Министерство образования Новосибирской области

Государственное бюджетное профессиональное образовательное учреждение Новосибирской области «Новосибирский авиационный технический колледж имени Б.С. Галущака.»

Лабораторная работа №3 по дисциплине «Дискретная математика с элементами математической логики» на тему:
«Реализация булевых функций в виде графов»

Выполнила студентка группы ПР-22.102:

Беляева Альбина Сергеевна

Проверил преподаватель:

Оболенцева Татьяна Дмитриевна

Г. Новосибирск, 2024

Вариант 14

$f(x_1, x_2, x_3) = \overline{x_1 \vee x_2} \to \overline{x_3} \downarrow \overline{x_1 \wedge x_2} \oplus x_2 \leftarrow x_3 \sim x_1 \wedge x_2 \wedge x_3 \to x_1$

Выполним суперпозицию формулы:

$U_1 = \overline{x_3}$

$U_2 = x_1 \vee x_2$

$U_3 = \overline{U_2}$

$U_4 = x_1 \wedge x_2$

$U_5 = \overline{U_4}$

$U_6 = U_1 \downarrow U_5$

$U_7 = x_1 \wedge x_2$

$U_8 = U_7 \wedge x_3$

$U_9 = U_3 \to U_6$

$U_{10} = x_2 \leftarrow x_3$

$U_{11} = U_8 \to x_1$

$U_{12} = U_9 \oplus U_{10}$

$U_{13} = U_{12} \sim U_{11}$

N	x_1	x_2	x_3	U_1	U_2	U_3	U_4	U_5	U_6	U_7	U_8	U_9	U_{10}	U_{11}	U_{12}	U_{13}
0	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0
2	0	1	0	1	1	0	0	1	0	0	0	1	1	1	0	0
3	0	1	1	0	1	0	0	1	0	0	0	1	1	1	0	0
4	1	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	1
5	1	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0
6	1	1	0	1	1	0	1	0	0	1	0	1	1	0	0	1
7	1	1	1	0	1	0	1	0	1	1	1	1	1	1	0	0

СДНФ

Шеннон доказал теорему о том, что любая булева функция f(x_1,x_2,…,x_n) может быть представлена в виде:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_k, x_{k+1}, \ldots, x_n) = \bigvee_{(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)} (\&_{i=1}^{k} x_i^{\sigma_i}) f(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k, x_{k+1}, \ldots, x_n)$$

Где σ_i- либо 0 либо 1

$$x_i^{\sigma_i} = \begin{cases} x_i, & \sigma_i = 1, \\ \bar{x}_i, & \sigma_i = 0. \end{cases}$$

Предельное разложение Шеннона (при k=n) имеет вид:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \bigvee_{(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)} \left(\&_{i=1}^{n} x_i^{\sigma_i}\right)$$

т.е. это разложение формируется для значений функции, равной единице, и называется совершенной дизъюнктивной нормальной формой (СДНФ).

Эту формулу можно получить из таблицы истинности, используя следующий алгоритм:

Нужно отметить в таблице строки, где функция равна единице.

Для каждой такой строки образовать логическое произведение

$$x_1^{\sigma_1} \& x_2^{\sigma_2} \& \dots \& x_n^{\sigma_n}$$

Нужно объединить полученные конъюнкции (конъюнкты) знаками дизъюнкции.

$$x_1^0 \& x_2^0 \& x_3^0 \vee x_1^1 \& x_2^0 \& x_3^0 \vee x_1^1 \& x_2^1 \& x_3^0 = \overline{x_1} \& \overline{x_2} \& \overline{x_3} \vee x_1 \& \overline{x_2} \& \overline{x_3} \vee x_1 \& x_2 \& \overline{x_3}$$

