线性代数第八次作业

2024 年 5 月-日

本次作业

《线性代数习题册 (第三版)》

- $51 \sim 54$页: 向量组的极大线性无关组和秩

目录

习题答案会上传至 github 中.

图: github 链接二维码

1. 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$线性无关,$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s, \beta$线性相关, 则 $r\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s\}$$\underline{=}$$r\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s, \beta\}$.

解: 首先显然有 $s = r\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s\} \leqslant r\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s, \beta\}$, 又由 $\alpha_1, \cdots, \alpha_s, \beta$线性相关, 那么

$$r\{\alpha_1, \cdots, \alpha_s, \beta\} < s + 1$$

那么即可得到 $r\{\alpha_1, \cdots, \alpha_s, \beta\} = s$, 因此等号成立.

注: 此结论在后面经常使用, 以及以下延伸:
①若 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$线性无关, 那么 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n, \beta$线性无关等价于 β不能被 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$线性表出;
②若 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$线性无关, 那么 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n, \beta$线性相关等价于 β能被 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$线性表出, 此时可将 β记为 $k_1\alpha_1 + \cdots + k_n\alpha_n$;

2. 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$的秩为 r, 向量 β不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$线性表出, 则 $r\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s, \beta\} = \underline{r+1}$.

注: 对于任意向量组, 以下三条性质知道两个即可推出另一个:

- ①秩为 r
- ②存在 r个向量线性无关
- ③存在 r个向量可以线性表出向量组所有向量

并且此时满足②③的 r个向量即为极大线性无关组.

如此题要证明秩为 $r+1$, 那么只需要找到 $r+1$个向量线性无关且可以表出其它向量即可 (当然②③所要求的 r个向量可以不一样).

2. 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$的秩为 r, 向量 β不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$线性表出, 则 $r\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s, \beta\} = \underline{r+1}$.

解: 因为 $r\{\alpha_1, \cdots, \alpha_s\} = r$, 那么找到其一个极大无关组 $\alpha_{i_1}, \cdots, \alpha_{i_r}$; 另一方面, 因为 β不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$线性表出, 那么自然也不能被 $\alpha_{i_1}, \cdots, \alpha_{i_r}$线性表出, 因此不难证明 $\alpha_{i_1}, \cdots, \alpha_{i_r}, \beta$线性无关 (证明是简单的), 即

$$r + 1 = r\{\alpha_{i_1}, \cdots, \alpha_{i_r}, \beta\}$$

另一方面, 由极大线性无关组的性质可知 $\alpha_{i_1}, \cdots, \alpha_{i_r}$可以线性表出 $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$, 自然有 $\alpha_{i_1}, \cdots, \alpha_{i_r}, \beta$可以线性表出 $\alpha_1, \cdots, \alpha_s, \beta$
综上可知 $\alpha_{i_1}, \cdots, \alpha_{i_r}, \beta$满足②和③, 因此可知秩为 $r+1$.

注: 在已知 $r+1 = r\{\alpha_{i_1}, \cdots, \alpha_{i_r}, \beta\}$后也可以直接通过秩不等式

$$\begin{aligned} r+1 = r\{\alpha_{i_1}, \cdots, \alpha_{i_r}, \beta\} &\leqslant r\{\alpha_1, \cdots, \alpha_s, \beta\} \\ &\leqslant r\{\alpha_1, \cdots, \alpha_s\} + r\{\beta\} \\ &= r+1 \end{aligned}$$

得到结果.(其中 $r\{\beta\} = 0$由 $\beta \neq 0$保证)

3. 已知向量组 α_1, α_2的秩为 2, 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$的秩为 2, 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$的秩为 3, 则向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4 - \alpha_3$的秩为 $\underline{3}$.

解: 由题意可知 α_1, α_2线性无关, 且 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性相关, 那么根据前面结论 (1. 注) 可知 α_3可被 α_1, α_2线性表出, 可写为 $\alpha_3 = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2$, 因此对于方程组

$$[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4 - \alpha_3] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 - k_1\alpha_1 - k_2\alpha_2] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$$

$$[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4] \begin{bmatrix} 1 & 0 & -k \\ 0 & 1 & -k \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -k \\ 0 & 1 & -k \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$$

进而得到 x_1, x_2, x_3只有零解, 所以 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4 - \alpha_3$线性无关, 秩为 3.

