

# 线性代数第六次作业

2024 年 4 月 14 日

# 本次作业

## 目录

### 行列式的性质与 计算 (二)

一、填空题

二、选择题

三

四

五

六

七

八

### 综合练习 (一)

一

二

三

四

五

六

七

八

九

十

## 《线性代数习题册 (第三版)》

- 39 ~ 42页: 行列式的性质与计算 (二)
- 43 ~ 46页: 综合练习 (一)

目录

行列式的性质与  
计算 (二)

一、填空题

二、选择题

三

四

五

六

七

八

综合练习 (一)

一

二

三

四

五

六

七

八

九

十

## 习题答案会上传至 github 中.



图: github 链接二维码

目录

行列式的性质与  
计算 (二)

一、填空题

二、选择题

三

四

五

六

七

八

综合练习 (一)

一

二

三

四

五

六

七

八

九

十

1. 设  $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ , 则  $A$  的伴随矩阵  $A^* = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ ,  $(A^*)^* = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

1. 设  $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ , 则  $A$  的伴随矩阵  $A^* = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ ,  $(A^*)^* = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

解: 伴随矩阵  $A^*$  的  $(i, j)$  元为原矩阵  $A$  中  $(j, i)$  元的代数余子式, 因此得到

$$A^* = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

$(A^*)^*$ 同理计算后即可.

注: 只有二阶矩阵伴随矩阵的伴随矩阵为自身, 更高阶则不一定, 如

$$B = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{bmatrix}, \quad B^* = \begin{bmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & 1 \end{bmatrix}, \quad (B^*)^* = 0$$

目录

行列式的性质与  
计算 (二)

一、填空题

二、选择题

三

四

五

六

七

八

综合练习 (一)

一

二

三

四

五

六

七

八

九

十

2. 设  $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ , 则  $A$  的伴随矩阵  $A^* = \underline{\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}}$

目录

行列式的性质与  
计算 (二)

一、填空题

二、选择题

三

四

五

六

七

八

综合练习 (一)

一

二

三

四

五

六

七

八

九

十

2. 设  $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ , 则  $A$  的伴随矩阵  $A^* = \underline{\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}}$

解: 按照伴随矩阵的定义进行计算即可.

目录

行列式的性质与  
计算 (二)

一、填空题

二、选择题

三

四

五

六

七

八

综合练习 (一)

一

二

三

四

五

六

七

八

九

十

设  $A$  为 3 阶方阵,  $A^*$  是  $A$  的伴随矩阵, 常数  $k \neq 0, k \neq \pm 1$ , 则  $(kA)^* = (\text{C})$ .

- A.  $k^{-1}A^*$     B.  $kA^*$   
C.  $k^2A^*$     D.  $k^3A^*$

注: 伴随矩阵基本性质 (重要性由高到低)

$$AA^* = A^*A = |A|I, \quad (AB)^* = B^*A^*$$

$$(A^{-1})^* = (A^*)^{-1} (A \text{ 可逆}), \quad (A^*)^T = (A^T)^*$$

$$\underline{(kA)^* = k^{n-1}A^*}, \quad |A^*| = |A|^{n-1} (n \text{ 为阶数})$$



设  $A$  为 3 阶方阵,  $A^*$  是  $A$  的伴随矩阵, 常数  $k \neq 0, k \neq \pm 1$ , 则  $(kA)^* = (\quad)$ .

- A.  $k^{-1}A^*$       B.  $kA^*$   
C.  $k^2A^*$       D.  $k^3A^*$

注: 伴随矩阵基本性质 (重要性由高到低)

$$AA^* = A^*A = |A|I, \quad (AB)^* = B^*A^*$$

$$(A^{-1})^* = (A^*)^{-1} (A \text{可逆}), \quad (A^*)^T = (A^T)^*$$

$$(kA)^* = k^{n-1}A^*, \quad |A^*| = |A|^{n-1} (n \text{ 为阶数})$$

解一: 直接由伴随矩阵性质 (划线公式) 得到.

