线性代数第四次作业

2024 年 3 月 31 日

本次作业

《线性代数习题册 (第三版)》

- $25 \sim 26$页: 矩阵的转置及分块
- $27 \sim 30$页: 行列式的定义与计算

习题答案会上传至 github 中.

图: github 链接二维码

九、已知 n为非零列向量 α, I为 n阶单位阵,$A = I - \alpha\alpha^T$, 证明:
1.$A^2 = A$的充要条件是 $\alpha^T\alpha = 1$;

九、已知 n为非零列向量 α, I为 n阶单位阵,$A = I - \alpha\alpha^T$, 证明:
1.$A^2 = A$的充要条件是 $\alpha^T\alpha = 1$;

证明: 因为

$$
\begin{aligned}
A^2 &= (I - \alpha\alpha^T)(I - \alpha\alpha^T) = I - \alpha\alpha^T - \alpha\alpha^T + \alpha(\alpha^T\alpha)\alpha^T \\
&= I - 2\alpha\alpha^T + (\alpha^T\alpha)\alpha\alpha^T = I + (\alpha^T\alpha - 2)\alpha\alpha^T
\end{aligned}
$$

因此

$$
\begin{aligned}
& A^2 = A \\
\Leftrightarrow & I + (\alpha^T\alpha - 2)\alpha\alpha^T = I - \alpha\alpha^T \\
\Leftrightarrow & \alpha^T\alpha - 2 = -1 \\
\Leftrightarrow & \alpha^T\alpha = 1
\end{aligned}
$$

其中第二个等价符号由 $\alpha\alpha^T \neq 0$保证, 因此得证.

九、已知 n为非零列向量 α, E为 n阶单位阵,$A = I - \alpha\alpha^T$, 证明:
2. 当 $\alpha^T\alpha = 1$时,A是不可逆矩阵.

九、已知 n为非零列向量 α, E为 n阶单位阵,$A = I - \alpha\alpha^T$, 证明:
2. 当 $\alpha^T\alpha = 1$时,A是不可逆矩阵.

证明:(反证法) 若 A为可逆矩阵, 那么由 (1) 可知 $\alpha^T\alpha = 1$可知 $A^2 = A$, 左乘 A^{-1}后得到 $A = I$, 而 $A = I - \alpha\alpha^T \Rightarrow \alpha\alpha^T = 0$, 进而 $\alpha = 0$与非零条件矛盾, 因此得证.

十、设 $A=\begin{bmatrix}3 & 4 & 0 & 0\\ 4 & -3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 2\end{bmatrix}$,求 A^6.

十、设 $A=\begin{bmatrix}3&4&0&0\\4&-3&0&0\\0&0&2&0\\0&0&2&2\end{bmatrix}$,求 A^6.

解: 注意到 A可以写为对角分块矩阵的形式, 即

$$A_1=\begin{bmatrix}3&4\\4&-3\end{bmatrix},\ A_2=\begin{bmatrix}2&0\\2&2\end{bmatrix},\quad A=\begin{bmatrix}A_1&O\\O&A_2\end{bmatrix}$$

因此由分块对角矩阵的性质可知

$$A^6=\begin{bmatrix}A_1^6&O\\O&A_2^6\end{bmatrix}$$

只需计算 A_1^6, A_2^6. 对于 A_1^6, 尝试计算后发现 $A_1^2=25I_2$, 可知 $A_1^6=(25I_2)^3=25^3I_2$; 另一方面, 可知

$$J=\begin{bmatrix}0&0\\2&0\end{bmatrix},\quad J^k=0(k\geqslant 2)$$

由二项式定理可知

$$A_2^6=(2I_2+2J)^6=2^6(I_2+J)^6=64(I_2^6J^0+C_6^1I_2^5J+C_6^2I_2^4J^2+\cdots)$$
$$=64(I_2+6J)=\begin{bmatrix}64&0\\384&64\end{bmatrix}$$

十、设 $A=\begin{bmatrix}3&4&0&0\\4&-3&0&0\\0&0&2&0\\0&0&2&2\end{bmatrix}$,求 A^6.

解:(接上文) 综上即可得到

$$A^6=\begin{bmatrix}15625&0&0&0\\0&15625&0&0\\0&0&64&0\\0&0&384&64\end{bmatrix}$$

十一、设 A, B是 n阶对称阵, 且 $AB+I$及 A可逆, 证明:$(AB+I)^{-1}A$为可逆对称阵.

