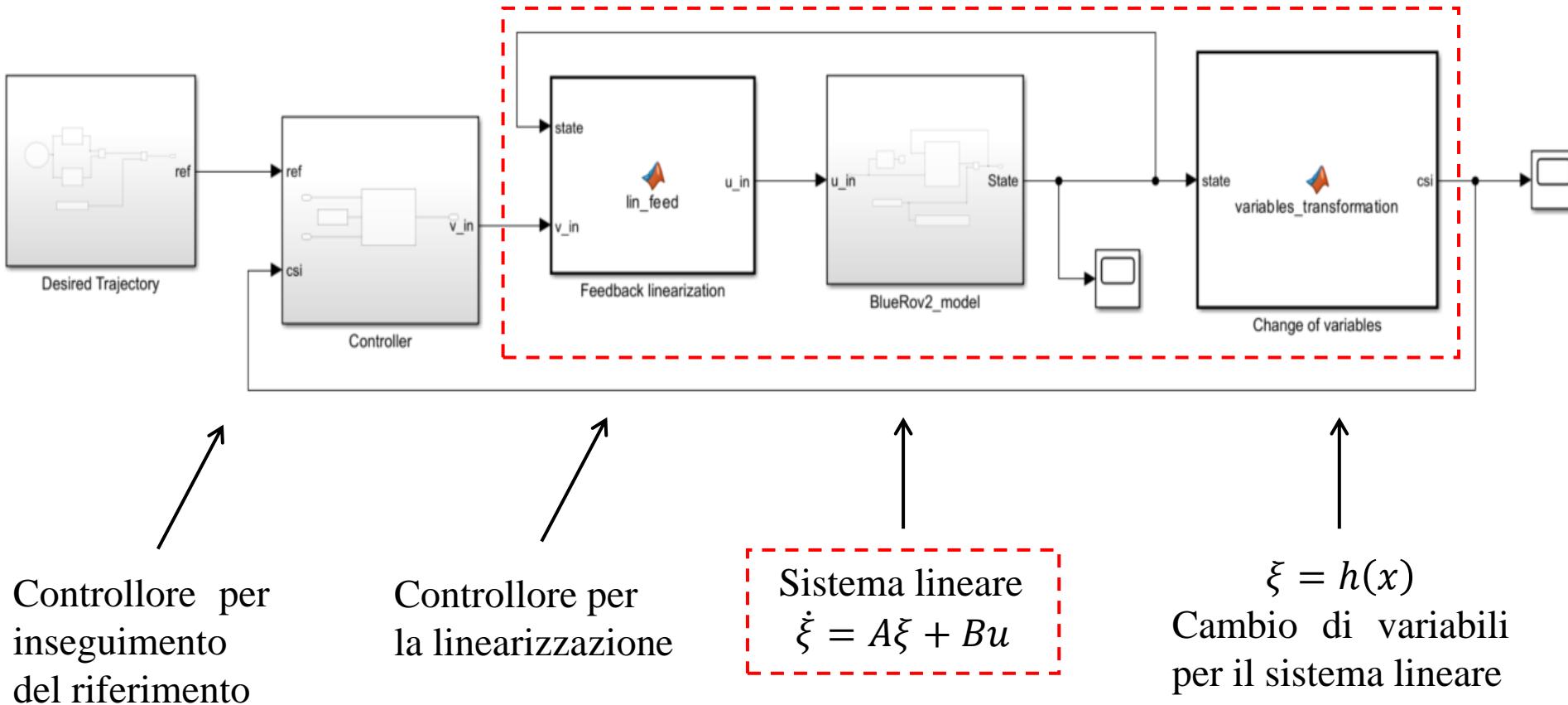


L'inseguimento di riferimenti che hanno la derivata non costante porta ad avere errore anche sulle velocità, non garantendo un corretto inseguimento sia in posizione che in velocità.

Parametri:  $a = 0.8 \ b = 2 \ R = 3$

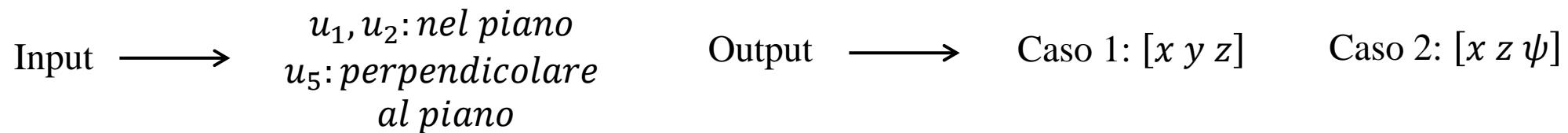


# Feedback Linearization



# Controllore linearizzante con 3 motori e 3 uscite

Dall'analisi fatta nella tavola precedente il sistema è controllabile con solo 3 motori (2 sul piano e 1 perpendicolare) e osservabile con la combinazione di tre output.



Il calcolo del controllore avviene attraverso le derivate delle uscite del sistema. La derivazione viene ripetuta fino a che gli ingressi non sono presenti e si ottiene una struttura come la seguente

$$y^{(r)} = L_f^{(r)} h + L_g L_f^{(r-1)} h u$$

Per il sistema studiato si deriva ogni uscita due volte per entrambi i casi di output e si ottiene una forma matriciale dalla quale per inversione si ottiene l'ingresso

$$\ddot{Y} = \Gamma(x) + E(x)u \quad \longleftarrow$$

- E è non singolare nell'intorno del punto di equilibrio
- Il grado relativo del sistema è 6 ( $6 < n$ )

$$u = -E^{-1}(x)\Gamma(x) + E^{-1}(x)v$$

$\longleftarrow$  Controllo linearizzante

# Cambio di variabili

E' possibile fare un cambio di variabili per le variabili osservate e gestire il sistema I/O come se fosse un sistema lineare e applicare su di esso il controllo per inseguire i vari riferimenti. Siccome il grado relativo non coincide con la dimensione dello stato, è necessario completare il cambio con  $n - r$  variabili (**ZERO DINAMICA**).

Le prime  $r$  variabili sono le  $r - 1$  *Lie Bracket* delle uscite rispetto al campo di deriva  $f(x)$ :  
con  $j = 1, \dots, n, i = 0, \dots, r - 1, m = 1, \dots, \#\text{output}$

$$\xi_j = \mathcal{L}_f^{(i)} h_m(x)$$

Le restanti devono essere scelte in modo tale che il jacobiano di  $h(x)$  non sia singolare:

$$\det\left(\frac{\partial h(x)}{\partial x}\right) \neq 0$$

Nuove variabili con output  $[x \ y \ z]$

$$\xi = h(x) = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \\ \xi_5 \\ \xi_6 \\ \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ u \cdot \cos(\psi) - v \cdot \sin(\psi) \\ y \\ v \cdot \cos(\psi) + u \cdot \sin(\psi) \\ z \\ w \\ \psi \\ r \end{bmatrix}$$

ZETA

Nuove variabili con output  $[x \ z \ \psi]$

$$\xi = h(x) = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \\ \xi_5 \\ \xi_6 \\ \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ u \cdot \cos(\psi) - v \cdot \sin(\psi) \\ z \\ w \\ \psi \\ r \\ y \\ v \cdot \cos(\psi) + u \cdot \sin(\psi) \end{bmatrix}$$

# Zero dinamica

Dinamica  $\zeta$  con output  $[x \ y \ z]$       Con  $a_1, a_2, a_3, a_4, b_1 > 0$

$$\begin{bmatrix} \dot{\zeta}_1 \\ \dot{\zeta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \zeta_2 \\ -a_1\zeta_2|\zeta_2| - a_2\zeta_2(\xi_2\cos\zeta_2 + \xi_4\sin\zeta_2) + a_3(\xi_4\cos\zeta_2 - \xi_2\sin\zeta_2) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ b_1(v_2\cos\zeta_2 - v_1\sin\zeta_2) \end{bmatrix}$$

Dinamica  $\zeta$  con output  $[x \ z \ \psi]$       Con  $a_1, a_2, a_3, b_1, b_3 > 0$

$$\begin{bmatrix} \dot{\zeta}_1 \\ \dot{\zeta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \zeta_2 \\ \frac{a_1\xi_6(\xi_2\cos\xi_5 + \zeta_2\sin\xi_5) + a_2\xi_6|\xi_6| - a_3(\zeta_2\cos\xi_5 - \xi_2\sin\xi_5)|(\zeta_2\cos\xi_5 - \xi_2\sin\xi_5)|}{\cos\xi_5} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{b_1v_1\sin\xi_5 + b_3v_3}{\cos\xi_5} \end{bmatrix}$$

Queste non giocano alcun ruolo nel rapporto ingresso-uscita tra  $y$  e  $v$ , essendo l'uscita completamente disaccoppiata dalle variabili. In effetti, la retroazione stabilizzante è solo **esterna** e non implica che il sistema nel suo complesso non possa avere componenti divergenti, che possono essere inaccettabili.

