Федеральное агентство по образованию
Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
Владимирский государственный университет

В.Г. ЧЕРНОВ

ОСНОВЫ ТЕОРИИ НЕЧЕТКИХ МНОЖЕСТВ

Учебное пособие

Владимир 2010

УДК 519.5
ББК 22.126
Ч49

Рецензенты:
Доктор экономических наук, заведующий кафедрой
«Управление и экономико-математическое моделирование», профессор
Ивановского государственного химико-технологического университета
А.Н. Ильченко

Доктор физико-математических наук,
зав. кафедрой «Алгебра и геометрия», профессор
Владимирского государственного университета
Н.И. Дубровин

Печатается по решению редакционного совета
Владимирского государственного университета

Чернов, В. Г.
Ч49 Основы теории нечетких множеств : учеб. пособие / В.Г. Чернов ; Владим. гос. ун-т.- Владимир : Изд-во Владим. гос. ун-та, 2010. – 96 с. – ISBN 978-5-9984-0055-1.

Рассматриваются важнейшие положения теории нечетких множеств. Приводятся основные определения и понятия, описываются операции над нечеткими множествами. Приведены нечеткие отображения, нечеткие числа и основные математические операции над ними. Изложены основные положения нечеткой логики и нечетких высказываний, рассмотрены основные алгоритмы их обработки.

Предназначено для студентов, обучающихся по направлению «Прикладная информатика», а также может быть полезно студентам других направлений при изучении дисциплин, связанных с процессами управления и принятия решений.

Табл. 7. Ил. 46. Библиогр.: 23 назв.

УДК 519.5
ББК 22.126

ISBN 978-5-9984-0055-1

Мир не так прост, как нас пытаются заставить думать. Очертания нечетки, оттенки имеют огромное значение. Ничто не бывает только черным или только белым, зло может оказаться переодетым добром, безобразие – замаскированной красотой и наоборот. Одно никогда не исключает другого. ... Жизнь – это неясное приключение на фоне размытого пейзажа.

Артуро Перес-Реверте
«Фламандская доска»

ВВЕДЕНИЕ

Пожалуй, наиболее поразительным свойством человеческого интеллекта является способность принимать правильные решения в обстановке неполной и нечеткой информации. Построение моделей приближенных рассуждений человека и использование их в компьютерных системах будущих поколений представляет сегодня одну из важнейших проблем науки.

Значительный шаг в этом направлении в 1965 г. был сделан профессором Калифорнийского университета (Беркли) Лотфи А. Заде (Lotfi A. Zadeh). Его работа "Fuzzy Sets", появившаяся в 1965 г. в журнале Information and Control, № 8, заложила основы моделирования интеллектуальной деятельности человека и явилась начальным импульсом в развитии новой математической теории. Основная идея Л. Заде состояла в том, что реальные человеческие рассуждения, опирающиеся на естественный язык, не могут быть описаны в рамках традиционных математических формализмов. Введение нечетких множеств – классов с неточно определенными границами, описываемых функциями принадлежности (обобщающих характеристические функции обычных множеств) – обеспечило основу для развития более гибкого подхода к анализу рассуждений и моделированию сложных гуманистических систем, поведение которых описывается, скорее, лингвистическими, чем числовыми переменными.

Эта статья инициировала огромный поток публикаций в области нечеткой математики, который не иссякает до сих пор. В шестидесятые-семидесятые годы идеи Л. Заде встретили весьма настороженный, а порой и холодный прием в различных научных кругах, особенно в среде «чистых математиков». Однако практический потенциал теории нечетких множеств и нечеткой логики, их способность моделировать гибкие и неточные ограничения – частичное проявление свойств. Плавный переход из одной ситуации в другую привлекли в эту область целую армию исследователей. За прошедший период разработаны приложения методов и моделей нечеткой математики в распознавании образов, анализе изображений, экспертных системах, системах поддержки принятия решений, в экономике и многих других областях. Особенно следует отметить модели нечеткого управления, которые нашли широкое промышленное применение начиная от бытовой техники (пылесосы и стиральные машины с нечеткой логикой) и кончая управлением сложными технологическими процессами (управление доменными процессами, атомными энергоблоками) и динамическими объектами (поезда метро, автомобили, вертолеты, роботы и пр).

Другим словами, новые подходы позволили расширить сферу приложения автоматизации за пределы применимости классической теории. В этом плане любопытна точка зрения Л. Заде: « Я считаю, что излишнее стремление к точности стало оказывать действие, сводящее на нет теорию управления и теорию систем, так оно приводит к тому, что исследования в этой области сосредоточиваются на тех и только тех проблемах, которые поддаются точному решению. В результате многие классы важных проблем, в которых данные, цели и ограничения являются слишком сложными или плохо определенными для того, чтобы допустить точный математический анализ, оставались и остаются в стороне по той причине, что они не поддаются математической трактовке. Для того чтобы сказать что-либо существенное для проблем подобного рода, мы должны отказаться от наших требований точности и допустить результаты, которые являются несколько размытыми или неопределенными».

Проблема принятия решений или выбора на множестве альтернативных вариантов – одна из самых распространенных задач, возникающих практически во всех сферах деятельности: технической, экономической, социальной и т.д.

Одной из наиболее важных особенностей прикладных задач выбора альтернатив является нечеткий характер критериев выбора альтернатив, их параметров, ограничений, накладываемых на возможность выбора тех или иных вариантов. Вследствие этого во многих случаях оказывается невозможным построение адекватной строгой математической модели исследуемой проблемы, что влечет за собой необходимость использования экспертных оценок, которые часто оказываются единственной информацией для принятия решений. Практически любое экспертное заключение, сделанное даже по точным объективным данным, гораздо более неопределенно, но в то же время содержит качественные обобщения и прогнозы, значимые для принятия решений. Естественно, возникает необходимость разработки методов, позволяющих эффективно получать и обрабатывать нечеткую экспертную информацию. Не менее важными и часто встречающимися на практике считаются задачи, в которых эксперт не может не только установить степень предпочтительности одного варианта над другими, но даже четко сравнить альтернативы и может сделать это лишь с некоторой степенью уверенности.

Разработанные в настоящее время количественные методы принятия решений (такие как максимизация ожидаемой полезности, минимаксная теория, методы максимального правдоподобия, теория игр, анализ «затраты – эффективность» и другие) помогают выбирать наилучшие из множества возможных решений лишь в условиях одного конкретного вида неопределенности или в условиях полной определенности. К тому же большая часть существующих методов для облегчения количественного исследования в рамках конкретных задач принятия решений базируется на крайне упрощенных моделях действительности и излишне жестких ограничениях, что уменьшает ценность результатов исследований и часто приводит к неверным решениям. Применение для оперирования с неопределенными величинами аппарата теории вероятности приводит к тому, что фактически неопределенность независимо от ее природы отождествляется со случайностью, между тем как основным источником неопределенности во многих процессах принятия решений является нечеткость или расплывчатость (fuzzines). В отличие от случайности, которая связана с неопределенностью, касающейся принадлежности или непринадлежности некоторого объекта к нерасплывчатому множеству, понятие «нечеткость» относится к классам, в которых могут быть различные градации степени принадлежности, промежуточные между полной принадлежностью и непринадлежностью объектов к данному классу.

Вопрос выбора адекватного формального языка – очень важная задача, поэтому следует отметить преимущества описания процесса принятия решений в сложной многоуровневой иерархической системе на основе теории нечетких множеств. Этот язык дает возможность адекватно отразить сущность самого процесса принятия решений в нечетких условиях для многоуровневой системы, оперировать с нечеткими ограничениями и целями, а также задавать их с помощью лингвистических переменных. Поэтому математический аппарат теории нечетких множеств принят в данной работе как основной аппарат описания процессов принятия решений в условиях неопределенности.

1. ТЕОРИЯ НЕЧЕТКИХ МНОЖЕСТВ. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ

1.1 Определение нечеткого множества

Теория нечетких множеств представляет собой обобщение и переосмысление важнейших направлений классической математики. У ее истоков лежат идеи и достижения многозначной логики, которая указала на возможности перехода от двух к произвольному числу значений истинности и поставила проблему оперирования понятиями с изменяющимся содержанием.

Подход к формализации понятия нечеткого множества состоит в обобщении понятия принадлежности. В теории классических множеств существует несколько способов задания множества. Одним из них считается задание с помощью характеристической функции, определяемой следующим образом (рис. 1.1).

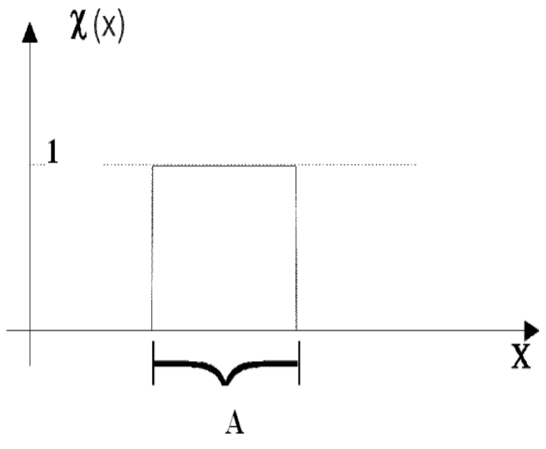


Рис. 1.1

$$\chi(x) = \begin{cases} 1, x \in A \\ 0, x \notin A \end{cases}$$

Пусть U - универсальное множество*, из элементов которого образуются другие множества, рассматриваемые в данном классе задач, например множество всех целых чисел, множество всех гладких функций и т. д. Характеристическая функция множества $A \subseteq U$ - это функция значения, которой указывают, является ли элемент $x \in U$ элементом множества A, и определяется следующим образом. Особенность этой функции – в бинарном характере ее значений.

Например. Для множества A чисел $2 \leq x \leq 4$ характеристическая функция имеет вид, представленный рис. 1.2.

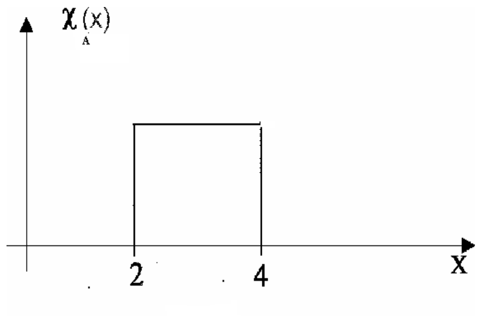


Рис. 1.2

Естественно, что при таком подходе нет места предположению, что «x находится приблизительно в пределах от 2 до 4». Для разрешения этой ситуации Л. Заде расширил двузначную оценку 0 или 1 до неограниченной многозначной оценки выше 0 и ниже 1 на [0,1] и впервые ввел понятие «нечеткого множества», заменив характеристическую функцию на функцию принадлежности, которая может принимать любые значения в интервале [0,1] для $x \in A$. В соответствии с этим элемент x_i множества U может не принадлежать A $(\mu_A = 0)$, может быть элементом A в небольшой степени (μ_A близко к нулю), может более или менее принадлежать A (μ_A не слишком близко к 0 , не слишком близко к единице), может быть в значительной степени элементом A (μ_A близко к единице) или, наконец, может быть элементом A (μ_A=1). С точки зрения характеристической функции нечеткие множества – есть естественное обобщение обычных множеств, когда мы отказываемся от бинарного характера этой функции и предполагаем, что она может принимать любые значения на отрезке [0,1]. Множество значений x, на котором определена функция принадлежности, получило название нечеткого множества.

Пусть U - универсальное множество, тогда нечетким множеством $\tilde{A}$ на множестве U называется совокупность пар вида $\tilde{A} = \{\mu_A(x)/x\}$, где $\mu_A(x)$ - функция принадлежности.

---

*\ Множество U называется универсальным, если для любого $A \subset U$ выполняются условия $A \cap U = A$ и $A \cup U = U$.

Чаще всего определение нечеткого множества объясняют следующим образом: величина $\mu_A(x)$ обозначает субъективную оценку степени принадлежности *x* множеству *A*, например $\mu_A(x)$=0,8 означает, что *x* на 80 % принадлежит *A*.

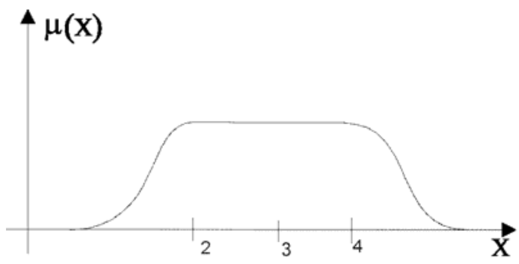


Рис. 1.3

Теперь предположение, что «*x* приблизительно лежит в пределах от 2 до 4», может быть представлено соответствующей функцией принадлежности (рис. 1.3).

Основные характеристики нечетких множеств

Пусть $\tilde{A} = \{\mu_A(x)/x\}$ - нечеткое множество на универсальном множестве *U*, $\mu_A(x) \in [0,1]$. Величина $\sup\limits_{x \in U} \mu_A(x)$ называется высотой нечеткого множества $\tilde{A}$. Нечеткое множество $\tilde{A}$ нормально, если его высота равна 1, т.е. верхняя грань его функции принадлежности равна 1 ($\sup\limits_{x \in U} \mu_A(x) = 1$). При $\sup\limits_{x \in U} \mu_A(x) < 1$ нечеткое множество называется субнормальным. Нечеткое множество $\tilde{A}$ пустое, если $\forall x \in U \quad \mu_A(x) = 0$. Непустое субнормальное множество можно нормализовать по формуле $\mu_A(x) = \dfrac{\mu_A(x)}{\sup \mu_A(x)}$. Нечеткое множество унимодально, если $\mu_A(x) = 1$ только для одного $x \in U$. Носителем нечеткого множества $\tilde{A}$ считается обычное подмножество со свойством $\mu_A(x) > 0$, т.е. носитель Supp $\tilde{A} = \{x / \mu_A(x) > 0\} \forall x \in U$. Элементы $x \in U$, для которых $\mu_A(x) = 0,5$, называются точками перехода множества $\tilde{A}$.

Лингвистическая и нечеткая переменные

Одной из областей применения теории нечетких множеств можно назвать человеко-машинные системы управления. Диалог в таких системах немыслим без использования языков, близких к естественному, способных описывать нечеткие категории, приближенные к человеческим понятиям и представлениям. В этой связи целесообразно применять понятие лингвистической переменной, введенной впервые Л. Заде [1]. Подобные лингвистические переменные позволяют адекватно отразить приблизительное словесное описание предметов и явлений в том случае, когда точное детерминированное описание отсутствует. При этом следует учесть, что многие нечеткие категории, описанные лингвистически, зачастую не менее информационны, чем точное описание.

В качестве примера конкретная фраза «температура воды равна +5 ^{0}С может быть заменена приблизительной фразой «температура воды низкая». В этом смысле слово «низкая» можно рассматривать как лингвистическое значение переменной «температура», имея в виду при этом, что лингвистическое значение играет такую же роль, как и численное значение «+5 ^{0}С». То же самое можно сказать о лингвистических значениях «очень низкая», «чуть больше, чем низкая», «почти средняя» и т.д., если их сопоставить с численными значениями +3, +6,5, +12,...

Совокупность значений лингвистической переменной составляет терм-множество этой переменной. Это множество может иметь вообще говоря, бесконечное число элементов, но на практике, естественно, оно конечно. Например, терм - множество лингвистической переменной «температура» можно записать так: (температура)={очень низкая $\vee$ почти низкая $\vee$ низкая $\vee$ почти средняя $\vee$ средняя $\vee$ ...$\vee$ высокая $\vee$ очень высокая}.

Отметим, что в случае лингвистической переменной «температура» числовая переменная «температура», принимающая, например, значения [+3, +5, +6,5, +12, +17,...,+50, +70], будет так называемой базовой переменной лингвистической переменной «температура». Соответствующее множество значений, называется множеством базовых значений, или базовым множеством. При этом такое, например, лингвистическое значение, как «высокая», можно интерпретировать как название некоторого нечеткого ограничения на значение базовой переменной. Именно это ограничение будем считать смыслом лингвистического значения «высокая». Соответственно функция принадлежности представляет числовую характеристику, количественно определяющую представление субъекта относительно нечеткого ограничения.

Таким образом, нечеткую переменную определяют ее название, область определения, описание ограничений на возможные значения нечеткой переменной, которые задаются функцией принадлежности.

Формальное описание нечеткой переменной будет представлено тройкой

$$< L, D, C_L > ,$$

где L - наименование нечеткой переменной ;

D - область ее определения ;

$C_L = \{\mu_L(x)/x\}$ - нечеткое множество на D.

Пример. Пусть температура среды оценивается с помощью понятий « низкая»,«средняя», «высокая», при этом минимальная температура оценивается как +3 ^{0}C , а максимальная +60 ^{0}C. Функции принадлежности, соответствующие этим понятиям, приведены на рис. 1.4. Тогда нечеткая переменная будет задана следующей совокупностью

$$< \text{температура}, [\,3{,}60\,]\,,\ \mu_1(x)/x\,,\ \mu_2(x)/x\,,\ \mu_3(x)/x >$$

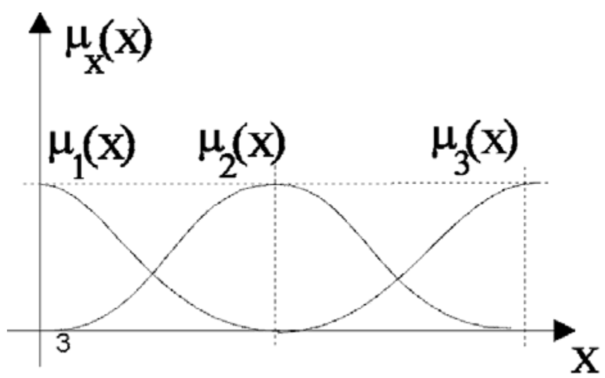


Рис. 1.4

Чтобы определить лингвистическую перемененную, необходимо задать ее имя, множество значений (терм-множество), представляющих собой наименование нечетких переменных, областью определения каждой из которых будет множество D. Кроме этих определений необходимо задать правила, с помощью которых из имеющихся элементов терм-множеств могут получаться новые, а также правила, согласно которым значения лингвистической переменной ставятся в соответствие «нечеткие множества». Формально это представляется так

$$< L, T, D, G , M >,$$

где L - наименование лингвистической переменной;

T - множество значений лингвистической переменной (терм-множество), определенное на D;

G - грамматика, совокупность правил, позволяющая оперировать элементами терм-множества T, в частности генерировать новые осмысленные термы. Множество $T \cup G(T)$, где G(T) - множество сгенерированных термов, называется расширенным терм-множеством лингвистической переменной;

M - процедура, позволяющая установить соответствие между лингвистическим значением и нечетким множеством, т.е. правила вычисления функции принадлежности нового значения, определенного G.

Вернемся к примеру. Пусть определяется новое значение - «малая или средняя температура». Грамматика G определяет правило построения нового значения (рис. 1.5, утолщенная линия), а процедура M определяет значения новой функции принадлежности $\mu'(x) = \mu_1(x) \cup \mu_2(x)$ (утолщенная кривая, U - операция объединения, формализующая логическую связку ИЛИ).

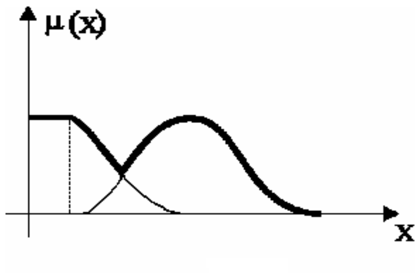


Рис. 1.5

1.2. Основные методы построения функций принадлежности

В основании теории из любой области естествознания лежит очень важное основополагающе для ее построения понятие элементарного объекта. Например, для механики - это материальная точка, для электродинамики - вектор напряженности поля, для теории автоматического управления - передаточная функция. Для теории нечетких множеств основополагающим понятием служит понятие нечеткого множества, которое характеризуется функцией принадлежности. С помощью нечетких множеств можно строго описывать присущие для языка человека расплывчатые понятия, «без формализации которых нет надежды существенно продвинуться вперед в моделировании интеллектуальных процессов» [2]. Основной трудностью, мешающей интенсивному применению теории нечетких множеств при решении практических задач, является то, что функция принадлежности должна быть задана вне самой теории и, следовательно, ее адекватность не может быть проверена непосредственно средствами теории. В каждом в настоящее время известном методе построения функции принадлежности формулируются свои требования и обоснования к выбору именно такого построения.

Фиксирование конкретных значений из интервала [0,1] , которыми оценивается степень принадлежности, имеет субъективный характер. С одной стороны, для экспертных методов существенным можно назвать характер измерений (первичный или производный) и тип шкалы [3], в которой получают информацию от эксперта и которая определяет допустимый вид операций, применяемых к экспертной информации. С другой стороны, имеются два типа свойств: те, которые можно непосредственно измерить, и те, которые являются качественными и требуют попарного сравнения объектов, обладающих рассматриваемыми свойствами, чтобы определить их относительное место по отношению к рассматриваемому понятию. Таким образом, построение функции принадлежности выполняется по экспертным оценкам. При этом можно выделить две группы методов - прямые и косвенные.

Прямые методы определяются тем, что эксперт непосредственно задает правила определения значений функции принадлежности. Целесообразность прямых методов обосновывается в [4]: «По своей природе оценка является приближением. Во многих случаях достаточна весьма приближенная характеризация набора данных, поскольку в большинстве основных задач, решаемых человеком, не требуется высокая точность. Человеческий мозг использует допустимость такой неточности, кодируя информацию, достаточную для задачи (или достаточную для решения), элементами нечетких множеств, которые приближенно описывают исходные данные. Поток информации, поступающий в мозг через органы зрения, слуха, осязания и др., суживается таким образом в тонкую струйку информации, необходимой для решения поставленной задачи с минимальной степенью точности».

В косвенных методах значения функции принадлежности выбираются таким образом, чтобы удовлетворить заранее сформулированным условиям. Экспертная информация является только исходной информацией для дальнейшей обработки. Дополнительные условия могут налагаться как на вид получаемой информации, так и на процедуру обработки.

Как правило, прямые методы используются для описания понятий, которые характеризуются измеряемыми параметрами. Однако следует помнить о возможных субъективных искажениях и поэтому прямые методы должны использоваться только в том случае, когда такие ошибки незначительны или маловероятны.

Косвенные методы более трудоемкие, но они мене чувствительны относительно искажений в ответах. И, наконец, последнее замечание. Функция принадлежности может отражать мнение одного (уникального) эксперта или же мнение группы экспертов, следовательно, круг методов может быть расширен, так как возможны прямые и косвенные методы для одного эксперта, прямые и косвенные для группы экспертов.

Хотя функции принадлежности отражают субъективные представления экспертов, необходимо для устранения неоднозначности определить общие правила их построения, которые должны выполняться для исходных функций принадлежности, создаваемых в начале решения некоторой задачи.

1.2.1. Требования к функциям принадлежности

Пусть $T=\{\tau_i\}$, $i=\overline{1,I}$ - базовое множество лингвистической переменной; α_i- соответствующая ему нечеткая переменная; S_i - носитель нечеткого множества $\tilde{A}_i=\{\mu_X(x)/x\}$. Договоримся о естественной упорядоченности множества Т, при которой терм, имеющий носитель, расположенный левее на числовой оси, имеет меньший номер. Тогда относительно функции принадлежности можно выдвинуть следующие условия.

1. Функция принадлежности должна быть положительной, т.е.

$$(\forall x\in S_i, \quad i=\overline{1,I}, \quad \mu_{\tilde{A}_i}(x)\geq 0).$$

2. Если это не оговаривается дополнительно, функция принадлежности должна быть нормальной

$$Sup\mu_{\tilde{A}_i}(x)=1. \qquad (1.1)$$

Если условие нормальности принято, то запрещается использование функций принадлежности, не удовлетворяющих условию (1.1) (рис. 1.6). Следует отметить, что это условие относится к исходным функциям принадлежности, так как при выполнении различных операций над функциями принадлежности условие (1.1) может быть нарушено. Функция принадлежности 3 относится к запрещенным (см. рис. 1.6).

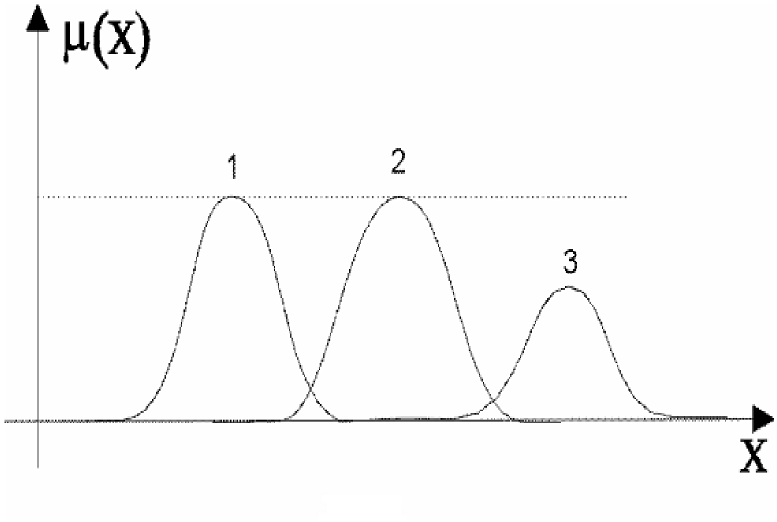


Рис. 1.6

3. В базовом множестве термов T запрещается использование пар термов, представленных рис. (1.7, *а*, *б*). В первом случае отсутствует естественная разграничиваемость понятий, представленных соседними термами τ_i и τ_{i+1}, во втором - участку [*c*, *d*] из области определения не поставлено в соответствие какое- либо понятие.

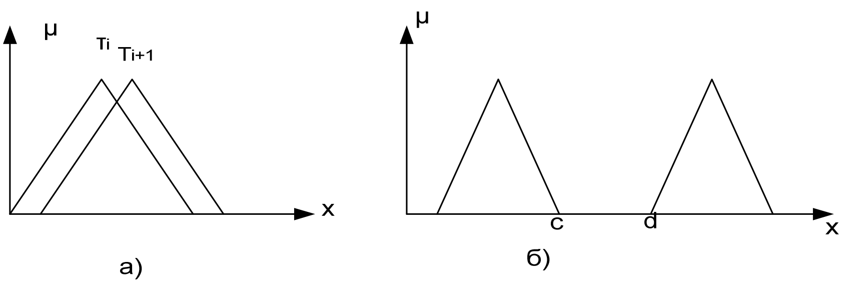


Рис. 1.7

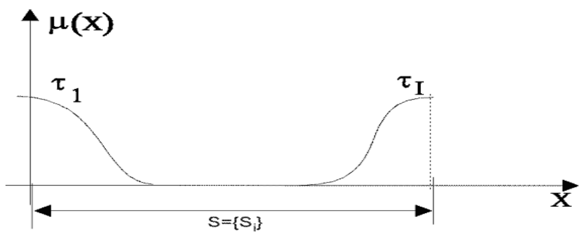


Рис. 1.8

4. Термы с минимальными и максимальными номерами не могут соответствовать колоколообразным функциям принадлежности. Для этих термов функции принадлежности имеют S-образный вид (рис. 1.8).

5. Для функций принадлежности, соответствующих соседним термам τ_i и τ_{i+1}, максимум одной должен совпадать с минимумом другой, а точка пересечения соответствовать точке перехода (рис. 1.9).

6. Функция принадлежности может задаваться на непрерывном или дискретном носителе.