十一、设 A, B是 n阶对称阵, 且 $AB+I$及 A可逆, 证明:$(AB+I)^{-1}A$为可逆对称阵.

证明: 首先由

$[(AB+I)^{-1}A]^T = A^T[(AB+I)^T]^{-1} = A^T(B^TA^T+I)^{-1} = A(BA+I)^{-1}$

我们只需证明 $(AB+I)^{-1}A = A(BA+I)^{-1}$, 等价于

$$A^{-1}(AB+I)^{-1} = (BA+I)^{-1}A^{-1}$$
$$\Leftrightarrow [(AB+I)A]^{-1} = [A(BA+I)]^{-1}$$
$$\Leftrightarrow (ABA+A)^{-1} = (ABA+A)^{-1}$$

而最后一式是显然成立的, 因此原等式 $[(AB+I)^{-1}A]^T = (AB+I)^{-1}A$成立, 即为对称矩阵, 而可逆是显然的(可逆矩阵的乘积为可逆矩阵).

十一、设 A, B是 n阶对称阵, 且 $AB+I$及 A可逆, 证明:$(AB+I)^{-1}A$为可逆对称阵.

证明: 首先由

$[(AB+I)^{-1}A]^T = A^T[(AB+I)^T]^{-1} = A^T(B^TA^T+I)^{-1} = A(BA+I)^{-1}$

我们只需证明 $(AB+I)^{-1}A = A(BA+I)^{-1}$, 等价于

$$
\begin{aligned}
&A^{-1}(AB+I)^{-1} = (BA+I)^{-1}A^{-1} \\
\Leftrightarrow &[(AB+I)A]^{-1} = [A(BA+I)]^{-1} \\
\Leftrightarrow &(ABA+A)^{-1} = (ABA+A)^{-1}
\end{aligned}
$$

而最后一式是显然成立的, 因此原等式 $[(AB+I)^{-1}A]^T = (AB+I)^{-1}A$成立, 即为对称矩阵, 而可逆是显然的 (可逆矩阵的乘积为可逆矩阵). 注: 另一种更为直接的方法如下, 这是有关逆矩阵常见的技巧

$$
\begin{aligned}
[(AB+I)^{-1}A]^T &= A(BA+I)^{-1} = (A^{-1})^{-1}(BA+I)^{-1} \\
&= [(BA+I)A^{-1}]^{-1} = (B+A^{-1})^{-1} \\
&= [A^{-1}(AB+I)]^{-1} = (AB+I)^{-1}(A^{-1})^{-1} \\
&= (AB+I)^{-1}A
\end{aligned}
$$

十二、设 $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 7 \end{bmatrix}$, $B=(I+A)^{-1}(I-A)$. 证明:$B+I$可逆, 并求其逆.

十二、设 $A=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\-2&3&0&0\\0&-4&5&0\\0&0&-6&7\end{bmatrix}$, $B=(I+A)^{-1}(I-A)$. 证明:$B+I$可逆, 并求其逆.

证明: 对 $B+I$进行变换

$$\begin{aligned}I+B&=I+(I+A)^{-1}(I-A)=I+(I+A)^{-1}[2I-(I+A)]\\&=I+[2(I+A)^{-1}-(I+A)^{-1}(I+A)]\\&=I+2(I+A)^{-1}-I\\&=2(I+A)^{-1}\end{aligned}$$

因此可知 $I+B$可逆, 且

$$(I+B)^{-1}=\frac{1}{2}(I+A)=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\-1&2&0&0\\0&-2&3&0\\0&0&-3&4\end{bmatrix}$$

1. $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix} = \underline{a_{11}a_{22}a_{33}}$.

1. $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix} = \underline{a_{11}a_{22}a_{33}}$.

