

Unidad I

ASPECTOS PRELIMINARES

“La estadística es la gramática de la ciencia”

Karl Pearson

Introducción

Los procedimientos de inferencia estadística pueden ser divididos en paramétricos y no paramétricos.

Los métodos paramétricos requieren principalmente del cumplimiento de ciertos supuestos sobre todo relacionados a la distribución de la variable que se desea analizar. Los métodos no paramétricos no requieren del conocimiento de la distribución de origen de dicha variable, es por esta razón que a estos procedimientos también se les conoce como de Libre Distribución.

Fue Jacob Wolfowitz, en el año 1942, el primero en utilizar el término no paramétrica para diferenciar las situaciones (análisis de datos o métodos) donde se desconoce o no es interés conocer la forma funcional (distribución teórica) de las variables que se desean analizar.

La Estadística No Paramétrica moderna comprende una gran cantidad de métodos para el análisis de datos. Algunos de ellos son: métodos basados en el ranqueo, pruebas de permutación, métodos bootstrap, etc.

Muchos de los métodos no paramétricos son utilizados como alternativa de métodos que requieren la verificación del supuesto de normalidad. Sin embargo, los métodos no paramétricos pueden resolver problemas que incluyen el análisis de tablas de contingencia, pruebas de alternativas ordenadas, pruebas multivariadas y el análisis de datos censurados.

Inicialmente los métodos no paramétricos fueron desarrollados para diseños sencillos y para conjuntos de datos pequeños. Sin embargo, la disponibilidad de computadoras más veloces ha hecho que estadística no paramétrica sea un área propia dentro del campo de la estadística.

En la actualidad, desarrollar manualmente cualquier procedimiento estadístico no es recomendable, por lo que es necesario obtener e interpretar adecuadamente los resultados obtenidos con la ayuda de un programa estadístico.

Existen diversos programas comerciales como: Minitab, SPSS, SAS o S Plus. También hay los de libre acceso como el R o Python. Otros de menor difusión pero que pueden ser de mucha utilidad sobre todo en el desarrollo de métodos no paramétricos como: Resampling Stats (www.resample.com) o StatXact (www.cytel.com).

Esta primera unidad, al que se le ha denominado Aspectos Preliminares, tiene como objetivo desarrollar algunos conceptos que servirán como base para el entendimiento de definiciones de posteriores unidades.

1. Definiciones

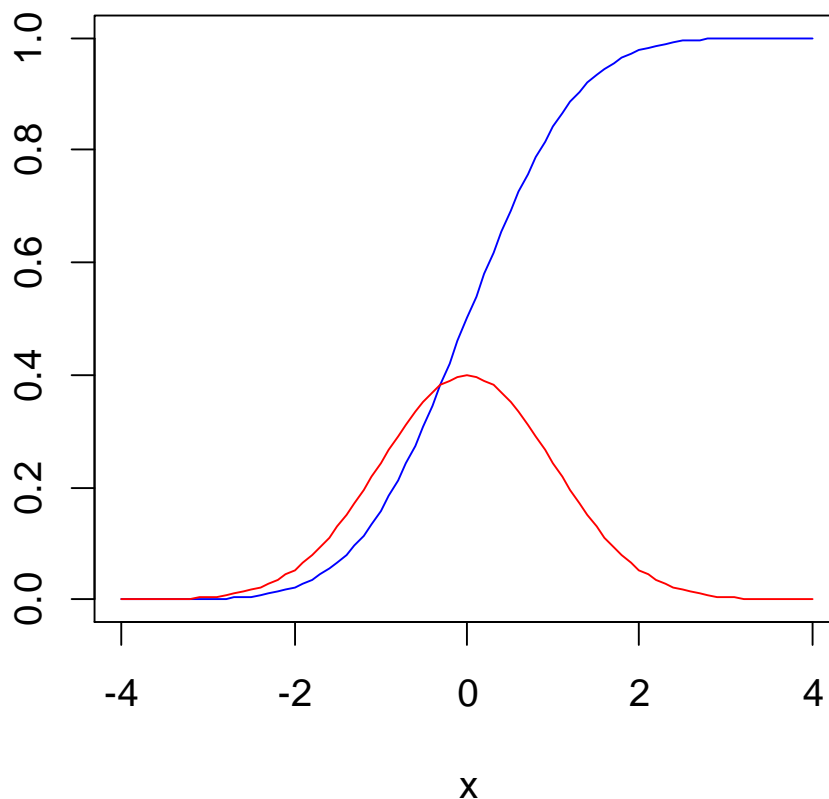
a) Función de Distribución Acumulada y Función de densidad de probabilidad

Suponga que X es una variable aleatoria que denota una observación seleccionada aleatoriamente de una población. La función de distribución acumulada (FDA) de X es la probabilidad de que la variable aleatoria X tome un valor menor o igual que x . Esto se denota como $F(x) = P(X \leq x)$.

