线性代数第六次作业

2024 年 4 月 14 日

本次作业

《线性代数习题册 (第三版)》

- $39 \sim 42$页: 行列式的性质与计算 (二)
- $43 \sim 46$页: 综合练习 (一)

习题答案会上传至 github 中.

图: github 链接二维码

1. 设 $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$,则 A的伴随矩阵 $A^*=\underline{\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}}$, $(A^*)^*=\underline{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}}$

1. 设 $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$,则 A的伴随矩阵 $A^*=$ $\underline{\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}}$, $(A^*)^*=$ $\underline{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}}$

解: 伴随矩阵 A^*的 (i,j)元为原矩阵 A中 (j,i)元的代数余子式, 因此得到

$$A^*=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

$(A^*)^*$同理计算后即可.

注: 只有二阶矩阵伴随矩阵的伴随矩阵为自身, 更高阶则不一定, 如

$$B=\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{bmatrix},\ B^*=\begin{bmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & 1 \end{bmatrix},\ (B^*)^*=0$$

2. 设 $A=\begin{bmatrix}-1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 2\\ -1 & 1 & 1\end{bmatrix}$,则 A的伴随矩阵 $A^*=\underline{\begin{bmatrix}-1 & 1 & 1\\ -2 & 2 & 2\\ 1 & -1 & -1\end{bmatrix}}$

2. 设 $A=\begin{bmatrix}-1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 2\\ -1 & 1 & 1\end{bmatrix}$,则 A的伴随矩阵 $A^*=$ $\underline{\begin{bmatrix}-1 & 1 & 1\\ -2 & 2 & 2\\ 1 & -1 & -1\end{bmatrix}}$

解: 按照伴随矩阵的定义进行计算即可.

设 A为 3阶方阵,A^*是 A的伴随矩阵, 常数 $k \neq 0, k \neq \pm 1$, 则 $(kA)^* = (C)$.

A. $k^{-1}A^*$ B. kA^*

C. k^2A^* D. k^3A^*

注: 伴随矩阵基本性质 (重要性由高到低)

$$AA^* = A^*A = |A|I, \quad (AB)^* = B^*A^*$$

$$(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}(A\text{可逆}), \quad (A^*)^T = (A^T)^*$$

$$\underline{(kA)^* = k^{n-1}A^*}, \quad |A^*| = |A|^{n-1}(n\text{为阶数})$$

设 A为 3阶方阵,A^*是 A的伴随矩阵, 常数 $k \neq 0, k \neq \pm 1$, 则 $(kA)^* = (C)$.

A. $k^{-1}A^*$ B. kA^*

C. k^2A^* D. k^3A^*

注: 伴随矩阵基本性质 (重要性由高到低)

$$AA^* = A^*A = |A|I, \quad (AB)^* = B^*A^*$$

$$(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}(A\text{可逆}), \quad (A^*)^T = (A^T)^*$$

$$\underline{(kA)^* = k^{n-1}A^*}, \quad |A^*| = |A|^{n-1}(n\text{为阶数})$$

解一: 直接由伴随矩阵性质 (划线公式) 得到.

解二: 由伴随矩阵乘法公式得到,

$$(kA)^* = [(kI)A]^* = A^*(kI)^* = A^*(k^{n-1}I) = k^{n-1}A^*$$

三、

1. 设 A^*是 n阶矩阵 A的伴随矩阵, 若 $|A|\neq 0$,证明:$|A^*|\neq 0, |A^*|=|A|^{n-1}$;

三、

1. 设 A^*是 n阶矩阵 A的伴随矩阵, 若 $|A| \neq 0$,证明:$|A^*| \neq 0, |A^*| = |A|^{n-1}$;

证明: 由 $AA^* = |A|I$, 两边同时作行列式, 即

$$|A||A^*| = ||A|I| = |A|^n \Rightarrow |A^*| = |A|^{n-1}$$

故得证.

三、

2. 如果 $|A| = 5$, 计算 $|2(A^*)^{-1}|$.

三、

2. 如果 $|A|=5$, 计算 $|2(A^*)^{-1}|$.