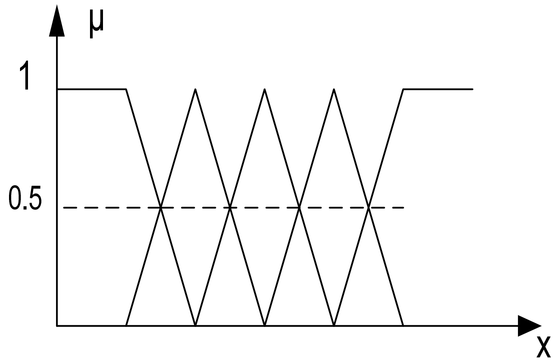


Рис. 1.9

1.2.2. Прямые методы для одного эксперта

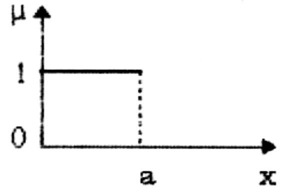
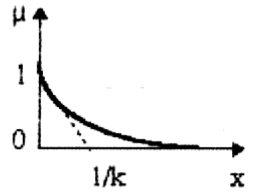
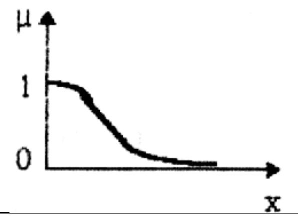
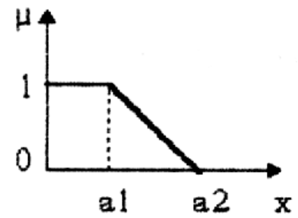
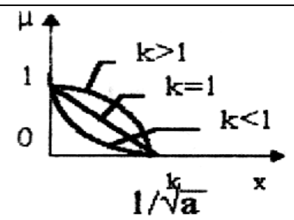
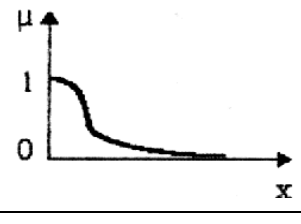
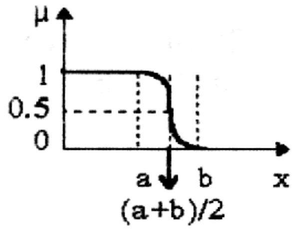
Прямые методы для одного (уникального) эксперта состоят в непосредственном определении степени принадлежности для исследуемых объектов или непосредственном назначении функции (правила), позволяющей вычислить ее значения, т.е. эксперт непосредственно задает правила определения значений функции принадлежности, характеризующей данное понятие. Эти значения согласуются с его предпочтениями на множестве объектов U следующим образом:

- для любых $x_1, x_2 \in U$, $\mu_A(x_1) < \mu_A(x_2)$ тогда и только тогда, если x_2 предпочтительнее x_1 , т.е. в большей степени характеризуется понятием A;

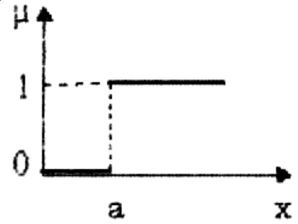
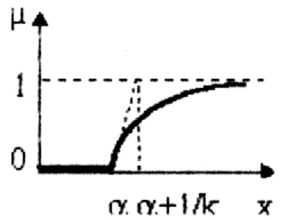
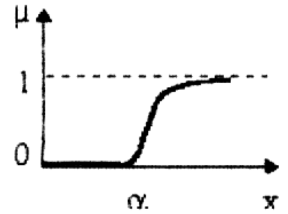
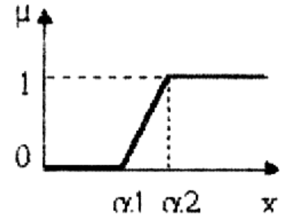
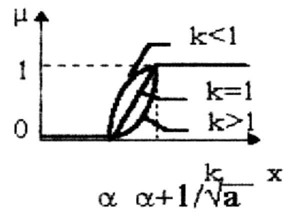
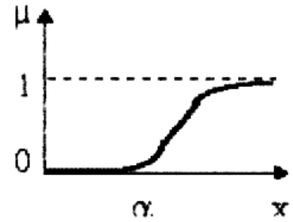
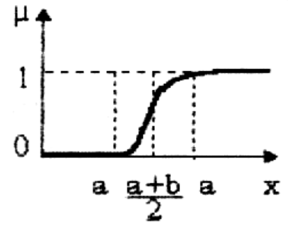
- для любых $x_1, x_2 \in U$, $\mu_A(x_1) = \mu_A(x_2)$ тогда и только тогда, если x_1 и x_2 безразличны относительно понятия A.

Использование типовых функций принадлежности

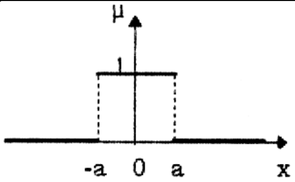
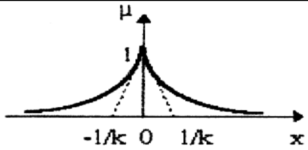
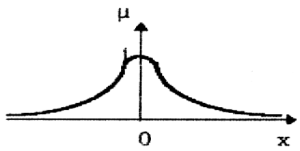
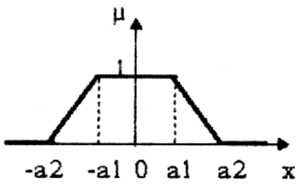
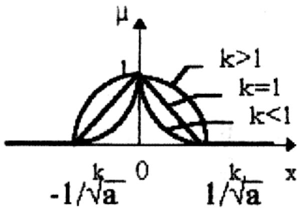
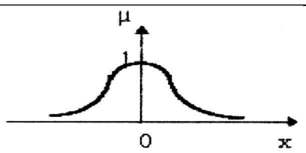
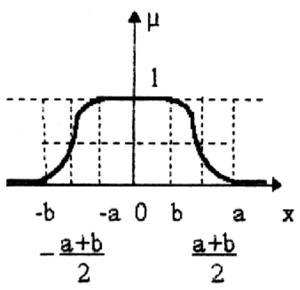
К настоящему времени накоплен достаточно широкий набор различных вариантов функций принадлежности для самых разнообразных нечетких утверждений [5 -7] (см. таблицу). Безусловно, выбор функции принадлежности и их параметров определяется в большей степени опытом, интуицией и другими субъективными факторами лица, принимающего решения. Именно здесь возникают новые, связанные с неоднозначностью и другого рода нечеткостью, неопределенности, которые носят субъективный характер.

График	***Формула***
Функции степеней принадлежности утверждения «величина x малая»	
	$\mu(x) = \begin{cases} 1, 0 \le x \le a; \\ 0, x > a \end{cases}$
	$\mu(x) = e^{-\mathrm{kx}};\ k > 0$
	$\mu(x) = e^{-\mathrm{kx}^2};\ k > 0$
	$\mu(x) = \begin{cases} 1,\ 0 \le x \le a1; \\ \dfrac{a2 - x}{a2 - a1},\ \ a1 \le x \le a2; \\ 0,\ a2 < x \end{cases}$
	$\mu(x) = \begin{cases} 1 - ax^{\mathrm{k}},\ 0 \le x \le 1/\sqrt[\mathrm{k}]{a}; \\ 0,\ 1/\sqrt[\mathrm{k}]{a} \end{cases}$
	$\mu(x) = 1/\left(1 + kx^2\right);\ \ k > 1$
	$\mu(x) = \begin{cases} 1,\ 0 \le x \le a; \\ 0.5 - 0.5 \cdot \sin\left\{\pi\left[\mathrm{x}\text{-}(\mathrm{a}+\mathrm{b})/2\right]/(b-a)\right\}, \\ \qquad a \le x \le b; \\ 0,\ b \le x \end{cases}$

Продолжение таблицы

График	***Формула***
Функции степеней принадлежности утверждения «величина x большая»	
	$\mu(x)=\begin{cases}0,0\le x\le a;\\ 1,x>a\end{cases}$
	$\mu(x)=\begin{cases}0,\ 0\le x\le \alpha;\\ 1-e^{-k(x-\alpha)},\ \alpha\le x,k>0\end{cases}$
	$\mu(x)=\begin{cases}0,\ 0\le x\le \alpha;\\ 1-e^{-\mathrm{k}(\mathrm{x}-\alpha)^2},\ \alpha\le x,k>0\end{cases}$
	$\mu(x)=\begin{cases}0,\ 0\le x\le \alpha1;\\ (x-\alpha1)/(\alpha2-\alpha1),\ \alpha1\le x\le \alpha2;\\ 1,\ \alpha2<x\end{cases}$
	$\mu(x)=\begin{cases}0,\ 0\le x\le \alpha1;\\ a(x-\alpha)^{\mathrm{k}},\ \alpha\le x\le \alpha+1/\sqrt[\mathrm{k}]{a};\\ 1,\ \alpha+1/\sqrt[\mathrm{k}]{a}\le x\end{cases}$
	$\mu(x)=\begin{cases}0,\ 0\le x\le \alpha;\\ \dfrac{k(x-\alpha)^2}{1+k(x-\alpha)},\ \alpha\le \mathrm{x}\le\infty\end{cases}$
	$\mu(x)=\begin{cases}0,\ 0\le x\le a;\\ 0.5+0.5\cdot\sin\{\pi[\mathrm{x}\text{-}(\mathrm{a}+\mathrm{b})/2]/(b-a)\},\\ \qquad a\le x\le b;\\ 1,\ \mathrm{a}\le x\end{cases}$

Окончание таблицы

График	***Формула***
Функции степеней принадлежности утверждения «величина |x| малая»	
	$\mu(x)=\left[\begin{array}{l} 0,\ -\infty<x<-a \\ 1,\ \text{-}a\le x\le a \\ 0,\ a<\mathrm{x}<\infty \end{array}\right.$
	$\mu(x)=\left[\begin{array}{l} e^{\mathrm{kx}},\ \text{-}\infty<x\le 0; \\ e^{-\mathrm{kx}},\ 0\le x<\infty, k>1 \end{array}\right.$
	$\mu(x)=e^{-\mathrm{kx}^2}$
	$\mu(x)=\left[\begin{array}{l} 0,\ -\infty\le x\le -a2; \\ (a2+x)/(\mathrm{a}2-a1),\ -a2\le x\le -a1; \\ 1,\ -a1\le x\le a1; \\ (a2-x)/(a2-a1),\ a1\le x\le a2; \\ 0,\ a2\le x<\infty \end{array}\right.$
	$\mu(x)=\left[\begin{array}{l} 0,\ -\infty<x\le -1/\sqrt[\mathrm{k}]{a}; \\ 1-a(-x)^{\mathrm{k}},\ -1/\sqrt[\mathrm{k}]{a}\le x\le 0; \\ 1-a(x)^{\mathrm{k}},\ 0\le x\le 1/\sqrt[\mathrm{k}]{a}; \\ 0,\ 1/\sqrt[\mathrm{k}]{a}\le x\le\infty \end{array}\right.$
	$\mu(x)=1/\left(1+kx^2\right);\ k>1$
	$\mu(x)=\left[\begin{array}{l} 0,\ -\infty<x\le -b; \\ 0.5+0.5\cdot\sin\left\{\pi\left[\mathrm{x}+(a+b)/2\right]/(b-a)\right\}, \\ \qquad\qquad -b\le x\le -a; \\ 1,\ -a\le x\le a; \\ 0.5-0.5\cdot\sin\left\{\pi\left[\mathrm{x}-(a+b)/2\right]/(b-a)\right\}, \\ \qquad\qquad a\le x\le b; \\ 0,\ b\le\mathrm{x}<\infty \end{array}\right.$

Тем не менее, имея некоторый набор типовых функций принадлежности, можно подобрать ту, которая будет в достаточной мере отвечать представлениям лица, её выбирающего. Существенным является то, что для этих функций заранее известны их аналитические представления, что позволяет вычислить их значения в любой точке области определения. В то же время определенные трудности возникают при вычислении параметров аналитического представления функции принадлежности, соответствующих конкретным лингвистическим значениям.

Для расчета параметров функций принадлежности можно предложить достаточно простую методику, которая вытекает из рассмотрения функций принадлежности, приведенных в таблице.

Все функции могут быть разбиты на два класса:

— с конечным носителем, т.е. когда точно можно указать элемент x, при котором $\mu_A(x) = 0$;

— с бесконечным носителем , для которых $\lim\limits_{|x| \to \infty} \mu_A(x) = 0$.

В первом случае эксперт или лицо, принимающее решение, однозначно определяет носитель нечеткого множества или базовое множество, соответствующее определенному лингвистическому значению. Во втором эксперт должен ответить на вопрос типа: «Какое минимальное значение должна иметь функция принадлежности, чтобы не считать элемент «x» принадлежащим данному множеству?» Ответ на этот вопрос в дальнейшем определит параметры функции принадлежности. Вторым шагом является указание координат плато функции принадлежности (c, d) (рис. 1.10).

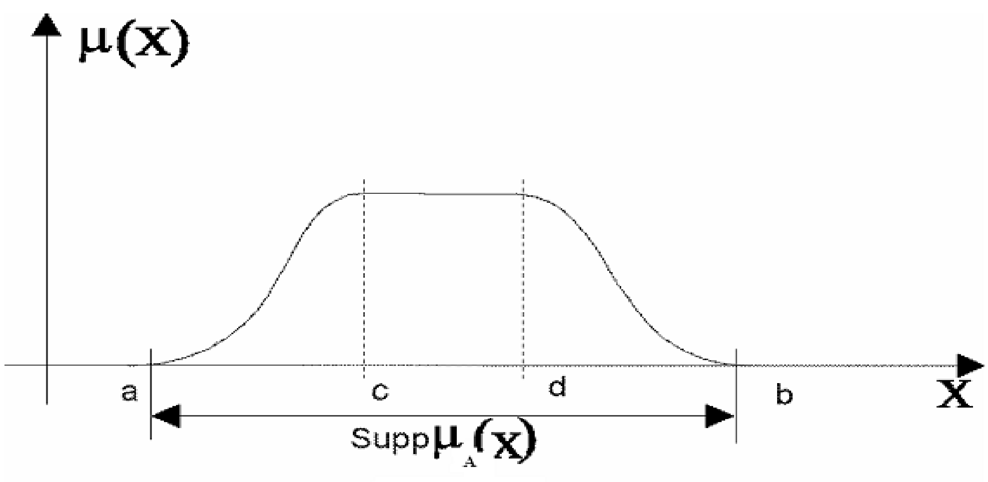


Рис. 1.10

Для многих аналитических представлений (см. таблицу) этих параметров достаточно для расчета значений функций принадлежности в любой точке. Однако для экспоненциальных, параболических и гиперболических форм представления функций принадлежности этого оказывается недостаточно. Тогда эксперту можно предложить следующий вопрос: «Для какого значения x его принадлежность нечеткому множеству оценивается равной 0.5?». Пусть эксперт выбрал функцию принадлежности вида $\mu_X(x) = e^{-kx^2}$. Тогда при $x = x_{0.5}$ $\mu_X(x) = 0.5$ соответственно

$$k = -\frac{\ln 0,5}{(x_{0.5})^2}.$$

Если при ответе на предыдущий вопрос для функции принадлежности было указано значение ε_1, то носитель нечеткого множества будет определяться из соотношения

$$x_{\text{н}} = \pm\sqrt{\frac{\ln \varepsilon_1}{\ln 0.5}(x_{0,5})^2}.$$

И, наконец, может быть использована методика, предложенная в [8], которая основана на анализе двух соседних лингвистических значений. Пусть рассматриваются два лингвистических значения j-1, j и соответствующие термы (рис. 1.11). Определяются носители ($a_{j\text{-}1}$, $b_{j\text{-}1}$), (a_j, b_j), плато ($c_{j\text{-}1}$, $d_{j\text{-}1}$), (c_j, d_j). Для построения нисходящей (для терма j-1) и восходящей (для терма j) ветвей эксперта просят указать точку, относительно которой он испытывает наибольшие трудности при соотнесении ее с термом j-1 или j. Нетрудно видеть, что в этой точке $\mu_X(x) = 0.5$ для обоих термов. Дальнейшие расчеты трудностей не представляют.

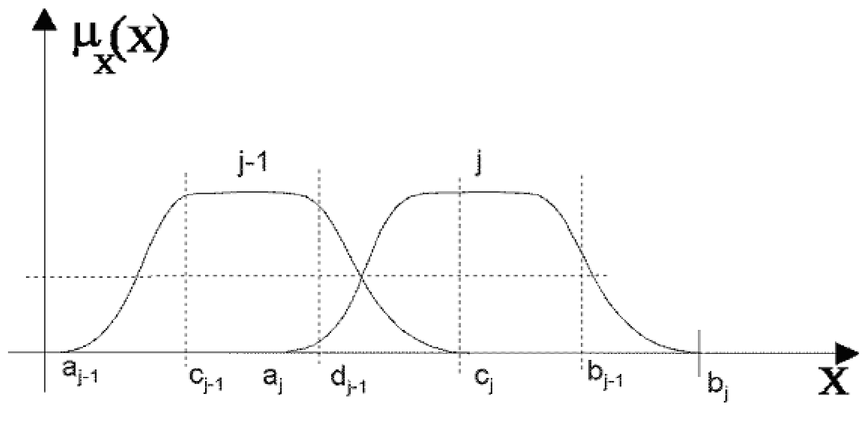


Рис. 1.11

Достаточно часто встречается задача построения функций принадлежности, соответствующей некоторому произвольному значению. Для этой цели удобно использовать представление функций принадлежности в виде стандартных S-образных функций. Не обсуждая варианты аналитического представления этих функций, покажем чисто качественно возможность их использования. S-образную функцию можно определить тремя точками (l, m, r) (рис. 1.12).

При x=l $S(x)$=0,

при $x=m$ $S(x)$=0.5,

при $x=r$ $S(x)$=1.

Таким образом, $S(x)=S(x, l, m, n)$.

Функция вида 1- $S(x)$ представлена на рис. 1.13. Нетрудно видеть, что, комбинируя эти две функции, можно построить функции принадлежности, удовлетворяющие ранее сформулированным условиям.

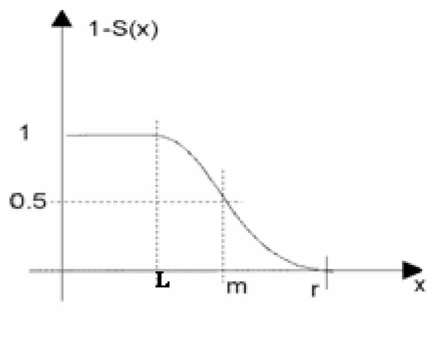


Рис. 1.12

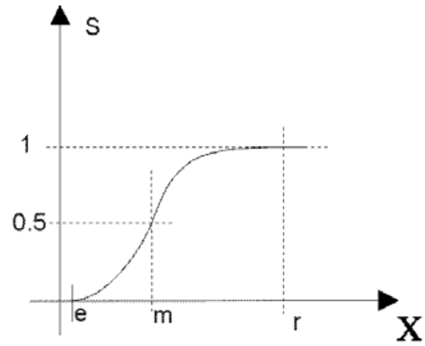


Рис. 1.13

Пусть определены функции $S(x_1)$ и $S(x_2)$, соответствующие исходному базовому множеству термов $T=\{\tau_i\}$, $i=\overline{1,I}$. Если произвольное значение $x' \in [x_1, x_2]$, то можно предположить, что $m' \in [m_1, m_2]$. Положив, что справедливо равенство

$$(m'-m_1)/(m'-m_2)=(x'-x_1)/(x'-x_2)$$

и, обозначая через $\lambda=\left(x^{'}-x_1\right)/\left(x^{'}-x_2\right)$, $\lambda \in [0,1]$, получим:

$$m'=\lambda m_1+(1-\lambda)m_2.$$

Последнее соотношение позволяет при непрерывном носителе рассчитывать значения функции принадлежности для произвольного значения лингвистической переменной, не включенного в исходное базовое множество.

Как правило, *прямые методы* построения функций принадлежности используются для описания понятий, которые характеризуются измеримыми свойствами. Если гарантируется, что эксперты далеки от случайных ошибок и работают как «правильные и надежные приборы», то можно спрашивать непосредственно их о значениях функций принадлежности. Однако возможны искажения, например субъективная тенденция сдвигать оценки объектов в направлении конца оценочной шкалы. Следовательно, прямые методы должны использоваться только в случае, когда такие ошибки малозначительны или маловероятны.

Рассмотренные выше примеры, естественно, не исчерпывают всего множества прямых методов построения функций принадлежности для одного эксперта. Целый ряд других методов этого класса рассмотрен в [9], там же рассматриваются и прямые методы для нескольких экспертов.

1.2.3. Косвенные методы построения функций принадлежности

Одним их самых простых косвенных методов построения функций принадлежности считается метод опроса. Пусть имеется m экспертов, часть которых на вопрос принадлежности элемента $x \in U$ нечеткому множеству $\tilde{A}$ отвечает положительно. Обозначим их число через n_1. Другая часть $n_2 = m - n_1$ отвечает на этот же вопрос отрицательно. Тогда значения функции принадлежности определяются как отношение

$$\mu_A(x) = \frac{n_1}{n_2 + n_1} = \frac{n_1}{m}.$$

Этот метод очень прост, но очевидно, что полученные значения функций принадлежности существенно зависят от количества экспертов, участвующих в процедуре и, кроме того, не гарантируется удовлетворение требований 1-3 (п.1.2.1). В ряде случаев на результат может существенно повлиять фактор субъективности экспертных оценок. Если рассматривать степень принадлежности элементов к конкретному множеству не в абсолютном смысле, то интенсивность принадлежности можно определять исходя из попарных сравнений рассматриваемых элементов.

Этот метод основан на обработке матрицы оценок, отражающих мнение эксперта об относительной принадлежности элементов множеству или степени выраженности у них свойства, формализуемого нечетким множеством. Эта процедура допускает использование всего одного опроса эксперта.

Пусть $\tilde{A} = \{\mu_A(x)/x\}, \quad x \in U; \ \sum_i \mu_A(x_i) = 1.$ Результатом опроса эксперта является матрица $M = \|m_{ij}\|, \quad i, j = \overline{1, N}$, $-N$ - число точек, в которых производится сравнение. Число m_{ij} показывает, во сколько раз, по мнению эксперта, $\mu_A(x_i)$ больше $\mu_A(x_j)$.

Вариант 1. Значение функции принадлежности в точках x_i, $i = \overline{1, N}$ определяется отношением

$$\mu A(x_i) = \frac{m_{ij}}{\sum_i m_{ij}}, \tag{1.2}$$

а значение j выбирается произвольно. Таким образом, для определения $\mu_A(x_i)$ необходимо зафиксировать произвольно выбранный столбец матрицы M и вычислить отношения по формуле (1.2).

Пример. Пусть для описания расстояния между двумя точками применяется лингвистическая переменная – «расстояние» с множеством базовых значений T= { малое, среднее, большое }. Пусть базовое множество B ={1, 2, 3, 6, 8}. Требуется определить значения функции принадлежности для терма «малое».

Опросом экспертов получена следующая матрица парных сравнений

$$M = \begin{array}{c|cccc|}
 & 1 & 3 & 6 & 8 \\
1 & 1 & 5 & 6 & 7 \\
3 & 1/5 & 1 & 4 & 6 \\
6 & 1/6 & 1/4 & 1 & 4 \\
8 & 1/7 & 1/6 & 1/4 & 1
\end{array}$$

$m_{ij}=1/m_{ji}$.

Если рассматривается другой терм «среднее» или «большее», то матрица M будет другой. Зафиксируем первый столбец M_1= 1, 1/5, 1/6, 1/7.

Тогда $\mu_A(1)=\dfrac{m_{11}}{\sum\limits_i m_{i1}}=\dfrac{1}{1+1/5+1/6+1/7}=0,64.$

Аналогично

$$\mu_A(3)=0.16,\ \mu_A(6)=0.11,\ \mu_A(8)=0.08,$$

$$\mu_A(x)=\{0.64/1, 0.16/3, 0.11/6, 0.08/8\}.$$

Метод достаточно прост, а его недостатки заключаются в том, что значения функции принадлежности будут зависеть от номера зафиксированного столбца и отсутствия возможностей для контроля корректности экспертных оценок. Используя матрицы парных сравнений, помимо построения функции принадлежности получаем возможность оценить согласованность суждений экспертов.

Так же как и в предыдущем варианте, составляется матрица парных сравнений $M=\left\|m_{i\,j}\right\|,\quad m_{i\,j}=\,{}^{1}\!/\!{}_{m_{j\,i}}$.

В качестве значений функции принадлежности $\mu_A(x_i)$ принимаются координаты собственного вектора матрицы M, которые находятся из уравнения $\mathrm{M}\vec{\omega}=\lambda\vec{\omega}$, где $\vec{\omega}=(\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_n)$ — собственный вектор матрицы M; λ — собственное значение матрицы M.

Так как всегда выполняется равенство $M\vec{\omega}=n\omega$ ($n\times n$ - размерность матрицы M), то найденные значения тем точнее, чем ближе $\lambda_{\max}$ к n. Отклонение $\lambda_{\max}$ от n может служить мерой согласованности суждений экспертов.

Пример. Рассмотрим задачу оценки освещенности предметов [9]. Освещенность поверхности определяется как количество светового потока на единицу площади. Для нахождения различий в освещенности четырех идентичных объектов в зависимости от расстояния до источника был проведен следующий эксперимент.

Визуальное сравнение интенсивности освещенности проводили независимо друг от друга два эксперта. Предметы находились на следующих расстояниях от источника света: 9, 15, 21, 28 единиц длины. Шкала для определения матрицы суждений та же, что и в предыдущем варианте. Матрица парных сравнений освещенности предметов, пронумерованных в возрастающем порядке в зависимости от их близости к источнику света, для первого эксперимента имеет вид

$$
M = \begin{array}{c c}
 & \begin{array}{cccc} 9 & 15 & 21 & 28 \end{array} \\
\begin{array}{c} 9 \\ 15 \\ 21 \\ 28 \end{array} & \left\| \begin{array}{llll} 1 & 5 & 6 & 7 \\ 1/5 & 1 & 4 & 6 \\ 1/6 & 1/4 & 1 & 4 \\ 1/7 & 1/6 & 1/4 & 1 \end{array} \right\|
\end{array}
$$

Собственный вектор матрицы М будем искать из уравнения $M\vec{\omega} = \lambda\vec{\omega}$ или $(M - \lambda E)\vec{\omega} = 0$. Нетривиальное решение имеет место, если $\det(M - \lambda E) = 0$.

Тогда

$$
\begin{vmatrix} 1-\lambda & 5 & 6 & 7 \\ 1/4 & 1-\lambda & 4 & 6 \\ 1/6 & 1/4 & 1-\lambda & 4 \\ 1/7 & 1/6 & 1/4 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^4 - 4\lambda^3 - 6.914\lambda - 2.175 = 0.
$$

Соответственно

$\lambda_1 = -0.362$; $\lambda_2 = -0.14 + 1.305j$; $\lambda_3 = -0.14 - 1.305j$;

$\lambda_4 = 4.39$.

В качестве собственного числа матрицы выбираем наибольший положительный корень $\lambda_{\max} = 4{,}39$. Найдем собственный вектор

$$
\left\| \begin{array}{llll} 1\text{-}4{,}39 & 5 & 6 & 7 \\ 1/5 & 1\text{-}4.39 & 4 & 6 \\ 1/6 & 1/4 & 1\text{-}4.39 & 4 \\ 1/7 & 1/6 & 1/4 & 1\text{-}4.39 \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{c} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \\ \omega_4 \end{array} \right\| = 0 .
$$

Система

$$
\begin{aligned}
&-3.39\,\omega_1 + 5\,\omega_2 + 6\omega_3 + 7\,\omega_4 = 0; \\
&1/5\,\omega_1 - 3.39\,\omega_2 + 4\,\omega_3 + 6\,\omega_4 = 0; \\
&1/6\,\omega_1 + 1/4\,\omega_2 - 3.39\,\omega_3 + 4\,\omega_4 = 0; \\
&1/7\,\omega_1 + 1/6\,\omega_2 + 1/4\,\omega_3 - 3.39\,\omega_4 = 0
\end{aligned}
$$

имеет только нулевое решение. Для нахождения собственного вектора $\vec{\omega}$ введем условие нормировки $\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \omega_4 = 1$, которым будем заменять любое из уравнений предыдущей системы. Тогда получим следующие координаты собственного вектора ω_1 = 0.619, ω_2 = 0.235, ω_3 = 0.101, ω_4 = 0.0405.

Можно показать, что результат решения не зависит от того, какое уравнение системы было заменено условием нормирования.

Для второго эксперта

$$M = \begin{array}{c|cccc|}
 & 9 & 15 & 21 & 28 \\
9 & 1 & 4 & 6 & 7 \\
15 & 1/4 & 1 & 3 & 4 \\
21 & 1/6 & 1/3 & 1 & 2 \\
28 & 1/7 & 1/4 & 1/2 & 1
\end{array}$$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 4 & 6 & 7 \\ 1/4 & 1-\lambda & 3 & 4 \\ 1/6 & 1/3 & 1-\lambda & 2 \\ 1/7 & 1/4 & 1/2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^4 - 4\lambda^3 - 1.687\lambda - 0.133 = 0$$

$\lambda_1 = -0.782$; $\lambda_2 = -0.12 + 0.645j$; $\lambda_3 = -0.14 - 0.645j$; $\lambda_4 = 4.102$; $\lambda_{max} = 4.102$.

Соответствующий собственный вектор имеет координаты ω_1 = 0.617, ω_2 = 0.224, ω_3 = 0.097, ω_4 = 0.062.

Для первого эксперта $|n - \lambda_{max}| = 0,39$, для второго — 0,102. Следовательно, согласованность суждений выше у второго эксперта. Основной недостаток этого метода состоит в громоздкости вычислений.

Предложенный А.П. Ротштейном метод тоже использует матрицу парных сравнений, но в отличие от метода парных сравнений Т. Саати [10] он не требует нахождения собственных векторов. Этот метод базируется на идее распределения степеней принадлежности элементов универсального множества согласно их рангам. Эта идея раньше использовалась в теории структурного анализа систем, где рассмотрены разные способы определения рангов элементов.