Por ejemplo, si las estaturas del 40% de una población es menor igual a 1.65 m., entonces la probabilidad que una persona seleccionada al azar de esa población tenga una estatura menor o igual a 1.65 m es 0.4 o $F(1.65)=0.4$.

Si medimos variables continuas, como el peso, la estatura o la temperatura, entonces las probabilidades pueden ser expresadas como áreas bajo la curva $f(x)$ llamadas función de densidad de probabilidad.

```
#Genera una secuencia de -4 a 4 con espaciamiento de 0.1
x<-seq(-4,4,0.1)
y1<-pnorm(x)
y2<-dnorm(x)
plot(x,y1,type="l",col="blue",ylab="")
points(x,y2,type="l", col="red",ylab="")
#otra forma
plot(x,y1,type="l", col="blue",ylab="")
lines(x,y2,type="l",col="red",ylab="")
```



b) Principales Distribuciones de Probabilidad Continua

La mayoría de procedimientos usados en la estadística clásica están basados en la distribución Normal. La distribución Normal o más precisamente la función de densidad de probabilidad normal es la famosa curva en forma de campana dada por:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \quad -\infty < x < \infty$$

Las cantidades μ y σ son respectivamente la media y la desviación estándar de la distribución. El caso especial de $\mu=0$ y $\sigma=1$ es llamada la distribución normal estándar. Se denota como $(100p)$ al i -ésimo percentil de la distribución normal estándar. Esto es, si Z es una variable aleatoria normal estándar, $P(Z \leq z_p) = p$. Valores comunes para z_p son $z_{0.90}=1.282$, $z_{0.95}=1.645$ y $z_{0.975}=1.96$.

La distribución Normal es importante no solo como un modelo para la distribución de una población sino también como una distribución muestral. Si \bar{X} es la media muestral de una muestra aleatoria de tamaño n de una población con media μ y desviación estándar σ , entonces (como consecuencia del Teorema Central del Límite) la media muestral tiene una distribución aproximadamente normal con media μ y desviación estándar σ/\sqrt{n} para un n suficientemente grande. Intuitivamente, los promedios tienen distribución aproximadamente normal independientemente de la distribución de la población dado que σ no es infinito.

En ciertas ocasiones se podría tratar con familias de distribuciones de la forma:

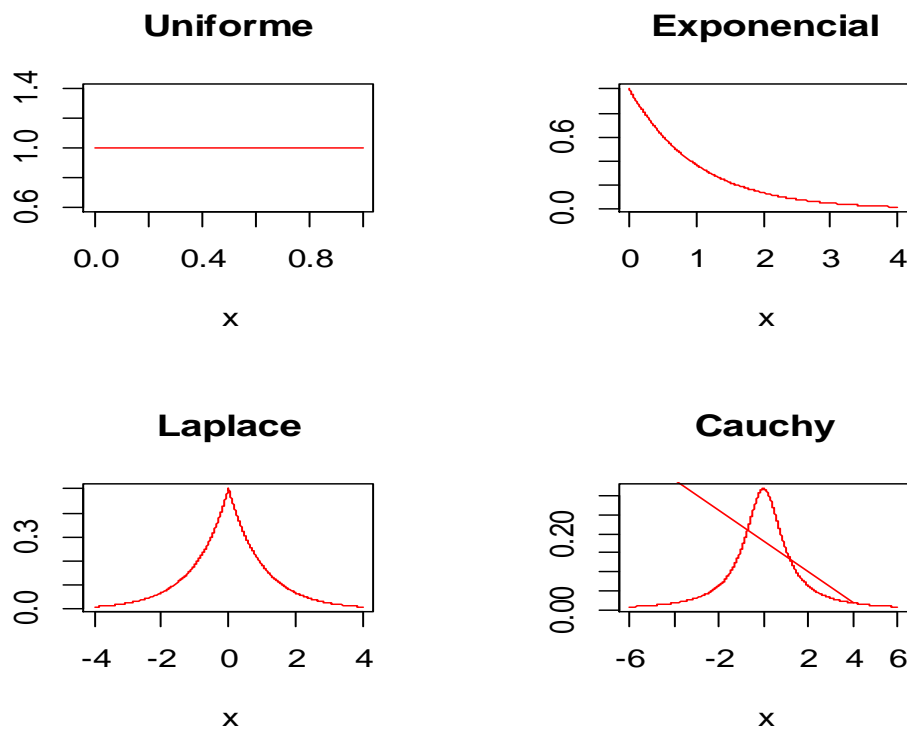
$$f(x) = \frac{1}{b} h\left(\frac{x-a}{b}\right)$$

