Aula 1 - 08/01/2025

Resumo

A aula é dedicada a várias derivações da equação de onda. Quatro maneiras foram consideradas, incluindo

1. derivação a partir das equações de Maxwell para vácuo (veja `https://pt.wikipedia.org/wiki/Equa%C3%A7%C3%B5es_de_Maxwell`);

2. derivação para um sistema conectado de molas e massas (veja `https://pt.wikipedia.org/wiki/Equa%C3%A7%C3%A3o_de_onda`);

3. derivação de uma equação para ondas de água (ondas de gravidade) no oceano considerando o aquário;

4. derivação de uma equação descrevendo a densidade de pessoas em uma praia.

Aula 2 - 09/01/2025

Resumo: princípio da superposição

A palestra é dedicada ao princípio da superposição para a solução de equações de onda e ao uso do método de imagens de origem para construir soluções. Além disso, discutimos o método de superposição para equações de onda não lineares, levando às noções de $(\min, +)$-álgebras e à análise idempotente. Essa abordagem surgiu do artigo [1] disponível no Google Drive.

0.1 Notas parciais da aula

Consideremos a equação da onda na região $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$.

Podemos definir o problema de Caquchy como

$$\begin{cases} \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = 0 & \text{terminologia das ondas de gravidade} \\ u\big|_{t=0} = u_0(x,y,z) & \text{deslocamento inicial} \\ u_t\big|_{t=0} = v_0(x,y,z) & \text{velocidade inicial} \end{cases} \tag{1}$$

Este problema tem solução única e bem posta para funções u_0 e v_0 suficientemente boas.

Em vez de condições iniciais de Cauchy podemos ter forçamento F.

Teorema (Princípio da Superposição)
Se o problema de Cauchy

$$\begin{cases} \dfrac{1}{c^2}u_{tt} - \Delta u = F_1 \\ u\big|_{t=0} = u_1^0 \\ u_t\big|_{t=0} = v_1^0 \end{cases}$$

tem solução $u_1 = u_1(\overline{x}, t)$ e

$$\begin{cases} \dfrac{1}{c^2}u_{tt} - \Delta u = F_2 \\ u\big|_{t=0} = u_2^0 \\ u_t\big|_{t=0} = v_2^0 \end{cases}$$

tem solução $u_2 = u_2(\overline{x}, t)$, então a função $u = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2$, onde $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ satisfaz o problema de Cauchy

$$\begin{cases} \dfrac{1}{c^2}u_{tt} - \Delta u = \alpha_1 F_1 + \alpha_2 F_2 \\ u\big|_{t=0} = \alpha_1 u_1^0 + \alpha_2 u_2^0 \\ u_t\big|_{t=0} = \alpha_1 v_1^0 + \alpha_2 v_2^0 \end{cases}$$

Exemplo: Seja o problema de Cauchy (1). Suponha que $\operatorname{supp} u_0 \subset \mathbb{R}^{3+} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z > 0\}$. Construímos reflexão da solução em relação ao plano $z = 0$:

$$u(x,y,z,t) \mapsto u(x,y,-z,t) \equiv w$$

Evidentemente, w satisfaz o problema de Cauchy

$$\begin{cases} \frac{1}{c^2}w_{tt} - \Delta w = 0 \\ \qquad w\big|_{t=0} = u_0(x,y,-z,t) \\ \qquad w_t\big|_{t=0} = v_0(x,y,-z,t) \end{cases}$$

Logo $u - w$ satisfaz o problema misto

$$\begin{cases} \frac{1}{c^2}(u-w)_{tt} - \Delta(u-w) = 0 \\ \qquad (u-w)\big|_{t=0} = u_0 \\ \qquad (u-w)\big|_{z=0} = 0 \end{cases}$$

Como obter a solução do problema misto no quadrante

Inserir figura

Princípio da Superposição Para Equações Não Lineares

$$\boxed{\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 - \frac{h}{2}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0} \tag{2}$$

Versão integral considerada por Hopf

$$u = e^{-\frac{w}{h}} \qquad \therefore \qquad w = -h\log u \tag{3}$$

Calculando as derivadas parciais

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{h}{u}\cdot u_t \tag{4}$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{h}{u}\cdot u_x \tag{5}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{h}{u^2}\cdot u_x^2 - \frac{h}{u}\cdot u_{xx} \tag{6}$$

Substituindo (4). (5) e (6) em (2), temos

$$\begin{aligned} -\frac{h}{u}\cdot u_t + \frac{1}{2}\left(-\frac{h}{u}\cdot u_x\right)^2 - \frac{h}{2}\left(\frac{h}{u^2}\cdot u_x - \frac{h}{u}\cdot u_{xx}\right) &= 0 \\ -\frac{h}{u}\cdot u_t + +\frac{1}{2}\cdot\frac{hu_x^2}{u^2} - \frac{h^2}{2u^2}\cdot u_x + \frac{h^2}{2u}\cdot u_{xx} &= 0 \end{aligned}$$

que nos leva a

$$\boxed{u_t = \frac{h}{2} u_{xx}}$$

que é um problmea parabólico (equação do calor).

Se u_1 e u_2 são duas soluções da equação do calor, então $u = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2$ também é solução. Existem soluções de (2) tais que

$$u_1 = e^{-\frac{w_1}{h}}, \quad u_2 = e^{-\frac{w_2}{h}} \quad \text{e} \quad u = e^{-\frac{w}{h}},$$

Assim

$$\begin{aligned} e^{-\frac{w}{h}} &= \alpha_1 e^{-w_1/h} + \alpha_2 e^{-w_2/h} \\ w &= -h \log\left(e^{-(w_1+\lambda_1/h} + e^{-(w_2+\lambda_2/h}\right) \end{aligned}$$

<u>Teorema</u>: Equação (2) é linear no anel $(\mathbb{R}, \oplus, \odot)$, ou

$$\begin{aligned} a \odot b &= a + b \\ a \oplus b &= -h\left(\log\left(e^{-\frac{a}{h}} + e^{-\frac{b}{h}}\right)\right) \end{aligned}$$

e operador resolvente e autoadjunto em relção ao produto escalar da forma:

$$(w_1, w_2) = -h \log \int e^{-(w_1+w_2)/h}\, \mathrm{d}x$$

$h \to 0$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 = 0 \qquad \text{Equação de Hamilton}$$

$$\begin{aligned} a \oplus b &\to \min(a, b) \\ a \oplus \infty &= a \end{aligned}$$

Aula 3 - 15/01/2025

Resumo: condições transparentes

A palestra é dedicada à derivação das condições de contorno de Higdon para as equações de onda. Seguimos a abordagem de Majda e Engquist [2] usando decomposições de Taylor e Pade do raiz quadrada do operador diferencial. Depois disso, formulamos as condições de alta ordem de Higdon [3] de forma fenomenológica. Veja as cópias dos artigos no Google Drive do curso.

Notas parciais da aula

$$\frac{1}{c^2}u_{tt} - u_{xx} = 0$$

Cuja solução geral é

$$u = f(x - ct) + g(x + ct)$$

Inserir figura

$$\boxed{\frac{1}{c}u_t - u_x = 0}$$

$$\begin{aligned} &u_t = -cf' \\ &u_x f =' \\ &\boxed{\frac{1}{c}u_t + u_x = 0} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \\ \left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - -\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) u = 0 \\ \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\right) u = 0 \end{aligned}$$

$\mathbb{R}^{2+} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x > 0\right\}$

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = 0$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \left(\sqrt{\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)}\right)^2 u = 0$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} - \sqrt{\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - -\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} - \sqrt{\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)}\right) u = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \pm \sqrt{\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - -\frac{\partial^2}{\partial y^2}}\ u = 0$$

$$\sqrt{a+b} \ \sim \ \sqrt{a} \qquad \text{se } b \text{ é pequeno}$$

$$\sqrt{a+b} \ \sim \ \sqrt{a}\sqrt{1+\frac{b}{a}} \ = \ \sqrt{a}\left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{b}{a}\right) - \frac{1}{8}\frac{b^2}{a^2} + \dots\right)$$

$$\sqrt{a+b} \ = \ \sqrt{a} + \frac{1}{2}\frac{b}{\sqrt{a}}$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial x} \pm \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{2}\frac{{\partial^2}/{\partial y^2}}{\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}}\right)\right] u$$

$$\left[\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x} \pm \left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\right] u = 0$$

$$\boxed{\frac{1}{c}u_{xt} \pm \frac{1}{c^2}u_{tt} \mp \frac{1}{2}u_{yy} = 0}$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{c}u_{xt} \pm \frac{1}{c^2}u_{tt} \mp \frac{1}{2}\left(\frac{1}{c^2}u_{tt} - u_{xx}\right) = 0 \\
&\frac{1}{c}u_{xt} \pm \frac{1}{2}\frac{1}{c^2}u_{tt} \pm u_{xx} = 0 \quad \times 2 \\
\Rightarrow \quad &\frac{2u_{xt}}{c} \pm \frac{1}{c^2}u_{tt} \pm u_{xx} = 0 \\
&\frac{1}{c}u_{tt} \pm \frac{2u_{xt}}{c} + u_{xx} = 0 \\
&\left(\frac{\partial}{\partial t} \pm \frac{\partial}{\partial x}\right)^2 u = 0 \\
&\prod_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{c}\cos\alpha_j\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\right)u = 0
\end{aligned}
$$

