

Analizzatore di spettro

Alberto Bordin, Giulio Cappelli

27-28 novembre 2017

Sommario

Misura della separazione in frequenza dei modi di un laser HeNe.
Misura della finezza di un Fabry-Perot.

1 Teoria

1.1 Laser HeNe

Poichè un laser è una cavità risonante di lunghezza (L) finita, questa seleziona dei modi discreti con separazione in frequenza $\Delta\nu = \frac{c}{2L}$. Il primo scopo di questa esperienza è misurare tale separazione.

1.2 Interferometro di Fabry-Pérot

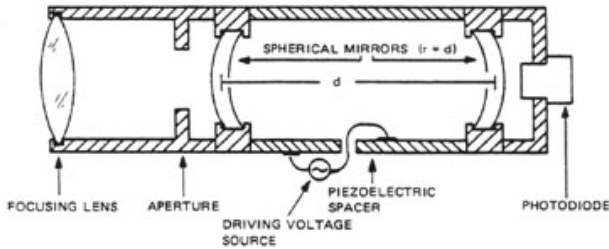


Figura 1: Schema esemplificativo di un interferometro Fabry-Pérot.

Un interferometro di Fabry-Pérot è una cavità risonante basata sulla riflessione multipla tra i suoi due specchi.

I coefficienti di riflettività \mathbf{R} e trasmissività \mathbf{T} della cavità sono espressi in funzione della riflettività R di un singolo specchio secondo le formule di Airy:

$$\mathbf{R} = \frac{F \sin^2(\frac{\delta}{2})}{1 + F \sin^2(\frac{\delta}{2})} \quad (1)$$

$$\mathbf{T} = \frac{1}{1 + F \sin^2(\frac{\delta}{2})} \quad (2)$$

dove $F = \frac{4R}{(1-R)^2}$ e δ è lo sfasamento dovuto alla distanza d tra i due specchi.

$\mathbf{T}(\delta)$ è una funzione periodica: il periodo viene identificato con la FSR , che sta per *Free Spectral Range*¹.

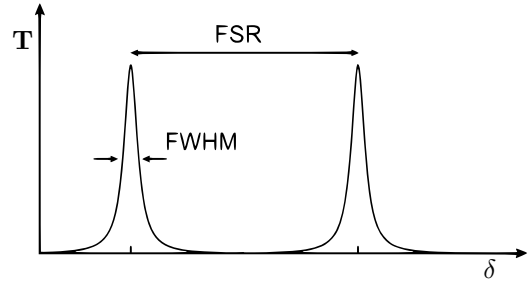


Figura 2: Grafico della trasmissività di un Fabry-Pérot con un'onda monocromatica in ingresso.

La *finezza* \mathcal{F} di un Fabry-Pérot è definita come

$$\mathcal{F} = \frac{FSR}{FWHM}$$

e dall'equazione 2 si ottiene

$$\mathcal{F} \simeq \frac{\pi}{2} \sqrt{F}$$

Il secondo scopo di questa esperienza è misurare la finezza del Fabry-Pérot in dotazione.

¹La FSR viene solitamente indicata in Hz: $FSR = \frac{c}{2nd}$ [Hz] se gli specchi della cavità Fabry-Pérot sono piani, $FSR = \frac{c}{4nd}$ [Hz] se sono sferici (n è l'indice di rifrazione del mezzo presente tra gli specchi del Fabry-Pérot)

2 Apparato sperimentale

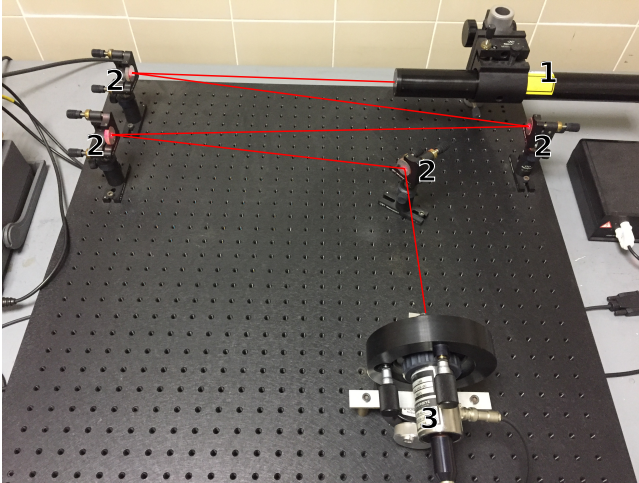


Figura 3: Banco ottico.

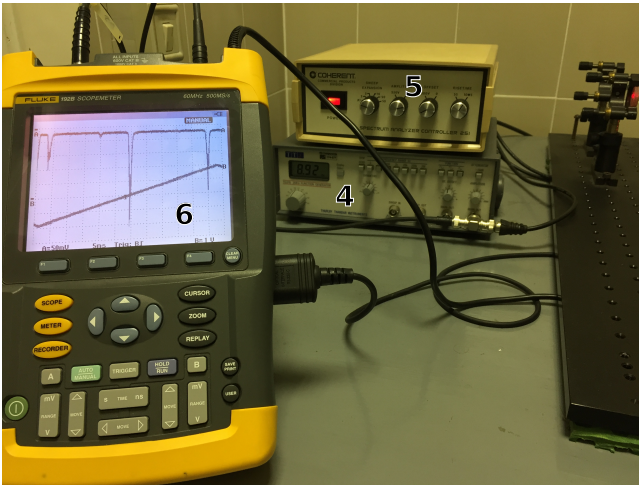


Figura 4: Strumenti di controllo e oscilloscopio.

1. Laser HeNe ($\lambda = 633 \text{ nm}$, $\Delta\nu_{\text{ nominale}} = 435 \text{ Hz}$)
2. Specchi:
hanno lo scopo di diminuire l'accoppiamento tra laser e interferometro Fabry-Pérot, che influenza i modi del laser provocando risonanze indesiderate (è come se il laser vedesse anche una cavità più grande).
3. Fabry-Pérot ($FSR = 1.5 \text{ GHz}$, $\mathcal{F}_{\text{ nominale}} = 212$)
4. Generatore di funzioni
5. Controller del piezoelettrico del Fabry-Pérot:
utilizza il segnale del generatore di funzioni (scelto ad onda triangolare) per controllare in tensione lo spostamento del piezoelettrico del Fabry-Pérot; in questo modo la distanza tra gli specchi dell'interferometro varia periodicamente nel tempo con rampe lineari.
6. Oscilloscopio:
rileva il segnale del fotodiodo del Fabry-Pérot, proporzionale alla trasmittività \mathbf{T} .

3 Modi del laser HeNe

Analizziamo la separazione in frequenza dei modi del laser HeNe a nostra disposizione.

