AID-nummer: *AID-number:* 2594	Datum: *Date:* 2023-01-10	Blad nummer: *Sheet number:* 1
Utbildningskod: *Education code:* TNA002	Modul: *Module:* TEN1	

Motivera!

1 a)

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -2 & 4 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \text{ R}$$

$x_4 = t \quad x_3 = s \quad x_2 = r \quad x_1 = 2t - s + r$

$t\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad s\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad r\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ R

$N(F) = [(2,0,0,1)^t, (-1,0,1,0)^t, (1,1,0,0)^t]$ R

$\dim N(F) = 3$ R

Alla vektorer $F(u) = 0$

Enligt dimensionssatsen $\dim V(F) = 1$

$V(F) = [(1,-1,1,-2)^t]$ R

Svar: $N(F) = [(2,0,0,1)^t, (-1,0,1,0)^t, (1,1,0,0)^t]$

$V(F) = [(1,-1,1,-2)^t]$

3p

AID-nummer: *AID-number:* 2594	Datum: *Date:* 2023-01-10	Blad nummer: *Sheet number:* 2
Utbildningskod: *Education code:* TNA002	Modul: *Module:* TEN1	

LINKÖPINGS UNIVERSITET

1 b) $y = a\sqrt{x} + b$

x	0	1	4
y	-1	1	2

Vid insättning i kurvan fås.

$$\begin{cases} 0 + b = -1 \\ a + b = 1 \\ 2a + b = 2 \end{cases}$$ R

Av detta skapas matrisen

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$A\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = y$$

Med MKM fås $A^t A \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}^* = A^t y$ R

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 5 & 3 & 5 \\ 3 & 3 & 2 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \end{array}\right) \quad a = \frac{3}{2} \quad b = \frac{-5}{6}$$

3p

R

Svar: $y = \frac{3}{2}\sqrt{x} - \frac{5}{6}$ ansluter bäst till punkterna som var givna.

AID-nummer: *AID-number:* 2594	Datum: *Date:* 2023-01-10
Utbildningskod: *Education code:* TNA002	Modul: *Module:* TEN1

Blad nummer: *Sheet number:* 3

2a) $a=(1,0,1)^t$ $F(u)=u\times a$

Sätter $u=(x_1,x_2,x_3)^t$

$$u\times a = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$ Vektorprodukt

$= e_1(x_2-0) - e_2(x_1-x_3) + e_3(0-x_2)$ R

$= \underline{e} \cancel{\begin{pmatrix} 0 & x_2 & 0 \\ -x_1 & 0 & x_3 \\ 0 & -x_2 & 0 \end{pmatrix}}$??? Alltså är Matrisen $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ R

Svar: Matrisen är $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

3p

AID-nummer: *AID-number:* 2594	Datum: *Date:* 2023-01-10
Utbildningskod: *Education code:* TNA002	Modul: *Module:* TEN1

Blad nummer: *Sheet number:* 4

2b) Matrisen $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

För att ta fram egenvärden:

$\det(A - \lambda E) = 0$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ -1 & -\lambda & 1 \\ 0 & -1 & -\lambda \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & -\lambda \\ -1 & -\lambda & 1 \\ 0 & -1 & -\lambda \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ -1 & -\lambda & 2 \\ 0 & -1 & -\lambda \end{pmatrix} = (-\lambda)(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -\lambda & 2 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (-\lambda)(\lambda^2 + 2)$$

$(-\lambda)(\lambda^2+2) = 0$ R $\quad \lambda_1 = 0 \quad \lambda_{2,3} = \cancel{\pm\sqrt{-2}}$ $i\sqrt{2}$

För att ta fram egenvektorn sätter vi nu $\lambda = 0$

$(A - 0E)\vec{x} = 0 \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right)$? $t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $t = 1$? $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Vad händer här?