$x \geq 0$

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{c^2}u_{tt} - u_{xx} - u_{yy} \;=\; 0 \\
&\mathcal{F}_t : f(t) \mapsto \hat{f}(\omega) \\
&\mathcal{F}_y : f(y) \mapsto \hat{f}(\eta) \\
-&\frac{\omega^2}{c^2}\hat{u} - \hat{u}_{xx} + \eta^2\hat{u} = 0
\end{aligned}
$$

onde $\hat{u} = \hat{u}(x,\eta,\omega)$ $\Rightarrow$ Solução de duas exponenciais com coeficintes em função de η e ω.

$$\hat{u} = C_1(\eta,\omega)e^{\sqrt{\omega^2/c^2-\eta^2}x} + C_2(\eta,\omega)e^{-\sqrt{\omega^2/c^2-\eta^2}x}$$

Condição de Dirichlet

(a)

$$u|_{x=0} = 0 \quad , \quad \hat{u}|_{x=0} \Rightarrow C_1 = -C_2$$

que significa uma onda incidente na fronteira e outra refletida.

Coeficiente de reflexão $|R|= 1$.

$$\hat{u}(x,\eta,\omega) = C(\eta,\omega)\left(e^{i\sqrt{\omega^2/c^2-\eta^2}x} - e^{-i\sqrt{\omega^2/c^2-\eta^2}x}\right)$$

$$
\begin{aligned}
u(x,y,t) &= \mathcal{F}_\omega^{-1}\mathcal{F}_\eta^{-1}\left(\hat{u}\right) \\
u(x,y,t) &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left(e^{i\sqrt{\omega^2/c^2-\eta^2}x} - e^{-i\sqrt{\omega^2/c^2-\eta^2}x}\right)e^{i\omega t}e^{i\eta y}C(\eta,\omega)\ \mathrm{d}\omega\mathrm{d}\eta \\
&= e^{\pm i\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2}-\eta^2}x+i\omega t+i\eta y}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\pm\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2}-\eta^2}x+\eta y &= -\frac{\omega}{c}\ ct \\
\pm\frac{\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2}-\eta^2}}{\frac{\omega}{c}}x+\frac{\eta}{\frac{\omega}{c}} &= -ct
\end{aligned}
$$

INSERIR FIGURA

$$
\frac{\eta}{\frac{\omega}{c}} = \operatorname{sen}\alpha \quad , \quad \pm\frac{\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2}-\eta^2}}{\frac{\omega}{c}} = \cos\alpha
$$

$$
\pm(\cos\alpha)x + (\operatorname{sen}\alpha)y = -ct
$$

(b) $x = 0$

$$
\frac{1}{c}u_t - u_x = 0
$$

$$
\begin{aligned}
&u = \left(C_1 e^{i\sqrt{\omega^2/c^2-\eta^2}x} + C_2 e^{-i\sqrt{\omega^2/c^2-\eta^2}x}\right)e^{i\eta y}\cdot e^{i\omega t} \\
&\frac{\omega}{c}u - \left(C_1\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2}-\eta^2}e^{i\sqrt{\omega^2/c^2-\eta^2}x+i\eta y+i\omega t} - C_2\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2}-\eta^2}e^{-i\sqrt{\omega^2/c^2-\eta^2}x+i\eta y+i\omega t}\right) \\
&\frac{\omega}{c}\left(C_1+C_2\right) - \left(C_1\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2}-\eta^2} - C_2\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2}-\eta^2}\right) \ = \ 0 \\
&C_1 + c_2 - C_1\cos\alpha + C_2\cos\alpha \ = \ 0 \\
&C_2(1+\cos\alpha) = (\cos\alpha - 1)C_1 \\
&\boxed{C_2 = \frac{\cos\alpha - 1}{1+\cos\alpha}C_1}
\end{aligned}
$$

<u>Exercício</u>: Calcular os coeficientes de reflexão para condições:

(i) Odrem 0:

$$R = \left|\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}\right| \leftrightarrow \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\right) \qquad \alpha = 45^\circ$$

(ii) Odrem 1:

$$R = \left|\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}\right|^2 \leftrightarrow \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\right)^2 u \ = \ 0$$

$$1 + f'(x_0)\frac{x}{1!} + f''(x_0)\frac{x^2}{2!} + O(x^3) = \frac{1+\alpha x}{1+\beta x}$$

$$\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + O(x^3) = \frac{1+\alpha x}{1+\beta x} + O(x^3)$$

$$(1+\beta x)\left(1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2\right) = 1 + \alpha x + O(x^3)$$

$$\begin{aligned} x^0 \ &: \ 1 = 1 \\ x^1 \ &: \ \frac{1}{2}x + \beta x = \alpha x \quad \therefore \quad \alpha = \frac{3}{4} \\ x^2 \ &: \ -\frac{1}{8} + \frac{1}{2}\beta x^2 = 0 \quad \therefore \quad \beta = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Assim

$$\sqrt{1+x} \approx \frac{1+0.75x}{1+0.25x}$$

Aula 4 - 16/01/2025

Resumo: Condições de transparencia de Higdon de ordem arbitrária

Nos derivamos as condições de contorno absorventes de Hidgon de alta ordem [3] para a equação de onda usando representação de fração contínua da série de Padé para a raiz quadrada. Provamos que o resultado é a condição de contorno de ordem superior de Higdon por indução matemática.

Também discutimos a boa colocação do problema misto para as equações de onda com as condições de contorno de Higdon. As provas podem ser encontradas nos artigos de Kreiss [4] e Gordienko.

Notas

$$
\begin{aligned}
y_{\text{p-l}} : \partial_x^2 &\;+\; \frac{\omega^2}{c^2} - \eta^2 = 0 \\
\partial_x^2 &= -\left(\frac{\omega^2}{c^2} - \eta^2\right) \\
\partial_x &= i\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \eta^2} \\
\partial_x &= \pm i\frac{\omega}{c}\sqrt{1 - \frac{\eta^2}{\omega^2}c} \\
\text{BC}^0 \quad \frac{c}{i\omega}\partial_x &= P_0 \\
\frac{c}{i\omega} - \partial_x &= 1 \qquad \times\frac{i\omega}{c} \\
\left(\partial_x - \frac{i\omega}{c}\right)u &= 0 \\
\left(\partial_x - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right)u &= 0 \qquad \text{revisar últimas 3 linhas}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{BC}^1: \quad \frac{c}{i\omega}\partial_x &= P_1 n = 1 - \frac{1}{2}\frac{c^2\eta^2}{\omega^2} \\
* \left(\frac{\omega^2}{c^2}\right) \quad i\frac{\omega}{c}\partial_x &= -\frac{\omega^2}{c^2} + \frac{1}{2}\eta^2 \\
i\frac{\omega}{c}\partial_x &= -\frac{\omega^2}{c^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{\omega^2}{c^2} + \partial_x^2\right) \\
+ \quad & \frac{1}{2}\frac{\omega^2}{c^2} + i\frac{\omega}{c}\partial_x - \frac{1}{2}\partial_x^2 = 0 \\
& \frac{1}{2}\left(\partial_x - \frac{i\omega}{c}\right)^2 = 0
\end{aligned}
$$

Portanto, nós temos

<u>**Teorema:**</u> A equação

$$\left(\frac{c}{i\omega}\partial_x\right) u = P_k u$$

multiplicada por $\dfrac{i\omega}{c}$ é equivalente a condição de Higdon:

$$\left(\partial_x - \frac{i\omega}{c}\right)^{k+1} u = 0.$$

<u>Demonstração</u>: Suponha que

$$\left(\frac{i\omega}{c}\right)^k \left(\frac{c}{i\omega}\partial_x u - P_{k-1}u\right) = \left(\partial_x - \frac{i\omega}{c}\right)^k u$$

Para k temos que demonstrar que

$$\frac{c}{i\omega}\frac{\partial}{\partial x}u = \left(1 - \frac{c^2\eta^2/\omega^2}{1 + P_{k-1}}\right) u$$