Будем понимать под рангом элемента $x_i \in X$ число $r_S(x_i)$, которое характеризует значимость этого элемента в формировании свойства, которое описывается нечетким термом $\tilde{S}$. Допускаем, что выполняется правило: *чем больший ранг элемента, тем больше степень принадлежности.*

Обозначим $r_i = r(x_i)$, $\mu_S(x_i) = \mu_i$, $i = \overline{1,n}$. Тогда правило распределения степеней принадлежности можно задать в виде соотношения: $\frac{\mu_1}{r_1} = \frac{\mu_2}{r_2} = \ldots = \frac{\mu_n}{r_n}$, к которому добавляется условие нормирования $\sum_{i=1}^{n} \mu_i = 1$. Используя понятие опорного элемента, легко определить степени принадлежности всех элементов универсального множества через степени принадлежности опорного элемента.

Если опорным элементом является $x_1 \in X$ с принадлежностью μ_1, то

$$\mu_2 = \frac{r_2}{r_1}\mu_1,\ \mu_3 = \frac{r_3}{r_1}\mu_1,\ \ldots,\ \mu_n = \frac{r_n}{r_1}\mu_1.$$

В общем случае для i-го опорного элемента

$$\mu_1 = \frac{r_1}{r_i}\mu_i,\ \ldots,\ \mu_{i-1} = \frac{r_{i-1}}{r_i}\mu_i,\ \mu_{i+1} = \frac{r_{i+1}}{r_i}\mu_i, \ldots,\ \mu_n = \frac{r_n}{r_i}\mu_i.$$

Учитывая условие нормировки, находим:

$$\mu_1 = \left(1 + \frac{r_2}{r_1} + \frac{r_3}{r_1} + \ldots + \frac{r_n}{r_1}\right)^{-1},$$

$$\mu_2 = \left(\frac{r_1}{r_2} + 1 + \frac{r_3}{r_2} + \ldots + \frac{r_n}{r_2}\right)^{-1},$$

$$\mu_n = \left(\frac{r_1}{r_n} + \frac{r_3}{r_n} + \ldots + \frac{r_{n-1}}{r_n} + 1\right)^{-1}.$$

Полученные формулы позволяют вычислить степени принадлежности (значения функции принадлежности) элементов x_i по абсолютным значениям рангов. Вычисления значительно упрощаются, если выражения, записанные в скобках, представить в матричной форме:

$$\mathrm{M} = \begin{bmatrix} 1, \frac{r_2}{r_1} \frac{r_3}{r_1} \ldots \frac{r_n}{r_1} \\ \frac{r_1}{r_2} 1 \frac{r_3}{r_2} \ldots \frac{r_n}{r_2} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{r_1}{r_n} \frac{r_2}{r_n} \ldots \frac{r_{n-1}}{r_n} 1 \end{bmatrix}$$

Нетрудно видеть, что это матрица парных сравнений Саати, поэтому для экспертных оценок элементов этой матрицы можно использовать девятибалльную шкалу Саати:

1 - при отсутствии преимущества r_i над r_j;

3 - при слабом преимуществе r_i над r_j;

5 - при существенном преимуществе r_i над r_j;

7 - при явном преимуществе r_i над r_j;

9 - при абсолютном преимуществе r_i над r_j.

2, 4, 6, 8 – промежуточные оценки.

Для реализации описанного метода необходимо

1 - задать лингвистическую переменную X;

2 - определить универсальное множество, на котором задается переменная X;

3 - задать совокупность нечетких термов $\left\{S_1, S_2, ..., S_m\right\}$, которые используются для оценки переменной X;

4 - для каждого терма $S_j, j = \overline{1, m}$ сформировать матрицу парных сравнений;

5 - используя соотношения (1.3), вычислить значения функций принадлежности, Нормирование найденных функций осуществляется делением на наибольшее значение степени принадлежности.

Описанный метод построения функций принадлежности достаточно прост, но согласованность экспертных оценок в данном случае оценить невозможно.

Контрольные вопросы

1. Укажите основные отличия между классическим множеством и нечетким.

2. Что определяет терм – множество нечеткой переменной?

3. Могут ли использоваться для решения одной и той же задачи одновременно нормальные и субнормальные функции принадлежности?

4. Можно ли рассматривать нечеткие множества как обобщение классических?

5. Поясните, почему в качестве исходных функций принадлежности при решении некоторой задачи нельзя использовать многоэкстремальные функции принадлежности?

6. Как при выборе исходных функций принадлежности обеспечивается надежное распознавание соседних лингвистических значений нечеткой переменной?

7. Какой ситуации соответствует пересечение функций принадлежности соседних лингвистических значений на уровне 0,5?

8. В каких ситуациях оправдано применение прямых методов построения функций принадлежности?

9. Чем отличаются прямые и косвенные методы построения функций принадлежности?

10. Как при построении функций принадлежности может быть представлена ситуация наибольшей неопределенности?

11. В чем состоят достоинства и недостатки:

- прямых методов построения функций принадлежности;
- косвенных методов построения функций принадлежности?

12. Когда можно объективно проконтролировать корректность построения функций принадлежности?

13. Можно ли, используя косвенные методы построения функций принадлежности, непосредственно получить нормальную функцию принадлежности? Чем это объясняется?

2. ОПЕРАЦИИ НАД НЕЧЕТКИМИ МНОЖЕСТВАМИ

Прежде чем рассматривать операции над нечеткими множествами необходимо сделать ряд замечаний, которые будут способствовать как пониманию сути этих операций, так и корректному их применению.

Во-первых, необходимо иметь в виду, что нечеткие множества-это обобщение классических множеств. Поскольку можно допустить самые различные варианты подобного обобщения, то отсюда следует принципиальная возможность неоднозначности различных определений, имеющих аналогии в классической теории множеств и представляющих практический интерес. Применительно к операциям над нечеткими множествами это означает, что любое определение той или иной операции должно быть справедливо в том частном случае, когда вместо нечетких множеств используются классические множества. Иначе говоря, эти определения должны превращаться в известные определения теоретико-множественных операций, если используемые в них функции принадлежности заменить на характеристические функции.

Во-вторых, следует иметь в виду, что сравнение нечетких множеств и выполнение над ним различных операций будет возможно только тогда, когда соответствующие нечеткие множества определены на одном и том же универсуме.

В-третьих, говоря о соответствии нечетких множеств и функций принадлежности, следует понимать это соответствие в форме математического изоморфизма, так как одна и та же функция принадлежности может описывать различные качественные понятия. При этом, хотя одно и то же нечеткое множество, точнее то или иное свойство в форме нечеткого множества, может быть представлено различными функциями, отражающими субъективные предпочтения, с формальной точки зрения мы должны будем говорить о различных нечетких множествах.

Рассмотрим основные операции над нечеткими множествами, отметив, что все приводимые далее операции определяются через действия над их функциями принадлежности. Множества $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ из U равны ($\tilde{A}=\tilde{B}$) тогда и только тогда, когда $\mu_{\tilde{A}}(x)=\mu_{\tilde{B}}(x)$ для всех $x\in U$. Для $\tilde{A},\tilde{B}\in U$ множество $\tilde{A}$ является подмножеством $\tilde{B}$ ($\tilde{A}\in\tilde{B}$) тогда и только тогда, когда $\mu_{\tilde{A}}(x)\le\mu_{\tilde{B}}(x)$ для всех $x\in U$. Например, если $\tilde{A}=\left\{\mu_{\tilde{A}}(x)=1-(x-2)^2,(1,3)\right\}$, $\tilde{B}=\left\{\mu_{\tilde{B}}(x)=1-\dfrac{1}{4}(x-2)^2,(0,4)\right\}$, то $\tilde{A}\in\tilde{B}$ (рис. 2.1)

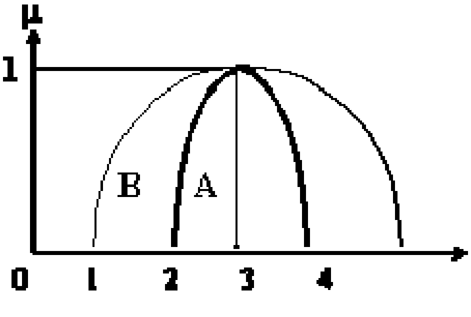


Рис. 2.1

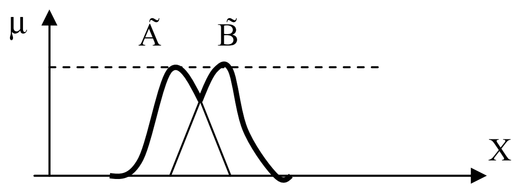


Рис. 2.2

Объединением множеств $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ из U называется множество $\tilde{C} = \tilde{A} \cup \tilde{B}$, функция принадлежности которого определяется следующим образом (рис. 2.2):

$$\mu_{\tilde{C}}(x) = \max_{x \in U}\{\mu_{\tilde{A}}(x),\ \mu_{\tilde{B}}(x)\}. \tag{2.1}$$

Объединение соответствует союзу *или* и более компактно записывается как

$$\mu_{\tilde{C}} = \mu_{\tilde{A}} \vee \mu_{\tilde{B}},$$

где символ $\vee$ обозначает операцию взятия max.

Пересечением множеств $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ из U называется множество $\tilde{C} = \tilde{A} \cap \tilde{B}$, функция принадлежности которого определяется следующим образом (рис. 2.3):

$$\mu_{\tilde{C}}(x) = \min_{x \in U}\{\mu_{\tilde{A}}(x),\ \mu_{\tilde{B}}(x)\}. \tag{2.2}$$

Пересечение соответствует союзу и, более компактно записывается как $\mu_{\tilde{C}} = \mu_{\tilde{A}} \wedge \mu_{\tilde{B}}$, где символ $\wedge$ обозначает операцию взятия min.

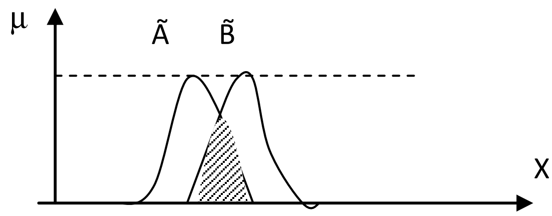


Рис. 2.3

Известно, что операции объединения и пересечения четких множеств являются коммутативными, ассоциативными и обладают свойствами дистрибутивности по отношению друг к другу. Следующие соотношения доказываются простыми графическими построениями и поэтому приводятся без доказательств:

1. $\tilde{A} \cup \tilde{A} = \tilde{A}, \tilde{A} \cap \tilde{A} = \tilde{A}$;
2. $\tilde{A} \cup \tilde{B} = \tilde{B} \cup \tilde{A}, \tilde{A} \cap \tilde{B} = \tilde{B} \cap \tilde{A}$;
3. $\tilde{A} \cup (\tilde{B} \cup \tilde{C}) = (\tilde{A} \cup \tilde{B}) \cup \tilde{C}$, $\tilde{A} \cap (\tilde{B} \cap \tilde{C}) = (\tilde{A} \cap \tilde{B}) \cap \tilde{C}$;
4. $\tilde{A} \cup (\tilde{B} \cap \tilde{C}) = (\tilde{A} \cup \tilde{B}) \cap (\tilde{A} \cup \tilde{C})$, $\tilde{A} \cap (\tilde{B} \cup \tilde{C}) = (\tilde{A} \cap \tilde{B}) \cup (\tilde{A} \cap \tilde{C})$;
5. $\tilde{A}_1 = \tilde{A} \cup \tilde{B}$, $\tilde{A}_2 = \tilde{A} \cup \tilde{C}$, $\tilde{B} \subseteq \tilde{C} \Rightarrow \tilde{A}_1 \subseteq \tilde{A}_2$;
6. $\tilde{A}_1 = \tilde{A} \cap \tilde{B}$, $\tilde{A}_2 = \tilde{A} \cap \tilde{C}$, $\tilde{B} \subseteq \tilde{C} \Rightarrow \tilde{A}_1 \subseteq \tilde{A}_2$;
7. $\tilde{A} \cup \varnothing = \tilde{A}$;
8. $\tilde{A} \cap \varnothing = \varnothing$;
9. $\tilde{A} \cup U = U$;
10. $\tilde{A} \cap U = \tilde{A}$.

Существует несколько способов определения операций объединения и пересечения. Например, для операции пересечения используют иногда алгебраическое произведение функций принадлежности $\mu_{\tilde{A}\cap\tilde{B}} = \mu_{\tilde{A}}\mu_{\tilde{B}}$.

Правомерность определения операций объединения и пересечения нечетких множеств в форме, отличной от (2.1) и (2.2) с точки зрения принятия решений рассматривается в ряде работ [13, 14, 18]. В [14] отмечается, что в некоторых случаях $\tilde{A}\cap\tilde{B}$ можно задавать в виде среднего геометрического $\mu_{\tilde{A}\cap\tilde{B}} = \sqrt{\mu_{\tilde{A}}\mu_{\tilde{B}}}$ и, следовательно,

$$\mu_{\tilde{A}\cup\tilde{B}} = 1 - \sqrt{(1-\mu_{\tilde{A}})(1-\mu_{\tilde{B}})}.$$

Отметим также, что $\tilde{A}\cap\tilde{B}$ можно определять и с помощью функции

$$\mu_{\tilde{A}\cap\tilde{B}} = \mu_{\tilde{A}}\mu_{\tilde{B}} + \sqrt{\mu_{\tilde{A}}\mu_{\tilde{B}}(1-\mu_{\tilde{A}})(1-\mu_{\tilde{B}})},$$

а $\tilde{A}\cup\tilde{B}$ соответственно в виде

$$\mu_{\tilde{A}\cup\tilde{B}} = 1-(1-\mu_{\tilde{A}})(1-\mu_{\tilde{B}}) + \sqrt{\mu_{\tilde{A}}\mu_{\tilde{B}}(1-\mu_{\tilde{A}})(1-\mu_{\tilde{B}})}.$$

Все указанные альтернативные варианты объединения и пересечения нечетких множеств только с определенной степенью точности соответствуют описанию посредством функций min и max. Поэтому выбор того или иного подхода зависит от конкретной задачи, когда использование операций min и max приводит к неадекватности модели реальной ситуации.

Разностью множеств $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ из U называется множество $\tilde{C} = \tilde{A}\setminus\tilde{B}$, с функцией принадлежности вида

$$\mu_{\tilde{C}}(x) = \mu_{\tilde{A}}(x) - \mu_{\tilde{A}\cap\tilde{B}}(x) = \mu_{\tilde{A}}(x) - \min_{x\in U}\left\{\mu_{\tilde{A}}(x),\ \mu_{\tilde{B}}(x)\right\} = \max_{x\in U}\left\{0,\ \mu_{\tilde{A}}(x) - \mu_{\tilde{B}}(x)\right\}. \quad (2.3)$$

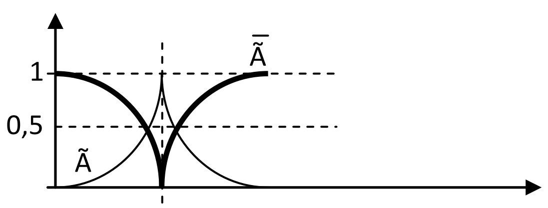


Рис. 2.4

Разность $U\setminus\tilde{A}$ называется дополнением нечеткого множества $\tilde{A}$ и обозначается $\bar{\tilde{A}}$. Из (2.3) следует, что $\mu_{\bar{\tilde{A}}}(x) = 1 - \mu_{\tilde{A}}(x)$, так как $\mu_U = 1$ (рис. 2.4). Эта операция удобна, например, для перехода от нечеткого множества допустимых значений к множеству недопустимых значений.

<u>Замечание.</u> Если для четких множеств A и B из U всегда выполняются следующие соотношения $(A\setminus B)\cap B = \varnothing$, $A\cap\bar{A} = \varnothing$, $A\cup U = U$,

то для нечетких множеств, вообще говоря, это неверно. Нетрудно проверить, что для $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$, справедливы следующие соотношения:

1. $\tilde{A} \setminus \tilde{A} = \varnothing$;
2. $\tilde{A} \setminus \tilde{B} \subseteq \tilde{A}$;
3. $\tilde{A} \setminus (\tilde{A} \setminus \tilde{B}) = \tilde{A} \cap \tilde{B}$;
4. $\tilde{A} \subseteq \tilde{B} \Leftrightarrow \tilde{A} \setminus \tilde{B} = \varnothing$;
5. $\tilde{A} \cap \tilde{B} = \varnothing \Leftrightarrow \tilde{A} \setminus \tilde{B} = \varnothing$;
6. $\left(\overline{\tilde{A} \cup \tilde{B}}\right) = \bar{\tilde{A}} \cap \bar{\tilde{B}}$;
7. $\left(\overline{\tilde{A} \cap \tilde{B}}\right) = \bar{\tilde{A}} \cup \bar{\tilde{B}}$;
8. $\tilde{A} \subseteq \tilde{B} \Leftrightarrow \bar{\tilde{B}} \subseteq \bar{\tilde{A}}$.

Равенства 6 и 7 называются законами де Моргана и следуют соответственно из тождеств:

$$1 - \max(\mu_{\tilde{A}}, \mu_{\tilde{B}}) = \min(1 - \mu_{\tilde{A}}, 1 - \mu_{\tilde{B}}),$$

$$1 - \min(\mu_{\tilde{A}}, \mu_{\tilde{B}}) = \max(1 - \mu_{\tilde{A}}, 1 - \mu_{\tilde{B}}).$$

Рассмотренные операции пересечения, объединения и дополнения нечетких множеств в базовых вариантах формализации совпадают с аналогичными операциями для классических множеств. В то же время для нечетких множеств определены специфические операции, которые не могут быть введены для классических множеств. Это операции α-разбиения, концентрации, размытия.

Операция α-разбиения нечеткого множества (α-уровневые множества). Множеством α-уровня нечеткого множества $\tilde{A}$ универсального множества *U* называется четкое подмножество A_α универсального множества *U*, определяемое в виде (рис. 2.5):

$A_\alpha = \{x \in U, \mu_{\tilde{A}}(x) \geq \alpha\}$, где $\alpha \in [0,1]$. Пример: $\tilde{A} = \{0/x_1, 0.2/x_2, 0.5/x_3, 1/x_4\}$, тогда $A_{\alpha=0.3} = (x_3, x_4\}$, $A_{\alpha=0.7} = \{x_4\}$. Достаточно очевидное свойство: если $\alpha_1 \geq \alpha_2$, то $A_{\alpha_1} \leq A_{\alpha_2}$.

Пример. $\tilde{A} = \{0/x_1, 0.2/x_2, 0.5/x_3, 1/x_4\}$, тогда $A_{\alpha=0.3} = (x_3, x_4\}$, $A_{\alpha=0.7} = \{x_4\}$. Достаточно очевидное свойство: если $\alpha_1 \geq \alpha_2$, то $A_{\alpha_1} \leq A_{\alpha_2}$.

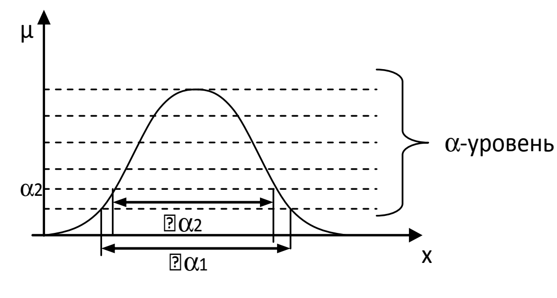


Рис. 2.5

Теорема о декомпозиции. Всякое нечеткое множество A разложимо по его множествам уровня в виде: $\tilde{A} = \bigcup\limits_{\alpha \in M} \alpha A_\alpha$, где αA_α - произведение числа α на множество $\tilde{A}$, и α «пробегает» область значений M функции принадлежности нечеткого множества.

Пример. $\tilde{A} = (0.1/x_1, 0/x_2, 0.7/x_3, 1/x_4\}$ представимо в виде

$\tilde{A} = 0.1(1,0,1,1) \cup 0.7(0,0,1,1,) \cup 1(0,0,0,1) =$
$=(0.1/x_1, 0/x_2, 0.1/x_3, 0.1/x_4\} \cup (0/x_1, 0/x_2, 0.7/x_3, 0.7/x_4\};$
$(0/x_1, 0/x_2, 0/x_3, 1/x_4\} = (0.1/x_1, 0/x_2, 0.7/x_3, 1/x_4\}$.

Если область значений функции принадлежности состоит из n градаций $\alpha_1 \le \alpha_2 \le \ldots \le \alpha_n$, то $\tilde{A}$ (при фиксированных значениях градаций) представимо в виде $\tilde{A} = \bigcup\limits_{i=1}^{n} \alpha_i A_{\alpha_i}$, т.е. определяется совокупностью обычных множеств $\{A_{\alpha_1}, A_{\alpha_2}, \ldots, A_{\alpha_n}\}$, где $A_{\alpha_1} \ge A_{\alpha_2} \ge \ldots \ge A_{\alpha_n}$. На основе операции алгебраического произведения (по крайней мере для целых β эта основа очевидна) определяется операция возведения в степень β нечеткого множества $\tilde{A}$, где β - положительное число. Нечеткое множество $\tilde{A}^\beta$ определяется функцией принадлежности $\mu_{\tilde{A}^\beta}(x) = \mu^\beta_{\tilde{A}}(x)$. Частным случаем возведения в степень являются $CON(\tilde{A}) = \tilde{A}^2$ - операция концентрирования, $DIL(\tilde{A}) = \tilde{A}^{0.5}$ - операция растяжения, которые используются при работе с лингвистическими неопределенностями.

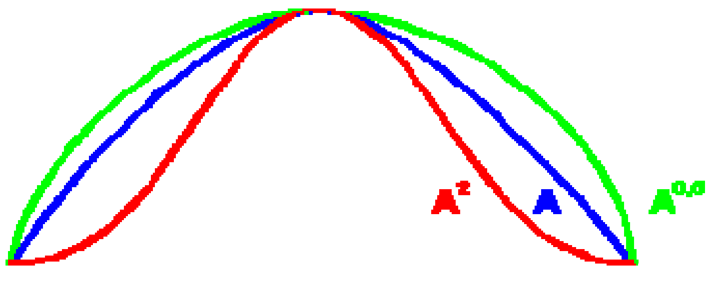


Рис. 2.6

Умножение на число. Если α - положительное число, такое, что $\alpha \max\limits_{x \in \tilde{A}} \mu_{\tilde{A}}(x) \le 1$, то нечеткое множество $\alpha\tilde{A}$ имеет функцию принадлежности $\mu_{\alpha\tilde{A}}(x) = \alpha\mu_{\tilde{A}}(x)$.

Выпуклая комбинация нечетких множеств. Пусть $\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, ..., \tilde{A}_n$ - нечеткие множества универсального множества *U*, а $w_1, w_2, ..., w_n$ - неотрицательные числа, такие, что $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$.

Выпуклой комбинацией $\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, ..., \tilde{A}_n$ называется нечеткое множество $\tilde{A}$ с функцией принадлежности:

$$\mu_{\tilde{A}}(x_1, x_2, ..., x_n) = w_1 \mu_{\tilde{A}}(x) + w_2 \mu_{\tilde{A}}(x) + ... + w_n \mu_{\tilde{A}_n}(x),\ \forall x \in U.$$

*Декартово произведение нечетких множеств***.** Пусть $\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, ..., \tilde{A}_n$ - нечеткие подмножества универсальных множеств $U_1, U_2, ..., U_n$ соответственно. Декартово произведение $\tilde{A} = \tilde{A}_1 \times \tilde{A}_2 \times ... \times \tilde{A}_n$ является нечетким подмножеством множества $U = U_1 \times U_2 \times ... \times U_n$ с функцией принадлежности $\mu_{\tilde{A}}(x_1, x_2, ..., x_n) = \min\{\mu_{\tilde{A}_1}(x_1), \mu_{\tilde{A}_2}(x_2), ..., \mu_{\tilde{A}_n}(x_n)\}$.

Расстояние между нечеткими множествами

Пусть $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ - нечеткие подмножества универсального множества *U*. Введем понятие расстояния $r(\tilde{A}, \tilde{B})$ между нечеткими множествами. При введении расстояния обычно предъявляются следующие требования:

$r(\tilde{A}, \tilde{B}) \geq 0$ - неотрицательность;

$r(\tilde{A}, \tilde{B}) = r(\tilde{B}, \tilde{A})$ - симметричность;

$r(\tilde{A}, \tilde{B}) < r(\tilde{A}, \tilde{C}) + r(\tilde{C}, \tilde{B})$.

К этим трем требованиям можно добавить четвертое: $r(\tilde{A}, \tilde{A}) = 0$. Определяются следующие расстояния:

- расстояние Хемминга (или линейное расстояние)

$$r(\tilde{A}, \tilde{B}) = \sum_{i=1}^{n} \left| \mu_{\tilde{A}}(x_i) - \mu_{\tilde{B}}(x_i) \right|,\ r(\tilde{A}, \tilde{B}) \in [0, n];$$

- относительное расстояние Хемминга

$$r(\tilde{A}, \tilde{B}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left| \mu_{\tilde{A}}(x_i) - \mu_{\tilde{B}}(x_i) \right|,\ r(\tilde{A}, \tilde{B}) \in [0,1],$$

где $\left| \mu_{\tilde{A}}(x_i) - \mu_{\tilde{B}}(x_i) \right| = \max\{\mu_{\tilde{A}}(x_i), \mu_{\tilde{B}}(x_i)\} - \min\{\mu_{\tilde{A}}(x_i), \mu_{\tilde{B}}(x_i)\}$;

- евклидово, или квадратичное расстояние $e(\tilde{A},\tilde{B})=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(\mu_{\tilde{A}}(x_i)-\mu_{\tilde{B}}(x_i))^2}$,

$e(\tilde{A},\tilde{B})\in[0,\sqrt{n}]$;

- относительное евклидово расстояние $e(\tilde{A},\tilde{B})=\frac{1}{n}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(\mu_{\tilde{A}}(x_i)-\mu_{\tilde{B}}(x_i))^2}$,

$e(\tilde{A},\tilde{B})\in[0,1]$.

Например, $\tilde{A}$ = (0/0, 0.1/1, 0.2/2, 0.5/3, 0.8/4, 1/5),

$\tilde{B}$ = (1/0, 1/1, 0.8/2, 0.6/3, 0.4/4, 0.2/5).

Найдем расстояние Хэмминга

$r(\tilde{A},\tilde{B})$=/1-0/+/1-0.1/+/0.8-0.2/+/0.6-0.5/+/0.8-0.4/+/10.2/=

=1+0.9+0.6+0.1+0.4+0.8=3.8.

Замечание. Здесь приведены два наиболее часто встречающихся определения понятия расстояния. Разумеется, для нечетких множеств можно ввести и другие определения понятия расстояния.

Контрольные вопросы

1. Какие операции над нечеткими множествами определены и для классических множеств?
2. Можно ли в классической теории множеств формализовать операцию пересечения с помощью умножения?
3. С какой целью может использоваться операция концентрации нечеткого множества?
4. Почему для классических множеств операция концентрации не определена?
5. С какой целью в теории нечетких множеств вводится операция размытия?
6. Почему для классических множеств операция размытия не определена?
7. Какие возможности предоставляет операция α- разбиения?
8. Какие свойства операций пересечения и объединения не выполняются в теории нечетких множеств?

3. НЕЧЕТКИЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

В литературе по теории нечетких множеств обычно используется термин «нечеткие отношения», допуская при этом смешивание двух понятий из теории множеств «отображение» и « отношение». На наш взгляд, будет более корректным в математическом смысле разделить эти понятия и в теории нечетких множеств. Для того чтобы обосновать предлагаемый подход, приведем определения отображения и отношения множеств из классической теории.

Пусть $X = \{x_i : i = \overline{1, I}\}$ и $Y = \{y_j : j = \overline{1, J}\}$ некоторые множества и $\Gamma \subseteq X \times Y$ соответствие, определенное на прямом произведении множеств X и Y, т.е. для каждого $x_i \in X$ существует $y_j \in Y$ такое, что $(x_i, y_j) \in \Gamma$. Такое всюду определенное соответствие называется отображением X в Y и может быть записано как $\Gamma : X \to Y$ [11, 12].

Важным частным случаем отображения является отображение множества самого на себя $\Gamma : X \to X$, которое получило название отношения. Для того чтобы различить отображение и отношение, для последнего используют символ R (relation) $R : X \to X$ или $R : X$. В классической теории множеств термин «отношение» используется для обозначения различных видов отображения множества самого на себя. Следует отметить, что понятия нечеткого отображения и нечеткого отношения наряду с понятием нечеткого множества следует отнести к фундаментальным основам всей теории нечетких множеств.

3.1. Нечеткое отображение и способы его задания

В общем случае нечетким отображением, заданным на универсальных множествах $U_1, U_2, ..., U_n$, называется некоторое фиксированное нечеткое подмножество декартова произведения $U_1 \times U_2 \times ... \times U_n$. Так же как и в случае обычных множеств, с целью охарактеризовать количество универсальных множеств, на основе которых строится то или иное нечеткое отображение, принято называть нечеткое отображение между элементами двух универсальных множеств – *бинарным*, между элементами трех множеств - *тернарным*, в общем случае – *n-арным*. При этом на вид и форму функций принадлежности нечеткого отображения предварительно не накладывается никаких ограничений.