解:

$$\begin{aligned}
|2(A^*)^{-1}| &= 2^n|(A^*)^{-1}| = 2^n|(A^{-1})^*| \\
&= 2^n|A^{-1}|^{n-1} \\
&= 2^n\left(\frac{1}{|A|}\right)^{n-1} \\
&= \frac{2^n}{5^{n-1}}
\end{aligned}$$

四、求下列矩阵的逆矩阵

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \\ -1 & 2 & -4 \end{bmatrix}$$

(设此矩阵为 A)

四、求下列矩阵的逆矩阵

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \\ -1 & 2 & -4 \end{bmatrix}$$

(设此矩阵为 A)
解一: 使用初等行变换 $(A \quad I) \to (I \quad A^{-1})$, 此处略.
解二: 利用伴随矩阵, 先求伴随矩阵 A^*, 按照定义得到

$$A^* = \begin{bmatrix} -4 & 2 & -1 \\ 4 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

再有 $AA^* = |A|I = I$得到 $A^{-1} = A^*$, 即逆矩阵

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -4 & 2 & -1 \\ 4 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

五、设 $A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}2 & 1 & 3\\ 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$, $A^T(BA^{-1}-I)^TX=B^T$, 求 X.

五、设 $A=\begin{bmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}2&1&3\\0&2&1\\0&0&2\end{bmatrix}$, $A^T(BA^{-1}-I)^TX=B^T$, 求 X.

解:A,B都是上三角矩阵且对角元非零, 因此可逆, 进而化简方程. 令 $C=BA^{-1}$

$$\Leftrightarrow (BA^{-1}-I)^TX=(A^T)^{-1}B^T=(A^{-1})^TB^T=(BA^{-1})^T$$

$$\Leftrightarrow X=[(BA^{-1}-I)^T]^{-1}(BA^{-1})^T=[(C-I)^T]^{-1}C^T$$

$$\Leftrightarrow X=[(C-I)^{-1}]^TC^T=[C(C-I)^{-1}]^T$$

$$\Leftrightarrow X=[(C^{-1})^{-1}(C-I)^{-1}]^T=\{[(C-I)C^{-1}]^{-1}\}^T=[(I-C^{-1})^{-1}]^T$$

至此我们只需要先计算 $C^{-1}=(BA^{-1})^{-1}=AB^{-1}$, 即对 $\begin{bmatrix}B\\A\end{bmatrix}$ 作初等列变换.

解:(接上文) 计算 $C^{-1}=AB^{-1}$

$$\left[\begin{array}{ccc}2 & 1 & 3\\ 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 2\\ \hdashline 1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{array}\right] \to \cdots \to \left[\begin{array}{ccc}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ \hdashline 1/2 & -3/4 & -3/8\\ 0 & 1/2 & -3/4\\ 0 & 0 & 1/2\end{array}\right]$$

因此

$$I-C^{-1}=\begin{bmatrix}1/2 & 3/4 & 3/8\\ 0 & 1/2 & 3/4\\ 0 & 0 & 1/2\end{bmatrix}$$

再求逆 $(I-C^{-1})^{-1}$, 求其伴随矩阵即

$$(I-C^{-1})^{-1}=\frac{1}{|I-C^{-1}|}(I-C^{-1})^{*}=8(I-C^{-1})^{*}=\begin{bmatrix}2 & -3 & 3\\ 0 & 2 & -3\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow X=[(I-C^{-1})^{-1}]^{T}=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ -3 & 2 & 0\\ 3 & -3 & 2\end{bmatrix}$$

六、设 $n(n>2)$阶非零实数矩阵 A满足:$A^{*}=A^{T}$, 试证:$|A|=1$, 且 A是正交矩阵, 即 $A^{T}A=AA^{T}=I$.

六、设 $n(n>2)$阶非零实数矩阵 A满足:$A^*=A^T$, 试证:$|A|=1$, 且 A是正交矩阵, 即 $A^TA=AA^T=I$.