Donde: $h(z)$ es una forma estándar de la distribución. En el caso de la distribución normal $a=\mu$, $b=\sigma$ y $h(z)$ es la función de densidad de probabilidad de la distribución normal estándar. Los parámetros a y b son denominados parámetros de locación y escala respectivamente. Ellos tienen el efecto de desplazamiento y ampliación de la distribución estándar. Las formas funcionales y gráficos de las funciones de densidad de probabilidad de las distribuciones Uniforme, Exponencial, Laplace y Cauchy son:

Tipo	Forma Funcional	Media	Varianza
Uniforme	$h(z)=1, 0 < z < 1$	1/2	1/12
Exponencial	$h(z) = e^{-z} \quad z > 0$	1	1
Doble Exponencial o Laplace	$h(z) = \frac{e^{- z \sqrt{2}}}{\sqrt{2}} \quad -\infty < z < \infty$	0	1
Cauchy	$h(z) = \frac{1}{\pi(1+z^2)} \quad -\infty < z < \infty$	No existe	No existe

```
par(mfrow=c(2,2))
x1<-seq(0,1,0.01)
y1<-dunif(x1)
plot(x1,y1,type="l",main="Uniforme",xlab="x", ylab="",
col="red")
x2<-seq(0,4,0.01)
y2<-dexp(x2)
plot(x2,y2,type="l", main="Exponencial", xlab="x",
ylab="", col="red")
library(smoothmest)
x3<-seq(-4,4,0.01)
y3<- ddoublex (x3)
plot(x3,y3,type="l", main="Laplace", xlab="x", ylab="",
col="red")
x4<-seq(-6,6,0.01)
y4<-dcauchy(x4)
plot(x4,y4,type="l", main="Cauchy", xlab="x", ylab="",
col="red")
```

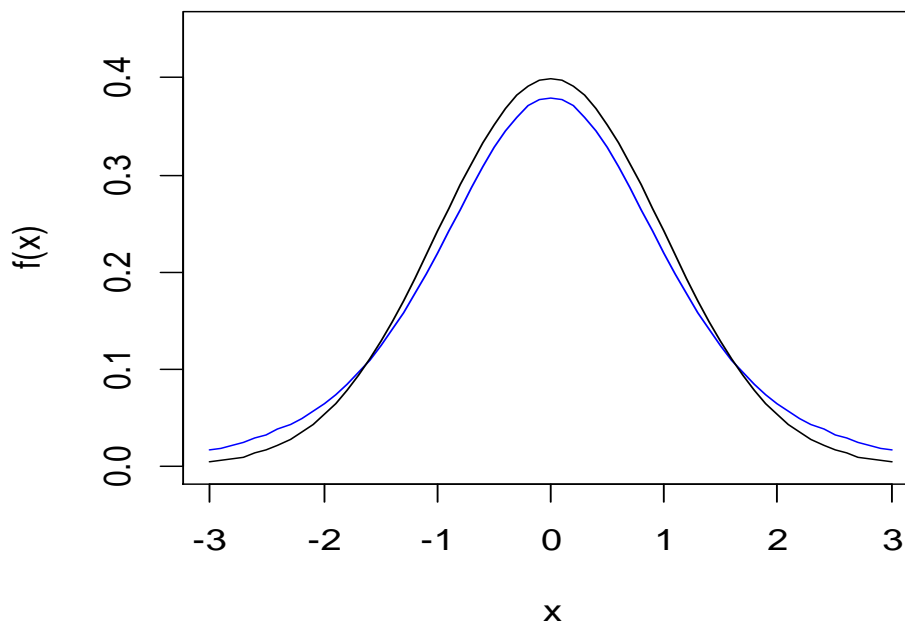
Dos características de tales distribuciones son importantes en estadística no paramétrica. Una es el “peso” de la cola en la distribución que ocasionalmente produce observaciones que son más extremas que otras.



Distribuciones con colas leves no producen observaciones extremas. Las distribuciones uniforme y normal son distribuciones de colas livianas. Las distribuciones exponencial y Laplace tienen colas más pesadas y la distribución de Cauchy tienen colas mucho más pesadas más aún cuando su media y desviación estándar no existen.

Esto se puede apreciar comparando gráficamente dos distribuciones muy conocidas como la z y t

```
x<-seq(-3,3,0.1)
#Evalúa la densidad de una t con 5 grados de libertad
# para cada uno de los valores la secuencia
t<-dt(x,5)
z<-dnorm(x)
par(mfrow=c(1,1))
plot(x,t,type="l",col="blue",ylab="f(x)",
ylim=c(0,0.45))
points(x,z,type="l")
```



Se puede apreciar que la distribución t es ligeramente más dispersa debido a que su varianza es igual a $5/(5-2)=5/3 \cong 1.67 > 1$ que es la varianza de una normal estándar.

