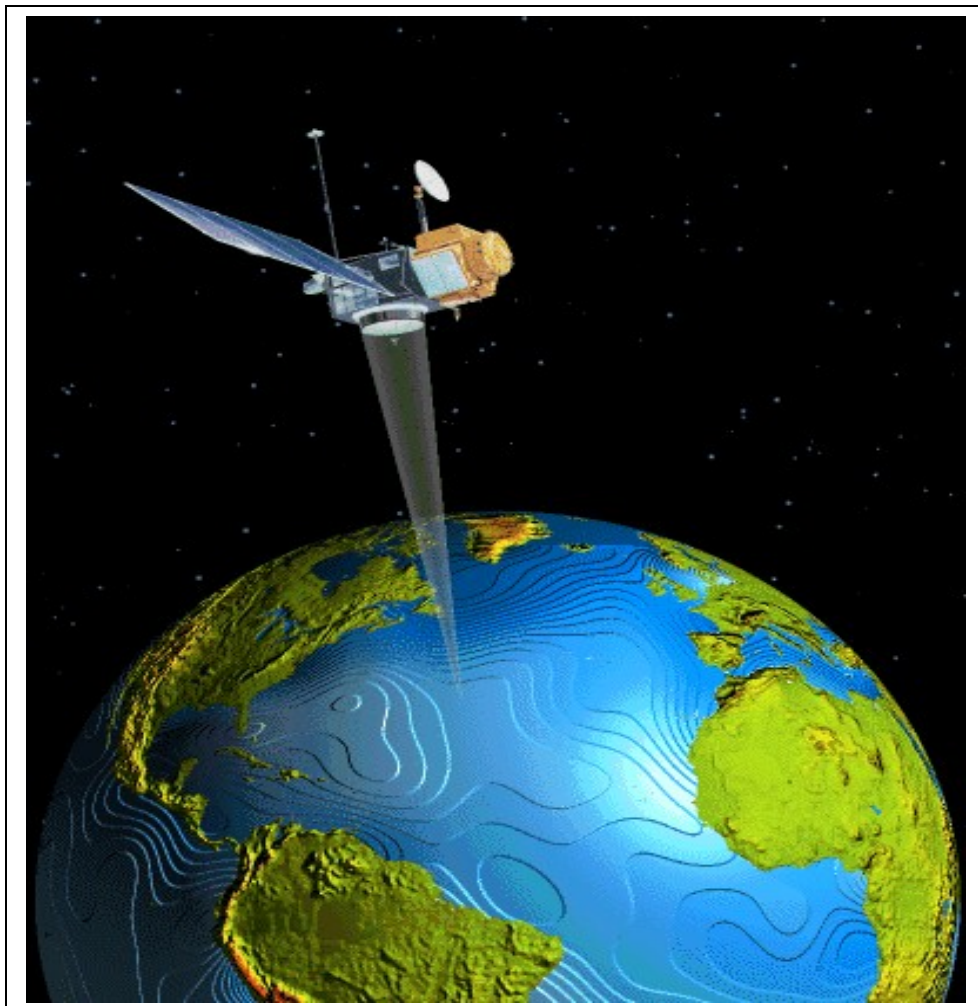


# Controllo assetto satellite tramite attuatori a getti di gas



Politecnico di Torino  
**Controllo di Impianti**

Docente

Prof. Donato Carlucci

Allievi

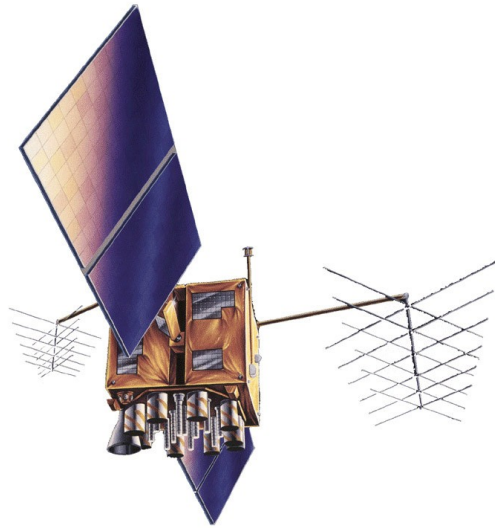
Alberto Todde 091341

# INDICE

<b>0 IL SATELLITE ARTIFICIALE.....</b>	<b>3</b>
Obiettivi.....	5
.....	5
<b>1 MODELLO MATEMATICO.....</b>	<b>6</b>
Equazioni della Cinematica.....	6
Equazioni della Dinamica.....	6
<b>2 IL CONTROLLORE PROPORZIONALE INTEGRALE.....</b>	<b>8</b>
<b>3 CONTROLLO ASSETTO SATELLITE.....</b>	<b>9</b>
Attuatori a getti di gas.....	10
Sensori di posizione.....	12
<b>4 ANALISI CONTROLLO DELLO SPIN DI UN SATELLITE.....</b>	<b>15</b>
Analisi di stabilità.....	17
Analisi di precisione statica.....	17
.....	21
<b>Figura 4.12 Andamento di <math>\Psi</math>, <math>\phi</math>, <math>\theta</math> nel tempo <math>W_{ci}=0.02</math> <math>Z_{ci}=1.1</math>.....</b>	<b>21</b>
<b>5 APPENDICI.....</b>	<b>22</b>
Il Giroscopio.....	22
Gli angoli di Eulero.....	23

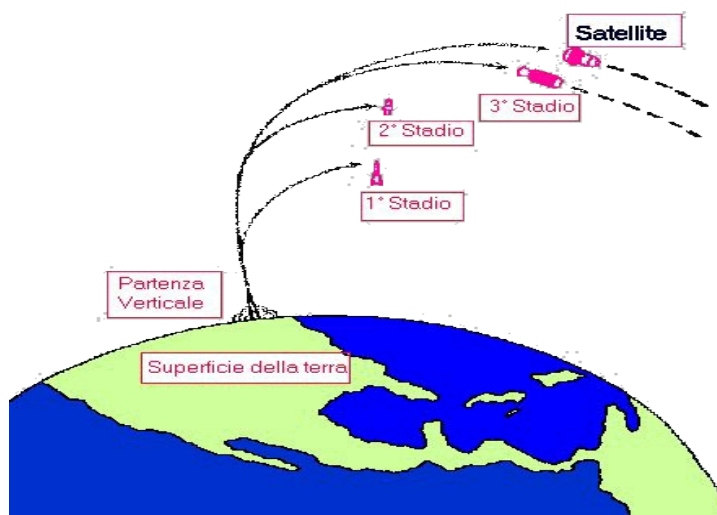
## 0 IL SATELLITE ARTIFICIALE

Un satellite artificiale, figura 0.1, è in generale una qualsiasi massa materiale (con o senza equipaggio) che sia stata messa in orbita dall'uomo nello spazio; in particolare ci si riferisce sempre a satelliti artificiali terrestri, cioè che sono posti in orbita attorno alla Terra.



**Figura 0.1 Satellite artificiale**

Questi satelliti venivano, fino a poco tempo fa, lanciati dalla Terra attraverso un opportuno vettore, di solito un razzo a tre stadi, figura 0.2, che li accompagnava fuori dall'atmosfera terrestre e li depositava sulla giusta orbita disintegrandosi poi a contatto con l'atmosfera ricadendo verso la Terra. Oggi, dato l'elevato costo dei razzi (che venivano persi ad ogni lancio), quasi tutti i satelliti artificiali vengono trasportati da speciali navicelle spaziali (dotate di equipaggio)



**Figura 0.2 Messa in orbita tramite razzo a tre stadi**

I satelliti artificiali vengono utilizzati prima di tutto nelle telecomunicazioni (telefonate intercontinentali, TV via satellite, telefonini cellulari, internet...); nel telerilevamento e nella meteorologia; per la navigazione e per scopi militari.

A seconda della loro altezza dalla superficie terrestre e dalla inclinazione rispetto alla fascia equatoriale, i satelliti artificiali sono costruiti con caratteristiche comportamentali diverse. Bisogna chiaramente raggiungere un compromesso cercando di combinare la distanza dalla Terra con la velocità del moto nell'orbita.

### **Satelliti artificiali geostazionari**

un satellite di questo tipo, oggetto di studio della tesina, percorre un'orbita quasi circolare attorno alla Terra, ed è posizionato sul piano dell'equatore. La sua caratteristica principale però è quella di viaggiare alla stessa velocità angolare della Terra; questo vuol dire che un satellite geostazionario possiede lo stesso periodo di rotazione della Terra, compiendo un'orbita completa in 24 ore e quindi un osservatore solidale con la Terra, guardando verso il cielo, lo vedrebbe immobile, come se fosse fissato rigidamente alla Terra. Questa precisa condizione si viene a verificare solo se il satellite ha una ben determinata altezza rispetto alla superficie terrestre; velocità e distanza dal pianeta sono in stretto rapporto; minore è la distanza, maggiore è la forza di attrazione esercitata tra i due corpi, maggiore dovrà essere la velocità del satellite per evitare di cadere sul pianeta e rimanere invece quindi su un'orbita stazionaria prestabilita.

un semplice calcolo matematico ci fornisce la soluzione del problema e ci permette di constatare facilmente che l'altezza necessaria per posizionare il satellite (circa 36000 km) è di gran lunga superiore al limite dell'atmosfera (circa 2-3000 km).

### **Calcolo dell'altezza dalla superficie terrestre di un satellite geostazionario.**

**m** = massa del satellite **r** = distanza del satellite dal centro della terra **v** = velocità scalare del satellite **M** = massa della terra **G** = costante di gravitazione universale

Supponiamo l'orbita perfettamente circolare e uniforme, il satellite è soggetto alla forza centrifuga radiale:  $m \cdot (v^2/r)$  (in modulo). Alla stessa distanza **r** la forza d'attrazione gravitazionale deve essere uguale in modulo alla forza centrifuga per mantenere il satellite in equilibrio:

$$m \cdot (v^2/r) = G \cdot M \cdot m / r^2$$

Da cui si ricava la velocità del satellite:

$$v = \sqrt{G \cdot M / r}$$

La velocità del satellite non dipende dalla sua massa. Bisogna però considerare che più il satellite è pesante più costa portarlo in orbita.

Imponendo che il periodo **T** di rotazione del satellite sia uguale a quello di rivoluzione della terra: **T** = giorno sidereo = 86164 sec (è diverso dal giorno solare medio = 86400 sec = 24h\*60m\*60s)

$$T = (2 \cdot 3.14 \cdot r) / v = 86164 \text{ sec}$$

Ricaviamo: **r** = 42150 km Ricordando che **r** è la distanza del satellite dal centro della terra, dobbiamo sottrarre il raggio della terra **R**:

$$h = \text{distanza del satellite dalla superficie terrestre} = r - R = 35450 \text{ km}$$

La velocità del satellite è ora ricavabile e cioè:  $v = 2 \cdot 3.14 \cdot r / T = 3.1 \text{ km/sec}$

È da sottolineare che da tale quota  $h$  (circa 6 volte il raggio terrestre) il satellite geostazionario vede circa  $1/3$  della superficie terrestre (sotto un angolo di circa 18 gradi) quindi teoricamente sono sufficienti solo tre satelliti geostazionari per coprire tutto il globo. Inoltre, essendo immobile rispetto alla Terra, non richiede nessun tipo di meccanismo di inseguimento delle antenne di Terra. Lo svantaggio però dell'elevata distanza comporta alcuni problemi: dal costo del lancio in orbita (difficile raggiungere una tale quota), alla grande attenuazione dei segnali trasmessi (che si smorzano con il quadrato della distanza percorsa), al ritardo di propagazione alla bassa definizione delle immagini rilevate alla vista molto distorta delle calotte polari.