证明: 对 $A^*=A^T$两边作行列式, 得到 $|A^*|=|A|^{n-1}=|A^T|=|A|$, 此时 $|A|$可能为 0, 需要进一步讨论:
①断言 $|A|\neq 0$,(反证法) 否则若 $|A|=0$, 那么对等式左乘 A得到 $AA^*=AA^T$, 另一方面也有 $AA^*=|A|I=0\Rightarrow AA^T=0$, 结合 A为实数矩阵, 可得 $A=0$从而推出矛盾 (23 页第五题结论), 因此得到 $|A|\neq 0$.
这样我们可得到 $|A|^{n-2}=1$,$|A|$必定为实数 (因为 A为实数矩阵), 但可能为 -1, 还需要证明:
②证明 $|A|=1$. 因为 $AA^T=AA^*=|A|I$, 其中 AA^T的对角元为 $a_{i1}^2+a_{i2}^2+\cdots+a_{in}^2\geqslant 0$, 因此 $|A|I$的对角元 $|A|\geqslant 0$成立, 即 $|A|^{n-2}=0$必定得到 $|A|=1$.
②证明 $AA^T=I$, 即由 $AA^T=AA^*=|A|I=I$即可得证, 这表示 A, A^T互逆, 因此 $A^TA=I$也成立.

七、利用 $|AB| = |A||B|$ 计算下列行列式.

1. $$\begin{vmatrix} 1+x_1y_1 & 1+x_1y_2 & \cdots & 1+x_1y_n \\ 1+x_2y_1 & 1+x_2y_2 & \cdots & 1+x_2y_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1+x_ny_1 & 1+x_ny_2 & \cdots & 1+x_ny_n \end{vmatrix}$$

七、利用 $|AB|=|A||B|$计算下列行列式.

1. $\begin{vmatrix} 1+x_1y_1 & 1+x_1y_2 & \cdots & 1+x_1y_n \\ 1+x_2y_1 & 1+x_2y_2 & \cdots & 1+x_2y_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1+x_ny_1 & 1+x_ny_2 & \cdots & 1+x_ny_n \end{vmatrix}$

解: 关键在于找到合适的 A,B相乘为要求的矩阵, 观察其中每个元哪些和该行行标相同, 哪些和列标相同.

因为其中 (i,j)元为 $1+x_iy_j=[1,x_i]\begin{bmatrix}1\\ y_j\end{bmatrix}$, 因此可以得到

$$原式=\begin{vmatrix} 1 & x_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & x_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & x_3 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ y_1 & y_2 & y_3 & \cdots & y_n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

当 $n>2$时, 两个行列式都有一行或一列全为零, 因此 $|AB|=0$;

当 $n=1$时,$|AB|=1+x_1y_1$; $n=2$时,$|AB|=\begin{vmatrix}1 & x_1\\ 1 & x_2\end{vmatrix}\begin{vmatrix}1 & 1\\ y_1 & y_2\end{vmatrix}=$

$(x_2-x_1)(y_2-y_1)$

七、利用 $|AB|=|A||B|$计算下列行列式.

2. $$\begin{vmatrix} \frac{1-a_1^nb_1^n}{1-a_1b_1} & \frac{1-a_1^nb_2^n}{1-a_1b_2} & \cdots & \frac{1-a_1^nb_n^n}{1-a_1b_n} \\ \frac{1-a_2^nb_1^n}{1-a_2b_1} & \frac{1-a_2^nb_2^n}{1-a_2b_2} & \cdots & \frac{1-a_2^nb_n^n}{1-a_2b_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1-a_n^nb_1^n}{1-a_nb_1} & \frac{1-a_n^nb_2^n}{1-a_nb_2} & \cdots & \frac{1-a_n^nb_n^n}{1-a_nb_n} \end{vmatrix}$$

注: 和第一题一样, 我们也希望将每个元化为行列的交叉乘积之和, 由公式

$$(1-x^n)=(1-x)(1+x+x^2+\cdots+x^{n-1})$$

即可得到

$$\frac{1-a_i^nb_j^n}{1-a_ib_j}=1+a_ib_j+a_i^2b_j^2+\cdots+a_i^{n-1}b_j^{n-1}$$

每个元变为向量的乘积 $[1,a_i,a_i^2,\cdots,a_i^{n-1}]\,[1,b_j,b_j^2,\cdots,b_j^{n-1}]^T$.