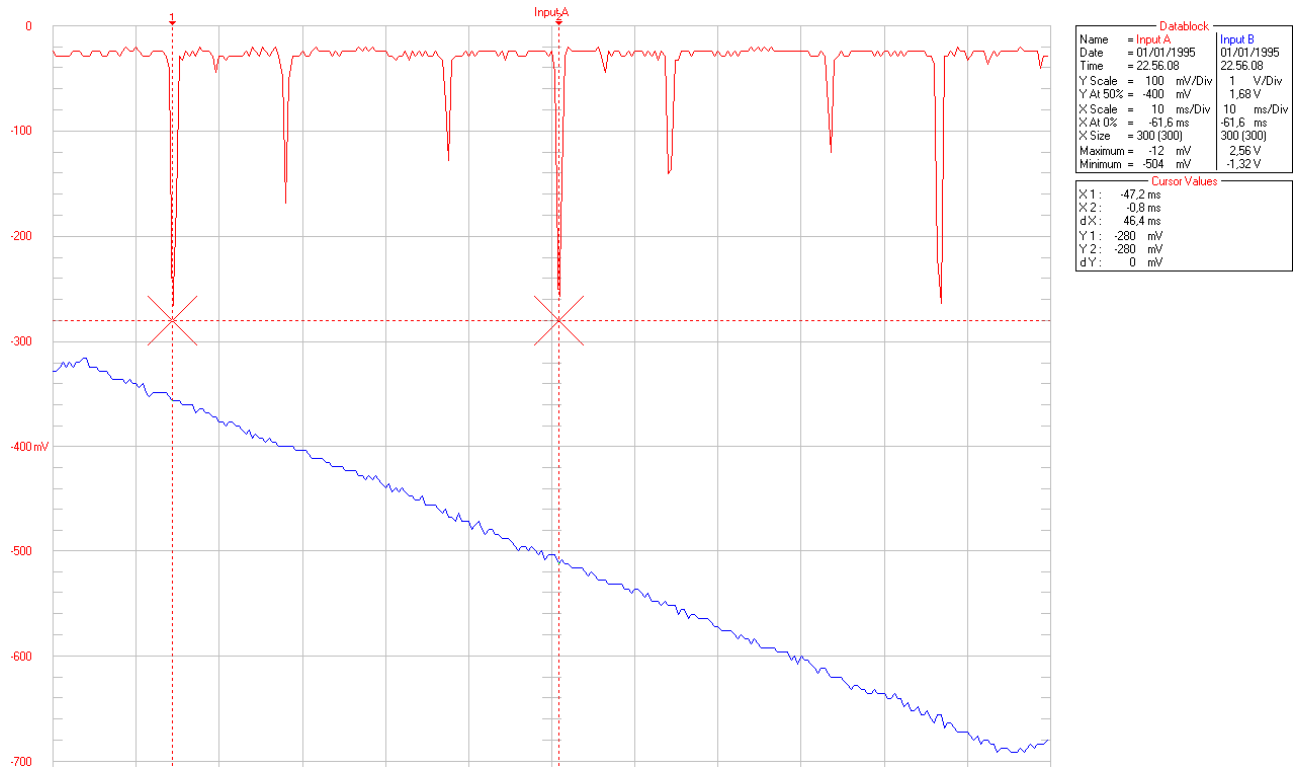


Figura 5: Due ordini dell'analizzatore. In rosso i picchi di trasmissività della cavità Fabry-Perot e in blu la rampa del generatore di funzioni.

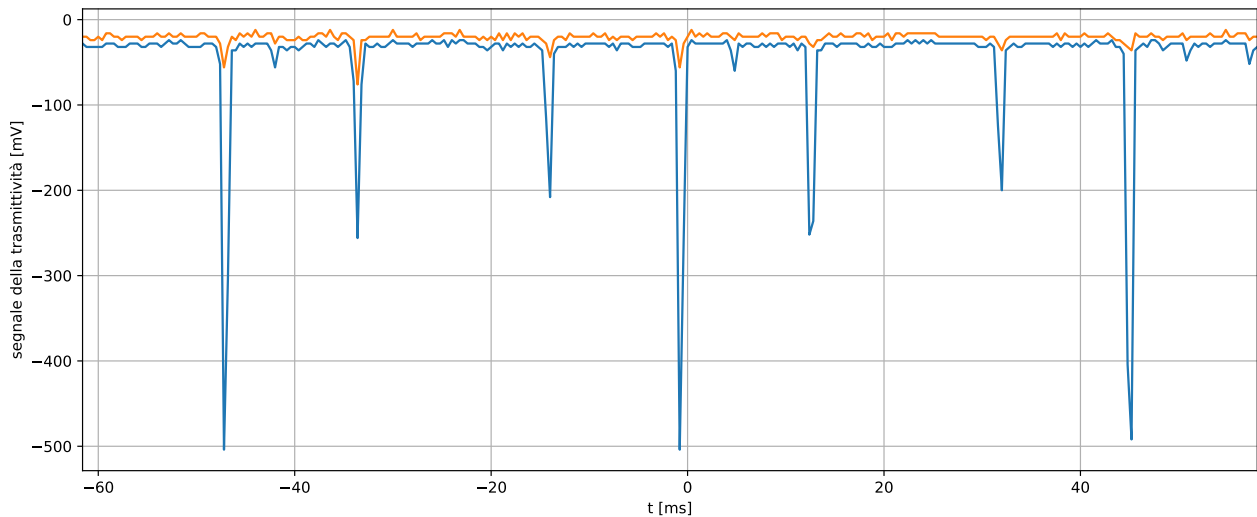


Figura 6: Due ordini dell'analizzatore. Segnale di trasmissività salvato nel file .txt.

3.1 Presa dati

In Figura 5 vediamo un esempio del segnale letto dall'oscilloscopio e visualizzato al PC, e che salviamo anche in formato .txt. Sia per la trasmissività che per la rampa il file di testo riporta due diversi valori di tensione (vedi Figura 6). Notiamo che il segnale visualizzato all'oscilloscopio è la media dei due. Inoltre, confron-

tando varie prese dati, notiamo che la discrepanza tra i due valori di tensione diminuisce notevolmente all'aumentare della larghezza del picco. Poiché per la misura della separazione in frequenza dei modi è importante la precisione sul tempo di ogni picco scegliamo di utilizzare il segnale più ampio al posto della media dei due. In Figura 7 è riportato un ordine dell'analizzatore.

3.1.1 Accorgimenti sperimentali

- Regoliamo il generatore di funzioni e il fondo scala dell'oscilloscopio in modo da vedere poco più di una rampa dell'onda triangolare. Così facendo massimizziamo la risoluzione e possiamo misurare a posteriori l'ampiezza dell'onda triangolare.
- Come consigliato dal professore² impostiamo l'onda triangolare con $V_{pp} \leq 5$ V e $f \leq 18$ Hz per evitare effetti di non linearità del generatore e del piezoelettrico. Abbiamo scelto $V_{pp} \simeq 4$ V e $f \simeq 9$ Hz oppure $f = 4.50$ Hz.