(分块) 上三角矩阵或 (分块) 下三角矩阵的行列式即为对角元的乘积 (对角块行列式的乘积), 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & * & \cdots & * \\ & a_{22} & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & * \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ * & a_{22} & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ * & \cdots & * & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

$$\begin{vmatrix} A_{11} & * & \cdots & * \\ & A_{22} & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & * \\ & & & A_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_{11} & & & \\ * & A_{22} & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ * & \cdots & * & A_{nn} \end{vmatrix} = |A_{11}||A_{22}|\cdots|A_{nn}|$$

2. $\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix} = \underline{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{n1} \cdots a_{2,n-1} a_{1n}}$

2. $\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix} = \underline{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{n1} \cdots a_{2,n-1} a_{1n}}$

解: 由行列式的定义, 其中可能非零的项只有逆对角线的元乘积, 即行列式为

$$\begin{aligned} &(-1)^{\tau(n,n-1,\cdots,1)} a_{n1} \cdots a_{2,n-1} a_{1n} \\ =&(-1)^{(n-1)+(n-2)+\cdots+1} a_{n1} \cdots a_{2,n-1} a_{1n} \\ =&(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{n1} \cdots a_{2,n-1} a_{1n} \end{aligned}$$

3. 方程 $\begin{vmatrix} \lambda & 0 & 2 \\ 0 & \lambda - 1 & 0 \\ 2 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = 0$的根为 $\underline{1, \pm 2}$.

3. 方程 $\begin{vmatrix} \lambda & 0 & 2 \\ 0 & \lambda-1 & 0 \\ 2 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = 0$的根为 $\underline{1, \pm 2}$.

解: 按第一行展开行列式可得

$$\begin{aligned} \lambda \begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 0 & \lambda-1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} &= \lambda^2(\lambda-1) - 4(\lambda-1) \\ &= (\lambda-1)(\lambda^2-4) = 0 \end{aligned}$$

即可得到 $\lambda = 0, \pm 2$.

4. 设 $D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=1$,则

$$D_2=\begin{vmatrix} 2a_{21} & 3a_{21}-5a_{22} & a_{23} \\ 2a_{11} & 3a_{11}-5a_{12} & a_{13} \\ 2a_{31} & 3a_{31}-5a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=\underline{10}.$$

4. 设 $D_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 1$,则

$$D_2 = \begin{vmatrix} 2a_{21} & 3a_{21} - 5a_{22} & a_{23} \\ 2a_{11} & 3a_{11} - 5a_{12} & a_{13} \\ 2a_{31} & 3a_{31} - 5a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \underline{10}.$$

解: 将 D_2变换后按第二列展开

$$D_2 = -\begin{vmatrix} 2a_{11} & 3a_{11} - 5a_{12} & a_{13} \\ 2a_{21} & 3a_{21} - 5a_{22} & a_{23} \\ 2a_{31} & 3a_{31} - 5a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} a_{11} & 3a_{11} - 5a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & 3a_{21} - 5a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & 3a_{31} - 5a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= -2\left(\begin{vmatrix} a_{11} & 3a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & 3a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & 3a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & -5a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & -5a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & -5a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}\right)$$

$$= -6\begin{vmatrix} a_{11} & a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + 10\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 10D_1$$

5. 写出两个矩阵 $A = \underline{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}, B = \underline{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}$, 使得 $|A| = |B|$, 但 $A \neq B$.

若 3 阶矩阵 A的行列式 $|A|=0$, 则 (D).

A. A 有一行为 0　B. A 有两行成比例

C. $A=O$　D. A 有一行是其余行的线性组合

若 3 阶矩阵 A的行列式 $|A|=0$, 则 (D).

A. A 有一行为 0　　B. A 有两行成比例

C. $A=O$　　D. A 有一行是其余行的线性组合

解: 举反例即可, 如

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 0(\text{第三列为 } 0)$$

但不满足 $(A)(B)(C)$说法, 因此选择 (D)项.

三、利用行列式的定义计算

1. $\begin{vmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 5 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix}$

三、利用行列式的定义计算

1. $\begin{vmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 5 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix}$

解: 三阶和二阶行列式的计算最经常使用, 因此需要掌握计算方法. 二阶行列式为主对角线乘积减去反对角线乘积, 三阶行列式为"三顺减三逆".

$$\begin{aligned}\text{原式} &= 5\times3\times1+2\times5\times4+0\times2\times3 \\ &\quad -0\times3\times4-5\times3\times5-1\times2\times2 \\ &= -24\end{aligned}$$

三、利用行列式的定义计算

2. $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$

三、利用行列式的定义计算

2. $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$

解: 和上题同理

$$\text{原式} = bc^2 + ab^2 + ac^2 - ba^2 - cb^2 - ac^2$$

三、利用行列式的定义计算

3. $\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & b \\ b & a & 0 & 0 \\ 0 & b & a & 0 \\ 0 & 0 & b & a \end{vmatrix}$