## **Obiettivi**

Lo scopo di questa tesina è quello di progettare un controllo in grado di annullare le velocità angolari del satellite, agendo con un comando impulsivo lungo i tre assi di rotazione; questa funzione potrebbe essere effettuata tramite delle coppie di attrito ottenute mediante getti di gas. Inoltre è possibile effettuare un controllo di posizione angolare nel sistema di riferimento degli assi corpo.

# 1 MODELLO MATEMATICO

## Equazioni della Cinematica

Si rappresentano con il vettore  $W$  le velocità angolari rispetto agli assi corpo e con  $\dot{\alpha}$  le velocità angolari rispetto agli assi fissi. Si vuole ora calcolare una funzione lineare  $f(\phi, \theta, \psi)$  che lega il vettore  $\alpha$  al vettore  $W$ :

$$\dot{\alpha} = \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = f(\phi, \theta, \psi) \cdot W = f(\phi, \theta, \psi) \cdot \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} \quad (1.1)$$

Per ottenere la matrice  $F$ , prima calcolo la sua inversa  $G$ , utilizzando le matrici di Eulero:

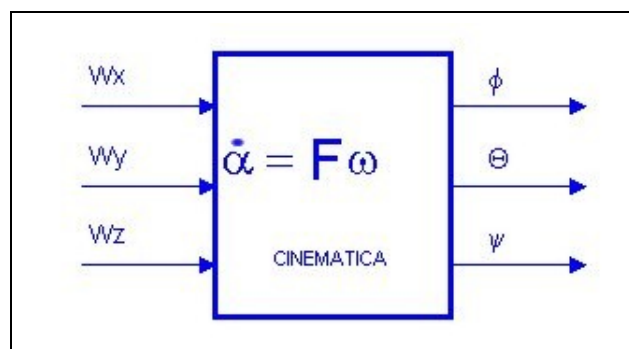
$$W = \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \Phi \cdot \dot{\theta} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} + \Phi \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = G \cdot \dot{\alpha} \quad (1.2)$$

da cui si determina

$$G = G(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\sin\theta \\ 0 & \cos\phi & \cos\theta \cdot \sin\phi \\ 0 & -\sin\phi & \cos\theta \cdot \cos\phi \end{bmatrix} \quad (1.3)$$

e invertendo tale matrice ottengo:

$$F(\alpha) = G^{-1}(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & \sin\phi \cdot \tan\theta & \cos\phi \cdot \tan\theta \\ 0 & \cos\phi & -\sin\phi \\ 0 & \sin\phi / \cos\theta & \cos\phi / \cos\theta \end{bmatrix} \quad (1.4)$$



**Figura 1.1**

Se  $F$  fosse costante il sistema sarebbe lineare, mentre se  $F = I$  ( $I$  = identità) si avrebbe la rotazione attorno all'asse fisso  $\dot{\alpha} = \omega$ .

## Equazioni della Dinamica

Definiti i vettori del momento della quantità di moto e delle coppie applicate, rispettivamente

$$H = \begin{bmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{bmatrix} \text{ e } C = \begin{bmatrix} C_x \\ C_y \\ C_z \end{bmatrix} \quad (1.5)$$

vale la relazione

$$\dot{H} = C \quad (1.6)$$

**Senza coppia** il momento angolare della quantità di moto risulta **costante**.

Poiché si vuole esprimere tale relazione nel sistema di riferimento degli assi corpo si deve utilizzare il *Teorema di Coriolis*:

$$\dot{H} = \dot{H}_r + W' \wedge H \quad (1.7)$$

dove:

1.  $W'$  è la velocità del sistema mobile rispetto a quello fisso;
2.  $H$  è il momento della quantità di moto nel sistema fisso;
3.  $H_r$  è il momento della quantità di moto nel sistema mobile.

La (1.6) si può dunque esprimere in forma matriciale:

$$\begin{bmatrix} C_x \\ C_y \\ C_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{H}_x \\ \dot{H}_y \\ \dot{H}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\dot{H}_x)_r \\ (\dot{H}_y)_r \\ (\dot{H}_z)_r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\omega'_z & \omega'_y \\ \omega'_z & 0 & -\omega'_x \\ -\omega'_y & \omega'_x & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{bmatrix} \quad (1.8)$$

$$\text{Ponendo } -\Omega = \begin{bmatrix} 0 & -\omega'_z & \omega'_y \\ \omega'_z & 0 & -\omega'_x \\ -\omega'_y & \omega'_x & 0 \end{bmatrix} \quad (1.9)$$

si ottiene la seguente espressione:

$$\begin{bmatrix} C_x \\ C_y \\ C_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j_x \cdot \dot{\omega}_x \\ j_y \cdot \dot{\omega}_y \\ j_z \cdot \dot{\omega}_z \end{bmatrix}_r - \Omega \cdot \begin{bmatrix} j_x & 0 & 0 \\ 0 & j_y & 0 \\ 0 & 0 & j_z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} \Rightarrow J \cdot \dot{W}_r = \Omega \cdot J \cdot W + C \quad (1.10)$$

dove il pedice  $r$  indica che la variabile è stata calcolata rispetto agli assi di riferimento del corpo (*on board*). Dalle espressioni trovate si ricava:

$$\dot{W}_r = J^{-1} \cdot \Omega \cdot J \cdot W + J^{-1} \cdot C \quad (1.11)$$

dove la parte non lineare  $J^{-1} \cdot \Omega \cdot J \cdot W$  è una **Coppia Giroscopica** (è nulla se sono nulle le velocità). Dalla (1.11) scaturiscono le seguenti relazioni:

$$\begin{cases} \dot{\omega}_x = \frac{j_y - j_z}{j_x} \cdot \omega_y \cdot \omega_z + \frac{C_x}{j_x} \\ \dot{\omega}_y = \frac{j_z - j_x}{j_y} \cdot \omega_z \cdot \omega_x + \frac{C_y}{j_y} \\ \dot{\omega}_z = \frac{j_x - j_y}{j_z} \cdot \omega_x \cdot \omega_y + \frac{C_z}{j_z} \end{cases} \quad (1.12)$$

Si tratta di un sistema **non lineare** perché sono presenti i prodotti delle velocità. Queste tre equazioni di stato sono in pratica l'unica cosa che interessa.

$\frac{j_x - j_y}{j_z} \cdot \omega_x \cdot \omega_y$  rappresenta **giro (w)** e  $\frac{C_z}{j_z}$  **l'accelerazione angolare** prese lungo l'asse z in tal caso.

Le  $\omega_x, \omega_y, \omega_z$  sono le velocità misurate a bordo del satellite e sono perpendicolari tra loro.

Le **coppie** sono quelle fornite, in questo caso, con i getti di gas, misurate sul satellite.

Con *l'inerzia sferica* spariscono le coppie giroscopiche e ci si trova con tre moti indipendenti che non interagiscono fra loro.

Con *simmetria cilindrica*  $j_x = j_y$ , (z = asse di simmetria), sparisce la coppia giroscopica nella III equazione e z non dipende più da x e y; in pratica z influenza gli altri moti, ma non ne è influenzato. Questo ci permette di controllare separatamente il moto rispetto a z, utilizzando solamente un sistema del secondo ordine.

## 2 IL CONTROLLORE PROPORZIONALE INTEGRALE

Prima di passare al progetto vengono analizzate le caratteristiche del controllore ad azione Proporzionale ed Integrale (P.I.) utilizzato per ottenere la risposta desiderata dal sistema. Esiste anche il controllore ad azione Derivativa che per questo progetto non è stato utilizzato.

Il controllore P.I. è stato utilizzato nel sistema a retroazione unitaria.

Un controllore proporzionale (Kp) avrà l'effetto di ridurre il tempo di salita (parametro che caratterizza la prontezza della risposta) e ridurre, ma non eliminare, l'errore a regime permanente, aumentare la banda passante. Un'azione Integratrice (regolatore I con costante Ki) ha l'effetto di eliminare l'errore in Regime Permanente ma peggiora la risposta transitoria (fastidi con la stabilità). Gli effetti di un controllore in un sistema a ciclo chiuso sono riassunti nella tabella 2.1.

In concreto tutte, o quasi, le regolazioni si effettuano ad anello chiuso. In un regolatore ad anello chiuso la variabile da controllare (velocità, posizione, ecc.) è misurata e confrontata con il valore di consegna, la differenza, od errore, è successivamente elaborata; il risultato di questa elaborazione costituisce il valore d'ingresso dell'attuatore.

Controllore/Risposta	Tempo di salita	Sovraelongazioni	Transitorio	Errore e regime perm.
<b>Kp</b>	Diminuisce	Aumentano	(nullo)	Diminuisce
<b>Ki</b>	Diminuisce	Aumentano	Aumentano	Eliminato

**Tabella 2.1**

Queste relazioni non sono accurate; infatti i controllori sono dipendenti l'uno dall'altro. Lo schema è però indicativo nella determinazione dei valori di Kp, Ki.



### 3 CONTROLLO ASSETTO SATELLITE

Inizialmente si è progettato il controllo di velocità per calcolare la coppia massima che consenta di portare a regime il sistema.

Dati i vettori delle coppie di comando e delle **velocità angolari desiderate**, rispettivamente

$$T = \begin{bmatrix} T_x \\ T_y \\ T_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad W_{des} = \begin{bmatrix} \omega_{xd} \\ \omega_{yd} \\ \omega_{zd} \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

si definisce la legge di controllo come:

$$\frac{1}{J_x} C_x + \frac{J_y - J_z}{J_x} \hat{\omega}_y \hat{\omega}_z = \frac{1}{J_x} T_x \quad (3.2a)$$

$$\frac{1}{J_y} C_y + \frac{J_x - J_z}{J_y} \hat{\omega}_z \hat{\omega}_x = \frac{1}{J_y} T_y \quad (3.2b)$$

$$\frac{1}{J_z} C_z + \frac{J_x - J_y}{J_z} \hat{\omega}_y \hat{\omega}_x = \frac{1}{J_z} T_z \quad (3.2c)$$

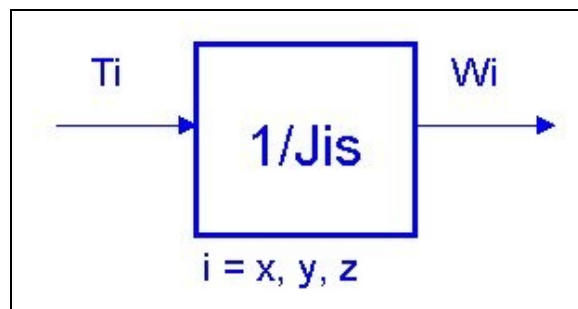
Nel sistema (3.2) le (\*) sono le velocità misurate mediante osservatore.