La otra importante característica es la asimetría de la distribución. La distribución exponencial es asimétrica hacia la derecha, mientras que las distribuciones Uniforme, Normal, Laplace y Cauchy son distribuciones simétricas.

c) La distribución Binomial

La distribución binomial juega un rol importante en la estadística aplicada. Eso surge cuando muestras aleatorias son tomadas de una población con elementos que pueden ser clasificados exactamente en dos categorías, tales como éxito y fracaso, si o no, bueno o defectuoso. Se puede etiquetar a cada elemento de la población con 0 o 1 dependiendo de la categoría a la que pertenece el elemento.

Se denota a π como fracción de 1's en la población. Por ejemplo, suponga que se tiene una población de votantes y 40% de la población está a favor del candidato Rodríguez, es decir $\pi=0.4$.

Suponga que se selecciona aleatoriamente n elementos de la población. Si X denota el número de 1's, la distribución de probabilidad de X es llamada distribución binomial y su representación matemática es:

$$\binom{n}{x} \pi^x (1-\pi)^{n-x} \quad x=0,1,\dots,n$$

El valor esperado y la varianza de una variable aleatoria binomial es dado por:

$$E(X) = n\pi, \quad V(X) = n\pi(1-\pi)$$

Para n grande, la distribución binomial puede ser aproximada a la distribución normal con la misma media y varianza.

Por ejemplo:

Si $X \sim \text{Bin}(n=8, \pi=0.6)$

$P(X=3) =$

`dbinom(3, 8, 0.6)`

$P(X \leq 2) =$

`pbinom(2, 8, 0.6)`

$P(X > 3)$

`1-pbinom(3, 8, 0.6)`

`pbinom(3, 8, 0.6, lower.tail=FALSE)`

$P(X \geq 2)$

`1-pbinom(1, 8, 0.6)`

`pbinom(1, 8, 0.6, lower.tail=FALSE)`

#Para dividir la pantalla gráfica en una fila y dos
#columnas

`par(mfrow=c(1,2))`

`x <- 0:10`

`pX <- dbinom(x, size = 10, prob = 0.3)`

`plot(x, pX, type = "h", ylab = "Pr(X = x)", ylim = c(0, 0.4), main = "binomial(n = 10, p = 0.5)")`

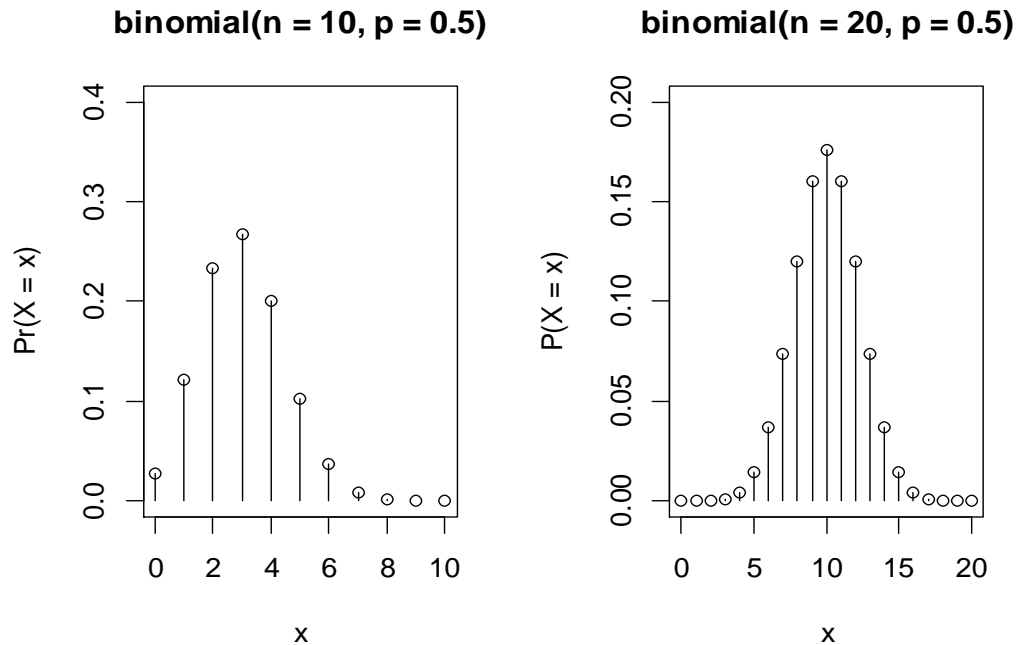
`points(x, pX, pch = 21)`

`x <- 0:20`

`pX <- dbinom(x, size = 20, prob = 0.5)`

`plot(x, pX, type = "h", ylab = "P(X = x)", ylim = c(0, 0.2), main = "binomial(n = 20, p = 0.5)")`

