

# Métodos Quantitativos para Ciência da Computação Experimental Aula #4

Jussara Almeida  
DCC-UFMG  
2011

**"Measurements are not to  
provide numbers, but insights"**

# Metodologia de Comparação de Sistemas Experimentais

- Comparando quantitativamente sistemas experimentais:
  - Algoritmos, protótipos, modelos, etc
- Significado de uma amostra
- Intervalos de confiança
- Tomando decisões e comparando alternativas
- Considerações especiais sobre intervalo de confiança
- Tamanho das amostras

# Estimando os Intervalos de Confiança

- Duas fórmulas para intervalo de confiança
  - Acima de 30 amostras de qualquer distribuição: distribuição- $z$  (*Normal*)
  - Pequenas amostras de populações normalmente distribuídas: distribuição- $t$  (*Student*)
- Um erro comum: usar distribuição- $t$  *para populações não normalmente distribuídas*.
  - Teorema central do limite base do cálculo do nível de confiança do intervalo de confiança (IC).

# Intervalo de Confiança da Média da Amostra

- Chave: Teorema *Central* do *Limite*
  - As médias de amostras são distribuídas pela Normal.
  - Desde que sejam independentes
  - Média das medias converge para a média da população  $\mu$
  - Desvio padrão (*erro padrão*) é  $\sigma/\sqrt{n}$

# A Distribuição-z

- Intervalo em cada lado da média:

$$z = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \qquad \bar{x} \pm z_{1-\alpha/2} \left( \frac{s}{\sqrt{n}} \right)$$

- O nível de significância  $\alpha$  é *pequeno* para níveis maiores de confiança ( $100 \cdot (1 - \alpha)\%$ )
- Existem tabelas para a variável  $z$ !

# A Distribuição $t$

- Fórmula quase a mesma:

$$\bar{x} \pm t_{[1-\alpha/2; n-1]} \left( \frac{s}{\sqrt{n}} \right)$$

- Usável para populações normalmente distribuídas!
- Funciona para pequenas amostras
- Similar a Normal (bell-shaped, porém mais espalhada) e depende do tamanho da amostra  $n$ .

# Como calcular Intervalo de Confiança

- Você pode calcular intervalos de confiança para diferentes estatísticas

$$\hat{y} \pm z_{1-\alpha/2} s_y \quad \text{ou} \quad \hat{y} \pm t_{1-\alpha/2, df} s_y$$

onde df são os graus de liberdade na estimativa  $\hat{y}$

Isto é só pra você saber que as fórmulas dadas nos slides anteriores podem ser aplicadas apenas se você estiver trabalhando com médias



# Tomando decisões sobre os dados experimentais

- Sumarizar o erro na média da amostra (ou qualquer outra estatística obtida a partir dela)
  - Confiança =  $1 - \alpha$
  - Precisão =  $100\% - \text{metade do intervalo} / \text{média}$
- Prover elementos para saber se a amostra é significativa (estatisticamente)
- Permitir comparações à luz dos erros

# Testando a Média Zero

- A média da população é significativamente não-zero?
- Se o intervalo de confiança inclui 0, a resposta é *não!*
- Pode-se testar para qualquer valor:
  - Suponha IC de 90% para precisão média de método A:  
 $0.875 \pm 0.12$        $(0.755, 0.995)$
  - A precisão pode ser 0.96?
    - Sim, com 90% de confiança, já que o IC contém 0.96
  - Qual erro máximo na minha estimativa da precisão média?
    - Com 90% de confiança, o erro máximo é