é equivalente

$$\left(\partial_x - \frac{i\omega}{c}\right)^{k+1} u = 0$$

$$
\begin{aligned}
(1 + P_{k-1})\frac{c}{i\omega}\frac{\partial}{\partial x}u &= (1 + P_{k-1})u - \frac{c^2\eta^2}{\omega^2}u \\
\left(\frac{c}{i\omega}\frac{\partial}{\partial x} - 1\right)(1 + P_{k-1}) &= -\frac{c^2}{\omega^2}\left(\frac{\omega^2}{c^2} + \partial_x^2\right) u
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{i\omega}{c}\right) P_{k-1} \left(\frac{i\omega}{c}\right)^k + \left(\frac{i\omega}{c}\right)^k \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{i\omega}{c}\right) &= -\left(\frac{i\omega}{c}\right)^{k+1} + \left(\frac{i\omega}{c}\right)^{k-1} \partial_x^2 \\
\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{i\omega}{c}\right) P_{k-1} \left(\frac{i\omega}{c}\right)^k - \left(\partial_x - \frac{i\omega}{c}\right) \partial_x \left(\frac{i\omega}{c}\right)^{k-1} &= 0 \\
\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{i\omega}{c}\right) \left(P_{k-1} - \frac{c}{i\omega}\partial_x\right) \left(\frac{i\omega}{c}\right)^k &= 0 \\
\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{i\omega}{c}\right) \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{i\omega}{c}\right)^k &= 0
\end{aligned}
$$

Definição: PDO $P(\partial_{x_1}, \partial_{x_2}, \ldots, \partial_{x_n})u = \mathcal{F}^{-1}\left[P(???)\mathcal{F}[\omega](\xi_1, \ldots, \xi_n)\right](x_1, \ldots, x_n)$
Note que esta definição não funciona se $c = c(x, y)$.

$$
\frac{1}{c^2}u_{ttx} - \frac{1}{4}u_{yyx} - \frac{1}{c^3}u_{ttt} + \frac{3}{4}\frac{1}{c}u_{yyt} = 0
$$

$$
e^{-\sqrt{\xi^2+\eta^2}x+i\xi t+i\eta y} - \sqrt{i+\eta^2}(i\xi)^2 - \frac{1}{4}(i\eta)^2(-1)\sqrt{\xi^2+\eta^2} - \frac{(i\xi)^3}{c^3} - \frac{3}{4}\frac{\eta^2}{c}(i\xi) = 0
$$

Verificar a equação acima

Aula 5 - 22/01/2025

Resumo: condições de transparência com dependência da velocidade da onda ao longo da fronteira

A palestra é uma introdução elementar ao cálculo não comutativo e à quantização de funções de operadores diferenciais (seguimos o livro [5]). Nosso ultimo objetivo neste parte da aula é a derivação da fórmula de Daletskiy-Krein. Introdução simples e concisa está disponível no Google Drive [6].

Depois, usamos essa fórmula para derivar condições de contorno transparentes no caso em que a velocidade da onda depende da variável ao longo do contorno. Seguimos a derivação do artigo [7].

Notas

$$\sqrt{\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2}}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{c^2} &= f(y) \\ f\left(\frac{\partial}{\partial y} g\right) &= f g_y \\ \frac{\partial}{\partial y}(fg) &= f g_y + f_y g \end{aligned}$$

INSERIR FIGURA

$$f(A + \varepsilon B) = f(A) + \varepsilon \overset{2}{B} \frac{f(\overset{3}{A}) - f(\overset{1}{A})}{\overset{3}{A} - \overset{1}{A}} + O(\varepsilon^2)$$

$f(x + \Delta x) = f(x)$ conferir

Na expressão

$$\sqrt{\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}}$$

Considere $A = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$, $\varepsilon B = -\frac{\partial^2}{\partial y^2}$ e $f(x) = \sqrt{x}$, assim,

$$\begin{aligned}
\sqrt{\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}} &= \sqrt{A+\varepsilon B} = \sqrt{A} + \overset{2}{B}\frac{f(\overset{3}{A}) - f(\overset{1}{A})}{\overset{3}{A} - \overset{1}{A}} \\
&= \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} + \overset{2}{B}\frac{\sqrt{\overset{3}{A}} - \sqrt{\overset{1}{A}}}{\overset{3}{A} - \overset{1}{A}} \\
&= \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} + B^2\frac{1}{\sqrt{\overset{3}{A}} + \sqrt{\overset{1}{A}}}
\end{aligned}$$

$$\frac{1}{L} = \int_0^\infty e^{-sL}\ \mathrm{d}s$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} + B^2\int_0^\infty e^{-s\left(\sqrt{\overset{3}{A}}+\sqrt{\overset{1}{A}}\right)}\ \mathrm{d}s \\
&= \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} + \int_0^\infty e^{-s\sqrt{\overset{3}{A}}}B^2 e^{-s\sqrt{\overset{1}{A}}}\ \mathrm{d}s \\
&= \boxed{\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} + \int_0^\infty e^{-s\sqrt{A}}Be^{-s\sqrt{A}}\ \mathrm{d}s}
\end{aligned}$$

$$\boxed{u_x = \sqrt{\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2}}u}$$

$$u_x = \frac{1}{c}u_t + \int_0^\infty e^{-\frac{s}{c}\frac{\partial}{\partial t}}\left(-\frac{\partial}{\partial y^2}\right)e^{-\frac{s}{c}\frac{\partial}{\partial t}}u\ \mathrm{d}s$$

$f(x)$

$e^{a\frac{\partial}{\partial x}}f(x) = f(x+a)$ conferir

$$\begin{aligned}
u_x &= \frac{1}{c}u_t - \int_0^\infty e^{-\frac{s}{c}\frac{\partial}{\partial t}}\left(\frac{\partial}{\partial y^2}\right)u\left(t-\frac{s}{c},x,y\right)u\ \mathrm{d}s \\
u_x &= \frac{1}{c}u_t - \int_0^\infty e^{-\frac{s}{c}\frac{\partial}{\partial t}}\left[u_{yy} + u_{ty}\frac{sc_y}{c^3} + \frac{u_{tt}s^2c_y}{c^3} + u_t s\left(\frac{c_{yy}}{c^3} - 3\frac{(c_y)^2}{c^4}\right)\right]\ \mathrm{d}s
\end{aligned}$$

Note que sendo $c = c(y)$, temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial y}\left(t - \frac{s}{c}, x, y\right) &= u_t\left(-\frac{s}{c}\frac{c_y}{c^2}\right) + u_y \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= u_{yy} + u_t\frac{sc_y}{c^3} + u_{tt}\frac{s^2 c_y}{c^4} + u_t s\left(\frac{c_y}{c^3}\right)_y \end{aligned}$$

Assim

$$\boxed{u_x = \frac{1}{c}u_t \mp \frac{1}{4}\left(c_{yy} - \frac{c_y^2}{c}\right)\int_0^t u(t-s,x,y)\ \mathrm{d}s \mp \int_0^t c u_y(t-s,x,y)\ \mathrm{d}s}$$

Exercício: $e^{A+\varepsilon B} = ?$

Definição 1: Quantização de Funções
É um homomorfismo contínuo

$$\mu_{A_1,\ldots,A_n} : \mathcal{F}_n \to A$$

tais que para funções $F_j(x_1,\ldots,x_n) = x_j$

$$\mu_{A_1,\ldots,A_n}(F_j) = A_j$$

Definição 2: Se a quantização é defnida de tal forma que para cada função forma $F(x_1,\ldots,x_n)$

$$\mu_{A_1,\ldots,A_n}(F) = F_1(A_1)F_2(A_2)\ldots F_n(A_n)$$

esta ?????? é chamada de ????? de Feynmann

$$\mu_{\overset{1}{A}_1,\ldots,\overset{n}{A}_n}(F) = F(\overset{1}{A},\ldots,\overset{n}{A})$$

Exemplo 1: Seja $\mathcal{A}$ - operadores limitados no espaço $\mathcal{H}$. $\mathcal{F}_n$ - espaço linear das funções inteiras $O(\mathbb{C}^n)$.
Quantização de Feynmann:

$$\mu_{\overset{1}{A}_1,\ldots,\overset{n}{A}_n}(F) = \mu\left(\sum^{\infty} a_{j_1\ldots j_n} x_1^{j_1}\ldots x_n^{j_n}\right) = \sum_{j_1,\ldots,j_n}^{\infty} a_{j_1\ldots j_n} A_n^{j_n}\ldots A_2^{j_2}A_1^{j_1}$$

Exemplo 2: Seja $\mathcal{A}$ a álgebra dos operadores auto adjuntos limitados em $\mathcal{H}$. Seja $\mathcal{F}_n$ a álgebra da funções contínuas $C(\mathbb{R}^n)$.

$$f(A) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) \mathrm{d}E_\lambda(A)$$

$$f(\overset{1}{A}, \dots, \overset{n}{A}) = \int_{-\infty}^{\infty} f(A_1, \dots, A_n)\ \mathrm{d}E_{\lambda_n}(A_n) \dots \mathrm{d}E_{\lambda_1}(A_1)$$

$$F\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) = ?$$

$$F(\alpha, \beta) = \alpha\beta$$

$$F\left(\overset{1}{x}, \frac{\overset{2}{\partial}}{\partial x}\right) g \ = \ \partial_x(xg) \qquad , \qquad F\left(\overset{Z}{x}, \frac{\overset{1}{\partial}}{\partial x}\right) = xg_x$$

$$F_w(x, \partial_x) = \frac{x\partial_x + \partial_x x}{2}$$

$$L_A : B \mapsto AB$$

$$R_A : B \mapsto BA$$

Representação regular esquerda da álgebra $\mathcal{A}$

$$\begin{aligned} L : \mathcal{A} &\to \mathcal{L}(\mathcal{A}) \\ A &\mapsto L_A \end{aligned}$$

onde $\mathcal{L}(\mathcal{A})$ é a álgebra dos operadores contínuos lineares.

