

Принятие решений с использованием аппарата теории нечетких множеств: алгоритм Мамдани

Алгоритм Мамдани используется для многокритериальной оценки объектов по набору критериев. Входными данными для алгоритма являются описание и значения нечетких переменных, правила вывода. Результатом работы алгоритма являются четкие значения выходных переменных.

На первом этапе определяется набор критериев k_1, k_2, \dots, k_v для оценки объектов, им в соответствие ставятся нечеткие переменные.

Нечеткие переменные представляют собой тройку $\langle \alpha, X, A \rangle$, где α – имя переменной, X – область определения α , A – нечеткое множество на X , которое может быть охарактеризовано набором функций принадлежности $\mu_A(x)$. Множества X и A определяются конкретным критерием. Например, если в качестве критерия выступает «месторасположение фирмы», то ему будет соответствовать одноименная нечеткая переменная, множество значений которой можно описать тройкой «удобное», «не очень удобное», «неудобное». Каждому значению будет соответствовать своя функция принадлежности.

Правила представляют собой конструкции вида

«если <сложное условие>, то <список выходов>», где

```
<сложное условие>      :-  or(<список условий>) |
                             and(<список условий>) |
                             <условие>
```

$$\langle \text{список условий} \rangle \quad :- \quad (\langle \text{условие} \rangle) [\langle \text{список условий} \rangle]$$

$\langle \text{условие} \rangle$:- $\langle \text{имя входной нечеткой переменной} \rangle$
 $\langle \text{значение входной нечеткой переменной} \rangle$

<СПИСОК ВЫХОДОВ> :- (<значение выхода>)[<СПИСОК ВЫХОДОВ>]

```
<значение выхода>      :-   <имя выходной нечеткой переменной>  
                           <значение выходной нечеткой переменной>
```

Рассмотрим работу алгоритма Мамдани на примере (рис. 5.11). Пусть база знаний состоит из двух правил:

П1: если x есть $A1$ и y есть $B1$, тогда z есть $C1$,

П2: если x есть $A2$ и y есть $B2$, тогда z есть $C2$,

где x и y – имена входных переменных, z – имя переменной вывода, $A1, A2, B1, B2, C1, C2$ – некоторые заданные функции принадлежности, при этом четкое значение z_0 необходимо определить на основе приведенной информации и четких значений x_0 и y_0 .

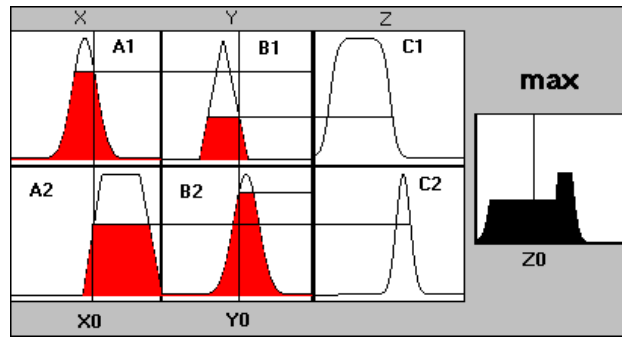


Рис. 5.11. Основные этапы работы алгоритма Мамдани

Алгоритм состоит из 4 этапов:

1. **Введение нечеткости:** находятся степени истинности для предпосылок каждого правила: $A1(x_0)$, $A2(x_0)$, $B1(y_0)$, $B2(y_0)$. Например, $A1(x_0)$ – это значение функции принадлежности $A1$ переменной x в точке x_0 .

2. **Нечеткий вывод:** находятся уровни «отсечения» для предпосылок каждого из правил (при этом для логической операции «и» используется операция \min , для логической операции «или» используется операция \max). В нашем примере:

$$\alpha 1 = A1(x_0) \wedge B1(y_0),$$

$$\alpha 2 = A2(x_0) \wedge B2(y_0).$$

Затем находятся усеченные функции принадлежности для выходной переменной:

$$C'_1 = (\alpha 1 \wedge C1(z)),$$

$$C'_2 = (\alpha 2 \wedge C2(z)).$$

3. **Композиция:** с использованием операции \max производится объединение найденных усеченных функций, что приводит к получению итоговой функции принадлежности для выходной переменной. В нашем примере:

$$\begin{aligned} \mu_{\Sigma}(z) &= C(z) = C'_1 \vee C'_2 = (\alpha 1 \wedge C1(z)) \vee (\alpha 2 \wedge C2(z)) = \\ &= (A1(x_0) \wedge B1(y_0) \wedge C1(z)) \vee (A2(x_0) \wedge B2(y_0) \wedge C2(z)). \end{aligned}$$

4. **Дефаззификация:** находится четкое значение выходной переменной z_0 (например, центроидным методом (как центр тяжести для кривой $\mu_{\Sigma}(z)$):

$$z_0 = \frac{\sum_{i=1}^n \alpha_i z_i}{\sum_{i=1}^n \alpha_i} - \text{для дискретного варианта.}$$

5.13.1. Пример

Рассмотрим задачу построения рейтинга компьютерных фирм. В качестве критериев для оценки объектов в данном случае выступают

«Качество обслуживания клиентов» и «Месторасположение фирмы». Оба критерия измеряются по пятибалльной шкале, то есть эксперт в качестве значения критерия может выбрать любое целое число в интервале от 0 до 5. Поставим критериям в соответствие нечеткие переменные (табл. 5.34).

