ECO432 - mercredi 28 février 2024 de 9h à 11h.

Documents autorisés: dictionnaire papier et feuille A4 annotée

Exercice 1

Le temps est continu, $t \in [0, +\infty[$. Soit une économie fermée (i.e. qui n'importe ni n'exporte aucun bien), produisant un bien de consommation suivant la fonction de production:

$$Y_t = K_t^\alpha L_t^{1-\alpha} \tag{1}$$

où K_t est le stock de capital à la date t et L_t est la quantité de travail à la date t, supposée croissant au taux exogène $n > 0$: $\forall t \geq 0$, $\frac{\dot{L}_t}{L_t} = n$. α est un paramètre compris strictement entre 0 et 1. Remarquez que le progrès technologique n'apparaît pas dans la fonction de production ci-dessus – il apparaîtra dans l'équation (3) ci-dessous.

L'output Y_t peut être soit consommé, soit investi:

$$Y_t = C_t + I_t \tag{2}$$

où I_t est l'investissement physique mesuré en unités de consommation.

Les agents de l'économie ont un taux d'épargne constant $s \in]0, 1]$ et $I_t = sY_t$. Ainsi, l'équation d'accumulation du capital est :

$$\dot{K}_t = -\delta K_t + q_t I_t \tag{3}$$

où $\delta > 0$ est le taux instantané de dépréciation du capital, et où $q_t I_t$ représente l'investissement mesuré en unités efficaces. Remarquez que l'investissement, mesuré en unités de consommation, I_t, est multiplié par un terme qui représente la qualité des biens d'investissement nouvellement produits, q_t. Ce terme q_t est appelé « productivité spécifique à l'investissement » et il augmente de manière exponentielle : $q_t = q_0 \exp(g_q t)$ avec $q_0 > 0$ et $g_q > 0$ exogènes. L'augmentation de q_t au fil du temps reflète les changements technologiques dans la production de nouveaux biens d'équipement.

1. Par définition, sur un chemin de croissance équilibrée, le capital par travailleur doit croître à un taux constant. Démontrer qu'il n'y a qu'un seul taux de croissance possible du ratio capital-travail qui est cohérent avec une croissance équilibrée. (Aide: pour répondre à cette question, commencez par exprimer l'équation (3) en termes de capital par travailleur)
2. Soit $\gamma \in \mathbb{R}$. On note $\hat{k}_t = \frac{K_t}{(q_t)^\gamma L_t}$ où $\hat{k}_t$ est le ratio capital-travail "normalisé." En utilisant (3), calculer $\frac{\dot{\hat{k}}_t}{\hat{k}_t}$ en fonction de K_t, L_t, q_t et des paramètres.

3. Trouvez la valeur de γ pour laquelle $\hat{k}_t$ obéit à une équation différentielle autonome (dans cette équation, q_t n'apparaît pas).

4. Trouvez l'état stationnaire $\hat{k}^*$ pour $\hat{k}_t$.

5. Avec un graphique, démontrer que, en commençant avec n'importe quel $\hat{k}_0$, le ratio capital-travail normalisé dans cette économie converge vers $\hat{k}^* > 0$. Montrer que à long terme le ratio capital-travail $\frac{K}{L}$ croît à un taux constant (à préciser). Montrer également que le taux de croissance du PIB par tête tend vers une certaine limite g_y (à préciser).

6. Dans le modèle de base de Solow, le bien capital et le bien de consommation ont le même prix car pour produire une nouvelle machine, une unité de consommation est nécessaire. Dans ce modèle, ce n'est plus le cas. Quel est le prix du bien capital en termes du bien de consommation ?

7. Ce modèle de croissance est-il compatible avec le quatrième fait stylisé de Kaldor, selon lequel le ratio capital/PIB n'a pas de tendance de long terme ? Si ce n'est pas le cas, expliquez l'intuition. Et si vous preniez plutôt le ratio entre la valeur du capital (K_t fois le prix du bien capital) et le PIB, serait-il stable à long terme ?

