线性代数第十五次作业

2024 年 6 月-日

本次作业

《线性代数习题册 (第三版)》

- $87 \sim 90$页: 实对称矩阵的相似对角化

目录

习题答案会上传至 github 中.

图: github 链接二维码

目录

考试成绩及作业完成情况记录

图: 班级 38

图: 班级 13

一、用施密特正交规范化把下列向量组正交规范化

1.$[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & 8 \end{bmatrix}$;

一、用施密特正交规范化把下列向量组正交规范化

1.$[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & 8 \end{bmatrix}$;

解: 首先正交化向量

$$\beta_1 = \alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \beta_2 = \alpha_2 - \frac{(\alpha_2, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)}\beta_1 = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -2 \\ -5 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$\beta_3 = \alpha_3 - \frac{(\alpha_3, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)}\beta_1 - \frac{(\alpha_3, 3\beta_2)}{(3\beta_2, 3\beta_2)}(3\beta_2) = \frac{5}{13}\begin{bmatrix} -4 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

然后进行单位化, 即

$$\gamma_1 = \frac{\beta_1}{\sqrt{(\beta_1, \beta_1)}} = \frac{\sqrt{3}}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \gamma_2 = \frac{\sqrt{78}}{78}\begin{bmatrix} -2 \\ -5 \\ 7 \end{bmatrix}, \gamma_3 = \frac{\sqrt{26}}{26}\begin{bmatrix} -4 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

故 $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$即为所求.

一、用施密特正交规范化把下列向量组正交规范化

2.$[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

一、用施密特正交规范化把下列向量组正交规范化

2. $[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

解: 首先正交化

$$\beta_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \beta_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \beta_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \beta_4 = \frac{1}{15}\begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

最后单位化得到

$$\gamma_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \gamma_2 = \frac{\sqrt{15}}{15}\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \gamma_3 = \frac{\sqrt{3}}{3}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \gamma_4 = \frac{\sqrt{15}}{15}\begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

二、对下列矩阵 A, 求正交矩阵 Q和对角矩阵 Λ, 使得 $Q^{-1}AQ=\Lambda$.

1.$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 2 & -1 & 2\\ 0 & 2 & 1\end{bmatrix}$

二、对下列矩阵 A, 求正交矩阵 Q和对角矩阵 Λ, 使得 $Q^{-1}AQ=\Lambda$.

1.$A=\begin{bmatrix}1&2&0\\2&-1&2\\0&2&1\end{bmatrix}$

解: 正交相似对角化和一般相似对角化的区别仅仅在于需要对特征向量进行施密特正交化, 且只需要单位正交化各自特征值下的特征向量, 因为不同特征值对应的特征向量已经正交.

首先 $|\lambda I-A|=(\lambda+3)(\lambda-1)(\lambda-3)$, 得到特征值为 $-3,1,3$, 求得特征向量

$$\alpha_1=\begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix},\alpha_2=\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix},\alpha_3=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{只需要单位化}}\gamma_1=\frac{\sqrt{6}}{6}\begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix},\gamma_2=\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix},\gamma_3=\frac{\sqrt{3}}{3}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$$

因此 $Q=[\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3]=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{6}}{6}&\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{\sqrt{3}}{3}\\-\frac{\sqrt{6}}{3}&0&\frac{\sqrt{3}}{3}\\\frac{\sqrt{6}}{6}&-\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{\sqrt{3}}{3}\end{bmatrix}$, 得 $\Lambda=\begin{bmatrix}-3&0&0\\0&1&0\\0&0&3\end{bmatrix}$

二、对下列矩阵 A, 求正交矩阵 Q和对角矩阵 Λ, 使得 $Q^{-1}AQ=\Lambda$.

2.$A=\begin{bmatrix}2&0&4\\0&6&0\\4&0&2\end{bmatrix}$

二、对下列矩阵 A, 求正交矩阵 Q和对角矩阵 Λ, 使得 $Q^{-1}AQ=\Lambda$.

2.$A=\begin{bmatrix}2&0&4\\0&6&0\\4&0&2\end{bmatrix}$

解: 求特征多项式 $|\lambda I-A|=(\lambda-6)^2(\lambda+2)$, 得到特征值 $6,6,-2$, 求特征向量得到

$$\alpha_1=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix},\alpha_2=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},\alpha_3=\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}$$

已经正交, 因此只需单位化

$$\gamma_1=\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix},\gamma_2=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},\gamma_3=\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}$$

因此 $Q=[\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3]$, 进而得到

$$\Lambda=\begin{bmatrix}6&0&0\\0&6&0\\0&0&-2\end{bmatrix}$$

三、已知 3阶实对称矩阵 A的三个特征值为 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3$, 且对应于 λ_1, λ_2的特征向量为 $\xi_1 = [-1, -1, 1]^T, \xi_2 = [1, -2, -1]^T$, 求矩阵 A与 λ_3对应的一个特征向量及矩阵 A.

注 1: 一般矩阵的不同特征值的特征向量之间线性无关, 而实对称矩阵的不同特征值的特征向量之间正交, 因此可以通过正交性来从已知特征向量求出其它特征向量.