- La regione lineare del piezoelettrico si trova a metà del range di funzionamento, i cui estremi sono però sconosciuti.³ Sul controller del piezoelettrico possiamo regolare i valori di *amplitude* e *offset* e ci aspettiamo che gli estremi del range di funzionamento del piezoelettrico si raggiungano con ampiezza alta e offset massimo oppure minimo. Quindi impostiamo entrambi su valori intermedi.⁴
- Per evitare eventuali sistematiche per circa metà delle prese dati utilizziamo la rampa in salita, per le restanti la rampa in discesa.

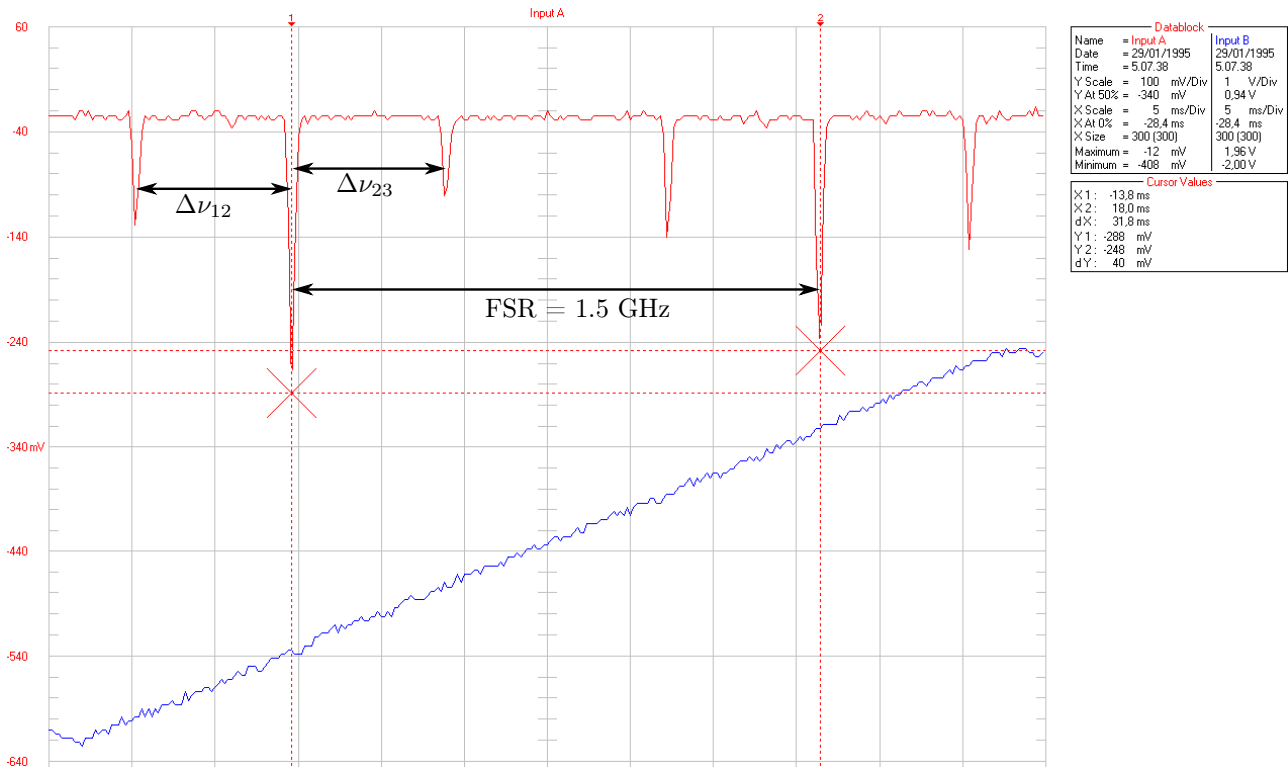


Figura 7: Un ordine dell'analizzatore. Per la rampa in discesa i $\Delta\nu$ sono invertiti: $\Delta\nu_{12}$ è a destra e $\Delta\nu_{23}$ è a sinistra del picco principale.

3.2 Analisi dati

La FSR può essere stimata banalmente facendo la differenza tra i tempi di due picchi principali consecutivi. Avendo più di un ordine si può migliorare questa stima ad esempio facendo la media delle varie differenze tra picchi consecutivi oppure prendendo la differenza di tempo tra il primo e l'ultimo e dividendola per il numero di ordini, ma una stima ancora più precisa si può ottenere con un fit. Di seguito (e in Figura 8) riportiamo il procedimento seguito:

- tramite uno script in python estraiamo i tempi di

ogni picco,

- facciamo un grafico "numero di ordine" - "tempo del picco",
- eseguiamo un fit lineare.

Come si deduce dalla presenza di tre rette parallele in Figura 8 lo stesso procedimento è seguito per ognuno dei 3 modi visibili. Il coefficiente angolare della retta fittata è la FSR, mentre la differenza tra le intercette è il tempo corrispondente al $\Delta\nu$. Quindi ricaviamo $\Delta\nu$

²onnisciente

³Dall'esperienza sull'interferometro di Michelson sappiamo che il range di funzionamento è dell'ordine dei 100 V, tuttavia non abbiamo dati precisi sullo specifico piezoelettrico dell'analizzatore. Inoltre è laborioso stabilire quale sia la tensione effettiva a cui il piezoelettrico viene sottoposto in quanto è la composizione dell'onda triangolare e di *amplitude* e *offset* del controller.

⁴In verità per le prese dati 1, 4, 5, 10, 11 visibili nelle Figure 13 e 14 l'*amplitude* (ma non l'*offset*) è stata aumentata. Poiché i risultati di queste misure sono compatibili con i restanti li abbiamo lasciati

con la formula

$$\Delta\nu \text{ [Hz]} = 1500 \frac{\Delta\nu \text{ [ms]}}{FSR \text{ [ms]}}$$

Per ridurre ulteriormente l'errore, nel caso in cui le rette non fossero esattamente parallele, per la FSR prendiamo la media dei 3 coefficienti angolari misurati e la differenza tra le intercette la prendiamo a metà delle rette. Fit e calcoli sono stati eseguiti con python 3, per brevità riportiamo solo il valore di $\Delta\nu$ e lasciamo a disposizione il codice dello script al link in nota.⁵