解二: 由伴随矩阵乘法公式得到,

$$(kA)^* = [(kI)A]^* A^* (kI)^* = A^* l(k^{n-1}I) = k^{n-1}A^*$$

目录

行列式的性质与  
计算 (二)

一、填空题

二、选择题

三

四

五

六

七

八

综合练习 (一)

一

二

三

四

五

六

七

八

九

十

### 三、

1. 设  $A^*$  是  $n$  阶矩阵  $A$  的伴随矩阵, 若  $|A| \neq 0$ , 证明:  $|A^*| \neq 0, |A^*| = |A|^{n-1}$ ;

目录

行列式的性质与  
计算 (二)

一、填空题

二、选择题

三

四

五

六

七

八

综合练习 (一)

一

二

三

四

五

六

七

八

九

十

### 三、

1. 设  $A^*$  是  $n$  阶矩阵  $A$  的伴随矩阵, 若  $|A| \neq 0$ , 证明:  $|A^*| \neq 0, |A^*| = |A|^{n-1}$ ;

证明: 由  $AA^* = |A|I$ , 两边同时作行列式, 即

$$|A||A^*| = ||A|I| = |A|^n \Rightarrow |A^*| = |A|^{n-1}$$

故得证.

目录

行列式的性质与  
计算 (二)

一、填空题

二、选择题

三

四

五

六

七

八

综合练习 (一)

一

二

三

四

五

六

七

八

九

十

### 三、

2. 如果  $|A| = 5$ , 计算  $|2(A^*)^{-1}|$ .

目录

行列式的性质与  
计算 (二)

一、填空题

二、选择题

三

四

五

六

七

八

综合练习 (一)

一

二

三

四

五

六

七

八

九

十

### 三、

2. 如果  $|A| = 5$ , 计算  $|2(A^*)^{-1}|$ .

解:

$$\begin{aligned}|2(A^*)^{-1}| &= 2^n |(A^*)^{-1}| = 2^n |(A^{-1})^*| \\&= 2^n |A^{-1}|^{n-1} \\&= 2^n \left( \frac{1}{|A|} \right)^{n-1} \\&= \frac{2^n}{5^{n-1}}\end{aligned}$$

目录

行列式的性质与  
计算 (二)

一、填空题

二、选择题

三

四

五

六

七

八

综合练习 (一)

一

二

三

四

五

六

七

八

九

十

## 四、求下列矩阵的逆矩阵

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \\ -1 & 2 & -4 \end{bmatrix}$$

(设此矩阵为  $A$ )

#### 四、求下列矩阵的逆矩阵

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \\ -1 & 2 & -4 \end{bmatrix}$$

(设此矩阵为  $A$ )

解一: 使用初等行变换  $(A \ I) \rightarrow (I \ A^{-1})$ , 此处略.

解二: 利用伴随矩阵, 先求伴随矩阵  $A^*$ , 按照定义得到

$$A^* = \begin{bmatrix} -4 & 2 & -1 \\ 4 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

再有  $AA^* = |A|I = I$  得到  $A^{-1} = A^*$ , 即逆矩阵

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -4 & 2 & -1 \\ 4 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

目录

行列式的性质与  
计算 (二)

一、填空题

二、选择题

三

四

五

六

七

八

综合练习 (一)

一

二

三

四

五

六

七

八

九

十

五、设  $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ ,  $A^T(BA^{-1} - I)^T X = B^T$ ,  
求  $X$ .





解:(接上文) 计算  $C^{-1} = AB^{-1}$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \cdots \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & -3/4 & -3/8 \\ 0 & 1/2 & -3/4 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

因此

$$I - C^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 3/4 & 3/8 \\ 0 & 1/2 & 3/4 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

再求逆  $(I - C^{-1})^{-1}$ , 求其伴随矩阵即

$$(I - C^{-1})^{-1} = \frac{1}{|I - C^{-1}|} (I - C^{-1})^* = 8(I - C^{-1})^* = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 3 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow X = [(I - C^{-1})^{-1}]^T = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 0 \\ 3 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

目录

行列式的性质与  
计算 (二)

一、填空题

二、选择题

三

四

五

六

七

八

综合练习 (一)

一

二

三

四

五

六

七

八

九

十

六、设  $n(n > 2)$  阶非零实数矩阵  $A$  满足:  $A^* = A^T$ , 试证:  $|A| = 1$ , 且  $A$  是正交矩阵, 即  $A^T A = A A^T = I$ .