$$\frac{0.995 - 0.875}{0.875} = 13.2\%$$

# Comparando Alternativas

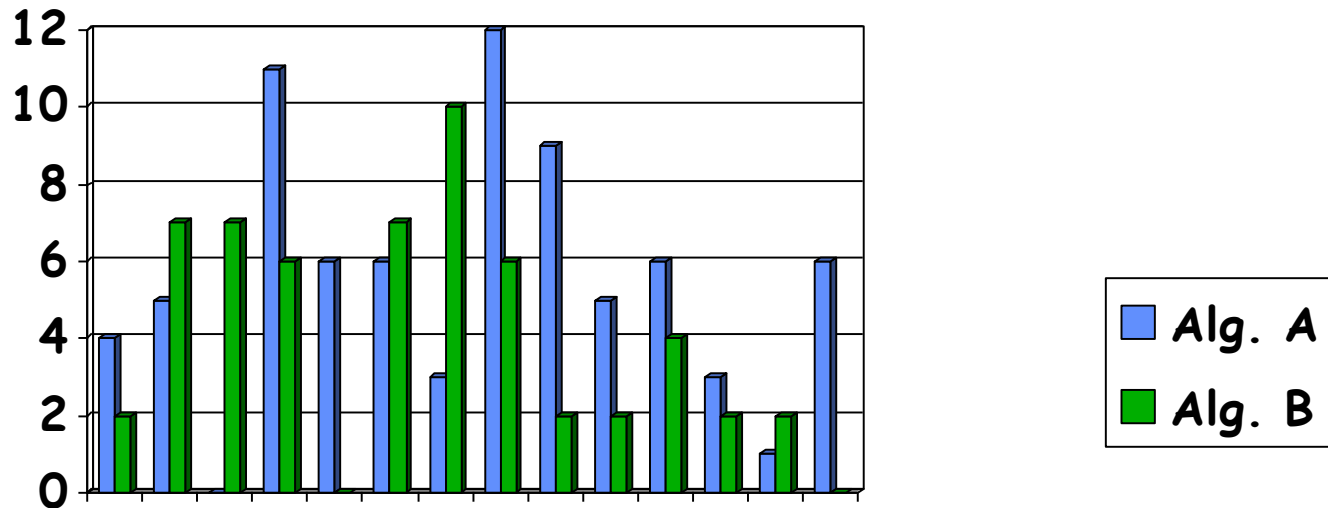
- Num projeto de pesquisa, geralmente, procura-se o melhor sistema, o melhor algoritmo:
  - Exemplos:
    - Determinar o sistema que apresenta a melhor relação QoS-preço, onde QoS é medido experimentalmente.
    - Mostrar que um algoritmo *Y* executa mais rápido que outros existentes e sejam similares funcionalmente.
- Métodos diferentes para observações pareadas (com par) e não pareadas (sem par).
  - Pareadas se o *i-ésimo* teste em cada sistema foi o mesmo
  - *Não pareadas*, caso contrário

# Comparando Observações Pareadas: método

1. Tratar o problema como uma amostra de  $n$  pares
2. Para cada teste: calcule as diferenças dos resultados
3. Calcule o intervalo de confiança para a diferença media
4. Se o intervalo inclui 0 (zero), os objetos de comparação (ex.: sistemas, algoritmos, etc) não são diferentes com a dada confiança
5. Se o intervalo não inclui zero, o sinal da diferença indica qual dos objetos é melhor, baseado nos dados experimentais.

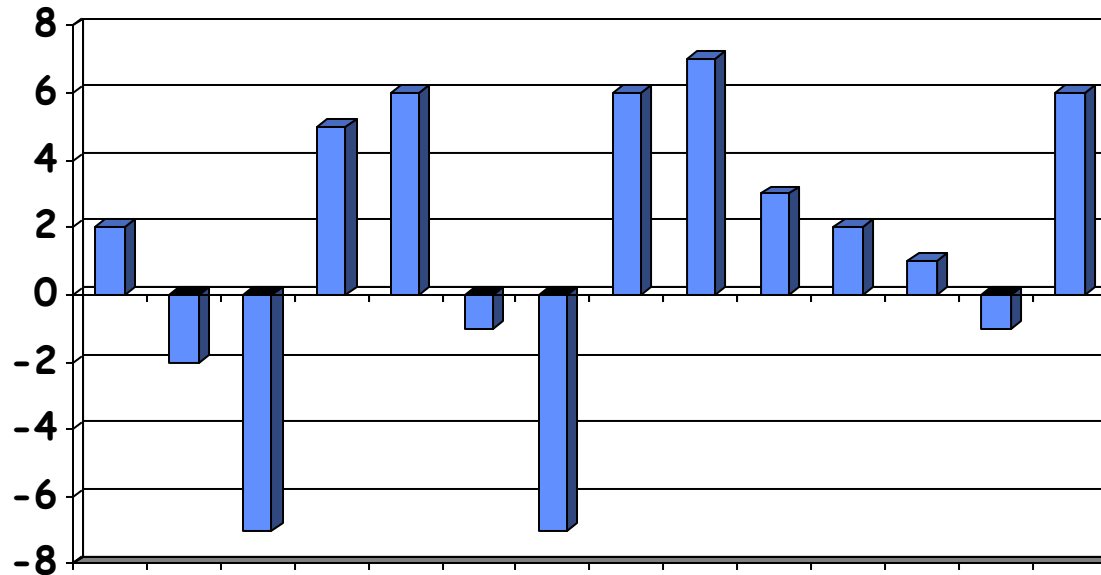
# Exemplo: Comparando Observações Pareadas

- Considere dois metodos de busca A e B que sao avaliados em funcao do # de documentos relevantes (em um total de 100) que cada um retorna
- Num teste com várias consultas, o algoritmo A retorna mais documentos relevantes que o B?
- Amostra de testes com 14 consultas:



