Graphes i6s3 Licence L3 Informatique
Université de Bourgogne

Projet : L(2,1)-coloration des graphes de Petersen généralisés

Une $L(2,1)$-coloration d'un graphe est une coloration avec plus de contraintes que la coloration de sommets classique : deux sommets voisins ne doivent pas seulement avoir des couleurs différentes, mais ces couleurs doivent être séparées par au moins une couleur (non consécutives) tandis que les couleurs de deux sommets à distance deux doivent être différentes. Plus formellement, une $L(2,1)$-coloration en k couleurs d'un graphe non orientée G est une fonction f qui associe une couleur $f(x)$ parmi $\{1, 2, \ldots, k\}$ à chaque sommet x de sorte que :

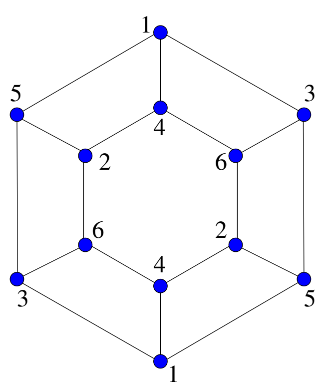
— $|f(x) - f(y)| \geq 2$ si x et y sont voisins ($xy \in E(G)$) ;

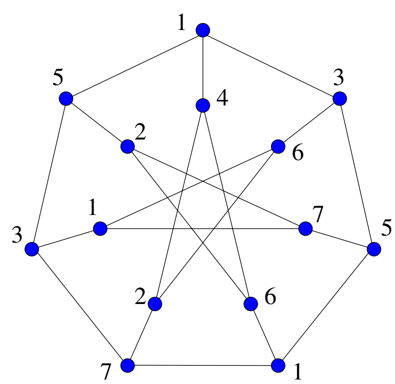
— $|f(x) - f(y)| \geq 1$ ($f(x) \neq f(y)$) si x et y ont (au moins) un voisin commun.

On note $\chi_{2,1}(G)$ l'entier k minimum tel qu'il existe une $L(2,1)$-coloration de G en k couleurs. Ce type de coloration permet de modéliser des problèmes d'allocation de fréquences en demandant à ce que les canaux (couleurs) utilisés par des terminaux voisins soient séparés par au moins un canal et les canaux de deux terminaux à distance 2 soient différents ; ceci afin de minimiser les interférences.

Le graphe de Petersen généralisé $GP(n,k)$, avec n,k deux entiers tels que $n \geq 3$ est $1 \leq k < n/2$ est le graphe avec
$V(GP(n,k)) = \{x_i,\ 0 \leq i \leq n-1\} \cup \{y_i,\ 0 \leq i \leq n-1\}$,
$E(GP(n,k)) = \{x_i x_{i+1},\ 0 \leq i \leq n-1\} \cup \{y_i y_{i+k},\ 0 \leq i \leq n-1\} \cup \{x_i y_i,\ 0 \leq i \leq n-1\}$, les indices des sommets étant pris modulo n.

Par exemple, le graphe $GP(5,2)$ est le graphe de Petersen et les graphes $GP(6,1)$ et $GP(7,3)$ sont dessinés ci-dessous (avec les sommets x_i constituant le cycle extérieur), avec une $L(2,1)$-coloration en 6 et 7 couleurs, respectivement.





Le but de ce projet est de développer une application capable de calculer une $L(2,1)$-coloration optimale d'un graph $GP(n,k)$ pour des petites valeurs de n et k et proche de l'optimal pour des valeurs de n et k plus grandes.

Travail effectuer

En vous aidant du TP3, modifier la fonction ColorExact pour quelle indique si un graphe admet une $L(2,1)$-coloration en k couleurs et la fonction DSATUR pour qu'elle calcule non pas une coloration propre mais une $L(2,1)$-coloration.

Votre programme devra permettre de

1. calculer $L(2,1)$-coloration optimale d'un graph $GP(n,k)$ par la méthode ColorExact modifiée
2. calculer une $L(2,1)$-coloration presque optimale d'un graph $GP(n,k)$ par la méthode DSATUR modifiée
3. afficher une la coloration calculée sous la forme

```
 n k
couleur_x1 couleur_x2 ... couleur_xn
couleur_y1 couleur_y2 ... couleur_yn
```

4. calculer, pour n donné en paramètre, une $L(2,1)$-coloration de $GP(n,k)$ pour toutes les valeurs de k possibles.

Pour ce faire, il pourra être utile de coder les fonctions suivantes :

— test si deux sommets de $GP(n,k)$ sont voisins.

— test si deux sommets de $GP(n,k)$ ont un voisin commun.

NB : on pourra également stocker les informations de voisinage et voisinage commun dans des structures dont le choix est laissé à votre appréciation.

Modalités de réalisation

— Le projet est à faire en binôme (me contacter pour toute autre configuration).

— Les programmes peuvent être réalisés dans les langages de votre choix.

— La notation sera basée sur la façon dont les fonctions sont implantées, les résultats du programme ainsi que sur le mini-rapport.

— Le contenu attendu du mini-rapport ainsi que les modalités d'évaluation du projet seront disponibles sur le canal du projet sous teams.

Questions techniques ou relatives l'organisation

Par message teams ou mél `olivier.togni@u-bourgogne.fr` après avoir été voir sur le canal du projet si la réponse n'apparait pas déjà.