三、利用行列式的定义计算

3. $\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & b \\ b & a & 0 & 0 \\ 0 & b & a & 0 \\ 0 & 0 & b & a \end{vmatrix}$

解: 按第一行展开

$$\begin{aligned} \text{原式} &= a\begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & b & a \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} b & a & 0 \\ 0 & b & a \\ 0 & 0 & b \end{vmatrix} \\ &= a^4 - b^4 \end{aligned}$$

四、将 4 阶方阵 $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$ 的行列式按照定义展开到一阶行列式, 并归纳出 4 阶方阵的行列式的值等于 $4!$项取自不同行不同列的元素乘积的代数和, 且可推广至 n阶方阵的行列式的值等于 $n!$项取自不同行不同列的元素乘积的代数和.

注: 由行列式定义

$$\sum_{i_1,i_2,i_3,i_4} (-1)^{\tau(i_1,i_2,i_3,i_4)} a_{1i_1} a_{2i_2} a_{3i_3} a_{4i_4}$$

其中上述求和 i_1, i_2, i_3, i_4为 $1, 2, 3, 4$的一个有序排列, 因此共有 $4!$项. 对于 n阶方阵由定义也可以得到类似的结果

$$\sum_{i_1,i_2,\cdots,i_n} (-1)^{\tau(i_1,i_2,\cdots,i_n)} a_{1i_1} a_{2i_2} \cdots a_{ni_n}$$

解: 如上定义立即可得.

五、若 n阶方阵 A中为零的元多于 n^2-n个, 求 A的行列式的值.

五、若 n阶方阵 A中为零的元多于 n^2-n个, 求 A的行列式的值.

解: 由题意可知 A中非零元少于 $n^2-(n^2-n)=n$个, 这表示

$$\sum_{i_1,i_2,\cdots,i_n}(-1)^{\tau(i_1,i_2,\cdots,i_n)}a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n}$$

中任一项的 $a_{1i_1},a_{2i_2},\cdots,a_{ni_n}$中 n个数不可能都不为零, 因此每一项乘积均等于 0, 从而得到 $|A|=0$.

六、设平面直线 $y = mx + b$通过平面上两点 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$, 验证直线方程可以表示为 $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$

六、设平面直线 $y = mx + b$ 通过平面上两点 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$，验证直线方程可以表示为 $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$

证明: 首先该等式展开后为

$$\begin{vmatrix} y_1 & 1 \\ y_2 & 1 \end{vmatrix} x - \begin{vmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \end{vmatrix} y + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = 0$$

为直线的一般式方程, 故只需验证该直线确实过 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ 两点. 带入 $x = x_1, y = y_1$ 到等式得到

$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$ 成立, 因为第一行和第二行相等

此即表示该直线过 (x_1, y_1), 同理可知也必定过点 (x_2, y_2), 因此得证.

七、写出行列式 $D=\begin{vmatrix} 5x & 1 & 2 & 3 \\ x & x & 1 & 2 \\ 1 & 2 & x & 3 \\ x & 1 & 2 & 2x \end{vmatrix}$ 的展开式中包含 x^3 和 x^4 的项.

七、写出行列式 $D=\begin{vmatrix} 5x & 1 & 2 & 3 \\ x & x & 1 & 2 \\ 1 & 2 & x & 3 \\ x & 1 & 2 & 2x \end{vmatrix}$ 的展开式中包含 x^3和 x^4的项.

解: 由行列式定义

$$\sum_{i_1,i_2,i_3,i_4}(-1)^{\tau(i_1,i_2,i_3,i_4)}a_{1i_1}a_{2i_2}a_{3i_3}a_{4i_4}$$

先计算 x^4项的系数. 因为 D为四阶行列式, 因此要得到 x^4的项, 上述求和项中必须每一项都带有 x, 故只有主对角线上四项为不同行不同列的均带有 x的项, 因此 x^4项为

$$(5x)x\cdot x(2x)=10x^4$$

接下来计算 x^3的项, 以第一行展开

$$D=5x\begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ 2 & x & 3 \\ 1 & 2 & 2x \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ 1 & x & 3 \\ x & 2 & 2x \end{vmatrix}+2\begin{vmatrix} x & x & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ x & 1 & 2x \end{vmatrix}-3\begin{vmatrix} x & x & 1 \\ 1 & 2 & x \\ x & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

从中依次找到三次项即可:$(0)+(-2x^3)+(0)+(-3x^3)=-5x^3$.