Для простоты дальнейшего изложения ограничимся бинарными отображениями. Это не ограничивает общности рассмотрения, так как приводимые соотношения легко обобщаются на любое число универсальных множеств.

Пусть U_1 и U_2 универсальные множества. Если U является декартовым произведением $U=U_1 \times U_2$, то нечеткое отображение $\tilde{\Gamma}$ определяется как нечеткое подмножество универсального множества U $\mu_{\tilde{\Gamma}} : u_1 \times u_2 \to [0,1]$. Значение $\mu_{\tilde{\Gamma}}(u_i, u_j)$ для конкретной пары $(u_i, u_j) \in u_1 \times u_2$ характеризует субъективную степень выполнения соответствия $u_i \tilde{\Gamma} u_j$. Существует несколько форм задания отображений. Задание отображения Г на множестве U может быть выполнено перечислением всех пар $(u_i, u_j) \in U \quad (i, j = \overline{1,n})$, для которых выполняется отношение Г. Кроме того, отображения могут задаваться в виде матриц и графов.

Пример. Сотрудниками ведущей консалтинговой компании США Бостонской консультационной группы (БКГ) для оценки стратегических бизнес-единиц (СБЕ) разработана система оценок С={c1=«звезды», c2=«денежные дойные коровы», c3=«вопросительные знаки», c4=«собаки»}. Пусть множество анализируемых СБЕ состоит из трех элементов СБЕ={сбе1, сбе2, сбе3}. Тогда нечеткое отображение множества СБЕ на множество оценок, представляющее прогноз перспектив развития стратегических бизнес-единиц, может быть, например, задано матрицей

	c1	c2	c3	c4
сбе1	0.4	0.3	0.1	0.1
сбе2	0.1	0.3	0.6	0.5
сбе3	0.4	0.3	0.2	0.7

Носителем нечеткого отображения $\tilde{\Gamma} \subseteq X \times Y$ называют подмножество декартова произведения $X \times Y$ вида

$$Supp\,\tilde{\Gamma} = \left\{ {(x_i, y_j)}\Big/{(x_i, y_j)} \in X \times Y, \quad \mu_{\tilde{\Gamma}}(x_i, y_j > 0 \right\}.$$

Носитель нечеткого отображения следует понимать как множества пар на $X \times Y$, для которых может быть установлено соответствие $x_i \tilde{\Gamma} y_j$. В практических приложениях встречаются задачи, когда непосредственное построение нечеткого отображения затруднено или, возможно, приведет к неудовлетворительным решениям из-за некорректного выбора оценок, определяющих степень выраженности соответствия, представляемого отображением.

Пример. Некоторая фирма предполагает начать выпуск нового изделия. При этом возможно несколько альтернативных вариантов $P=\{P_i : i=\overline{1,I}\}$. На рынок следует представить изделие, которое заинтересует большее число потребителей.

Для оценки изделий эксперты компании разработали систему критериев $C=\{c_j : j=\overline{1,J}\}$ и было построено нечеткое отображение $\tilde{\Gamma}_1 : P \to C$. Отображение будет нечетким, так как для нового изделия оценки критериального соответствия точно определены быть не могут.

Если потенциальным потребителям $X=\{x_k : k=\overline{1,K}\}$ предложить для оценки непосредственно новые изделия, то вполне возможно, что эти оценки будут недостаточно объективными, например из-за консервативности предпочтений, неспособности оценить новый продукт. Поэтому более объективной будет оценка потенциальными потребителями критериев отбора, поскольку эти критерии будут в большей степени соответствовать пользовательским предпочтениям, т.е. будет построено нечеткое отображение $\tilde{\Gamma}_2 : X \to C$.

Для того чтобы получить мнение потенциальных потребителей, надо построить композицию нечетких отображений $\tilde{\Gamma}_1 \circ \tilde{\Gamma}_2 = \tilde{\Gamma}_3 : X \to P$. Методы обработки полученного отображения для получения окончательного решения будут рассмотрены далее.

Рассмотрим варианты формального определения композиции нечеткого отображения. Пусть $\tilde{\Gamma}_1$ - нечеткое отображение $\tilde{\Gamma}_1 : X \to Y$ на $X \times Y$, и $\tilde{\Gamma}_2 : Y \to Z$ на $Y \times Z$. Нечеткое отображение между $\tilde{\Gamma}_3 : X \to Z$, обозначаемое $\tilde{\Gamma}_1 \circ \tilde{\Gamma}_2$, определенное через $\tilde{\Gamma}_1$ и $\tilde{\Gamma}_2$ соотношением

$$\mu_{\tilde{\Gamma}_1 \circ \tilde{\Gamma}_2}(x_i, z_k) = \max_i \min_j \{\mu_{\tilde{\Gamma}_1}(x_i, y_j), \mu_{\tilde{\Gamma}_2}(y_j, z_k)\} \text{ по всем } k, \quad (3.1)$$

называется «max-min»-композицией отображений $\tilde{\Gamma}_1$ и $\tilde{\Gamma}_2$. Аналогичным образом может быть построена и «min-max» композиция отображений $\tilde{\Gamma}_1$ и $\tilde{\Gamma}_2$

$$\mu_{\tilde{\Gamma}_1 \circ \tilde{\Gamma}_2}(x_i, z_k) = \min_i \max_j \{\mu_{\tilde{\Gamma}_1}(x_i, y_j), \mu_{\tilde{\Gamma}_2}(y_j, z_k)\}. \quad (3.2)$$

Поскольку формализацией операций max и min могут быть операции $\cup$(объединение) и $\cap$ (пересечение) соответственно, то соотношения (3.1) и (3.2) могут быть записаны в следующем виде:

$$\mu_{\tilde{\Gamma}_1 \circ \tilde{\Gamma}_2}(x_i, z_k) = \bigcup_i \{\mu_{\tilde{\Gamma}_1}(x_i, y_j) \cap \mu_{\tilde{\Gamma}_2}(y_j, z_k)_{j \in \overline{[1, J]}}\};$$

$$\mu_{\tilde{\Gamma}_1 \circ \tilde{\Gamma}_2}(x_i, z_k) = \bigcap_i \{\mu_{\tilde{\Gamma}_1}(x_i, y_j) \cup \mu_{\tilde{\Gamma}_2}(y_j, z_k)_{j \in \overline{[1, J]}}\}.$$

<u>Пример</u>

$\tilde{\Gamma}_1$

	y_1	y_2	y_3
x_1	0.1	0.7	0.4
x_2	1	0.5	0

$\tilde{\Gamma}_2$

	z_1	z_2	z_3	z_4
y_1	0.9	0	1	0.2
y_2	0.3	0.6	0	0.9
y_3	0.1	1	0	0.5

$\tilde{\Gamma}_1 \circ \tilde{\Gamma}_2$

	z_1	z_2	z_3	z_4
x_1	0.3	0.6	0.1	0.7
x_2	0.9	0.5	1	0.5

$\mu_{\tilde{\Gamma}_1 \circ \tilde{\Gamma}_2}(x_1, z_1) = [\mu_{\tilde{\Gamma}_1}(x_1, y_1) \cap \mu_{\tilde{\Gamma}2}(y_1, z_1)] \cup [\mu_{\tilde{\Gamma}_1}(x_1, y_2) \cap \mu_{\tilde{\Gamma}2}(y_2, z_1)]$
$\cup\ [\mu_{\tilde{\Gamma}_1}(x_1, y_3) \cup$
$\mu_{\tilde{\Gamma}2}(y_3, z_1)] = (0.1 \cap 0.9) \cup (0.7 \cap 0.3) \cup (0.4 \cap 0.1) = 0.1 \cup 0.3 \cup 0.1 = 0{,}3$,
$\mu_{\tilde{\Gamma}_1 \circ \tilde{\Gamma}_2}(x_1, z_2) = (0.1 \cap 0) \cup (0.7 \cap 0.6) \cup (0.4 \cap 1) = 0 \cup 0.6 \cup 0.4 = 0.6$,
$\mu_{\tilde{\Gamma}_1 \circ \tilde{\Gamma}_2}(x_1, z_3) = 0.1$,
..................,
..................,
$\mu_{\tilde{\Gamma}_1 \circ \tilde{\Gamma}_2}(x_2, z_5) = 0.5$.

Хотя нечеткие отношения, т.е. отображение нечеткого множества самого на себя, являются частным случаем нечетких отображений, тем не менее большое число задач из различных прикладных областей сводится к обработке нечетких отношений. Поэтому целесообразно более подробно рассмотреть основные вопросы, связанные с применением и преобразованиями именно нечетких отношений.

3.2. Нечеткие отношения

Понятие нечеткого отношения наряду с понятием самого нечеткого множества следует отнести к фундаментальным основам всей теории нечетких множеств. На основе нечетких отношений определяется целый ряд дополнительных понятий, используемых для построения нечетких моделей сложных систем. Нечеткое отношение обобщает понятие обычного отношения и часто заменяется терминами нечеткая связь, ассоциация, взаимосвязь или соотношение.

Параметры различных систем могут быть связаны между собой различного рода отношениями. Выделение отношений осуществляется по заранее выбранному признаку. Если нас интересует влияние параметра системы на ее производительность или качество выпускаемой продукции, то данная связь может быть описана различного вида отношениями: «влияет», «не влияет», «сильно влияет», «слабо» и т.д. Наиболее распространенной формой задания отношений является словесное описание. Общепринятая формализация отношений осуществляется в соответствии со следующим определением.

Отношением R на множестве U называется подмножество R множества U, определяемое декартовым произведением.

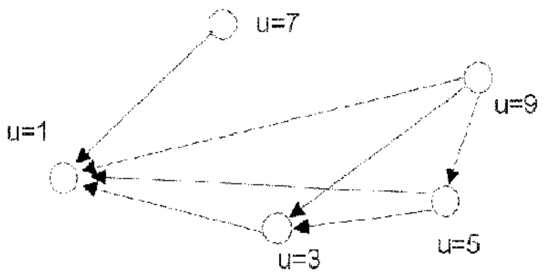
Простейшими отношениями считаются такие, для которых можно четко указать, выполняются они или нет для элементов некоторых множеств X_1 и X_2. В тех случаях, когда связи между параметрами системы выражены нечетко, целесообразно формализовать отношения в соответствии со следующим определением.

Если множество U конечно и невелико, нечеткое отношение $\tilde{R}$ удобно задавать в матричном виде. В этом случае матрица $M\left(\tilde{R}\right)$ отношения $\tilde{R}$ представляет собой квадратную матрицу, строки и столбцы которой помечены элементами $u \in U$, и на пересечении строки u_i и столбца u_j записано значение $r_{i\,j} = \mu_{\tilde{R}}\left(u_i, u_j\right)$.

Пример. Пусть U={1, 3, 5, 7, 9}. Определим на множестве U нечеткое отношение $\tilde{R}$ «намного больше». Матрица такого отношения может иметь следующий вид:

	1	3	5	7	9
1	0	0	0	0	0
3	0,2	0	0	0	0
5	0,1	0	0	0	0
7	0,8	0,4	0	0	0
9	1	0,8	0,5	0	0

Наглядностью обладает задание нечеткого отношения в виде нечеткого графа $\tilde{G}=\left(\tilde{U},\tilde{V}\right)$, где $\tilde{U}=\left\{u_1,u_2,u_3,u_4,u_5\right\}$ - множество вершин; $\tilde{V}=\left\{\left\rangle \mu_{\tilde{R}}(u_i,u_j) \middle/ (u_i,u_j) \right\langle,\ \ \mu_{\tilde{R}}(u_i,u_j>0\right\}\ \left(u_i,u_j\right)\in U$ (см. рисунок) - множество нечетких дуг. Очевидно, что как и в случае нечетких множеств, обычное четкое отношение можно рассматривать как частный случай нечеткого отношения, функция принадлежности которого принимает два значения 0 и 1.



Дадим некоторые определения, характеризующие нечеткие отношения. Носителем нечеткого отношения $\tilde{R}$ на множестве U называют подмножество декартова произведения $U\times U$ вида

$$Supp\ \tilde{R}=\left\{(u_i,u_j)\middle/(u_i,u_j)\in U\times U,\ \ \mu_{\tilde{R}}(u_i,u_j>0\right\}.$$

Носитель нечеткого отношения следует понимать как отношение на множестве U, связывающее все пары $\left(u_i,u_j\right)$, для которых степень выполнения данного нечеткого отношения не равна нулю. Для нашего примера $(u_1,u_3),(u_1,u_5),(u_1,u_7),(u_1,u_9),(u_3,u_5),(u_3,u_7),(u_3,u_9),(u_5,u_9)$.

По аналогии с нечеткими множествами определяется и множество α-уровня нечеткого отношения, т.е.

$$\tilde{R}_\alpha = \left\{ {(u_i,u_j)}\Big/{(u_i,u_j)} \in U \times U,\ \ \mu_{\tilde{R}}(u_i,u_j) \geq \alpha \right\}.$$

Обычным подмножеством α - уровня нечеткого отношения $\tilde{R}$ называется четкое (обычное) отношение R_α такое, что

$$R_\alpha = \begin{cases} 1, \text{если } \mu_{\tilde{R}}(u_i,u_j) \geq \alpha \\ 0, \text{если } \mu_{\tilde{R}}(u_i,u_j) < \alpha \end{cases}.$$

Очевидно, что из $\alpha_1 \leq \alpha_2$ следует $R_{\alpha_1} \geq R_{\alpha_2}$.

Теорема декомпозиции. Любое нечеткое отношение $\tilde{R}$ представимо в форме

$$R = \bigcup_\alpha \alpha \times R_\alpha,\ 0 < \alpha < 1,$$

где $\alpha \times R_\alpha$ означает, что все элементы R_β умножаются на α.

Перейдем к рассмотрению операций над нечеткими отношениями, некоторые из которых являются аналогами операций над нечеткими множествами, а некоторые присущи только нечетким отношениям.

<u>Пересечением</u> нечетких отношений $\tilde{P}$ и $\tilde{Q}$ на $U \times U$ называют нечеткое отношение $\tilde{P} \cap \tilde{Q}$, определяемое функцией принадлежности

$$\mu_{\tilde{P}\cap\tilde{Q}}(u_i,u_j) = \mu_{\tilde{P}}(u_i,u_j) \wedge \mu_{\tilde{Q}}(u_i,u_j) = \min_{u_i,u_j \in U} \left\{ \mu_{\tilde{P}}(u_i,u_j), \mu_{\tilde{Q}}(u_i,u_j) \right\}.$$

<u>Пример.</u> На универсальном числовом множестве U={1, 2, 3, 4, 5}, заданы нечеткие отношения $\tilde{P}$ и $\tilde{Q}$. Содержательный смысл отношения $\tilde{P}$-«натуральное число x приближенно равно числу x_j» представлен матрицей

$$\mathrm{M}_{\tilde{P}} = \begin{Vmatrix} 1 & 0.8 & 0.5 & 0.2 & 0 \\ 0.8 & 1 & 0.8 & 0.5 & 0.2 \\ 0.5 & 0.8 & 1 & 0.8 & 0.5 \\ 0.2 & 0.5 & 0.8 & 1 & 0.8 \\ 0 & 0.2 & 0.5 & 0.8 & 1 \end{Vmatrix},$$

отношения $\tilde{Q}$-«натуральное число x значительно превосходит натуральное число x_j»

$$\mathrm{M}_{\tilde{Q}} = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.2 & 0 & 0 & 0 \\ 0.7 & 0.5 & 0.2 & 0 & 0 \\ 0.9 & 0.7 & 0.5 & 0.2 & 0 \end{Vmatrix},$$

пересечение этих отношений

$$\mathrm{M}_{\tilde{P}\cap\tilde{Q}} = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.2 & 0 & 0 & 0 \\ 0.2 & 0.5 & 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0.5 & 0.2 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Содержательно соответствует одновременному выполнению двух условий «натуральное число x приближенно равно числу x_j» и «натуральное число x значительно превосходит натуральное число x_j».

Объединением нечетких отношений $\tilde{P}$ и $\tilde{Q}$ на $U{\times}U$ называют нечеткое бинарное отношение $\tilde{P}\bigcup\tilde{Q}$, определяемое функцией принадлежности

$$\mu_{\tilde{P}\bigcup\tilde{Q}}\left(u_i,u_j\right)=\mu_{\tilde{P}}\left(u_i,u_j\right)\vee\mu_{\tilde{Q}}\left(u_i,u_j\right)=\max\left\{\mu_{\tilde{P}}\left(u_i,u_j\right),\mu_{\tilde{Q}}\left(u_i,u_j\right)\right\}.$$

Разностью нечетких отношений $\tilde{P}$ и $\tilde{Q}$ на $U{\times}U$ называют нечеткое бинарное отношение $\tilde{\Omega}$, определяемое функцией принадлежности

$$\mu_{\tilde{\Omega}}\left(u_i,u_j\right)=\max_{\forall(u_i,u_j)\in U\times U}\left\{\mu_{\tilde{P}}\left(u_i,u_j\right)-\mu_{\tilde{Q}}\left(u_i,u_j\right),0\right\}. \qquad (3.3)$$

В соотношении (3.3) под знаком max применяется обычная операция арифметической разности. Операция разности двух нечетких множеств, определенная соотношением (3.3) по аналогии с обычными множествами, может также обозначаться знаком «\» $\tilde{\Omega}=\tilde{P}\setminus\tilde{Q}$.
Для приведенного выше примера

$$\mathrm{M}_{\tilde{\Omega}} = \begin{Vmatrix} 1 & 0.8 & 0.5 & 0.2 & 0 \\ 0.6 & 1 & 0.8 & 0.5 & 0.2 \\ 0 & 0.6 & 1 & 0.8 & 0.5 0.6 \\ 0 & 0 & 0.6 & 1 & 0.8 \\ 0 & 0 & 0 & 0.6 & 1 \end{Vmatrix},$$

которая содержательно соответствует выполнению двух условий: ««натуральное число x приближенно равно числу x_j» и «натуральное число x не превосходит значительно натуральное число x_j».

Симметрической разностью нечетких отношений $\tilde{P}$ и $\tilde{Q}$ на $U \times U$ называют нечеткое бинарное отношение $\tilde{\Theta} = \tilde{P} \Theta \tilde{Q}$, определяемое функцией принадлежности $\mu_{\tilde{\Theta}}(u_i, u_j) = \left| \mu_{\tilde{P}}(u_i, u_j) - \mu_{\tilde{Q}}(u_i, u_j) \right|$. Справедливо следующее соотношение: $\tilde{P} \Theta \tilde{Q} = (\tilde{P} \backslash \tilde{Q}) \cup (\tilde{Q} \backslash \tilde{P})$, т.е. симметрическая разность двух нечетких отношений равна объединению двух разностей нечетких отношений.

Дополнением нечеткого отношения $R \subseteq U \times U$ называют отношение $\tilde{R}$ с функцией принадлежности

$$\mu_{\tilde{R}}\left(u_i, u_j\right) = 1 - \mu_{\tilde{R}}\left(u_i, u_j\right),$$

$$\forall u_i, u_j \in U \times U.$$

Обратным отношением к отношению $\tilde{R}$ называют отношение $\tilde{R}^{-1}$ с функцией принадлежности

$$\mu_{\tilde{R}^{-1}}\left(u_i, u_j\right) = \mu_{\tilde{R}}\left(u_i, u_j\right),$$

$$\forall u_i, u_j \in U \times U.$$

Очевидно, что матрица $\mathrm{M}^{-1}(\tilde{R})$ является транспонированной $\mathrm{M}(\tilde{R})$.

Отношение $\tilde{R}_1$ включено в отношение $\tilde{R}$, если множество пар, для которых выполняется отношение $\tilde{R}_1$, находится в множестве пар, для которых выполняется отношение $\tilde{R}$. Так, например, отношение между параметрами Z_1 и Z_2, характеризуемое термином «много меньше», включено в отношение, характеризуемое понятием «меньше». Отметим, что обратное утверждение может не выполняться. Тот факт, что отношение $\tilde{R}_1$ включено в отношение $\tilde{R}$ обозначают следующим образом: $\tilde{R}_1 \subseteq \tilde{R}$. Для нечетких отношений сохраняют свой смысл альтернативные и дополнительные операции над нечеткими множествами, описание которых приведено в [13].

На этапе формализации качественной информации важную роль играют отношения эквивалентности, порядка и доминирования. С помощью отношения эквивалентности могут выделяться классы свойств исследуемых объектов или систем, которые в некотором смысле равноценны. Это отношение оказывается полезным для выявления во множестве первичных терминов подмножества терминов-синонимов. Отношение порядка определяет некоторый порядок расположения элементов множеств. Так, например, мы различаем понятия «раньше» и «позже» в случаях, когда элементами множества служат состояния динамической системы. Отношение доминирования имеет место, когда элементы некоторого множества в чем-то превосходят элементы другого. Так, победившая спортивная команда находится в отношении доминирования с побежденной.

Для того чтобы установить характер отношения между элементами множеств, проверяют выполнение соответствующих свойств. В контексте нечеткого моделирования наибольший интерес представляют свойства нечетких бинарных отношений, которые обобщают известные свойства обычных отношений. К этим свойствам относятся рефлексивность, симметричность и транзитивность.

Бинарное нечеткое $\tilde{Q} = \{\mu(u_i, u_j)/(u_i, u_j)\}$ отношение, заданное на $U \times U$, обладает свойством *рефлексивности*, если для любой пары (u_i, u_i) выполняется равенство $\mu_{\tilde{Q}}(u_i, u_j) = 1$ для $\forall u_i \in U$. Нетрудно видеть, что в матрице рефлексивного нечеткого отношения $\tilde{Q}$ все элементы главной диагонали равны единице.

Бинарное нечеткое $\tilde{Q} = \{\mu(u_i, u_j)/(u_i, u_j)\}$ отношение, заданное на $U \times U$, обладает свойством *антирефлексивности*, если для любой пары (u_i, u_i) выполняется равенство $\mu_{\tilde{Q}}(u_i, u_j) = 0$ для $\forall u_i \in U$. Нетрудно видеть, что в матрице рефлексивного нечеткого отношения $\tilde{Q}$ все элементы главной диагонали равны нулю.

Бинарное нечеткое $\tilde{Q} = \{\mu(u_i, u_j)/(u_i, u_j)\}$ отношение, заданное на $U \times U$, называется *симметричным*, если для любой пары (u_i, u_i) выполняется равенство $\mu_{\tilde{Q}}(u_i, u_j) = \mu_{\tilde{Q}}(u_j, u_i)$ для $\forall (u_i, u_j) \in U \times U$.

Заметим, что матрица симметричного нечеткого отношения симметрична относительно главной диагонали.

Бинарное нечеткое $\tilde{Q}=\{\mu(u_i,u_j)/(u_i,u_j)\}$ отношение, заданное на $U\times U$, называется *асимметричным*, если выполняется следующее условие: $\min\{\mu_{\tilde{Q}}(u_i,u_j),\mu_{\tilde{Q}}(u_j,u_i)\}=0$ для $\forall(u_i,u_j)\in U\times U$. Следует указать, что все элементы главной диагонали матрицы нечеткого отношения равны нулю. Кроме того, один из двух (а может быть и оба) элементов, симметричных относительно главной диагонали, должен быть равен нулю.

Бинарное нечеткое $\tilde{Q}=\{\mu(u_i,u_j)/(u_i,u_j)\}$ отношение, заданное на $U\times U$, называется *антисимметричным*, если выполняется следующее условие: $\min\{\mu_{\tilde{Q}}(u_i,u_j),\mu_{\tilde{Q}}(u_j,u_i)\}=0$ для $\forall(u_i,u_j)\in U\times U$, причем $x_i\neq x_j$.

Бинарное нечеткое $\tilde{Q}=\{\mu(u_i,u_j)/(u_i,u_j)\}$ отношение, заданное на $U\times U$, называется *транзитивным*, если выполняется следующее условие: $\mu_{\tilde{Q}}(x_i,x_k)\geq\max\limits_{x_j\in U}\{\min[\mu_{\tilde{Q}}(u_i,u_j),\mu_{\tilde{Q}}(u_j,u_k)]\}$ для $(\forall u_i,u_j,u_k)\in U$.

Отношение эквивалентности обладает свойствами рефлективности, симметричности и транзитивности. Данное отношение используется для формализации понятий типа «похоже на», «подобен» и т.п. В понятиях типа «похоже на», «подобен» выделяют свойства симметричности.

Отношение доминирования характеризуется свойствами антирефлексивности и асимметричности. Частным случаем отношения доминирования является отношение порядка, для которого дополнительно выполняется свойство транзитивности.

3.3. Композиция нечетких отношений

Поскольку нечеткие отношения могут быть заданы в матричной форме, то, как это следует из определения нечеткого отношения, соответствующая матрица имеет квадратную форму.

В теории матриц определена операция умножения квадратных матриц

$$C=A\cdot B,\ c_{ik}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}b_{jk}\,, \qquad (3.4)$$

на основе которой может быть построено несколько вариантов композиции нечетких отношений.

Максиминное произведение нечетких отношений $\tilde{R}_1$ и $\tilde{R}_2$, которые определены на множестве *U*, обозначается $\tilde{R}_1 \circ \tilde{R}_2$ и задается функцией принадлежности $\mu_{\tilde{R}_1 \circ \tilde{R}_2}(u_1, u_2)$, вычисляемой следующим образом:

$$\mu_{\tilde{R}_1 \circ \tilde{R}_2}(u_1, u_2) = Sup\left\{\min\left(\mu_{\tilde{R}_1}(u_1, z),\ \mu_{\tilde{R}_1}(z, u_2)\right)\right\}, \tag{3.5}$$

где $\mu_{\tilde{R}_1}$, $\mu_{\tilde{R}_2}$ - функции принадлежности нечетких отношений $\tilde{R}_1$ и $\tilde{R}_2$ соответственно. Например, пусть заданы два универсальных множества $U_1 = U_2 = (1, 2, 3)$. На множестве $U_1 \times U_2$ определены нечеткие отношения

$$R_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0.8 & 0.4 \\ 0.8 & 1 & 0.8 \\ 0.4 & 0.8 & 1 \end{bmatrix}; \quad R_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0.3 & 0.7 \\ 0.3 & 0 & 0.3 \\ 0.7 & 0.3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Так как нечеткие отношения заданы в матричном виде, то максиминное произведение в данном случае представляет собой операцию, аналогичную умножению матриц, но вместо арифметических операций умножения и сложения используют операции нахождения минимального (/\ — пересечение) и максимального (\/ — объединение) элементов соответственно и с учетом (3.4) соотношение (3.5) может быть записано следующим образом:

$$\mu_{\tilde{R}_1 \circ \tilde{R}_2}(u_{ik}) = \bigcup_{j=1}^{n} \mu_{\tilde{R}_1}(u_{ij}) \cap \mu_{\tilde{R}_2}(u_{jk}).$$

Для приведенного примера максиминное произведение имеет вид

$$\tilde{R}_1 \circ \tilde{R}_2 = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.3 & 0.7 \\ 0.7 & 0.3 & 0.7 \\ 0.7 & 0.3 & 0.4 \end{bmatrix}.$$

Минимаксное произведение нечетких отношений $\tilde{R}_1$ и $\tilde{R}_2$ на множестве *U* определяется функцией принадлежности, вычисляемой по соотношению

$$\mu_{R_1 \circ R_2}(u_1, u_2) = inf\left\{\max\left(\mu_{R_1}(u_1, z),\ \mu_{R_1}(z, u_2)\right)\right\} \text{ или}$$

$$\mu_{\tilde{R}_1 \circ \tilde{R}_2}(u_{ik}) = \bigcap_{j=1}^{n} \mu_{\tilde{R}_1}(u_{ij}) \cup \mu_{\tilde{R}_2}(u_{jk}).$$

Минимаксное произведение представляет собой операцию, аналогичную операции умножения матриц, но вместо арифметических операций умножения и сложения используются операции $\wedge$ и $\vee$.

Например, для предыдущего примера минимаксное произведение в матричном виде равно

$$R_1 \circ R_2 = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.4 & 1 \\ 0.8 & 0.8 & 0.8 \\ 0.4 & 0.4 & 0.7 \end{bmatrix}.$$

Максимультипликативное произведение нечетких отношений $\tilde{R}_1$ и $\tilde{R}_2$, заданных на множестве U, определяется функцией принадлежности:

$$\mu_{R_1 \circ R_2}(u_1, u_2) = sup\left\{\left(\mu_{R_1}\left(u_1, z\right) \times \mu_{R_1}\left(z, u_2\right)\right)\right\},$$

$$\mu_{\tilde{R}_1 \circ \tilde{R}_2}(u_{ik}) = \bigcup_{j=1}^{n} \mu_{\tilde{R}_1}(u_{ij}) \times \mu_{\tilde{R}_2}(u_{jk}).$$

Для исходных данных примера максимультипликативное произведение нечетких отношений равно

$$\begin{bmatrix} 0.28 & 0.3 & 0.7 \\ 0.56 & 0.24 & 0.56 \\ 0.7 & 0.3 & 0.28 \end{bmatrix}.$$

Выбор той или иной композиции при решении практических задач определяется требованиями, которым должно удовлетворять решение задачи. Поэтому в каждом конкретном случае данный вопрос требует особого рассмотрения.