Definição: Seja $\mathcal{A}$ a álgebra dos operadores lineares.
A aplicação $\mathcal{D} : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ é chamada diferenciação se ela satisfaz a regra de Leibniz,

$$\mathcal{D}(uv) = (\mathcal{D}u)v + u\mathcal{D}v$$

Teorema: Seja $A \in \mathcal{A}$ um operador tal que $f(A)$ é definido. Se $\mathcal{D}$ é diferenciação de $\mathcal{A}$. Então

$$
\begin{aligned}
\mathcal{D}[f(A)] &= {}^2[\mathcal{D}A]\frac{\delta f}{\delta x}(\overset{1}{A},\overset{3}{A}) \\
f(x) \to \frac{\delta f}{\delta x}(x,y) &= \begin{cases} \dfrac{f(y)-f(x)}{y-x} & \\ f'(x), & x = y \end{cases}
\end{aligned}
$$

Consideramos álgebra $\mathcal{A}_{\{t\}}$ a algebra das famílias suaves $A(t)$ das $A(t) \in \mathcal{A}$

$$
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} : \mathcal{A}_{\{t\}} \to \mathcal{A}_{\{t\}}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}f(A(t))}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}\overset{2}{A}(t)}{\mathrm{d}t}\frac{\delta f(\overset{3}{A},\overset{1}{A})}{\delta x} = \\
&= \overset{2}{A}{}'(t)\frac{\delta f(\overset{3}{A},\overset{1}{A})}{\delta x} \\
\frac{\mathrm{d}f(A+\varepsilon B)}{\mathrm{d}\varepsilon} &= \overset{2}{B}\frac{\delta f\left({}^1[A+\varepsilon B],{}^3[A+\varepsilon B]\right)}{\delta x} \\
\left.\frac{\mathrm{d}f(A+\varepsilon B)}{\mathrm{d}\varepsilon}\right|_{\varepsilon\to 0} &= \overset{2}{B}\frac{\delta f}{\delta x}(\overset{1}{A},\overset{3}{A})
\end{aligned}
$$

Aula 6 - 23/01/2025

Resumo: equação da onda com amortecimento, derivação e propriedades

Falamos sobre a equação de onda com atenuação viscoelástica. A equação é derivada do sistema de viscoelasticidade (desprezando ondas de cisalhamento, isto é, para um fluido viscoelástico). Mostramos que a equação de onda neste caso assume uma forma de uma equação diferencial integral contendo uma integral do tipo convolução no tempo (em caso de dependência arbitrária da taxa de atenuação na frequência). A derivação segue o artigo de pesquisa disponível no Google Drive [8].

Aula 7 - 29/01/2025

Resumo: soluções fundamentais de equação de Helmhotz, condições de radiação, modos normais

A aula é dedicada às propriedades básicas de solução fundamental de equação de Helmholtz. Lembramos e derivamos fundações de teoria de distribuições (delta de Dirac). Consideramos soluções em dimensão espacial 1, 2, 3. Falamos também sobre as condições de radiação de Sommerfeld e de Sveshnikov e sobre existência e unicidade de soluções de equação de Helmholtz no caso das guias de ondas que são infinitas em algumas coordenadas espaciais (demonstrações das teoremas no caso mais geral podem ser encontrados nos artigos disponíveis no Google Drive [9]). Derivamos a fórmula mais simples para solução da equação de Helmholtz na forma de serie em modos normais em dimensão espacial 2 na guia de ondas homogênea cujos parâmetros não dependem de x [10]:

$$u(x,y) = \frac{\mathrm{i}}{2}\sum_{j=1}^{M} \phi_j(z)\phi_j(z_s)\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_j|x|}}{k_j}\,. \tag{7}$$

Notas da aula

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{zz} + \dfrac{\omega^2}{c^2}u = -\delta(x)\delta(z) \\ u(z=0) = 0 \\ u(z=H) = 0 \end{cases} \tag{8}$$

Distribuição

Dlta de Dirac

$$\delta(x-x_0) = \begin{cases} 0, & \text{se } \; x \neq x_0 \\ +\infty, & \text{se } \; x = x_0 \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-x_0)\,\mathrm{d}x = 1$$

Afirmação 1:

$$\delta(x-x_0) = \lim_{b\to 0}\frac{1}{b\sqrt{\pi}}e^{-\frac{(x-x_0)^2}{b^2}}$$

Afirmação 2:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-x_0)\ \mathrm{d}x = f(x_0)$$

Demonstração: ...

Definição: Seja $\mathcal{F}\left(\overset{2}{t}, \frac{\overset{1}{\partial}}{\partial t}, \overset{4}{x}\frac{\overset{3}{\partial}}{\partial x}, \overset{6}{y}\frac{\overset{5}{\partial}}{\partial y}, \overset{8}{z}\frac{\overset{7}{\partial}}{\partial z}\right) u = 0$ uma equação diferencial homogenea.
A solução da equação

$$\mathcal{F}u = \delta(t)\delta(x)\delta(y)\delta(z)$$

é chamada solução fundamental do operador $\mathcal{F}$.

Afirmação 3: Suponha que $\mathscr{L}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ seja um operador diferencial com coeficientes constantes. A solução da equação

$$\mathscr{L}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) u = v$$

pode ser representada na forma

$$u = F * v = \int_{-\infty}^{\infty} F(x-\xi)v(\xi)\mathrm{d}\xi \tag{9}$$

onde $F(x)$ é a solução fundamental para $\mathscr{L}$.

Propriedades:

i) $\mathscr{L}(u) * v = (\mathscr{L}u) * v$

ii) $\mathscr{L}\left(F * v\right) = \mathscr{L}\left(F\right) * v = \delta * v = v$

Equação em dimensão espacial 1 $(1\ \mathcal{D})$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{c^2}u_{tt} - u_{xx} &= \delta(x)f(t) \\
-\frac{\omega^2}{c^2}\hat{u} - \hat{u}_{xx} &= \delta(x)\hat{f}(\omega) \\
\hat{u}_{xx} + \frac{\omega^2}{c^2}\hat{u} &= -\delta(x)\hat{f}(\omega) \\
\hat{u}_{xx} + \frac{\omega^2}{c^2}\hat{u} &= \pm\delta(x)
\end{aligned}$$

Condições de contorno de Sommerfeld de radiação:

Só há ondas se propagando da fonte até o infinito (emanando da fonte).

$$\hat{u}(x)e^{-i\omega t} \qquad \frac{\omega}{c} = k$$
$$\hat{u} = C_1 e^{ikx} + C_2 e^{-ikx}$$
$$u = C_1 e^{ikx-i\omega t} + C_2 e^{-ikx-i\omega t}$$

note que em $+\infty$ devemos ter apenas o termo com a primeira expondencial e em $-\infty$ devemos ter apenas o termo com a segunda exponencial.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\partial}{\partial|x|} - ik\right)\hat{u} = 0$$

<u>Exercício 1</u>: Encontrar a solução fundamental do problema

$$\begin{cases} u_{xx} + k^2 u = \delta(x) \\ \lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{\partial}{\partial|x|} - ik\right) u = 0 \end{cases}$$

Usando a aproximação para a função delta de Dirac

$$u_{xx} + k^2 u = \frac{1}{\sqrt{\pi}b} e^{-x^2/b^2}$$

Vamos resolver esta equação pelo *método da variação dos parâmetros.*

$$u = \underbrace{C_1(x)\,\text{sen}\,(kx) + C_2(x)\cos(x)}_{u_h}$$

$$u' = \boxed{C_1'(x)\,\text{sen}\,kx + C_2'(x)\cos kx} + kC_1(x)\cos kx - kC_2(x)\,\text{sen}\,kx$$

Solução geral:

$$u = \frac{1}{4k} e^{-\frac{1}{4}b^2k^2} \left[\operatorname{sen}(kx) \cdot \operatorname{Erf}\left(\frac{x}{b} + \frac{ibk}{2} \right) - i \cos(kx) \cdot \operatorname{Erf}\left(\frac{x}{b} + \frac{ibk}{2} \right) - \operatorname{sen}(kx) \right.$$
$$\left. \cdot \operatorname{Erf}\left(-\frac{x}{b} + \frac{ibk}{2} \right) - i \cos(kx) \cdot \operatorname{Erf}\left(-\frac{x}{b} + \frac{ibk}{2} \right) \right] + C_1 e^{ikx} + C_2 e^{-ikix} \tag{10}$$

onde a função $\operatorname{Erf}(x)$ é definida por:

$$\boxed{\operatorname{Erf}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\infty}^{x} e^{-x^2} \, \mathrm{d}x}$$

ou

$$\boxed{\operatorname{Erf}\left(\frac{x}{b}\right) = \frac{1}{b\sqrt{\pi}} \int_{\infty}^{x} e^{-\frac{x^2}{b^2}} \, \mathrm{d}x}$$

No limite quando $b \to 0$

$$u(x) = \frac{1}{4k} \left(-i2H(x)(\cos kx + i \operatorname{sen} kx) - i2H(x)(\cos kx - i \operatorname{sen} kx) + \tilde{C}_1 e^{ikx} + \tilde{C}_2 e^{-ikx} \right)$$

$$u(x) = \begin{cases} -\dfrac{i}{2k} e^{ikx}, & x \geq 0 \\ -\dfrac{i}{2k} e^{-ikx}, & x \leq 0 \end{cases} + \tilde{C}_1 e^{ikx} + \tilde{C}_2 e^{-ikx}$$

ao impormos a condição de Sommerfeld temos $\tilde{C}_1 = \tilde{C}_2 = 0$. Assim.

$$u(x) = \mp \frac{i}{2k} e^{i} k|x| \tag{11}$$

Observação: Note que esta solução é contínua em $x = 0$ mas não é diferenciável neste ponto, e esta não diferenciabilidade em $x = 0$ acontece devido a função $\delta(x)$.