`points(x, pX, pch = 21)`



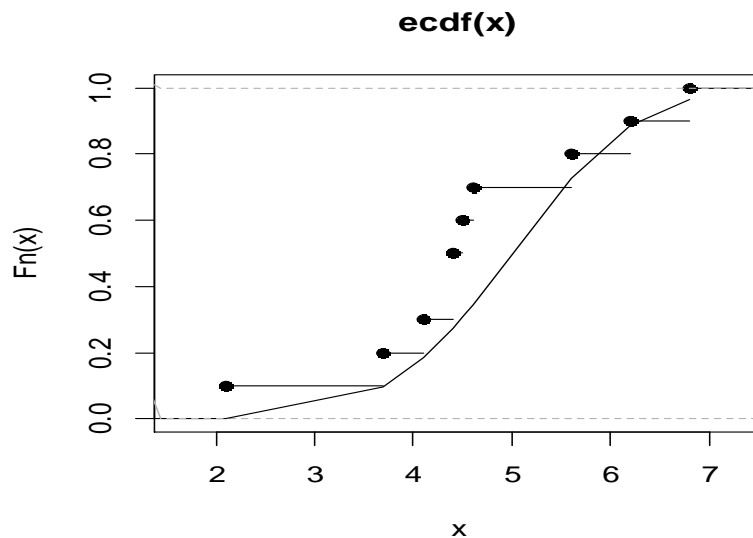
d) Función de Distribución Acumulada Empírica (FDAE)

Sea X_1, X_2, \dots, X_n una muestra aleatoria de una población con Función de Distribución Acumulada (FDA) continua F , una Función de Distribución Acumulada Empírica (FDAE) basada en una muestra es definida como:

$$F_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i \leq x) = \frac{\text{número de valores de la muestra} \leq x}{n}$$

```
set.seed(20)
datos<-round(sort(rnorm(10,5,1)),1)
[1] 2.1 3.7 4.1 4.4 4.4 4.5 4.6 5.6 6.2 6.8
```

```
par(mfrow=c(1,1))
plot.ecdf(datos)
y<-pnorm(datos,5,1)
points(datos,y,type="l")
```



```
#lee los datos
fdae<-ecdf(datos)
#brinda la probabilidad de la fdae para cada dato
```

x	$F_n(x)$
$x_i \leq 2.1$	0.1
$x_i \leq 3.7$	0.2
$x_i \leq 4.1$	0.3
$x_i \leq 4.4$	0.5
$x_i \leq 4.5$	0.6
$x_i \leq 4.6$	0.7
$x_i \leq 5.6$	0.8
$x_i \leq 6.2$	0.9
$x_i \leq 6.8$	1.0

```
pfdae<-fdae(datos)
[1] 0.1 0.2 0.3 0.5 0.5 0.6 0.7 0.8 0.9 1.0
```

e) Intervalos de Confianza y Pruebas de Hipótesis

Suponga que deseamos estimar la media de una población, la media muestral basada en una muestra aleatoria de tamaño n es llamada un estimador puntual de la media poblacional.

Si se quiere estimar un intervalo que contenga a la media poblacional, se puede considerar un intervalo que puede ser calculado cuando la población tiene una distribución normal con media desconocida, pero varianza conocida.

Desde que la población tiene distribución normal, la cantidad estandarizada

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$$

tiene una distribución normal estándar para cualquier tamaño de muestra. Si la población no tiene distribución normal entonces tiene una distribución aproximadamente normal para muestras grandes. Como la variable aleatoria normal estándar Z tiene la propiedad;

$$P\left(-1.96 < \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} < 1.96\right) = 0.95$$

Un intervalo del 95% de confianza para la media de la población es obtenida resolviendo esa desigualdad para μ , con lo cual se tiene:

$$\bar{X} - 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Es un intervalo del 95% de confianza que indica que entre todos los intervalos de este tipo el 95% contiene a la media poblacional y el 5% no.

Una prueba de hipótesis estadística es un procedimiento para decidir entre dos hipótesis llamadas hipótesis nula (denotada por H_0) e hipótesis alterna (denotada por H_1).

La cantidad

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$$

Es llamada la prueba estadística para evaluar la media.

Si se desconoce la varianza poblacional σ puede ser sustituida por la desviación estándar muestral S y utilizar la prueba estadística t .

$$t = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}$$

La regla de decisión tiene la propiedad de que, si H_0 es verdadero, entonces la probabilidad de rechazar H_0 es α . El valor de α es llamado el nivel de significación de la prueba y usualmente es 0.05.

El p-valor es la probabilidad que la prueba estadística es igual o más extrema que el valor observado bajo la hipótesis nula.

Si el p-valor es grande el resultado de la muestra es consistente con la hipótesis nula y la hipótesis nula no es rechazada.

Actualmente se puede resumir el proceso de hipótesis estadística en 4 pasos:

H_0

H_1

α

Pvalor

Si pvalor < α se rechaza H_0

Conclusión

El cálculo del p-valor depende la prueba estadística y de la hipótesis alterna.

