①

TENTAMEN (EXAMINATION)

Tentamensdatum/*Examination date:* 2023-06-01
(åå-mm-dd/*yy-mm-dd*)

	Ifylles av student	Ifylles av vakt
AID-nummer ***AID number***	2 7 3 3	2 7 3 3
	Completed by student	*Completed by supervisor*

Utbildningskod/*Education code:* TNA004 **Modul/*Module:*** TEN1

Kursnamn/*Course title:* Analys II

Institution/*Department:* ITN

Jag intygar att varken mobil eller något annat otillåtet hjälpmedel finns tillgängligt under tentamen.
I confirm that no mobile or other non-permitted aids are available during the examination. ☒

Inlämnat: antal lösblad 12 **tentamensformulär** ☐
Enclosed: number of sheets ***exam booklet***

Markera behandlade uppgifter med X/*Mark tasks attempted with an X*

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
X här/*here*	X	X	X	X	X	X	X	B							
Erhållna poäng *Points obtained*	5	5	5	6	5	3	1	6							
	16	**17**	**18**	**19**	**20**	**21**	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**
X här/*here*															
Erhållna poäng *Points obtained*															

Anvisningar/*Instructions*

1. Skriv AID-nummer, datum, utb.kod, modul på varje blad som lämnas in/*Write AID number, date, edu.code and module on every sheet that is handed in*
2. På varje papper får högst en uppgift lösas om inget annat anges/ *Maximum one task per sheet unless otherwise instructed*
3. Skriv endast på papprets ena sida om inget annat anges/ *Use only one side of each sheet unless otherwise instructed*
4. Numrera de papper som lämnas in/*Number every sheet that is handed in*
5. Använd inte röd penna/*Do not use a red pen/pencil*

Sen inlämning *Late hand in* ☐

Klockslag *Time* ______

Orsak *Reason* ______

Σ Poäng/*Points:* 36 Betyg/*Grade:* 5

Examinator/*Examiner:* [illegible]

LINKÖPINGS UNIVERSITET

AID-nummer: *AID-number:* 2733

Datum: *Date:* 2023-06-01

Blad nummer: *Sheet number:* 1

Utbildningskod: *Education code:* TNA004

Modul: *Module:* TEN 1

1. $y'(x) + xy(x) = x^3 \quad (\star), \; y(0) = 0$

IF: $g(x) = x \quad e^{\int g(x)dx} = e^{\int x\,dx} = e^{\frac{x^2}{2}}$ R

Multiplicera med $\star$ ger

$e^{\frac{x^2}{2}} y'(x) + x e^{\frac{x^2}{2}} y(x) = x^3 e^{\frac{x^2}{2}}$

OMOTIVERAT!

$\Leftrightarrow \frac{d}{dx}\left(e^{\frac{x^2}{2}} y(x)\right) = x^3 e^{\frac{x^2}{2}}$

$\Downarrow$

$\Leftrightarrow e^{\frac{x^2}{2}} y(x) \overset{R}{=} \int x^3 e^{\frac{x^2}{2}}\,dx = x^2 e^{\frac{x^2}{2}} - 2e^{\frac{x^2}{2}} + C$

poäng-avdrag!

$\Leftrightarrow y(x) = x^2 - 2 + \frac{C}{e^{x^2/2}} \quad y(0) = 0$ ger

$0 = -2 + C \Leftrightarrow C = 2$

Svar: $y(x) = x^2 - 2 + \frac{2}{e^{x^2/2}}$ R

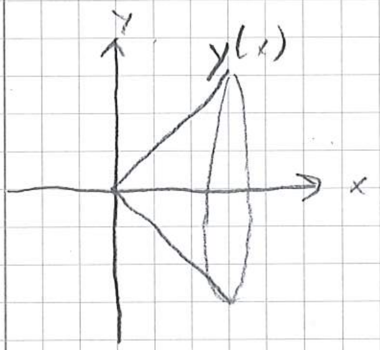
5p

AID-nummer: *AID-number:* 2733	Datum: *Date:* 2023-06-01
Utbildningskod: *Education code:* TNA004	Modul: *Module:* TEN 1

Blad nummer: *Sheet number:* 2

2a) $y = e^{x} - e^{-x}$, $0 \leq x \leq 1$

Skivformel



Volymelementet:

$dV = \pi \, y^2(x) \, dx$

$V = \pi \int_0^1 (e^{x} - e^{-x})^2 dx$

$= \pi \int_0^1 e^{2x} - 2e^{x}e^{-x} + e^{-2x} \, dx$

$= \pi \int_0^1 e^{2x} + e^{-2x} - 2 \, dx = \pi \left[\frac{e^{2x}}{2} - \frac{e^{-2x}}{2} - 2x \right]_0^1$

$= \pi \left(\frac{e^{2} - e^{-2}}{2} - 2 \right)$ v.e.