Таблица 5.34

Задание нечетких переменных для критериев

Параметры нечеткой переменной	Имя нечеткой переменной α	
	«Качество обслуживания клиентов» (КО)	«Месторасположение фирмы» (МФ)
Область определения X	[0,5]	[0,5]
Значения нечеткой переменной	«отличное», «приемлемое», «плохое»	«удобное», «не очень удобное», «неудобное»
Функции принадлежности $\mu_A(x)$ для значений нечеткой переменной		

В качестве выходной переменной будет выступать «рейтинг объекта» (табл. 5.35).

Таблица 5.35

Задание выходной нечеткой переменной

Имя нечеткой переменной α	«Рейтинг»
Область определения X	[0,100]
Значения нечеткой переменной	«низкий», «средний», «высокий»
Функции принадлежности $\mu_A(x)$ для значений нечеткой переменной	

Для простоты вычислений пусть система правил вывода состоит из 3 правил:

- П1: Если КО отличное (A1) и МФ неудобное (B1), то рейтинг средний (C1).
- П2: Если КО приемлемое (A2) и МФ не очень удобное (B2), то рейтинг низкий (C2).
- П3: Если КО плохое (A3) и МФ удобное (B3), то рейтинг низкий (C3).

Исходные данные представим в виде табл. 5.36.

Таблица 5.36

Исходные данные для альтернатив

№ фирмы	Качество обслуживания, баллы	Месторасположение, баллы
1	4	1
2	3	3
3	1	4

Рассмотрим основные этапы работы алгоритма.

Этап 1. Введение нечеткости

Найдем степени истинности для предпосылок каждого правила (табл. 5.37).

Таблица 5.37

Степени истинности для предпосылок правил

№ фирмы	П1	П2	П3
1	$A1(4)=0.5, B1(1)=0.35$	$A2(4)=0, B2(1)=0$	$A3(4)=0, B3(1)=0$
2	$A1(3)=0, B1(3)=0$	$A2(3)=1, B2(3)=0.65$	$A3(3)=0, B3(3)=0$
3	$A1(1)=0, B1(4)=0$	$A2(1)=0, B2(4)=0$	$A3(1)=0.5, B3(4)=0.3$

Этап 2. Нечеткий вывод

Найдем уровни «отсечения» для предпосылок каждого из правил (табл. 5.38).

Таблица 5.38

Уровни «отсечения» для предпосылок правил

№ фирмы	П1	П2	П3
1	$\alpha_1 = \min(0.5, 0.35) = 0.35$	$\alpha_2 = \min(0, 0) = 0$	$\alpha_3 = \min(0, 0) = 0$
2	$\alpha_1 = \min(0, 0) = 0$	$\alpha_2 = \min(1, 0.65) = 0.65$	$\alpha_3 = \min(0, 0) = 0$
3	$\alpha_1 = \min(0, 0) = 0$	$\alpha_2 = \min(0, 0) = 0$	$\alpha_3 = \min(0.5, 0.3) = 0.3$

Найдем усеченные функции принадлежности для выходной переменной (табл. 5.39).

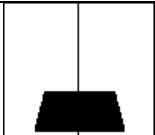

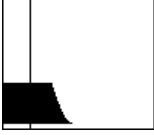
Таблица 5.39

Усеченные функции принадлежности для выходной переменной

№ фирмы	П1	П2	П3
1	$C'_1 = \alpha_1 \wedge C1(0.35)$	$C'_2 = \alpha_2 \wedge C2(0)$	$C'_3 = \alpha_3 \wedge C3(0)$
2	$C'_1 = \alpha_1 \wedge C1(0)$	$C'_2 = \alpha_2 \wedge C2(0.65)$	$C'_3 = \alpha_3 \wedge C3(0)$
3	$C'_1 = \alpha_1 \wedge C1(0)$	$C'_2 = \alpha_2 \wedge C2(0)$	$C'_3 = \alpha_3 \wedge C3(0.3)$

Этап 3 и 4. Композиция и дефаззификация. Результат представлен в табл. 5.40.

Таблица 5.40

№ фирмы	$\mu_{\Sigma}(z)=C(z)=C'_1 \vee C'_2 \vee C'_3$	$\mu_{\Sigma}(z)$	z_i	Рейтинг
1	$\max(0.35, 0, 0)=0.35$		50	1
2	$\max(0, 0.65, 0)=0.65$		16,7	3
3	$\max(0, 0, 0.3)=0.3$		18,62	2

Таким образом, в результате работы алгоритма мы имеем набор четких значений выходной переменной «рейтинг» в выбранной нами шкале измерений значений переменной: z_1, z_2, \dots, z_m , где m – число фирм. Упорядочив полученные значения по убыванию, получим рейтинг фирм P .