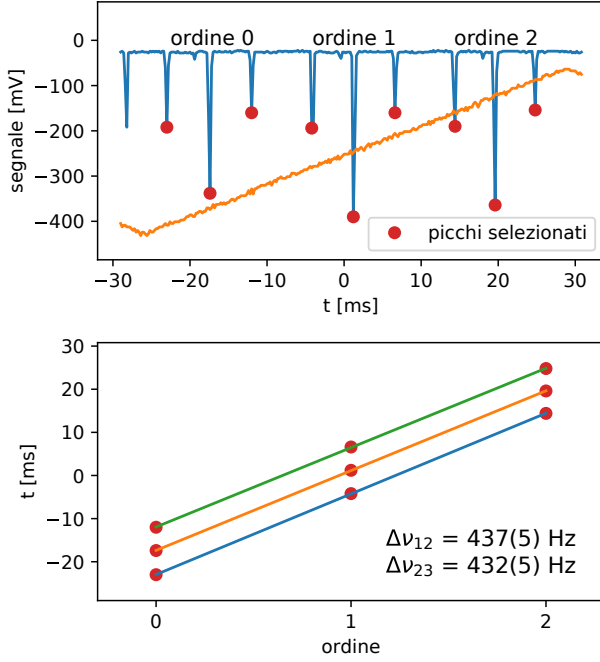


Figura 8: Esempio di analisi. In appendice sono riportate anche le restanti prese dati. La rampa del plot in alto è riscalata per questioni estetiche.

3.2.1 Discussione dei risultati

La media pesata delle 24 prese dati eseguite dà

$$\Delta\nu_{12} = 436.0 \pm 1.0 \text{ Hz}$$

$$\Delta\nu_{23} = 433.0 \pm 1.0 \text{ Hz}$$

dove $\Delta\nu_{12}$ e $\Delta\nu_{23}$ sono definiti come nella didascalia di Figura 7. La loro differenza è

$$\Delta\nu_{12} - \Delta\nu_{23} = 2.9 \pm 1.4 \text{ Hz}^6$$

ed è compatibile con 0 entro poco più di 2 sigma (p_value = 3 %). La differenza riscontrata è da imputarsi al solo errore sperimentale perché dal punto di

vista teorico $|\Delta\nu_{12} - \Delta\nu_{23}| \sim 10^{-5} \Delta\nu_{12}$, che è trascurabile. Pertanto ha senso calcolare la media di $\Delta\nu_{12}$ e $\Delta\nu_{23}$:

$$\Delta\nu_{medio} = 434.5 \pm 0.7 \text{ Hz}$$

che è compatibile con quanto riportato nel datasheet ($\Delta\nu_{nominale} = 435 \text{ Hz}$).

3.2.2 Discussione degli errori

La compatibilità tra $\Delta\nu_{12}$ e $\Delta\nu_{23}$ e con $\Delta\nu_{nominale}$ dipende fortemente dalla scelta degli errori utilizzati per i fit di Figura 14. Un fit di minimi quadrati ha senso se gli errori sulle y sono delle deviazioni standard.

Possiamo ragionevolmente supporre che l'errore sui tempi dell'oscilloscopio derivi dalla sola digitalizzazione.⁷ Supponiamo quindi che se la risoluzione dell'oscilloscopio è 1 ms un valore 0.49 viene letto 0 e il valore 0.51 viene letto 1, quindi l'errore assoluto è metà della risoluzione. Inoltre avrà una distribuzione uniforme tra $-0.5 \cdot \text{risoluzione}$ e $+0.5 \cdot \text{risoluzione}$: quindi la deviazione standard sarà

$$\sigma = 0.68 \cdot 0.5 \cdot \text{risoluzione} \quad (*)$$

Usando la * per gli errori sulle y nei fit di Figura 14 e propagando gli errori sui parametri fittati si ottiene l'errore su $\Delta\nu$. Per testare la validità della * abbiamo anche calcolato a posteriori la deviazione standard tra i valori misurati nelle 24 diverse prese dati. In Figura 9 è graficato il confronto tra i due approcci. L'accordo è ottimo.

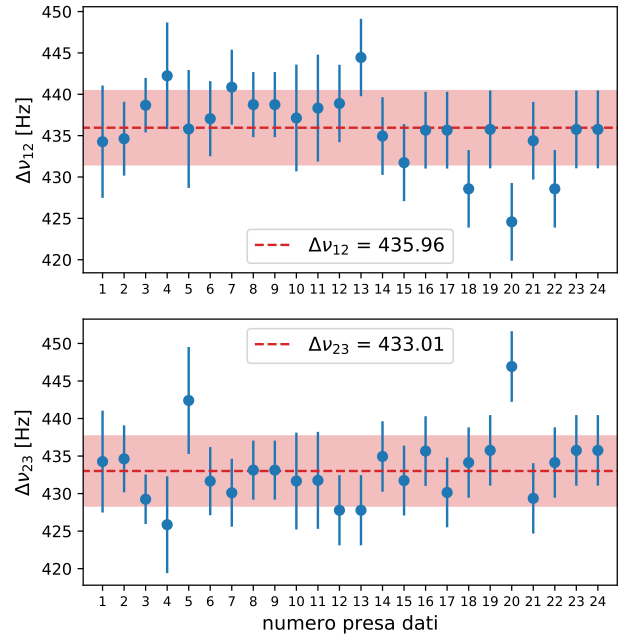


Figura 9: Confronto tra gli errori stimati dal fit (barre blu) per ciascuna presa dati e deviazione standard calcolata tra i valori delle 24 prese dati (banda rossa).

⁵<https://github.com/albord95/relazioni-lab-ottica-quantistica/tree/master/Analizzatore%20di%20spettro/dati%20e%20script> Scaricare tutta la cartella ed eseguire `modi_laser_HeNe.py`. Serve python 3 con i pacchetti `pylab`, `scipy`, `uncertainties` e `gvar`.

⁶La differenza riportata non è 3.0 ma 2.9 perché i calcoli sono stati eseguiti con più cifre di quelle mostrate. Lo script `modi_laser_HeNe.py` (nota 5) stampa anche le cifre aggiuntive. La propagazione degli errori è gestita col pacchetto `gvar` di python.

⁷Il datasheet dell'oscilloscopio indica una risoluzione precisa fino a 0.4 ns, quindi la supposizione fatta è ragionevole poiché per le frequenze da noi utilizzate la digitalizzazione è $0.2 \div 0.4 \text{ ms}$.

Per verificare che non ci fossero evidenti sistematiche tra i $\Delta\nu$ calcolati con la rampa in salita e quelli calcolati con la rampa in discesa abbiamo graficato entrambi in Figura 10. Non si osservano discrepanze.