注: 如果将 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4 - \alpha_3$作为矩阵的列向量, 那该矩阵只是 $[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4]$做了两次初等列变换, 秩当然不变, 即

$$r([\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4]) = r([\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4 - k_1\alpha_1]) = r([\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4 - k_1\alpha_1 - k_2\alpha_2])$$

4. 设 4阶矩阵 A按列分块为 $A=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4]$, 其中 $\alpha_1=(-3,5,2,1)^T,\alpha_2=(4,-3,7,-1)^T$,若 A行等价于

$$B=\begin{bmatrix}1&0&2&1\\0&1&1&3\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix},$$

则向量 $\alpha_3=\underline{\alpha_1+\alpha_2}$, $\alpha_4=\underline{\alpha_1-\alpha_2}$

解: 矩阵的列向量在初等行变换前后线性相关、线性无关和线性表出系数关系不变, 因此从 B可以看出要找到 α_3,α_4满足: 任意向量秩为 1(即非零), 任意两个向量秩为 2, 任意三个向量秩为 2, 四个向量秩为 2. 经验证反证 $\alpha_3=\alpha_1+\alpha_2$和 $\alpha_4=\alpha_1-\alpha_2$满足所有要求, 即为答案.

注: 因为初等行变换等价于左乘初等矩阵, 因此此题也可以求可逆矩阵 P使得 $PA=B\Rightarrow A=P^{-1}B$, 因此对 $[P,B]$作初等行变换为 $[I,P^{-1}B]$即可.

二、求下列向量组的秩与一个极大线性无关组.

1.$\alpha_1 = (0,1,-1,2)^T, \alpha_2 = (0,3,-3,6)^T, \alpha_3 = (1,1,-2,1)^T, \alpha_4 = (-1,0,1,2)^T$;

解: 对 $[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4]$作初等行变换,

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & -2 & 1 \\ 2 & 6 & 1 & 2 \end{bmatrix} \to \cdots \to \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

可以看到三个主元分别在第 1,3,4 列, 因此其中一组极大线性无关组为 $\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4$.

注: 除了观察主元, 观察余子式也可以找到线性无关的向量, 如上述后三列前三行的三阶余子式

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$$

因此他们的列向量 (3 维) 线性无关, 故他们的伸长组 (即原来的 4 维)$\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$线性无关, 为一个极大线性无关组

二、求下列向量组的秩与一个极大线性无关组.

2.$\alpha_1 = (1,0,3,6)^T, \alpha_2 = (-1,2,-2,-5)^T, \alpha_3 = (1,k,5,8)^T, \alpha_4 = (0,2,1,1)^T$;

解: 对 $[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4]$作初等行变换,

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & k & 2 \\ 3 & -2 & 5 & 1 \\ 6 & -5 & 8 & 1 \end{bmatrix} \to \cdots \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & k-4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

可以看到三个主元分别在第 1,2 列, 第三列需要进行讨论;

$k = 4$时秩为 3, 极大线性无关组为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$;

$k \neq 4$时秩为 2, 极大线性无关组为 α_1, α_2.

三、设 4维向量组 $\alpha_1=(1+k,1,1,1)^T,\alpha_2=(2,2+k,2,2)^T,\alpha_3=(3,3,3+k,3)^T,\alpha_4=(4,4,4,4+k)^T$. 问当 k为何值时, 向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性相关? 当 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性相关时, 求其一个极大线性无关组, 并用该极大线性无关组线性表出向量组中的其余向量.

解: 对 $[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4]$作初等行变换.

$$\begin{bmatrix} 1+k & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2+k & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3+k & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4+k \end{bmatrix} \to \cdots \to \begin{bmatrix} k & 0 & 0 & -k \\ 0 & k & 0 & -k \\ 0 & 0 & k & -k \\ 1 & 2 & 3 & 4+k \end{bmatrix}$$

当 $k=0$时, 显然线性相关, 此时极大线性无关组为 α_1, 表出情况为 $\alpha_2=2\alpha_1,\alpha_3=3\alpha_1,\alpha_4=4\alpha_4$;
当 $k\neq 0$时, 继续化简

$$\begin{bmatrix} k & 0 & 0 & -k \\ 0 & k & 0 & -k \\ 0 & 0 & k & -k \\ 1 & 2 & 3 & 4+k \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 4+k \end{bmatrix} \to \cdots \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 10+k \end{bmatrix}$$

可知 $k=-10$时线性相关, 极大线性无关组为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$, 表出关系为 $\alpha_4=-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3$.

