

RÓWNANIA RUCHU

Na tych laboratoriach skupimy się na scałkowaniu równania ruchu:

$$M\ddot{x} = F - Sx$$

Gdzie x to odkształcenie, M to macierz masowa, zaś S to macierz sztywności.

Na początek przez y oznaczmy prędkość odkształcenia, czyli $y = \dot{x}$. Teraz mamy układ równań pierwszego rzędu:

$$\begin{cases} My' &= F - Sx \\ \dot{x} &= y \end{cases}$$

Zastępując pochodną po lewej stronie przez różnice skończoną mamy:

$$\begin{cases} M \frac{y_{n+1} - y_n}{dt} &= F - Sx \\ \frac{x_{n+1} - x_n}{dt} &= y \end{cases}$$

Po prawej stronie równania możemy użyć x i y z nowej ($n+1$), bądź starej (n) iteracji. W zależności co użyjemy otrzymamy mniej lub bardziej uwikłane równanie, a schemat będzie jawny (explicit) bądź niejawny (implicit).

Uwaga: by porównać różne schematy, każdy schemat napisz w nowej funkcji, która powinna brać następujące argumenty: `void Dynamics(int n, double * x, double * y, double T, double dt);`, gdzie x i y to początkowe wartości x i y , T to całkowity czas całkowania, a dt to krok czasowy.

Schemat prawie jawny (almost explicit)

Na początek wstawmy po prawej stronie wartości ze starej iteracji. Otrzymamy:

$$\begin{cases} My_{n+1} &= My_n + dt(F - Sx_n) \\ x_{n+1} &= x_n + dty_n \end{cases}$$

Zadanie

Napisz funkcję mnożącą przez macierz masową. W pliku `MesLib.h` jest ona zdefiniowana w analogiczny sposób jak macierz sztywności: przez macierz M i stałą Mm . UWAGA: W mnożeniu przez macierz masową, należy także zamrozić wybrane stopnie swobody.

Zadanie

Napisz funkcję całkującą równanie ruchu układu wg. następującego schematu: - Oblicz $b = My + dt(F - Sx)$ - Oblicz $x = x + dty$ - Rozwiąż układ: $My = b$ - Co 10-tą iterację wyświetl belkę.

Zadanie

Przeanalizuj dla jakich dt układ jest stabilny, a dla jakich nie.

Zadanie

Jak wygląda wzór na całkowitą energię układu (energia potencjalna sprężystości + praca sił + energia kinetyczna)? Zróżniczkuj ją po t i pokaż, że jest stała

Zadanie

Wydrukuj w konsoli jak zmienia się całkowita energia układu w czasie.

Schemat pół niejawny (semi-implicit)

Prostą modyfikacją jest użycie po prawej stronie x ze starej iteracji i y z nowej, otrzymując:

$$\begin{cases} My_{n+1} &= My_n + dt(F - Sx_n) \\ x_{n+1} &= x_n + dty_{n+1} \end{cases}$$

Zadanie

Zmodyfikuj kod rozwiązując układ na y przed modyfikacją x -a.

Zadanie

Przeanalizuj dla jakich dt układ jest stabilny. Wydrukuj zmienność energii.

Schemat niejawnny (fully-implicit)

Możemy także po prawej stronie wziąć obie wartości z nowej iteracji, otrzymując:

$$\begin{cases} My_{n+1} &= My_n + dt(F - Sx_{n+1}) \\ x_{n+1} &= x_n + dt y_{n+1} \end{cases}$$

Wstawiając drugie równanie do pierwszego otrzymujemy:

$$My_{n+1} = My_n + dt(F - S(x_n + dt y_{n+1}))$$

Przekształcając:

$$(M + dt^2 S)y_{n+1} = My_n + dt(F - Sx_n)$$

Zadanie

Napisz funkcję mnożącą przez $M + dt^2 S$

Zadanie

Zmodyfikuj kod, by realizował schemat w pełni niejawnny, zamieniając macierz M na $M + dt^2 S$ w obliczeniu y -ka

Zadanie

Przeanalizuj dla jakich dt układ jest stabilny. Wydrukuj zmienność energii.

W pół kroku (midpoint)

Ostatnia z omówionych metod bierze po prawej stronie średnią z wartości w nowej i starej iteracji:

$$\begin{cases} My_{n+1} &= My_n + dt(F - S \frac{x_{n+1} + x_n}{2}) \\ x_{n+1} &= x_n + dt \frac{y_{n+1} + y_n}{2} \end{cases}$$

Po wstawieniu drugiego równania do pierwszego mamy:

$$My_{n+1} = My_n + dt(F - S \frac{x_n + dt \frac{y_{n+1} + y_n}{2} + x_n}{2})$$

Przekształcając:

$$My_{n+1} = My_n + dt(F - S(x_n + dt \frac{y_{n+1} + y_n}{4}))$$

Ostatecznie:

$$(M + \frac{dt^2}{4} S)y_{n+1} = My_n + dt(F - S(x_n + dt \frac{y_n}{4}))$$

Zadanie

Napisz funkcję mnożącą przez $M + \frac{dt^2}{4} S$

Zadanie

Napisz funkcję całkującą równanie ruchu układu wg. następującego schematu: - Oblicz $x = x + \frac{dt}{4} y$ - Oblicz $b = My + dt(F - Sx)$ - Oblicz $x = x + \frac{dt}{4} y$ - Rozwiąż układ: $(M + \frac{dt^2}{4} S)y = b$ - Oblicz $x = x + \frac{dt}{2} y$ - Co 10-tą iterację wyświetl belkę.

Zadanie

Przeanalizuj dla jakich dt układ jest stabilny. Wydrukuj zmienność energii.

Zadanie

Udowodnij, że metoda pół kroku zachowuje energię układu.¹

¹Podpowiedź: tak jak $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ to $x_{n+1}^T M x_{n+1} - x_n^T M x_n = (x_{n+1} - x_n)^T M (x_{n+1} + x_n)$