Контрольные вопросы

1. Чем принципиально отличаются нечеткие отношения от отношений, определенных в классической теории множеств?

2. Какими способами можно задавать нечеткое отношение?

3.Можно ли рассматривать отношение нечетких множеств как обобщение отношения классических множеств?

4. Какие понятия можно формализовать с помощью отношений нечетких множеств?

5. Какие возможности предоставляют композиции нечетких отношений?

4. НЕЧЕТКИЕ ЧИСЛА. МАТЕМАТИКА НЕЧЕТКИХ ЧИСЕЛ

Нечеткие числа широко используются в повседневной жизни. Когда мы говорим: «приблизительно три», «приблизительно двадцать пять» и т. п., то тем самым предполагаем использование нечеткого числа.

Формально нечеткое число можно рассматривать как нечеткое множество, заданное на множестве действительных чисел и обладающее некоторыми дополнительными свойствами. Наиболее общим понятием в этом смысле является понятие нечеткой величины.

Нечеткой величиной называется произвольное нечеткое множество $\tilde{B} = [x / \mu_{\tilde{B}}(x)]$, $\mu_{\tilde{B}}(x) \in [0,1]$, заданное на множестве действительных чисел R^1.

Нечетким интервалом в общем случае называется нечеткая величина с выпуклой функцией принадлежности.

Нечетким числом называется нечеткая величина, функция принадлежности которой является выпуклой и унимодальной.

Нечеткое число $\tilde{X}$ на действительной прямой выпукло, если для каких-либо реальных чисел x_i, x_j, x_k, $x_i \le x_j \le x_k$, $\mu_{\tilde{X}}(x_j) \ge \min(\mu_{\tilde{X}}(x_i), \mu_{\tilde{X}}(x_k))$.

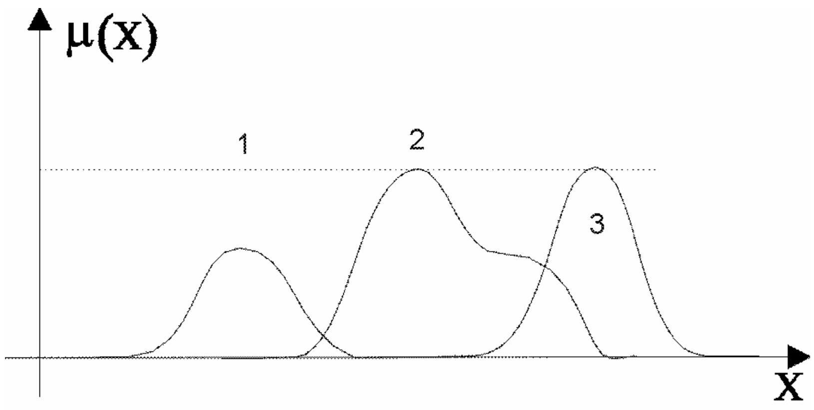


Рис. 4.1

Нечеткое число $\tilde{X}$ на действительной прямой называется нормальным, если $\max \mu_{\tilde{X}}(x) = 1$. На рис. 4.1 приведены $\tilde{X}_1$- нечеткое выпуклое число, $\tilde{X}_2$- нечеткое нормальное число, $\tilde{X}_3$- нечеткое нормальное выпуклое число.

Вводя понятие нечеткого числа (нечетких чисел), мы, естественно, должны определить некоторые хотя бы простейшие математические операции над этими числами. Сразу же следует указать, что это далеко не тривиальная задача, которая к тому же в некоторых аспектах еще не решена.

Уже в первой работе по нечеткой арифметике [14] было доказано, что пары операций «сложение – вычитание» и «умножение - деление» не позволяют отыскать соответственно противоположное и обратное нечеткие числа, т.е. для нечеткого числа $\tilde{A}$ не существует числа $-\tilde{A}$ (противоположное нечеткое число) такого, что $\tilde{A}+(-\tilde{A})\equiv 0$ и числа $\tilde{A}^{-1}$ (обратное нечеткое число) такого, что $\tilde{A}\cdot\tilde{A}^{-1}\equiv 1$ и, кроме того, $(\tilde{A}-\tilde{B})+\tilde{B}\neq\tilde{A}$, $(\tilde{A}/\tilde{B})\tilde{B}\neq\tilde{A}$.

4.1. Операции над нечеткими числами. Принцип обобщения

Аналоги обычных арифметических операций для нечетких чисел и интервалов в общем случае могут быть определены с использованием принципа обобщения Заде.

Пусть $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ два нечетких числа с носителями $S_{\tilde{A}}=(a_1,a_2)$ и $S_{\tilde{B}}=(b_1,b_2)$ соответственно; $a_2>a_1, b_2>b_1$; g: $R^1\times R^1\to R^1$ - некоторая функция. Тогда согласно принципу обобщения нечеткое число $\tilde{D}=g(\tilde{A},\tilde{B})$ определяется функцией принадлежности

$$\mu_{\tilde{D}}(x)=\underset{\substack{g(a,b)=x\\ a\in S_{\tilde{A}},b\in S_{\tilde{B}}}}{Sup}\min\{\mu_{\tilde{A}}(a),\mu_{\tilde{B}}(b)\}. \qquad (4.1)$$

Пусть $\otimes$- одна из четырех арифметических операций : +, - ,$\cdot$, /; $g(a,b)=a\otimes b$. Тогда (4.1) определяет результат арифметической операции $\otimes$ над нечеткими числами $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$.

Нечеткие числа и интервалы, которые наиболее часто используются для представления нечетких множеств в нечетком моделировании, являются нормальными. Однако данные выше определения нечеткого числа и нечеткого интервала слишком общие, что затрудняет их практическое использование. С вычислительной точки зрения значительно удобнее применять более конкретные определения нечетких чисел и интервалов на основе аналитической аппроксимации с помощью так называемых (*L*-*R*)- функций.

4.2. Алгоритм выполнения арифметических операций над нечеткими числами с (*L-R*)- аппроксимацией

Нечеткие числа (*L-R*)-типа [5] - это разновидность нечетких чисел специального вида, т.е. задаваемых по определенным правилам с целью снижения объема вычислений при операциях над ними. Для нечетких чисел (*L-R*)-типа левые ветви функций принадлежности операндов $\tilde{A}$ и $\vec{B}$ аппроксимируются одной монотонно возрастающей функцией *L*, зависящей от двух параметров, подбираемых для каждого операнда в отдельности $L(a_L, a^*)$ и $L(b_L, b^*)$. Аналогично для правых ветвей и монотонно убывающей функции *R* имеем $R(a^*, a_R)$, $R(b^*, b_R)$. Полученные аппроксимации называются *L-R* нечеткими числами и обозначаются (a_L, a^*, a_R), (b_L, b^*, b_R). Очевидно, что к классу (*L-R*) функций относятся функции, графики которых имеют следующий вид (рис. 4.2):

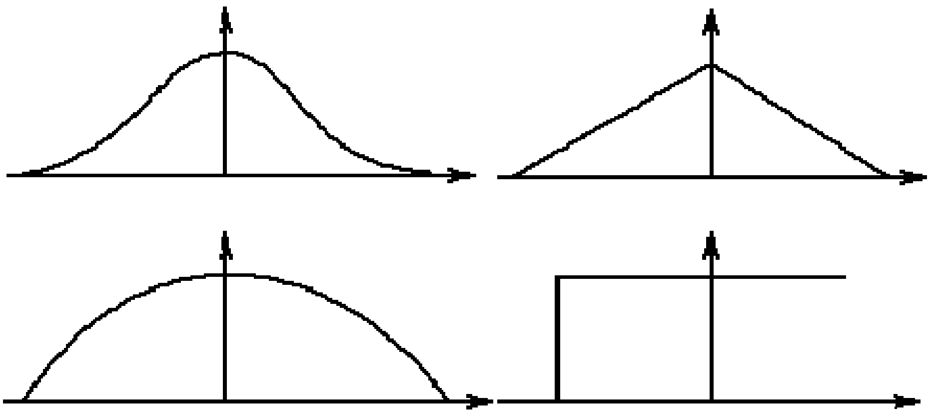


Рис. 4.2

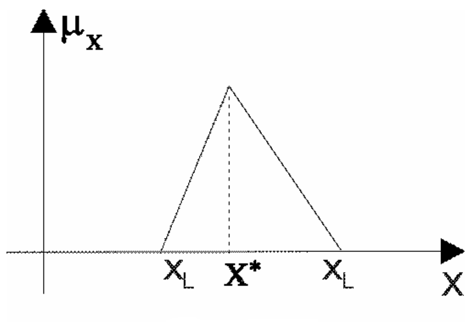
Примерами аналитического задания (*L-R*) функций могут быть $L(x) = e^{-|x|^p}$, $p \geq 0$; $R(x) = 1 \big/ (1 + |x|^p)$, $p \geq 0$ и т.д.

Доказано, что результат сложения и вычитания *L-R* нечетких чисел есть также *L-R* нечеткое число. Результат умножения и деления *L-R* нечетких чисел будет *L-R* нечетким числом лишь приблизительно [15]. *L-R* аппроксимация полезна тем, что сами функции *L* и *R* в промежуточных вычислениях не участвуют, а используются лишь при получении окончательного результата.

При решении практических задач наибольшее применение нашли простейшие частные случаи нечетких чисел и нечетких интервалов, получившие свое название по виду их функций принадлежности. Эти нечеткие числа и интервалы можно рассматривать как частный случай нечетких чисел и интервалов (*L*-*R*)-типа, если в качестве соответствующих функций *L*-типа и *R*- типа использовать их предельные случаи, а именно – линейные функции (треугольные (рис. 4.3) или трапецеидальные). При этом важным обстоятельством можно назвать то, что треугольные нечеткие числа однозначно задаются тройкой (a_L, a^*, a_R), а трапецеидальные четверкой -(a_L, a_1, a_2, a_R), где α_1, α_2- координаты верхнего основания трапеции, т.е. отпадает необходимость вычисления промежуточных значений результатов арифметических операций.

Рассмотрим выполнение арифметических операций над треугольными *L*-*R* нечеткими числами. Для треугольной функции принадлежности нечеткое число $x \approx x^*$ представляется следующим соотношением:

$$\tilde{x}^* = \int\limits_{x_L}^{x^*} (x - x_L)/x + \int\limits_{x^*}^{x_R} (x_R - x)/x,$$



где знак $\int$ означает объединение по всем $x \in \left[x_L, x^*\right]$ и $x \in \left[x^*, x_R\right]$ соответственно.

Пусть имеются два нечетких числа

Рис. 4.3

$$\tilde{x}_1^* = \int\limits_{x_{L1}}^{x_1^*} (x - x_{L1})/x + \int\limits_{x_1^*}^{x_{R1}} (x_{R1} - x)/x$$

и

$$\tilde{x}_2^* = \int\limits_{x_{L2}}^{x_2^*} (x - x_{L2})/x + \int\limits_{x_2^*}^{x_{R2}} (x_{R2} - x)/x.$$

Суммой чисел $\tilde{x}_1^*$ и $\tilde{x}_2^*$ назовем число $\tilde{x}_3^*$ такое, что

$$\tilde{x}_3^* = \int_{x_{L3}}^{x_3^*} \mu_{x_3}(x)/x + \int_{x_3^*}^{x_{R3}} \mu_{x_3}(x)/x,$$

где $x_{L3} = x_{L1} + x_{L2}$;

$x_{R3} = x_{R1} + x_{R2}$;

$x_3^* = x_1^* + x_2^*$.

Для треугольных функций принадлежности слагаемых функция принадлежности суммы также будет треугольной и представляться уравнением $\mu(x) = a_0 + kx$. Для определения значений a_0 и k необходимо для $x_{L3} \le x \le x_3^*$ решить систему уравнений

$a_0 + kx = 1$ при $x = x_3^* = x_1^* + x_2^*$,

$a_0 + kx = 0$ при $x = x_{L3} = x_{L1} + x_{L2}$,

откуда $a_0 = -\dfrac{x_{L3}}{x_3^* - x_{L3}}$, $k = \dfrac{1}{x_3^* - x_{L3}}$

и соответственно $\mu_{x_3}(x) = \dfrac{x - x_{L3}}{x_3^* - x_{L3}}$.

Для $x^*{}_3 \le x \le x_{R3}^*$ $a_0 + kx = 1$ при $x = x_3^*$,

$a_0 + kx = 0$ при $x = x_{R3}$.

Тогда $a_0 = -\dfrac{x_{R3}}{x_3^* - x_{R3}}$, $k = \dfrac{1}{x_3^* - x_{R3}}$ и $\mu_{x_3}(x) = \dfrac{x - x_{R3}}{x_3^* - x_{R3}}$.

Таким образом,

$$\tilde{x}_3^* = \int_{x_{L3}}^{x_3^*} \frac{x - x_{L3}}{x_3^* - x_{L3}} \Big/ x + \int_{x_3^*}^{x_{R3}} \frac{x_{R3} - x}{x_{R3} - x_3} \Big/ x.$$

Аналогично для операции вычитания

$$\tilde{x}_3^* = \int_{x_{L3}}^{x_3^*} \frac{x - x_{L3}}{x_3^* - x_{L3}} \Big/ x + \int_{x_3^*}^{x_{R3}} \frac{x_{R3} - x}{x_{R3} - x_3} \Big/ x,$$

$x_{L3} = x_{L1} - x_{R2}$, $x_{R3} = x_{R1} - x_{L2}$, $x_3^* = x_1^* - x_2^*$.

Для операций умножения и деления, предполагая сохраняемость треугольной функции принадлежности, в работе [7] получены следующие соотношения:

$$\tilde{x}_3^* = \int\limits_{x_{L3}}^{x_3^*} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{x_{L3}}}{\sqrt{x_3^*}-\sqrt{x_{L3}}} \Big/ x + \int\limits_{x_3^*}^{x_{R3}} \frac{\sqrt{x_{R3}}-\sqrt{x}}{\sqrt{x_{R3}}-\sqrt{x_3}} \Big/ x,$$

$$x_{L3} = x_{L1}x_{L2}, \quad x_{R3} = x_{R1}x_{R2}, \quad x_3^* = x_1^* x_2^*,$$

результирующая функция принадлежности $\mu_{x_3}(x) = a_0 + k_1\sqrt{x}$,

$$\tilde{x}_3^* = \int\limits_{x_{L3}}^{x_3^*} \frac{(x-x_{L3})x_3^*}{(x_3-x_{L3})x} \Big/ x + \int\limits_{x_3^*}^{x_{R3}} \frac{(x_{R3}-x)x_3^*}{\left(x_{R3}-x_3^*\right)x} \Big/ x \ ,$$

где $x_{L3} = \dfrac{x_{L1}}{x_{R2}}$, $x_{R3} = \dfrac{x_{R1}}{x_{L2}}$, $x_3^* = \dfrac{x_1^*}{x_2^*}$ \,

результирующая функция принадлежности $\mu_{x_3}(x) = a_0 + \dfrac{k_1}{x}$. В отношении двух последних операций целесообразно сделать следующее замечание. Операции умножения и деления являются операциями нелинейными, поэтому предположение о сохранении вида функции принадлежности, вообще говоря, не выполняется.

Отметим еще одну особенность непрерывных нормальных выпуклых нечетких чисел: найти нечеткое число и его правую и левую границы можно, не проводя лингвистического анализа, поскольку точно известно, при каком $\boldsymbol{x}$ функция принадлежности равна 1, а при каких $\boldsymbol{x}$ она равна 0.

4.3. Арифметические операции над нечеткими числами с использованием уровневых множеств

В основу данного подхода к выполнению операций над нечеткими числами положено то, что нечеткое число может быть дискретизировано по конечному числу α-уровней, когда каждому уровню α_i ставится в соответствие множество

$$X_{\alpha_i} = \left\{x_{\alpha_i 1}, x_{\alpha_i 2}, \ldots x_{\alpha_i n}\right\},$$

$$\mu\left(x_{\alpha_i j}\right) \ge \alpha_i \ , \ j = \overline{1,n},$$

а также разложено на выпуклые, возможно, ненормализованные нечеткие подмножества (рис. 4.4). Для операций с использованием уровневых множеств накладывается дополнительное ограничение, что эти нечеткие подмножества должны иметь функции принадлежности либо строго убывающие, либо строго возрастающие, либо постоянные (рис. 4.5). Эти ограничения объясняются тем, что если рассматривать только монотонные (только возрастающие или только убывающие) операции*, то для этих операций на участках одинаковой монотонности функций принадлежности результат может быть получен без дополнительного лингвистического анализа.

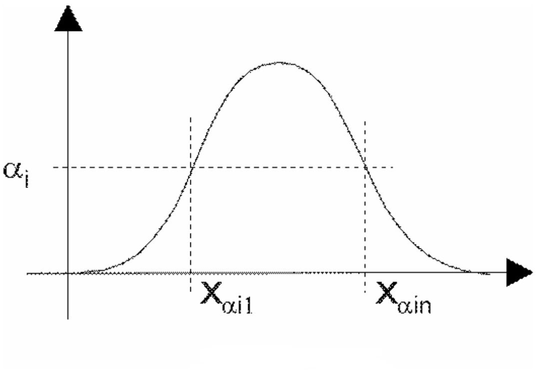


Рис. 4.4

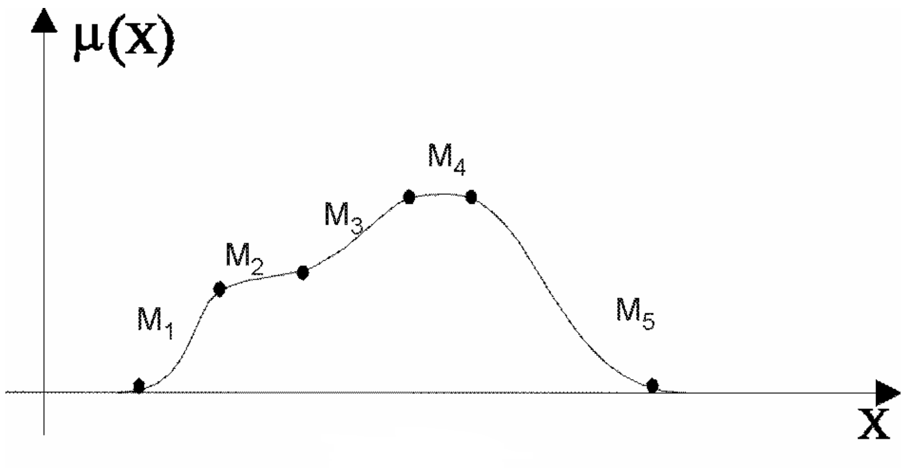


Рис. 4.5

Пусть нечеткие числа $\tilde{X}$ и $\tilde{Y}$ представлены в виде α-уровневых подмножеств, для которых функции принадлежности имеют одинаковый характер монотонности

$$\tilde{X} = \left\{ X_{\alpha_i} \right\}, \quad \tilde{Y} = \left\{ Y_{\alpha_i} \right\},$$

$$\tilde{X} = \left\{ \left(x_{\alpha_i 1}, \ldots x_{\alpha_i n_i} \right) \right\} \qquad i = 1, \overline{I},$$

$$\tilde{Y} = \left\{ \left(y_{\alpha_j 1}, \ldots y_{\alpha_j m_j} \right) \right\} \qquad j = 1, J,$$

*) Бинарная операция * называется возрастающей, если для $x_1 > y_1$ и $x_2 > y_2 \Rightarrow x_1 \cdot x_2 > y_1 \cdot y_2$ и убывающей, если для $x_1 > y_1$ и $x_2 > y_2 \Rightarrow x_1 \cdot x_2 < y_1 \cdot y_2$.

$$\mu\left(x_{\alpha_i k}\right) \geq \alpha_i \qquad i = 1, \bar{J} \quad k = 1, n_i,$$

$$\mu\left(y_{\alpha_{ji} q}\right) \geq \alpha_j \qquad i = \overline{1, J} \quad q = 1, m_j.$$

Операции выполняются над абсциссами точек, находящихся на одинаковых α-уровнях и имеющих одинаковые участки монотонности функций принадлежности.

Рассмотрим для простоты один α-уровень α_i и три значения аргумента (рис. 4.6) $x_{\alpha_{ij}}$ и $y_{\alpha_{ij}}$ $j = 1,\ 2,\ 3.$

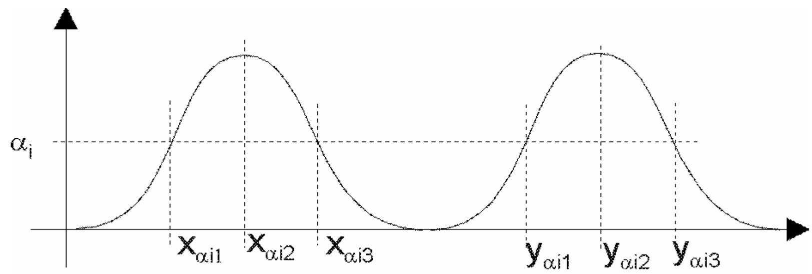


Рис. 4.6

$$\tilde{X}_{\alpha_i} = \left\{ \mu_{\alpha_i 1}\left(x_{\alpha_i 1}\right) \big/ x_{\alpha_i 1}, \mu_{\alpha_i 2}\left(x_{\alpha_i 2}\right) \big/ x_{\alpha_i 2}, \mu_{\alpha_i 3}\left(x_{\alpha_i 3}\right) \big/ x_{\alpha_i 3} \right\};$$

$$\tilde{Y}_{\alpha_i} = \left\{ \mu_{\alpha_i 1}\left(y_{\alpha_i 1}\right) \big/ y_{\alpha_i 1}, \mu_{\alpha_i 2}\left(y_{\alpha_i 2}\right) \big/ y_{\alpha_i 2}, \mu_{\alpha_i 3}\left(y_{\alpha_i 3}\right) \big/ y_{\alpha_i 3} \right\}.$$

Тогда для строго возрастающих или строго убывающих операций, какими являются сложение и умножение, справедливы соотношения

$$\tilde{Z}_{\alpha_i} = \tilde{X}_{\alpha_i} \times \tilde{Y}_{\alpha_i} = \left\{ \mu_{\alpha_i 1} \big/ \left(x_{\alpha_i 1} \times y_{\alpha_i 1}\right), \mu_{\alpha_i 2} \big/ \left(x_{\alpha_i 2} \times y_{\alpha_i 2}\right), \mu_{\alpha_i 3} \big/ \left(x_{\alpha_i 3} \times y_{\alpha_i 3}\right) \right\}; \quad (4.2)$$

$$\tilde{Z}_{\alpha_i} = \tilde{X}_{\alpha_i} \times \tilde{Y}_{\alpha_i} = \left\{ \mu_{\alpha_i 1} \big/ \left(x_{\alpha_i 1} + y_{\alpha_i 1}\right), \mu_{\alpha_i 2} \big/ \left(x_{\alpha_i 2} + y_{\alpha_i 2}\right), \mu_{\alpha_i 3} \big/ \left(x_{\alpha_i 3} + y_{\alpha_i 3}\right) \right\}. \quad (4.3)$$

Операции вычитания и деления не являются строго возрастающими или строго убывающими, поэтому их вначале надо представить в виде

$$\tilde{X} - \tilde{Y} = \tilde{X} + (-\tilde{Y});$$

$$\tilde{X} / \tilde{Y} = \tilde{X} \times \left(1 / \tilde{Y} \right),$$

а затем может использоваться соотношение (4.2) или (4.3).

Основным ограничением при использовании данного метода реализации нечетких множеств считается требование участков одинаковой монотонности функций принадлежности для участков операций.

4.4. Алгоритм реализации принципа обобщения при выполнении арифметических операций над нечеткими числами

Арифметические операции над нечеткими числами можно рассматривать как функциональное преобразование возможных значений вектора $\vec{X} = \{x_i\} \quad i = \overline{1,n}$

$$y = \varphi(x_1, \ldots x_n). \tag{4.4}$$

Например, $y = x_1 + x_2$, $y = x_1 \times x_2$, $y = x_1 / x_2$, $y = x_1 - x_2$.

Считая известным значение функции принадлежности $\mu_X(x_i)$, необходимо найти функцию принадлежности $\mu_Y(y)$, которая будет определять результат функционального преобразования (3.4). В литературе, излагающей основные операции над нечеткими множествами (числами), ограничиваются преимущественно лишь заданием основного правила для определения функции принадлежности

$$\mu_Y(y) = \max_{\vec{X}:\varphi(\vec{X})=y} \min \{\mu_x(x_i)\}. \tag{4.5}$$

При непосредственном использовании такого правила для решения практических задач возникают трудности в разработке методов и алгоритмов определения результирующей функции принадлежности, вызванной математической сложностью описания и определения множества *X*, удовлетворяющего условию (3.4).

В работе [16] предложены два варианта алгоритмов определения функции принадлежности (4.5): алгоритм перебора и рекуррентный алгоритм. В нашем случае мы остановимся только на алгоритме перебора, который, несмотря на громоздкость, позволяет получить результаты в большинстве случаев, которые могут представлять практический интерес.

Рекуррентный алгоритм предполагает решение нелинейного уравнения, которое только в отдельных случаях имеет аналитическое решение.

При использовании метода перебора на множестве возможных значений нечетких переменных формируется множество различных их комбинаций

$$\{x_i\}_l \quad l=\overline{l,L}$$, где l- номер комбинации.

Для каждой комбинации рассчитываются значение функции $y_l = \varphi\left(\{x_i\}_l\right)$ и функции принадлежности $\mu_{Y_l}(Y_l) = \min\limits_i\{\mu_x(x_i)\}$. В общем случае для различных комбинаций l_i, l_j, l_k возможно, что $y_{l_i} = y_{l_j} = y_{l_k}$, при этом $\mu_Y\left(Y_{l_i}\right) \neq \mu_Y\left(Y_{l_j}\right) \neq \mu_Y\left(Y_{l_k}\right)$. Тогда результирующее значение $\mu_Y(Y_l) = \max\limits_{i,j,k}\{\mu_Y(y_l)\}$.

В заключение полученные значения y_l упорядочивают. В конечном итоге будет получен дискретный ряд значений искомой функции принадлежности $\mu_Y(y)$.

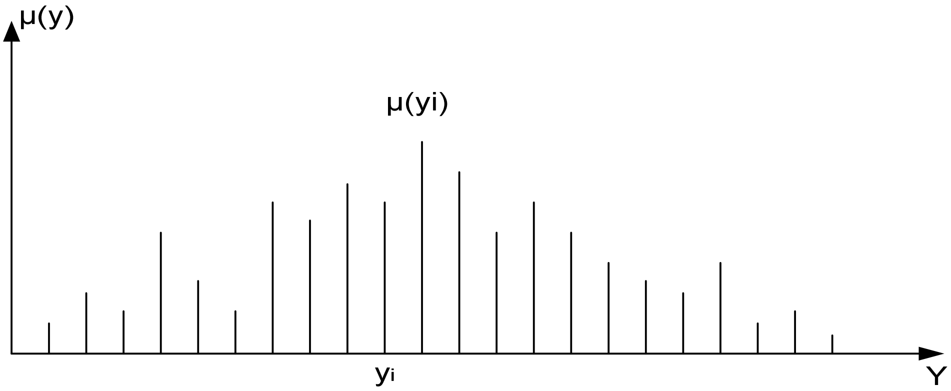


Рис. 4.7

Очевидно, что точность определения $\mu_Y(y)$ зависит от дискретности разбиения множеств исходных значений x_i. После получения множества значений $\mu_Y(y)$ (рис. 4.7) его разбивают на подмножества g_k. Результирующую функцию принадлежности определяют следующим образом: $\mu_{g_k} = \max\limits_{y_л \in g_k} \mu_Y(y_{j_k})$ (рис. 4.8). В результате будет получена ступенчатая аппроксимация искомой функции принадлежности. В последствии возможно применение и другого варианта интерполяции. Выбор количества дискретных отсчетов исходных значений x_i можно осуществить, задаваясь точностью представления функций принадлежности.

Отметим, что данный алгоритм может применяться и для многоместных арифметических операций, однако вычислительные трудности в этом случае существенно возрастают.

