线性代数第二次作业

2024 年 3 月 17 日

《线性代数习题册 (第三版)》

- $9 \sim 14$页: 矩阵的加法 数乘 乘法

习题答案会上传至 github 中.

图: github 链接二维码

一、设 $A=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & -1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}3 & 0\\ 1 & 2\end{bmatrix}$, 求 $2A-3B$.

一、设 $A=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & -1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}3 & 0\\ 1 & 2\end{bmatrix}$, 求 $2A-3B$.

解: 直接计算即可

$$2A-3B=2\begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & -1\end{bmatrix}-3\begin{bmatrix}3 & 0\\ 1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 6\\ 4 & -2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}9 & 0\\ 3 & 6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-7 & 6\\ 1 & -8\end{bmatrix}$$

二、计算下列矩阵乘积.

$$1.\ \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

二、计算下列矩阵乘积.

$$1.\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

解:1. 按照矩阵乘法定义计算

$$\text{原式} = \begin{bmatrix} 1\times 2+2\times 1+(-1)\times 1 & 1\times 3+2\times 1+(-1)\times(-1) \\ (-2)\times 2+1\times 1+0\times 1 & (-2)\times 3+1\times 1+0\times(-1) \\ 1\times 2+0\times 1+3\times 1 & 1\times 3+0\times 1+3\times(-1) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -3 & -5 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$$

二、计算下列矩阵乘积.

$$2.\ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix}$$

二、计算下列矩阵乘积.

$$2.\ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix}$$

解:2. 按照矩阵乘法计算即可.

$$\text{原式} = \begin{bmatrix} ax & bx & cx \\ ay & by & cy \\ az & bz & cz \end{bmatrix}$$

二、计算下列矩阵乘积.

$$3. \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{bmatrix}$$

二、计算下列矩阵乘积.

$$3. \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{bmatrix}$$

解:3. 按照矩阵乘法计算即可.

$$原式 = \begin{bmatrix} a_1b_1 & a_2b_1 & \cdots & a_nb_1 \\ a_1b_2 & a_2b_2 & \cdots & a_nb_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1b_n & a_2b_n & \cdots & a_nb_n \end{bmatrix}$$

二、计算下列矩阵乘积.

$$4.\ \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

二、计算下列矩阵乘积.

$$4.\ \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

解:4. 矩阵乘法具有结合律, 即 $ABC = (AB)C = A(BC)$, 因此先将任意两个相邻矩阵相乘计算即可.

$$\text{原式} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ a_{13}x_1 + a_{23}x_2 + a_{33}x_3 \end{bmatrix}$$

$$= a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3$$

二、计算下列矩阵乘积.

5. 已知某公司三个部分分别销售四种商品的销售收入如下:

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \text{商品 1} & \text{商品 2} & \text{商品 3} & \text{商品 4} \end{array} \\ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \text{部门 1} \\ \text{部门 2} \\ \text{部门 3} \end{array}$$

请用矩阵乘法表示下列项:

(1) 该公司每个部门的销售收入;

(2) 该公司每种商品的销售收入;

(3) 该公司的总销售收入

(4) 该公司第 i个部门销售第 j种商品的销售收入 a_{ij}.

技巧: 使用分量全为 1 的向量做乘法可以将对应项加起来.

二、计算下列矩阵乘积.

5. 已知某公司三个部分分别销售四种商品的销售收入如下:

$$A = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} \text{商品 1} & \text{商品 2} & \text{商品 3} & \text{商品 4} \end{array} \\ & \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix} \begin{array}{c} \text{部门 1} \\ \text{部门 2} \\ \text{部门 3} \end{array} \end{array}$$

请用矩阵乘法表示下列项:

(1) 该公司每个部门的销售收入;

二、计算下列矩阵乘积.