Questa legge di controllo (3.2) permette di non considerare gli effetti delle coppie giroscopiche delle equazioni dinamiche.

Ipotizzando di poter effettuare delle misure perfette delle  $\omega$  si ottiene:

$$\begin{cases} \dot{\omega}_x = \frac{T_x}{J_x} = \frac{u_x}{j_x} \\ \dot{\omega}_y = \frac{T_y}{J_y} = \frac{u_y}{j_y} \\ \dot{\omega}_z = \frac{T_z}{J_z} = \frac{u_z}{j_z} \end{cases} \quad (3.3)$$

Questi sono tre modelli del primo ordine non interagenti l'uno con l'altro quindi trattabili singolarmente. Il blocco rappresentate ognuno dei tre modelli è rappresentato in figura 3.1.



**Figura 3.1**

Le equazioni del controllo proporzionale integrale per un generico asse quindi risultano

$$\omega_j(i+1) = \omega_j(i) + \frac{\Delta t}{J} \cdot T_j(i) \quad (3.4)$$

dove  $\Delta t$  rappresenta il tempo di campionamento

$$\begin{cases} T_j = Kp_j \cdot (\omega_{jd}(i) - \omega_j(i)) + Ki_j \cdot z_j(i) \\ z_j(i+1) = z_j(i) + \omega_{jd}(i) - \omega_j(i) \end{cases} \quad (3.5)$$

Sostituito il controllo nell'equazione di stato, si ricavano gli autovalori della matrice così ottenuta, imponendo la coppia di poli complessi coniugati auspicata in catena chiusa, e, sfruttando il principio di identità dei polinomi, si ha:

$$Kp_j = \frac{2 - \Sigma_j}{\Delta t} \cdot J \quad Ki_j = \frac{\Pi_j - \Sigma_j + 1}{\Delta t} \cdot J \quad (3.6)$$

dove si indicano con  $\Sigma_j$  la somma e con  $\Pi_j$  il prodotto dei due poli.

### Attuatori a getti di gas.

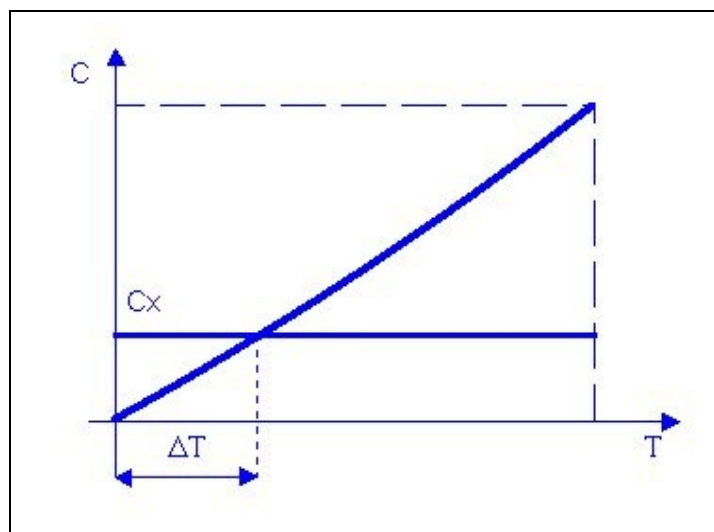
fra le coppie richieste dal controllore e le coppie effettivamente agenti ci sono di mezzo degli attuatori, che cercano di erogare le coppie richieste dal regolatore.

Gli attuatori a *getto di gas* effettuano un'espulsione del gas a velocità e pressione costante (portata costante). Il tempo di apertura della valvola, figura 3.2, fornisce quindi la quantità di moto, che diviso il tempo determina la coppia fornita al satellite. Tale coppia risulta direttamente proporzionale al tempo in cui la valvola rimane aperta, ricavabile dalla (3.7b).

$$C_x = C \Delta t \quad (3.7a)$$

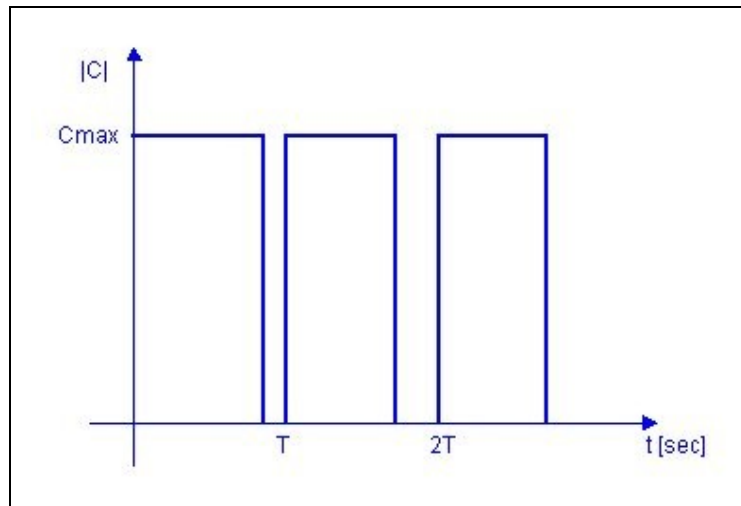
$$\Delta t = \frac{C_x}{C} \quad (3.7b)$$

$C$  è la coppia di riferimento



**Figura 3.2 Tempo apertura valvola**

L'andamento del comando è di tipo impulsivo, come mostrato in figura 3.3.

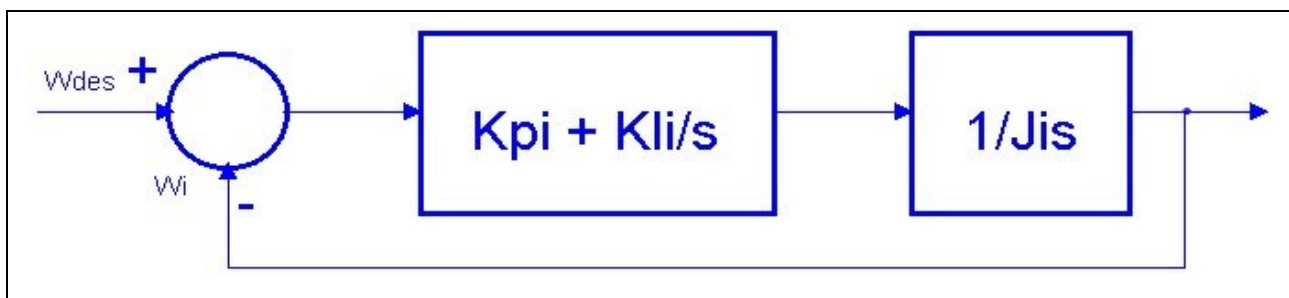


**Figura 3.3 Andamento temporale apertura valvola**

Si passa quindi dalla coppia al tempo di apertura della valvola. È necessario calcolare i riferimenti  $\theta_d$ ,  $\varphi_d$ ,  $\Psi_d$ :

$$\begin{aligned} \omega_x &= v_0 & \Psi(t) &= v_0 t \\ \omega_y &= \omega_0 \sin(v_0 t) & \theta(t) &= 0 \\ \omega_z &= \omega_0 \cos(v_0 t) & \Psi(t) &= \omega_0 t \end{aligned}$$

Si progetta quindi il controllo per ottenere la  $\omega$  desiderata, e calcolo dei relativi guadagni. Lo schema a blocchi di tale controllo è rappresentato in figura 3.4.



**Figura 3.4 Schema controllo velocità**

Ricavando il polinomio caratteristico di tale sistema si ottiene in catena chiusa:

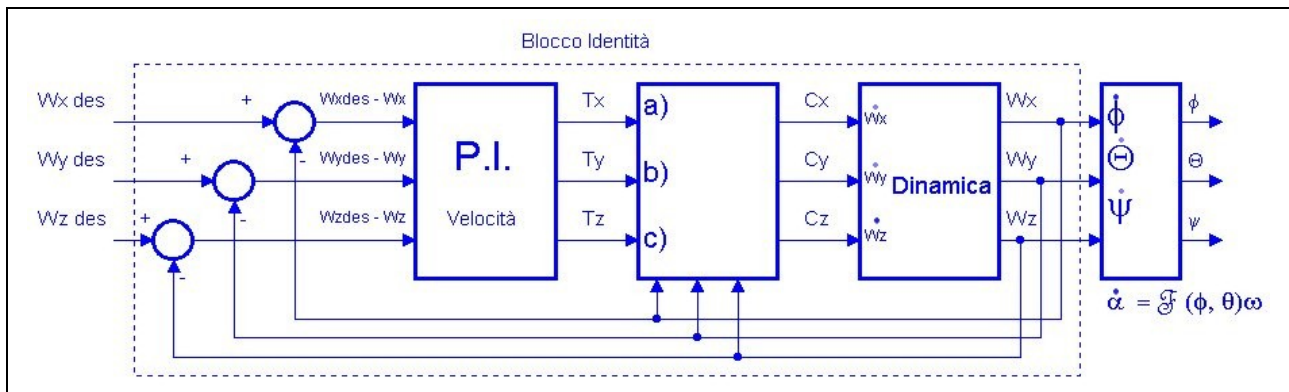
$$\rho_c(s) = \frac{1}{J_i} (K_{pi}s + K_{li}) + s^2 = s^2 + \frac{1}{J_i} K_{pi}s + \frac{1}{J_i} K_{li} = s^2 + 2\xi \Omega s + \Omega_i^2 \quad (3.8)$$

in cui

- $K_{li} = J_i \Omega_i^2$  rappresenta il guadagno integrativo
- $K_{pi} = J_i 2\xi \Omega_i$  rappresenta il guadagno proporzionale
- $J$  rappresenta l'inerzia del sistema
- $2\xi$  rappresenta lo smorzamento del sistema
- $\Omega$  rappresenta la pulsazione

Lo schema in catena aperta per il **controllo di posizione** è quindi quello proposto in figura 3.5.

In ingresso si hanno le  $\omega$  desiderate sui tre assi. In uscita si hanno tramite il vettore  $\alpha'$  le equazioni cinematiche del sistema che legano la velocità angolare desiderata con la posizione angolare  $\dot{\alpha} = F(\alpha) \cdot W$



**Figura 3.5 Schema in catena aperta per il controllo di posizione**

**P.I.** è il proporzionale integrale della velocità. Al suo interno vi sono tre blocchi, uno per ciascun ingresso, come quelli mostrati in figura 2.2. In uscita si ottengono i vettori delle coppie di comando ( $T_x$ ,  $T_y$ ,  $T_z$ ).