Alg. A	4	5	0	11	6	6	3	12	9	5	6	3	1	6
Alg. B	2	7	7	6	0	7	10	6	2	2	4	2	2	0

# Exemplo: Comparando observações pareadas

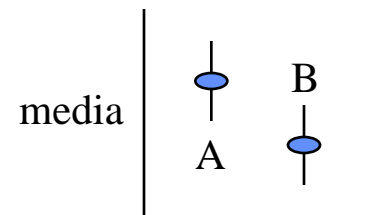
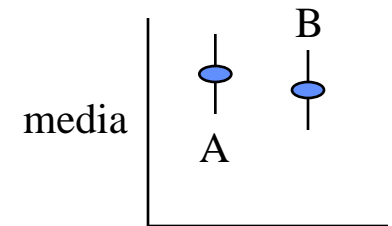
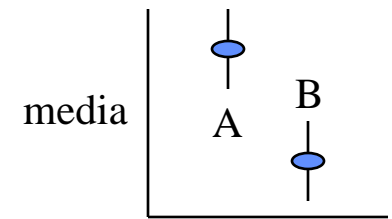


- Diferenças entre algoritmos A-B: 2 -2 -7 5 6 -1 -7 6 7 3 2 1 -1 6
- Média 1.4, intervalo de 90%  $\Rightarrow$  (-0.75, 3.6)
  - Não se pode rejeitar a hipótese que a diferença é 0 e que portanto os algoritmos tem desempenho similar.
  - Intervalo de 70% é (0.10, 2.76), A tem desempenho melhor que B

# Comparando Observações Não Pareadas

o número de experimentos comuns não é o mesmo!

- Considere as médias das amostras para cada uma das alternativas, A e B,  $\bar{x}_a$  e  $\bar{x}_b$
- Comece com os intervalos de confiança
  - Se não houver sobreposição:
    - Algoritmos são diferentes e a maior média é melhor (pelas métricas usadas)
  - Se houver sobreposição e cada IC contem a outra média:
    - Algoritmos não são diferentes neste nível
  - Se houver sobreposição e uma média não está no outro IC
    - Tem de fazer o teste-*t*



# O teste- $t$ (1)

- 1 Compute as médias das amostras  $\bar{x}_a$  e  $\bar{x}_b$
2. Compute os desvio-padrões  $s_a$  e  $s_b$
3. Compute a diferença das médias =  $\bar{x}_a - \bar{x}_b$
4. Compute o desvio padrão das diferenças:

$$s = \sqrt{\frac{s_a^2}{n_a} + \frac{s_b^2}{n_b}}$$



## O teste- $t$ (2)

5. Compute os graus efetivos de liberdade:

$$\nu = \frac{(s_a^2 / n_a + s_b^2 / n_b)^2}{\frac{1}{n_a + 1} \left( \frac{s_a^2}{n_a} \right)^2 + \frac{1}{n_b + 1} \left( \frac{s_b^2}{n_b} \right)^2} - 2$$

6. Compute o intervalo de confiança:

$$(\bar{x}_a - \bar{x}_b) \mp t_{[1-\alpha/2; \nu]} s$$

7. Se o intervalo inclui zero, não há diferença

# Exemplo

O tempo de processamento necessario para executar uma tarefa foi medido em dois sistemas.

Os tempos no sistema A foram:

{5.36, 16.57, 0.62, 1.41, 0.64, 7.26}.

Os tempos no sistema B foram:

{19.12, 3.52, 3.38, 2.50, 3.60, 1.74}.

Os dois sistemas sao significativamente diferentes?

# Exemplo

Sistema A:

media  $\overline{x_A} = 5.31$

variância  $s_A^2 = 37.92$

$n_A = 6$

Sistema B:

media  $\overline{x_A} = 5.64$

variância  $s_A^2 = 44.11$

$n_A = 6$

# Exemplo

Diferença das médias  $\overline{x}_A - \overline{x}_B = -0.33$

Desvio Padrão da diferença média  $s = 3.698$

Graus de liberdade  $\nu = 11.921$

0.95 – *quantil* da *va t* com 12 graus de liberdade

$$t_{[0.95,12]} = 1.71$$

IC de 90% para a diferença das médias = (-6.92, 6.26)

IC inclui 0, logo os dois sistemas NAO são diferentes neste nível de confiança

# Comparando Proporções

- Se  $n_1$  de  $n$  experimentos dão um certo resultado, então pode-se dizer que a proporção das amostras é dada por:

$$p = \frac{n_1}{n}$$

- Exemplos:
  - A precisão do algoritmo A de recuperação de informação foi superior a precisão de B em 55 dos 100 casos analisados. Com 90% de confiança pode-se dizer que A supera B em precisão?
  - 5000 “samples” coletados, em 1000, o percentual de “system time” foi inferior a 20%. Com 95% de confiança, qual o intervalo de confiança onde o sistema operacional gasta menos de 20% dos recursos?