5. 已知某公司三个部分分别销售四种商品的销售收入如下:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} \text{商品 1} & \text{商品 2} & \text{商品 3} & \text{商品 4} \end{array} \\ A = & \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \text{部门 1} \\ \text{部门 2} \\ \text{部门 3} \end{array}$$

请用矩阵乘法表示下列项:

(1) 该公司每个部门的销售收入;

解:(1) 同一部门的销售收入即同一行所有元相加, 因此各个部分销售收入组成的向量即为

$$A\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}+a_{12}+a_{13}+a_{14} \\ a_{21}+a_{22}+a_{23}+a_{24} \\ a_{31}+a_{32}+a_{33}+a_{34} \end{bmatrix}$$

二、计算下列矩阵乘积.

5. 已知某公司三个部分分别销售四种商品的销售收入如下:

$$A = \begin{array}{cc} \begin{matrix} \text{商品 1} & \text{商品 2} & \text{商品 3} & \text{商品 4} \end{matrix} & \\ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix} & \begin{matrix} \text{部门 1} \\ \text{部门 2} \\ \text{部门 3} \end{matrix} \end{array}$$

请用矩阵乘法表示下列项:

(2) 该公司每种商品的销售收入;

二、计算下列矩阵乘积.

5. 已知某公司三个部分分别销售四种商品的销售收入如下:

$$A = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} \text{商品 1} & \text{商品 2} & \text{商品 3} & \text{商品 4} \end{array} \\ & \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{部门 1} \\ \text{部门 2} \\ \text{部门 3} \end{array} \end{array}$$

请用矩阵乘法表示下列项:

(2) 该公司每种商品的销售收入;

解:(1) 同一商品的销售收入即同一列所有元相加, 因此各个商品销售收入组成的向量即为

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} A$$

$$= [a_{11} + a_{21} + a_{31}, a_{12} + a_{22} + a_{32}, a_{13} + a_{23} + a_{33}, a_{14} + a_{24} + a_{34}]$$

二、计算下列矩阵乘积.

5. 已知某公司三个部分分别销售四种商品的销售收入如下:

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \text{商品 1} & \text{商品 2} & \text{商品 3} & \text{商品 4} \end{array} \\ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \text{部门 1} \\ \text{部门 2} \\ \text{部门 3} \end{array}$$

请用矩阵乘法表示下列项:

(3) 该公司的总销售收入;

二、计算下列矩阵乘积.

5. 已知某公司三个部分分别销售四种商品的销售收入如下:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} \text{商品 1} & \text{商品 2} & \text{商品 3} & \text{商品 4} \end{array} \\ A = & \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{部门 1} \\ \text{部门 2} \\ \text{部门 3} \end{array} \end{array}$$

请用矩阵乘法表示下列项:

(3) 该公司的总销售收入;

解:(3) 总销售收入即所有元相加, 利用 (1) 或者 (2) 的结果再次求和即可, 即

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{3} \sum_{i=1}^{4} a_{ij}$$

二、计算下列矩阵乘积.

5. 已知某公司三个部分分别销售四种商品的销售收入如下:

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccc} \text{商品 1} & \text{商品 2} & \text{商品 3} & \text{商品 4} \end{array} \\
A = & \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix}
\end{array}
\begin{array}{l} \text{部门 1} \\ \text{部门 2} \\ \text{部门 3} \end{array}
$$

请用矩阵乘法表示下列项:

(4) 该公司第 i个部门销售第 j种商品的销售收入 a_{ij}.

二、计算下列矩阵乘积.

5. 已知某公司三个部分分别销售四种商品的销售收入如下:

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \text{商品 1} & \text{商品 2} & \text{商品 3} & \text{商品 4} \end{array} \\ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \text{部门 1} \\ \text{部门 2} \\ \text{部门 3} \end{array}$$

请用矩阵乘法表示下列项:

(4) 该公司第 i个部门销售第 j种商品的销售收入 a_{ij}.