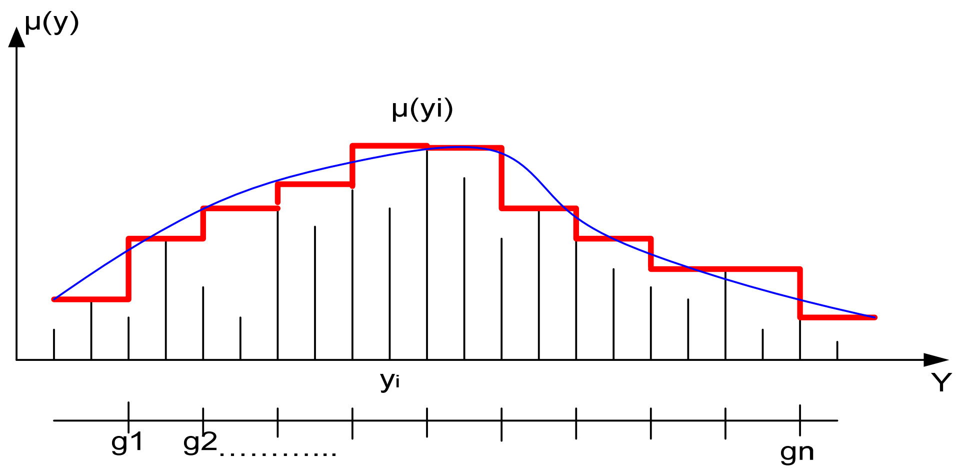


Рис. 4.8

4.5. Свойства арифметических операций над нечеткими числами

Арифметические операции умножения и сложения для нечетких чисел:

- коммутативны $\tilde{A}\cdot\tilde{B}=\tilde{B}\cdot\tilde{A}$, $\tilde{A}+\tilde{B}=\tilde{B}+\tilde{A}$;
- ассоциативны $\tilde{A}\cdot(\tilde{B}\cdot\tilde{C})=\left(\tilde{A}\cdot\tilde{B}\right)\cdot\tilde{C}$, $\tilde{A}+\left(\tilde{B}+\tilde{C}\right)=\left(\tilde{A}+\tilde{B}\right)+\tilde{C}$;
- в общем виде не дистрибутивны $\tilde{A}\cdot\left(\tilde{B}+\tilde{C}\right)\neq\tilde{A}\cdot\tilde{B}+\tilde{A}\cdot\tilde{C}$.

4.6. Нечеткие уравнения

Как отмечалось в начале этого раздела нечеткое число $\tilde{A}$ не имеет противоположного $\tilde{A}$ и обратного $(\tilde{A})^{-1}$ чисел. На основе этого результата в [17] сделан вывод о невозможности точного решения нечетких уравнений. Для их решения в [18] были введены операции дополнительного деления и вычитания.

Дополнительное вычитание

Пусть $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ нечеткие числа, для которых известны (a_L, a_R) и (b_L, b_R), при этом

$$a_L\text{-}b_L \le a_R\text{-}b_R \text{ или } a_R\text{-}a_L \ge b_L\text{-}b_R, \qquad (4.6)$$

т.е. расстояние между правой и левой границами у уменьшаемого больше, чем у вычитаемого. Тогда $\tilde{Z} = A - B$ представляет собой нечеткое число, функция принадлежности которого задается соотношением

$$\mu_Z(Z) = \inf\begin{cases} 1, & \text{если} \quad \mu_B(x-Z) \le \mu_A(x) \\ \mu_A, & \text{если} \quad \mu_B(x-Z) \ge \mu_A(x) \end{cases},$$

при этом $z_L = a_L\text{-}b_L$, $z_R = a_R\text{-}b_R$.

Пример. Пусть $\tilde{B}$ - нечеткое число «приблизительно 8» = $\{^0/_6, {}^{0.5}/_7, {}^1/_8, {}^{0.5}/_9, {}^0/_{10}\}$,

$\tilde{A}$ - нечеткое число «приблизительно 14» = $\{^0/_{10}, {}^{0.5}/_{12}, {}^1/_{14}, {}^{0.5}/_{16}, {}^0/_{18}\}$,

Соответственно b_L=6, b_R=10, a_L=10, a_R=18.

Составим табл. 4.1.

Таблица 4.1

Z	μ	X									μ_z (z)
		10	11	12	13	14	15	16	17	18	
4	$\mu_B(x\text{-}z)$	0	0.5	1.0	0.5	0	-	-	-	-	-
	$\mu_L(x)$	0	0.25	0.5	0.75	1.0	0.75	0.5	0.25	0	0
5	$\mu_B(x\text{-}z)$	-	0	0.5	0.1	0.5	0	-	-	-	-
	$\mu_L(x)$	0	0.25	0.5	0.75	1.0	0.75	0.5	0.25	0	0.5
6	$\mu_B(x\text{-}z)$	-	-	0	0.5	1.0	0.5	0	-	-	-
	$\mu_L(x)$	0	0.25	0.5	0.75	1.0	0.75	0.5	0.25	0	1.0
7	$\mu_B(x\text{-}z)$	-	-	-	0	0.5	1.0	0.5	0	-	-
	$\mu_L(x)$	0	0.25	0.5	0.75	1.0	0.75	0.5	0.25	0	0.5
8	$\mu_B(x\text{-}z)$	-	-	-	-	0	0.5	1.0	0.5	0	-
	$\mu_L(x)$	0	0.25	0.5	0.75	1.0	0.75	0.5	0.25	0	0

Таким образом, нечеткие числа Z={0/4, 0,5/5, 1,0/6, 0,5/7, 0/8}. Проверяем, выполняется ли для полученного значения $\tilde{Z}$ (4.6). Для этой цели вычислим значение суммы $\tilde{Z}+\tilde{B}$, используя метод уровневых множеств. Результаты расчетов приведены в табл. 4.1, из которой следует, что $\tilde{Z}+\tilde{B}=(\tilde{A}-\tilde{B})+\tilde{B}=A$. В то же время условие (4.6) накладывает достаточно заметное ограничение на применение этого метода.

Дополнительное деление

При дополнительном делении вводятся следующие ограничения:

$$\begin{aligned} &a_R/a_L > b_R/b_L, \text{ если } (a_L, a_R)>0 \text{ и } (b_L, b_R)>0;\\ &a_R/a_L > b_L/b_R, \text{ если } (a_L, a_R)<0 \text{ и } (b_L, b_R)>0;\\ &a_L/a_R > b_R/b_L, \text{ если } (a_L, a_R)>0 \text{ и } (b_L, b_R)<0;\\ &a_L/a_R > b_L/b_R, \text{ если } (a_L, a_R)<0 \text{ и } (b_L, b_R)<0. \end{aligned} \tag{4.7}$$

При этом

$$\begin{aligned} &z_L = a_L/b_L,\\ &z_R = a_R/b_L, \text{ если } (a_L,a_R)>0 \text{ и } (b_L, b_R)>0;\\ &z_L = a_L/b_R,\\ &z_R = a_R/b_L, \text{ если } (a_L,a_R)<0 \text{ и } (b_L, b_R)>0;\\ &z_L = a_R/b_L,\\ &z_R = a_L/b_R, \text{ если } (a_L,a_R)>0 \text{ и } (b_L, b_R)>0;\\ &z_R = a_L/b_L,\\ &z_L = a_R/b_R, \text{ если } (a_L,a_R)<0 \text{ и } (b_L, b_R)<0. \end{aligned}$$

Очевидно, что дополнительное деление не определено для чисел, у которых a_L и a_R или b_L и b_R имеют различные знаки. Функция принадлежности нечеткого числа $\tilde{Z}=\tilde{A}/\tilde{B}$ определяется соотношением

$$\mu_Z(Z)=\inf\begin{cases}1, & \text{если } \mu_B(x/Z)<\mu_A(x);\\ \mu_A, & \text{если } \mu_B(x/Z)\geq\mu_A(x).\end{cases} \tag{4.8}$$

Пример. Пусть $\tilde{A}$ = приблизительно 24 = {0/6, 0.5/14, 1.0/24, 0.5/36, 0/50},

$\tilde{B}$ = приблизительно 9 = {0/6, 0.5/7, 1.0/8, 0.5/9, 0/10}.

Проверяем выполнение условий (4.7). Так как они выполняются, то дополнительное деление возможно. Результаты вычислений по формуле (4.8) приведены в табл. 4.2. Таким образом,

$$\tilde{Z} = \tilde{A} \odot \tilde{B} = \{0/1;\ 0.5/2;\ 1.0/3;\ 0.5/4;\ 0/5\}.$$

Проверим выполнение соотношения (4.7), вычислив с использованием уровневых множеств $\tilde{Z} \times \tilde{B} = \tilde{A}$ (рис. 4.9). Результаты вычислений приведены в табл. 4.3, из которой видно, что $\tilde{Z} \times \tilde{B} = \tilde{A}$. Необходимо отметить, что условия (4.7) существенно ограничивают область применения операции дополнительного деления.

Решим уравнение

$$\tilde{A}x + \tilde{B} = \tilde{D}, \tag{4.9}$$

где $\tilde{A}=\{0/6;\ 0.5/7;\ 1.0/8;\ 0.5/9;\ 0/10\}$;

$\tilde{B}=\{0/2;\ 0.5/3;\ 1.0/4;\ 0.5/5;\ 0/6\}$;

$\tilde{D}=\{0/8;\ 0.5/17;\ 1.0/28;\ 0.5/41;\ 0/48\}$.

Решение (4.9) будем проводить в два этапа. Производим необходимые проверки и при их выполнении вычисляем $\tilde{C}=\tilde{D}-\tilde{B}$ (табл. 4.3). Затем решаем уравнение $\tilde{A}x = \tilde{C}$. Проверяем условия применимости дополнительного деления и находим $\tilde{X}=\tilde{C} \odot \tilde{A}$ (табл. 4.4).

Для проверки правильности решения подставим найденное значение $\tilde{X}$ в (4.9). Используя уровневые множества, выполним необходимые расчеты (табл. 4.5). Результаты показывают, что найденное значение $\tilde{X}$ является решением уравнения (4.9).

Таблица 4.2

x	μ	t					$\mu_x(x)$
		6	14	24	36	50	
1	$\mu_A(t/x)$	0	-	-	-	-	-
	$\mu_B(t)$	0	0.5	1.0	0.5	0	0
2	$\mu_A(t/x)$	-	0.5	-	-	-	-
	$\mu_B(t)$	0	0.5	1.0	0.5	0	0.5
3	$\mu_A(t/x)$	-	-	1.0	-	-	-
	$\mu_B(t)$	0	0.5	1.0	0.5	0	1.0
4	$\mu_A(t/x)$	-	-	-	0.5	-	-
	$\mu_B(t)$	0	0.5	1.0	0.5	0	0.5
5	$\mu_A(t/x)$	-	-	-	0.6	0	-
	$\mu_B(t)$	0	0.5	1.0	0.5	0	0

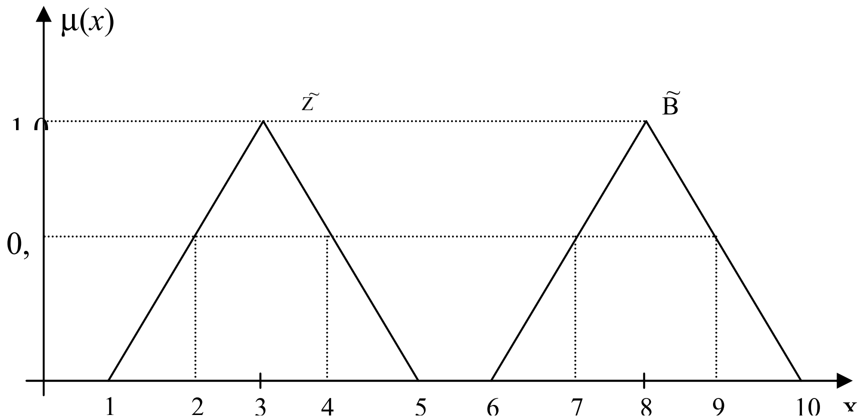


Рис. 4.9

Таблица 4.3

α	Z / B	$\mu_{\tilde{Z}}$	$\mu_{\tilde{B}}$	$\tilde{Z}\times\tilde{B}$	$\mu_{\tilde{Z}\times\tilde{B}}$
0	1 6	0	0	6	0
0.5	2 7	0.5	0.5	14	0.5
1.0	3 8	1.0	1.0	24	1.0
0.5	4 9	0.5	0.5	36	0.5
0	5 10	0	0	50	0

Таблица 4.4

x	μ	T					$\mu_x(x)$
		8	17	28	41	48	
6	$\mu_B(2-x)$ $\mu_D(2)$	0 0	- 0.5	- 1.0	- 0.5	- 0	- 0
14	$\mu_B(2-x)$ $\mu_D(2)$	- 0	0.5 0.5	- 1.0	- 0.5	- 0	- 0.5
24	$\mu_B(2-x)$ $\mu_D(2)$	- 0	- 0.5	1.0 1.0	- 0.5	- 0	- 1.0
36	$\mu_B(2-x)$ $\mu_D(2)$	- 0	- 0.5	- 1.0	0.5 0.5	- -	- 0.5
42	$\mu_B(2-x)$ $\mu_D(2)$	- 0	- 0.5	- 1.0	- 0.5	0 0	- 0

$x = d - b$

Таблица 4.5

x	μ	T					$\mu_x(x)$
		6	14	24	36	42	
1	$\mu_A(t/x)$ $\mu_C(t)$	0 0	- 0.5	- 1.0	- 0.5	- 0	- 0
2	$\mu_A(t/x)$ $\mu_C(t)$	- 0	0.5 0.5	- 1.0	- 0.5	- 0	- 0.5
3	$\mu_A(t/x)$ $\mu_C(t)$	- 0	- 0.5	1.0 1.0	- 0.5	- 0	- 1.0
4	$\mu_A(t/x)$ $\mu_C(t)$	- 0	- 0.5	- 1.0	0.5 0.5	- -	- 0.5
4.2	$\mu_A(t/x)$ $\mu_C(t)$	- 0	- 0.5	- 1.0	- 0.5	0 0	- 0

$\tilde{X} = \{0/1;\ 0.5/2;\ 1.0/3;\ 0.5/4;\ 0/4.2\}$

Таблица 4.6

$\tilde{V}$	$\mu(v)/v$				
	$\mu(v_1)/v_1$	$\mu(v_2)/v_2$	$\mu(v_3)/v_3$	$\mu(v_4)/v_4$	$\mu(v_5)/v_5$
$\tilde{X}$	0/1	0.5/2	1/3	0.5/1	0/4.2
$\tilde{A}$	0/6	0.5/1	1/8	0.9/9	0/10
$\tilde{A}\cdot\tilde{X}$	0/6	0.5/14	1/24	0.5/36	0/42
$\tilde{B}$	0/2	0.5/3	1/4	0.5/5	0/6
$\tilde{A}\cdot\tilde{X}+\tilde{B}$	0/8	0.5/17	1/28	0.5/41	0/48

Для иллюстрации свойств дополнительного вычитания и деления определим $\tilde{X}$, используя арифметические операции, определенные для расчетов с использованием уровневых множеств. На первом этапе определяем $\tilde{C}'=\tilde{D}+(-\tilde{B})=\{0/2;\ 0.5/12;\ 1/24;\ 0.5/18;\ 0/46\}$. На втором $1/\tilde{A} = \tilde{A}^{-1} = \{0/(1/6);\ 0.5/(1/7);\ 1/(1/18);\ 0.5/(1/9);\ 0/(1/10)\}$ и

$\tilde{X}' = \tilde{C}' \cdot 1/\tilde{A} = \{0/(2/10);\ 0.5/(12/9);\ 1/(24/3);\ 0.5/(38/1);\ 0/(46/6)\}$.

Заметим, что проведенные расчеты дают результаты, отличные от предыдущих. Подставим найденное значение $\tilde{X}$ в левую часть (4.7) и, выполнив все необходимые расчеты, найдем значение

D' = {0/3.2, 0.5/12.3, 1/28, 0.5/53.8, 0/82.6}. Нетрудно видеть, что D' и D не совпадают, это говорит о том, что значение $\tilde{X}'$ не является решением уравнения (4.7) $\tilde{X} \subset \tilde{X}'$ (табл. 4.6).

Контрольные вопросы

1. В чем состоят основные особенности нечеткой математики?
2. Какие особенности возникают при решении нечетких уравнений?
3. Какие виды нечетких чисел могут быть названы в зависимости от вида функций принадлежности?
4. Какие допущения выдвигаются в арифметике LR-нечетких чисел?
5. Какие ограничения на характер функций принадлежности накладываются при выполнении арифметических операций с использованием α- разбиения?
6. Какие арифметические операции над нечеткими числами строго определены в арифметике на основе α- разбиения?
7. Какой метод выполнения арифметических операций над нечеткими числами в наибольшей степени свободен от ограничений на характер функций принадлежности?

5. ОСНОВЫ НЕЧЕТКОЙ ЛОГИКИ

Нечеткая логика была разработана для формализации способности человека оперировать неточными или приближенными суждениями, которые позволяют более адекватно описывать реальные ситуации. Классическая, булевская логика, оперирующая только понятиями «истина» или «ложь», по существу игнорирует проблему неопределенности в человеческих суждениях.

Для того чтобы получить возможность отражать эту неопределенность, необходима логическая система, в которой, кроме понятий «истина» или «ложь», можно было бы использовать и некоторые дополнительные значения истинности. Одним из первых такую систему предложил польский математик Ян Лукасевич. В логике Лукасевича использовались три значения истинности: «0-ложь», «1-истина», «0,5-возможно». В качестве высказываний с истинностным значением «возможно» могут выступать и такие, которые относятся к будущим моментам времени.

Наряду с понятием нечеткого множества Л. Заде предложил обобщение классической логики на основе бесконечного множества значений истинности. В предложенном Л. Заде варианте нечеткой логики множество истинностных значений расширяется до интервала [0, 1], что позволяет присваивать высказыванию любое значение истинности. Соответствующее численное значение будет количественной оценкой степени истинности высказывания, относительно которого нельзя с полной уверенностью делать заключение о его истинности или ложности.

Для задания нечеткой истинности Л. Заде предложил следующие функции принадлежности термов «истинно» и «ложно»:

$$\mu_{\text{"истинно"}}(u)=\begin{cases}0, & 0\le u\le a\\ 2\cdot\left(\frac{u-a}{1-a}\right)^2, & a<u\le\frac{a+1}{2}\\ 1-2\cdot\left(\frac{u-1}{1-a}\right)^2, & \frac{a+1}{2}<u\le 1\end{cases};$$

$$\mu_{\text{"ложно"}}(u)=\mu_{\text{"истинно"}}(1-u),\quad u\in[0,1],$$

где $a\in[0,1]$ - параметр, определяющий носители нечетких множеств «истинно» и «ложно». Для нечеткого множества «истинно» носителем будет интервал $(a,1]$, а для нечеткого множества «ложно»; $[0,a)$.

Функции принадлежности нечетких термов «истинно» и «ложно» изображены на рис. 5.1. Они построены при значении параметра $a=0.4$. Как видно, графики функций принадлежности термов «истинно» и «ложно» представляют собой зеркальные отображения.

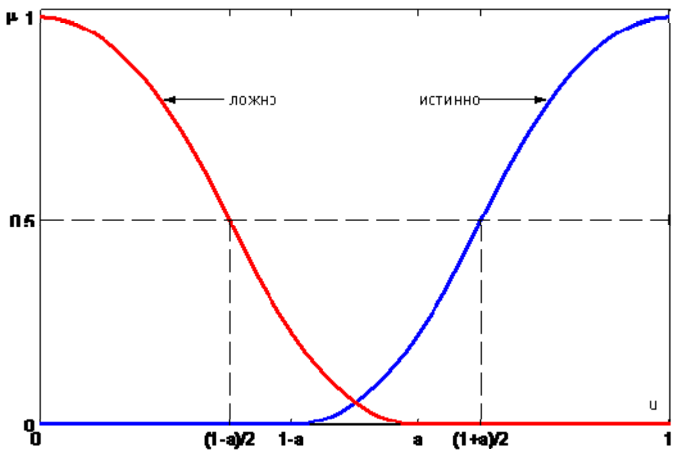


Рис. 5.1

Модификаторы «более-менее» и «очень» часто применяют к нечеткими множествами «истинно» и «ложно», получая таким образом термы «очень ложно», «более-менее ложно», «более-менее истинно», «очень истинно», «очень, очень истинно», «очень, очень ложно» и т.п. Функции принадлежности новых термов получают, выполняя операции концентрации и растяжения нечетких множеств «истинно» и «ложно». Тогда функции принадлежности термов «очень, очень ложно», «очень ложно», «более-менее ложно», «более-менее истинно», «истинно», «очень истинно» и «очень, очень истинно» задаются следующим образом:

$$\mu_{\text{очень ложно}}(u) = (\mu_{\text{ложно}}(u))^2;$$

$$\mu_{\text{очень, очень ложно}}(u) = (\mu_{\text{очень ложно}}(u))^2$$

$$\mu_{\text{более-менее ложно}}(u) = (\mu_{\text{ложно}}(u))^{1/2};$$

$$\mu_{\text{более-менее истинно}}(u) = (\mu_{\text{истинно}}(u))^{1/2};$$

$$\mu_{\text{очень истинно}}(u) = (\mu_{\text{истинно}}(u))^2;$$

$$\mu_{\text{очень, очень истинно}}(u) = (\mu_{\text{очень истинно}}(u))^2.$$

Графики функций принадлежности этих термов показаны на рис. 5.2.

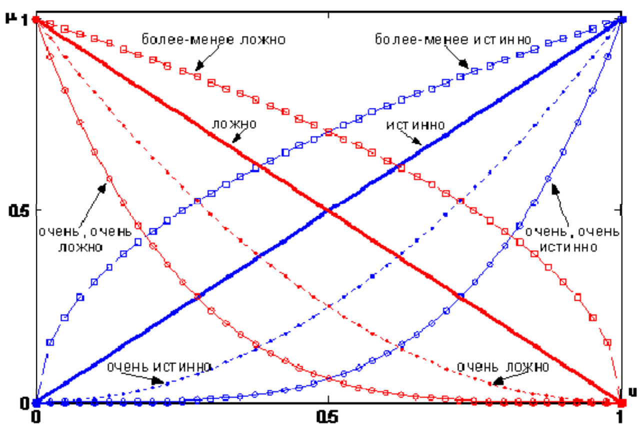


Рис. 5.2

5.1. Основные операции над нечеткими логическими переменными

Обозначим нечеткие логические переменные через $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$, а функции принадлежности, задающие истинностные значения этих переменных через $\mu_{\tilde{A}}(u)$ и $\mu_{\tilde{B}}(u)$, $u \in [0,1]$. *Нечеткие логические операции* конъюнкция (И, $\wedge$), дизъюнкция (ИЛИ, $\vee$), логическое отрицание (НЕ, $\neg$ или $^{-}$) выполняются по следующим правилам:

$$\mu_{\tilde{A}\wedge\tilde{B}}(u) = \min\{\mu_{\tilde{A}}(u), \mu_{\tilde{B}}(u)\};$$

$$\mu_{\tilde{A}\vee\tilde{B}}(u) = \max\{\mu_{\tilde{A}}(u), \mu_{\tilde{B}}(u)\};$$

$$\mu_{\neg\tilde{A}}(u) = 1 - \mu_{\tilde{A}}(u).$$

Большое значение в нечеткой логике имеет нечеткая импликация.

Нечеткой импликацией $\tilde{A} \Rightarrow \tilde{B}$ (читается «из $\tilde{A}$ следует $\tilde{B}$» или «если $\tilde{A}$, то $\tilde{B}$») называется бинарная логическая операция, результатом которой является нечеткое высказывание, значение истинности которого определятся одной из следующих формул:

- классическая импликация Л. Заде

$$\tilde{A} \Rightarrow \tilde{B} = \max\{\min[\mu_{\tilde{A}}(u), \mu_{\tilde{B}}(u), 1 - \mu_{\tilde{A}}(u)]\};$$

- классическая нечеткая импликация для случая $\mu_{\tilde{A}}(u) \geq \mu_{\tilde{B}}(u)$

$$\tilde{A} \Rightarrow \tilde{B} = \max\{\mu_{\neg\tilde{A}}(u), \mu_{\tilde{B}}(u)\} = \max\{1 - \mu_{\tilde{A}}(u), \mu_{\tilde{B}}(u)\};$$

- нечеткая импликация И. Мамдани

$$\tilde{A} \Rightarrow \tilde{B} = \min\{\mu_{\tilde{A}}(u), \mu_{\tilde{B}}(u)\};$$

- нечеткая импликация Я. Лукасевича

$$\tilde{A} \Rightarrow \tilde{B} = \min\{1, 1 - \mu_{\tilde{A}}(u) + \mu_{\tilde{B}}(u)\};$$

- нечеткая импликация Дж. Гогена

$$\tilde{A} \Rightarrow \tilde{B} = \min\{1, \mu_{\tilde{B}}(u) / \mu_{\tilde{A}}(u)\},\ \mu_{\tilde{A}}(u) > 0;$$

- нечеткая импликация по формуле граничной суммы

$$\tilde{A} \Rightarrow \tilde{B} = \min\{1, \mu_{\tilde{A}}(u) + \mu_{\tilde{B}}(u)\};$$

- нечеткая импликация по формуле произведения

$$\tilde{A} \Rightarrow \tilde{B} = \mu_{\tilde{A}}(u)\ \mu_{\tilde{B}}(u);$$

- нечеткая импликация по формуле Н. Вади

$$\tilde{A} \Rightarrow \tilde{B} = \max\{\mu_{\tilde{A}}(u) * \mu_{\tilde{B}}(u), 1 - \mu_{\tilde{A}}(u)\}.$$

Нечеткая импликация играет важную роль в процессе обработки нечетких логических рассуждений. Так же, как и в классической логике, первый ее операнд называют *посылкой,* или *антецедентом*, а второй – *заключением*, или *консеквентом*. Хотя классическая нечеткая импликация находит наибольшее применение при решении прикладных задач и остается справедливой в случае обычных высказываний классической логики, однако остальные способы вычисления нечеткой импликации в отдельных случаях оказываются более эффективными с вычислительной точки зрения.

5.2. Нечеткие выводы

В системах нечеткого вывода условия и заключения формулируются в виде нечетких высказываний относительно тех или иных лингвистических переменных. Поскольку понятие нечеткого лингвистического высказывания имеет фундаментальное значение для систем нечеткого вывода, необходимо определить это понятие.

Нечеткими высказываниями [19] назовем высказывания следующего вида:

1 – высказывание <β есть α>, где β- наименование лингвистической переменной, представляющей некоторый объект или параметр реальной действительности, относительно которой высказывается утверждение α, являющееся ее нечеткой оценкой (например риск большой);

2 – высказывания вида <β есть *m*α>, <β есть *Q*α>, <*Q*β есть *m* α>, <*m*β есть Q α>, при этом *m* называется модификатором (ему соответствуют такие слова, как ОЧЕНЬ, БОЛЕЕ ИЛИ МЕНЕЕ, НЕЗНАЧИТЕЛЬНЫЙ, СРЕДНИЙ и др.), Q-квантификатором (ему соответствуют слова типа БОЛЬШИНСТВО, МНОГО, НЕСКОЛЬКО, ОЧЕНЬ МАЛО и др.);

3 - высказывания, образованные из высказываний 1-го и 2-го видов и союзов И, ИЛИ, ЕСЛИ…,ТО…, ЕСЛИ...ТО…, ИНАЧЕ….

Необходимо отметить, что отождествление данных союзов с логическими операциями конъюнкции, дизъюнкции, отрицания и импликации в строгом смысле возможно только при предварительном рассмотрении вопроса коммутативности, ассоциативности и дистрибутивности высказываний, образующих предложения.

Нечеткое высказывание вида 3-го представляющее частный случай нечеткой продукции, назовем нечетким условным высказыванием. Некоторое согласованное множество отдельных нечетких условных высказываний можно рассматривать как систему нечетких правил вывода. Основная задача нечеткого вывода заключается в том, чтобы на основе некоторых нечетких высказываний с известной степенью истинности, которые находятся в условной части правил вывода, оценить степень истинности других нечетких высказываний, являющихся заключением (следствием) данного правила.

Нетрудно заметить, что взаимосвязь между условием и заключением в нечетком условном высказывании в общем случае представляет собой некоторое бинарное соответствие на декартовом произведении универсальных множеств соответствующих высказываний.

Пусть нечеткое множество $\tilde{A}=\{\mu_{\tilde{A}}(x)\}$, $x\in X$ интерпретируется как условие некоторого нечеткого условного высказывания, а нечеткое множество $\tilde{B}=\{\mu_{\tilde{B}}(y)\}$, $y\in Y$ - как заключение этого же высказывания. При этом универсальные множества X и Y будем рассматривать как подмножества универсального множества U. Для подавляющего большинства практических задач с достаточной степенью строгости нечеткое условное высказывание можно рассматривать как нечеткую импликацию. Тогда задача обработки нечеткого условного высказывания сводится к задаче обработки нечеткой импликации по одной из известных формул, например,

$$\tilde{A}\Rightarrow\tilde{B}=\min\{\mu_{\tilde{A}}(x),\mu_{\tilde{B}}(y)\}. \tag{5.1}$$

Преобразование (5.1) удобно тем, что оно сохраняет вид функции принадлежности и позволяет выделить каждое преобразование и процесс его построения даже из информации в табличной форме. Среди недостатков этого правила можно отметить коммутативность, отсутствие разницы между выводами типа $(A\cap B)\to C$, $A\to(B\to C)$ и невозможность использовать связку «ИЛИ» вместо «И» для интерпретации связки «ИНАЧЕ» для получения протокола применения правил: Правило 1, иначе Правило 2, иначе ...