Problema de acústica marítma:

$$u_{xx} + u_{zz} + \frac{\omega^2}{c^2} u = -\delta(x)\delta(z - z_0)$$

INSERIR FIGURA

Considerando $c = c(z)$.
Vamos resolver a equação

$$u_{xx} + u_{zz} + \frac{\omega^2}{c^2} u == 0 \tag{12}$$

pelo método da separação de variáveis (método de Fourier).
Consireando a função $u(x,z)$ na forma

$$u = A(x)\varphi(z) \tag{13}$$

Substituindo a expressão acima em (12) temos:

$$\begin{aligned} A_{xx}\varphi + A\varphi_{zz} + \frac{\omega^2}{c^2}A\varphi &= 0 \qquad \div\ A\varphi \\ \underbrace{\frac{A_{xx}}{A}}_{\text{dep. de } x} + \underbrace{\frac{\varphi_{zz}}{\varphi} + \frac{\omega^2}{c}}_{\text{dep. de } z} &= 0 \end{aligned}$$

$$-\frac{A_{xx}}{A} = k^2 \qquad , \qquad \frac{\varphi_{zz}}{\varphi} + \frac{\omega^2}{c} = k^2$$

O Problema para $\varphi(z)$ é um problema de Sturm-Liouville e o parâmetro k é chamado de parâmetro espectral.

$$\begin{cases} \varphi_{zz} + \frac{\omega^2}{c^2}\varphi = k^2\varphi \\ \varphi(0) = 0 \\ \varphi(H) = 0 \end{cases} \tag{14}$$

Propriedade do parâmetro espectral e das autofunções:

- $\left\{k_j^2\right\}$ - Espectro discreto;
- $\{\varphi_j\}$ - Base ortogonal de autofunções as quais pertencel ao espaço $\mathrm{L}^2[0,H]$.

Cuja solução geral é da forma

$$\boxed{u(x,z) = \sum_{j=1}^{\infty} A_j(x)\varphi_j(z)}$$

<u>Exercício 2</u>: Obter as soluções de (14) diferentes das soluções constantes.

i) Quais os autovalores k?

ii) Quais as autofunções $\varphi_j(z)$?

Aula 8 - 30/01/2025

Nesta aula...

$$k_j = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\pi^2 j^2}{H^2}}$$

$j = 1, \ldots, M \ \rightarrow \ k_j$ real,
$j = M + 1, \dot{;}\infty \ \rightarrow \ k_j$ imaginários.

$$A_{xx} + k^2 A = 0$$
$$A = e^{\pm i k_j x}$$

$$\begin{aligned} A_j(x)\varphi_j(z) &= e^{ik_jx}\,\mathrm{sen}\,(\beta z = e^{ik_jx}\left(\frac{e^{i\beta z} - e^{-i\beta z}}{2i}\right) \\ &= C\left(e^{i(k_jx+\beta_jz} - e^{i(k_jx-\beta_jz}\right) \quad \Rightarrow \quad \text{onda olana} \end{aligned}$$

INSERIR FIGURA

Condição de interferência construtiva
Relacção de dispersão $\Rightarrow$ Relaciona ??? com número de onda horizontal.

$$k_j = k_j(\omega)$$

Se $j = M + 1, \ldots, infty$

$$k_j = i\delta_j$$

$$\begin{aligned} A_j(x)\varphi_j(z) &= e^{i(i\delta_j)x}\,\mathrm{sen}\,(\beta z) \\ &= e^{-\delta_j x}\,\mathrm{sen}\,(\beta z) \end{aligned}$$

$\{\varphi_j(z)\}$ formam uma base ortogonal para $\mathbf{L}^2(0, H)$

$$(f, g) = \int_0^H f(z) \cdot g(z) \ \mathrm{d}z$$

$$u(x, z) = \sum_{j=1} A_j(x)\varphi_j(z)$$

$$(A_j\varphi_j)_x x + (A_j\varphi_j)_{zz} + \frac{\omega^2}{c^2}\sum_{j=1} A_j\varphi_j = -\delta(x)\delta(z-z_0)$$

$$(A_{j_{xx}}\varphi_j) + \left(\sum A_j\varphi_{j_{zz}}\right) + \frac{\omega^2}{c^2}\sum_{j=1} A_j\varphi_j = -\delta(x)\delta(z-z_0)$$

$$\sum_{j=1}^{\infty}\left[A_{j_{xx}}\varphi_j + A_j\left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\right)\varphi_j + \frac{\omega^2}{c^2}A_j\varphi_j\right] \;=\; +\frac{\omega^2}{c^2}\sum_{j=1} A_j\varphi_j = -\delta(x)\delta(z-z_0)$$

Tomando o produto interno com φ_m

$$\varphi_{mj} = \begin{cases} 0, & j \neq m \\ 1, & j = m \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
&\left(A_{m_{xx}} + A_m k_m^2\right)(\varphi_m, \varphi_m) = -\delta(x)\varphi_m(z_0) \\
&A_{m_{xx}} + k_m^2 A_m = -\delta(x)\varphi_m(z_0) \quad (*) \\
&A_m(x) = \frac{i\varphi_m(z_0)}{2k_m}e^{ik_m|x|}
\end{aligned}$$

$(*)$ Precisamos impor condições de radiação análogas às condições de radiação de Sommerfeld.

Solução geral:

$$\boxed{u(x,z) = \frac{i}{2}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\varphi_j(z_0)}{}\varphi_j(z)\frac{e^{ik_j|x|}}{k_j}}$$

Observações:

- Pode truncar a solução em $j = M$;
- A solução truncada não funciona bem perto da fonte.

Equação de Helmotz no Espaço

$$c = c(z)$$

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} + \frac{\omega^2}{c^2}u = -\delta(x)\delta(y)\delta(z-z_0)$$

cuja solução será na forma:

$$u = A(x,y) \cdot \varphi(z)$$

$$\begin{cases} \varphi_{j_{zz}} + \dfrac{\omega^2}{c^2}\varphi_j = k_j^2 \varphi_j \\ \varphi_j(0) = 0 \\ \varphi_j(H) = 0 \end{cases}$$

$$\Delta_2 A_j + k_j^2 A_j = -\varphi_j(z_0)\delta(x)\delta(y)$$

Fazendo a mudança para coordenadas polares

$$A_{j_{rr}} + \frac{1}{r}A_{j_r} + k_j^2 A_j = -\frac{\delta(z_0)\delta(r)}{2\pi r}$$

Exercício 1: Provar que a mudança de coordenadas polares de $\delta(x)\delta(y) = \dfrac{1}{2\pi r}\delta(r)$.

Dica: $\displaystyle\iint f(\sqrt{x^2+y^2})\delta(x)\delta(y)\ \mathrm{d}y\mathrm{d}x$

$$A_j(r) = \frac{i}{4}\varphi_j(z_0)H_0^{(1,2)}(k_j r)$$

$H_0^{(1,2)} = \dfrac{e^{\pm i k_j r}}{\sqrt{k_j \gamma}} \Rightarrow$ expressão assintótica para r grandes, onde γ é o fator de divergência.

O sinal $+$ na exponencial acima corresponde ao número 1 e o sinal $-$ ao número 2.

àra atemder às condições de radiação escolher apenas o número 1. Assim, a solução da equação de Helmotz será

$$u(x,y,z) = \frac{i}{4}\sum_{j=1}^{M} \varphi(z_0)\varphi(z)H_0^{(1)}(\gamma_j r)$$

onde $r = \sqrt{x^2+y^2}$.

Teorema: Consideramos a equação de Helmotz de dimensão espacial

$$\Delta u + \frac{\omega^2}{c^2(x,z)} = f(x,z)$$

Suponha que:

1. Para $|x|> L$ tem-se $c(x,z) = c^\infty(z)$ (dependência de z no infinito;
2. $f(x,z) = 0$ para $|x|> L$.

INSERIR FIGURA

Todas as fontes estão situadas entre $-L$ e L.