# Comparando Proporções

- Se  $n_1$  de  $n$  experimentos dão um certo resultado, então o intervalo de confiança (IC) para a proporção:

$$IC \rightarrow p \pm z_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$$

- A fórmula acima é baseada numa aproximação da distribuição binomial por uma normal que é válida somente se  $np > 10$

# Exemplo

- Um experimento foi repetido em dois sistemas 40 vezes. O sistema A foi superior ao B em 26 repeticoes. Podemos dizer que, com confianca de 99%, o sistema A e superior ao sistema B? E com uma confianca de 90%?

# Exemplo

proporcao  $p = \frac{26}{40} = 0.65$

desvio padrao da estimativa de proporcao :

$$s = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} = 0.075$$

$$\text{IC de 99\%} = 0.65 \pm (2.576)0.075 = (0.46, 0.84)$$

IC inclui 0.5, logo A nao e superior a B neste nivel de confianca

$$\text{IC de 90\%} = 0.65 \pm (1.645)0.075 = (0.53, 0.77)$$

IC nao inclui 0.5, logo A e superior a B neste nivel de confianca



# Considerações Especiais

1. Selecionar um intervalo de confiança para trabalhar
2. Teste de Hipótese
3. Intervalos de confiança de um único lado

# A Seleção um Intervalo de Confiança

- Depende do custo de se estar errado!!!
  - Produção de um *paper* científico
  - Demonstração de um novo algoritmo experimentalmente
  - Geração de um produto
- Os níveis de confiança entre 90% e 95% são os valores comuns para *papers* científicos (em Computacao)
- Em geral, use o maior valor que lhe permita estabelecer conclusões sólidas num processo experimental!
- Mas é melhor ser consistente durante todo o paper que se está trabalhando.

# Teste de Hipótese

- A *null hypothesis* ( $H_0$ ) é comum em estatísticas e tratamento de dados experimentais:
  - Pode ser confuso em negativas duplas
  - Provê menos informação que intervalos de confiança
  - Em geral mais difícil de interpretar/entender
- Deve-se entender que rejeitar a hipótese nula implica que o resultado é significativo.

# Intervalos de Confiança e Testes de Hipótese

- Teste de hipótese:
  - Hipótese nula  $H_0$  versus hipótese alternativa  $H_a$ 
    - $H_0$  = métodos A e B geram resultados estatisticamente iguais
    - $H_a$  = métodos geram resultados estatisticamente diferentes

$$H_0: \mu_A = \mu_B$$

$$H_A: \mu_A \neq \mu_B$$

- Computa alguma estatística dos dados que permita testar as hipóteses
  - Computa  $\overline{x_A - x_B}$
- Faz referência a alguma distribuição que mostra como a estatística seria distribuída se a hipótese nula fosse verdadeira
  - Ex: já sabemos que a distribuição das médias segue uma distribuição Normal

# Intervalos de Confiança e Testes de Hipótese

- Com base na distribuição de referência, computa a probabilidade de se obter uma discrepância tão grande quanto a observada ( $\overline{x_A - x_B}$ ) e  $H_0$  ainda ser verdadeira

- p-value

- Quanto menor o p-value, menos provável é que a hipótese nula seja verdadeira e, mais significativo (estatisticamente) o resultado é
  - Quanto menor o p-value, maior a chance de :  $\mu_A \neq \mu_B$
- Rejeita hipótese nula se p-value < nível de significância  $\alpha$
- Nível de significancia: prob. de rejeitar hipotese nula quando ela e verdadeira

- Intervalos de confiança e testes de hipótese: mesmo arcabouço

# Intervalos de Confiança de um-Lado

- Intervalos de dois lados testam se a média está fora ou dentro de uma variação definida pelos dois lados do intervalo
- Teste de intervalos de um único lado são úteis somente quando se está interessado em um limite.
  - Ex.: Com 90% de confiança, qual o intervalo para o tempo médio de resposta ser menor que determinado valor (e.g., a média alcançada).

$$P(R \leq \bar{R}) = 1 - \alpha$$

# Intervalos de Confiança de um-lado

Limite inferior

$$\left( \bar{x} - t_{[1-\alpha; n-1]} \frac{s}{\sqrt{n}}, \infty \right)$$

Limite superior

$$\left( -\infty, \bar{x} + t_{[1-\alpha; n-1]} \frac{s}{\sqrt{n}}, \right)$$

# Intervalos de Confiança de um-lado

## Exemplo

- Tempo entre quedas foi medido em dois sistemas A e B. Os valores de media e desvio padrao obtidos estao listados abaixo. O sistema A e mais suceptivel a falhas do que o sistema B

Sistema	Numero	Media	Desvio Padrao
A	972	124.10	198.20
B	153	141.47	226.11



## Exemplo

- Solucao: obter IC para diferenca media usando procedimento de analise das observacoes nao pareadas