解: 因为

$$\text{原式} = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ 1 & a_3 & a_3^2 & \cdots & a_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ b_1 & b_2 & b_3 & \cdots & b_n \\ b_1^2 & b_2^2 & b_3^2 & \cdots & b_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_1^{n-1} & b_2^{n-1} & b_3^{n-1} & \cdots & b_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

$$= \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n} (a_j - a_i)(b_j - b_i)$$

其中用到了范德蒙行列式的结论.

八、求行列式 $\begin{vmatrix} \lambda-4 & -5 & 2 \\ 2 & \lambda+2 & -1 \\ 1 & 1 & \lambda-1 \end{vmatrix}$ 的值.

八、求行列式 $\begin{vmatrix} \lambda-4 & -5 & 2 \\ 2 & \lambda+2 & -1 \\ 1 & 1 & \lambda-1 \end{vmatrix}$ 的值.

解: 直接计算即可 (当然可以使用变换化简计算)

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} \lambda-4 & -5 & 2 \\ 2 & \lambda+2 & -1 \\ 1 & 1 & \lambda-1 \end{vmatrix} &= (\lambda-4)(\lambda+2)(\lambda-1)+5+4 \\ &\quad -2(\lambda+2)+(\lambda-4)+10(\lambda-1) \\ &= \lambda^3-3\lambda^2+3\lambda-1 \\ &= (\lambda-1)^3\end{aligned}$$

一、设 A为 3阶方阵, A^*是 A的伴随矩阵,$|A| = \frac{1}{8}$, 求 $\left|\left(\frac{1}{3}A\right)^{-1} - 8A^*\right|$.

注: 行列式没有和差公式, 即一般情况下 $|A \pm B| \neq |A| \pm |B|$.

一、设 A为 3阶方阵, A^*是 A的伴随矩阵,$|A| = \frac{1}{8}$, 求 $\left|\left(\frac{1}{3}A\right)^{-1} - 8A^*\right|$.

注: 行列式没有和差公式, 即一般情况下 $|A \pm B| \neq |A| \pm |B|$.

解:

$$\begin{aligned}
\left|\left(\frac{1}{3}A\right)^{-1} - 8A^*\right| &= \frac{|A|}{|A|}\left|\left(\frac{1}{3}A\right)^{-1} - 8A^*\right| \\
&= \frac{1}{|A|}\left|A\left(\frac{1}{3}A\right)^{-1} - 8AA^*\right| \\
&= 8\left|A\left(3A^{-1}\right) - 8A^*\right| \\
&= 8\left|3I - 8|A|I\right| \\
&= 8|2I| \\
&= 8 \times 2^3 \\
&= 64
\end{aligned}$$

二、设 A是 n阶矩阵, 满足 $AA^T = I$(I是 n阶单位阵,A为正交阵),$|A| < 0$, 求 $|A+I|$.

二、设 A是 n阶矩阵, 满足 $AA^T=I$(I是 n阶单位阵,A为正交阵),$|A|<0$, 求 $|A+I|$.

解: 因为 $AA^T=I$, 那么也有 $A^TA=I$. 另外由

$$
\begin{aligned}
|A+I| &= \frac{|A^T|}{|A|}|A+I| \\
&= \frac{1}{|A|}|A^TA+A^T| = \frac{1}{|A|}|I+A^T| \\
&= \frac{1}{|A|}|(I+A^T)^T| = \frac{1}{|A|}|A+I|
\end{aligned}
$$

即可得到

$$
\left(1-\frac{1}{|A|}\right)|A+I|=0
$$

其中 $1-1/|A|>0$, 因此得到 $|A+I|=0$.

三、设 n阶行列式 $|A| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{n-1} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \frac{1}{n} \end{vmatrix}$, 求 $|A|$中所有元素代数余子式之和.

三、设 n阶行列式 $|A| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{n-1} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \frac{1}{n} \end{vmatrix}$, 求 $|A|$中所有元素代数余子式之和.