目录

行列式的性质与  
计算 (二)

一、填空题

二、选择题

三

四

五

六

七

八

综合练习 (一)

一

二

三

四

五

六

七

八

九

十

## 七、利用 $|AB| = |A||B|$ 计算下列行列式.

$$1. \begin{vmatrix} 1 + x_1 y_1 & 1 + x_1 y_2 & \cdots & 1 + x_1 y_n \\ 1 + x_2 y_1 & 1 + x_2 y_2 & \cdots & 1 + x_2 y_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 + x_n y_1 & 1 + x_n y_2 & \cdots & 1 + x_n y_n \end{vmatrix}$$



## +

解: 因为

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ 1 & a_3 & a_3^2 & \cdots & a_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ b_1 & b_2 & b_3 & \cdots & b_n \\ b_1^2 & b_2^2 & b_3^2 & \cdots & b_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_1^{n-1} & b_2^{n-1} & b_3^{n-1} & \cdots & b_n^{n-1} \end{vmatrix} \\ &= \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)(b_j - b_i) \end{aligned}$$

其中用到了范德蒙行列式的结论.



目录

行列式的性质与  
计算 (二)

一、填空题

二、选择题

三

四

五

六

七

八

综合练习 (一)

一

二

三

四

五

六

七

八

九

十

八、求行列式  $\begin{vmatrix} \lambda - 4 & -5 & 2 \\ 2 & \lambda + 2 & -1 \\ 1 & 1 & \lambda - 1 \end{vmatrix}$  的值.

目录

行列式的性质与  
计算 (二)

一、填空题

二、选择题

三

四

五

六

七

八

综合练习 (一)

一

二

三

四

五

六

七

八

九

十

八、求行列式  $\begin{vmatrix} \lambda - 4 & -5 & 2 \\ 2 & \lambda + 2 & -1 \\ 1 & 1 & \lambda - 1 \end{vmatrix}$  的值.

解: 直接计算即可 (当然可以使用变换化简计算)

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} \lambda - 4 & -5 & 2 \\ 2 & \lambda + 2 & -1 \\ 1 & 1 & \lambda - 1 \end{vmatrix} &= (\lambda - 4)(\lambda + 2)(\lambda - 1) + 5 + 4 \\ &\quad - 2(\lambda + 2) + (\lambda - 4) + 10(\lambda - 1) \\ &= \lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 \\ &= (\lambda - 1)^3 \end{aligned}$$

目录

行列式的性质与  
计算 (二)

一、填空题

二、选择题

三

四

五

六

七

八

综合练习 (一)

一

二

三

四

五

六

七

八

九

十

一、设  $A$  为 3 阶方阵,  $A^*$  是  $A$  的伴随矩阵,  $|A| = \frac{1}{8}$ , 求  $\left| \left( \frac{1}{3}A \right)^{-1} - 8A^* \right|$ .

注: 行列式没有和差公式, 即一般情况下  $|A \pm B| \neq |A| \pm |B|$ .

一、设  $A$  为 3 阶方阵,  $A^*$  是  $A$  的伴随矩阵,  $|A| = \frac{1}{8}$ , 求  $\left| \left(\frac{1}{3}A\right)^{-1} - 8A^* \right|$ .

注: 行列式没有和差公式, 即一般情况下  $|A \pm B| \neq |A| \pm |B|$ .  
解:

$$\begin{aligned} \left| \left( \frac{1}{3}A \right)^{-1} - 8A^* \right| &= \frac{|A|}{|A|} \left| \left( \frac{1}{3}A \right)^{-1} - 8A^* \right| \\ &= \frac{1}{|A|} \left| A \left( \frac{1}{3}A \right)^{-1} - 8AA^* \right| \\ &= 8 |A (3A^{-1}) - 8A^*| \\ &= 8 |3I - 8|A|I| \\ &= 8|2I| \\ &= 8 \times 2^3 \\ &= 64 \end{aligned}$$

目录

行列式的性质与  
计算 (二)

一、填空题

二、选择题

三

四

五

六

七

八

综合练习 (一)

一

二

三

四

五

六

七

八

九

十

二、设  $A$  是  $n$  阶矩阵, 满足  $AA^T = I$  ( $I$  是  $n$  阶单位阵,  $A$  为正交阵),  $|A| < 0$ , 求  $|A + I|$ .

二、设  $A$  是  $n$  阶矩阵, 满足  $AA^T = I$  ( $I$  是  $n$  阶单位阵,  $A$  为正交阵),  $|A| < 0$ , 求  $|A + I|$ .

解: 因为  $AA^T = I$ , 那么也有  $A^TA = I$ . 另外由

$$\begin{aligned} |A + I| &= \frac{|A^T|}{|A|} |A + I| \\ &= \frac{1}{|A|} |A^T A + A^T| = \frac{1}{|A|} |I + A^T| \\ &= \frac{1}{|A|} |(I + A^T)^T| = \frac{1}{|A|} |A + I| \end{aligned}$$

即可得到

$$\left(1 - \frac{1}{|A|}\right) |A + I| = 0$$

其中  $1 - 1/|A| > 0$ , 因此得到  $|A + I| = 0$ .