Diferenca das medias  $\bar{x}_A - \bar{x}_B = 124.1 - 141.47 = -17.37$

Desvio Padrao da diferenca media

$$s = \sqrt{\left(\frac{s_A^2}{n_A} + \frac{s_B^2}{n_B}\right)} = \sqrt{\left(\frac{198.2^2}{972} + \frac{226.11^2}{153}\right)} = 19.35$$

Graus de liberdade

$$\nu = \frac{\left(s_A^2/n_A + s_B^2/n_B\right)^2}{\frac{1}{n_A + 1} \left(s_A^2/n_A\right)^2 + \frac{1}{n_B + 1} \left(s_B^2/n_B\right)^2} - 2 = 191.05$$

## Exemplo

- Como os graus de liberdade são mais que 30, podemos usar a normal unitária ao invés da distribuição t. Além disso, como é um intervalo de um único lado, usamos  $z_{0.90} = 1.28$  para um IC de 90%:

$$(-\infty, -17.37 + 1.28 \cdot 19.35) = (-\infty, 7.402)$$

Como o IC contém valores positivos, não podemos dizer que A é mais susceptível a falhas do que B.

# ICs: 1 lado ou 2 lados?

- Se usarmos ICs de 2 lados, podemos dizer:
  - Tenho 90% confiança de que a media (proporcao) esta entre os dois extremos
  - Para tal, usamos  $z_{0.95}$  ou  $t_{0.95,df}$
- Se usarmos ICs de 1 lado, podemos dizer:
  - Tenho 90% de confiança de que a media (proporcao ) e no maximo (no minimo) o extremo superior (inferior)
  - Para tal, usamos  $z_{0.90}$  ou  $t_{0.90,df}$

# Tamanho das Amostras

- Amostras maiores levam a intervalos mais estreitos
  - Obtem-se menores valores de  $t$  à medida que  $n$  cresce
  - $\sqrt{n}$  in formulas
- Coleta de amostras pode ser um processo caro!
  - Qual o mínimo que se pode querer num experimento?
- Comece com um pequeno número de medições preliminares para estimar a variância.

# Escolha do Tamanho da Amostra

- Suponha que queremos determinar o intervalo de confiança para  $\bar{x}$  com uma certa largura

$$(c_1, c_2) = ((1 - e)\bar{x}, (1 + e)\bar{x})$$

$$c_1 = (1 - e)\bar{x} = \bar{x} - z_{1-\alpha/2} \frac{s}{\sqrt{n}}$$

$$c_2 = (1 + e)\bar{x} = \bar{x} + z_{1-\alpha/2} \frac{s}{\sqrt{n}}$$

$$n = \left( \frac{z_{1-\alpha/2} s}{e\bar{x}} \right)^2$$

# Escolhendo Tamanho da Amostra

- Para obter um erro percentual  $\pm r\%$ :

$$n = \left( \frac{100 z s}{r \bar{x}} \right)^2$$

- Para uma proporção  $p = n_1/n$ :

$$n = z^2 \frac{p(1-p)}{r^2}$$

# Escolha do Tamanho da Amostra:

## Exemplo 1

- Cinco execuções de um *query* levaram 22.5, 19.8, 21.1, 26.7, 20.2 seconds
- Quantas execuções devem ser executadas para obter  $\pm 5\%$  em um IC com nível de confiança de 90%?
- $\bar{x} = 22.1$ ,  $s = 2.8$ ,  $t_{0.95;4} = 2.132$

$$n = \left( \frac{(100)(2.132)(2.8)}{(5)(22.1)} \right)^2 = 5.4^2 = 29.2$$

# Escolha do Tamanho da Amostra:

## Exemplo 2

- Suponha que o tempo médio para gravar um arquivo é 7,94 seg com desvio padrão de 2,14. Aproximadamente, quantas medidas serão requeridas se nós desejamos um IC de 90% e que a média esteja dentro de um intervalo de 7%.



# Escolha do Tamanho da Amostra:

## Exemplo 2

- Suponha que o tempo médio para gravar um arquivo é 7,94 seg com desvio padrão de 2,14. Aproximadamente, quantas medidas serão requeridas se nós desejamos um IC de 90% e que a média esteja dentro de um intervalo de 3.5%.
- $\alpha = 0.10$ ,  $1 - \alpha/2 = 0.95$  e  $e = 0.035$

$$n = \frac{(z_{1-\alpha/2}s)^2}{e\bar{x}} = \left( \frac{1.645(2.14)}{0.035(7.94)} \right)^2 = 160.46$$

$$n = 161$$

# Escolha do Tamanho da Amostra:

## Exemplo 3

- Dois algoritmos para transmissao de pacotes foram analisados. Medicoes preliminares mostraram que o algoritmo A perde 0.5% dos pacotes e o algoritmo B perde 0.6%. Quantos pacotes precisamos observar para podermos dizer com confianca de 95% que o algoritmo A e melhor que o algoritmo B?