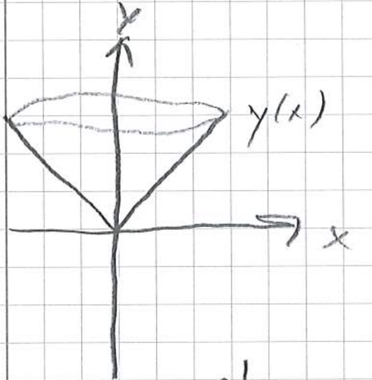
Svar: $\pi \left(\frac{e^{2} - e^{-2}}{2} - 2 \right)$ v.e.

3

LINKÖPINGS UNIVERSITET

AID-nummer: *AID-number:* 2733	Datum: *Date:* 2023-06-01	Blad nummer: *Sheet number:* 3
Utbildningskod: *Education code:* TNA004	Modul: *Module:* TEN1	

2b) $y = e^{x} - e^{-x}\ ,\quad 0 \le x \le 1$ Rörformel



Volymelement:

$$dV = 2\pi\, x\, y(x)\, dx$$

$$V = 2\pi \int_0^1 x(e^{x} - e^{-x})\, dx$$

$$= 2\pi \int_0^1 xe^{x} - xe^{-x}\ dx = 2\pi \Big[xe^{x} - e^{x} + xe^{-x} + e^{-x} \Big]_0^1$$

$$= 2\pi\left(e - e + \frac{1}{e} + \frac{1}{e} - (-1 + 1)\right) = \frac{\pi}{e} \text{ v.e}$$

Svar: $\frac{\pi}{e}$ v.e.

2

AID-nummer: *AID-number:* 2733	Datum: *Date:* 2023-06-01
Utbildningskod: *Education code:* TNA004	Modul: *Module:* TEN1

Blad nummer: *Sheet number:* 4

3. a) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{e^{\frac{1}{\sqrt{x}}}-1}{x}\,dx$ Generaliserad i ∞

Maclaurin utveckling $e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + O(t^3)$

$t = \frac{1}{\sqrt{x}}$ ger $e^{\frac{1}{\sqrt{x}}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{x}} + O\left(\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2\right)$

$f(x) = \dfrac{e^{\frac{1}{\sqrt{x}}}-1}{x} = \dfrac{\frac{1}{\sqrt{x}} + O\left(\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2\right)}{x}$ liknar $g(x) = \dfrac{1}{x^{3/2}}$

$0 < \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{x^{3/2} + O\left(\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2\right)}{x^{3/2}}$ ~~x~~ $\to 1$, $x \to \infty$

Enligt sats 10.12 är $\int_1^\infty g(x)\,dx$ konvergent eftersom $\alpha (= 3/2) > 1$

Och då följer, enligt sats 10.13 att även $\int_0^1 f(x)\,dx$ är konvergent.

Svar: $\displaystyle\int_1^\infty \frac{e^{\frac{1}{\sqrt{x}}}-1}{x}\,dx$ är konvergent

2

LINKÖPINGS UNIVERSITET

AID-nummer: *AID-number:* 2733	Datum: *Date:* 2023-06-01
Utbildningskod: *Education code:* TNA004	Modul: *Module:* TEN1

Blad nummer: *Sheet number:* 5

3b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{6^n n}$ $\qquad a_n = \frac{(x-1)^n}{6^n n}$

Kvotkriteriet: $Q = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$ ger

$$Q = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{(x-1)^{n+1}}{6^{n+1}(n+1)}}{\frac{(x-1)^n}{6^n n}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(x-1)\, 6^n n}{6^{n+1}(n+1)} \right| =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(x-1)}{6} \frac{6^n n}{6^n (n+1)} \right| = \left| \frac{x-1}{6} \right| , n \to \infty$$

Serien konvergerar när $Q < 1$:

$\left|\frac{x-1}{6}\right| < 1 \iff |x-1| < 6$ Detta ger

$-5 < x < 7$ Checka ändpunkter.

$x = -5$ ger $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-6)^n}{6^n n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ Alternerande

och $\frac{1}{n}$ går strängt mot 0, konvergent enligt Leibniz

kriterium. ? $x = 7$ ger $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6^n}{6^n n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ Vilket

är divergent enligt sats 10.5 eftersom $\alpha = 1$

Svar: Serien är konvergent för $-5 \leq x < 7$

3-

LINKÖPINGS UNIVERSITET

AID-nummer: / *AID-number:* 2733	Datum: / *Date:* 2023-06-01
Utbildningskod: / *Education code:* TNA004	Modul: / *Module:* TEN1

Blad nummer: / *Sheet number:* 6

4. $y''(x) + 9y(x) = 12\sin 3x$

Homogena lösningen: KE:

$r^2 + 9 = 0 \quad r = \pm 3i \quad y_h(x) = A\cos 3x + B\sin 3x$

där A och B är godtyckliga tal.