四、已知秩 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=3$, 秩 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=4$, 秩 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_5)=4$. 求秩 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_5-\alpha_4)$

解: 由题意和前面的结论,α_4可被 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表出, 记为 $\alpha_4=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3$, 断言 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_5-\alpha_4$线性无关, 即秩为 4, 若

$$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3+x_4(\alpha_5-\alpha_4)=0$$
$$\Rightarrow x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3+x_4(\alpha_5-k_1\alpha_1-k_2\alpha_2-k_3\alpha_3)=0$$
$$\Rightarrow (x_1-k_1x_4)\alpha_1+(x_2-k_2x_4)\alpha_2+(x_3-k_3x_4)\alpha_3+x_4\alpha_5=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1-k_1x_4=0 \\ x_2-k_2x_4=0 \\ x_3-k_3x_4=0 \\ x_4=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -k_1 \\ 0 & 1 & 0 & -k_2 \\ 0 & 0 & 1 & -k_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}=0$$

最后得到 x_1,x_2,x_3,x_4只有零解, 因此 $r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_5-\alpha_4)=4$.

注: 此题同选择题第三题, 两种方法实际上是一样的.

五、向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$线性无关, 而向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r, \beta, \gamma$线性相关, 证明: 或者 β与 γ中至少有一个可由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$线性表出, 或者向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r, \beta$与 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r, \gamma$等价.

证明: 假设 β, γ都不可以被 $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$线性表出, 那么只需证明此时后者成立.
采用反证法, 若不然两个向量组不等价, 不妨设 β不能被 $\alpha_1, \cdots, \alpha_r, \gamma$线性表出, 那么也不能被 $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$线性表出, 即可得到 $\alpha_1, \cdots, \alpha_r, \beta$线性无关, 结合 $\alpha_1, \cdots, \alpha_r, \beta, \gamma$线性相关, 这表示 γ可被 $\alpha_1, \cdots, \alpha_r, \beta$线性表出, 即

$$\gamma = x_1\alpha_1 + \cdots + x_r\alpha_r + y\beta$$

若 $y = 0$, 那么表示 γ可被 $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$线性表出, 与假设矛盾;
若 $y \neq 0$, 那么变形得到

$$\beta = \frac{1}{y}(\gamma - x_1\alpha_1 + \cdots + x_r\alpha_r)$$

这表示 β可被 $\alpha_1, \cdots, \alpha_r, \gamma$线性表出, 也与假设矛盾.
综上得证.

六、证明: 向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$能由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性表出的充分必要条件是

$$r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)=r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t).$$

证明: 必要性. 首先显然有

$$r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)\leqslant r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t)$$

另一方面, 由题意 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$能由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性表出, 这表示

$$r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)\geqslant r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t)$$

因此等号成立.

充分性. 因为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$可以表出 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$, 且他们秩相等, 因此他们等价, 故 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$也可被 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性表出, 即 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$可被 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性表出, 得证.

七、设向量组 $\alpha_1=(1,0,1)^T,\alpha_2=(0,1,1)^T,\alpha_3=(1,3,5)^T$不能由向量组 $\beta_1=(1,1,1)^T,\beta_2=(1,2,3)^T,\beta_3=(3,4,k)^T$线性表出.
1. 求 k的值;

解: 由题意即

$$[\beta_1,\beta_2,\beta_3]\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{bmatrix}=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]$$

无解, 故对增广矩阵作初等行变换.

$$\left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & k & 1 & 1 & 5 \end{array}\right] \to \cdots \to \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & k-5 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

要使上述方程无解, 只需要 $k-5=0$, 得到 $k=5$.

七、设向量组 $\alpha_1 = (1,0,1)^T, \alpha_2 = (0,1,1)^T, \alpha_3 = (1,3,5)^T$不能由向量组 $\beta_1 = (1,1,1)^T, \beta_2 = (1,2,3)^T, \beta_3 = (3,4,k)^T$线性表出.
2. 将 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$用 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性表出.

解: 由题意即解下面的矩阵方程

$$[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{bmatrix} = [\beta_1, \beta_2, \beta_3]$$

无解, 故对增广矩阵作初等行变换.

$$\left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 5 & 1 & 3 & k \end{array}\right] \to \cdots \to \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 10-k \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 2 & 25-3k \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & k-7 \end{array}\right]$$

即得到

$$\begin{cases} \beta_1 = 2\alpha_1 + 4\alpha_2 - \alpha_3 \\ \beta_2 = \alpha_1 + 2\alpha_2 \\ \beta_3 = (10-k)\alpha_1 + (25-3k)\alpha_2 + (k-7)\alpha_3 \end{cases}$$