Svar: Egenvärde: $\lambda_1 = 0$

Egenvektor: $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ R

3p

AID-nummer: AID-number: 2594	Datum: Date: 2023-01-10
Utbildningskod: Education code: TNA002	Modul: Module: TEN1

Blad nummer: Sheet number: 5

3 $\begin{cases} y_1'(t) = 7y_1(t) - 4y_2(t) \\ y_2'(t) = 8y_1(t) - 5y_2(t) \end{cases}$

$y' = AY$ Vill visa A diagonaliserbar $A = TDT^{-1}$

Bildar Matrisen $A = \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ 8 & -5 \end{pmatrix}$

För egenvärden: $\det(A - \lambda E) = 0$

Alltså $\begin{pmatrix} 7-\lambda & -4 \\ 8 & -5-\lambda \end{pmatrix} = (7-\lambda)(-5-\lambda) + 32 =$

$= \lambda^2 - 2\lambda - 3$

$\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0 \iff \lambda = 1 \pm 2 \quad \lambda_1 = 3 \quad \lambda_2 = -1$

då fås $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ R

För egenvektorer: Sätt in Svaren i $(A - \lambda E) = 0$

$\lambda_1 = 3$ ger $\left(\begin{array}{cc|c} 7-3 & -4 & 0 \\ 8 & -5-3 & 0 \end{array}\right) \iff \left(\begin{array}{cc|c} 4 & -4 & 0 \\ 8 & -8 & 0 \end{array}\right) \; t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} t=1 \; v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\lambda = -1$ ger $\left(\begin{array}{cc|c} 7+1 & -4 & 0 \\ 8 & -5+1 & 0 \end{array}\right) \iff \left(\begin{array}{cc|c} 8 & -4 & 0 \\ 8 & -4 & 0 \end{array}\right) \; t\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} t=1 \; v_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

då fås $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ R

Nästa blad

LINKÖPINGS UNIVERSITET

AID-nummer: *AID-number:* 2594	Datum: *Date:* 2023-01-10	Blad nummer: *Sheet number:* 6	
Utbildningskod: *Education code:* TNA002	Modul: *Module:* TEN1		

3. Forts. $y' = Ay$ $\quad A = TDT^{-1}$ $\quad y = Tz$ $\quad z' = T^{-1}y'$

Nu använder vi basbyte

$$y' = TDT^{-1}y$$

$$\iff y' = TDT^{-1}Tz \iff T^{-1}y' = Dz \iff z' = Dz$$

Differentialsats

$$\begin{cases} z_1'(t) = 3z_1(t) \\ z_2'(t) = -z_2(t) \end{cases} \iff \begin{cases} z_1(t) = c_1e^{3t} \\ z_2(t) = c_2e^{-t} \end{cases}$$

R

$\boxed{y = Tz}$ ger

$$y_1(t) = c_1e^{3t} + c_2e^{-t}$$
$$y_2(t) = c_1e^{3t} + 2c_2e^{-t}$$

R

Detta är den allmänna lösningen.

Speciella lösningen: $y_1(0) = 7$ $\quad y_2(0) = 10$

Detta ger Matrisen

$$\begin{array}{cc} c_1 & c_2 \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 7 \\ 1 & 2 & 10 \end{array}\right)^{-1}$$

$$\iff \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \quad c_2 = 3 \quad c_1 = 4$$

Vilket ger

$$y_1(t) = 4e^{3t} + 3e^{-t}$$
$$y_2(t) = 4e^{3t} + 6e^{-t}$$

R

6

Detta är alltså den speciella lösningen.

Svar: Allmän lösning: $y_1(t) = c_1e^{3t} + c_2e^{-t}$

$$y_2(t) = c_1e^{3t} + 2c_2e^{-t}$$

Speciella lösningen: $y_1(t) = 4e^{3t} + 3e^{-t}$, $y_2(t) = 4e^{3t} + 6e^{-t}$

AID-nummer: AID-number: 2594	Datum: Date: 2023-01-10	Blad nummer: Sheet number: 7
Utbildningskod: Education code: TNA002	Modul: Module: TEN1	

4a) $9x_1^2 - 4x_1x_2 + 6x_2^2 = 20$

Skriver om till matris

$Q = X^t A X$

$Q = 9x_1^2 - 4x_1x_2 + 6x_2^2 = (x_1, x_2)\begin{pmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

$A = TDT^{-1}$ Vill visa diagonaliserbar

$\det(A - \lambda E) = 0$ Egenvärden:

$\begin{vmatrix} 9-\lambda & -2 \\ -2 & 6-\lambda \end{vmatrix} = (9-\lambda)(6-\lambda) - 4 = \lambda^2 - 15\lambda + 50$