Другие правила лишены этого недостатка за счет того, что каждому правилу нельзя сопоставить его область влияния. Например, арифметические связки в $\tilde{A}\Rightarrow\tilde{B}=\min\{1,1-\mu_{\tilde{A}}(u)+\mu_{\tilde{B}}(u)\}$ приводят к получению новых значений функции принадлежности, что требует выполнения аппроксимации. Правило $\tilde{A}\Rightarrow\tilde{B}=\max\{\mu_{\neg\tilde{A}}(u),\mu_{\tilde{B}}(u)\}=\max\{1-\mu_{\tilde{A}}(u),\mu_{\tilde{B}}(u)\}$ лишено всех указанных недостатков и является наиболее «человеческим» [5] по природе, так как, если предпосылка А дает следствие Б, то предпосылка А, близкая к А, дает следствие Б, близкое к Б. Это свойство особенно важно для систем с участием «человеческого фактора», где все ситуации не могут быть заданы с помощью набора правил. Однако, несмотря на отмеченные недостатки, преобразование (5.1) является наиболее часто используемым.

5.3. Процесс нечеткого условного вывода

Системы нечеткого вывода предназначены для преобразования значений входных переменных процесса управления в выходные переменные на основе использования правил нечеткого условного вывода. Информация, которая поступает на вход системы нечеткого вывода, может поступать в различной форме. В системах управления – это измеренные некоторым образом входные переменные, соответствующие реальным переменным процесса управления. На выходе системы нечеткого вывода должны быть сформированы выходные переменные, соответствующие управляющим переменным процесса управления.

Получение заключений в системах нечеткого вывода базируется на разделении процесса вывода на ряд последовательных этапов, реализация которых выполняется на основе рассмотренных ранее основных положений нечеткой логики (рис. 5.3).

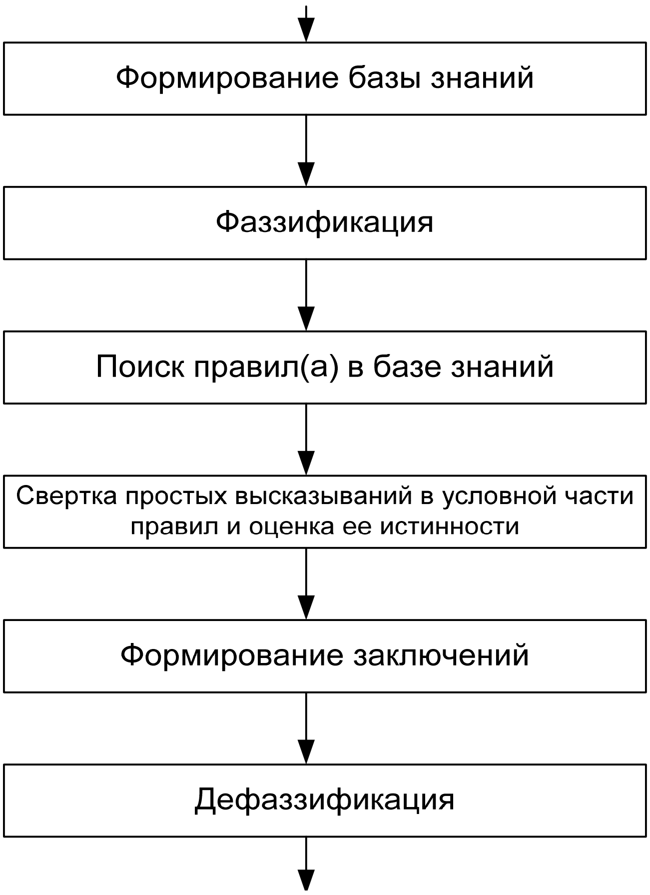


Рис. 5.3

Основной компонентой, которая во многом определяет получаемое качество управления (принятия решения), будет база знаний системы нечеткого условного вывода, которая представляет собой множество согласованных правил нечеткого условного вывода. Процесс построения базы знаний должен рассматриваться отдельно. Здесь же отметим только основные условия, которые должны быть выполнены при ее построении:

1- правила, образующие базу знаний системы, не должны быть противоречивыми;

2 - система правил должна быть полной и неизбыточной.

Фаззификация

Цель этапа фаззификации – установление соответствия между конкретным (обычно числовым) значением конкретной входной переменной системы нечеткого вывода и ее соответствующим лингвистическим значением, представленным функцией принадлежности.

До начала этапа фаззификации определяются области определения всех входных переменных $D(x_i)$, где $x_i \in D(x_i)$- входная переменная системы, являющиеся по сути универсальными множествами, на которых будут определяться лингвистические значения и соответствующие им нечеткие множества.

В общем случае входной переменной $x_i \in D(x_i)$ может быть поставлено в соответствие терм-множество лингвистических значений $T_x = \{\tau_j : j = \overline{1, J_{x_i}}\}$, множество имен лингвистической переменной $L_{x_i} = \{l_j ; j = \overline{1, J_{x_i}}\}$ и соответствующие нечеткие множества $\tilde{A} = \{\mu_{l_j}(x_i) \setminus x_i \in D(x_i) : j = \overline{1, J_{x_i}}\}$, где J_{x_i}- число лингвистических значений входной переменной x_i.

Формально процедура фаззификации состоит в проверке выполнения условий «α есть β», содержащихся в правилах условного нечеткого вывода, находящихся в базе знаний системы. Более просто и наглядно ее можно представить в графической форме (рис. 5. 4)

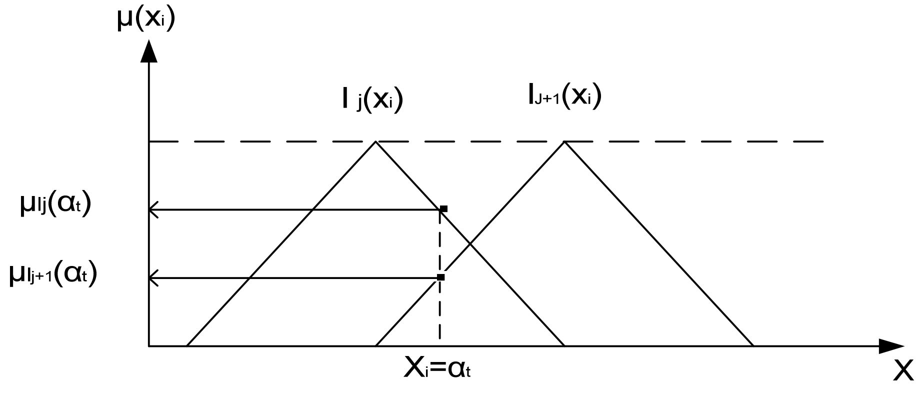


Рис. 5.4

Значение функции принадлежности можно интерпретировать как оценку истинности выполнения нечеткого высказывания, поэтому в данном случае (см. рис. 5.4) истинность высказывания «x_i есть l_j» больше, чем истинность высказывания «x_i есть l_{j+1}» $\mu_{l_j}(\alpha_t) > \mu_{l_{j+1}}$.

Таким образом, при фаззификации могут быть получены два результата, что определяет возможность использования нескольких правил нечеткого условного вывода при получении окончательного заключения. Поэтому при построении системы должно быть принято решение, как будут применяться результаты фаззификации: будет использоваться один результат или оба.

Процесс фаззификации для конкретной входной переменной считается законченным, когда будут проверены все соответствующие ей возможные лингвистические значения. Однако в этом нет необходимости, так как если соблюдаются правила построения исходных функций принадлежности, то текущее значение входной переменной может идентифицироваться только с двумя соседними лингвистическими значениями (см. рис. 5.4).

<u>Определение подходящего правила</u>

Для выработки заключения в базе знаний системы необходимо выбрать те правила условного нечеткого вывода, у которых в условной части содержатся высказывания, в которых присутствует входная переменная с установленным в процессе фаззификации лингвистическим значением.

В зависимости от того, какое соглашение принято относительно использования результатов фаззификации, будет выбрано различное число правил вывода, которые потенциально могут рассматриваться как подходящие для получения заключения. Необходимо отметить, что задача поиска правил имеет самостоятельное значение, так как эффективность алгоритма поиска непосредственно скажется на эффективности всей системы в целом. Особенно важно время поиска правил для нечетких систем управления техническими объектами, когда задача управления решается в реальном масштабе времени и время, отводимое на выработку управляющего воздействия, ограничено условиями динамики управляемого процесса.

<u>Свертка высказываний в условной части и обработка правил</u>

В общем случае в условной части правил нечеткого вывода содержится составное нечеткое высказывание, составленное из простых, которые связываются логическими связками. Кроме того, внутри простых высказываний возможно использование логических связок, модификаторов и квантификаторов. В соответствии со структурой условной части выбранных правил нечеткого условного вывода по правилам нечеткой логики должна быть выполнена свертка высказываний с целью получения интегрального условия, соответствующего всей совокупности высказываний в условной части правила.

На этапе фаззификации для простого высказывания получается оценка его истинности в виде значения некоторой функции принадлежности $\mu_{l_j}(\alpha_t)$. В результате выполнения свертки простых высказываний с соответствующими оценками истинности будет получена интегральная оценка истинности выполнения условной части правил $m_1, m_2, ..., m_p$, где p - число выбранных для построения заключения правил. В зависимости от установленного соглашения по использованию правил для формирования заключения может быть использовано одно правило с максимальным значением истинности выполнения условной части или же несколько правил, на основе которых будет выработано интегральное заключение. Количество правил может быть уменьшено, если установить некоторый порог истинности.

В любом случае последним этапом будет вычисление нечеткой импликации по одной из приведенных в п. 5.1 формул. В результате будет получено некоторое множество нечетких заключений, вытекающих из конкретных правил вывода. Варианты построения интегральных заключений будут рассмотрены далее на примерах конкретных алгоритмов нечеткого вывода. Интегральное заключение будет также представлено в форме нечеткого множества, на котором нужно будет выбрать единственное заключение. Эта задача решается на этапе дефаззификации.

<u>Дефаззификация</u>

В общем случае после вычисления импликаций будет получен некоторый набор нечетких множеств $\tilde{W} = \{w_1, w_2, ..., w_p\}$, $M = \{\mu_{\tilde{w}_1}(z), \mu_{\tilde{w}_2}(z), ..., \mu_{\tilde{w}_p}(z)\}$, где p – число обработанных нечетких правил, который для каждой из выходных переменных представляет множество допустимых значений вывода (управления).

В современных системах управления исполнительные устройства способны воспринимать команды управления в традиционной количественной форме, поэтому на полученном нечетком множестве допустимых управлений нужно выбрать единственное значение, представленное в количественной форме.

Дефаззификация в системах нечеткого вывода - это процедура нахождения обычного (не нечеткого) значения, которое может быть использовано внешними по отношению к системе нечеткого вывода элементами. Для реализации дефаззификации используются несколько методов.

1. Наиболее простым и часто используемым считается метод максимума функции принадлежности (рис. 5.5).

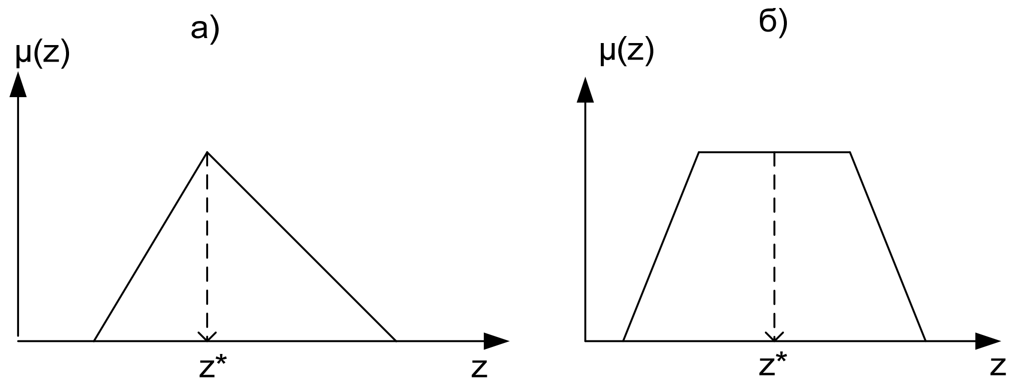


Рис. 5.5

В этом случае для унимодальной функции принадлежности результат дефаззификации определяется по координате ее максимума (рис. 5.5, *а*), для трапецеидальных результат определяется по середине верхнего основания (рис. 5.5, *б*). Для функций принадлежности с несколькими экстремумами метод максимума не дает однозначного решения.

2. Метод центра площади. Искомое значение z* определяется из уравнения $\int\limits_{\min Z}^{z^*} \mu(z)dz = \int\limits_{z^*}^{\max Z} \mu(z)dz$. Иными словами, определяется абсцисса прямой, делящей площадь по кривой функции принадлежности на две равные части. Метод центра площадей достаточно неудобен при реализации, не может быть использован, если функция принадлежности задана дискретными значениями, и является неоднозначным, так как возможно построение нескольких прямых (биссектрис площади), делящих площадь на равные части.

3. Метод центра тяжести. Идея этого метода состоит в том, что функцию принадлежности рассматривают как систему материальных точек, массы которых равны значениям функции принадлежности. Известно, что координата центра тяжести является обобщенной характеристикой системы материальных точек [20].

Для непрерывных функций принадлежности координата центра тяжести определяется соотношением

$$CG = z^* = \frac{\int_{\min Z}^{\max Z} z \times \mu(z)dz}{\int_{\min Z}^{\max Z} \mu(z)dz}.$$

Для дискретных функций $CG = z^* = \dfrac{\sum_{i=1}^{N} z_i \mu(z_i)}{\sum_{i=1}^{N} \mu(z_i)}$ (CG-Centre of Gravity).

Поскольку значения функции принадлежности интерпретируются как оценки истинности при выполнении дефаззификации, следует обращать внимание на то, какое максимальное значение имеет функция принадлежности, представляющая нечеткое заключение. Очевидно, что если это значение мало (рис. 5.6), то от принятия решения лучше воздержаться. Не исключается и вариант по пересмотру условий задачи.

Рассмотренные выше этапы нечеткого вывода могут быть реализованы различным образом, поскольку включают в себя отдельные параметры, которые должны быть фиксированы или специфицированы.

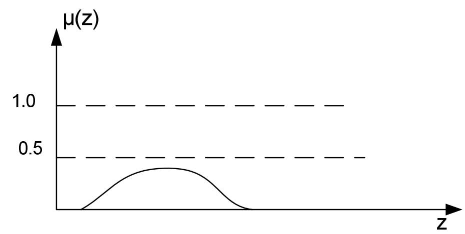


Рис. 5.6

5.4. Основные алгоритмы нечеткого вывода

Рассмотрим наиболее часто используемые алгоритмы нечеткого вывода [21]. Полагаем, для простоты, что база знаний системы состоит из двух нечетких правил:

П1: если x есть A_1 и y есть B_1, то z есть C_1;

П2: если x есть A_2 и у есть B_2, то z есть C_2, где x и y имена входных переменных, z- имя переменной вывода, A_1, A_2, B_1, B_2- лингвистические значения с соответствующими функциями принадлежности. При этом четкое значение вывода Z^* определяется на основе приведенных правил и значений входных переменных x_0 и y_0.

Алгоритм И. Мамдани (E. Mamdani) (рис. 5.7)

1. Введение нечеткости. Находятся степени истинности для предпосылок каждого правила: $\mu_{A_1}(x_0), \mu_{A_2}(x_0), \mu_{B_1}(y_0), \mu_{B_2}(y_0)$.

2. Логический вывод. Находятся уровни «отсечения» для предпосылок каждого правила с использованием операции min

$$\alpha_1 = \min\{\mu_{A_1}(x_0), \mu_{B_1}(y_0)\},\ \alpha_2 = \min\{\mu_{A_2}(x_0), \mu_{B_2}(y_0)\}.$$

Затем находятся функции принадлежности

$$\mu_1(z) = \min\{\alpha_1, \mu_{C_1}(z)\} \text{ и } \mu_2(z) = \min\{\alpha_2, \mu_{C_{21}}(z)\}. \qquad (5.2)$$

3. Композиция. Соотношения (5.2) определяют нечеткие множества, представляющие допустимые выводы, соответствующие правилам П1 и П2. Для получения интегрального вывода, удовлетворяющего оба правила, строится объединение

$$\mu'(z) = \max\{\mu_1(z), \mu_2(z)\} = \max\{\min[\alpha_1, \mu_{C_1}(z)], \min[\alpha_2, \mu_{C_2}(z)]\}.$$

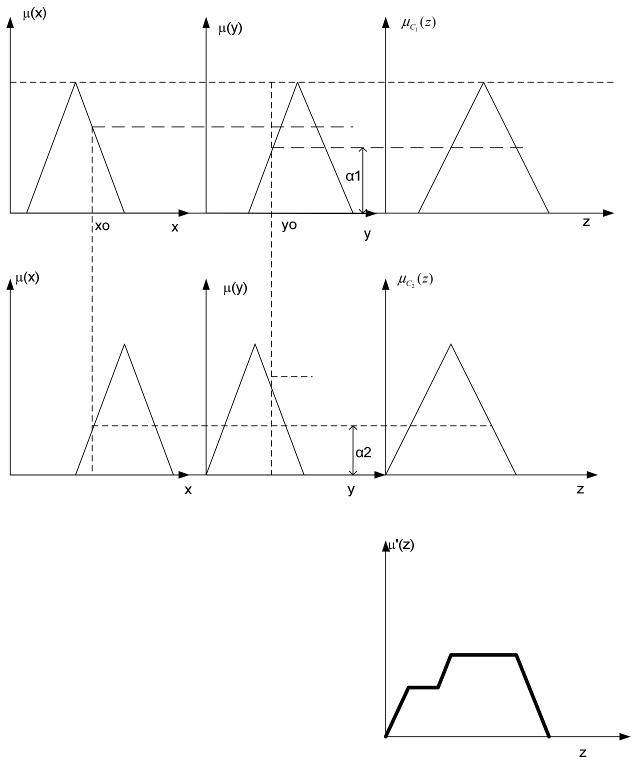


Рис. 5.7

4. Деффазификация. Нахождение Z^* выполняется с помощью одного из описанных методов дефаззификации, например по центру тяжести.

Алгоритм Сукамото (Tsukamoto) (рис. 5.8)

Исходные предпосылки те же, как и у алгоритма Мамдани, но предполагается, что функции $\mu_{C_1}(z)$ и $\mu_{C_2}(z)$ монотонные (см. рис. 5.8). Последнее условие не является строго обязательным.

1. Введение нечеткости. Выполняется так же, как и в алгоритме Мамдани.

2. Логический вывод. Находятся уровни «отсечения» для предпосылок каждого правила с использованием операции min: $\alpha_1 = \min\{\mu_{A_1}(x_0), \mu_{B_1}(y_0)\}$, $\alpha_2 = \min\{\mu_{A_2}(x_0), \mu_{B_2}(y_0)\}$. Затем решением уравнений $\alpha_1 = \mu_{C_1}(z)$ и $\alpha_2 = \mu_{C_2}(z)$ определяются четкие значения вывода z_1^* и z_2^* для каждого из правил П1 и П2. Интегральный четкий вывод находится как средневзвешенное $\mu_{C_1}(z)$ $\mu_{C_2}(z)$

$$z^* = \frac{\alpha_1 z_1^* + \alpha_2 z_2^*}{\alpha_1 + \alpha_2} \text{ или в общем случае } z^* = \frac{\sum_{j=1}^{n} \alpha_j z_j^*}{\sum_{j=1}^{n} \alpha_j}.$$

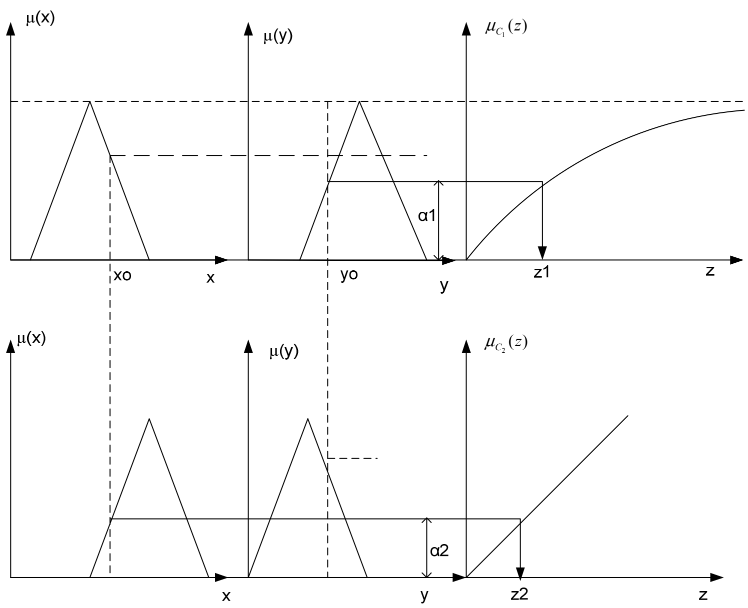


Рис. 5.8

Алгоритм Ларсена (Larsen) (рис. 5.9)

1. Введение нечеткости. Выполняется так же, как и в алгоритме Мамдани.

2. Логический вывод. Находятся уровни «отсечения» для предпосылок каждого правила с использованием операции min:

$\alpha_1 = \min\{\mu_{A_1}(x_0), \mu_{B_1}(y_0)\}$, $\alpha_2 = \min\{\mu_{A_2}(x_0), \mu_{B_2}(y_0)\}$. Затем определяются нечеткие множества, соответствующие правилам П1 $\mu_1'(z) = \alpha_1 \cdot \mu_{C_1}(z)$ и П2 $\mu_2'(z) = \alpha_2 \cdot \mu_{C_2}(z)$.

3. Композиция. Итоговое нечеткое множество строится с помощью операции объединения (max)

$\mu_\Sigma(z) = \max\{\mu_1'(z), \mu_2'(z)\} = \max\{\alpha_1 \cdot \mu_{C_2}(z), \alpha_2 \cdot \mu_{C_2}(z)\}$.

4. Дефаззификация . Выполняется любым из известных методов.

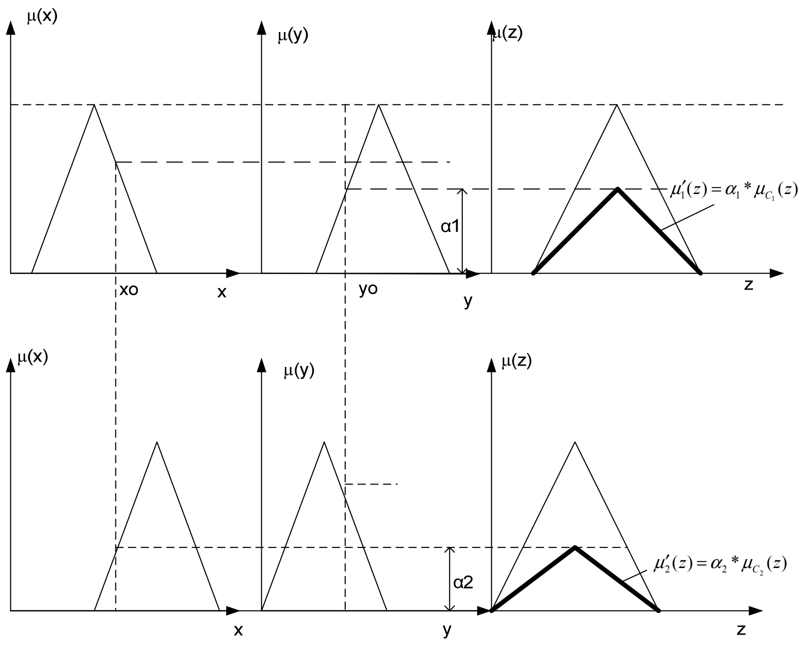


Рис. 5.9

Алгоритм Сугено (Sugano) (рис. 5.10)

В этом алгоритме в отличие от других используется набор правил следующего вида:

П1: если x есть A_1 и y есть B_1, то $z = a_1 x + b_1 y$;

П2: если x есть A_2 и y есть B_2, то $z = a_2 x + b_2 y$.

1. Введение нечеткости. Выполняется так же, как и в алгоритме Мамдани.

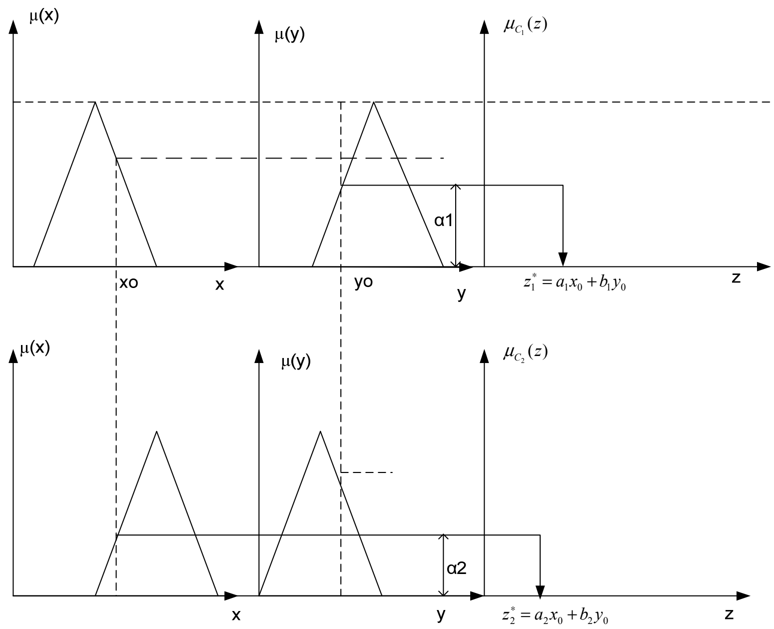


Рис. 5.10

2. Логический вывод. Находятся уровни «отсечения» для предпосылок каждого правила с использованием операции min:

$\alpha_1 = \min\{\mu_{A_1}(x_0), \mu_{B_1}(y_0)\}$, $\alpha_2 = \min\{\mu_{A_2}(x_0), \mu_{B_2}(y_0)\}$. Затем определяются выводы по каждому из правил $= z_1^* = a_1x_0 + b_1y_0$ и $z_2^* = a_2x_0 + b_2y_0$;

3. Итоговый вывод $z^* = \dfrac{\alpha_1 z_1^* + \alpha_2 z_2^*}{\alpha_1 + \alpha_2}$.

4. Дефаззификация. Выполняется любым из известных методов.

Приведенные выше алгоритмы основаны на формуле Л. Заде для вычисления нечеткой импликации.

Рассмотрим алгоритм, основанный на формуле Я. Лукасевича. Чтобы последовательность действий и конечный результат были более понятными, воспользуемся примером с конкретными числовыми значениями [19].

Пусть имеются входные переменные *X*=[10, 20], *Y*=[20, 40] и выходная *Z*=[20, 40], соответствующие термы

$T_z = \{$ примерно 20, примерно 30, примерно 40$\}=\{L_{z_1}, L_{z_2}, L_{z_3}\}$,

$T_x = \{$примерно 10, примерно 20$\}=\{L_{x_1}, L_{x_2}\}$,

$T_y = \{$примерно 20, примерно 40$\}=\{L_{y_1}, L_{Y_2}\}$ (рис. 5.11).

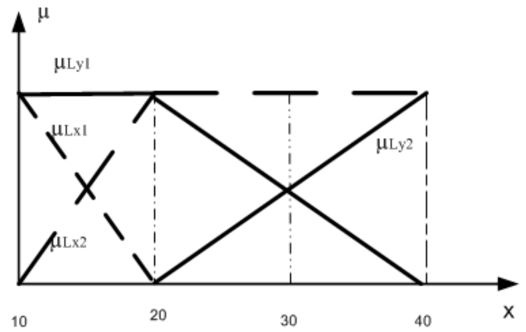


Рис. 5.11

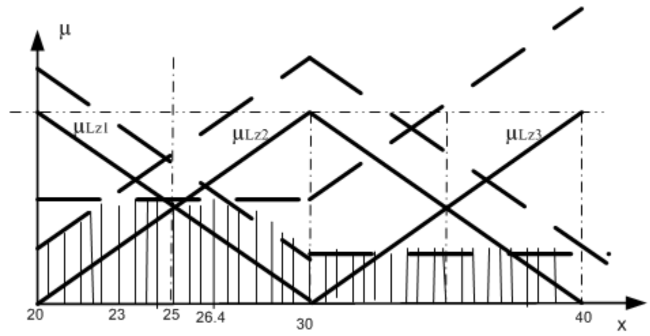


Рис. 5.12

Определены правила нечетного условного вывода:
если $x = < L_{X1} >$ и $y = < L_{Y1} >$, то $z = < L_{Z1} >$;
если $[x = < L_{X2} >$ и $y = < L_{Y1} >]$ или $[x = < L_{X1} >$ и $y = < L_{Y2} >]$,
то $z = < L_{Z2} >$;
если $x = < L_{X2} >$ и $y = < L_{Y2} >$, то $z = < L_{Z3} >$.