- ✓ **Para la media poblacional (varianza conocida), proporción poblacional, diferencia de medias poblacionales (varianzas conocidas) y diferencia de proporciones**

Si la prueba es bilateral, y el Z_{cal} es positivo pvalor= $2P(Z > Z_{cal})$

y el Z_{cal} es negativo pvalor= $2P(Z < Z_{cal})$

Si la prueba es unilateral derecha pvalor= $P(Z > Z_{cal})$

Si la prueba es unilateral izquierda pvalor= $P(Z < Z_{cal})$

- ✓ **Para la media poblacional (varianza desconocida) y diferencia de medias poblacionales (varianzas desconocidas) y diferencia de medias de muestras relacionadas**

Si la prueba es bilateral, y el t_{cal} es positivo pvalor= $2P(t_{(gl)} > t_{cal})$

y el t_{cal} es negativo pvalor= $2P(t_{(gl)} < t_{cal})$

Si la prueba es unilateral derecha pvalor= $P(t_{(gl)} > t_{cal})$

Si la prueba es unilateral izquierda pvalor= $P(t_{(gl)} < t_{cal})$

- ✓ **Para la varianza poblacional**

Si la prueba es bilateral y $\chi^2_{cal} > \chi^2_{(n-1,0,5)}$ pvalor= $2P(\chi^2_{(n-1)} > \chi^2_{cal})$

$\chi^2_{cal} \leq \chi^2_{(n-1,0,5)}$ pvalor= $2P(\chi^2_{(n-1)} < \chi^2_{cal})$

Si la prueba es unilateral derecha $p\text{valor} = P(\chi^2_{(n-1)} > \chi^2_{\text{cal}})$

Si la prueba es unilateral izquierda $p\text{valor} = P(\chi^2_{(n-1)} < \chi^2_{\text{cal}})$

✓ **Para la razón de varianzas poblacionales**

Si la prueba es bilateral y $F_{\text{cal}} > F_{(n1-1, n2-1, 0.5)}$ $p\text{valor} = 2P(F_{(n1-1, n2-1)} > F_{\text{cal}})$

$F_{\text{cal}} \leq F_{(n1-1, n2-1, 0.5)}$ $p\text{valor} = 2P(F_{(n1-1, n2-1)} < F_{\text{cal}})$

Si la prueba es unilateral derecha $p\text{valor} = P(F_{(n1-1, n2-1)} > F_{\text{cal}})$

Si la prueba es unilateral izquierda $p\text{valor} = P(F_{(n1-1, n2-1)} < F_{\text{cal}})$

Ejemplo:

Los pesos (en kg) de 10 personas son:

77.3; 78.8; 74.0; 75.3; 78.6; 78.5; 79.6; 78.2; 77.7 y 72.0

Pruebe a un nivel de significación de 0.05 si el peso promedio de las personas es diferente a 75 kg.

```
pesos<-c(77.3, 78.8, 74.0, 75.3, 78.6, 78.5, 79.6, 78.2, 77.7, 72.0)
```

```
t.test(pesos, alternative="two.sided", mu=75)
```

```
One Sample t-test
data: pesos
t = 2.5887, df = 9, p-value = 0.02928
alternative hypothesis: true mean is not equal to 75
95 percent confidence interval:
 75.25229 78.74771
sample estimates:
mean of x
 77
```

En R el paquete BSDA con las funciones `z.test`, `tsum.test` y `zsum.test` permiten realizar las pruebas de hipótesis para una media varianza conocida y desconocida con datos resumidos.

f) Métodos Paramétricos versus No Paramétricos

El análisis de los datos frecuentemente empieza considerando a la distribución normal como un modelo que describe la distribución de la población. Si esta distribución es razonable o si la aproximación a la normal es considerada adecuada, entonces el análisis podría ser llevado a cabo usando métodos basados en la teoría normal. Si la distribución normal no es apropiada, es común considerar la posibilidad de una transformación de los datos. Por ejemplo, una simple transformación de la forma $Y = \log(X)$ puede proporcionar datos distribuidos normalmente, de tal manera que los métodos basados en la teoría normal pueden ser aplicados a los datos transformados.

Si ninguno de esos procedimientos parece razonable, hay dos posibles procedimientos.

- Si existe la posibilidad de identificar el tipo de distribución que es apropiada, por ejemplo, se demuestra que los datos siguen un comportamiento exponencial, entonces debemos usar métodos que son aplicables específicamente para esa distribución. Es decir, utilizar métodos paramétricos.
- Si no hay suficiente información para determinar la forma de la distribución o los datos provienen de una distribución para la cual los métodos no se encuentran disponibles. En tales situaciones uno no espera realizar insostenibles supuestos y es aquí donde los métodos no paramétricos juegan un importante rol.