$\lambda^2 - 15\lambda + 50 = 0 \iff \lambda = 7,5 \pm 2,5 \quad \lambda_1 = 10 \quad \lambda_2 = 5$

$\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$ $c > 0$ Alltså en ellips

$D = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ R

Egenvektorer:

$\lambda_1 = 10$ ger $\left(\begin{array}{cc|c} 9-10 & -2 & 0 \\ -2 & 6-10 & 0 \end{array}\right) \iff \left(\begin{array}{cc|c} -1 & -2 & 0 \\ -2 & -4 & 0 \end{array}\right)$ $t\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ $t=1$ $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\lambda_2 = 5$ ger $\left(\begin{array}{cc|c} 9-5 & -2 & 0 \\ -2 & 6-5 & 0 \end{array}\right) \iff \left(\begin{array}{cc|c} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{array}\right)$ $t\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $t=1$ $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$e_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ $e_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $T = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ R

Nästa blad

AID-nummer: *AID-number:* 2594	Datum: *Date:* 2023-01-10
Utbildningskod: *Education code:* TNA002	Modul: *Module:* TEN1

Blad nummer: *Sheet number:* 8

4a) Forts. $Q = X^t A X \iff Q = X^t T D T^{-1} X$

Bas byte $\iff Q = Y^t D Y$

$\iff Q = 10y_1^2 + 5y_2^2$

$d^2 = y_1^2 + y_2^2$ $\quad 20 = 10y_1^2 + 5y_2^2 \iff 4 = 2y_1^2 + y_2^2$ R

Substitution: $y_1 = \sqrt{2 - \frac{y_2^2}{2}}$

$d = \sqrt{2 + \frac{y_2^2}{2}}$ alltså är min värde $\sqrt{2}$ när $y_2 = 0$ R

$y_2 = \sqrt{4 - 2y_1^2}$ $\quad d = \sqrt{4 - y_1^2}$

alltså är max värde 2 när $y_1 = 0$

Längsta avståndet är alltså när $y_1 = 0$ och $y_2 = \pm 2$

I gamla basen: $X = TY \iff \underbrace{\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ \pm 2 \end{pmatrix}}_{X=}$

$\iff X = \frac{1}{\sqrt{5}} \pm \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

Svar: Punkten $\begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{4}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$ och punkten $\begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ -\frac{4}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$

R

AID-nummer: / *AID-number:* 2594	Datum: / *Date:* 2023-01-10
Utbildningskod: / *Education code:* TNA001	Modul: / *Module:* TEN1

Blad nummer: / *Sheet number:* 9

4b) Från a) uppgiften finns uträkningarna med substitution där jag fick fram att

$d = \sqrt{2 + \frac{y^2}{2}}$ har minsta värdet när $y_2 = 0$

och då fås $d = \sqrt{2}$ vilket är det kortaste avståndet till origo.

Svar: Det kortaste avståndet är $\sqrt{2}$. R

6

AID-nummer: / *AID-number:* 2594

Datum: / *Date:* 2023-01-10

Blad nummer: / *Sheet number:* 10

Utbildningskod: / *Education code:* TNA002

Modul: / *Module:* TEN1

5 a) $W = [\underbrace{(1,0,1,0)^t}_{u_1}, \underbrace{(6,2,6,2)^t}_{u_2}] \subset E^4$

GS kommer användas.

$u_1 = f_1 \quad e_1 = \frac{1}{\|f_1\|} f_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}$

$f_2 = u_2 - (u_2|e_1)e_1 = \begin{pmatrix}6\\2\\6\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}6\\0\\6\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\2\\0\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}$

$e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}$

/2 Ta $\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}$

Svar: ON-bas för W: ges av $\{e_1, e_2\}$

b) Vi tar fram W ekvation

$\left(\begin{array}{cc|c}1 & 6 & 1\\0 & 2 & -1\\1 & 6 & 0\\0 & 2 & 0\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c}1 & 0 & 4\\0 & 2 & -1\\1 & 0 & 4\\0 & 0 & 1\end{array}\right)$

$\left(\begin{array}{cc|c}1 & 6 & x_1\\0 & 2 & x_2\\1 & 6 & x_3\\0 & 2 & x_4\end{array}\right)$

$x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0$

Fel!