# Escolha do Tamanho da Amostra:

## Exemplo 3

- Dois algoritmos para transmissao de pacotes foram analisados. Medicoes preliminares mostraram que o algoritmo A perde 0.5% dos pacotes e o algoritmo B perde 0.6%. Quantos pacotes precisamos observar para podermos dizer com confianca de 95% que o algoritmo A e melhor que o algoritmo B?
- IC de 95% para % de pacotes perdidos por A:

$$0.005 \pm 1.960 \sqrt{\frac{0.005(1 - 0.005)}{n}}$$

- IC de 95% para % de pacotes perdidos por B:

$$0.006 \pm 1.960 \sqrt{\frac{0.006(1 - 0.006)}{n}}$$

# Escolha do Tamanho da Amostra:

## Exemplo 3

- Para podermos dizer que algoritmo A é melhor que algoritmo B, com 95% de confiança, o limite superior do intervalo de A tem que ser menor que o limite inferior do intervalo de B

$$0.005 + 1.960\sqrt{\frac{0.005(1 - 0.005)}{n}} < 0.006 - 1.960\sqrt{\frac{0.006(1 - 0.006)}{n}}$$

$$n > 84340$$

Temos que observar 85000 pacotes

# Exercício de Revisao 1

- Considere que seu trabalho é comparar o desempenho de dois algoritmos (A e B) de computação gráfica, que usam métodos diferentes para geração de faces humanas realistas.
- São sistema complexos cuja execução leva tempos longos para geração das faces. O sistema A foi testado 8 vezes e o sistema B apenas 5, onde em cada experimento utilizou-se o mesmo padrão de resultado a obter.
- Os tempos de teste dos algoritmos estão na tabela a seguir. Com base nesses resultados, pede-se que se determine qual algoritmo teve melhor desempenho.

# Exercício de Revisao 1

Experimento	Algoritmo A (seg)	Algoritmo B (seg)
1	1011	894
2	998	963
3	1113	1098
4	1008	982
5	1100	1046
6	1039	-
7	1003	-
8	1098	-

# Exercício de Revisao 1

- Experimento nao pareado: teste-t
- Quer saber qual algoritmo melhor : CI de 2 lados
- Algoritmo A:
  - Media: 1046.25
  - Desvio Padrao s: 49.25
  - $n_A = 8$
- Algoritmo B:
  - Media: 996.60
  - Desvio Padrao s: 78.4079
  - $n_B = 5$

# Exercício de Revisao 1

- Diferença das medias  $\bar{x}_a - \bar{x}_b = 49.65$
- Desvio padrao:

$$s = \sqrt{\frac{s_a^2}{n_a} + \frac{s_b^2}{n_b}} = \sqrt{\frac{2425.64}{8} + \frac{24591.2}{5}} = 72.26$$

- Graus de liberdade:

$$\nu = \frac{\left(s_a^2 / n_a + s_b^2 / n_b\right)^2}{\frac{1}{n_a + 1} \left(\frac{s_a^2}{n_a}\right)^2 + \frac{1}{n_b + 1} \left(\frac{s_b^2}{n_b}\right)^2} - 2 = 4.74 \rightarrow 5$$



# Exercício de Revisao 1

- IC de 90% (usar VA t ja que graus de liberdade < 30)

$$\left( \bar{x}_a - \bar{x}_b \right) \pm t_{[1-\alpha/2; \nu]} s$$

$$49.65 \pm t_{[0.95; 5]} \times 72.26 = 49.65 \pm 2.015 \times 72.26$$

$$(-95.954, 195.254)$$

- O intervalo contem 0. Logo nao podemos concluir que um sistema e melhor que o outro. Estatisticamente, com 90% de confianca, eles tem desempenho comparavel.

## Exercicios de Revisao 2

Considere que num conjunto de servidores de uma máquina de busca, um servidor tem a probabilidade de falhar no período noturno igual 0.25 (i.e., a probabilidade de qualquer servidor ter falhado ao amanhecer é 25%). Para dois servidores, desenhe os gráficos da pmf e CDF da variável aleatória  $X$ , onde  $P[X=x] = P[x \text{ servidores falharam}]$ . Determine a média, a variância e o coeficiente de variacao de  $X$ . Assuma que as falhas são independentes e identicamente distribuídas.