Zero dinamica

$$\begin{bmatrix} \dot{\zeta}_1 \\ \dot{\zeta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \zeta_2 \\ -a_1\zeta_2|\zeta_2| \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\zeta}_1 \\ \dot{\zeta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \zeta_2 \\ -a_3\zeta_2|\zeta_2| \end{bmatrix}$$

Non asintoticamente stabile.  
Divergenza delle  $n - r$  variabili.

# Controllore per inseguimento riferimento

Il controllore è dato dalla somma di una componente in feedback dell'errore tra stato e riferimento e una componente in feedforward costituita dalle derivate  $r - esime$  del riferimento.

$$v = ref^{(r)} + \mathbf{K} \cdot e$$

Feedforward

Feedback

con  $ref^{(r)}$  accelerazione del riferimento poiché  $r = 2$  per ogni uscita.

La matrice  $\mathbf{K}$  è scelta per stabilizzare il sistema allocando i poli in  $[-2 - 5]^T$  per la parte lineare e in  $[-5 - 10]^T$  per la parte angolare.

Nuove variabili con output  $[x \ y \ z]$

$$v = \begin{bmatrix} x^{(2)} \\ y^{(2)} \\ z^{(2)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 10 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \end{bmatrix}$$

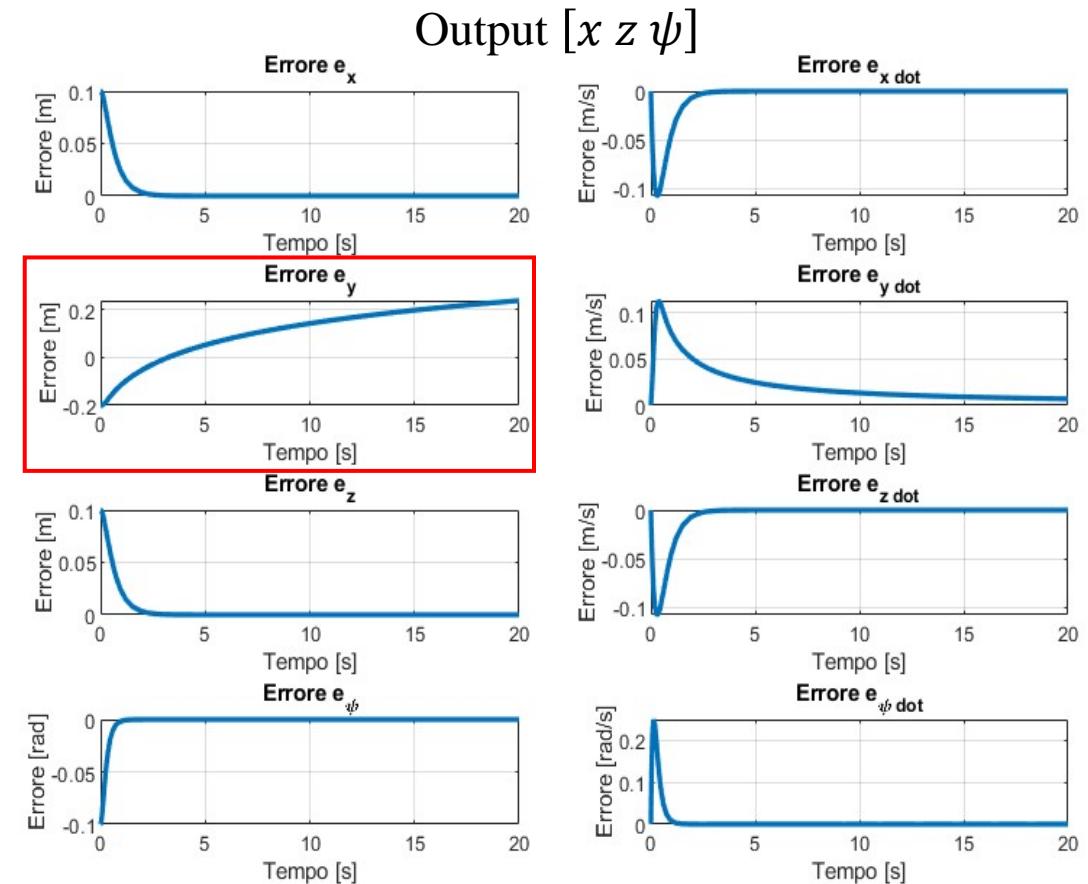
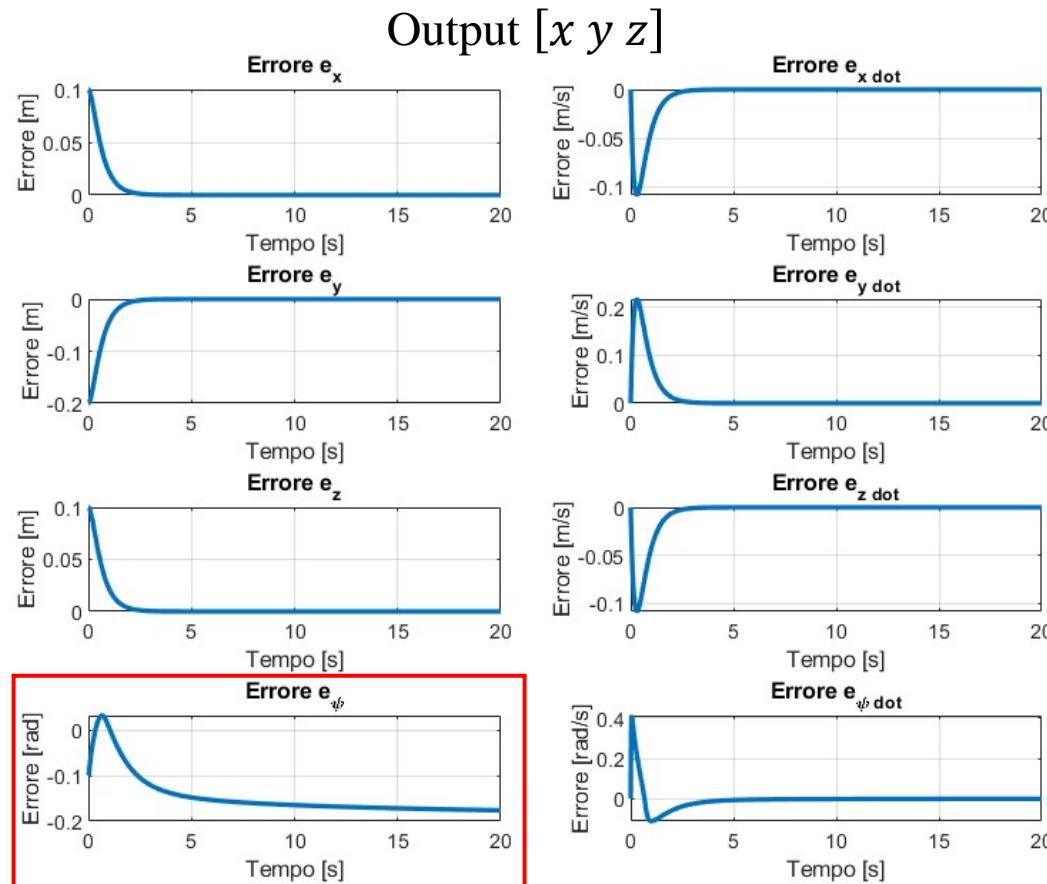
Nuove variabili con output  $[x \ z \ \psi]$