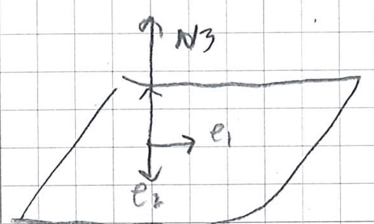
omöjligt

men

$x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0$

$1 - 1 - 0 - 0 = 0$

ok!



Härifrån tar vi $v_3 = \begin{pmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{pmatrix}$

$e_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{pmatrix}$ Vilket också

är ON basen för ortogonala komplementet $W_\perp$.

/0

AID-nummer: *AID-number:* 2594	Datum: *Date:* 2023-01-10
Utbildningskod: *Education code:* TNA002	Modul: *Module:* TEN1

Blad nummer: *Sheet number:* 11

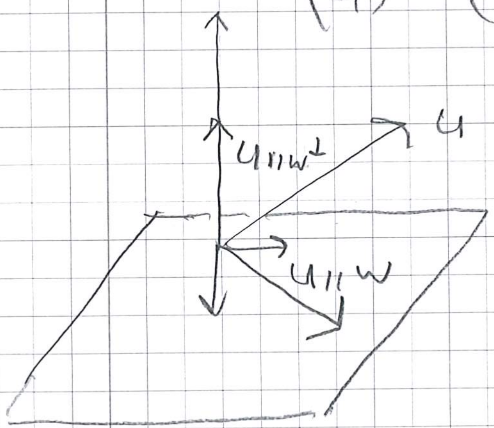
5c) $u = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\quad u_{\parallel w} = (u|e_1)e_1 + (u|e_2)e_2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow u_{\parallel w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$u_{\parallel w^\perp} = u - u_{\parallel w} \Leftrightarrow u_{\parallel w^\perp} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$

Svar: $u = u_{\parallel w} + u_{\parallel w^\perp}$

$\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$



1/2

AID-nummer: *AID-number:* 2594	Datum: *Date:* 2023-01-10
Utbildningskod: *Education code:* TNA002	Modul: *Module:* TEN1

Blad nummer: *Sheet number:* 12

6a) $U=\{x\in E^4 : x_1-x_2+x_3+2x_4=0\}$

$v=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\2\end{pmatrix}$ fås från ekvationen. Vi sätter $u=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}$

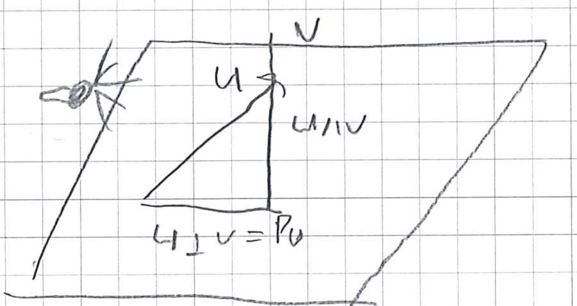
Ortogonala projektionen P_U ges av $u-u_{\parallel v}$

$$u_{\parallel v}=\frac{1}{7}\begin{pmatrix}1&-1&1&2\\-1&1&-1&-2\\1&-1&1&2\\2&-2&2&4\end{pmatrix}$$

Då är $P_U=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}-\frac{1}{7}\begin{pmatrix}1&-1&1&2\\-1&1&-1&-2\\1&-1&1&2\\2&-2&2&4\end{pmatrix}$

$$=\frac{1}{7}\begin{pmatrix}6&1&-1&-2\\1&6&1&2\\-1&1&6&-2\\-2&2&-2&3\end{pmatrix}$$

Svar: Matrisen till ortogonala projektionen P_U är $\frac{1}{7}\begin{pmatrix}6&1&-1&-2\\1&6&1&2\\-1&1&6&-2\\-2&2&-2&3\end{pmatrix}$



LINKÖPINGS UNIVERSITET

AID-nummer: *AID-number:* 2594	Datum: *Date:* 2023-01-10
Utbildningskod: *Education code:* TNA002	Modul: *Module:* TEN1

Blad nummer: *Sheet number:* 13

6b) $u = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ $\quad P_V = A \quad v?$

$$u_{\parallel V} = u - P_V = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Då ser vi att $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Alltså är ekvationen för $V = \{ x \in E^4 : x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0 \}$

Svar: $\nearrow$