解: 由之前的习题可知, 某一行的代数余子式之和 $A_{i1} + \cdots + A_{in}$即将原行列式第 i行全部换为 1的行列式, 即

$$\sum_{j=1}^{m} A_{ij} = \begin{vmatrix} & & & & 1 & 0 \\ & & & \iddots & & \\ 1 & \cdots & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ & \iddots & & & & \\ \frac{1}{n-1} & & & & & \\ & & & & & \frac{1}{n} \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ i\text{行} \\ \\ \\ \\ \end{matrix}$$

注意到除第 k行外其余行都只有一个非零元, 由行列式的定义可知

$$\sum_{j=1}^{m} A_{ij} = (-1)^{\tau(n-1,n-2,\cdots,1,n)} \frac{i}{n!}$$

解:(接上文)

$$\sum_{j=1}^{m} A_{ij} = (-1)^{\tau(n-1,n-2,\cdots,1,n)} \frac{i}{n!}$$
$$= (-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} \frac{i}{n!}$$

即得

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A_{ij} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} \frac{i}{n!}$$
$$= (-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} \frac{1}{n!} \cdot \frac{n(n+1)}{2}$$
$$= (-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} \frac{n+1}{2(n-1)!}$$

四、设 A, B是正交矩阵, 且 $\frac{|A|}{|B|} = -1$,证明:$|A + B| = 0$.

四、设 A,B是正交矩阵, 且 $\frac{|A|}{|B|}=-1$,证明:$|A+B|=0$.

证明: 由

$$
\begin{aligned}
|A+B| &= \frac{|A|}{|B|}|A+B|\frac{|B|}{|A|} \\
&= \frac{|A^T|}{|B|}|A+B|\frac{|B^T|}{|A|} \\
&= \frac{1}{|A||B|}|A^T(A+B)B^T| \\
&= \frac{1}{|A||B|}|B^T+A^T| \\
&= \frac{1}{|A||B|}|A+B|
\end{aligned}
$$

即得到

$$
\left(1-\frac{1}{|A||B|}\right)|A+B|=0
$$

因为 $|A|/|B|=-1$, 可知 $|A|,|B|$异号, 进而 $1-1/(|A||B|)>0$, 得到 $|A+B|=0$.

五、设矩阵 A的伴随矩阵 $A^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 8 \end{bmatrix}$, 且 $ABA^{-1} = BA^{-1} + 3I, I$为 4阶单位阵, 求矩阵 B.

五、设矩阵 A的伴随矩阵 $A^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 8 \end{bmatrix}$, 且 $ABA^{-1} = BA^{-1} + 3I$, I为 4阶单位阵, 求矩阵 B.

解: 先化简方程,$(A-I)BA^{-1} = 3I \Rightarrow (A-I)B = 3A$, 对等式两端左乘 A^*, 得到 $(A^*A - A^*)B = 3A^*A$, 并且 $|A^*| = |A|^{4-1} = 8 \Rightarrow |A| = 2$, 即

$$(|A|I - A^*)B = 3|A|I \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -6 \end{bmatrix} B = 6I$$

注意此时 $2I - A^*$可逆, 使用初等行变换求解即可

$$\left[\begin{array}{cccc:cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -6 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{array}\right]$$

五、设矩阵 A的伴随矩阵 $A^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 8 \end{bmatrix}$, 且 $ABA^{-1} = BA^{-1} + 3I$, I为 4阶单位阵, 求矩阵 B.

解:(接上文)

$$\rightarrow \cdots \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 6 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 0 & -1 \end{array}\right]$$

因此可知

$$B = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

六、设 n阶矩阵 A可逆 $(n \geqslant 2)$, A^*是 A的伴随矩阵, 求 $(A^*)^*$与 A的关系.

六、设 n阶矩阵 A可逆 $(n \geqslant 2)$, A^*是 A的伴随矩阵, 求 $(A^*)^*$与 A的关系.