$$v = \begin{bmatrix} x^{(2)} \\ z^{(2)} \\ \psi^{(2)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 10 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 50 & 15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_x \\ e_z \\ e_\psi \end{bmatrix}$$

$$e_k = \begin{bmatrix} e_k \\ e_{\dot{k}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{ref} \\ \dot{k}_{ref} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} k \\ \dot{k} \end{bmatrix} \quad \text{← Errore}$$

# Analisi di stabilità

Condizione iniziale  $x_0 = [-0.1 \ 0.2 \ 1.4 \ 0.886 \ 0 \ 0 \ 0]^T$



Per entrambi i casi le variabili che vengono osservate vengono stabilizzate, invece le altre vengono regolate a zero solo per le velocità se il sistema non parte nella condizione di equilibrio.

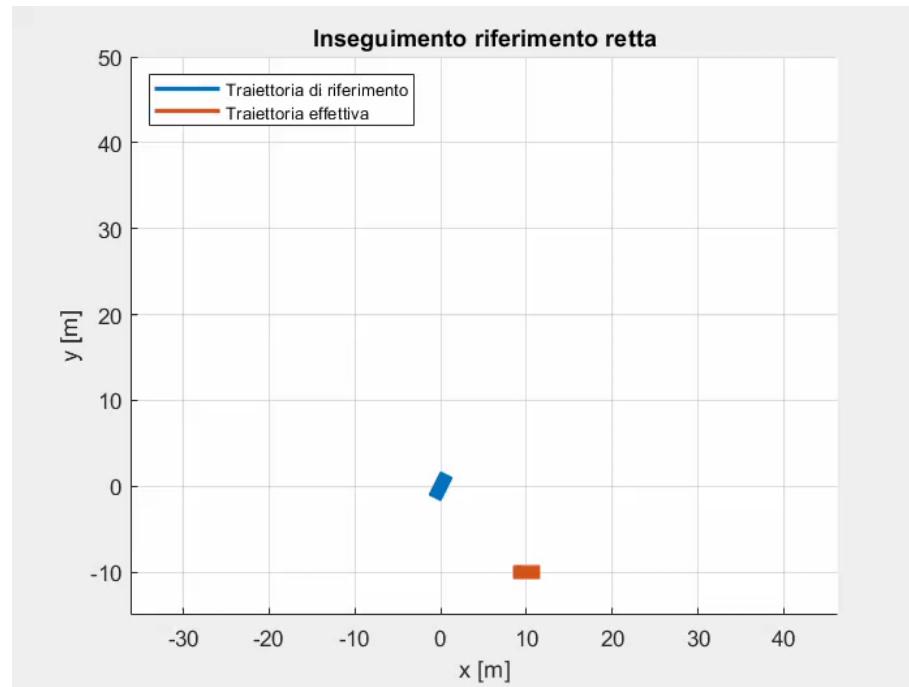
# Controllo di traiettoria $[x \ y \ z]$ – RETTA

Retta  $\longrightarrow$

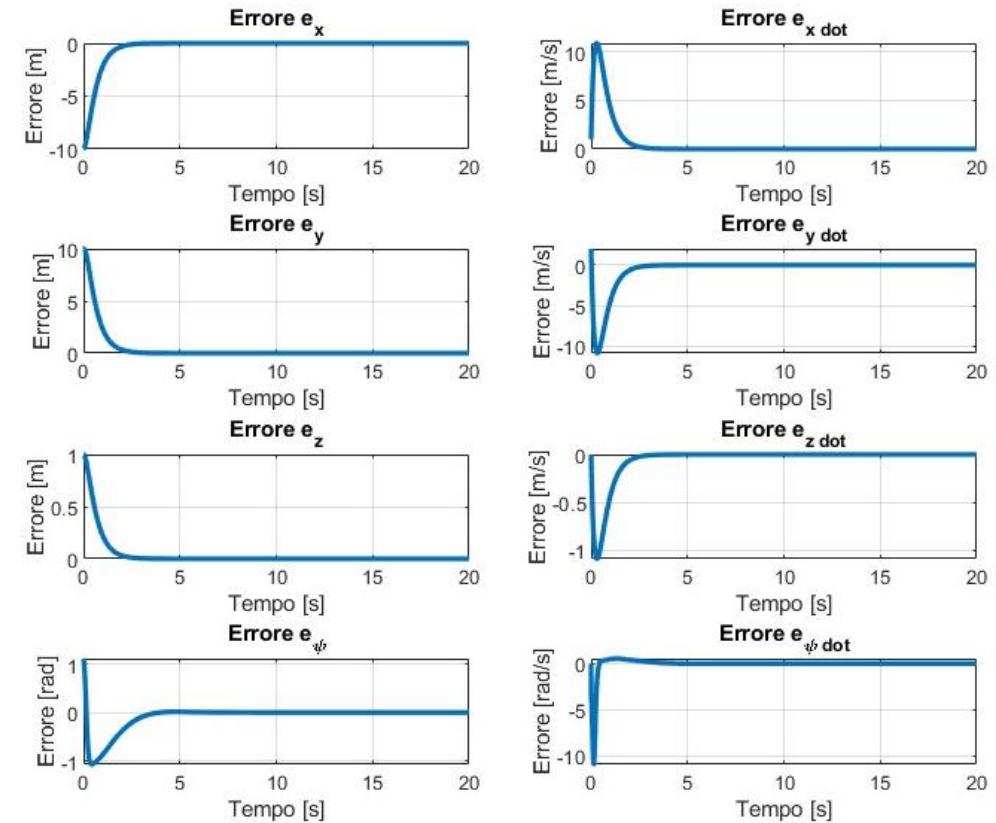
$$\begin{cases} x_r = t \\ y_r = 2t \\ z_r = 0 \end{cases}$$

$$ref = \begin{bmatrix} posa \\ velocità \\ accelerazione \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_r = t & y_r = 2t & z_r = 0 & \psi_r = atan2(y_r, x_r) \\ \dot{x}_r = 1 & \dot{y}_r = 2 & \dot{z}_r = 0 & \dot{\psi}_r = 0 \\ \ddot{x}_r = 0 & \ddot{y}_r = 0 & \ddot{z}_r = 0 & \ddot{\psi}_r = 0 \end{bmatrix}$$

Condizione iniziale  $x_0 = [10 \ -10 \ -1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$



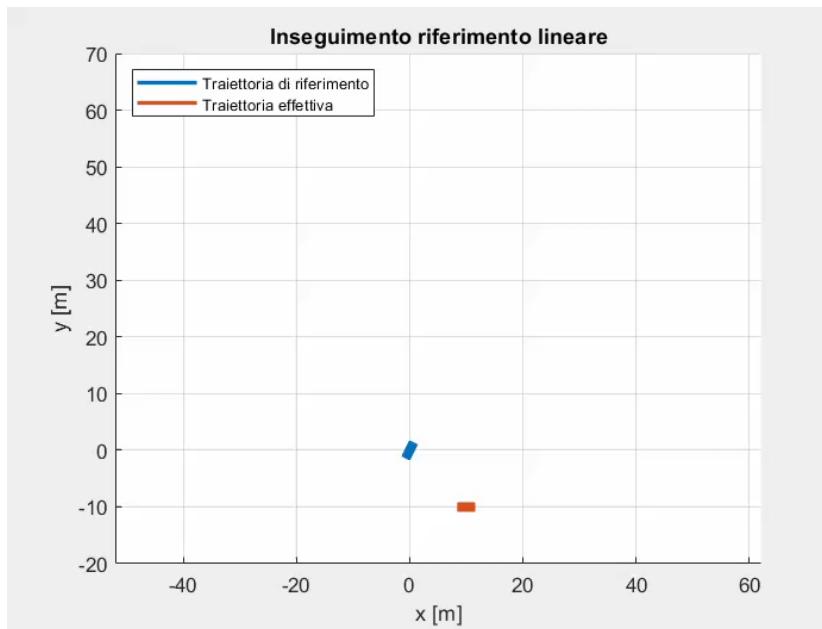
L'inseguimento della traiettoria è garantito.