Al blocco della **dinamica** sono date in ingresso le coppie vere ( $C_x$ ,  $C_y$ ,  $C_z$ ) che dovranno essere applicate al satellite. In uscita si hanno le  $\omega$  che saranno poi confrontate con quelle desiderate per regolare il sistema.

Il **blocco identità** (parte racchiusa dal tratteggio) è esattamente l'identità, la sua funzione di trasferimento è pari ad 1, ovvero è come se le grandezze desiderate siano state imposte come velocità vere.

Mantenendo le equazioni di stato così come proposte determinerebbero un controllo aperto del nono ordine.

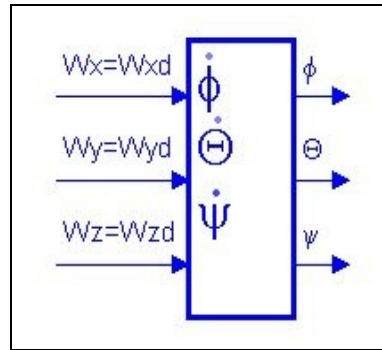
## Sensori di posizione

La posizione che assume il satellite è determinata tramite appositi sensori installati a bordo dello stesso.

**Sensori di stelle:** si tratta di telecamere che fissate sul satellite sono in grado di riconoscere le stelle inquadrare mediante confronto con il loro database di mappe stellari. In uscita forniscono le coordinate celesti della direzione puntata con ordine di precisione del secondo d'arco. Un secondo d'arco è pari a  $1^\circ/3600$ . Esistono anche sensori in grado di indicare la direzione intorno all'asse di puntamento

.I sensori per operare correttamente non devono mai puntare il sole. L'errore sull'assetto misurato risulta nullo se le due direzioni di puntamento risultano ortogonali

Dal modello della cinematica si ricavano le equazioni che legano la velocità angolare desiderata con la posizione angolare.



**Figura 3.6**

Dalle velocità angolari si ricavano  $v_x, v_y, v_z$ .

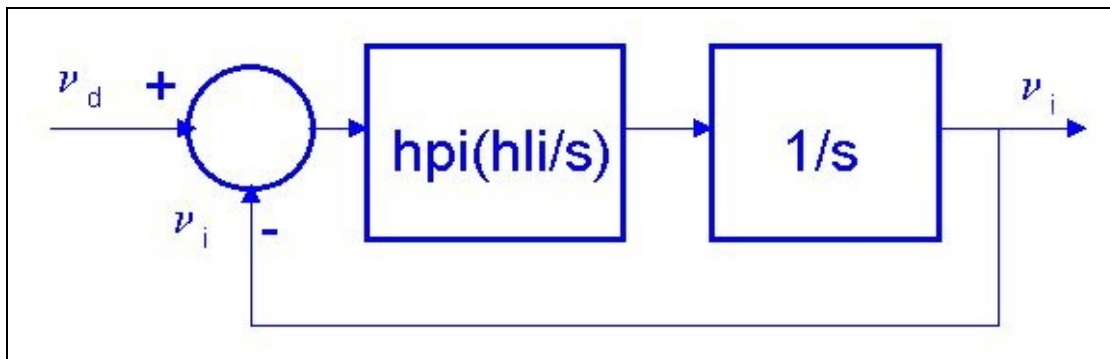
$$F \begin{pmatrix} \hat{\phi} \\ \hat{\theta} \\ \hat{\psi} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

MATRICE 3 X 3

in cui si ha l'uguaglianza

$$\dot{\alpha} = \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

Lo schema a blocchi del controllo per  $v_i$  è ancora una catena chiusa come presentato in figura 3.7. In questo caso  $J=1$



**Figura 3.7 Schema controllo v tipo Proporzionale Integrativo**

$$\rho_{C_i}(s) = (hpi s + hli) + s^2 = s^2 + 2\xi_i \Omega_i s + \Omega_i^2 \quad (3.11)$$

Per la (3.11) si ha

$$hli = \Omega_i^2$$

$$hpi = 2\xi_i \Omega_i$$

Il controllo è di tipo proporzionale integrativo nel discreto e si ottiene il seguente sistema:

$$I \begin{cases} \beta_i(K+1) = \beta_i(K) + T + v_i(K) \\ \eta_i(K+1) = \eta_i(K) + \beta_{id}(K) - \beta(k) \end{cases} \quad (3.12)$$

in cui  $T$  è il passo di campionamento utilizzato.

La legge di controllo risulta

$$v_i(k) = H_{pi}[\beta_{id}(K) - \beta_i(K)] + H_{Ii}\eta_i(K) \quad (3.13)$$

Le relazioni di stato sono le seguenti

$$\beta_i(K+1) = \beta_i(K) - TH_{pi}\beta_i(K) + TH_{Ii}\eta_i(K) + TH_{pi}\beta_{id}(K) \quad (3.14)$$

$$\eta_i(K+1) = \eta_i(K) - \beta_i(K) + \beta_{id}(K) \quad (3.15)$$

ed in forma matriciale:

$$\begin{bmatrix} \beta_i(K+1) \\ \eta_i(K+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} TH_{pi} & TH_{Ii} \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_i(K) \\ \eta_i(K) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} TH_{pi} \\ 1 \end{bmatrix} \beta_{id}(K) \quad (3.16)$$

Il sistema in catena chiusa risulta essere del secondo ordine.

Ricavando gli autovalori dalla matrice ed imposti i poli in catena chiusa si può ottenere

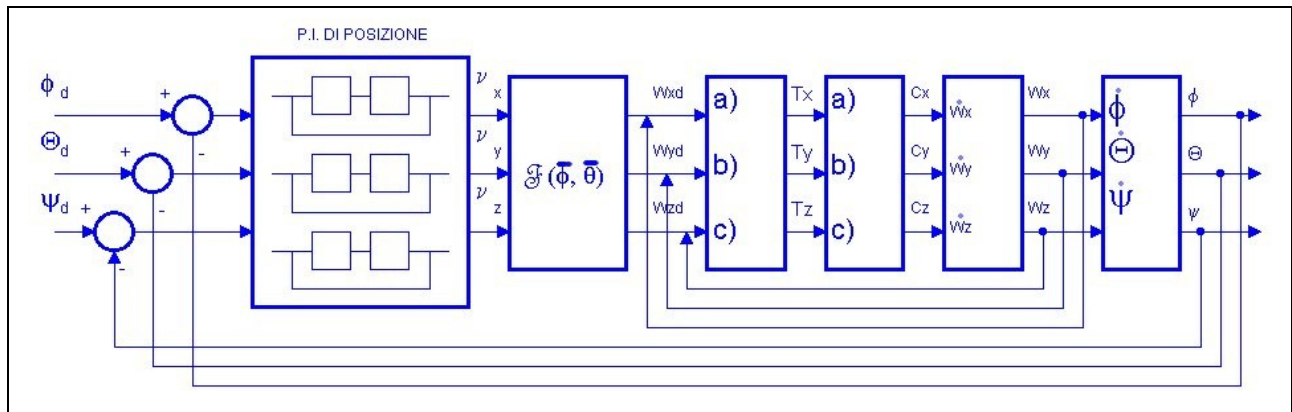
$$\sum_d = 2 - TH_{pi} \rightarrow H_{pi} = \frac{2 - \sum_d}{T} \quad (3.17)$$

$$\prod_d = 1 - TH_{pi} + TH_{pi} \quad (3.18)$$

Dalla (3.17) e dalla (3.18) si ottiene:

$$H_{pi} = \frac{\prod_d - \sum_d + 1}{T} \quad (3.19)$$

Lo schema a blocchi completo del sistema di controllo risulta quindi quello mostrato in figura 3.8.



**Figura 3.8 Schema completo del controllo**

$$\varpi_i(K+1) = \frac{T}{J_i} \quad T_i(K) = \text{coppia} \quad (3.20)$$

#### 4 ANALISI CONTROLLO DELLO SPIN DI UN SATELLITE

Si consideri un satellite che orbita mantenendo un asse puntato verso Terra, questo equivale a dire che il satellite deve far coincidere la sua terna di assi corpo con la terna orbitale (ad es. la direzione di puntamento di un' antenna, figura 4.1). Spesso, per poter operare in maniera corretta e' necessario che ad un satellite venga impartito un moto rotatorio intorno all'asse puntato verso Terra, con velocità angolare costante.