三、已知 3阶实对称矩阵 A的三个特征值为 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3$, 且对应于 λ_1, λ_2的特征向量为 $\xi_1 = [-1,-1,1]^T, \xi_2 = [1,-2,-1]^T$, 求矩阵 A与 λ_3对应的一个特征向量及矩阵 A.

注 1: 一般矩阵的不同特征值的特征向量之间线性无关, 而实对称矩阵的不同特征值的特征向量之间正交, 因此可以通过正交性来从已知特征向量求出其它特征向量.

解: 由题意, 设 λ_3的特征向量为 ξ_3, 那么必定有 $(\xi_1,\xi_3) = (\xi_1,\xi_2) = 0$, 即

$$\begin{bmatrix} \xi_1^T \\ \xi_2^T \end{bmatrix} \xi_3 = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{bmatrix} \xi_3 = 0$$

即可求得 $\xi_3 = [1,0,1]^T$(当然为无穷解, 我们任取一个即可), 因此得到

$$P = [\xi_1,\xi_2,\xi_3] = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow P^{-1}AP = \Lambda = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

进而得到

$$A = P\Lambda P^{-1} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 13 & -2 & 5 \\ -2 & 10 & 2 \\ 5 & 2 & 13 \end{bmatrix}$$

三、已知 3阶实对称矩阵 A的三个特征值为 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3$, 且对应于 λ_1, λ_2的特征向量为 $\xi_1 = [-1, -1, 1]^T, \xi_2 = [1, -2, -1]^T$, 求矩阵 A与 λ_3对应的一个特征向量及矩阵 A.

注 2: 什么时候可以使用特征向量的正交性来求解其他特征值的特征向量.
①矩阵为实对称矩阵时不同特征值的特征向量才是正交的, 普通矩阵的特征值一般没有此性质;
②当未知的特征向量都属于同一个特征值时可以使用, 如果属于不同特征值时不能使用. 如

$$A = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 3 \end{bmatrix}$$

已知 1的特征向量为 $\xi_1 = [1, 0, 0]^T$, 这是若用 $\xi_1^T \xi = 0$求出的可能不是特征向量, 如 $\xi = [0, 1, 2]^T$满足 $\xi_1^T \xi = 0$, 但是

$$A\xi = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix}$$

四、设 3阶实对称矩阵 A的特征值为 $6,3,3$, 且特征值 6对应的特征向量为 $\xi_1 = [1,1,1]^T$, 求矩阵 A.

四、设 3阶实对称矩阵 A的特征值为 $6, 3, 3$, 且特征值 6对应的特征向量为 $\xi_1 = [1, 1, 1]^T$, 求矩阵 A.

解: 由题意特征值 3 对应的特征向量 ξ必定与 ξ_1正交, 即

$$\xi_1^T \xi = [1, 1, 1]\xi = 0 \Rightarrow \xi_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \xi_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

因此有

$$P = [\xi_1, \xi_2, \xi_3] \Rightarrow P^{-1}AP = \Lambda = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

进而得到

$$A = P\Lambda P^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

五、设 3阶实对称矩阵 A的特征值 $\lambda_1=-1,\lambda_2=\lambda_3=1$, 属于 λ_1的特征向量为 $\eta=[0,1,1]^T$,求矩阵 A.

五、设 3阶实对称矩阵 A的特征值 $\lambda_1=-1,\lambda_2=\lambda_3=1$, 属于 λ_1的特征向量为 $\eta=[0,1,1]^T$,求矩阵 A.

解: 由题意特征值 1对应的特征向量 ξ必定与 η正交, 即

$$\eta^T\xi=[0,1,1]\xi=0\Rightarrow\xi_2=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\xi_3=\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}$$

因此有

$$P=[\eta,\xi_2,\xi_3]\Rightarrow P^{-1}AP=\Lambda=\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

进而得到

$$A=P\Lambda P^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&-1\\0&-1&0\end{bmatrix}$$

六、设矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$,$B = (2I + A)^{10}$,求对角阵 Λ, 使得 B相似于 Λ.

六、设矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{bmatrix}$, $B=(2I+A)^{10}$,求对角阵 Λ, 使得 B相似于 Λ.

注:$B=f(A)$即为 A的多项式, 因此只需求出 A的相似对角矩阵 Λ', 然后 $\Lambda=f(\Lambda')$.

解: 首先 $|\lambda I-A|=\lambda(\lambda-2)^2$,2的几何重数 $3-r(A-2I)=2$等于代数重数, 因此可对角化, 即

$$A\sim\Lambda'=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{bmatrix}\Rightarrow(2I+A)^{10}\sim(2I+\Lambda')^{10}=\begin{bmatrix}2^{10}&0&0\\0&4^{10}&0\\0&0&4^{10}\end{bmatrix}$$

此即表示 B相似于

$$\Lambda=\begin{bmatrix}2^{10}&0&0\\0&4^{10}&0\\0&0&4^{10}\end{bmatrix}$$