Suponha que as condições parciais de radiação são satisfeitas

$$\frac{\partial}{\partial |x|} u_j - i k_j^\infty u_j = 0,$$

onde u_j é a projeção da solução $u(x,z)$ sobre a solução φ_j do problema de Sturm-Liouville $u_j = \left(u(x,z), \varphi_j^\infty\right)$, k_j^∞ números de onda horizontais calculados para $x > L$.

Então existe úmica solução $u(x,z)$ que satisfaz a equação de Helmotz e satisfaz estas condições.

Guia de Pekeris

$$c_2 > c_1$$

INSERIR FIGURA

<u>Exercício 2</u>:

$$\begin{cases} \varphi_{zz} + \dfrac{\omega^2}{c^2}\varphi = k^2\varphi \\ \varphi(0) = 0 \\ \varphi\left(h^+\right) = \varphi\left(h^-\right) \quad \text{(cond. de continuidade da autofunção)} \\ \left(\frac{1}{\rho}\varphi_z\right)\left(h^-\right) = \left(\frac{1}{\rho}\varphi_z\right)\left(h^+\right) \quad \text{(cond. de contorno de veloc. normal)} \\ \varphi(z \to \infty) < \infty \end{cases}$$

Quais os modos possíveis neste caso?

Dica: Considerar duas famílias de soluções:

- 1ª: $\boxed{\dfrac{\omega}{c_2} < k_j < \dfrac{\omega}{c_1}}$, $A_{xx} + k^2(x)A = 0$, aproximação WKB ou WKBJ
- 2ª: $\boxed{0 < k_j < \dfrac{\omega}{c_2}}$, $A_{xx} + \frac{\tilde{k}}{\varepsilon^2}A = 0$

$$A_{=}\left(B_x+\frac{\tilde{\phi}_x}{\varepsilon}B\right)e^{i\phi/\varepsilon}$$

$$A_{xx}=B_{xx}+\frac{2iB_x\tilde{\phi}_x}{\varepsilon}+\frac{i\tilde{\phi}_{xx}B}{\varepsilon}+\frac{\left(i\tilde{\phi}_x\right)^2}{\varepsilon^2}B$$

$$\frac{\tilde{\phi}}{\varepsilon}=\phi$$

$$\frac{1}{\varepsilon^2},\quad \frac{\left(i\tilde{\phi}_x\right)^2}{\varepsilon^2}+\frac{\tilde{k}}{\varepsilon^2}=0$$

$$\tilde{\phi}_x=\pm\tilde{k}(x)$$

$$\tilde{\phi}=\pm\int_0^x k(x)\ \mathrm{d}x \quad \div\,\varepsilon$$

$$\phi=\pm\int_o^x k(x)\ \mathrm{d}x$$

$$\frac{1}{\varepsilon},\ 2B_x\phi_x+\phi_{xx}B=0$$

$$\frac{2B_x}{B}=-\frac{\phi_{xx}}{\phi_x},\quad \text{mas}\ \ \phi_x=k$$

$$\frac{B_x}{B}=-\frac{1}{2}\frac{k_x}{k}$$

Então, integrando amos os membros da igualdade em relação a x, temos:

$$\ln B|_0^x \;=\; \ln\left|\frac{1}{\sqrt{k}}\right|\Big|_0^x$$

$$\ln B(x)-\ln\left(B_0\right) \;=\; \ln\left(\frac{1}{\sqrt{k(x)}}\right)-\ln\left(\frac{1}{\sqrt{k(0)}}\right)$$

$$\boxed{B(x)=B_0\left(\sqrt{\frac{k(o)}{K(x)}}\right)}$$

$$\boxed{u(x,z)\sum\sqrt{\frac{k_j(0)}{k_j(x)}}e^{i\int_0^x k_j(x)\mathrm{d}x}\varphi_j(z)}$$

Aula 9 - 5/02/2025

Mode coupling theory in the general case, coupling coefficients, derivation of mode coupling equations using matrix WKB

Acoplamento dos modos

INSERIR FIGURA

$$
\begin{aligned}
u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} + \frac{\omega^2}{c^2} u &= -\delta(x)\delta(y)\delta(z - z_s) \\
u &= \sum_{j=1}^{\infty} A_j(x, y)\varphi_j(z, x, y)
\end{aligned}
$$

Aula 10 - 6/02/2025

Perturbation theory, including attenuation, group velopcities, etc

Aula 11 - 12/02/2025

Perturbation theory, including attenuation, group velopcities, etc

Incluir anotações sobre teoria d perturbação

$$u_{xx} + u_{zz} + \frac{\omega^2}{c^2} u = 0$$

ω grande

$$\varepsilon = \frac{1}{\omega}$$

$$u = e^{i\omega S(x,z)} \left(A_0(x,z) + \frac{1}{\omega} A_1(x,z) + \dots \right)$$

$$\begin{aligned}
\left(A_j e^{i\omega S}\right)_x &= \left(A_{j_x} + i\omega S_x A_J\right) e^{i\omega S} \\
\left(A_j e^{i\omega S}\right)_{xx} &= \left(A_{j_{xx}} + 2i\omega S_x A_{j_x} + i\omega S_{xx} A_j + (-1)\omega^2 (S_x)^2 A_j\right) e^{i\omega S}
\end{aligned}$$

$\omega^2 : \quad -\left(S_x\right)^2 - \left(S_z\right)^2 + \frac{1}{c^2}$

$\left|\nabla S\right|^2 = \dfrac{1}{c^2}$ Equação de Eikonal ($\iota\kappa\omega\nu$)

ω^1: $2(S_x A_{0_x} + S_z A_{0_z}) + (S_{xx} + S_{zz}) A_0 = 0$

$$\boxed{2\nabla S \cdot \nabla A_0 + \Delta S A_0 = 0}$$ Eq. do Transporte

$$2\nabla S \nabla A_j + \Delta S A_j + \Delta A_j$$ verificar

$$\boxed{u = e^{i\omega s} A_0}$$ Eq. do Transporte

Aproximação acústica geométrica , aproximação semiclássica.

$\alpha(\ell) = (x(\ell), y(\ell))$

$E_a(\ell)\ \|\nabla S(x(\ell), y(\ell))\|$

$$\frac{\mathrm{d}\overline{x}}{\mathrm{d}\ell} = \|c\nabla S\| = 1$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\ell}\left(\frac{1}{c}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\ell}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\ell}(S_x) = S_{xx}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\ell} + S_{xz}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\ell} \\
= \quad & cS_{xx}S_x + cS_{xz}S_z = \frac{c}{2}\left(S_x^2 + S_z^2\right) = \frac{c}{2} = \frac{c}{2}\left(\frac{1}{c^2}\right)_{???} = -\frac{c_z}{c^2} \\
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\ell}\left(\frac{1}{c}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\ell}\right) = -\frac{c_z}{c^2} \\
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\ell}\left(\frac{1}{c}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\ell}\right) = -\frac{1}{c^2}\nabla c \\
&\frac{1}{c}\frac{\mathrm{d}\overline{x}}{\mathrm{d}\ell} = \overline{\xi}
\end{aligned}$$

$$\begin{cases}
\dfrac{\mathrm{d}\overline{\xi}}{\mathrm{d}\ell} = -\dfrac{1}{c^2}\nabla c \\
\dfrac{\mathrm{d}\overline{x}}{\mathrm{d}\ell} = \quad c\overline{\xi}
\end{cases}$$

$$\begin{cases}
\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\ell} = \quad c\xi & \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\ell} = \quad c\eta \\
\dfrac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}\ell} = -\dfrac{c_x}{c^2} & \dfrac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}\ell} = -\dfrac{c_z}{c^2}
\end{cases}$$

$$\boxed{H(\overline{x}, \overline{\xi}) = \frac{c}{2}\left|\overline{\xi}\right|^2 - \frac{1}{c}}$$

$$\begin{cases}
\dfrac{\mathrm{d}x_j}{\mathrm{d}\ell} = \quad H_{\xi_j} \\
\dfrac{\mathrm{d}\xi_j}{\mathrm{d}\ell} = -H_{x_j}
\end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}\ell} &= \nabla S \cdot \frac{\mathrm{d}\overline{x}}{\mathrm{d}\ell} \qquad \mathrm{d}S = \frac{\mathrm{d}\ell}{c} \\
&= \frac{1}{c}\frac{\mathrm{d}\overline{x}}{\mathrm{d}\ell} \cdot \frac{\mathrm{d}\overline{x}}{\mathrm{d}\ell} = \frac{1}{c}
\end{aligned}$$

$$S(x(\ell), z(\ell)) = S(\ell) = \int_0^\ell \frac{\mathrm{d}\ell}{c}$$

onde a expressão acima é o tempo de propagação.