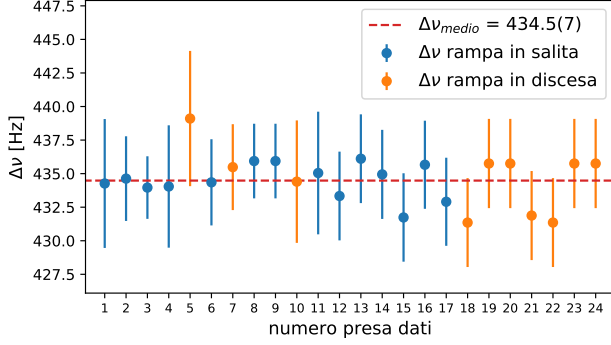


Figura 10: Confronto tra le misure di $\Delta\nu$ tra prese dati con la rampa in salita e con la rampa in discesa. Per ogni presa dati è graficata la media tra $\Delta\nu_{12}$ e $\Delta\nu_{23}$.

3.3 Conclusioni

Abbiamo ottenuto

$$\Delta\nu_{12} = 436.0 \pm 1.0 \text{ Hz}$$

$$\Delta\nu_{23} = 433.0 \pm 1.0 \text{ Hz}$$

la cui media è

$$\Delta\nu_{medio} = 434.5 \pm 0.7 \text{ Hz}$$

che è compatibile con quanto riportato nel datasheet del laser HeNe ($\Delta\nu_{nominale} = 435 \text{ Hz}$).

Non sono state osservate incompatibilità né tra $\Delta\nu_{12}$ e $\Delta\nu_{23}$ né tra i $\Delta\nu$ con rampa in salita e con rampa in discesa.

Gli errori statistici, discussi ampiamente nella sezione dedicata, seguono la distribuzione attesa.

4 Finezza del Fabry-Perot

4.1 Procedura e accorgimenti

$FWHM$ è due ordini di grandezza più piccola del FSR , quindi è necessario cambiare la scala temporale dell'oscilloscopio senza alterare le restanti condizioni sperimentali. Adottiamo il seguente algoritmo:

- Impostiamo la rampa in modo da vedere 3 picchi principali.
- Aggiustiamo il trigger dell'oscilloscopio in modo che il picco centrale stia a metà rampa e a metà schermo. In questo modo diminuendo la scala temporale il picco centrale si allarga rimanendo centrato sullo schermo.
- Alterniamo misure di FSR a misure di $FWHM$.

Per assicurarci la stabilità delle condizioni sperimentali non cambiamo mai l'onda del generatore di funzioni né l'*amplitude* del controller del piezo. Ritocchiamo solo l'*offset* e l'allineamento dell'ultimo specchio, solo se necessario e soltanto dopo una misura di $FWHM$.

Oltre a quelli appena sottolineati adottiamo gli stessi accorgimenti della misura di $\Delta\nu$, in particolare eseguiamo metà delle prese dati con la rampa in salita e metà in discesa e, per evitare nonlinearità, adottiamo le seguenti condizioni sperimentali:

$$\begin{aligned} V_{pp} &= 3.8(1) \text{ V} \\ f &= 4.50(1) \text{ Hz} \\ \text{amplitude} &\sim \text{circa a metà} \\ \text{offset} &\sim \text{circa a metà} \end{aligned}$$

4.2 Analisi dati

FSR è ricavata con lo stesso algoritmo della sezione precedente. Al variare della presa dati il valore di FSR è stabile, quindi nell'analisi che segue è stata utilizzata la media:

$$FSR = 35.96(5) \text{ ms}$$

4.2.1 $FWHM$

In prima analisi ricaviamo la finezza con la formula

$$\mathcal{F} = \frac{FSR}{FWHM}$$

dove $FWHM$ è la larghezza a metà altezza di un picco.

Come si nota in Figura 11 per migliorare la precisione è stata fatta un'interpolazione dei punti intorno alla metà altezza.

Il valore della metà altezza utilizzato è semplicemente la media dei valori di massimo e minimo: il vantaggio è che supponendo simmetriche le fluttuazioni intorno al vero massimo e al vero minimo queste si cancellano, lo svantaggio è che la misura è molto sensibile al valore del picco, che non è stabile al variare della presa dati.

Il segnale utilizzato è la media dei due valori dati dal file di testo, che corrisponde al valore visualizzato a schermo dal software dell'oscilloscopio. Poiché i picchi sono larghi rispetto a quelli di Figura 6 i valori dei due segnali sono molto vicini tra loro e la scelta dell'uno, dell'altro o della media non influisce significativamente sul risultato.

In Figura 11 è riportato un'esempio di analisi, in appendice (Figura 15) l'analisi delle restanti prese dati.

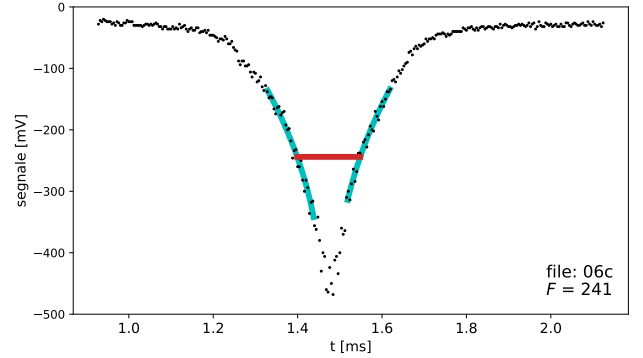


Figura 11: Esempio di calcolo della finezza con $\mathcal{F} = \frac{FSR}{FWHM}$. In azzurro l'interpolazione dei punti intorno alla metà altezza, in rosso la $FWHM$. In appendice (Figura 15) è riportata la stessa analisi fatta per le restanti 36 prese dati.

Discussione dei risultati

Mediando sulle 37 prese dati otteniamo

$$\mathcal{F} = 217 \pm 3 \text{ (err. statistico)} \pm 14 \text{ (err. sistematico)}$$

quindi, sommando in quadratura gli errori,

$$\mathcal{F} = 217 \pm 15$$

che è compatibile con quanto riportato nel datasheet del Fabry-Perot ($\mathcal{F}_{nominale} = 212$)

Discussione degli errori

È stato necessario distinguere errore statistico da errore sistematico, infatti l'errore statistico, calcolato con la deviazione standard sulla media, non tiene conto di errori intrinseci al metodo di analisi. In particolare si potrebbe arbitrariamente decidere di

1. prendere la media dei ~ 5 valori più grandi e dei ~ 5 valori più bassi al posto dei valori di massimo e minimo,
2. utilizzare solo uno dei due segnali dati dal file di testo,
3. interpolare diversamente (ad esempio con una retta),
4. ecc...

Avendo mediato su 37 prese dati l'errore statistico è già abbastanza piccolo da rendere non trascurabili le sistematiche introdotte dall'arbitrarietà nel procedimento di analisi.

