# 线性代数第三次作业

2024 年 3 月 24 日

# 本次作业

《线性代数习题册 (第三版)》

- $15 \sim 20$页: 可逆矩阵和求逆矩阵
- $21 \sim 24$页: 矩阵的转置与分块

目录



## 习题答案会上传至 github 中.

图: github 链接二维码

1. $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \underline{\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}.$

1. $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \underline{\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}$.

解: 对角矩阵可逆当且仅当所有对角元非零, 此时其逆矩阵也是对角矩阵, 且对角元为对应元的倒数, 即 $a_i \neq 0$时

$$\begin{bmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} a_1^{-1} & & & \\ & a_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n^{-1} \end{bmatrix}$$

此结论对对角分块矩阵也成立, 即 $a_i$变为可逆矩阵 $A_i$时总矩阵也可逆, 且有如上的等式成立.

2. 设 $A,B$都是 $n$阶可逆矩阵,$C$是 $n$阶矩阵,$X$是 $n$阶未知矩阵, 则矩阵方程 $AXB=C$的解为 $\underline{A^{-1}CB^{-1}}$; 试写出 $\begin{bmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \underline{\begin{bmatrix} 0 & B^{-1} \\ A^{-1} & 0 \end{bmatrix}}$.

2. 设 $A, B$都是 $n$阶可逆矩阵,$C$是 $n$阶矩阵,$X$是 $n$阶未知矩阵, 则矩阵方程 $AXB = C$的解为 $\underline{A^{-1}CB^{-1}}$; 试写出 $\begin{bmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \underline{\begin{bmatrix} 0 & B^{-1} \\ A^{-1} & 0 \end{bmatrix}}$.

解: 对等式 $AXB = C$左乘 $A^{-1}$, 右乘 $B^{-1}$, 得到
$A^{-1}AXBB^{-1} = X = A^{-1}CB^{-1}$, 即得到解 $A^{-1}CB^{-1}$.
逆对角矩阵可逆当且仅当所有逆对角元非零, 此时其逆矩阵也是逆对角矩阵, 且逆对角元为对应元的倒数, 即 $a_i \neq 0$时

$$\begin{bmatrix} & & & a_1 \\ & & a_2 & \\ & \iddots & & \\ a_n & & & \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} & & & a_n^{-1} \\ & & a_{n-1}^{-1} & \\ & \iddots & & \\ a_1^{-1} & & & \end{bmatrix}$$

此结论对逆对角分块矩阵也成立, 即 $a_i$变为可逆矩阵 $A_i$时总矩阵也可逆, 且有如上形式的等式成立.
注: 若 $A, B$不可逆时不能得到 $A^{-1}CB^{-1}$的答案, 因此可以先以 $A(XB) = C$作初等行变换得到 $XB$的解, 然后再做初等列变换得到 $X$的解.

3. 如果矩阵 $A$满足 $A^2 = A$,且 $A$可逆, 则 $A = \underline{I}$.

3. 如果矩阵 $A$满足 $A^2 = A$,且 $A$可逆, 则 $A = \underline{I}$.

解: 对等式 $A^2 = A$两边左乘 $A^{-1}$, 即可得到 $A = I$.

4.$n$阶初等阵乘积 $E(i,j(k))E(i,j(-k)) = \underline{I}$.

## 4.$n$阶初等阵乘积 $E(i,j(k))E(i,j(-k)) = \underline{I}$.

解: 矩阵左乘 (右乘) 初等矩阵相当于对该矩阵作对应的初等行 (列) 变换, 此时 $E(i,j(k))E(i,j(-k)) = E(i,j(k))[E(i,j(-k))I_n]$可以看做分别对 $I_n$做了如下两步初等行变换:

- 将第 $j$行的 $-k$倍加到第 $i$行;
- 将第 $j$行的 $k$倍加到第 $i$行;

因此两次变换抵消, 结果为 $I_n$.

5. 设 $A, B, C, D$都是 $n$阶可逆矩阵, 则 $(AB^2C^3D^4)^{-1} = \underline{(D^{-1})^4(C^{-1})^3(B^{-1})^2A^{-1}}$.

5. 设 $A, B, C, D$都是 $n$阶可逆矩阵, 则 $(AB^2C^3D^4)^{-1} = \underline{(D^{-1})^4(C^{-1})^3(B^{-1})^2A^{-1}}$.