8. Le modèle présenté est-il cohérent avec la figure ci-dessous ?

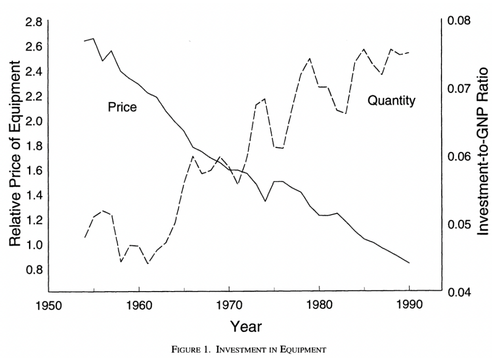

Figure 1: prix des équipements et ratio investissement-en-équipement/produit national brut : Greenwood, et al, 1997

Solution 1 Désignons $k \equiv K/L$.

$$\frac{\dot{k}_t}{k_t} = -\delta + sq_t(\frac{K_t}{L_t})^{\alpha-1} - n$$

Sur un chemin de croissance équilibrée, $\frac{\dot{k}_t}{k_t}$ est constant, ce qui implique que $sq_t(\frac{K_t}{L_t})^{\alpha-1}$ doit également être constant. Donc,

$$\frac{\dot{k}_t}{k_t} = \frac{g_q}{1-\alpha}$$

Solution 2

$$\frac{\dot{\hat{k}}_t}{\hat{k}_t} = -(\delta + g_q\gamma + n) + sq_t(\frac{K}{L})^{\alpha-1}$$

Solution 3-5

$$\frac{\dot{\hat{k}}_t}{\hat{k}_t} = -(\delta + g_q\gamma + n) + sq_t(\hat{k}_t q^{\gamma})^{\alpha-1}$$

q_t disparaît si , $\gamma = \frac{1}{1-\alpha}$

$$\frac{\dot{\hat{k}}_t}{\hat{k}_t} = -(\delta + g_q\frac{1}{1-\alpha} + n) + sq_t(\hat{k}_t q^{\frac{1}{1-\alpha}})^{\alpha-1} \equiv G(\hat{k}_t)$$

À l'état stationnaire :

$$\hat{k}^* = (\frac{s}{\delta + n + \frac{g_q}{1-\alpha}})^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

$G(\hat{k}_t)$ décroît et s'annule en $k^\star$, donc $\hat{k}_{(0)}$, le ratio capital-travail normalisé dans cette économie, converge vers k^*, et le ratio capital-travail croît asymptotiquement au taux $\frac{g_q}{1-\alpha}$ tandis que Y/L croît asymptotiquement au taux $\frac{g_q\alpha}{1-\alpha}$.

Solution 6 Le prix du capital est $1/q$

Solution 7 À partir des réponses précédentes, nous savons que $\frac{K}{Y}$ tend vers l'infini en raison du progrès technologique spécifique à l'investissement, poussant le capital à croître plus rapidement. Cependant, on peut montrer que $K\left(\frac{1}{q}\right)$ croît au taux $g_q\frac{1}{1-\alpha} + n - g_q$, ce qui est égal à $g_q\frac{\alpha}{1-\alpha} + n$, le taux de croissance du PIB agrégé. Ainsi, le deuxième ratio est stable à long terme.

