I teoremi del calcolo differenziale

V BC

"Il calcolo infinitesimale può essere considerato come un'applicazione della dialettica alle relazioni matematiche." — F. Engels

---

1 Teorema di Fermat

1.1 Enunciato

Sia $f(x)$ una funzione definita su un intervallo (a, b), e sia $c \in (a, b)$ un punto estremante di f. Se f è derivabile in c, allora $f'(c) = 0$.

1.2 Note

Il teorema di Fermat ci dice che (formulazioni equivalenti):

- Se c è estremante per $f(x)$, allora $f'(c) = 0$. Non è necessariamente vero l'opposto: infatti, si ha $f'(c) = 0$ anche se c è un punto di flesso;
- Data una funzione $f(x)$ definita in un intervallo contenente il punto c, condizione necessaria ma non sufficente affinchè c sia punto estremante è che sia punto stazionario, ossia che $f'(c) = 0$.

1.3 Dimostrazione

Vedi quanto fatto in classe o libro p. 263. Sul libro, leggere "ipotesi e tesi" p. 264 e "non viceversa" p. 265.

2 Teorema di Rolle

2.1 Enunciato

Sia $f(x)$ una funzione continua in un intervallo chiuso e limitato $[a, b]$, e derivabile al suo interno, ossia in (a, b). Se $f(a) = f(b)$, allora esiste almeno un punto $c \in (a, b)$ tale che ivi la derivata si annulla:

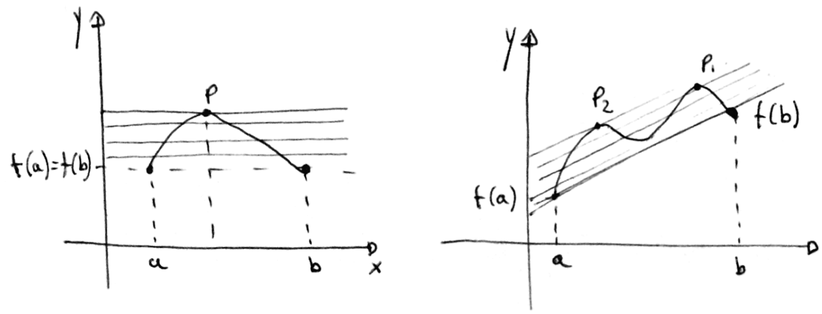

Figure 1: Rappresentazione grafica del significato del teorema di Rolle (sinistra) e del teorema di Lagrange (destra).

$$f'(c) = 0 \tag{1}$$

2.2 Dimostrazione

Segui quanto riportato a p. 265-266. Passaggi essenziali:

1. f continua in intervallo chiuso e limitato $\rightarrow$ Weierstrass $\rightarrow$ la funzione ammette max (M) e min (m) assoluto
2. c, d punti di $[a, b]$ tali che $f(c) = M$, $f(d) = m$. Casi possibili:
   (a) $c = a$, $d = b$. I due punti c e d corrispondono con gli estremi di $[a, b]$. f costante, $f'(c) = 0\ \forall c \in [a, b]$;
   (b) Almeno uno dei due punti (supponiamo si tratti di c) è interno ad $[a, b]$. Punto estremante interno al dominio $\rightarrow$ Teorema di Fermat $\rightarrow$ $f'(c) = 0$.

2.3 Note

Per il teorema di Rolle, nell'intervallo considerato la funzione ha *almeno* un punto c in cui si annulla. Ciò non esclude che ci possano essere *molteplici* punti γ tali che $f'(\gamma) = 0$.

Leggere e capire "ipotesi e tesi" p. 267.

3 Teorema di Lagrange[1]

3.1 Enunciato

Sia $f(x)$ una funzione continua nell'intervallo chiuso e limitato $[a, b]$, e derivabile al suo interno. Allora esiste almeno un punto $c \in (a, b)$ tale che

[1]Nato Giuseppe Lodovico Lagrangia nel 1736 a Torino.

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad (2)$$

3.2 Dimostrazione

Data una costante $K \in \mathbb{R}$, possiamo definire la funzione

$$\phi(x) = f(x) - Kx \quad (3)$$

Dato che $f(x) = x$ è una funzione continua e derivabile in $\mathbb{R}$, ϕ ha le stesse proprietà di f: è continua in $[a, b]$ e derivabile in (a, b). Fissiamo K in modo da poter applicare il *teorema di Rolle*:

$$\phi(a) = \phi(b) \rightarrow f(a) - Ka = f(b) - Kb \rightarrow K = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad (4)$$

Per tale valore di K, Eq. (3) si può riscrivere come

$$\phi(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} x \quad (5)$$

Da cui

$$\phi'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad (6)$$

Per il *teorema di Rolle*, esiste $c \in (a, b)$ tale che $\phi'(c) = 0$. Di conseguenza, da Eq. (6) si ha

$$0 = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad (7)$$

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad (8)$$

3.3 Note

Possiamo considerare il teorema di Rolle come un caso particolare del teorema di Lagrange: infatti se $f(a) = f(b)$ (ipotesi del teorema di Rolle),

$$f'(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad (9)$$

Diventa

$$f'(x) = 0 \quad (10)$$

Come descritto dal teorema di Rolle.

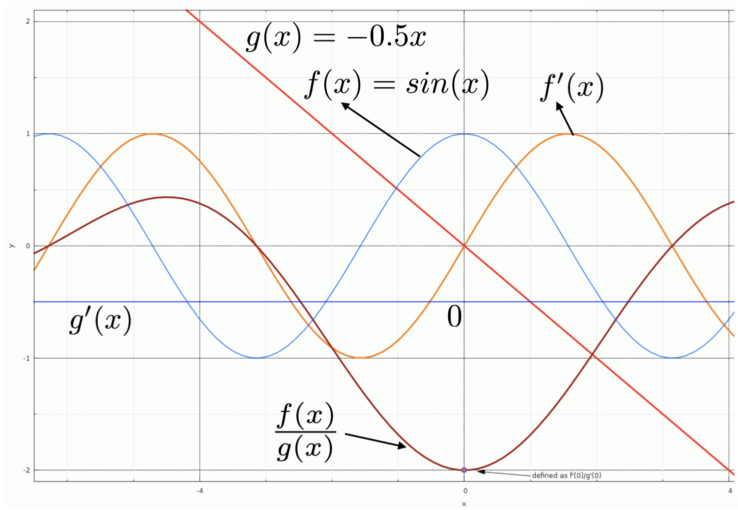

Figure 2: Esempio di applicazione del teorema di de l'Hôpital: la funzione $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = -\frac{sin(x)}{0.5x}$ non è definita in $x = 0$, ma il grafico può essere completato considerando $h'(x) = \frac{f'(x)}{g'(x)} = -\frac{cos(x)}{0.5}$, che è definita in 0.

4 Teorema di de l'Hôpital

4.1 Enunciato

Siano $f(x)$ e $g(x)$ due funzioni continue in un intorno U di c. Siano inoltre soddisfatte le seguenti ipotesi:

- $f(x)$ e $g(x)$ sono derivabili in U (tranne eventualmente c)
- $g'(x) \neq 0$ per tutti i punti di U (tranne eventualmente c)
- Per $x \to c$, le due funzioni hanno entrambe limite zero o ∞
- Esiste, finito o infinito, $\lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

Allora esiste anche $\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)}$, e si ha:

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)} \tag{11}$$

4.2 Note

Grazie alla regola di de l'Hôpital, è possibile calcolare i limiti di rapporti di due funzioni che valgono $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$.