Repita o processo para  $n$  servidores

## Exercicios de Revisao 2

- Distribuicao binomial com parametros
  - $n = \#$  servidores
  - $p=0.25$  = prob. de 1 servidor falhar.
- Para  $n=2$ , e possivel resolver a mao:
  - $P[X=0] = (1-0.25)*(1-0.25) = 0.5625$
  - $P[X=1] = (1-0.25)*0.25 + 0.25*(1-0.25) = 0.375$
  - $P[X=2] = 0.25*0.25 = 0.0625$
  - Media:  $0*0.5625 + 1*0.375 + 2*0.0625 = 0.50$
  - Variancia:  $\sum x^2 P(X = x) - \bar{X}^2$ 
    - $0^2*0.5625 + 1^2*0.375 + 2^2*0.0625) - 0.5^2=0.375$
  - $CV = \text{Stddev}/\text{Media} = \text{sqrt}(0.375)/0.5 = 0.866$
  - Para  $n$  servidores, usar formula da binomial

## Exercicios de Revisao 3

Considere um “switch” de  $N$  portas de entrada e  $N$  portas de saída ( $N \times N$ ). O sistema opera com o tempo dividido em intervalos (“time slots”). Um pacote chega em qualquer “time slot” numa porta de entrada com probabilidade  $p$ , independente de outros “time slots” e das outras portas de entrada. Assuma uma probabilidade de roteamento uniforme (i.e., um pacote que chegou em uma dada porta de entrada vai para qualquer porta de saída com probabilidade igual – igualmente provável). Qual é a probabilidade de exatamente  $n$  ( $n < N$ ) pacotes irem para uma porta de saída qualquer num “time slot”.

## Exercicios de Revisao 3

- Quando um pacote chega em uma porta de entrada (com prob  $p$ ), ele vai para qualquer porta com probabilidade  $1/N$ . Isto pode ser visto como um processo de Bernoulli com prob.  $p/N$  de sucesso.
- Uma vez que ha  $N$  portas de entradas, o numero  $n$  de pacotes indo para qualquer porta de saida e a soma de  $N$  processos de Bernoulli
  - Isto significa uma VA Binomial  $X$  com  $N$  tentativas e prob. de sucesso  $p/N$

$$P(X = n) = \binom{N}{n} \left( \frac{p}{N} \right)^n \left( 1 - \frac{p}{N} \right)^{(N-n)} \quad n = 0, 1, \dots, N$$

## Exercicios de Revisao 4

Considere um sistema constituido de  $n$  tarefas sequenciais. Cada tarefa  $X_i$  ( $i=1..n$ ) executa em um tempo exponencial com media de  $10^i$  segundos.

Se o sistema termina execucao somente quando todas as tarefas terminarem, qual a media e o desvio padrao do tempo de execucao do sistema?

Se o sistema for revisado de tal maneira que as tarefas executem em paralelo, qual a probabilidade do sistema executar por mais de  $z$  minutos? Calcule a probabilidade para  $z=1$  minuto e  $n = 3$ ?

Dica:

$$\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

## Exercicios de Revisao 4

- Sistema sequencial:
- $Z$  = tempo de execucao

$$Z = \sum_{i=1}^n X_i$$

*Media / Esperanca :*

$$E(Z) = E\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n E(X_i) \quad E(X_i) = 10 * i$$

$$E(Z) = \sum_{i=1}^n 10i = 10 \sum_{i=1}^n i = 10 \frac{n(n+1)}{2} = 5n(n+1)$$

## Exercicios de Revisao 4

- Sistema sequencial:
- $Z$  = tempo de execucao

*Variancia :*

$$Var(Z) = Var\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n 1^2 \times Var(X_i)$$

$$Var(X_i) = (10 * i)^2 = 100i^2$$

$$Var(Z) = \sum_{i=1}^n 100i^2 = 100 \sum_{i=1}^n i^2 = 100 \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$Stddev(Z) = \sqrt{Var(Z)} = 4.08 \sqrt{n(n+1)(2n+1)}$$



## Exercicios de Revisao 4

- Sistema paralelo
- $Z = \text{tempo de execucao} = \max(X_i)$
- $\text{Prob}(Z > 60) = ?$  para  $n = 3$

$$\begin{aligned} P(Z \leq 60) &= P(\max(X_i) \leq 60) \\ &= P(X_1 \leq 60 \cap X_2 \leq 60 \cap X_3 \leq 60) \\ &= P(X_1 \leq 60)P(X_2 \leq 60)P(X_3 \leq 60) \\ &= (1 - e^{-\frac{1}{10}60})(1 - e^{-\frac{1}{20}60})(1 - e^{-\frac{1}{30}60}) = \end{aligned}$$

$$P(Z > 60) = 1 - P(Z \leq 60) =$$

# Exercicios de Revisao 5

O numero de operacoes de I/O realizadas por um conjunto de programas foi medido e obteve-se: {23, 33, 14, 15, 42, 28, 33, 45, 23, 34, 39, 21, 36, 23, 34}. Responda:

- a) Quais sao o 10<sup>th</sup> e o 90<sup>th</sup> percentis da amostra?
- b) Qual o numero medio de operacoes de I/O realizadas por um programa?
- c) Qual e o IC de 90% para este numero? Se voce assumir que o numero medio de operacoes de I/O realizadas pelos programas de mesma classe e igual a media da amostra, qual o maior erro que voce pode incorrer, assumindo uma confianca de 90%?
- d) Qual e a porcentagem de programas que fazem no maximo 25 operacoes de I/O? Voce pode dizer, com 90% de confianca, que menos que 50% dos programas realizam no maximo 25 operacoes de I/O? E menos que 60%?
- e) Suponha que o numero de operacoes medido corresponde ao numero de I/Os realizados por segundo por cada programa. Suponha ainda que o mix de programas acima deve executar (em paralelo) em um determinado sistema. O sistema A consegue suportar, em media, no maximo 450 operacoes de I/O por segundo. O sistema A ira suportar a execucao simultanea do mix de programas acima?

# Exercicios de Revisao 5

a) Quais sao o 10<sup>th</sup> e o 90<sup>th</sup> percentis da amostra?

14 , 15 , 21 , 23 , 23 , 23 , 28 , 33 , 33 , 34 , 34 , 36 , 39 , 42 , 45

10<sup>th</sup> percentil dado pelo  $[1 + (n-1)0.1] = [1+14*0.1] = 2o\ elemento = 15$

90<sup>th</sup> percentil dado pelo  $[1 + 14*0.9] = 14o\ elemento = 42$

b) Qual o numero medio de operacoes de I/O realizadas por um programa?

$$\frac{\sum_{i=1}^{15} x_i}{15} = 29.53$$

# Exercicios de Revisao 5

c) Qual e o IC de 90% para este numero?

$$\bar{x} \pm t_{1-\alpha/2, n-1} \left( \frac{s}{\sqrt{n}} \right)$$

IC de dois lados:  $1 - \alpha/2 = 0.95$

graus de liberdade :  $n - 1 = 14$

$$t_{1-\alpha/2, 14} = t_{0.95, 14} = 1.761$$

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{x})^2}{n-1}} = 9.43$$

$$29.53 \pm 1.761 \left( \frac{9.43}{\sqrt{15}} \right)$$
$$(25.2423 \quad , \quad 33.8177)$$

Qual o maior erro que pode incorrer?

$$c_2 = (1+e)\bar{x} \rightarrow 33.8177 = (1+e)29.53$$

$$e = 33.8177 / 29.53 - 1 = 0.145$$

erro de 14.5% no maximo

# Exercicios de Revisao 5

d) Qual e a porcentagem de programas que fazem no maximo 25 operacoes de I/O?

$$p = 6/15 = 0.40$$

Voce pode dizer, com 90% de confianca, que menos que 50% dos programas realizam no maximo 25 operacoes de I/O?

CI de 90% de um lado so para a proporcao:

$$IC \rightarrow -\infty, p + t_{1-\alpha, n-1} \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$$
$$-\infty, 0.40 + 1.345 \sqrt{\frac{0.4(0.6)}{15}} \quad (-\infty, 0.57)$$

Com 90% de confianca, nao posso dizer que menos que 50% dos programas realizam no maximo 25 operacoes. Posso dizer entretanto que menos que 60% dos programa realizam no max. 25 operacoes.

# Exercicios de Revisao 5

e) O sistema A consegue suportar, em media, no maximo 450 operacoes de I/O por segundo. O sistema A ira suportar a execucao simultanea do mix de programas acima?

Soma total de # I/O/s =  $C = (14 + 15 + \dots) = 443$

Preciso determinar CI para C:

$$C \pm t_{1-\alpha/2, n-1} s_C \quad \text{ou} \quad -\infty, C + t_{1-\alpha, n-1} s_C$$

O que é  $s_C$  ?

$$C = X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_n$$

$$\text{Var}(C) = 1^2 \text{Var}(X_1) + 1^2 \text{Var}(X_2) + \dots + 1^2 \text{Var}(X_n)$$

Assumindo todas as VAs são iid :  $\text{Var}(X_1) = \text{Var}(X_2) = \dots = \text{Var}(X_n)$

$$\text{Var}(C) = n \text{Var}(X) \quad s_C = s \sqrt{n} = 9.43 \sqrt{15} = 36.52$$

# Exercicios de Revisao 5

CI de 90% de um lado so para C:

$$-\infty, C + t_{1-\alpha, n-1} s_C$$

$$-\infty, 443 + 1.345 \times 36.52$$

$$(-\infty, 492.12)$$

Nao posso dizer que o sistema A aguentaria a carga com 90% de confianca uma vez que o intervalo de confianca inclui o 450