Caso quando $c =$ constante:

$$
\begin{aligned}
\xi &= \xi_0 = \text{constante} \\
\eta &= \eta_0 = \text{constante} \\
x(\ell) &= c\xi_0\ell + x_0 \\
z(\ell) &= c\eta_0\ell + z_0
\end{aligned}
$$

Caso quando $c = c(z)$

$$
\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\ell} = c\xi \qquad \frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}\ell} = 0 \quad \xi = \xi_0
$$

$$
\frac{\frac{dx}{\mathrm{d}\ell}}{c} = \xi_0 = \text{const}
$$

$$
\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\ell} = \operatorname{sen}(\alpha)
$$

$$
\frac{\operatorname{sen}(\alpha(\ell))}{c(\ell)} = \text{const}
$$

$$
\boxed{\frac{\operatorname{sen}\alpha_1}{c_1} = \frac{\operatorname{sen}\alpha_2}{c_2}}
$$

Raios:

- Curvas normais às frentes da onda.
- (proj!) Soluções do sistema de equações de Hamilton.
- Curvas que podem satisfazer a Lei de Snell.
- Curvas satisfazendo o princípio de Fermat.
- Raios são geodésicas para alguma métrica definida por $c(x, z)$

Condições de Newmann

INSERIR FIGURA

Condições de Dirichlet

INSERIR FIGURA

$$
\begin{aligned}
&2\nabla S \nabla A_0 + \Delta S A_0 = 0 \qquad \times A_0 \\
&\nabla \cdot \left(\nabla S A_0^2\right) \\
&\int_{\partial V} \nabla S A_0 \cdot \overline{n} \, \mathrm{d}\sigma = 0
\end{aligned}
$$

INSERIR FIGURAS

$$
\int_{\sigma_1} \left|\nabla S A_0^2\right| \, \mathrm{d}\sigma_1 - \int_{\sigma_2} \left|\nabla S A_0^2\right| \, \mathrm{d}\sigma_2 = 0
$$

$$
\boxed{\int \left|\nabla S A_0^2\right| \, \mathrm{d}\sigma = \mathrm{const}}
$$

$$
\frac{\nabla S A_0^2\Big|_{\sigma_1}}{\nabla S A_0^2\Big|_{\sigma_2}} = \frac{\mathrm{d}\sigma_2}{\mathrm{d}\sigma_1}
$$

INSERIR FIGURA

$$
\begin{aligned}
\Delta\sigma &= \frac{\Delta z}{\cos\theta} = \frac{\Delta x}{\operatorname{sen}\theta} \\
&= \sqrt{\Delta x^2 + \Delta z^2} \\
\frac{\Delta\sigma}{c} \cdot A_0^2(\ell) &= \frac{\Delta x(\ell) A_0^2(\ell)}{c(\ell) \operatorname{sen}(\theta(\ell))} \\
&= \frac{1}{c(\ell)} \left(\frac{\partial x}{\partial \theta_0} \cdot \Delta\theta_0 \right) \frac{A_0^2(\ell)}{\operatorname{sen}(\theta(\ell))} \\
&= \frac{1}{c(\ell)} \frac{x(\ell, \theta_0 + \Delta\theta_0) - x(\ell, \theta_0)}{\Delta\theta_0} A_0 \theta_\ell \frac{A_0^2(\ell)}{\operatorname{sen}(\theta(\ell))} \quad \text{conferir linha}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{A_0\theta_0\ell_0}{c_0} &= 1 \\
A_0^2(\ell) &= \frac{C(\ell)}{c_0}\cdot\frac{\Delta\theta_0}{x(\ell,\theta_0+\Delta\theta_0}\,\mathrm{sen}\,(\theta(\ell))
\end{aligned}
$$

Aula 12 - 13/02/2025

Aula 13 - 19/02/2025

INSERIR FIGURA

Exercício: Deduzir as expressões

$$\Delta\varphi_j = -2\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}x}$$

$$\boxed{\varphi_j' - \varphi = \Delta\varphi_j = -2\frac{\mathrm{d}h_j}{\mathrm{d}x}}$$

$$\begin{aligned}
\Delta\varphi_1 &= -\frac{2\mathrm{d}h_j}{\mathrm{d}x}\cdot\frac{\mathrm{d}\varphi_1}{\mathrm{d}\varphi_j} \\
\frac{\Delta\varphi_1}{\Delta x} &= \frac{-2\frac{\Delta\varphi_2}{\Delta x}\sum\frac{\mathrm{d}h_j}{\mathrm{d}\varphi_j}}{2\sum h_j \operatorname{cotg}\varphi_j}
\end{aligned}$$

$$\begin{cases}
\sum\left(h_j \operatorname{cotg}\varphi_j + \frac{\mathrm{d}h_j}{\mathrm{d}\varphi_j}\right) = 0 \\
\dfrac{\cos\varphi_j}{c_j} = k(\varphi_1) \\
-\dfrac{\operatorname{sen}\varphi_j \mathrm{d}\varphi_j}{c_j} = k'\mathrm{d}\varphi_1
\end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\sum\left(\frac{h_j\cos\varphi_j\mathrm{d}\varphi_j}{c_j}\right) + \frac{\mathrm{d}h_j\operatorname{sen}\varphi_j}{c_j} &= 0 \\
\sum\frac{\mathrm{d}(h_j\operatorname{sen}\varphi_j)}{c_j} &= 0 \\
\sum\frac{\operatorname{sen}\varphi_j\cdot h_j}{c_j} &= T \\
\int_0^H \frac{\operatorname{sen}\varphi(z,x)}{c(z,x)}\,\mathrm{d}z &= T
\end{aligned}$$

$$e^{ik_jx}\varphi_j(z)$$
$$c(z)$$

INSERIR FIGURA

$$\alpha(z) = \arccos\left(\frac{\mathrm{k}}{\frac{!}{\mathrm{c(z)}}}\right)$$

$$u_{xx} + u_{zz} + k^2 u = 0 \qquad k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$$

$$\left(\partial_x + i\sqrt{\partial_z^2 + k^2}\right)\left(\partial_x - i\sqrt{\partial_z^2 + k^2}\right) u = 0$$

$$c = c(z)$$

$$\left(\partial_x - i\sqrt{\partial_z^2 + k^2}\right) u = 0$$

$$u_x = i\sqrt{\partial_z^2 + k^2} u$$

$$u = we^{ikx}$$
$$u(x,z) = w(x,z)e^{ikx}$$
$$w_x = \left(\sqrt{\partial_z^2 + k^2} - k\right) w \qquad k^2(x,z)$$
$$k_0^2 L = \partial_z^2 + ???? - k_0^2$$
$$\boxed{w_x = ik_0\left(\sqrt{1+L} - 1\right) w]}$$

onde podemos usar a aproximções $\dfrac{1 + 0.75L}{1 + 0.25L}$ ou $\dfrac{L}{2}$.

Equação Paraxial

$$w_x = ik_0 \frac{L}{2} w$$

$$w_x = i\cancel{k_0}\frac{\left(\partial_z^2 + k^2 - k_0^2\right)}{k_0^{\cancel{2}}} w$$

$$2ik_0 x_x + w_{zz} + (k^2 - k_0^2)w = 0$$
$$i\hbar\psi_t + \frac{\hbar}{2}\psi_{xx} V(x,t) w = 0 \qquad \text{(eq. de Planck)}$$

Equação de Claerbout

$$\left(1+\frac{1}{4}\right)w_x = ik_0\frac{L}{2}w$$

$$w(x^i, y^i) = w_j$$

$$\begin{aligned}
\frac{\overline{w}_{i+1}-\overline{w}_o}{\Delta x} &= \frac{ik_0}{2}\left(\frac{A_{i+1}\overline{w}_{i+1}+Ai\overline{w}_i}{2}\right)\\
\left(\frac{1}{\Delta x}E-\frac{ik_0}{4}A_{i+1}\right)\overline{w}_{i+1} &= \left(\frac{1}{\Delta x}E+\frac{ik_0}{4}A_i\right)\overline{w}_i\\
\left(E+\frac{1}{4}A_{i+1}\right)\overline{w}_{i+1}-\left(E+\frac{1}{4}A_i\right)\overline{w}_i &= \frac{1k_0}{4}\left(A_{i+1}\overline{w}_{i+1}+A_i\overline{w}\right)\\
\left(\frac{E}{\Delta x}+\frac{1}{4\Delta x}A_{i+1}-\frac{ik_0}{4}A_{i+1}\right)\overline{w}_{i+1} &= \left(\frac{E}{\Delta x}+\frac{1}{4\Delta x}A_i+\frac{ik_0}{4}A_i\right)\overline{w}_i
\end{aligned}$$

$$u_0(z) = u\Big|_{x=0}(x,z) = \begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{k_0}e^{-\frac{k_0}{2}(z-z_0)}}\\ \sqrt{k_0}\left(1.45-0.42k_0\right)^2 e^{-k_0^2(z-z_0)^2}\end{cases}$$

$$Ae^{-\frac{(z-z_0)^2}{\sigma^2}}$$

Aula 14 - 20/02/2025

Considere a equação de Helmotz

$$u_{xx} + u_{zz} + k^2 u = 0$$

$$u_x = i\sqrt{M} \qquad M = \partial_z^2 + k^2$$

$$M = k_0^2(1+L)$$

$$u_x = ik_0\sqrt{1+L}u$$

INSERIR FIGURA

Objetivo: Encontrar u_{n+1} conhecendo u_n.

$$u(x_n + h, z) = \underbrace{\exp\left(ik_0 h\sqrt{1+L}\right)u(x_n, z)}_{P_n}$$

considerando h muito pequeno.