# Controllo di traiettoria $[x \ z \ \psi]$ - RETTA

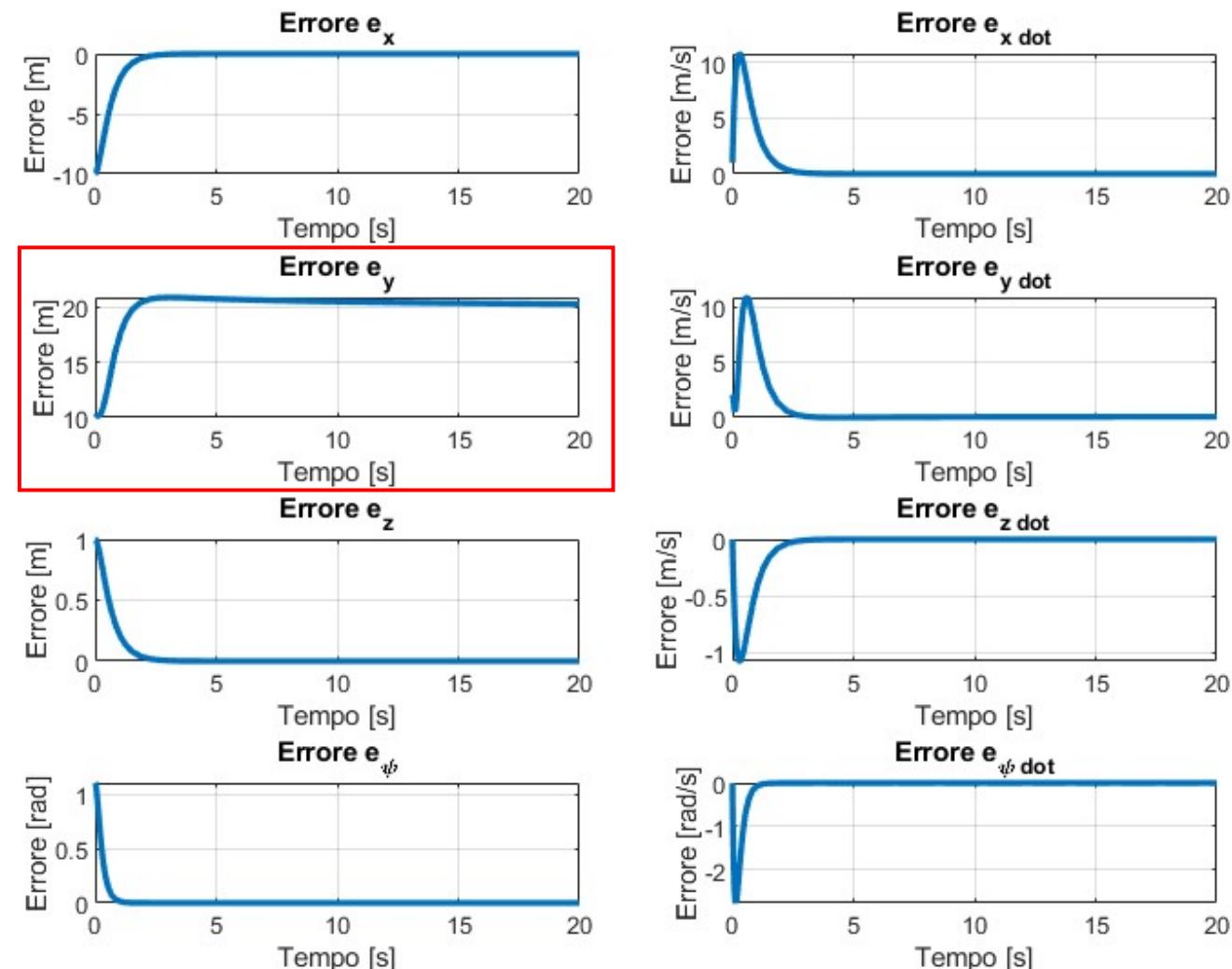
Retta  $\longrightarrow$

$$\begin{cases} x_r = t \\ y_r = 2t \\ z_r = 0 \end{cases}$$



L'inseguimento della traiettoria non è garantito; infatti il movimento del robot è parallelo a quello richiesto a causa della zero dinamica della variabile y.

Condizione iniziale  $x_0 = [10 \ -10 \ -1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$