Exercice 2: questions de cours

1. Laquelles des assertions suivantes est fausse ?
   (a) la propension marginale à consommer des consommateurs est comprise entre 0 et 1
   (b) la consommation des consommateurs ricardiens réagit au taux d'intérêt réel
   (c) si tous les consommateurs sont keynésiens, une baisse du taux d'intérêt réel ne stimule pas la demande agrégée
   (d) la banque centrale stabilise la demande en influant sur le taux d'intérêt réel

2. A la suite d'un choc inconnu, on a observé une baisse de la production accompagnée d'une augmentation de l'inflation. Après plusieurs périodes, la production est revenue à son niveau d'origine mais l'inflation est restée à un niveau plus haut. Quel type d'événement est compatible avec cette observation ?
   (a) Un choc négatif persistent de la production et un choc négatif temporaire de la demande
   (b) Un choc négatif temporaire de la production et un choc postif persistent de la demande
   (c) Un choc positif temporaire de la production et un choc négatif persistent de la demande
   (d) Un choc positif persistent de la production et un choc négatif temporaire de la demande

Exercice 3: marché du travail

On suppose que les firmes produisent avec une technologie linéaire $Y_t = L_t Z_t$ où L_t est le nombre d'heures travaillées, et Z_t un choc de productivité. Le salaire horaire est W_t.

1. Quel est le coût marginal de la production?

Les travailleurs maximisent chaque période une fonction d'utilité $V(C_t, L_t) = \frac{{C_t}^{1-\sigma}}{1-\sigma} - \frac{1}{\xi}{L_t}^{\xi}$ où C_t est la consommation et L_t le nombre d'heures travaillées et ξ un paramètre positif. On note P_t le niveau des prix.

2. Écrire la contrainte de budget intratemporelle des travailleurs et déterminer leur offre de travail à l'équilibre.

3. Quel est l'équilibre sur le marché du travail? Représentation graphique.

4. On suppose maintenant que les firmes fixent leur prix optimal $P_t^\star$ en intégrant une marge μ sur le coût marginal. En supposant les prix parfaitement flexibles calculer l'équilibre de long terme pour les différentes variables macroéconomiques. Commenter l'effet de la productivité Z et du taux de marge μ sur Y et L.

Exercice 4: principe de Taylor

On considère ici une économie loglinéarisée caractérisée par les courbes IS et PC suivantes:

$$y_t = y_{t+1} - \sigma\,(i_t - \pi_{t+1}) + e_t^\pi \tag{4}$$

$$\pi_t = \kappa(y_t - e_t^y) + \beta\pi_{t+1} \tag{5}$$

où π_t dénote l'inflation, y_t la production, i_t le taux d'intérêt et où σ et κ sont des paramètres réels positifs et où $\beta \in]0,1[$ est le facteur d'escompte.

Les variables e_t^π et e_t^y sont respectivement des chocs de demande et d'offre.[1]. Ils sont pris comme exogènes et on les suppose bornés. On suppose qu'il n'y a pas d'incertitude sur la valeur des chocs futurs, de sorte qu'on peut omettre les symboles d'espérance et considérer toutes leurs valeurs comme connues.

La banque centrale suit une règle pour fixer son taux d'intérêt:

$$i_t = i^\star + \varphi_y(y_t - e_t^\pi) + \varphi_\pi(\pi_t - \pi^\star) \tag{6}$$

avec la cible d'inflation égale au taux d'intérêt cible: $i^\star = \pi^\star$.

On dit qu'une règle de Taylor satisfait le principe de Taylor, si en réponse à un choc de demande permanent ayant pour effet d'augmenter l'inflation d'1%, la banque centrale augmente le taux d'intérêt de plus d'1%.

1. Définir deux matrices A, B telles que:

   $$z_{t+1} = Az_t + Be_t$$

   où $z_t = (\pi_t, y_t)$ et $e_t = (e_t^\pi, e_t^y)$

2. Montrer que les niveaux d'inflation et de production sont uniquement déterminés à toutes les dates $t \geq 0$ si

   $$\varphi_\pi + \frac{1-\beta}{\kappa}\varphi_y > 1$$

   Cela correspond-il a une banque centrale plus active ou plus passive vis-à-vis de l'inflation ? Comparer avec le principe de Taylor.

[1] Ici, la courbe de Philips provient de la fixation des prix par des entreprises en compétitions monopolistique, qui optimisent leur profits futurs plutôt qu'instantané. On parle de courbe de Philips augmentée par les anticipations.