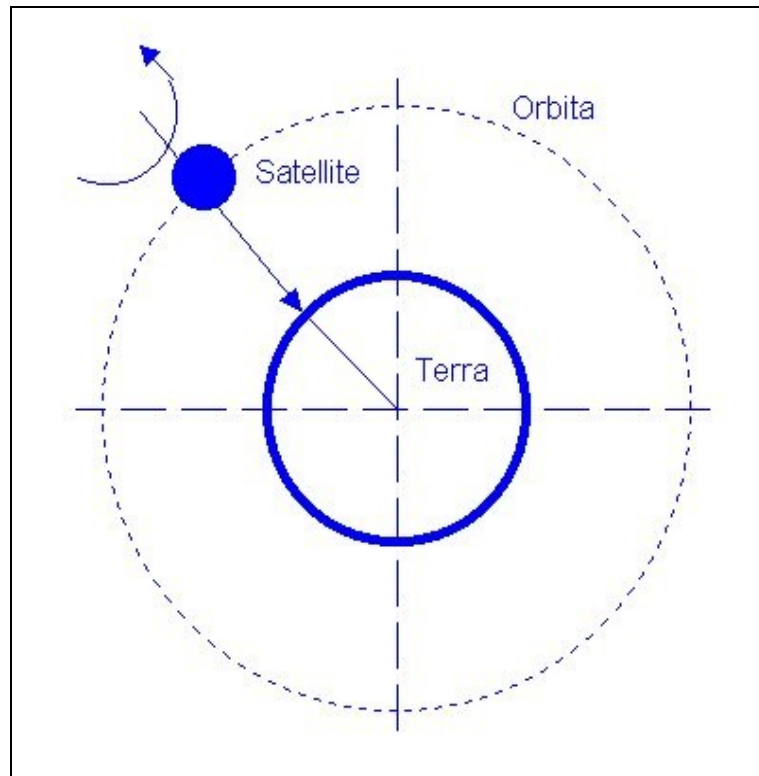


Figura 4.1

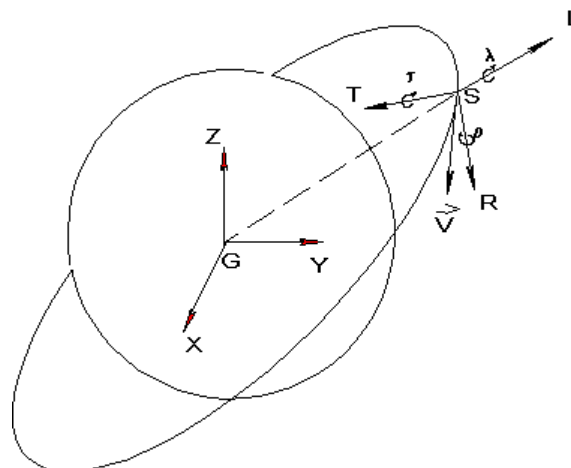
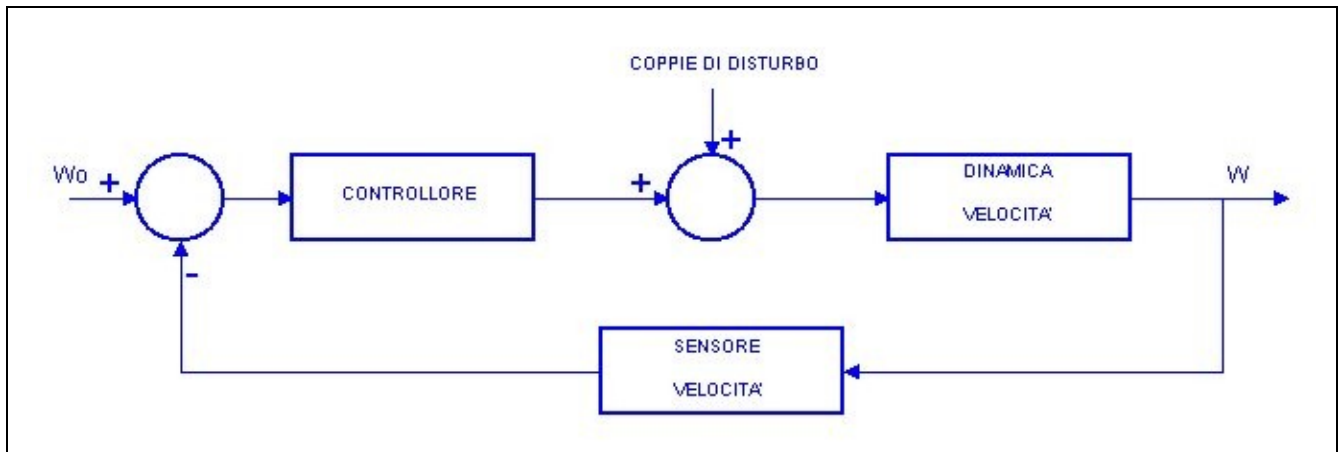


Figura 4.2 Terna assi corpo satellite e Terra

Due casi in cui questo e' necessario sono ad esempio i seguenti:

1. Per esporre in maniera uniforme le varie facce del satellite alla radiazione solare, in modo da ridurre i gradienti termici ai quali e' sottoposto;
2. Per migliorare la precisione di puntamento verso Terra, avvalendosi dell'effetto giroscopico. Occorre quindi disporre di un sistema di controllo che regoli il valore della velocità angolare  $W$  attorno a tale asse

Lo schema a blocchi del sistema di controllo è mostrato in figura 4.3.  $\omega_0$  in ingresso è il valore desiderato di  $\omega$ .



**Figura 4.3 Schema a blocchi del sistema di controllo**

### Equazione della dinamica di rotazione.

La dinamica di rotazione attorno ad un solo asse può essere descritta da questa equazione:

$$J\ddot{\vartheta} = C_C + C_D \quad (4.1)$$

Nella (4.1) si hanno:

- $(C_C)$  Coppia di controllo
- $(C_D)$  Coppia di disturbo
- $J$  Momento di inerzia rispetto all'asse
- $J\dot{\omega}$  Derivata del momento della quantità di moto

### Misura della velocità angolare $w$ .

$\omega$  non è misurata direttamente ma è "ricostruita" mediante un algoritmo che da' luogo a una dinamica del primo ordine tra  $\omega$  e la sua misura  $\omega_m$ . La misura di  $\omega$  e' anche soggetta ad un offset  $n$ , che può essere modellizzato come un disturbo costante.

$$\vartheta_m = \frac{1}{\tau_s + 1} \vartheta + n \quad (4.2)$$

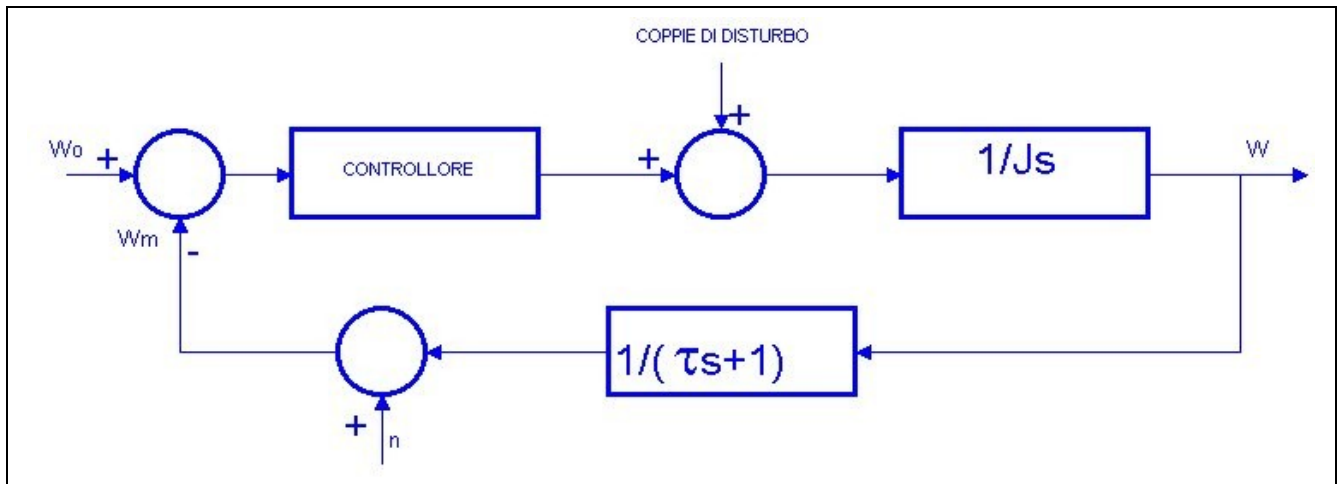
### Coppie di disturbo agenti sul satellite.

Possono essere rappresentate come la somma di una parte costante e di una parte sinusoidale; Supponendo  $\omega \approx \omega_0$  (il sistema di controllo deve "gestire" piccoli scostamenti di  $\omega$  dal valore desiderato) si può considerare  $\omega = \omega_0$  come pulsazione del disturbo sinusoidale, quindi:

$$C_D = C_{D0} + C_{DS} + \sin(\vartheta_0 t) \quad (4.3)$$

Lo schema a blocchi complessivo è raffigurato in figura 4.4.





**Figura 4.4 Schema a blocchi completo**

Analisi del sistema di controllo viene effettuata con

$$C_C = \mu_r (\varpi_0 - \varpi) = \frac{1}{2} (\varpi_0 - \varpi) \quad (4.6)$$

Con questo controllore la funzione di trasferimento d'anello risulta

$$L(s) = \mu_r \frac{1}{j_s} \frac{1}{\tau_s + 1} \quad (4.4)$$

Con Matlab, definiti i parametri  $J$ ,  $\tau$ ,  $\mu_r$  (il controllore) di un satellite si ottiene l'oggetto associato alla funzione di trasferimento  $L(s)$ . Considerando dati reali di un satellite, prelevabili da un sito che si occupa di aerospaziale si è trovato:  $J=20 \text{ Kg m}^2$ ,  $\tau=125s$ ,

## Analisi di stabilità.

Verificata l'applicabilità del criterio di Bode e' facile leggere i valori di  $\omega_c$  e  $\varphi_m$  sulla base dei diagrammi della risposta in frequenza di  $L(s)$ : `bode(num,den)` Figura 4.5, in cui dalla (4.4) `num=0.5` e `den=[20*125 20 0]`; In alternativa si può usare la funzione `margin`, che calcola direttamente i valori esatti: `margin(num,den)`;

- Il sistema di controllo e' asintoticamente stabile per il criterio di Bode
- E' possibile garantire che la stabilità asintotica si conserva se la misura della velocità angolare avviene con un certo ritardo di tempo. Calcolando lo sfasamento alla pulsazione critica per un ritardo di 5 secondi si ottiene:  $-5 * \omega_c * 180/\pi = -3.726^\circ$  che è molto piccolo.
- Sulla base di questo modello, il sistema non può diventare instabile a seguito di perturbazioni sul guadagno, infatti dai diagrammi di Bode si vede che il margine di guadagno è infinito, quindi, ad esempio, l'incertezza sul valore di  $J$  non è critica per il sistema.

## Analisi di precisione statica.

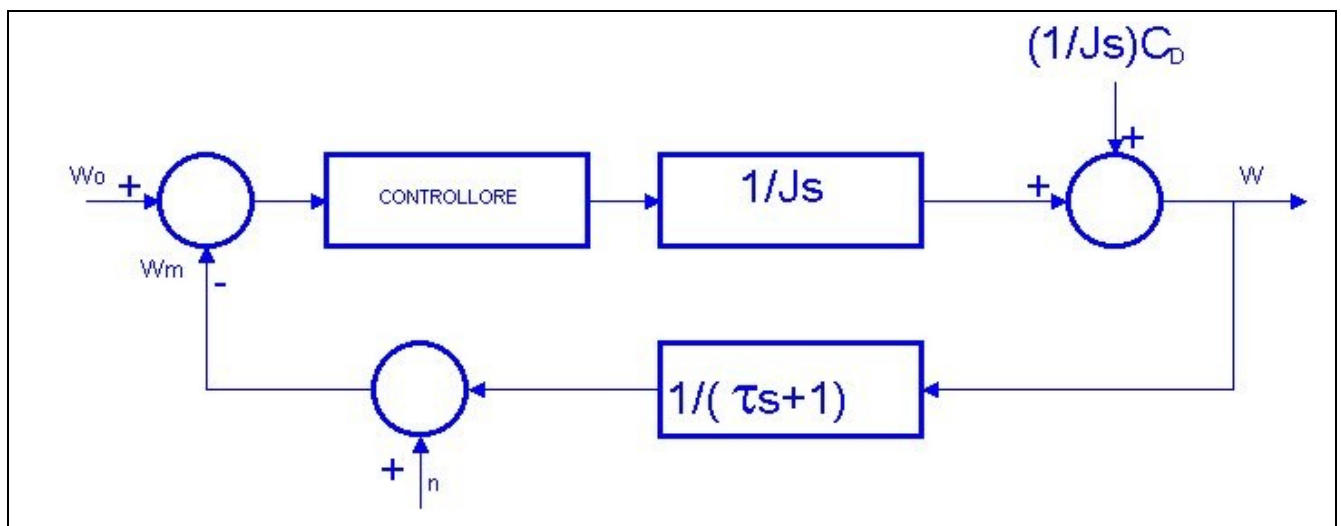
Il sistema di controllo è soggetto a disturbi sulla linea di andata (la coppia di disturbo  $C_d$ ) e sulla linea di retroazione (l'errore di misura  $n$ ). Per avere lo schema a blocchi nella forma standard, si sposta il disturbo  $C_d$  a valle del blocco  $1/s$  come mostrato dallo schema in figura 4.6. da cui si ottiene che:

- La funzione di trasferimento  $L(s)$  è di tipo 1 (un polo nell'origine); agiscono un disturbo a rampa sulla linea di andata e un disturbo a scalino sulla linea di ritorno; è presente un disturbo sinusoidale sulla linea di andata.
- L'errore statico complessivo sarà quindi *oscillante* per via della componente sinusoidale di  $C_d$  e avrà anche una componente costante.