Пусть x=14, y=27. Из рис. 5.11 видно, что приведенные правила выполняются одновременно с различной степенью истинности.

Для первого правила импликативная форма будет иметь вид

$$\mu^1 = \min\left[1, 1 - \min\left(\mu_{Lx1}(x), \mu_{Ly1}(y)\right) + \mu_{Lz1}(z)\right]; \quad (5.3)$$

$$\mu^2 = \min\left[1, 1 - \max\left[\min\left(\mu_{Lx2}(x), \mu_{Ly1}(y)\right), \min\left(\mu_{Lx1}(x), \mu_{Ly2}(y)\right)\right] + \mu_{Lz2}(z)\right]; \quad (5.4)$$

$$\mu^3 = \min\left[1, 1 - \min\left(\mu_{Lx2}(x), \mu_{Ly2}(y)\right) + \mu_{Lz3}(z)\right]; \quad (5.5)$$

$$\mu' = \mu^1 \wedge \mu^2 \wedge \mu^3 = \min\left\{\mu^1, \mu^2, \mu^3\right\}.$$

Подставив в соотношения (5.3) – (5.4) соответствующие значения $\mu_{Lx1}(x) = 0.7$; $\mu_{Lx2}(x) = 0.3$; $\mu_{Ly1}(y) = 0.58$; $\mu_{Ly2}(y) = 0.44$, получим:

$$\mu^1 = \min[1, 1 - 0.58 + \mu_{Lz1}(z)] = \min[1, 0.42 + \mu_{Lz1}(z)];$$

$$\mu^2 = \min[1, 1 - 0.44 + \mu_{Lz2}(z)] = \min[1, 0.56 + \mu_{Lz2}(z)];$$

$$\mu^3 = \min[1, 1 - 0.3 + \mu_{Lz3}(z)] = \min[1, 0.7 + \mu_{Lz3}(z)].$$

Путем несложных графических построений получим пространство решений (заштрихованная область) (рис. 5.12). Зона максимальных значений μ' лежит в диапазоне z = [23, 26.4]. Используя, например, метод центра тяжести, на этом интервале можно найти значение, представляющее четкий вывод.

9. Какая операция используется при преобразовании правил конъюнктивной формы?

10. Какая операция используется при преобразовании правил дизъюнктивной формы?

Контрольные вопросы

1. На каких логических конструкциях основаны правила нечеткого вывода?
2. В чем состоит основная особенность правил нечеткого вывода?
3. Какие недостатки имеет формула Л. Заде?
4. Как следует выполнять дефаззификацию, если результирующая функция принадлежности имеет явно выраженный экстремум?
5. В каких случаях для дефаззификации следует применять метод центра тяжести?
6. Чем отличается алгоритм Ларсена от алгоритма Мамдани?
7. Какие логические свойства не выполняются в нечеткой логике?
8. Почему можно считать нечеткую логику обобщением классической логики?

6. ПРОГРАММНЫЕ СРЕДСТВА НЕЧЕТКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ И УПРАВЛЕНИЯ

6.1. Средства нечеткого моделирования и управления в пакете *Matlab*

Пакет *Matlab* компании *MathWoks* (США) содержит широкий набор готовых функций, используемых для нечеткого моделирования. В пакете имеется набор алгоритмов, образующих так называемый инструментарий, который может использоваться для проектирования, анализа и моделирования САУ. Кроме этого в пакете *Matlab* имеется набор блоков *Simulink,* позволяющий в графической форме выполнять моделирование достаточно сложных систем, в том числе и с использованием блоков, реализующих нечеткое управление.

Для решения задач методами теории нечетких множеств в пакете *Matlab* предусмотрен пакет нечеткой логики *Fuzzy Logic Toolbox* [22].

Основные возможности пакета:

- построение систем нечеткого вывода (экспертных систем, регуляторов, аппроксиматоров зависимостей);
- построение адаптивных нечетких систем (гибридных нейронных сетей);
- интерактивное динамическое моделирование в среде *Simulink*.

Пакет обеспечивает работу:

- в режиме графического интерфейса;
- в режиме командной строки;
- с использованием блоков и примеров пакета *Simulink*.

Моделирование нечеткого управления выполняется с помощью системы нечеткого вывода FIS (Fuzzy Inference System) (рис. 6.1), включающей редактор системы нечеткого вывода (FIS- Editor), редактор функций принадлежности (The Member Ship Function Editor), редактор правил (The Rule Editor), подсистему для просмотра правил и схем нечетких выводов (The Rule Viewer), полученных поверхностей (The Surface Viewer).

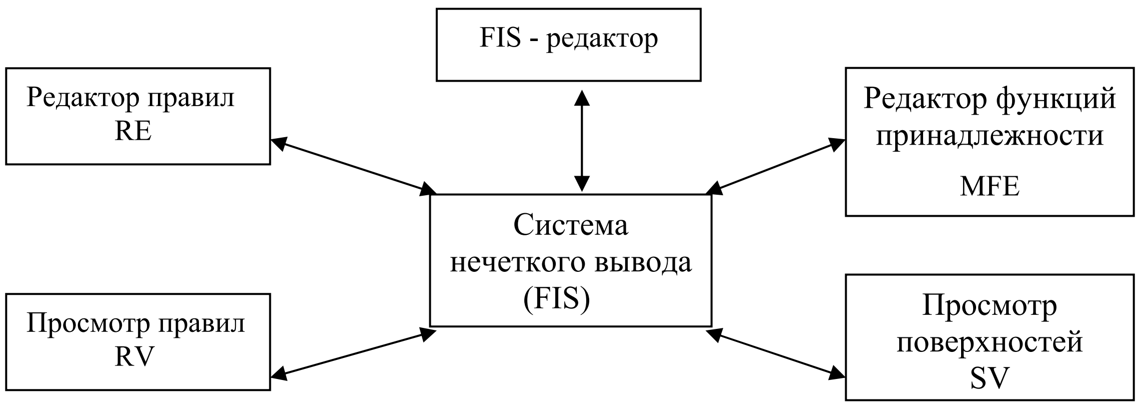


Рис. 6.1

FIS-редактор обеспечивает высокий уровень общения с системой, не имеет ограничений на число входных и выходных переменных, которое ограничивается лишь доступным объемом памяти используемой ЭВМ.

Редактор функций принадлежности используется для задания вида функций принадлежности для каждой переменной. Редактор правил применяется для редактирования текста правил условного логического вывода при описании поведения моделируемой системы.

Просмотрщики правил и поверхностей необходимы для визуального контроля. Просмотрщик правил отображает схему нечеткого вывода на последнем этапе и используется как средство диагностики. С его помощью можно, например, увидеть какие правила активны, или оценить влияние формы отдельной функции принадлежности на результат.

Просмотрщик поверхностей используется для представления на экране зависимости одного выхода от одного или двух входов, а также генерации и построения картины поверхности выхода для системы.

Все компоненты FIS могут взаимодействовать и обмениваться данными в процессе моделирования. В пакете *Matlab* возможно использование шести видов функции принадлежности (рис. 6.2):

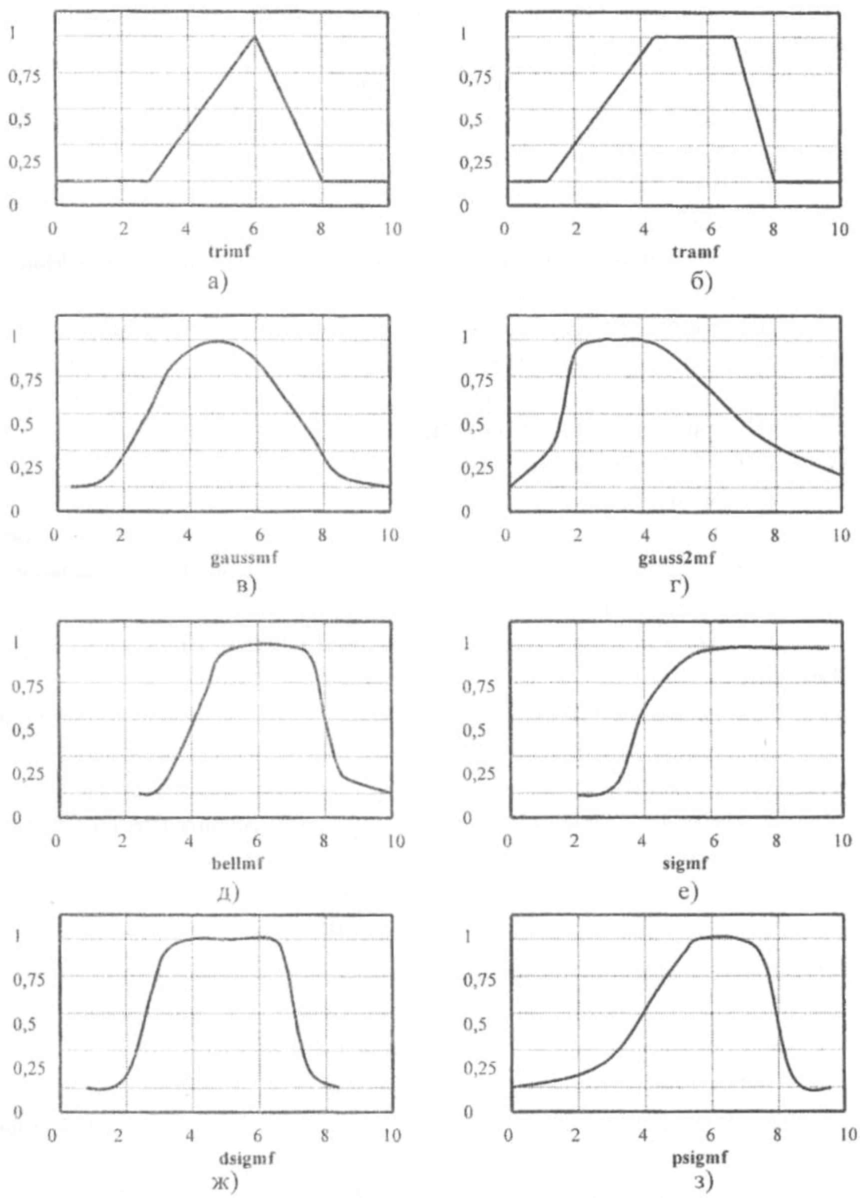


Рис. 6.2

– треугольной (trimf);
– трапецеидальной (tramf);
– функции принадлежности в виде кривой Гаусса (gaussmf) или составленной из двух кривых Гаусса (gauss2mf);
– колоколообразной (bellmf);
– сигма-функции, предназначенной для воспроизведения несимметричных функций принадлежности: sigmf - функция принадлежности, открытая справа, dsigmf - закрытая функция принадлежности, составленная из разности двух сигма-функций, psigmf - закрытая функция принадлежности, образованная из произведения двух сигма-функций;
– трех функций принадлежности, основанных на полиномиальных кривых: zmf - несимметричная функция принадлежности, открытая слева, smf - несимметричная функция принадлежности, открытая справа, pmf - закрытая функция принадлежности.

Кроме этого в пакете *Matlab* имеется возможность для пользователя конструировать собственные функции принадлежности. Система нечеткого моделирования поддерживает два основных оператора «И» и «ИЛИ». Импликация реализуется через оператор «И», который представлен в двух видах: min и произведение (prod), «ИЛИ» - max и probor - оператор вероятного «ИЛИ», известный еще как алгебраическая сумма и вычисляемый по уравнению $probor(a,b) = a + b - ab$.

Кроме этих операций в пакете нечеткой логики *Fuzzy Logic Toolbox* представлены операции концентрирования и растяжения. Пакет нечеткой логики поддерживает также все известные операции над нечеткими отношениями. Для реализации нечетких выводов используются алгоритмы Мамдани (Mamdani) и Сугено (Sugeno).

6.2. Пакет проектирования нечетких систем Fuzzy Tech

Пакет Fuzzy Tech, разработанный фирмой Inform Software Corporation, предназначен для проектирования нечетких систем. Конечный продукт при разработке системы – генерируемый при помощи пакета программный модуль. В пакете имеются два редактора:

- редактор для создания и работы с лингвистическими переменными;
- редактор для работы с базой нечетких правил.

Работа с редактором переменных. Каждая лингвистическая переменная соответствует определенной исходной переменной, которая называется базовой. Для каждой базовой переменной вводятся диапазон изменения, а также значения, которые ей присваиваются в случае, если это значение не определено для входной переменной или не вычислено для выходной. Оно обозначается словом «Default» и используется, например, в случае, если есть ошибки или пропуски во входных данных.

Для определения лингвистической переменной задается ее имя и терм-множество возможных значений (Term name). Редактор для работы с переменными позволяет графически определить для каждой из возможных лингвистических переменных функцию принадлежности (сокращенное обозначение MBF).

В пакете Fuzzy Tech функции принадлежности определяются заданием координат точек определения (Definition poit), которые соединяются линейными или нелинейными функциями. Наиболее часто используют четыре стандартные функции принадлежности (рис. 6.3).

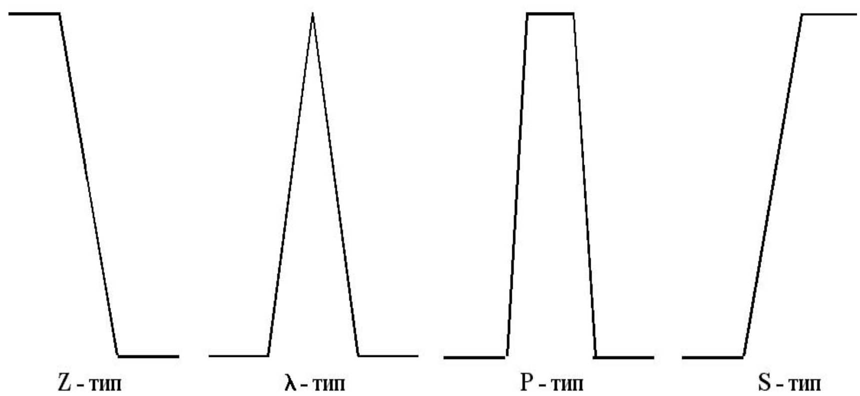


Рис. 6.3

Используются нормальные функции принадлежности max $\{\mu(x)\} = 1$, min $\{\mu(x)\} = 0$.

При построении функций принадлежности для соседних лингвистических значений L_i, $L_i + 1$ координата максимума $\mu L_i(x)$ совпадает с координатой минимума $\mu L_{i+1}(x)$. Значению $M(x) - 1$ соответствует наиболее типичное, наиболее ожидаемое значение аргумента.

Функции *S*-типа и *Z*-типа используются для крайнего правого и крайнего левого лингвистических значений. Нелинейные функции принадлежности в пакете Fuzzy Tech представляются кубическими сплайнами. На использование этого типа функций принадлежности указывает параметр «Shape».

Дефазафикация выполняется одним из трех методов.

CoM – метод центра максимума, который используется, когда результатом нечеткого логического вывода может быть несколько термов выходной переменной. Данный метод наиболее компромиссный;

MoM – метод максимума;

CoA – метод центра тяжести.

<u>Редактор для работ с базой правил</u>. Блоки правил используются для реализации стратегий управления. Каждый блок правил содержит правила для определенного решения. Основные операции, используемые для обработки правил – это операции MAX, MIN.

Разработка нечткой системы управления выполняется с помощью CAD-системы Fuzzy Tech и включает следующие этапы, схематично показанные на рис. 6.4.

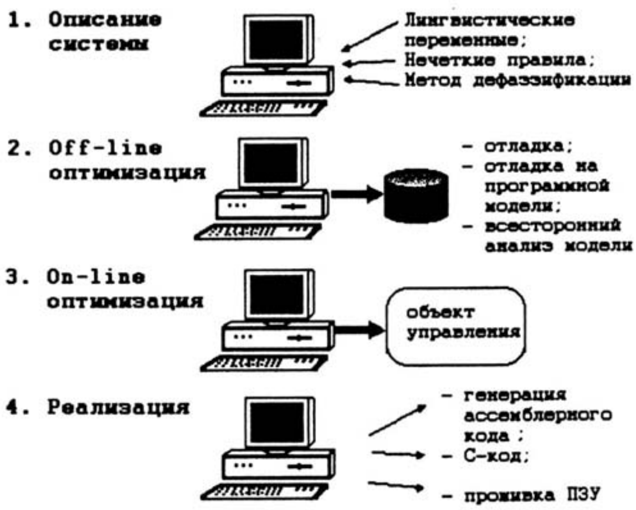


Рис. 6.4

1. Описание системы. На этом этапе при помощи средств, доступных в пакете, задача формализуется. Здесь описываются лингвистические переменные, которыми будут пользоваться и соответствующие функции принадлежности. Стратегия управления описывается нечеткими правилами, объединенными в базу знаний системы.

На этом этапе используются CASE- технологии, на основе которых построен пакет.

2. Off-line - оптимизация. Выполняется проверка работоспособности созданной системы. Для этой цели вместо реального объекта можно использовать его программную модель. Для связи системы

управления с моделью используется специально разработанный протокол связи fTlink, в основу которого положена концепция обмена сообщениями Windows.

Рис. 6.5

3. On-line - оптимизация. На этом шаге разрабатываемая система управления и реальный объект управления объединяются в единую систему (рис. 6.5). В этом случае в реальных условиях наблюдается поведение системы, а также, в случае необходимости вносятся изменения в систему управления. После отладки создается окончательный вариант кода для конкретного микроконтроллера. Основу программного кода, генерируемого пакетом, составляет аппаратно-ориентированное на конкретный тип контроллера ядро. Генерируемый код состоит из трех основных частей:

- код библиотечных функций;
- сегмент базы правил и функций принадлежности;
- функции нечеткой системы.

6.3. Нечеткое управление в системе Трейс Моуд

Пакет Трейс Моуд. (Trace Mode) фирмы АдАстра предназначен для разработки автоматизированных систем управления технологическими процессами помимо средств разработки проектов систем, использующих традиционные алгоритмы управления, предоставляет возможности для реализации нечеткого управления.

Нечеткий регулятор FZCTR в системе Трейс Моуд реализован в качестве функционального блока библиотеки регулирования (рис. 6.6) [23]. Регулятор имеет три функциональных входа и два выхода. На вход IP надо подавать регулируемое значение; второй вход предназначен для ввода значения уставки.

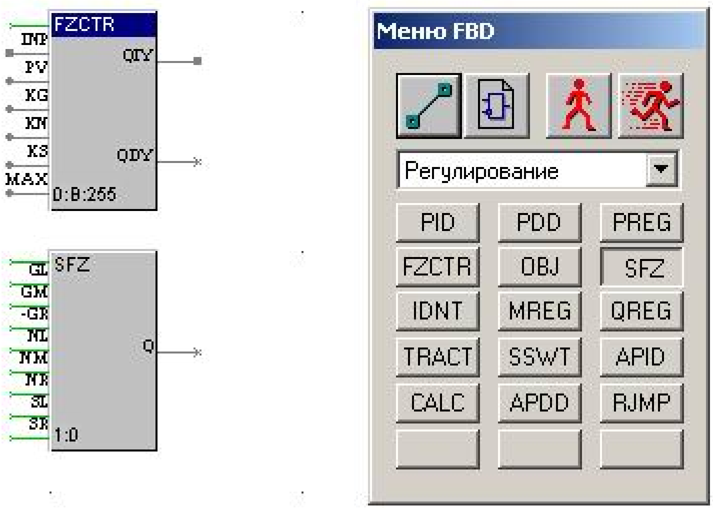


Рис. 6.6

Для выбора типа объекта управления используется вход IC, который может устанавливаться в состояние:

- ″O″, когда характеристики системы регулирования настраиваются с помощью функциональных блоков GД, NД, SД;

- ″1″ – выполняется регулирование малоинерционных параметров, для которых значения постоянных времени лежат в диапазоне (2÷5) ºC;

- ″2″ – выполняется регулирование параметров средней инерционности с постоянными времени в переделах от 5 до 60 ºC;

- ″3″ – для регулирования сильноинерционных параметров, значения постоянных времени которых могут быть в пределах от 1 до 30 мин.

На выходе *Q* формируется величина управляющего воздействия, выход *dQ* предназначен для формирования величины приращения управляющего воздействия на текущем шаге управления. Алгоритм формирования выходных сигналов Q и dQ использует соотношения

$$Q_t = Q_{t\text{-}1} + dQ,$$

$$dQ = k_g dQ_g + k_n dQ_n + k_s dQ_s,$$

где Q_t - управляющее воздействие на момент t;

$Q_{t\text{-}1}$ - управляющее воздействие на предыдущем шаге t-1;

dQ - приращение управляющего воздействия;

k_g - принадлежность текущего рассогласования к категории «большее»;

k_n - принадлежность текущего рассогласования к категории «среднее»;

k_s - принадлежность текущего рассогласования к категории «малое»;

dQ_g - приращение управляющего воздействия по условию «большое отклонение»;

dQ_n - приращение управляющего воздействия по условию «среднее отклонение»;

dQ_s - приращение управляющего воздействия по условию «малое отклонение».

g - сильное рассогласование;

n - среднее рассогласование.

Приращение по каждой из категорий отклонения рассчитывается по формуле

$$dQ_j = (k_{1j}\ (Pv - INP) + k_{2j} SIGN\{Pv - INP\} + k_{3j} dQ_{t\text{-}1}\ SIGN\{Pv - INP\})/5,$$

где Pv - значение уставки;

INP - значение регулируемой величины;

$dQ_{t\text{-}1}$ - приращение управляющего воздействия на предыдущем такте пересчета;

j - признак категории рассогласования;

s - слабое рассогласование;

k_1 - коэффициент при рассогласовании;

k_2 - коэффициент нечеткой составляющей;

k_3 - коэффициент учета предыдущего изменения управления.

Настройка коэффициентов k_1, k_2, k_3, а также границ диапазонов категорий рассогласования задается с помощью соответствующих блоков GД, NД и SД. Эти блоки передают заданные в них настройки всем присутствующим в данном узле нечетким логическим регуляторам. Поэтому перед каждым из регуляторов, имеющих индивидуальные настройки, следует предусмотреть набор этих блоков. При этом их надо также разместить в программе, чтобы они выполнялись перед соответствующим блоком нечеткого логического регулятора.

Блок настройки FZCTR «сильное отклонение» (GД) предназначен для настройки диапазонов, которые воспринимаются как сильное отклонение регулируемой величины от уставки и задания коэффициентов для расчета управляющего воздействия в этом случае.

Блок настройки FZCTR «среднее отклонение» (NД) предназначен для настройки диапазонов, которые воспринимаются как среднее отклонение регулируемой величины от уставки и задания коэффициентов для расчета управляющего воздействия в этом случае.

Блок настройки FZCTR «слабое отклонение» (SД) предназначен для настройки диапазонов, которые воспринимаются как слабые отклонения регулируемой величины от уставки и задания коэффициентов для расчета управляющего воздействия в этом случае.

Автор надеется, что, изучив материалы данного пособия, читатель найдет ответы на следующие вопросы:

1. Что такое нечеткое множество?
2. Как оно определяется и чем отличается от классических множеств?
3. Какие операции могут выполняться над нечеткими множествами?
4. Что такое нечеткие числа и чем они отличаются от традиционных?
5. В чем состоят особенности вычислений с нечеткими числами?
6. Как можно использовать аппарат теории нечетких множеств в задачах принятия решений?

Приведенные в пособии основные положения теории нечетких множеств позволят в случае заинтересованности свободнее осваивать более сложные разделы теории и приложения нечетких множеств.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Заде, Л. А. Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближенных решений / Л.А. Заде: пер. с англ. – М.: Мир, 1976. – 165 с.

2. Алексеев, А. В. Применение нечетких алгоритмов для управления в нечеткой среде / А.В. Алексеев // Принятие решений в условиях нестатистической неопредленности. – Рига: Рижский политехн. ин-т, 1982. – С. 4-12.

3. Борисов, А. Н. Модели принятия решений на основе лингвистической переменной / А.Н. Борисов [и др.]. – М.: Знание, 1982. – 170 с.

4. Заде, Л. А. Основы нового подхода к анализу сложных систем и процессов принятия решений /Л.А. Заде // Математика сегодня. – М.: Знание, 1974. – С. 5-48.

5. Нечеткие множества в моделях управления и искусственного интеллекта / под ред. Д.А. Поспелова. – М.: Наука, 1986. – 312 с.

6. Кофман, А. Введение в теорию нечетких множеств / А. Кофман. – М.: Радио и связь, 1983. – 432 с.

7. Кафаров, В. В. Системный анализ процессов химической технологии. Применение метода нечетких множеств /В.В. Кафаров, И.Н. Дорохов, Е.П. Марков. – М.: Наука, 1985. – 531 с.

8. Глотов, В. А. Экспертные методы определения весовых коэффициентов / В.А. Глотов, В.В. Павельев // Автоматика и телемеханика.– 1967. – № 12. – С. 95-108.

9. Борисов, А. Н. Принятие решений на основе нечетких моделей. Примеры использования / А.Н. Борисов, О.А. Крумберг, И.П. Федоров. – Рига.: Зинатне, 1990. – 184 с. – ISBN 5-7966-0459-7.

10. Саати, Т. Аналитическое планирование. Организация систем / Т. Саати, К. Кернс : пер. с англ. – М.: Радио и связь. 1991. – 224 с.

11. Колмогоров, А. Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. – М.: Наука, 1968. – 494 с.

12. Коршунов, Ю. М. Математические основы кибернетики / Ю.М. Коршунов. – М.: Энергия, 1972. – 376 с.

13. Леоненков, А. В. Нечеткое моделирование в среде MATLAB и fuzzyTECH / А.В. Леоненков. – СПб.: БХВ-Петербург, 2003. – 736 с. – ISBN 5-94157-087-2.

14. Mizumoto M.,Tanaka K. Algebraic Properties of Fuzzy Numbers // Proc. of the IEEE Intern. Conf. on Cybernetics and Society.-Washington: IEEE, 1976. – P. 559-563.

15. Борисов, А. Н. Обработка нечеткой информации в системах принятия решений / А.Н. Борисов [и др.]. – М.: Радио и связь, 1989. – 304 с. – ISBN 5-256-00178-7.

16. Анисимов, В.Ю. Методы и устройства преобразования нечетко определенных параметров при проектировании радиотехнических систем / В.Ю. Анисимов, Э.В. Борисов // Известия вузов. Сер. Радиотехника. – 1985. – № 4. – С. 30-33.

17. Алексеев, А. В. Решение линейных нечетких уравнений / А.В. Алексеев // Управление при наличии расплывчатых категорий: тез. V науч.-техн. семинара. – Пермь: НИИ управл. машин и систем, 1982. – Ч.1. – С. 24-27.

18. Алексеев, А. В. Применение нечеткой математики в задачах принятия решений / А.В. Алексеев // Прикладные задачи анализа решений в организационно-технических системах. – Рига: Рижский политехн. ин-т, 1983. – С. 38-42.

19. Малышев, Н. Г. Нечеткие модели для экспертных систем в САПР / Н.Г. Малышев, Л.С. Бернштейн, А.В. Боженюк. – М.: Энергоатомиздат, 1991. – 136 с. – ISBN 5-283-01592-0.

20. Дидэ. Методы анализа данных. Подход, основанный на методе динамических сгущений /Дидэ [и др.]. – М.: Финансы и статистика, 1985. – 240 с.

21. Круглов, В. В. Искусственные нейронные сети. Теория и практика / В.В. Круглов, В.В. Борисов. – М.: Горячая линия – Телеком, 2002. – 382 с. – ISBN 5-93517-031-0.

22. Штовба, С. Д. Проектирование нечетких систем средствами MATLAB. – М.: Горячая линия – Телеком, 2007. – 288 с. – ISBN 5-9351-359-X.

23. «Trace Mode» Графическая инструментальная система для разработки АСУ. Версия 5.0: Руководство пользователя. – М.: Бином, 1988. – 300 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

ЧЕРНОВ Владимир Георгиевич

ОСНОВЫ ТЕОРИИ НЕЧЕТКИХ МНОЖЕСТВ

Учебное пособие

Подписано в печать 28.06.10.
Формат 60x84/16. Усл. печ. л. 5,58. Тираж 70 экз.
Заказ
Издательство
Владимирского государственного университета.
600000, Владимир, ул. Горького, 87.