# Controllo di traiettoria $[x \ y \ z]$ - SINUSOIDE

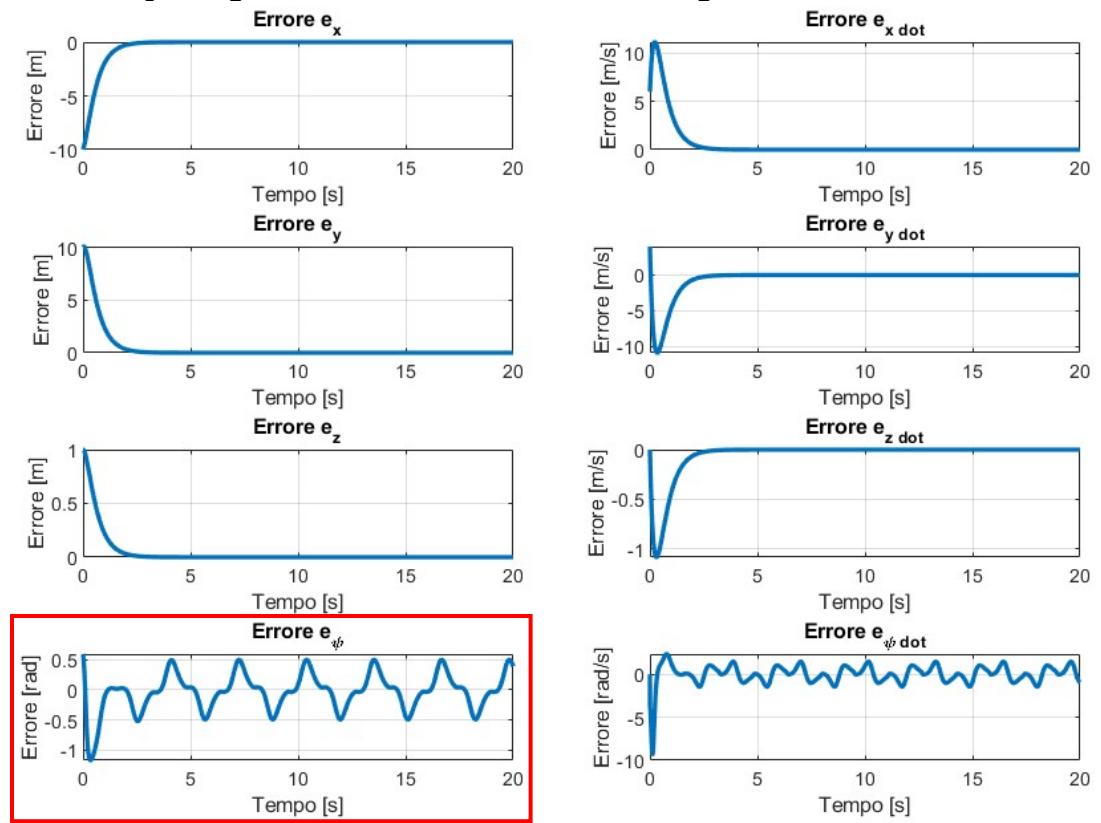
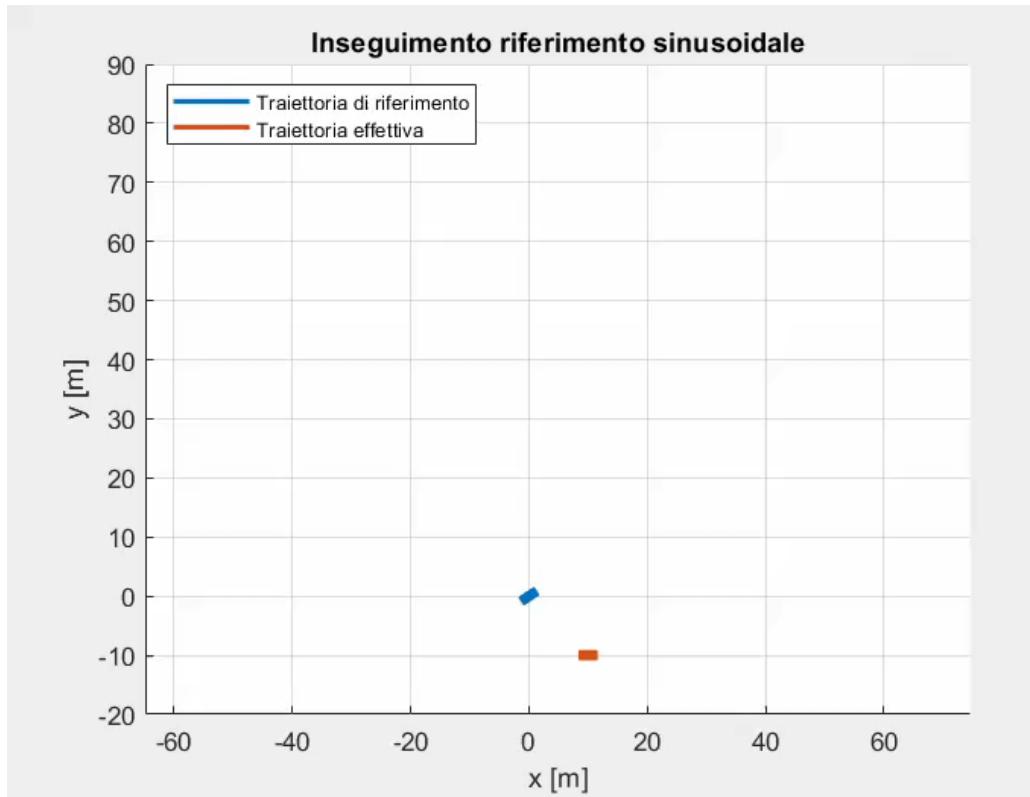
Sinusoida  $\longrightarrow$

$$\begin{cases} x_r = R\sin(at) \\ y_r = bt \\ z_r = 0 \end{cases}$$

$$ref = \begin{bmatrix} posa \\ velocità \\ accelerazione \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_r = R\sin(at) & y_r = bt & z_r = 0 & \psi_r = \text{atan2}(y_r, x_r) \\ \dot{x}_r = R\cos(at) & \dot{y}_r = b & \dot{z}_r = 0 & \dot{\psi}_r = \frac{Ra^2 b \sin(at)}{R\cos(at)^2 + b} \\ \ddot{x}_r = -Ra^2 \cdot \sin(at) & \ddot{y}_r = 0 & \ddot{z}_r = 0 & \ddot{\psi}_r = \frac{Rba^3 \cdot (R^2 a^2 \cdot \sin(at)^2 + R^2 a^2 + b^2) \cdot \cos(at)}{(R^2 b^2 a^2 \cdot \cos(at)^2 + b^2)^2} \end{bmatrix}$$

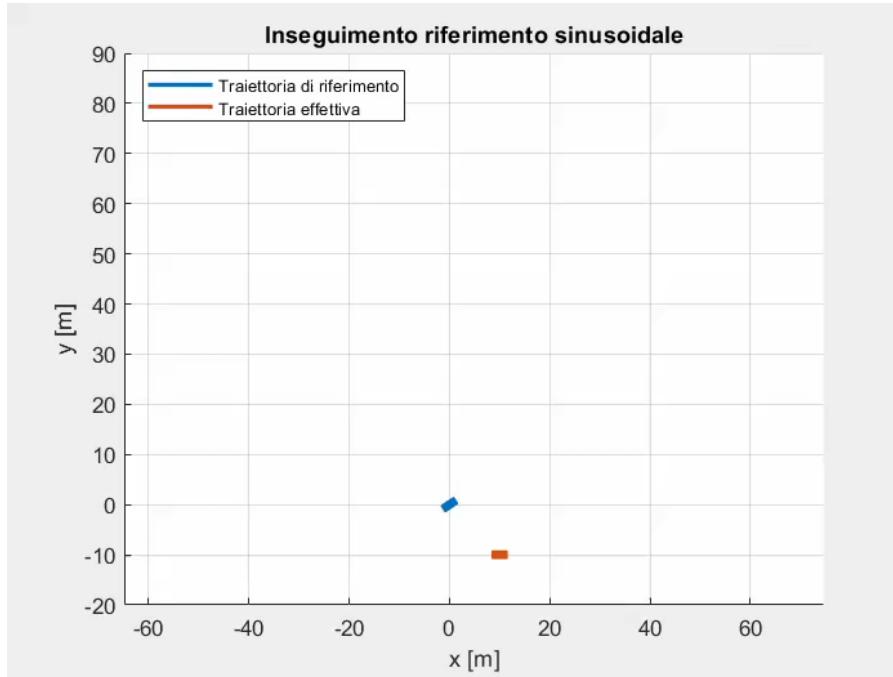
Parametri:  $a = 2$   $b = 4$   $R = 3$

Condizione iniziale  $x_0 = [10 \ -10 \ -1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$