目录

行列式的性质与  
计算 (二)

一、填空题

二、选择题

三

四

五

六

七

八

综合练习 (一)

一

二

三

四

五

六

七

八

九

十

三、设  $n$  阶行列式  $|A| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{n-1} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \frac{1}{n} \end{vmatrix}$ , 求  $|A|$  中所有元素代数余子式之和.





解:(接上文)

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^m A_{ij} &= (-1)^{\tau(n-1, n-2, \dots, 1, n)} \frac{k}{n!} \\ &= (-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} \frac{k}{n!}\end{aligned}$$

即得

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{ij} &= \sum_{i=1}^n (-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} \frac{k}{n!} \\ &= (-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} \frac{1}{n!} \cdot \frac{n(n+1)}{2} \\ &= (-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} \frac{n+1}{2(n-1)!}\end{aligned}$$

目录

行列式的性质与  
计算 (二)

一、填空题

二、选择题

三

四

五

六

七

八

综合练习 (一)

一

二

三

四

五

六

七

八

九

十

四、设  $A, B$  是正交矩阵, 且  $\frac{|A|}{|B|} = -1$ , 证明:  $|A + B| = 0$ .

四、设  $A, B$  是正交矩阵, 且  $\frac{|A|}{|B|} = -1$ , 证明:  $|A + B| = 0$ .

证明: 由

$$\begin{aligned} |A+B| &= \frac{|A|}{|B|} |A+B| \frac{|B|}{|A|} \\ &= \frac{|A^T|}{|B|} |A+B| \frac{|B^T|}{|A|} \\ &= \frac{1}{|A||B|} |A^T(A+B)B^T| \\ &= \frac{1}{|A||B|} |B^T + A^T| \\ &= \frac{1}{|A||B|} |A+B| \end{aligned}$$

即得到

$$\left(1 - \frac{1}{|A||B|}\right) |A + B| = 0$$

因为  $|A|/|B| = -1$ , 可知  $|A|, |B|$  异号, 进而  $1 - 1/(|A||B|) > 0$ , 得到  $|A + B| = 0$ .

目录

行列式的性质与  
计算 (二)

一、填空题

二、选择题

三

四

五

六

七

八

综合练习 (一)

一

二

三

四

五

六

七

八

九

十

五、设矩阵  $A$  的伴随矩阵  $A^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 8 \end{bmatrix}$ , 且

$ABA^{-1} = BA^{-1} + 3I$ ,  $I$  为 4 阶单位阵, 求矩阵  $B$ .



五、设矩阵  $A$  的伴随矩阵  $A^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 8 \end{bmatrix}$ , 且  $ABA^{-1} = BA^{-1} + 3I$ ,  $I$  为 4 阶单位阵, 求矩阵  $B$ .

解:(接上文)

$$\rightarrow \dots \rightarrow \left[ \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 6 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 0 & -1 \end{array} \right]$$

因此可知

$$B = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

目录

行列式的性质与  
计算 (二)

一、填空题

二、选择题

三

四

五

六

七

八

综合练习 (一)

一

二

三

四

五

六

七

八

九

十

六、设  $n$  阶矩阵  $A$  可逆 ( $n \geq 2$ ),  $A^*$  是  $A$  的伴随矩阵, 求  $(A^*)^*$  与  $A$  的关系.

六、设  $n$  阶矩阵  $A$  可逆 ( $n \geqslant 2$ ),  $A^*$  是  $A$  的伴随矩阵, 求  $(A^*)^*$  与  $A$  的关系.

解: 由  $A^*(A^*)^* = |A^*|I = |A|^{n-1}I$  和  $AA^* = |A|I$  得到

$$\begin{aligned}(A^*)^* &= |A|^{n-1}(A^*)^{-1} = |A|^{n-1}(|A|A^{-1})^{-1} \\ &= |A|^{n-1}(A^{-1})^{-1}(|A|I)^{-1} \\ &= |A|^{n-1}A \left( \frac{1}{|A|}I \right) = |A|^{n-2}A\end{aligned}$$

注: 若  $A$  不可逆时, 需要根据  $n$  的阶数来看, 即

$$(A^*)^* = \begin{cases} 0, n > 2 \\ A, n = 2 \end{cases}$$

即  $n = 2$  时可逆与否都不影响  $(A^*)^* = A$ .