Métodos no paramétricos requieren de un mínimo número de supuestos sobre la forma de la distribución de la población. Por ejemplo, se podría asumir que los datos provienen de una población que tiene distribución continua, o simétrica. También, podría asumirse que los datos provienen de una distribución que depende de un parámetro de locación y escala, pero no interesa la distribución teórica de donde provienen los datos.

En contraste métodos paramétricos requieren que la forma de la distribución de la población sea completamente especificada a excepción de sus parámetros. Por ejemplo, la prueba t para la media asume que las observaciones son seleccionadas de una población que tiene distribución normal y que solo son desconocidos los valores de la media y la desviación estándar poblacional.

La simplicidad de los métodos no paramétricos, la disponibilidad de estos métodos en paquetes estadísticos y las deseables propiedades estadísticas de tales métodos hacen que sean atractivos como buena herramienta de análisis de datos.

g) Potencia de una prueba

La potencia de la prueba es la probabilidad de rechazar H_0 cuando esta es falsa.

Se puede estudiar la potencia de una prueba en particular como una función de un parámetro θ , para un tamaño de muestra n y un nivel de significación α . Para calcular la potencia de una prueba, necesitamos la distribución de la prueba estadística bajo la hipótesis alterna. Algunas veces es complicado de derivar analíticamente, entonces métodos de simulación pueden ser utilizados para estimar la potencia de la prueba. Para ilustrar esto, suponga que se quiere estimar la potencia de prueba para la media μ de una población con $H_0: \mu=10$, entonces se puede generar con la computadora una muestra aleatoria de una distribución normal con media 13 y varianza igual a 1 y aplicar la prueba con un nivel de significación α específico. Si la hipótesis es rechazada, se puede denominar un éxito. Se repite este procedimiento r veces y se calcula la proporción de éxitos, esto es la proporción de veces cuando las pruebas rechazan la hipótesis nula. Para estimar la potencia sobre la alternativa, por ejemplo, se repite el proceso, pero con muestras provenientes de una distribución normal con media 10.5 y varianza 1.

La proporción de éxitos de esas simulaciones brinda una estimación empírica de la potencia de la prueba para la distribución normal cuando la media es 10.5. Esta técnica de simulación es particularmente útil cuando una nueva prueba es desarrollada con una distribución complicada para la hipótesis nula y/o alternativa y queremos aprender sobre el rendimiento de la prueba.

En el caso de la nula, el número de éxitos sigue una distribución Binomial con $n=r$ y $\pi=\alpha$ y esto puede ser usado para hallar el error de simulación asociado a la proporción de éxitos en términos de su error estándar el cual es: $\sqrt{\alpha(1-\alpha)/r}$. Es claramente deducible que a medida que el número de simulaciones se incrementa este error estándar será cada vez más pequeño.

Por ejemplo, si se realiza 100 simulaciones y se evalúa la hipótesis a un $\alpha=0.05$ el error estándar de la simulación es aproximadamente 0.0217, mientras que si se realizan 1000 simulaciones este error estándar se reduce a 0.0069.

Una prueba es llamada más poderosa para una hipótesis alternativa específica si no hay otra prueba del mismo tamaño que tenga mayor poder en contra de la misma alternativa.

La potencia de prueba se usará más adelante para comparar dos o más pruebas que tengan un mismo objetivo, por ejemplo, cuando se desea analizar una mediana se puede hacer uso de las pruebas de Signos o Wilcoxon, entonces la interrogante es ¿cuál de las dos pruebas es la más poderosa bajo condiciones similares?

h) Eficiencia de Pitman

Otro tipo de criterio que puede ser utilizado entre dos o más pruebas que son comparables y bien definidas es el concepto denominado eficiencia de Pitman. En la teoría de estimación puntual, la eficiencia de dos estimadores insesgados para un parámetro es definido como la razón de sus varianzas. En algunas situaciones, el valor límite de esta razón puede ser interpretado como el número relativo de observaciones adicionales necesarias para que el estimador menos eficiente tenga la misma precisión. La idea de eficiencia está relacionada cuando dos pruebas estadísticas son de interés si la potencia es como una medida de exactitud, pero las pruebas pueden ser comparadas bajo condiciones equivalentes (como si ambos estimadores fueran insesgados) y hay muchas variables en la hipótesis que probar. La forma más común de comparar dos pruebas es hacer a todos los factores equivalentes a excepción del tamaño de muestra.

La eficiencia de potencia de una prueba A relacionada a una prueba B, donde ambas pruebas son para la misma hipótesis nula y alterna, la misma región de rechazo y el mismo nivel de significación, es la razón n_b/n_a , donde n_a es el número de observaciones requeridas para la prueba A para que la potencia de la prueba A sea igual a la potencia de la prueba B cuando n_b observaciones son empleadas. Dado que la eficiencia de la potencia generalmente depende del nivel de significación seleccionado, esto es difícil de calcular e interpretar. El problema puede ser evitado en muchos casos definiendo un tipo de eficiencia potencia límite.