# Controllo di traiettoria $[x \ z \ \psi]$ - SINUSOIDA

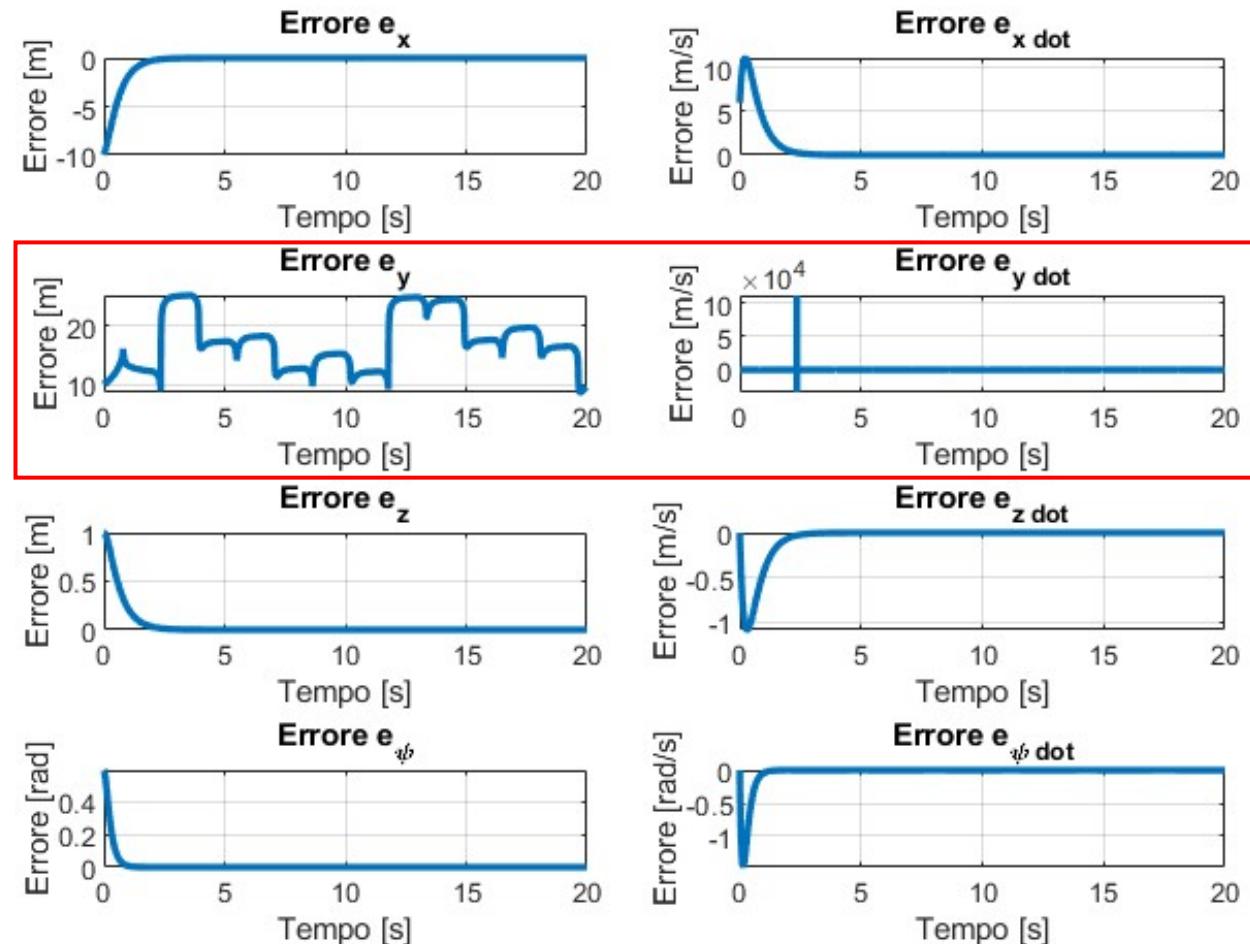
Sinusoide  $\longrightarrow$   $\left\{ \begin{array}{l} x_r = R \sin(at) \\ y_r = bt \\ z_r = 0 \end{array} \right.$



Per entrambi i set di output non è possibile garantire il corretto inseguimento di sinusoidi se hanno frequenza di oscillazioni elevata.

Parametri:  $a = 2$   $b = 4$   $R = 3$

Condizione iniziale  $x_0 = [10 \ -10 \ -1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$



# Controllore linearizzante con 4 motori e uscite $[x \ y \ z \ \psi]$

Per il sistema MIMO studiato si deriva ogni uscita due volte  $[x \ y \ z \ \psi]$  e si ottiene una forma matriciale dalla quale per inversione si ottiene l'ingresso

- E è non singolare
- Il grado relativo del sistema è 8
- Il sistema non ha ZERO DINAMICA

Controllo linearizzante

$$u = -E^{-1}(x)\Gamma(x) + E^{-1}(x)v$$

Nuove variabili

$$\xi = h(x) = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \\ \xi_5 \\ \xi_6 \\ \xi_7 \\ \xi_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ u \cdot \cos(\psi) - v \cdot \sin(\psi) \\ y \\ v \cdot \cos(\psi) + u \cdot \sin(\psi) \\ z \\ w \\ \psi \\ r \end{bmatrix}$$

Controllore per inseguimento riferimento

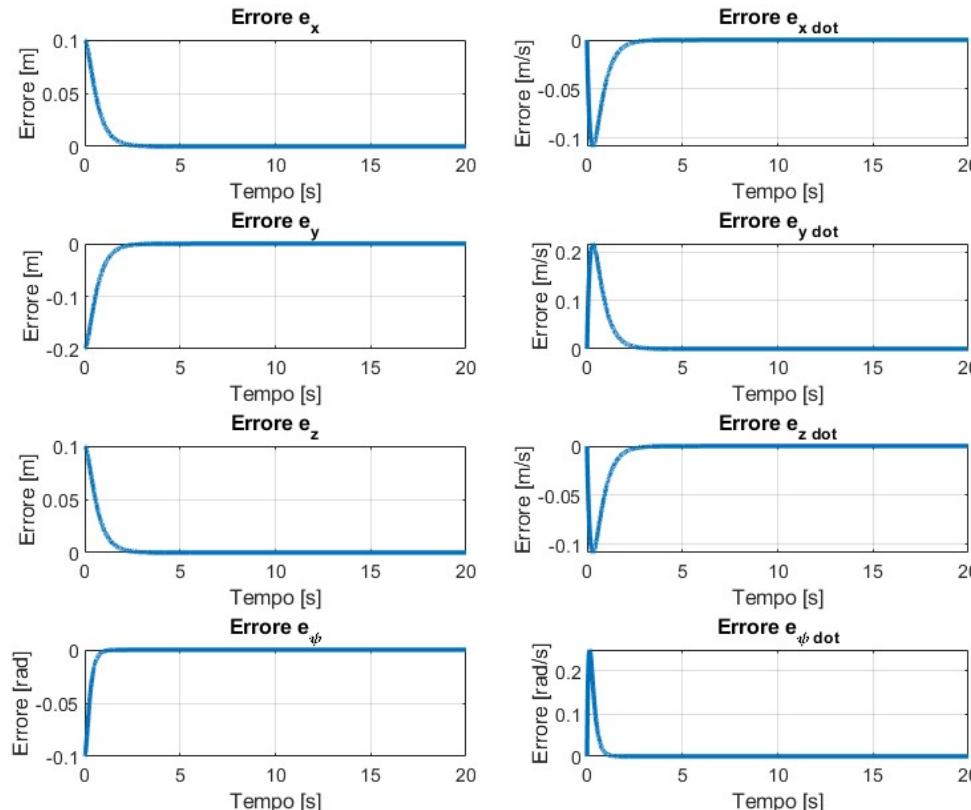
$$v = ref^{(r)} + K \cdot e$$
$$v = \begin{bmatrix} x^{(2)} \\ y^{(2)} \\ z^{(2)} \\ \psi^{(2)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 10 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 50 & 15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \\ e_\psi \end{bmatrix}$$

Errore  $\longrightarrow e_k = \begin{bmatrix} e_k \\ \dot{e}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{ref} \\ \dot{k}_{ref} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} k \\ \dot{k} \end{bmatrix}$