解: 由 $A^*(A^*)^* = |A^*|I = |A|^{n-1}I$和 $AA^* = |A|I$得到

$$\begin{aligned}(A^*)^* &= |A|^{n-1}(A^*)^{-1} = |A|^{n-1}(|A|A^{-1})^{-1} \\ &= |A|^{n-1}(A^{-1})^{-1}(|A|I)^{-1} \\ &= |A|^{n-1}A\left(\frac{1}{|A|}I\right) = |A|^{n-2}A\end{aligned}$$

注: 若 A不可逆时, 需要根据 n的阶数来看, 即

$$(A^*)^* = \begin{cases} 0, n > 2 \\ A, n = 2 \end{cases}$$

即 $n = 2$时可逆与否都不影响 $(A^*)^* = A$.

七、A是 n阶方阵, 满足 $A^m = I$(m为正整数), I为 n阶单位阵, 现将 A中 n^2个元素 a_{ij}用其代数余子式 A_{ij}代替, 得到的矩阵记为 B, 证明:$B^m = I$.

七、A是 n阶方阵, 满足 $A^m = I$(m为正整数), I为 n阶单位阵, 现将 A中 n^2个元素 a_{ij}用其代数余子式 A_{ij}代替, 得到的矩阵记为 B, 证明:$B^m = I$.

解: 由题意不难知道 $B = (A^*)^T$. 另一方面, 对 $A^m = I$两段作伴随得到

$$(A^m)^* = I^* \Rightarrow (A^*)^m = I$$

再对等式两边作转置得到

$$[(A^*)^m]^T = I^T \Rightarrow [(A^*)^T]^m = I$$

此即 $B^m = I$, 即得证.

八、证明: 奇数阶反对称阵的行列式等于零.

八、证明: 奇数阶反对称阵的行列式等于零.

证明: 设 A为 $2n+1$阶矩阵, 满足 $A^T = -A$, 两端作行列式, 得到

$$|A|^T = |-A| \Rightarrow |A| = (-1)^{2n+1}|A| = -|A| \Rightarrow |A| = 0$$

因此得证.

九、设 $f(x)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3-x & 5-3x^2 & 3x^2-1 \\ 2x^2-1 & 3x^5-1 & 7x^8-1 \end{vmatrix}$, 证明: 存在一个小于 1的正数 ξ, 使得 $f'(\xi)=0$.

九、设 $f(x)=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 3-x & 5-3x^2 & 3x^2-1\\ 2x^2-1 & 3x^5-1 & 7x^8-1\end{vmatrix}$, 证明: 存在一个小于 1的正数 ξ, 使得 $f'(\xi)=0$.

证明: 因为 $f(x)$为多项式, 故可导, 且有

$$f(1)=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 2 & 2\\ 1 & 2 & 6\end{vmatrix}=0,\quad f(0)=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 3 & 5 & -1\\ -1 & -1 & -1\end{vmatrix}=0$$

因此由罗尔定理存在 $\xi\in(0,1)$使得 $f'(\xi)=0$, 即得证.

十、计算元素为 $a_{ij} = |i-j|$的 n阶行列式.

注: 类似与平移的行列式可以采用相邻行 (列) 相减的方法.

十、计算元素为 $a_{ij}=|i-j|$的 n阶行列式.

注: 类似与平移的行列式可以采用相邻行 (列) 相减的方法.
解: 将此行列式表示出来

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & n-2 \\ 2 & 1 & 0 & & n-3 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ n-1 & n-2 & n-3 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

将第 2行 -1倍加到第 1行, 然后将第 3行 -1倍加到第 2行, 不断重复直至将第 n行 -1倍加到第 $n-1$行得到

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & 1 \\ n-1 & n-2 & n-3 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

再重复上述行变换, 只是不需要第 n行的 -1倍加到第 $n-1$行,

得到

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & & & & \\ & & 2 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & 2 & \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & 1 \\ n-1 & n-2 & n-3 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

此时再按照行列式的定义, 此时前 $n-2$行只能取 2, 最后一列只能取 1, 进而第一列只能取 $n-1$, 因此此行列式的值为

$$(-1)^{\tau(n,1,2,\cdots,n-1)}(n-1)2^{n-2} = (-1)^{n-1}(n-1)2^{n-2}$$