**Figura 4.5 Diagramma di fase  $\omega_c=0.013059$  rad/sec**

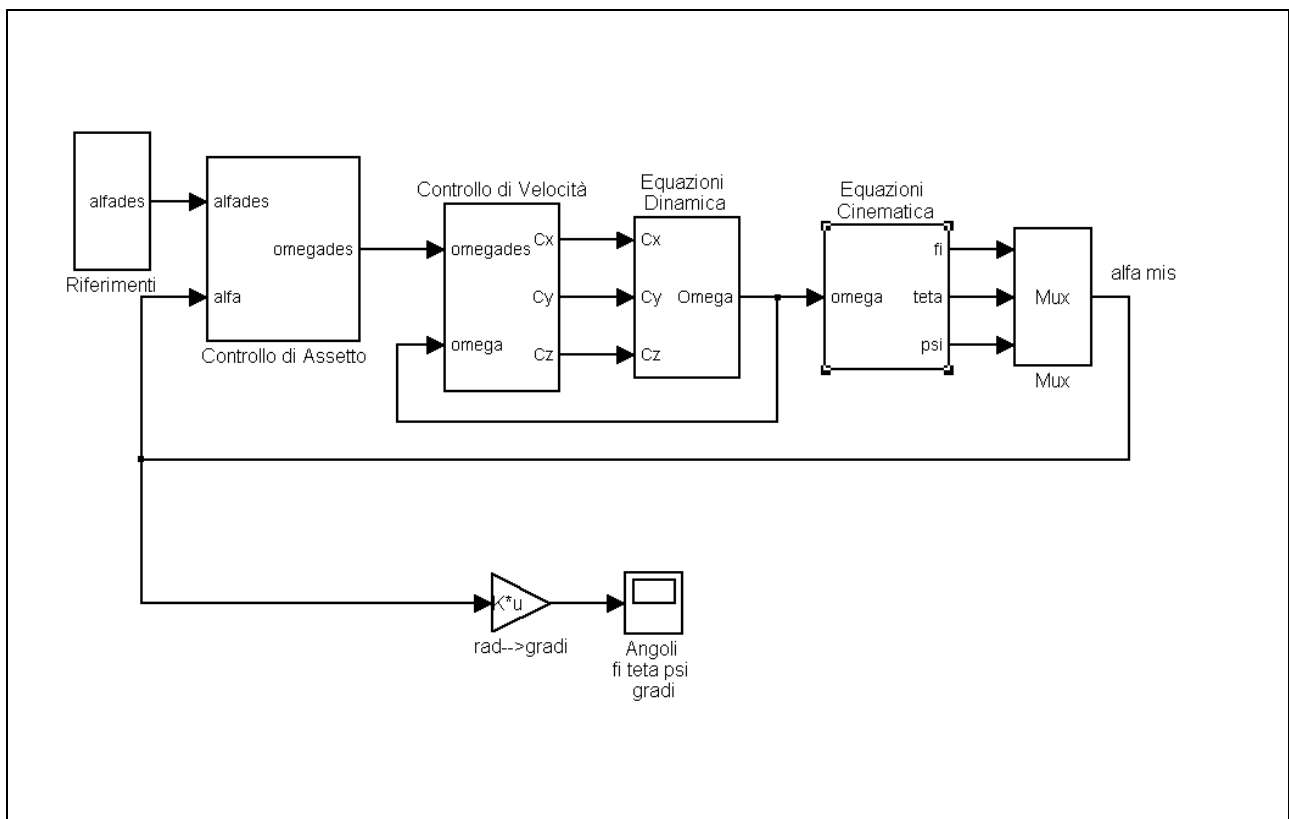
Da ciò ci si potrà attendere che l'errore a regime (analisi dinamica) avrà valore medio diverso da zero per l'effetto di  $n$  e della parte costante delle coppie di disturbo  $C_D$  (ed oscillante)



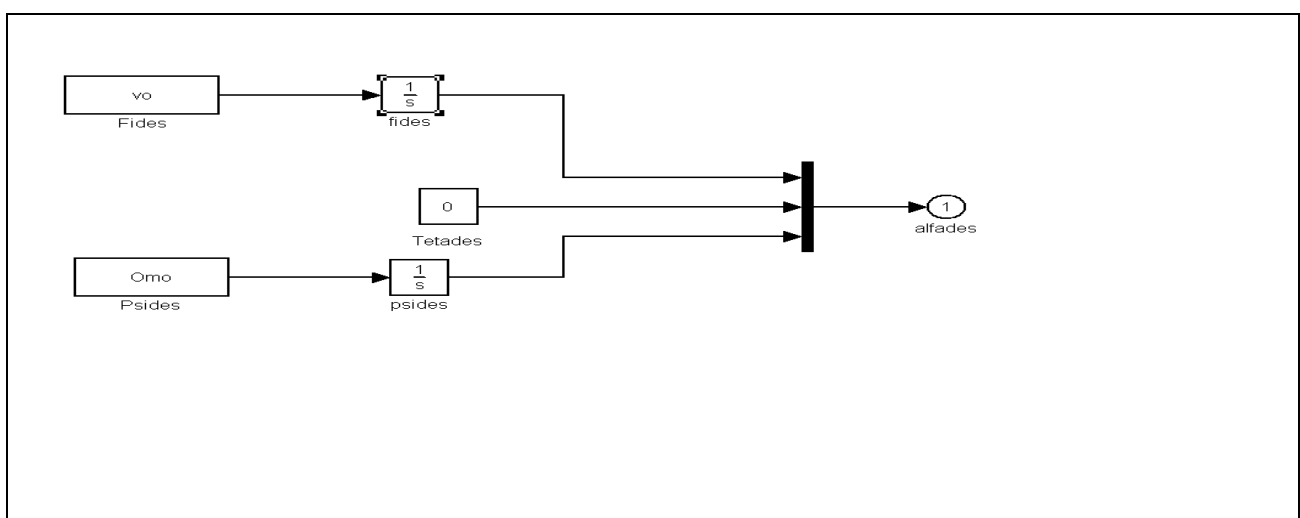
**Figura 4.6 Schema a blocchi completo standard**

La simulazione del controllo di assetto del satellite è stata eseguita con il modello Simulink raffigurato nello schema di figura 4.7. Come script di inizializzazione viene utilizzato un file matlab con i dati del sistema satellite. Il sistema utilizza delle S-Function per descrivere la dinamica del sistema (parametrizzazione del sistema da simulare). Il modello è costituito da

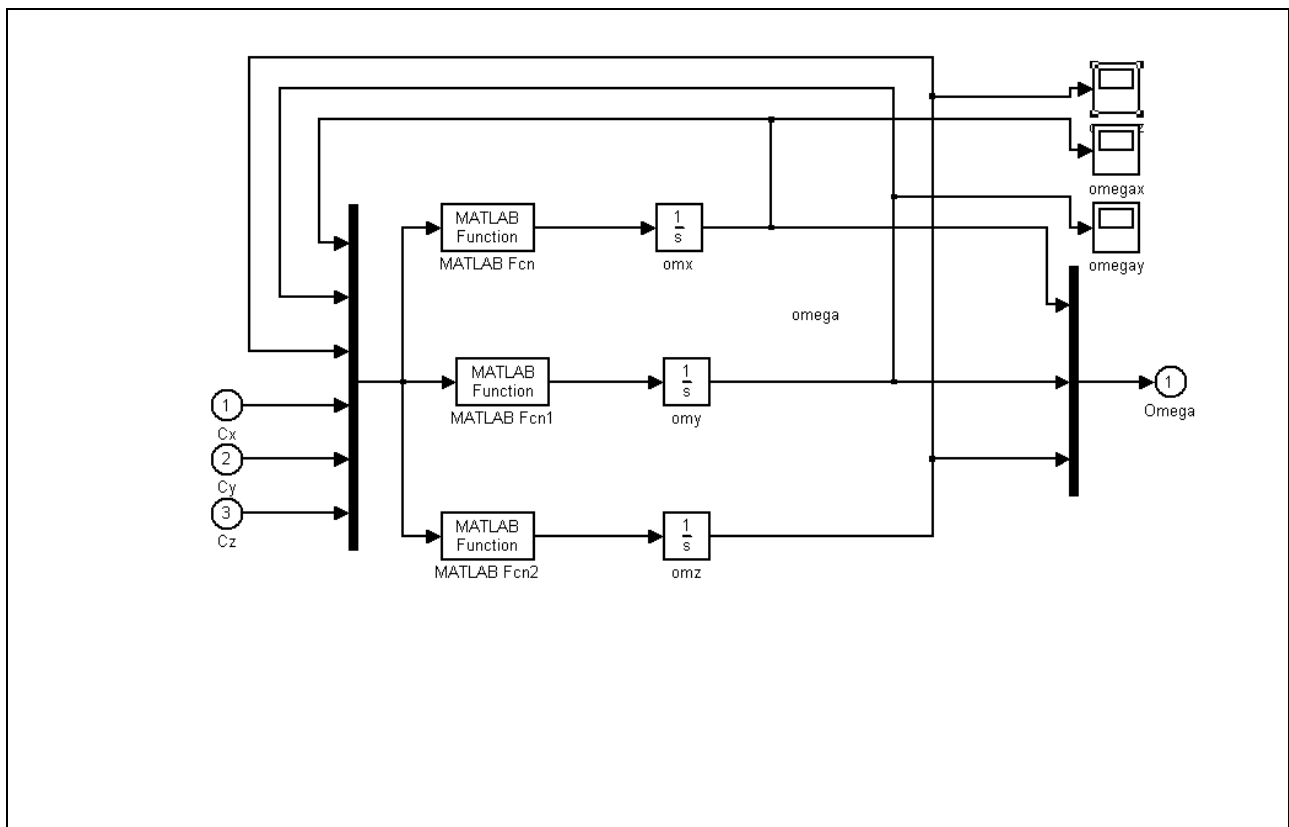
due anelli di reazione. Quello interno viene utilizzato per la regolazione delle  $\omega$ , mentre quello esterno per il controllo di  $\dot{\alpha}$ . La velocità viene controllata più velocemente (circa 10 volte) della posizione dato che quest'ultima serve per la valutazione delle coppie. In ingresso al sistema è presente appunto il vettore  $\alpha$  costituito dalla terna di  $\Psi$ ,  $\varphi$  e  $\theta$  desiderate. Le componenti di  $\Psi$  e  $\varphi$  sono seguite da un integratore, figura 4.8, per ottenere da tali valori delle velocità.  $\theta$  deve essere 0. Si passa quindi ad avere le  $\omega$  desiderate lungo i tre assi, e tramite il blocco di controllo di velocità, si ottengono le coppie che dovranno essere applicate al satellite per il suo controllo. Il blocco per le equazioni della cinematica del satellite consente di ottenere i valori di  $\Psi$ ,  $\varphi$  e  $\theta$  che formeranno nuovamente il vettore  $\alpha$  applicato al satellite. Tali valori saranno quindi riportati in ingresso per continuare il controllo.