Per stimare l'errore sistematico usiamo la seguente osservazione: le prese dati contrassegnate dallo stesso numero in Figura 15 (come '02a', '02b', '02c') sono svolte nelle stesse identiche condizioni sperimentali, ma cambiando occasionalmente la scala temporale dell'oscilloscopio. Nell'oscilloscopio è fissato il numero di campionature al secondo (20 MS/s), quindi cambiare la scala temporale equivale ad eseguire una media mobile, che alza o abbassa il valore del picco. Pertanto tra queste prese dati non cambia la forma del picco, ma cambia il valore dell'altezza massima. Questa variazione è una stima dell'incertezza introdotta dalla scelta 1, che è la più influente. Quindi stimiamo l'errore sistematico con la media delle deviazioni standard sulle prese contrassegnate dallo stesso numero: il ± 14 è ottenuto così.

Abbiamo verificato che le scelte 2 e 3 comportassero una variazione entro il ± 14 calcolato sopra. In particolare \mathcal{F} varia tra 209 e 219.

4.2.2 Fit

Abbiamo calcolato la finezza anche mediante un fit con la formula teorica

$$\text{trasmissività} = \frac{1}{1 + F \sin^2(\frac{\delta}{2})}$$

a cui è stato aggiunto un parametro di scala e un offset su tensioni e tempi. Quindi

$$\text{trasmissività} = \frac{A}{1 + F \sin^2(\frac{t-D}{C})} + B$$

Di questi parametri B e C sono fissati da misure indipendenti, infatti $C = \frac{FSR}{\pi}$ e per B è stata usata la moda del vettore della tensione delle misure di FSR . A , D ed F sono invece parametri liberi.

La finezza \mathcal{F} è ricavata da F :

$$\mathcal{F} = \frac{\pi}{2} \sqrt{F}$$

In Figura 12 è riportato il fit per una delle prese dati, in appendice i fit per le restanti.

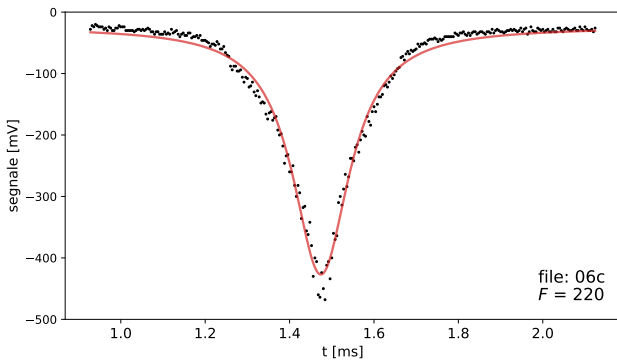


Figura 12: Esempio di calcolo della finezza con un fit. In appendice (Figura 16) è riportata la stessa analisi fatta per le restanti 36 prese dati.

Discussione dei risultati

Mediando sulle 37 prese dati otteniamo

$$\mathcal{F} = 204 \pm 3 \text{ (err. statistico)} \pm 3 \text{ (err. sistematico)}$$

quindi, sommando in quadratura gli errori,

$$\mathcal{F} = 204 \pm 4$$

che è ancora compatibile (entro 2 sigma) con quanto riportato nel datasheet.

Discussione degli errori

L'errore statistico è ancora la deviazione standard sulla media delle 37 prese dati.

Un'errore sistematico è di nuovo presente e riusciamo a stimarlo in parte, considerando

1. la propagazione dell'errore sull'offset B inserito ($\Delta \mathcal{F} \sim \pm 2$),
2. la variazione della F fittata in funzione degli errori scelti su tensione e tempo ($\Delta \mathcal{F} \sim \pm 1$).

Gli errori utilizzati nei fit di cui riportiamo i risultati sono 10 ns per i tempi e 10 mV per le tensioni. Abbiamo usato la regressione ortogonale come metodo di fit (pacchetto odrpack di python).

Dato che le forme delle curve sperimentali presentano asimmetrie e deformazioni rispetto alla curva teorica, sono sicuramente presenti altre sistematiche di difficile valutazione.

Per semplicità il calcolo dell'errore sistematico è stato eseguito con lo stesso metodo della sezione precedente, questo dà il ± 3 riportato. I $\Delta \mathcal{F}$ delle sistematiche 1 e 2 sono compatibili con questo valore.

4.3 Conclusioni

Dalla misura della larghezza a metà altezza otteniamo

$$\mathcal{F} = 217 \pm 15$$

Con un fit della formula teorica per la trasmissività di un Fabry-Perot otteniamo

$$\mathcal{F} = 204 \pm 4$$

Entrambi i risultati sono compatibili con quanto riportato nel datasheet ($\mathcal{F}_{\text{nominale}} = 212$) e tra di loro.

Gli errori sono stati ampiamente discussi nelle sezioni dedicate anche distinguendo errore statistico ed errore sistematico.