P_n é dependente de k e este por sua vez é dependente de x.

P_n é chamado de propagador.

Método SSP = Split-Step Padé

$P = F(L)$

$F(\xi) = e^{ikh\sqrt{1+\xi}}$

$$P = F(L)e^{ik_0 h}\frac{R_p(L)}{Q_p(L)} = e^{ik_0 h}\left[d_0 + \sum_{k=1}^{p}\frac{d_k}{1+b_k L}\right]$$

onde o número natural p é chamado de odrdem de aproximação de Padé. Assim

$$\overline{u}_{n+1} = e^{ik_0 h}\left(d_0 + \sum_{k=1}^{p}\frac{d_k}{1+\tilde{L}_k}\right)\overline{u}_n$$

$$(1 + b_k\tilde{L})\overline{w}_{n,k} = \overline{u}_n$$

$$\overline{u}_{n+1} = e^{ik_0 h}\left(d_0 + \sum d_k\overline{w}_{n,k}\right)$$

Observações:

- A autofunção do modo é preservada.
- Os problema surgem na fase do modo.

$$e^{ik_j x}\varphi_j(z)$$

$$\begin{aligned} k_0^2 L &= \left(\partial_z^2 + k^2 - k_0^2\right) \\ k^2 &= k^2(z) \qquad \text{parâmetros não variam em } x \\ & A_j(x)\varphi_j(z) \end{aligned}$$

onde $\varphi_j(z)$ é autofunção do problema de Stumr-Liouville.

$$\begin{aligned} L(A,\varphi_j) &= \frac{1}{k_0^2}\left(\underbrace{\partial_z^2\varphi_j + k^2\varphi_j}_{k_k^2\varphi_j} - k_0^2\varphi_j\right)A_j = \frac{k_j^2 - k_0^2}{k_0^2}A_j\varphi_j \\ \sqrt{1+L} - 1 &\approx f(L) \rightarrow \begin{cases} \frac{L}{2} \\ \frac{0{,}5L}{1+0.25L} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_x &= ik_0 f(L) u \\ A_x &= ik_0 f\left(\frac{k_j - k_0^2}{k_0^2}\right)A \qquad (j \text{ omitido}) \end{aligned}$$

$$A_x = A_0 \exp\left[ik_0 f\left(\frac{k_j^2 - k_0^2}{k_0^2}\right)x\right] \qquad \frac{k_j}{k_0} = \cos\alpha$$

Comparação:

$$\begin{aligned} e^{ik_j x} \approx e^{ik_0 x}????? &= e^{ik_0 x\left[1+f\left(\frac{k_j^2-k_0^2}{k_0^2}\right)\right]} \\ &= \exp[ik_0 x(1 + f(-\operatorname{sen}^2\alpha)] \end{aligned}$$

Sendo $f(L) = \dfrac{L}{2}$, então

$$
\begin{aligned}
e^{ik_jx} &\approx e^{\left[ik_0x\left(1-\frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{2}\right)\right]} \\
\Delta P &= x\left(k_j - k_0 + \frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{2}\right) = k_0x\left(\cos\alpha - 1 + \frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{2}\right) \\
&= k_0x\left(1 - \frac{\alpha^2}{2} + \frac{\alpha^4}{4!} - 1 + \frac{\alpha^2}{2} - \frac{\alpha^4}{3}\right) \\
&= kx\alpha^4\left(\frac{1}{24} - \frac{1}{6}\right)
\end{aligned}
$$

INSERIR FIGURA

$$u_{xx} + u - zz + k^2u = 0$$

$X = \varepsilon x$ $\qquad$ $Z = \sqrt{\varepsilon}z$ $\quad$ X e Z $\quad$ variáveis lentas

$\eta = \dfrac{\theta(X,Z)}{\varepsilon}$ $\qquad$ $k^2 = k_0^2 + \nu(x,z)$

$\mathbf{U}(X, Z, \eta) = u(x,z)$

$\mathbf{U} = \left(\mathbf{U}_0 + \varepsilon\mathbf{U}_1 + \varepsilon^2\mathbf{U}_2 + \dots\right)$

1. Recalcular derivadas
2. Inserir tudo na equação de Helmotz
3. Comparação de termos de mesma ordem em ε

Exercício:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} + k_0^2(1 + \varepsilon|E|^2)E = 0$$

Equação de Helmotz não linear

Meios de Kerr - índice de refração é função da intensidade do campo elétrico

<u>Dicas</u>:

$Z = \sqrt{\varepsilon}z$ $\qquad$ $X = \varepsilon x$ $\qquad$ $\eta = \dfrac{\theta(x,z)}{\varepsilon}$

$\varepsilon = \mathcal{E}(X, Z, \eta)$

1.

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} &\to \varepsilon\frac{\partial}{\partial x} + \theta_x\frac{\partial}{\partial \eta}\\ \frac{\partial}{\partial z} &\to \varepsilon^{1/2}\frac{\partial}{\partial z} + \varepsilon^{-1/2}\theta_z\frac{\partial}{\partial \eta}\end{aligned}$$

2.

$$\left[\left(\varepsilon\frac{\partial}{\partial x} + \theta_x\frac{\partial}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\varepsilon^{1/2}\frac{\partial}{\partial z} + \varepsilon^{-1/2}\theta_z\frac{\partial}{\partial \eta}\right)^2 + k_0^2 + \varepsilon\mathbf{U}\right]\left(\mathbf{U}_0 + \varepsilon\mathbf{U}_1 + \varepsilon^2\mathbf{U}_2 + \dots\right) = 0$$

3.

$$\begin{aligned}\varepsilon^{-1} \quad &: \quad (\theta_z)^2\,\mathbf{U}_{0_{\eta\eta}} = 0 \qquad \theta_z = 0 \Rightarrow \theta(X)\\ \varepsilon^{0} \quad &: \quad (\theta_x)^2\,\mathbf{U}_{0_{\eta\eta}} + k_0^2\mathbf{U}_0 = 0\\ \theta_x &= \pm k_0 \qquad \mathbf{U}_0 = e^{i\eta}A_0(x,z)\\ \theta &= K_0 x\\ \varepsilon^{j} \quad &: \quad 2ik_0A_{j_x} + A_{j_{zz}} + \nu A_j + A_{j-1_{xx}} = 0\end{aligned}$$

onde devemos considerar $A_{-1} \equiv 0$.

Condições de interface

$$\begin{aligned}&u^- = u^+ &&A_j^- = A_j^+\\ &u_{\overline{n}}^- = u_{\overline{n}}^+ &&(ik_0Aj - A_{j_z} + h_xA_{j-1_x})^- = (ik_0Aj - A_{j_z} + h_xA_{j-1_x})^+\end{aligned}$$

References

[1] Victor P Maslov. On a new principle of superposition for optimization problems. *Russian Mathematical Surveys*, 42(3):43, 1987.

[2] Björn Engquist and Andrew Majda. Absorbing boundary conditions for numerical simulation of waves. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 74(5):1765–1766, 1977.

[3] Robert L Higdon. Absorbing boundary conditions for difference approximations to the multidimensional wave equation. *Mathematics of computation*, 47(176):437–459, 1986.

[4] Heinz-Otto Kreiss. Initial boundary value problems for hyperbolic systems. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 23(3):277–298, 1970.

[5] Vladimir E Nazaikinskii, Victor E Shatalov, and Boris Yu Sternin. *Methods of noncommutative analysis: theory and applications*, volume 22. Walter de Gruyter, 2011.

[6] VE Nazaikinskii, B Yu Sternin, and VE Shatalov. Introduction to maslov's operational method (non-commutative analysis and differential equations). In *Global Analysis-Studies and Applications V*, pages 81–91. Springer, 2006.

[7] PS Petrov and M Yu Trofimov. A nonstationary form of the range refraction parabolic equation and its application as an artificial boundary condition for the wave equation in a waveguide. *Europhysics letters*, 85(3):34001, 2009.

[8] PS Petrov, AD Zakharenko, and M Yu Trofimov. The wave equation with viscoelastic attenuation and its application in problems of shallow-sea acoustics. *Acoustical Physics*, 58(6):700–707, 2012.

[9] Lihan Liu, Yuehai Qin, Yongzhi Xu, and Yuqiu Zhao. The uniqueness and existence of solutions for the 3-d helmholtz equation in a stratified medium with unbounded perturbation. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 36(15):2033–2047, 2013.

[10] Finn B Jensen, William A Kuperman, Michael B Porter, and Henrik Schmidt. *Computational Ocean Acoustics*. Springer Science & Business Media, 2011.