ECO432 - mercredi 28 février 2024 de 9h à 11h.

Documents autorisés: dictionnaire papier et feuille A4 annotée

Exercice 1

Le temps est continu, $t \in [0, +\infty[$. Soit une économie fermée (i.e. qui n'importe ni n'exporte aucun bien), produisant un bien de consommation suivant la fonction de production:

$$Y_t = K_t^{\alpha} L_t^{1-\alpha} \tag{1}$$

où K_t est le stock de capital à la date t et L_t est la quantité de travail à la date t, supposée croissant au taux exogène $n > 0$: $\forall t \geq 0, \frac{\dot{L}_t}{L_t} = n$. α est un paramètre compris strictement entre 0 et 1. Remarquez que le progrès technologique n'apparaît pas dans la fonction de production ci-dessus − il apparaîtra dans l'équation (**??**) ci-dessous.

L'output Y_t peut être soit consommé, soit investi:

$$Y_t = C_t + I_t \tag{2}$$

où I_t est l'investissement physique mesuré en unités de consommation.

Les agents de l'économie ont un taux d'épargne constant $s \in]0, 1]$ et $I_t = sY_t$. Ainsi, l'équation d'accumulation du capital est :

$$\dot{K}_t = -\delta K_t + q_t I_t \tag{3}$$

où $\delta > 0$ est le taux instantané de dépréciation du capital, et où $q_t I_t$ représente l'investissement mesuré en unités efficaces. Remarquez que l'investissement, mesuré en unités de consommation, I_t, est multiplié par un terme qui représente la qualité des biens d'investissement nouvellement produits, q_t. Ce terme q_t est appelé « productivité spécifique à l'investissement » et il augmente de manière exponentielle : $q_t = q_0 \exp(g_q t)$ avec $q_0 > 0$ et $g_q > 0$ exogènes. L'augmentation de q_t au fil du temps reflète les changements technologiques dans la production de nouveaux biens d'équipement.

1. Par définition, sur un chemin de croissance équilibrée, le capital par travailleur doit croître à un taux constant. Démontrer qu'il n'y a qu'un seul taux de croissance possible du ratio capital-travail qui est cohérent avec une croissance équilibrée. (Aide: pour répondre à cette question, commencez par exprimer l'équation (**??**) en termes de capital par travailleur)
2. Soit $\gamma \in \mathbb{R}$. On note $\hat{k}_t = \frac{K_t}{(q_t)^{\gamma} L_t}$ où $\hat{k}_t$ est le ratio capital-travail "normalisé." En utilisant (**??**), calculer $\frac{\dot{\hat{k}}_t}{\hat{k}_t}$ en fonction de K_t, L_t, q_t et des paramètres.

3. Trouvez la valeur de γ pour laquelle $\hat{k}_t$ obéit à une équation différentielle autonome (dans cette équation, q_t n'apparaît pas).
4. Trouvez l'état stationnaire $\hat{k}^*$ pour $\hat{k}_t$.
5. Avec un graphique, démontrer que, en commençant avec n'importe quel $\hat{k}_0$, le ratio capital-travail normalisé dans cette économie converge vers $\hat{k}^* > 0$. Montrer que à long terme le ratio capital-travail $\frac{K}{L}$ croît à un taux constant (à préciser). Montrer également que le taux de croissance du PIB par tête tend vers une certaine limite g_y (à préciser).
6. Dans le modèle de base de Solow, le bien capital et le bien de consommation ont le même prix car pour produire une nouvelle machine, une unité de consommation est nécessaire. Dans ce modèle, ce n'est plus le cas. Quel est le prix du bien capital en termes du bien de consommation ?
7. Ce modèle de croissance est-il compatible avec le quatrième fait stylisé de Kaldor, selon lequel le ratio capital/PIB n'a pas de tendance de long terme ? Si ce n'est pas le cas, expliquez l'intuition. Et si vous preniez plutôt le ratio entre la valeur du capital (K_t fois le prix du bien capital) et le PIB, serait-il stable à long terme ?
8. Le modèle présenté est-il cohérent avec la figure ci-dessous ?

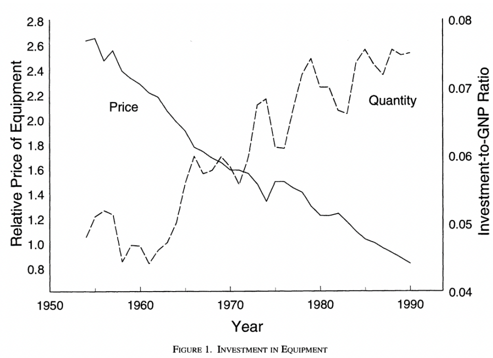

Figure 1: prix des équipements et ratio investissement-en-équipement/produit national brut : Greenwood, et al, 1997

Solution 1 Désignons $k \equiv K/L$.

$$\frac{\dot{k}_t}{k_t} = -\delta + sq_t(\frac{K_t}{L_t})^{\alpha-1} - n$$

Sur un chemin de croissance équilibrée, $\frac{\dot{k}_t}{k_t}$ est constant, ce qui implique que $sq_t(\frac{K_t}{L_t})^{\alpha-1}$ doit également être constant. Donc,

$$\frac{\dot{k}_t}{k_t} = \frac{g_q}{1-\alpha}$$

Solution 2

$$\frac{\dot{\hat{k}}_t}{\hat{k}_t} = -(\delta + g_q\gamma + n) + sq_t(\frac{K}{L})^{\alpha-1}$$

Solution 3-5

$$\frac{\dot{\hat{k}}_t}{\hat{k}_t} = -(\delta + g_q\gamma + n) + sq_t(\hat{k}_t q^{\gamma})^{\alpha-1}$$

q_t disparaît si , $\gamma = \frac{1}{1-\alpha}$

$$\frac{\dot{\hat{k}}_t}{\hat{k}_t} = -(\delta + g_q\frac{1}{1-\alpha} + n) + sq_t(\hat{k}_t q^{\frac{1}{1-\alpha}})^{\alpha-1} \equiv G(\hat{k}_t)$$

À l'état stationnaire :

$$\hat{k}^* = (\frac{s}{\delta + n + \frac{g_q}{1-\alpha}})^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

$G(\hat{k}_t)$ décroît et s'annule en $k^\star$, donc $\hat{k}_{(0)}$, le ratio capital-travail normalisé dans cette économie, converge vers k^*, et le ratio capital-travail croît asymptotiquement au taux $\frac{g_q}{1-\alpha}$ tandis que Y/L croît asymptotiquement au taux $\frac{g_q\alpha}{1-\alpha}$.

Solution 6 Le prix du capital est $1/q$

Solution 7 À partir des réponses précédentes, nous savons que $\frac{K}{Y}$ tend vers l'infini en raison du progrès technologique spécifique à l'investissement, poussant le capital à croître plus rapidement. Cependant, on peut montrer que $K\left(\frac{1}{q}\right)$ croît au taux $g_q\frac{1}{1-\alpha} + n - g_q$, ce qui est égal à $g_q\frac{\alpha}{1-\alpha} + n$, le taux de croissance du PIB agrégé. Ainsi, le deuxième ratio est stable à long terme.

Exercice 2