$U_1 = \overline{x_1}$

$U_2 = \overline{x_2}$

$U_3 = \overline{x_3}$

$U_4 = U_1 \& U_2$

$U_5 = U_4 \& U_3$

$U_6 = x_1 \& U_2$

$U_7 = U_6 \& U_3$

$U_8 = x_1 \& x_2$

$U_9 = U_8 \& U_3$

$U_{10} = U_5 \vee U_7$

$U_{11} = U_{10} \vee U_9$

N	x_1	x_2	x_3	U_1	U_2	U_3	U_4	U_5	U_6	U_7	U_8	U_9	U_{10}	U_{11}
0	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1
1	0	0	1	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0
2	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
5	1	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0
6	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	1	1	0	1
7	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0

Полином Жегалкина

$$\left[f(x_1, x_2, \dots, x_n) = C_0 \oplus \sum_{i=1}^{n} C_i x_i \right]$$

В общем виде полином имеет вид:

$$f(x_1, x_2, x_3) = C_0 \oplus C_1 x_1 \oplus C_2 x_2 \oplus C_3 x_3 \oplus C_4 x_1 x_2 \oplus C_5 x_1 x_3 \oplus C_6 x_2 x_3 \oplus C_7 x_1 x_2 x_3$$

Он включает в себя все возможные комбинации конъюнкции аргументов, которые называются взаимодействием элементов.

0) $f(0,0,0) = 1 = C_0$

1) $f(0,0,1) = 0 = C_0 \oplus C_3 x_3 = 1 \oplus C_3 \& 1$

$\Rightarrow C_3 = 1$

2) $f(0,1,0) = 0 = C_0 \oplus C_2x_2 = 1 \oplus C_2\&1$

$\Rightarrow C_2 = 1$

3) $f(0,1,1) = 0 = C_0 \oplus C_2x_2 \oplus C_3x_3 \oplus C_6x_2x_3 = 1 \oplus 1\&1 \oplus 1\&1 \oplus C_6\&1\&1$

$\Rightarrow C_6 = 1$

4) $f(1,0,0) = 1 = C_0 \oplus C_1x_1 = 1 \oplus C_1\&1$

$\Rightarrow C_1 = 0$

5) $f(1,0,1) = 0 = C_0 \oplus C_1x_1 \oplus C_3x_3 \oplus C_5x_1x_3 = 1 \oplus 0\&1 \oplus 1\&1 \oplus C_5\&1\&1$

$\Rightarrow C_5 = 0$

6) $f(1,1,0) = 1 = C_0 \oplus C_1x_1 \oplus C_2x_2 \oplus C_4x_1x_2 = 1 \oplus 0\&1 \oplus 1\&1 \oplus C_4\&1\&1$

$\Rightarrow C_4 = 1$

7) $f(1,1,1) = 0 = C_0 \oplus C_1x_1 \oplus C_2x_2 \oplus C_3x_3 \oplus C_4x_1x_2 \oplus C_5x_1x_3 \oplus C_6x_2x_3 \oplus C_7x_1x_2x_3 = 1 \oplus 0\&1 \oplus 1\&1 \oplus 1\&1 \oplus 1\&1\&1 \oplus 0\&1\&1 \oplus 1\&1\&1 \oplus C_7\&1\&1\&1$

$\Rightarrow C_7 = 1$

$f(x_1, x_2, x_3) = 1 \oplus x_2 \oplus x_3 \oplus x_1\&x_2 \oplus x_2\&x_3 \oplus x_1\&x_2\&x_3$

Функция не линейная, т.к. в ее разложении присутствует взаимодействие аргументов.