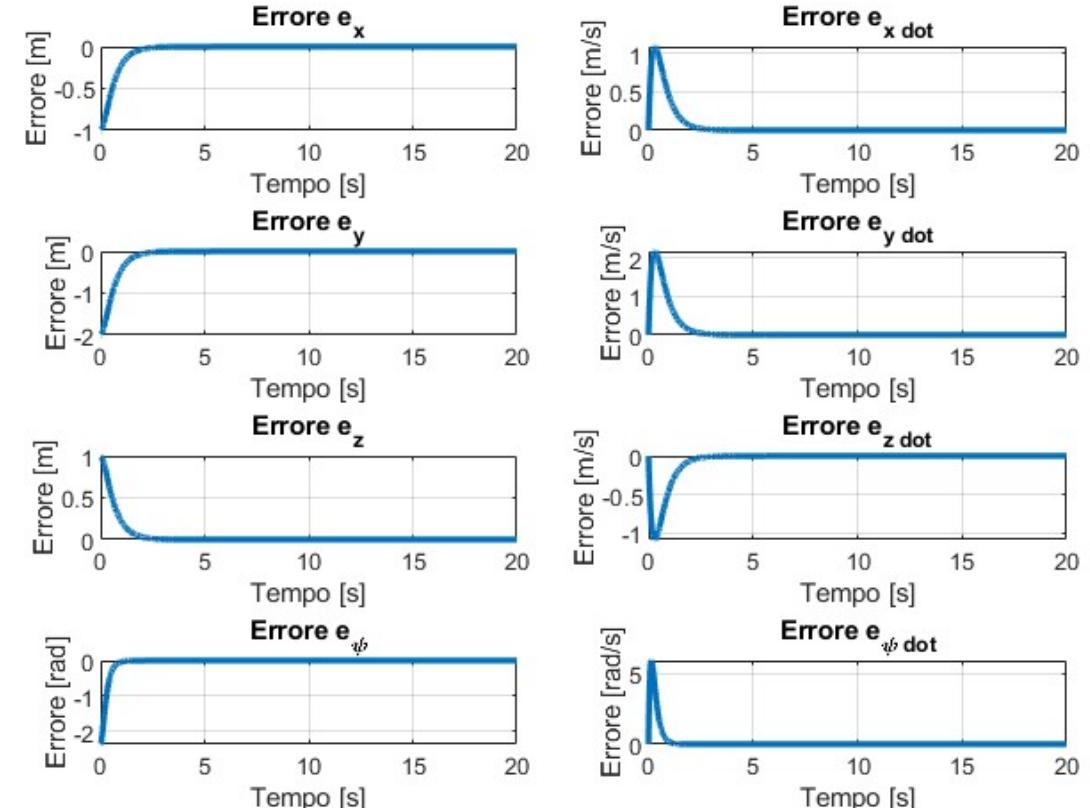
# Analisi di stabilità nell'origine

$$\text{Poli} = [-2 \ -2 \ -2 \ -5 \ -5 \ -5 \ -5 \ -5 \ -10]^T$$

Condizione iniziale  $x_0 = [-0.1 \ 0.2 \ 1.4 \ 0.886 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$



Condizione iniziale  $x_0 = [1 \ 2 \ 0.5 \ pi \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$



A differenza dei controlli precedenti il sistema non ha oscillazioni, il tempo per andare a regime diminuisce e le sovraelongazioni sono limitate (ad eccezione per  $\dot{\psi}$  quando si è lontani dall'equilibrio).

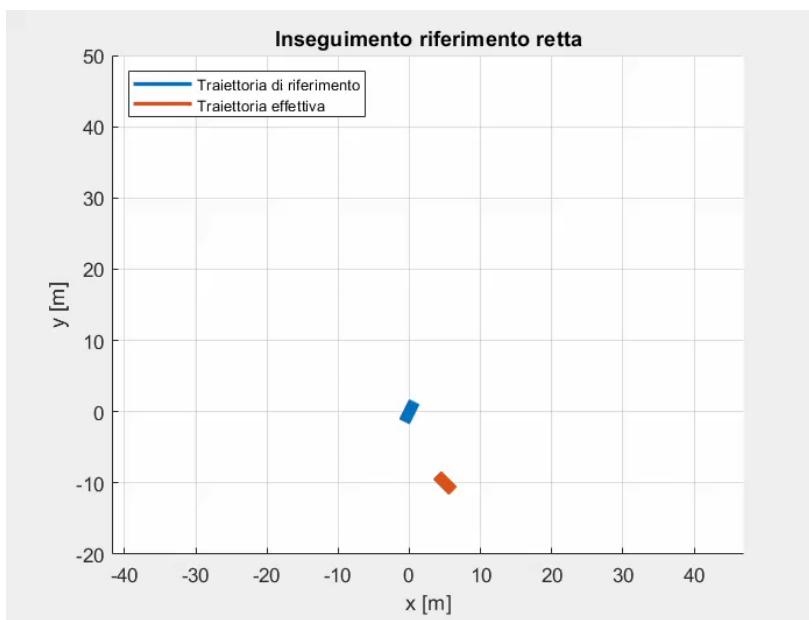
# Controllo di traiettoria - RETTA

Retta  $\longrightarrow$

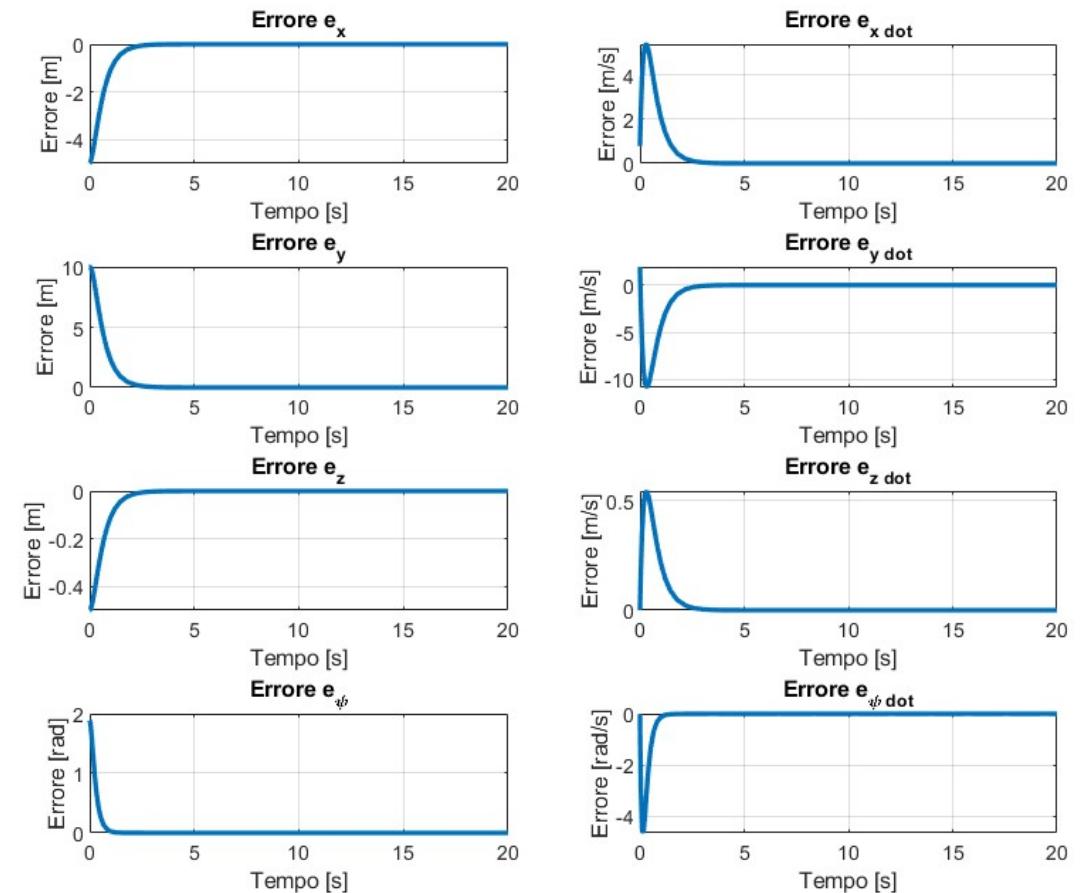
$$\begin{cases} x_r = t \\ y_r = 2t \\ z_r = 0 \end{cases}$$

$$ref = \begin{bmatrix} posa \\ velocità \\ accelerazione \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_r = t & y_r = 2t & z_r = 0 & \psi_r = atan2(y_r, x_r) \\ \dot{x}_r = 1 & \dot{y}_r = 2 & \dot{z}_r = 0 & \dot{\psi}_r = 0 \\ \ddot{x}_r = 0 & \ddot{y}_r = 0 & \ddot{z}_r = 0 & \ddot{\psi}_r = 0 \end{bmatrix}$$

Condizione iniziale  $x_0 = [5 \ -10 \ 0.5 \ -pi/4 \ 0.1 \ 0.2 \ 0 \ 0]^T$



L'errore si annulla in un tempo piccolo per ogni componente nello stato.