**Figura 4.7 Schema simulativi simulink generale**



**Figura 4.8 Dettaglio dell'ingresso  $\alpha$**

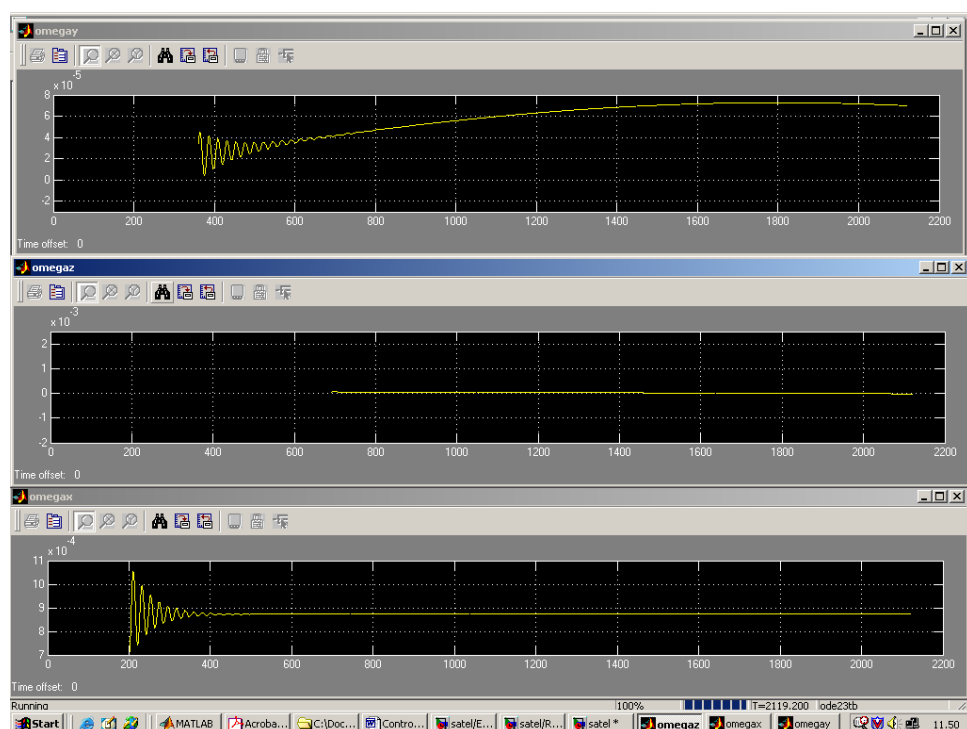


**Figura 4.9 Simulink velocità**

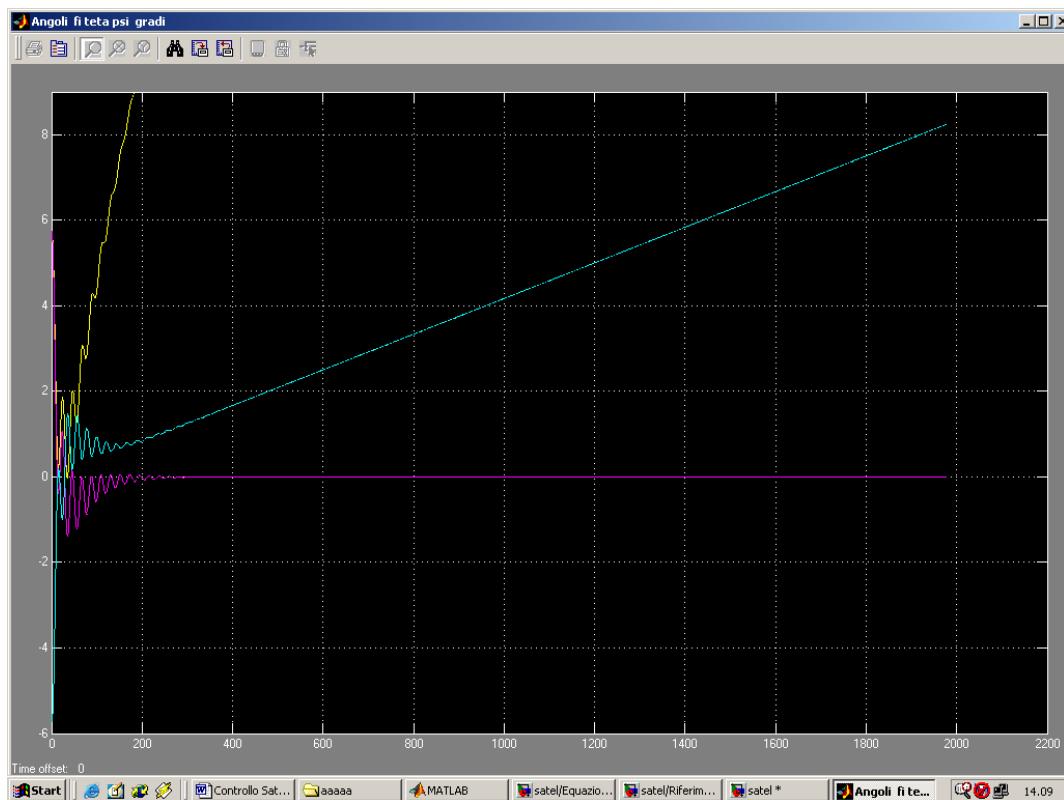
Nel grafico 4.10 sono riportati gli andamenti delle velocità lungo i tre assi. Si osserva una instabilità iniziale del sistema che però tramite il controllo si stabilizza ad un valore costante. Dal grafico di uscita di  $\Psi$ ,  $\varphi$  e  $\theta$ , figura 4.11 si vede come  $\Psi$  e  $\varphi$  abbiano un andamento lineare (monotono crescente), mentre  $\theta$  risulti costante a zero. Solo durante il transitorio iniziale i tre valori assumono un andamento oscillante (instabilità).

In questo caso si è usato come valore di pulsazione  $w_{ci}$  nel file matlab pari a 0.04.

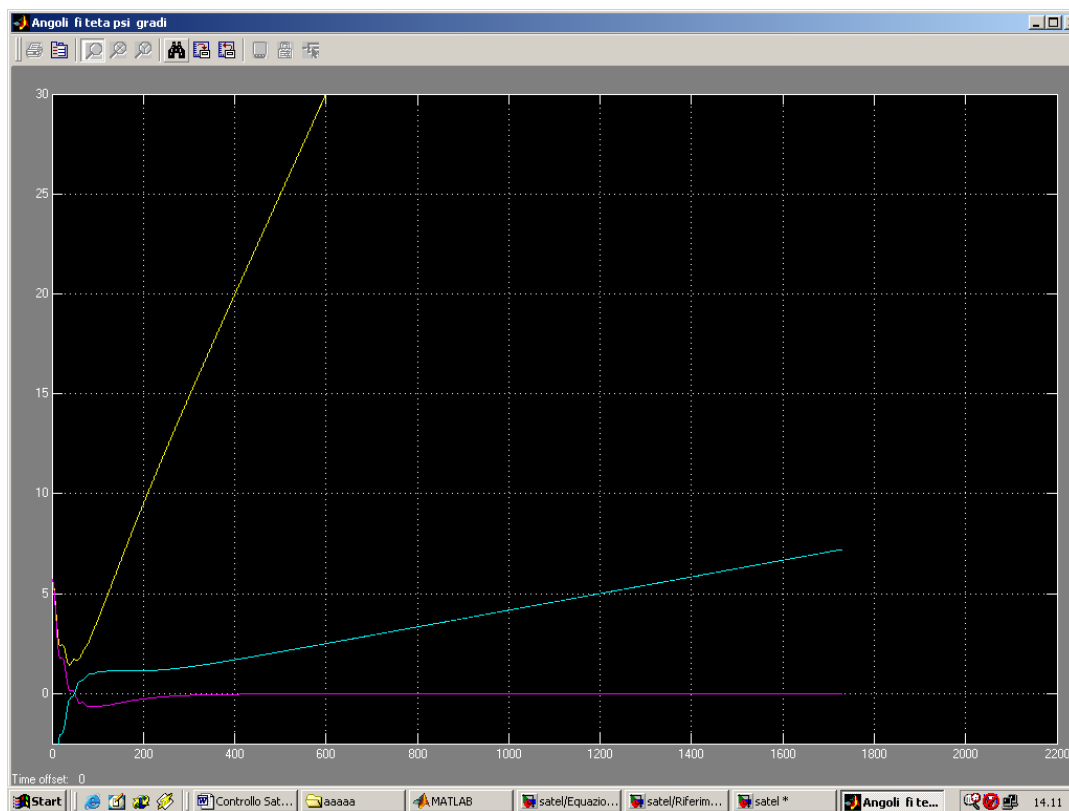
Diminuendo il valore dello pulsazione a 0.02 si ottiene il grafico 4.12. In questo caso si nota



**Figura 4.10 Andamento delle  $\omega$**



**Figura 4.11 Andamento di  $\Psi$ ,  $\phi$ ,  $\theta$  nel tempo  $W_{ci}=0.04$   $Z_{ci}=1.1$**



**Figura 4.12 Andamento di  $\Psi$ ,  $\phi$ ,  $\theta$  nel tempo  $W_{ci}=0.02$   $Z_{ci}=1.1$**

una diminuzione delle oscillazioni iniziali ed una linearizzazione piu' veloce del sistema.

$T=0.2$

## 5 APPENDICI

### Il Giroscopio

Qualunque massa in rotazione intorno ad un asse acquisisce determinate proprietà, dette proprietà giroscopiche. Se progettata per sfruttare tali proprietà prende il nome di Giroscopio. Un giroscopio, schematicamente rappresentato in figura 1 consiste di un disco di massa notevole rotante ad alta velocità, come quelle dei satellite per esempio, intorno all'asse di rotazione X, montato su un sistema cardanico che gli permette libertà di movimento intorno ad un asse verticale Z e ad un asse orizzontale Y.

I tre assi, ortogonali uno rispetto all'altro, si incontrano nel baricentro del sistema, cosicché il disco (o rotore), prima di essere messo in rotazione intorno all'asse X, può essere posto a giacere in qualunque piano nello spazio. Quando un giroscopio, com'è il caso di quello appena descritto, è libero di ruotare intorno ai suoi tre assi, si dice che ha tre gradi di libertà. Se si blocca lo snodo cardanico intorno ad uno dei due assi Z o Y, al giroscopio rimangono due gradi di libertà.

