КАФЕДРА ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ
3 курс 1 семестр /*1з/(занятия через неделю)

1) ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

   a) Нестационарная одномерная по пространству задача теплопроводности с постоянными коэффициентами.
   Исследование устойчивости, асимптотической устойчивости, сходимости.
   Разностные схемы: явная, неявная, Кранка-Николсона, с весами.

2) ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ОДНОМЕРНЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

   a) численное решение линейного уравнения переноса.
   Схемы: явная, неявная бегущего счета, гибридная, схема Лакса.

КАФЕДРА ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ
3 курс 1 семестр /*1з/(занятия через неделю)

1) ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

   a) Нестационарная одномерная по пространству задача теплопроводности с постоянными коэффициентами.
   Исследование устойчивости, асимптотической устойчивости, сходимости.
   Разностные схемы: явная, неявная, Кранка-Николсона, с весами.

2) ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ОДНОМЕРНЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

   a) численное решение линейного уравнения переноса.
   Схемы: явная, неявная бегущего счета, гибридная, схема Лакса.

КАФЕДРА ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ
3 курс 1 семестр /*1з/(занятия через неделю)

1) ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

   a) Нестационарная одномерная по пространству задача теплопроводности с постоянными коэффициентами.
   Исследование устойчивости, асимптотической устойчивости, сходимости.
   Разностные схемы: явная, неявная, Кранка-Николсона, с весами.

2) ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ОДНОМЕРНЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

   a) численное решение линейного уравнения переноса.
   Схемы: явная, неявная бегущего счета, гибридная, схема Лакса.

1. Г.И.Марчук. Методы вычислительной математики. М. Наука, 1977.
2. А.А.Самарский. Теория разностных схем.
3. А.А.Самарский, А.В.Гулин. Численные методы. М. Наука, 1989.
4. Н.Н.Калиткин. Численные методы. М: Наука, 1978.
5. Н.С.Бахвалов. Численные методы, т.1. 1973.
6. А.Н.Тихонов, А.А.Самарский. Уравнения математической физики. Наука. 1977.
7. Бугров А.Н., Воеводин А.Ф., Гладышев М.Т., Коробицина Ж.Л., Михайлов А.П., Шапеев В.П. Пособие по практикуму на ЭВМ. Новосибирск, НГУ, 1980.
8. Коробицина Ж.Л., Хакимзянов Г.С. ПРАКТИКУМ НА ЭВМ по курсу “Методы вычислений”, часть I, Разностные схемы для уравнений в частных производных с одной пространственной переменной. Новосибирск, 1995.

1. Г.И.Марчук. Методы вычислительной математики. М. Наука, 1977.
2. А.А.Самарский. Теория разностных схем.
3. А.А.Самарский, А.В.Гулин. Численные методы. М. Наука, 1989.
4. Н.Н.Калиткин. Численные методы. М: Наука, 1978.
5. Н.С.Бахвалов. Численные методы, т.1. 1973.
6. А.Н.Тихонов, А.А.Самарский. Уравнения математической физики. Наука. 1977.
7. Бугров А.Н., Воеводин А.Ф., Гладышев М.Т., Коробицина Ж.Л., Михайлов А.П., Шапеев В.П. Пособие по практикуму на ЭВМ. Новосибирск, НГУ, 1980.
8. Коробицина Ж.Л., Хакимзянов Г.С. ПРАКТИКУМ НА ЭВМ по курсу “Методы вычислений”, часть I, Разностные схемы для уравнений в частных производных с одной пространственной переменной. Новосибирск, 1995.

1. Г.И.Марчук. Методы вычислительной математики. М. Наука, 1977.
2. А.А.Самарский. Теория разностных схем.
3. А.А.Самарский, А.В.Гулин. Численные методы. М. Наука, 1989.
4. Н.Н.Калиткин. Численные методы. М: Наука, 1978.
5. Н.С.Бахвалов. Численные методы, т.1. 1973.
6. А.Н.Тихонов, А.А.Самарский. Уравнения математической физики. Наука. 1977.
7. Бугров А.Н., Воеводин А.Ф., Гладышев М.Т., Коробицина Ж.Л., Михайлов А.П., Шапеев В.П. Пособие по практикуму на ЭВМ. Новосибирск, НГУ, 1980.
8. Коробицина Ж.Л., Хакимзянов Г.С. ПРАКТИКУМ НА ЭВМ по курсу “Методы вычислений”, часть I, Разностные схемы для уравнений в частных производных с одной пространственной переменной. Новосибирск, 1995.