Выполним суперпозицию формулы, а также составим таблицу истинности для проверки полинома

$U_1 = x_1\&x_2$

$U_2 = x_2\&x_3$

$U_3 = U_1\&x_3$

$U_4 = 1 \oplus x_2$

$U_5 = U_4 \oplus x_3$

$U_6 = U_5 \oplus U_1$

$U_7 = U_6 \oplus U_2$

$U_8 = U_7 \oplus U_3$

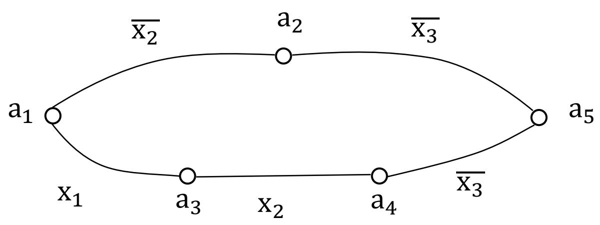
N	x_1	x_2	x_3	U_1	U_2	U_3	U_4	U_5	U_6	U_7	U_8
0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0
2	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	1	1	0	1	0	0	1	1	0	0
4	1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1
5	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0
6	1	1	0	1	0	0	0	0	1	1	1
7	1	1	1	1	1	1	0	1	0	1	0

Реализация булевых функций в виде графов

Для начала упростим СДНФ формулу:

$$f\,(x_1x_2x_3) = \overline{x_1}\&\overline{x_2}\&\overline{x_3} \vee x_1\&\overline{x_2}\&\overline{x_3} \vee x_1\&x_2\&\overline{x_3} = \overline{x_3}\&(\overline{x_1}\&\overline{x_2} \vee x_1\&\overline{x_2} \vee x_1\&x_2) = \overline{x_3}\&\left(\left(\overline{x_2}(\overline{x_1}\&x_1)\right) \vee x_1\&x_2\right) = \overline{x_3}\&(\overline{x_2} \vee x_1\&x_2) = \overline{x_2}\&\overline{x_3} \vee x_1\&x_2\overline{x_3}$$

Мультиграф



Электрическая схема

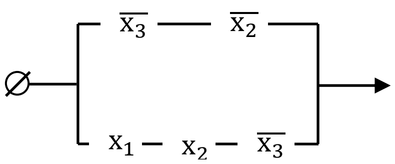
Пусть a, b – полюсы контактной схемы Σ . $[a,b]$- некоторая цепь из a в b. Тогда $K_{[a,b]}$- конъюнкция литер приписанных ребрам цепи a, b. Функция $f_{a,b}(x)$ определяется как дизъюнкция конъюнктов (СДНФ).

$f_{a,b}(x) = \underset{[a,b]}{V} K_{[a,b]}$, где дизъюнкция берется по всем цепям схемы, соединяющим полюсы a и b. Эта функция называется *функцией проводимости* между полюсами a и b в схеме Σ .

Ребра контактной схемы называются *контактами*. Контакт, соответствующий логической переменной x_i называется *замыкающимся*. Контакт, соответствующий литере (букве) $\overline{x_i}$ называется размыкающим.

Функции $x_i \wedge x_j$ соответствует последовательное соединение контактов, функции $x_i \vee x_j$ - параллельное соединение контактов.

Электрическая схема, соответствующая контактной схеме представленной выше



$L_{\Pi}(f) = 5$

Схемы из функциональных элементов

Это ориентированная бесконтурная сеть, в которой выделяют входные и выходные полюсы.

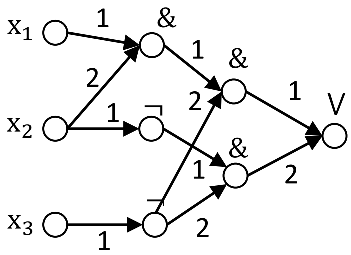
Входные полюсы помечаются символами переменных – некоторые функциональным символом.

Здесь формируется понятие полустепень захода – это число двух входных в вершину.

Для входного полюса полустепень захода равна 0.

Для остальных вершин конечных n – местным функциональным символом f = n, другие нумеруются от 1 до n.

Функциональным элементом называется всякий подмультиграф схемы состоящий из невходного полюса, помеченного функциональным символом и вершин из которых исходят дуги в полюс.



$L(f) = 6$

Вывод

В ходе лабораторной работы мы изучили основные элементы булевой алгебры. Практические задания помогли нам лучше понять применение булевой алгебры в решении логических задач.