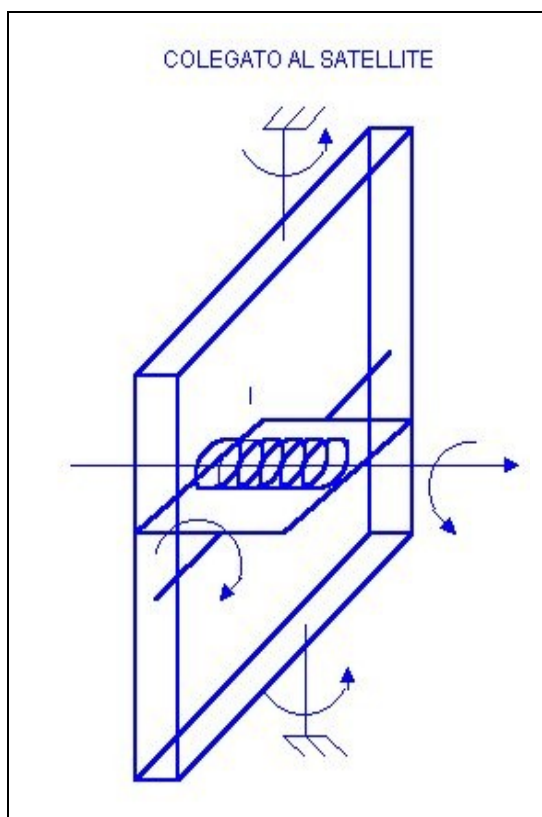


Figura 1 Giroscopio

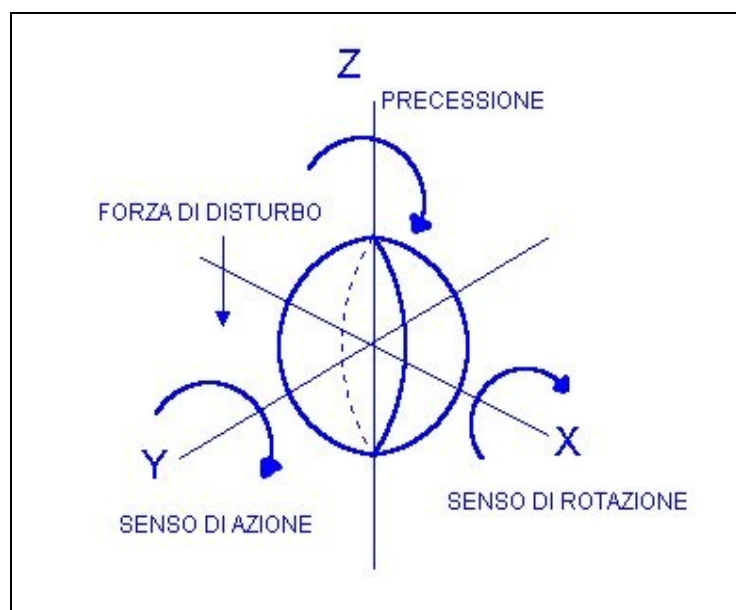
La soppressione di un grado di libertà serve per sfruttare la precessione del giroscopio. Nel caso, poi, che fossero bloccati entrambi gli snodi sugli assi Z e Y, il giroscopio rimarrebbe con un solo grado di libertà: è il caso dell'elica, della Terra, della ruota della bicicletta, ecc....

#### Proprietà del giroscopio

**La rigidità o inerzia giroscopica.** E' la proprietà fondamentale del giroscopio, grazie alla quale trova innumerevoli usi. La rigidità giroscopica è una conseguenza dell'inerzia accumulata dal disco, proporzionale alla sua massa e alla sua velocità. Grazie alla rigidità, il giroscopio a

tre gradi di libertà, una volta messo in rotazione, si mantiene nello stesso piano in cui si trovava al momento dell'inizio della rotazione, indipendentemente dalla posizione assunta dal sistema. In altre parole, una volta messo in rotazione il disco l'asse di rotazione X rimane costantemente rivolto nella direzione iniziale.

**La Precessione.** Quando il funzionamento di un giroscopio a tre gradi di libertà è perturbato da una forza esterna che tenta di spostare il disco dal piano in cui giace, figura 2, spingendolo a ruotare intorno all'asse Y (o all'asse Z), il disco reagisce con una rotazione intorno all'asse Z (o all'asse Y), detta rotazione di precessione, avente senso tale da portare la rotazione del disco intorno all'asse X, in concomitanza con quella indotta dalla forza perturbatrice intorno all'asse Y. La precessione può, in un certo senso, essere vista come una "difesa" del giroscopio nei confronti della forza perturbatrice. La precessione cessa nel momento in cui il piano di rotazione del disco si porta a coincidere col piano in cui agisce la forza perturbatrice, cosicché la forza stessa, non avendo più componenti devianti, può solo accelerare il moto di rotazione del disco



**Figura 2 Giroscopio perturbato**

**La deriva giroscopica.** E' una precessione indesiderata, in genere di lieve entità, ma costante, cui vanno soggetti i giroscopi sia intorno all'asse Y sia all'asse Z, provocata dalle piccole forze che si generano internamente al sistema a causa delle inevitabili, se pur minime, imperfezioni costruttive, quali sbilanciamenti del disco, disallineamenti degli assi, e attriti sui sostegni dell'asse di rotazione e degli snodi.

## Gli angoli di Eulero

Consideriamo un moto *puramente rotatorio*: il che equivale a supporre che le rotazioni del satellite e il moto del baricentro non si influenzino, (il baricentro è un punto fisso per la rotazione). Per descrivere il moto del corpo dobbiamo prima definire i due sistemi di riferimento, entrambe terne destre, che useremo:

- 1) assi corpo (mobili) ( $O, x, y, z$ )
- 2) assi generici (fissi) ( $O, X, Y, Z$ ).

Sono possibili tre differenti rotazioni, ciascuna individuata da un dato angolo:

a) **Imbardata** : rotazione intorno all'asse Z di un angolo  $\psi$ . Alla fine avremo una terna con assi  $x', y', z' \Leftrightarrow Z$ . In pratica vengono alterate le componenti degli assi X e Y.

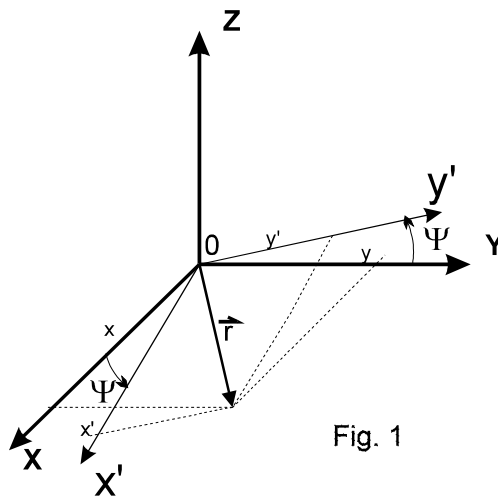


Fig. 1

Osservando la fig.1 si ottengono le seguenti relazioni:

$$\begin{aligned} x' &= (\cos \psi) X + (\sin \psi) Y \\ y' &= (-\sin \psi) X + (\cos \psi) Y \\ z' &= Z \end{aligned}$$

La matrice di rotazione è quindi:

$$\Psi = \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

b) **Beccheggio**: rotazione intorno all'asse  $y'$  di un angolo  $\theta$ ; il sistema di riferimento si porta nelle condizioni  $x''; y'' \Leftrightarrow y'; z''$ . Dalla figura seguente si ricavano le relazioni:

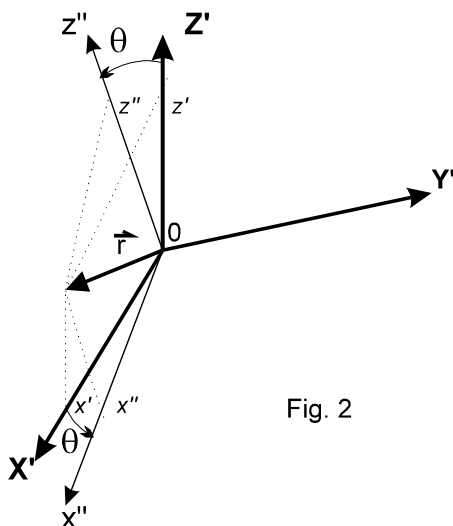


Fig. 2

$$\begin{aligned} x'' &= (\cos \theta) x' - (\sin \theta) z' \\ y'' &= y' \\ z'' &= (\sin \theta) x' + (\cos \theta) z' \end{aligned}$$

La matrice associata a questa rotazione è:

$$\theta = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix}$$

c) **Rollio**: rotazione intorno all'asse  $x''$  con ampiezza pari all'angolo  $\phi$ ; il sistema viene riferito agli assi  $x'''; y'''; z'''$ . Osservando la fig.3 si ottengono le relazioni:

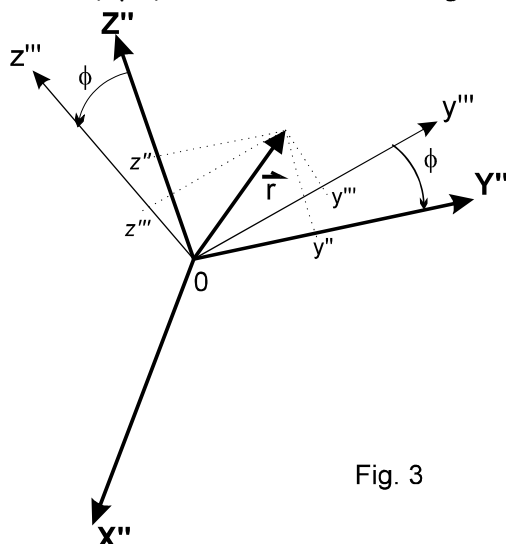


Fig. 3

$$\begin{aligned} x''' &= x'' \\ y''' &= (\cos \phi) y'' + (\sin \phi) z'' \\ z''' &= (-\sin \phi) y'' + (\cos \phi) z'' \end{aligned}$$

La matrice di trasformazione risulta:

$$\Phi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix}$$



Dato un vettore con componenti  $\mathbf{R}$  nel sistema fisso (O, X,Y,Z) si può risalire alle sue componenti  $\mathbf{r}$  nel sistema mobile (O, x,y,z) con la relazione matriciale

$$\mathbf{r}_3 = \Phi_{3 \times 3} \Theta_{3 \times 3} \Psi_{3 \times 3} \mathbf{R}_3 = \mathbf{E}_{3 \times 3} \mathbf{R}_3$$

Esplicitando vettori e matrici otteniamo:

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} \cos\psi \cdot \cos\theta & \sin\psi \cdot \cos\theta & -\sin\theta \\ \cos\psi \cdot \sin\theta \cdot \sin\phi - \sin\psi \cdot \cos\phi & \cos\psi \cdot \cos\phi + \sin\psi \cdot \sin\theta \cdot \sin\phi & \cos\theta \cdot \sin\phi \\ \sin\psi \cdot \sin\phi + \cos\psi \cdot \sin\theta \cdot \cos\phi & \sin\psi \cdot \sin\phi \cdot \cos\phi - \cos\psi \cdot \sin\phi & \cos\theta \cdot \cos\phi \end{bmatrix}$$

che è detta *Matrice di Eulero*.