Si A y B son dos pruebas consistentes de una hipótesis nula H_0 y alternativa H_1 , con un nivel de significación α , la Eficiencia Asintótica Relativa (EAR) de una prueba A relacionada a una prueba B es el valor límite de la razón n_b/n_a , donde n_a es el número de observaciones requeridas para una prueba A para que la potencia de la prueba A sea igual a la potencia de la prueba B basada en n_b observaciones.

Por ejemplo, se desean comparar las pruebas de Signos y de Wilcoxon bajo las mismas condiciones se utilizan 25 observaciones para cada prueba. Si con la prueba de Wilcoxon se obtuvo una potencia del 92% y con la prueba de signos una potencia del 86% ¿Cuántas observaciones requiere la prueba de Signos para que sea igual de potente que la prueba de Wilcoxon?

i) Corrección por continuidad

En algunos casos una simple aproximación de la hipótesis nula es más exacta para aplicaciones prácticas con tamaños de muestras moderados. Cuando las distribuciones asintóticas son continuas (como la normal o la chi cuadrado) la aproximación puede ser mejorada introduciendo un factor de corrección por continuidad.

En general, si t_0 es el valor observado de la prueba estadística T cuya distribución de la hipótesis nula puede ser aproximada por una distribución normal, entonces:

Cuando la hipótesis alterna es de cola derecha el valor de la prueba es:

$$Z_c = \frac{(t_0 - 0.5) - \mu_T}{\sigma_T} \text{ y el p-valor se calcula como } 1 - P(Z < Z_c).$$

Cuando la hipótesis alterna es de cola izquierda el valor de la prueba es:

$$Z_c = \frac{(t_0 + 0.5) - \mu_T}{\sigma_T} \text{ y el p-valor se calcula como } P(Z < Z_c)$$

Por ejemplo:

Para la prueba Binomial la aproximación asintótica a la normal está dado por:

$$Z = \frac{(x \pm 0.5) - n\pi_0}{\sqrt{n\pi_0(1 - \pi_0)}}$$

Donde:

x: Número de éxitos

n: Tamaño de la muestra.

π_0 : Proporción hipotética

Usar $x+0.5$ si $x < n\pi_0$ y $x-0.5$ si $x > n\pi_0$

j) Tamaño del efecto

El hallazgo de efectos estadísticamente significativos (es decir, cuando se rechaza la Hipótesis Nula) pueden ser irrelevantes cuando son de baja magnitud, lo que puede ocurrir cuando las muestras son bastante grandes.

Por ello, se dice que las pruebas de significación estadística son insuficientes en situaciones prácticas, donde la magnitud del efecto observado es fundamental. Los procedimientos estadísticos de tamaño del efecto tienen como finalidad fundamental la cuantificación de la relevancia del efecto obtenido. Dicho de otra forma, se trata de establecer si efectos estadísticamente significativos son relevantes en el campo de aplicación de la investigación.

El tamaño del efecto es el nombre asignado a una familia de índices cuyo objetivo es medir la magnitud del efecto estudiado, por ejemplo, en el caso de los contrastes de diferencia de medias, uno de los índices más empleados es la d de Cohen o la g de Hedges.

d de Cohen

$$d = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{s_1^2 + s_2^2}{2}}}$$

Se considera que:

Si $d < 0.5$ se tiene un efecto de magnitud pequeña,

Si $0.5 \leq d \leq 0.8$ se tiene un efecto de magnitud media y

Si $d > 0.8$ indica un efecto de magnitud alta.

g de Hedges

$$d = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{(n_1 + n_2 - 2)}}} \left(1 - \frac{3}{4(n_1 + n_2) - 9} \right)$$

En R existe la función `ci.smd` del paquete MBESS que permite estimar intervalos de confianza para tamaños de efectos de algunas pruebas estadísticas.

2. Pautas para la elección de la adecuada Prueba No Paramétrica

En las próximas unidades se discutirán diversas pruebas no paramétricas. Al finalizar el curso la idea es saber diagnosticar adecuadamente cuál es la prueba no paramétrica que se debe utilizar dada cierta inquietud de un investigador, esto debido a que se debe considerar a los programas estadísticos solo como herramientas que nos pueden facilitar los cálculos.

A continuación, se presentan algunas pautas que pueden ayudar a la elección de una prueba estadística:

- Tener claro el objetivo de la investigación.
- Determinar si para cumplir los objetivos se requiere de una muestra, una muestra relacionada, dos muestras independientes, una muestra k relacionada o k muestras independientes.
- Definir adecuadamente las variables a utilizar y determinar de qué tipo son (cualitativas o cuantitativas).
- Verificar si la prueba elegida requiere cumplir ciertos supuestos y si estos no se cumplen, buscar una prueba alternativa.