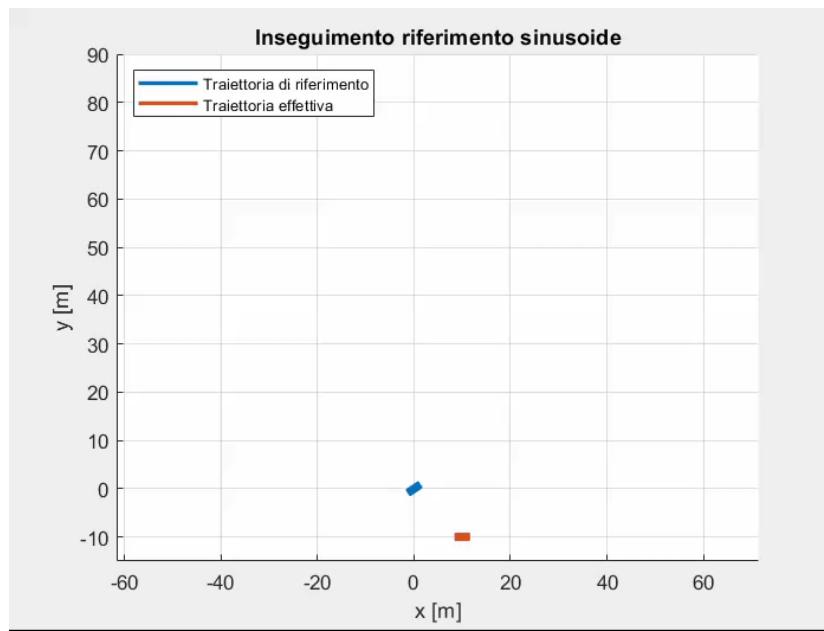
# Controllo di traiettoria - SINUSOIDE

Sinusoida  $\longrightarrow$

$$\begin{cases} x_r = R\sin(at) \\ y_r = bt \\ z_r = 0 \end{cases}$$

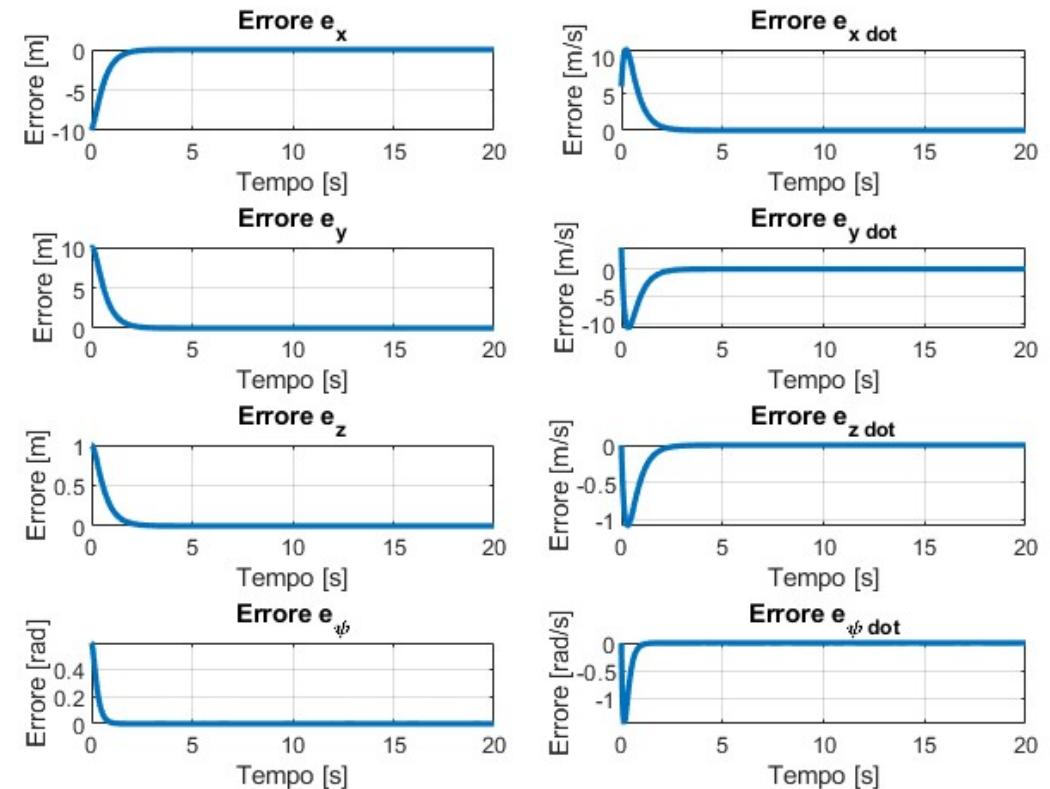
$$ref = \begin{bmatrix} posa \\ velocità \\ accelerazione \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_r = R\sin(at) & y_r = bt & z_r = 0 & \psi_r = \text{atan2}(y_r, x_r) \\ \dot{x}_r = R\cos(at) & \dot{y}_r = b & \dot{z}_r = 0 & \dot{\psi}_r = \frac{Ra^2 b \sin(at)}{R\cos(at)^2 + b^2} \\ \ddot{x}_r = -Ra^2 \cdot \sin(at) & \ddot{y}_r = 0 & \ddot{z}_r = 0 & \ddot{\psi}_r = \frac{Rba^3 \cdot (R^2 a^2 \cdot \sin(at)^2 + R^2 a^2 + b^2) \cdot \cos(at)}{(R^2 b^2 a^2 \cdot \cos(at)^2 + b^2)^2} \end{bmatrix}$$

Parametri:  $a = 2$   $b = 4$   $R = 3$



L'errore si annulla in un tempo piccolo per ogni componente nello stato a differenza del 3 I/O.

Condizione iniziale  $x_0 = [10 \ -10 \ -1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$



# Bibliografia e riferimenti

Tavola 1:

- Kebria, Parham M., et al. "Kinematic and dynamic modelling of UR5 manipulator." *2016 IEEE international conference on systems, man, and cybernetics (SMC)*. IEEE, 2016.
- Dynamic parameters identification of a UR5 robot manipulator – Massimo Sorli
- <https://petercorke.com/toolboxes/robotics-toolbox/>

Tavola 2:

- Antonio Bicchi, P. Salaris, G. Grioli, M. Garabini, A. Sebmi, A. Fagiolini et al. (2022) '*Appunti di Controllo dei Robot*' Università di Pisa, Italia
- Fossen, Thor I. "Marine control systems—guidance, navigation, and control of ships, rigs and underwater vehicles." *Marine Cybernetics, Trondheim, Norway, Org. Number NO 985 195 005 MVA, www.marinecybernetics.com, ISBN: 82 92356 00 2* (2002).
- Bresciani, Matteo, et al. "Dynamic parameters identification for a longitudinal model of an AUV exploiting experimental data." *Global Oceans 2020: Singapore–US Gulf Coast*. IEEE, 2020.

Tavola 3:

- Narasimhan, Mukund, and Sahjendra N. Singh. "Adaptive input–output feedback linearizing yaw plane control of BAUV using dorsal fins." *Ocean Engineering* 33.11–12 (2006): 1413–1430.
- Bian, Xinqian, et al. "Nonlinear feedback control for trajectory tracking of an unmanned underwater vehicle." *The 2010 IEEE International Conference on Information and Automation*. IEEE, 2010.