Appendice

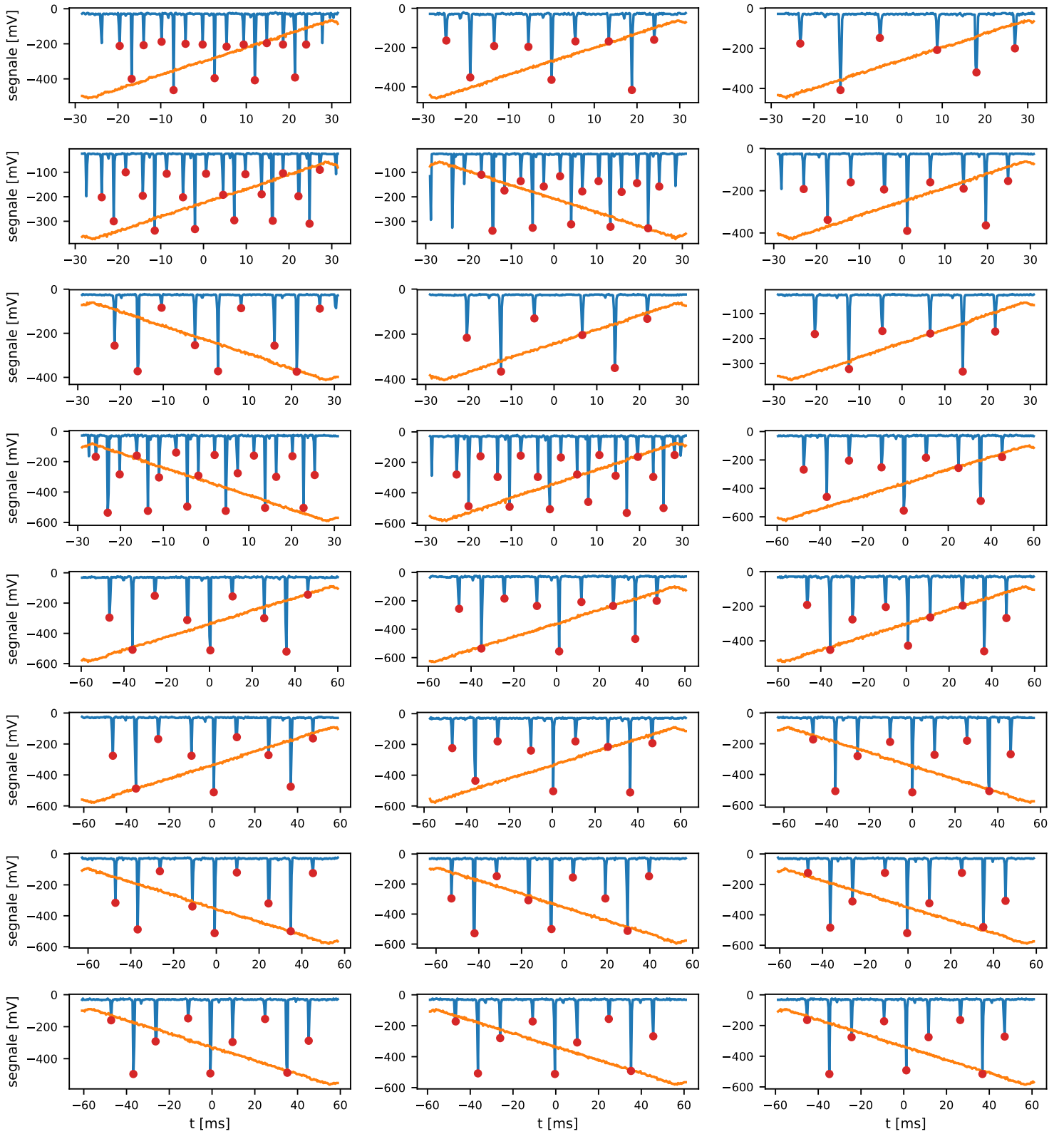


Figura 13: Selezione dei tempi per i fit di Figura 14.

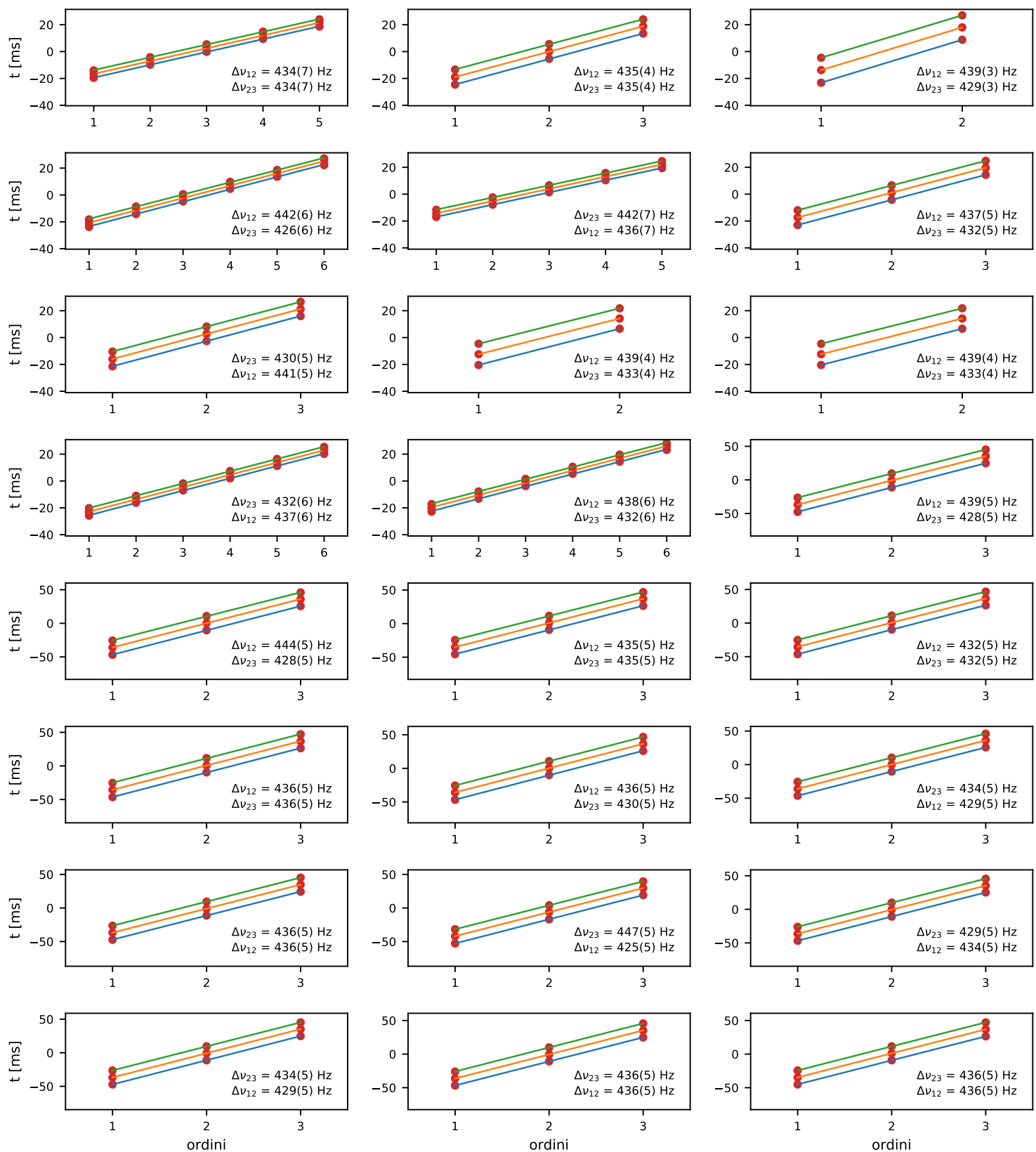


Figura 14: Fit e calcolo dei $\Delta\nu$.