解:(4) 定义向量 ε_i为第 i的分量为 1 其余全为 0 的列向量, 这样就有

$$\varepsilon_i^T A \varepsilon_j = a_{ij}$$

如

$$\varepsilon_2^T A \varepsilon_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{bmatrix} = a_{23}$$

三、求 A^n,n为自然数.

$$1.A = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

由两个向量 (某一维度为一的矩阵) 相乘得到的矩阵称为秩一矩阵,秩一矩阵的连乘问题可以利用矩阵乘法的结合律简化运算.

三、求 A^n,n为自然数.

$$1.A=\begin{bmatrix}2\\3\\-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&-1\end{bmatrix}$$

解: 因为

$$A^n=\underbrace{\left(\begin{bmatrix}2\\3\\-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&-1\end{bmatrix}\right)\left(\begin{bmatrix}2\\3\\-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&-1\end{bmatrix}\right)\cdots\left(\begin{bmatrix}2\\3\\-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&-1\end{bmatrix}\right)}_{n\text{个}}$$

$$=\begin{bmatrix}2\\3\\-1\end{bmatrix}\underbrace{\left(\begin{bmatrix}1&1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\3\\-1\end{bmatrix}\right)\cdots\left(\begin{bmatrix}1&1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\3\\-1\end{bmatrix}\right)}_{n-1\text{个}}\begin{bmatrix}1&1&-1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}2\\3\\-1\end{bmatrix}6^{n-1}\begin{bmatrix}1&1&-1\end{bmatrix}=6^{n-1}\begin{bmatrix}2\\3\\-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&-1\end{bmatrix}=6^{n-1}\begin{bmatrix}2&2&-2\\3&3&-3\\-1&-1&1\end{bmatrix}$$

三、求 A^n, n为自然数.

$$2.A = \begin{bmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}$$

三、求 A^n, n为自然数.

$$2.A=\begin{bmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}$$

观察矩阵后发现可以分解为对角矩阵和只有次对角线上元为的矩阵, 两者的 n次方都可以简化运算. 其中

$$\begin{bmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{bmatrix}^k=\begin{bmatrix} a_{11}^k & & & \\ & a_{22}^k & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn}^k \end{bmatrix}$$

$$J=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ J^2=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ J^k=0(k\geqslant 3)$$

三、求 A^n, n为自然数.

$$2.A=\begin{bmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}$$

解: 由二项式定理

$$\begin{aligned}
A^n &= (aI_3+J)^n \\
&= \binom{n}{0}(aI_3)^n J^0 + \binom{n}{1}(aI_3)^{n-1}J^1 + \binom{n}{2}(aI_3)^{n-2}J^2 + \cdots + \binom{n}{n}(aI_3)^0 J^n \\
&= a^n I_3 + na^{n-1}J + \frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}J^2 + 0 + \cdots + 0 \\
&= \begin{bmatrix} a^n & 0 & 0 \\ 0 & a^n & 0 \\ 0 & 0 & a^n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & na^{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & na^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{n(n-1)}{2}a^{n-2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a^n & na^{n-1} & \frac{n(n-1)}{2}a^{n-2} \\ 0 & a^n & na^{n-1} \\ 0 & 0 & a^n \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

三、求 A^n, n为自然数.

$$2.A=\begin{bmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}$$

注: 需要注意上述二项式定理中

$$(aI_3+J)^n=\binom{n}{0}(aI_3)^nJ^0+\binom{n}{1}(aI_3)^{n-1}J^1+\binom{n}{2}(aI_3)^{n-2}J^2+\cdots+\binom{n}{n}(aI_3)^0J^n$$

实际上用到了 aI_3和 J可交换的性质, 即 $(aI_3)J=J(aI_3)$, 这样二项式定理才成立, 一般的矩阵一般不成立, 如

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

但是 $(A+B)^2=I_2=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\neq A^2+B^2+2AB=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

三、求 A^n, n为自然数.

$$3.A = \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix}$$

三、求 A^n, n为自然数.