目录

行列式的性质与  
计算 (二)

一、填空题

二、选择题

三

四

五

六

七

八

综合练习 (一)

一

二

三

四

五

六

七

八

九

十

七、 $A$ 是  $n$ 阶方阵, 满足  $A^m = I$ ( $m$ 为正整数),  $I$ 为  $n$ 阶单位阵, 现将  $A$ 中  $n^2$ 个元素  $a_{ij}$ 用其代数余子式  $A_{ij}$ 代替, 得到的矩阵记为  $B$ , 证明: $B^m = I$ .

目录

行列式的性质与  
计算 (二)

一、填空题

二、选择题

三

四

五

六

七

八

综合练习 (一)

一

二

三

四

五

六

七

八

九

十

七、 $A$  是  $n$  阶方阵, 满足  $A^m = I$  ( $m$  为正整数),  $I$  为  $n$  阶单位阵, 现将  $A$  中  $n^2$  个元素  $a_{ij}$  用其代数余子式  $A_{ij}$  代替, 得到的矩阵记为  $B$ , 证明:  $B^m = I$ .

解: 由题意不难知道  $B = (A^*)^T$ . 另一方面, 对  $A^m = I$  两段作伴随得到

$$(A^m)^* = I^* \Rightarrow (A^*)^m = I$$

再对等式两边作转置得到

$$[(A^*)^m]^T = I^T \Rightarrow [(A^*)^T]^m = I$$

此即  $B^m = I$ , 即得证.

目录

行列式的性质与  
计算 (二)

一、填空题

二、选择题

三

四

五

六

七

八

综合练习 (一)

一

二

三

四

五

六

七

八

九

十

## 八、证明: 奇数阶反对称阵的行列式等于零.

目录

行列式的性质与  
计算 (二)

一、填空题

二、选择题

三

四

五

六

七

八

综合练习 (一)

一

二

三

四

五

六

七

八

九

十

## 八、证明: 奇数阶反对称阵的行列式等于零.

证明: 设  $A$  为  $2n + 1$  阶矩阵, 满足  $A^T = -A$ , 两端作行列式, 得到

$$|A|^T = |-A| \Rightarrow |A| = (-1)^{2n+1}|A| = -|A| \Rightarrow |A| = 0$$

因此得证.

目录

行列式的性质与  
计算 (二)

一、填空题

二、选择题

三

四

五

六

七

八

综合练习 (一)

一

二

三

四

五

六

七

八

九

十

九、设  $f(x) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3-x & 5-3x^2 & 3x^2-1 \\ 2x^2-1 & 3x^5-1 & 7x^8-1 \end{vmatrix}$ , 证明: 存在一个小于 1 的正数  $\xi$ , 使得  $f'(\xi) = 0$ .



目录

行列式的性质与

计算 (二)

一、填空题

二、选择题

三

四

五

六

七

八

综合练习 (一)

一

二

三

四

五

六

七

八

九

十

## 十、计算元素为 $a_{ij} = |i - j|$ 的 $n$ 阶行列式.

注: 类似与平移的行列式可以采用相邻行 (列) 相减的方法.

十、计算元素为  $a_{ij} = |i - j|$  的  $n$  阶行列式.

注: 类似与平移的行列式可以采用相邻行 (列) 相减的方法.

解: 将此行列式表示出来

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & n-2 \\ 2 & 1 & 0 & & n-3 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ n-1 & n-2 & n-3 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

将第 2 行  $-1$  倍加到第 1 行, 然后将第 3 行  $-1$  倍加到第 2 行, 不断重复直至将第  $n$  行  $-1$  倍加到第  $n-1$  行得到

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & 1 \\ n-1 & n-2 & n-3 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

再重复上述行变换, 只是不需要第  $n$  行的  $-1$  倍加到第  $n-1$  行,



得到

$$\begin{vmatrix} 0 & & & & & \\ & 2 & & & & \\ & & 2 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & 2 & \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & 1 \\ n-1 & n-2 & n-3 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

此时再按照行列式的定义, 此时前  $n-2$  行只能取 2, 最后一列只能取 1, 进而第一列只能取  $n-1$ , 因此此行列式的值为

$$(-1)^{\tau(n,1,2,\dots,n-1)}(n-1)2^{n-2} = (-1)^{n-1}(n-1)2^{n-2}$$