Параболическое уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t),\ \ (x,t) \in [0,X]\times[0,T], \tag{1}$$

$$u(x,0) = \varphi(x),\ \ x \in [0,X], \tag{2}$$

$$u(0,t) = g_1(t),\ \ u(X,t) = g_2(t),\ \ t \in [0,T]. \tag{3}$$

Аппроксимация:

$$\Lambda U_j^p = a\frac{U_{j+1}^p - 2U_j^p + U_{j-1}^p}{h^2},\ \text{на равномерной сетке}, \tag{4}$$

$$\Lambda U_j^p = \frac{a}{\hbar_j}\left(\frac{U_{j+1}^p - U_j^p}{h_j} - \frac{U_j^p - U_{j-1}^p}{h_{j-1}}\right),\ \ h_j = x_{j+1} - x_j,\ \ \hbar_j = 0.5(h_{j+1} + h_j), \tag{5}$$

$$u_j^0 = \varphi(x_j),\ \ j = \overline{0, M}, \tag{6}$$

$$U_0^{n+1} = g_1^{n+1},\ \ U_{M-1}^{n+1} = g_2^{n+1}. \tag{7}$$

1. явная схема (*практикум 31*)

$$\frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{\tau} = \Lambda U_j^n + f_j^n,\ \ j = \overline{1, M-1}. \tag{8}$$

   Погрешность аппроксимации $O(\tau + h^2)$ в точке (x_j, t_n).
   Устойчивость условная: $a\tau/h^2 \leqslant 0.5$.

2. неявная схема (метод Эйлера) (*практикум 31-32*)

$$\frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{\tau} = \Lambda U_j^{n+1} + f_j^{n+1},\ \ j = \overline{1, M-1}. \tag{9}$$

   Погрешность аппроксимации $O(\tau + h^2)$ в точке (x_j, t_{n+1}).
   Устойчивость абсолютная.

3. схема Кранка-Николсона (*практикум 32*)

$$\frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{\tau} = 0.5(\Lambda U_j^{n+1} + \Lambda U_j^n) + 0.5(f_j^{n+1} + f_j^n),\ \ j = \overline{1, M-1}.$$

   Погрешность аппроксимации
   $O(\tau + h^2)$ в точках (x_j, t_n), (x_j, t_{n+1}).
   $O(\tau^2 + h^2)$ в точке $(x_j, \bar{t}_n)^*$.
   Устойчивость абсолютная.

4. с весом σ (*практикум 32*)

$$\frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{\tau} = \sigma\Lambda U_j^{n+1} + (1-\sigma)\Lambda U_j^n + F_j,\ \ j = \overline{1, M-1}, \tag{10}$$

   $\sigma = 0.5 - \dfrac{h^2}{12a\tau}, F_j = f(x_j, \bar{t}_n) + \dfrac{h^2}{12}\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_j, \bar{t}_n)^*$
   Погрешность аппроксимации $O(\tau^2 + h^4)$ в точке $(x_j, \bar{t}_n)^*$.
   Устойчивость абсолютная при $\sigma \geqslant \sigma_0 = 0.5 - h^2/4a\tau$, при $0 \leqslant \sigma < \sigma_0$ – условная: $a\tau/h^2 \leqslant 1/(2 + 4\sigma)$.

---

*Точке $(x_j, \bar{t}_n)$, $\bar{t}_n = \dfrac{t_n + t_{n+1}}{2}$ соответствуют значения функции $\bar{U}_j = \dfrac{(U_j^n + U_j^{n+1})}{2}$.

Гиперболическое уравнение переноса

$$\frac{\partial u}{\partial t}+a\frac{\partial u}{\partial x}=f(x,t),\ \ (x,t)\in(0,X)\times(0,T],a=\text{const} \tag{11}$$

$$u(x,0)=\varphi(x),\ \ x\in[0,X], \tag{12}$$

$$a>0:\ \ u(0,t)=g_1(t),\ \ a<0:\ \ u(X,t)=g_2(t),\ \ t\in[0,T]. \tag{13}$$

Начальные условия для всех схем: $U_j^0=\varphi(x_j),\ \ j=\overline{0,M}$.

1. явная схема (бегущего счета) (*практикум 83*)

$$a>0:\ \ \frac{U_j^{n+1}-U_j^n}{\tau}+a\frac{U_j^n-U_{j-1}^n}{h}=f_j^n,\ \ j=\overline{1,M};\ \ U_0^{n+1}=g_1^{n+1},$$
$$a<0:\ \ \frac{U_j^{n+1}-U_j^n}{\tau}+a\frac{U_{j+1}^n-U_j^n}{h}=f_j^n,\ \ j=\overline{M-1,0(-1)};\ \ U_M^{n+1}=g_2^{n+1}.$$

Погрешность аппроксимации $O(\tau+h)$ в точке (x_j,t_n).
Устойчивость условная: $|a|\tau/h\leqslant 1$.