$$3.A=\begin{bmatrix}\cos t & \sin t\\ -\sin t & \cos t\end{bmatrix}$$

对于一般或观察不出特征的矩阵求幂, 可以先乘几次找到规律后使用数学归纳法证明. 如此题计算得到

$$A^2=\begin{bmatrix}\cos 2t & \sin 2t\\ -\sin 2t & \cos 2t\end{bmatrix},\ A^3=\begin{bmatrix}\cos 3t & \sin 3t\\ -\sin 3t & \cos 3t\end{bmatrix}$$

即可猜想

$$A^n=\begin{bmatrix}\cos nt & \sin nt\\ -\sin nt & \cos nt\end{bmatrix}$$

三、求 A^n, n为自然数.

$$3.A = \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix}$$

解: 我们使用数学归纳法证明

$$A^n = \begin{bmatrix} \cos nt & \sin nt \\ -\sin nt & \cos nt \end{bmatrix}$$

若 $n-1$时成立

$$A^{n-1} = \begin{bmatrix} \cos(n-1)t & \sin(n-1)t \\ -\sin(n-1)t & \cos(n-1)t \end{bmatrix}$$

那么

$$\begin{aligned} A^n = A^{n-1} \cdot A &= \begin{bmatrix} \cos(n-1)t & \sin(n-1)t \\ -\sin(n-1)t & \cos(n-1)t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos(n-1)t\cos t - \sin(n-1)t\sin t & \sin t\cos(n-1)t + \cos t\sin(n-1)t \\ -\sin(n-1)t\cos t - \cos(n-1)t\sin t & \cos(n-1)t\cos t - \sin(n-1)t\sin t \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos nt & \sin nt \\ -\sin nt & \cos nt \end{bmatrix} \end{aligned}$$

因此得证.

四、已知对角形矩阵 $A = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{bmatrix}$, 其中 $a_i, i = 1, 2, \cdots, n$两两互不相等, 且 $AB = BA$, 证明 B必为对角形矩阵.

四、已知对角形矩阵 $A=\begin{bmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{bmatrix}$, 其中 $a_i, i=1,2,\cdots,n$两两互不相等, 且 $AB=BA$, 证明 B必为对角形矩阵.

证明: 设 $B=(b_{ij})_{n\times n}$, 那么计算可得

$$AB=\begin{bmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_1b_{11} & a_1b_{12} & \cdots & a_1b_{1n} \\ a_2b_{21} & a_2b_{22} & \cdots & a_2b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_nb_{n1} & a_nb_{n2} & \cdots & a_nb_{nn} \end{bmatrix}$$

$$BA=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_1b_{11} & a_2b_{12} & \cdots & a_nb_{1n} \\ a_1b_{21} & a_2b_{22} & \cdots & a_nb_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1b_{n1} & a_2b_{n2} & \cdots & a_nb_{nn} \end{bmatrix}$$

比较可得 $i\neq j$时 $a_ib_{ij}=a_jb_{ij}\Rightarrow b_{ij}=0$, 因此可知 B非对角元全为 0, 即为对角形矩阵.

五、设 A, B都是 n阶矩阵, 证明:
1. $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2 \Leftrightarrow AB = BA$;

五、设 A, B都是 n阶矩阵, 证明:
1. $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2 \Leftrightarrow AB = BA$;

证明:1.

$$\begin{aligned} &(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2 \\ \Leftrightarrow &A^2 + AB + B^2 + BA = A^2 + 2AB + B^2 \\ \Leftrightarrow &AB + BA = 2AB \\ \Leftrightarrow &AB = BA \end{aligned}$$

五、设 A, B都是 n阶矩阵, 证明:
2. $A^2 - B^2 = (A+B)(A-B) \Leftrightarrow AB = BA$

五、设 A, B都是 n阶矩阵, 证明:
2. $A^2 - B^2 = (A+B)(A-B) \Leftrightarrow AB = BA$

证明:2.

$$
\begin{aligned}
& A^2 - B^2 = (A+B)(A-B) \\
\Leftrightarrow & A^2 - B^2 = A^2 - AB + BA - B^2 \\
\Leftrightarrow & 0 = BA - AB \\
\Leftrightarrow & AB = BA
\end{aligned}
$$

五、设 A, B都是 n阶矩阵, 证明:

3. 若 $AB = BA$,则 $(A+B)^m = A^m + mA^{m-1}B + C_m^2 A^{m-2}B^2 + \cdots + B^m$.