Partikulär lösning: $12\sin 3x$ kan enligt Eulers formel skrivas om till $\operatorname{Im}(12e^{3ix})$

$u''(x) + 9u(x) = 12e^{3ix}$ ☆

Ansats $u_p(x) = ze^{i3x} \quad u_p'(x) = e^{i3x}(z' + 3iz)$

$u_p''(x) = e^{i3x}(z'' + 6iz' - 9z)$ Insatt i ☆ fås.

$e^{i3x}(z'' + 6iz' - 9z + 9z) = 12e^{3ix} \iff z'' + 6iz' = 12$ ☆☆

Ansats: $z = Cx \quad z' = C \quad z'' = 0$ Insatt i ☆☆

$6iC = 12 \iff C = \frac{12}{6i} = \frac{-72i}{36} = -2i \quad z = -2ix$

$u_p(x) = -2ixe^{i3x}$ Imaginära delen sökes.

$\operatorname{Im}(-2ix(\cos 3x + i\sin 3x)) = -2x\cos 3x$

$y_A(x) = y_h(x) + y_p(x) = A\cos 3x + B\sin 3x - 2x\cos 3x$

Svar: $y_A(x) = A\cos 3x + B\sin 3x - 2x\cos 3x$

Där A och B är godtyckliga svar.

6

AID-nummer: *AID-number:* 2733	Datum: *Date:* 2023-06-01	Blad nummer: *Sheet number:* 7
Utbildningskod: *Education code:* TNA004	Modul: *Module:* TEN1	

LINKÖPINGS UNIVERSITET

5a) $f(x) = 3xe^{-x} - \sin 3x + \ln(1+3x^2)$ $\quad x=0$

Maclaurin utveckling:

$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + O(t^4)$ $\quad t=-x$

$\sin t = t - \frac{t^3}{6} + O(t^5)$ $\quad t = 3x$

$\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + O(t^3)$ $\quad t = 3x^2$

$3xe^{-x} = 3x\left(1 - x + \frac{x^2}{2} - \cancel{\frac{x^3}{6}} + O(x^{\cancel{4}\,3})\right) = 3x - 3x^2 + \frac{3x^3}{2} - \cancel{\frac{x^4}{2}} + O(x^{\cancel{5}\,4})$

$\sin 3x = 3x - \frac{9x^3}{2} + O(x^5)$

$\ln(1+3x^2) = 3x^2 - \cancel{\frac{9x^4}{2}} + O(x^{\cancel{6}\,4})$

$f(x) = 3x - 3x^2 + \frac{3x^3}{2} - \cancel{\frac{x^4}{2}} - 3x + \frac{9x^3}{2} + 3x^2 - \cancel{\frac{9x^4}{2}} + O(x^{\cancel{5}\,4})$

$= 6x^3 - \cancel{5x^4} + O(x^{\cancel{5}\,4}) = \cancel{x^3(6 - 5x + O(x^2))}$

$= 6x^3 + O(x^4)$

Svar: Nej det är en terasspunkt.

Note: Sätter man in värden i originalfunktionen verkar det vara en minimipunkt. Fel i min maclaurin?

3

AID-nummer: *AID-number:* 2733	Datum: *Date:* 2023-06-01	Blad nummer: *Sheet number:* 8
Utbildningskod: *Education code:* TNA004	Modul: *Module:* TEN1	

5b) Ordning 2 $x=1$ Taylor

$g(x) = x^2 + \cos 2x + \sqrt{2}(1+x)^{0,5}$

$\frac{g^{(k)}(1)(x-1)^k}{k!}$

$y = \cos 2x$ $y(1) = \cos 2$

$y' = -2\sin 2x$ $y'(1) = -2\sin 2\,(x-1)$

$y'' = -4\cos 2x$ $y''(1) = \frac{-4\cos 2(x-1)^2}{2}$

~~$(1+x)^{0,5} = \sqrt{2}$~~

~~$\sqrt{2}\frac{1}{\sqrt{2}}(x-1)$~~

~~$\sqrt{2}(-\frac{1}{4}(x-1)^2$~~

~~$g(x) = x^2 + \cos 2 - 2\sin(2)(x-1) - 4\frac{\cos(2)}{2}(x-1)^2 + \sqrt{2}(\sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}(x-1) -$~~

~~$\frac{\sqrt{2}}{4}(x-1)^2 =$~~

~~$= x^2 + \cos 2 - \sin(2)(2x-2) - \cos(2)(2x^2-4x+2) + 2 + x - 1$~~

~~$-\frac{x^2}{2} + x - \frac{1}{2}$~~

$d(x) = (1+x)^{0,5}$ $d'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}}$ $d''(x) = -\frac{1}{4(1+x)^{3/2}}$