2. неявная схема (бегущего счета) (*практикум 84*)

$$a>0:\ \ \frac{U_j^{n+1}-U_j^n}{\tau}+a\frac{U_j^{n+1}-U_{j-1}^{n+1}}{h}=f_j^{n+1},\ \ j=\overline{1,M};\ \ U_0^{n+1}=g_1^{n+1},$$
$$a<0:\ \ \frac{U_j^{n+1}-U_j^n}{\tau}+a\frac{U_{j+1}^{n+1}-U_j^{n+1}}{h}=f_j^{n+1},\ \ j=\overline{M-1,0(-1)};\ \ U_M^{n+1}=g_2^{n+1}.$$

Погрешность аппроксимации $O(\tau+h)$ в точке (x_j,t_{n+1}).
Устойчивость абсолютная.

3. схема Лакса ($f(x,t)\equiv 0$)(*практикум 85, 88-89*)

$$\frac{U_j^{n+1}-0.5(U_{j+1}^n+U_{j-1}^n)}{\tau}+a\frac{U_{j+1}^n-U_{j-1}^n}{2h}=0,\ \ j=\overline{1,M-1}; \tag{14}$$

можно преобразовать: $\dfrac{U_j^{n+1}-U_j^n}{\tau}+a\dfrac{U_{j+1}^n-U_{j-1}^n}{2h}-0.5\dfrac{h^2}{\tau}\left(\dfrac{U_{j+1}^n-2U_j^n+U_{j-1}^n}{h^2}\right)=0,$

$a>0:\ \ U_0^{n+1}=g_1^{n+1},\ \ a<0:\ \ U_M^{n+1}=g_2^{n+1}.$

Недостающее граничное условие можно вычислять с помощью многочленов Лагранжа, например, для $a>0$:

$$U_M^{n+1}=3(U_{M-1}^{n+1}-U_{M-2}^{n+1})+U_{M-3}^{n+1};\text{(многочлен 2-й степени)}$$
$$U_M^{n+1}=2U_{M-1}^{n+1}-U_{M-2}^{n+1};\text{(многочлен 1-й степени)}$$

Погрешность аппроксимации $O(\tau+h)$ в точке (x_j,t_n) при условии $\tau=O(h)$.
Устойчивость условная: $|a|\tau/h\leqslant 1$.

4. с весом δ (*практикум 84*)

$$a>0:\ \ \frac{U_j^{n+1}-U_j^n}{\tau}+\delta a\frac{U_j^{n+1}-U_{j-1}^{n+1}}{h}+(1-\delta)a\frac{U_j^n-U_{j-1}^n}{h}=F_j,\ \ j=\overline{1,M};\ \ U_0^{n+1}=g_1^{n+1}, \tag{15}$$
$$a<0:\ \ \frac{U_j^{n+1}-U_j^n}{\tau}+\delta a\frac{U_{j+1}^{n+1}-U_j^{n+1}}{h}+(1-\delta)a\frac{U_{j+1}^n-U_j^n}{h}=F_j,\ \ j=\overline{M-1,0(-1)};\ \ U_M^{n+1}=g_2^{n+1},$$

$$\delta=0.5-\frac{h}{2|a|\tau},0.5|a|\tau(2\delta-1)=-0.5h,\ \ F_j=\left[f-\frac{h}{2}\frac{\partial f}{\partial x}\right]_{(x_j,t_{n+1/2})},\ \ t_{n+1/2}=0.5(t_n+t_{n+1}).$$

Погрешность аппроксимации $O(\tau^2+h^2)$ в точке $(x_j,t_{n+1/2})$.
Устойчивость при $\delta\geqslant 0.5$ абсолютная, при $0\leqslant\delta<0.5$ условная: $|a|\tau/h<1/(1-2\delta)$.