五、设 A,B都是 n阶矩阵，证明:
3. 若 $AB=BA$,则 $(A+B)^m=A^m+mA^{m-1}B+C_m^2A^{m-2}B^2+\cdots+B^m$.

证明:3. 使用数学归纳法证明. 首先 $m=1$时显然成立. 设 $m-1$时成立

$$(A+B)^{m-1}=A^{m-1}+(m-1)A^{m-2}B+C_{m-1}^2A^{m-3}B^2+\cdots+B^{m-1}$$

当 m时有

$$\begin{aligned}
&(A+B)^m=(A+B)^{m-1}(A+B)\\
&=[A^{m-1}+(m-1)A^{m-2}B+C_{m-1}^2A^{m-3}B^2+\cdots+B^{m-1}](A+B)\\
&=\begin{array}{cccccc} A^m & +(m-1)A^{m-1}B & +C_{m-1}^2A^{m-2}B^2 & +\cdots & +AB^{m-1} & \\ & +A^{m-1}B & +(m-1)A^{m-2}B^2 & +\cdots & +C_{m-1}^{m-2}AB^{m-1} & +B^m \end{array}\\
&=A^m+mA^{m-1}B+(C_{m-1}^2+C_{m-1}^1)A^{m-2}B^2+\cdots+(C_{m-1}^{m-1}+C_{m-1}^{m-2})AB^{m-1}+B_m\\
&=A^m+mA^{m-1}B+C_m^2A^{m-2}B^2+\cdots+B_m
\end{aligned}$$

其中用到了组合数公式 $C_i^j+C_i^{j-1}=C_{i+1}^j$, 故得证.

六、设 $A=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$,$f(x)=x^3-3x^2+3x-1$,计算 $f(A)$.

六、设 $A=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$,$f(x)=x^3-3x^2+3x-1$,计算 $f(A)$.

解一: 分别计算 A^3,A^2, 然后带入计算即可, 略.
解二: 注意到 $f(x)=(x-1)^3$, 那么

$$f(A)=(A-I_3)^3=\left(\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\right)^3=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}^3=0$$

多项式除法: 在多项式次数高于二次时因式分解较为困难, 其中一种简化分解的方式是先试根后作除法, 从而降低次数.

如上题中 $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$若不能直接看出 $(x-1)^3$, 就先开始试根, 一般取 $\pm 1, 0$等整数. 若带入得到 $f(k) = 0$, 这说明 $f(x)$的因式中含有 $x - k$. 如此处 $f(x)$含有因式 $x - 1$, 因此 $f(1) = 0$.

接下来进行多项式除法, 和整数的除法类似, 见下图, 即可得到 $x^2 - 2x + 1$除以 $x - 1$的商为 $x^2 - 2x + 1$且余式为 0, 得到

$$f(x) = (x-1)(x^2 - 2x + 1) = (x-1)(x-1)^2 = (x-1)^3$$

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^2 - 2x \quad + 1 \\
\hline
x - 1 & x^3 - 3x^2 + 3x - 1 \\
 & x^3 - x^2 \\
\hline
 & \quad - 2x^2 + 3x - 1 \\
 & \quad - 2x^2 + 2x \\
\hline
 & \qquad\qquad\quad x - 1 \\
 & \qquad\qquad\quad x - 1 \\
\hline
 & \qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

图: $x^2 - 2x + 1$除以 $x - 1$