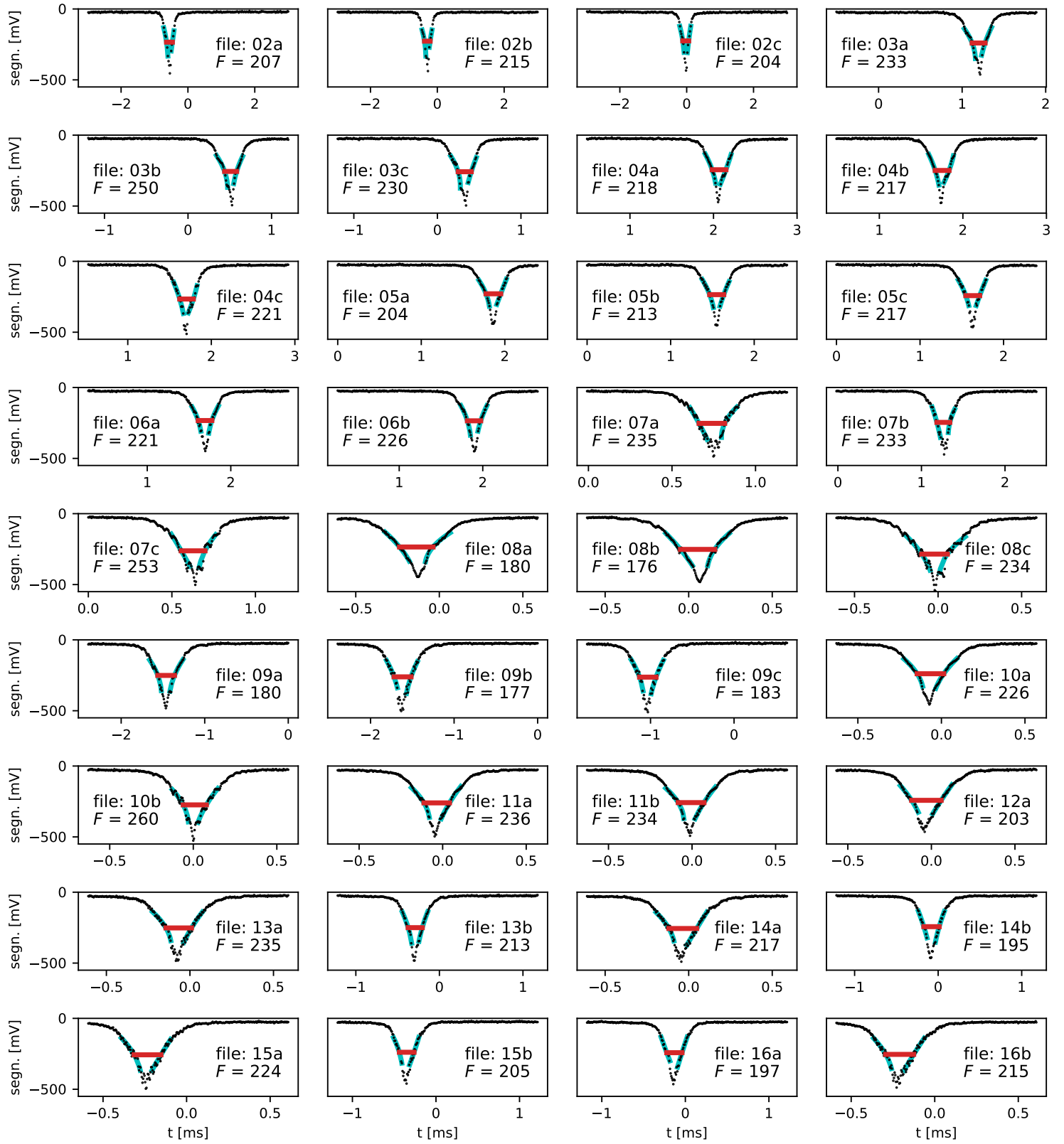


Figura 15: Calcolo della finezza con $\mathcal{F} = \frac{FSR}{FWHM}$. In azzurro l'interpolazione dei punti intorno alla metà altezza. In rosso la $FWHM$.

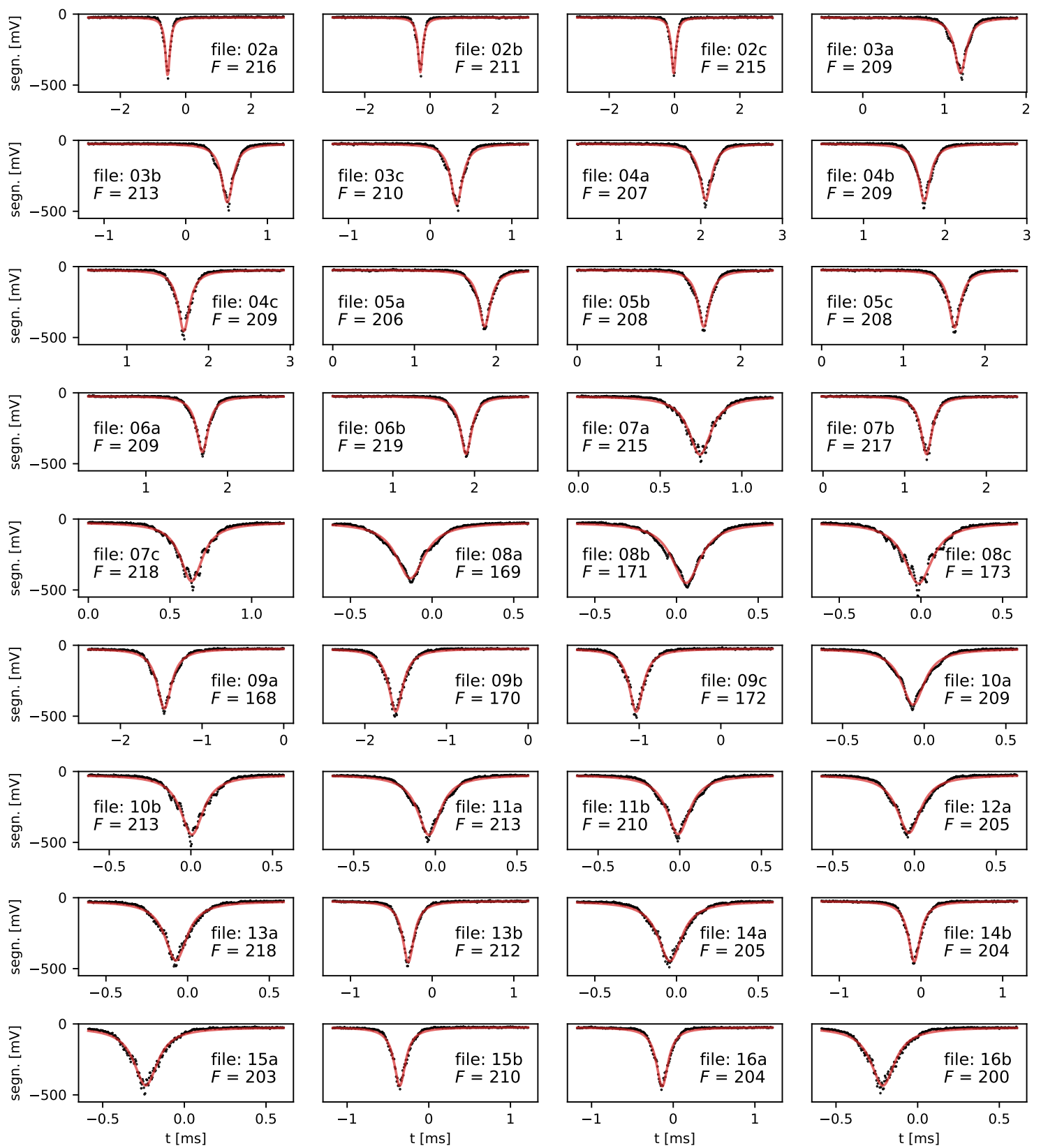


Figura 16: Finezza ricavata con un fit.