$\sqrt{2}\left(\sqrt{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}}(x-1) - \frac{1}{2^{7/2}}(x-1)^2 + O(x^3)\right) =$

$= 2 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{8}(x-1)^2 + O(x^3)$

$g(x) = x^2 + \cos 2 - 2\sin 2(x-1) - 2\cos 2(x-1)^2 + 2 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{8}(x-1)^2 + O(x^3)$

Svar: $g(x) = x^2 + \cos 2 - 2\sin 2\,(x-1) - 2\cos 2(x-1)^2 + 2 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{8}(x-1)^2 + O(x^3)$

1/2

Skriv ej på baksidan! Do not write on the other side!

6. a) $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, $0 \le x \le 1$

$ds = \sqrt{1+(y')^2}$ Bågelementet.

$s = \int_0^1 \sqrt{1+(y')^2}\,dx$ $y' = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

$(y')^2 = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 = \frac{e^{2x}}{4} - \frac{1}{2} + \frac{e^{-2x}}{4}$

$(y')^2 + 1 = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2$

$s = \int_0^1 \sqrt{\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2}\,dx = \int_0^1 \frac{e^x}{2} + \frac{e^{-x}}{2}\,dx$

$= \left[\frac{e^x}{2} - \frac{e^{-x}}{2}\right]_0^1 = \frac{e}{2} - \frac{1}{2e}$ l.e.

Svar: längden är $\frac{e}{2} - \frac{1}{2e}$ l.e.

3

LINKÖPINGS UNIVERSITET

AID-nummer: *AID-number:* 2733	Datum: *Date:* 2023-06-01
Utbildningskod: *Education code:* TNA004	Modul: *Module:* TEN1

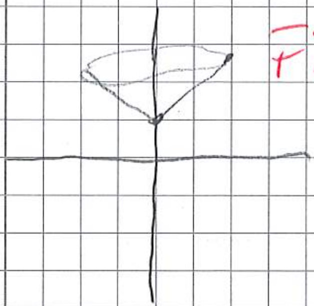
Blad nummer: *Sheet number:* 10

6b) $y = \dfrac{e^{x}+e^{-x}}{2} \quad 0 \le x \le 1$

Fel!

Arealementet $dA = 2\pi\, \underline{y(x)\, ds}\; dx$

Från a uppgiften



Figur!

$$A = 2\pi \int_0^1 y(x)\left(\frac{e^{x}}{2}+\frac{e^{-x}}{2}\right) dx$$

$$= 2\pi \int_0^1 \frac{e^{2x}}{4} + \frac{1}{2} + \frac{e^{-2x}}{4}\, dx$$

$$= \pi \left[e^{2x} + x - e^{-2x} \right]_0^1 =$$

$$= \pi\left(e^{2} + 1 - \frac{1}{e^{2}}\right)$$

Svar: $A = \pi\left(e^{2}+1-\frac{1}{e^{2}}\right)$

0

LINKÖPINGS UNIVERSITET

AID-nummer: *AID-number:* 2733	Datum: *Date:* 2023-06-01
Utbildningskod: *Education code:* TNA004	Modul: *Module:* TEN1

Blad nummer: *Sheet number:* 11

7a) $\sum^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} x^{4k+2}}{(2k+1)!}$ Kvotkriteriet

$$Q = \lim_{k\to} \left| \frac{\frac{(-1)^{k+2} x^{4k+6}}{(2k+3)!}}{\frac{(-1)^{k+1} x^{4k+2}}{(2k+1)!}} \right| = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{x^{4k+6}(2k+1)!}{(2k+3)!(x^{4k+2})} \right| =$$

$$= \lim_{k\to} \left| \frac{x^4}{(2k+2)(2k+3)} \right| = 0, \ k\to\infty$$

Konvergent för alla x.

LINKÖPINGS UNIVERSITET

AID-nummer: *AID-number:* 2733	Datum: *Date:* 2023-06-01
Utbildningskod: *Education code:* TNA004	Modul: *Module:* TEN1

Blad nummer: *Sheet number:* 12

7b) $xy''(x) - y'(x) + 4x^3 y(x) = 0$ ☆

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 \ldots$$

?

$$y'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k c_k x^{k-1} = c_1 + 2c_2 x + 3c_3 x^2 + 4c_4 x^3 \ldots$$

$$y''(x) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) c_k x^{k-2} = 2c_2 + 6c_3 x + 12 c_4 x^2 + 20 c_5 x^3 \ldots$$

Sätter in i ☆:

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) c_k x^{k-1} - \sum_{k=1}^{\infty} k c_k x^{k-1} + 4 \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{k+3} = 0$$

0