Аппроксимация

Схема с весом σ (10): разлагаем в ряд Тейлора

$$f(x,y) = f(x_0,y_0)+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\left[(x-x_0)\frac{\partial}{\partial x}+(y-y_0)\frac{\partial}{\partial y}\right]^k f(x_0,y_0)+o(\rho^n),\ \ \rho=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$$

функции U_k^p $(k=j-1,j,j+1;p=n,n+1)$, в окрестности точки $(x_j,\bar{t}_n)$, $\bar{t}_n=\dfrac{t_n+t_{n+1}}{2}$ с точностью до $O(\tau^2+h^4)$, считая, что $\tau\sim h^2$. Пусть $g=g(x_j,\bar{t}_n)$, $F_j=f+\psi_j^n$. Учитывая, что $au''=\dot{u}-f$ и $au^{IV}=\dot{u}''-f''$, получим

$$O(\tau^2+h^4)+\dot{u}''\left[a\tau\left(\sigma-\frac{1}{2}\right)+\frac{h^2}{12}\right]+\psi_j^n-f''\frac{h^2}{12}=0.$$

Отсюда находим σ и ψ_j^n.
Аналогично для схемы с весом δ (15): разлагаем в ряд Тейлора функции U_k^p $(k=j-1,j;p=n,n+1)$, в окрестности точки $(x_j,t_{n+1/2})$, $t_{n+1/2}=\dfrac{t_n+t_{n+1}}{2}$ с точностью до $O(\tau^2+h^2)$, считая, что $\tau\sim h$. Используем, что $au'=f-\dot{u}$ и $au''=f'-\dot{u}'$, и в итоге получим

$$O(\tau^2+h^2)+\dot{u}'\left[a\tau\left(\delta-\frac{1}{2}\right)+\frac{h}{2}\right]-f'\frac{h}{2}=\psi_j^n.$$

Отсюда находим δ и ψ_j^n.

Устойчивость

Спектральный метод (Метод Неймана, гармонический анализ) позволяет исследовать устойчивость по начальным данным в предположении однородности уравнения и начальных данных. Предполагаем, что $\varphi=Ue^{ikx}$, тогда $U_j^n=U\rho^n e^{ikx}$, ρ – спектральный радиус. Необходимое условие устойчивости: $|\rho|\leqslant 1+C\tau$, $(N\tau=T)$ или (более жесткое) $|\rho|<1$. Для (8) с $f_j^n=0$ имеем $\rho=1-4\dfrac{a\tau}{h^2}\sin^2\dfrac{kh}{2}$, откуда условие на устойчивость схемы: $a\tau/h^2<0.5$. Для (9) с $f_j^{n+1}=0$ имеем $\rho=\left(1+4\dfrac{a\tau}{h^2}\sin^2\dfrac{kh}{2}\right)^{-1}<1$, т. к. $e^{ikh}-2+e^{-ikh}=-4\sin^2\dfrac{hk}{2}$. Для схемы с весом σ (10)

$$\rho=\frac{1-4\frac{\tau(1-\sigma)a}{h^2}\sin^2\frac{hk}{2}}{1+4\frac{\tau\sigma a}{h^2}\sin^2\frac{hk}{2}}=\frac{1-\frac{1}{3}\sin^2\frac{hk}{2}-\frac{2\tau a}{h^2}\sin^2\frac{hk}{2}}{1-\frac{1}{3}\sin^2\frac{hk}{2}+\frac{2\tau a}{h^2}\sin^2\frac{hk}{2}} \text{ и } |\rho|<1 \text{ при } 1>2(1-2\sigma)a\tau/h^2.$$

Для (14) имеем: $\rho=\dfrac{1}{2}\left(e^{ih}+e^{-ih}\right)-\dfrac{a\tau}{2h}\left(e^{ih}-e^{-ih}\right)=\cos h-\dfrac{a\tau}{h}i\sin h$ и условие $|a|\tau/h\leqslant 1$.
Для (15) после преобразований имеем условие $(1-2\delta)|a|\tau/h\leqslant 1$.
Принцип максимума позволяет исследовать устойчивость схемы по всем входным данным. Для (8) с нулевыми краевыми условиями для любого $n\geqslant 0$ имеем (для $a\tau/h^2<0.5$):

$$|U_j^{n+1}|\leqslant\left(1-2\frac{a\tau}{h^2}\right)|U_j^n|+\frac{a\tau}{h^2}|U_{j+1}^n|+\frac{a\tau}{h^2}|U_{j-1}^n|+\tau|f_j^n|\leqslant\max_{1\leqslant j\leqslant M-1}|U_j^n|+\tau\max_{1\leqslant j\leqslant M-1}|f_j^n|,$$

Последовательно применяем это неравенство (до $n=0$) получим

$$||U^{n+1}||\leqslant||\varphi_h||+(T+1)||f_h||.$$

Для (14) имеем: $|U_j^{n+1}|\leqslant\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{a\tau}{2h}\right)|U_{j+1}^n|+\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{a\tau}{2h}\right)|U_{j-1}^n|$ и условие $|a|\tau/h\leqslant 1$.