解: 对于可逆矩阵 $A$和任意正整数 $k$, 由

$$A^k(A^{-1})^k = \underbrace{AA\cdots A}_{n\text{个}}\underbrace{A^{-1}A^{-1}\cdots A^{-1}}_{n\text{个}} = I \Rightarrow (A^k)^{-1} = (A^{-1})^k$$

因此我们也把 $(A^k)^{-1}$或 $(A^{-1})^k$写为 $A^{-k}$; 另一方面, 对于可逆矩阵 $A, B, C, D$, 因为

$$(ABCD)(D^{-1}C^{-1}B^{-1}A^{-1}) = I \Rightarrow (ABCD)^{-1} = D^{-1}C^{-1}B^{-1}A^{-1}$$

可知可逆矩阵的乘积也是可逆矩阵, 且其逆矩阵为各自逆矩阵的反序乘积.

以上两点为可逆矩阵的两个重要性质, 结合两点即可得到本题:

$$\begin{aligned}(AB^2C^3D^4)^{-1} &= (D^4)^{-1}(C^3)^{-1}(B^2)^{-1}A^{-1}\\ &= (D^{-1})^4(C^{-1})^3(B^{-1})^2A^{-1}.\end{aligned}$$

1. 设 $A, B, C$均是 $n$阶方阵, 且 $ABC = I$, 则有 ($A$).

A. $BCA = I$　B. $BAC = I$

C. $CBA = I$　D. $ABC = I$

1. 设 $A, B, C$均是 $n$阶方阵, 且 $ABC = I$, 则有 ($A$).

A. $BCA = I$ B. $BAC = I$

C. $CBA = I$ D. $ABC = I$

可逆矩阵的定义: 若两个方阵 $A, B$满足 $AB = BA = I$, 那么称 $A, B$互为可逆矩阵.
在实际使用时, 我们只需要 $AB = I$或 $BA = I$即可得到 $A, B$互为可逆矩阵且自动满足另一个等式, 即 $A, B$可交换的性质.
解: 由题意 $ABC = A(BC) = I$, 因此 $A$与 $BC$互为可逆矩阵, 且有 $(BC)A = BCA = I$, 因此 $A$项正确.

2. 设 $n$阶初等阵 $E(i,j(k)),E(i(k)),E(i,j)$,$A$为同阶对角阵, 则下列正确的是 (B).

A. $E(i,j(k))A = AE(i,j(k))$　　B. $E(i(k))A = AE(i(k))$

C. $E(i,j)A = AE(i,j)$　　D. 以上结论都不对

2. 设 $n$阶初等阵 $E(i,j(k)),E(i(k)),E(i,j)$,$A$为同阶对角阵, 则下列正确的是 (B).

A. $E(i,j(k))A = AE(i,j(k))$　　B. $E(i(k))A = AE(i(k))$

C. $E(i,j)A = AE(i,j)$　　D. 以上结论都不对

解: 矩阵左乘 (右乘) 初等矩阵相当于对该矩阵作对应的初等行 (列) 变换. 对于对角阵, 对某行乘以一个数相当于只对该行对角元乘以对应数 (因为该行其他数为 0), 这和对该对角元对应列乘以对应数是相同的, 因此 $B$选项正确.

$A, C$都不一定相同, 因此错误.

## 三、求下列矩阵的逆矩阵.

1. $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, ad - bc \neq 0;$

## 三、求下列矩阵的逆矩阵.

1. $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, ad-bc\neq 0;$

解: 做初等行变换.①当 $a\neq 0$时, 有

$$\left[\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ c & d & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E(1(\frac{1}{a}))} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{b}{a} & \frac{1}{a} & 0 \\ c & d & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E(2,1(-c))} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{b}{a} & \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & d-\frac{bc}{a} & -\frac{c}{a} & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E(1,2(-\frac{b}{ad-bc}))} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{d}{ad-bc} & -\frac{b}{ad-bc} \\ 0 & d-\frac{bc}{a} & -\frac{c}{a} & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E(2(\frac{a}{ad-bc}))} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{d}{ad-bc} & -\frac{b}{ad-bc} \\ 0 & 1 & -\frac{c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{array}\right]$$

因此可得 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$;②当 $a=0$时,$b,c$必不为 0, 带入上述结果验证仍然成立. 综上可知

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

## 三、求下列矩阵的逆矩阵.

2. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \\ 5 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

## 三、求下列矩阵的逆矩阵.

**2.** $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \\ 5 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

解: 作初等行变换

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E(2,1(-3))} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -3 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E(1,2(1))} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -3 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[E(3(\frac{1}{5}))]{E(2(-\frac{1}{2}))}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{array}\right] \xrightarrow[E(2,3)]{E(1,3)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{5} \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{array}\right]$$

得到 $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \\ 5 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{5} \\ -2 & 1 & 0 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$

## 三、求下列矩阵的逆矩阵.

3. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

三、求下列矩阵的逆矩阵.

3. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

解: 进行初等行变换.

$$\left[\begin{array}{cccc:cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\substack{E(3,1(-1)) \\ E(4,1(-1))}]{E(2,1(-1))} \left[\begin{array}{cccc:cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E(4,2(-1))}\left[\begin{array}{cccc|cccc}1&1&1&1&1&0&0&0\\0&-2&0&-2&-1&1&0&0\\0&0&-2&-2&-1&0&1&0\\0&0&-2&2&0&-1&0&1\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E(4,3(-1))}\left[\begin{array}{cccc|cccc}1&1&1&1&1&0&0&0\\0&-2&0&-2&-1&1&0&0\\0&0&-2&-2&-1&0&1&0\\0&0&0&4&1&-1&-1&1\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\substack{E(2(-\frac{1}{2}))\\E(3(-\frac{1}{2}))\\E(4(\frac{1}{4}))}}\left[\begin{array}{cccc|cccc}1&1&1&1&1&0&0&0\\0&1&0&1&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&0&0\\0&0&1&1&\frac{1}{2}&0&-\frac{1}{2}&0\\0&0&0&1&\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}&\frac{1}{4}\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\substack{E(1,3(-1))\\E(1,2(-1))}]{\substack{E(3,4(-1))\\E(2,4(-1))\\E(1,4(-1))}}\left[\begin{array}{cccc|cccc}1&0&0&0&\frac{1}{4}&\frac{1}{4}&\frac{1}{4}&\frac{1}{4}\\0&1&0&0&\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}&\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}\\0&0&1&0&\frac{1}{4}&\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}\\0&0&0&1&\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}&\frac{1}{4}\end{array}\right]$$

## 三、求下列矩阵的逆矩阵.

3. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

因此得到

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

## 四、解下列矩阵方程.

1. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

## 四、解下列矩阵方程.

1. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

解: 进行初等行变换.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E(2,1(-2))} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 4 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E(2,3(-3))} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E(3,2(-1))} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & -1 & 4 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E(1,3(2))} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 5 & -2 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & -1 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow[E(2,3)]{E(3(-1))} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 5 & -2 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & -3 \end{array}\right]$$

## 四、解下列矩阵方程.

1. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

最后得到

$$X = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 8 \\ -2 & 1 & -4 \\ -2 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

## 四、解下列矩阵方程.

2.$X\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 2 & 1 & 4\\ 0 & -1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ 3 & -1 & 4\\ 1 & 5 & 0\end{bmatrix}$

## 四、解下列矩阵方程.

$$2.X\begin{bmatrix}1&2&0\\2&1&4\\0&-1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&2\\3&-1&4\\1&5&0\end{bmatrix}$$

解: 进行初等列变换

$$\left[\begin{array}{ccc}1&2&0\\2&1&4\\0&-1&1\\\hdashline 1&0&2\\3&-1&4\\1&5&0\end{array}\right]\xrightarrow{E(2,1(-2))}\left[\begin{array}{ccc}1&0&0\\2&-3&4\\0&-1&1\\\hdashline 1&-2&2\\3&-7&4\\1&3&0\end{array}\right]\xrightarrow{E(3,2(\frac{4}{3}))}\left[\begin{array}{ccc}1&0&0\\2&-3&0\\0&-1&-\frac{1}{3}\\\hdashline 1&-2&-\frac{2}{3}\\3&-7&-\frac{16}{3}\\1&3&4\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E(2,3(-3))}\left[\begin{array}{ccc}1&0&0\\2&-3&0\\0&0&-\frac{1}{3}\\\hdashline 1&0&-\frac{2}{3}\\3&9&-\frac{16}{3}\\1&-9&4\end{array}\right]\xrightarrow{E(1,2(\frac{2}{3}))}\left[\begin{array}{ccc}1&0&0\\0&-3&0\\0&0&-\frac{1}{3}\\\hdashline 1&0&-\frac{2}{3}\\9&9&-\frac{16}{3}\\5&-9&4\end{array}\right]$$

## 四、解下列矩阵方程.

$$2.X\begin{bmatrix}1&2&0\\2&1&4\\0&-1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&2\\3&-1&4\\1&5&0\end{bmatrix}$$

解:(接上文)

$$\xrightarrow[E(3(-3))]{E(2(-\frac{1}{3}))}\left[\begin{array}{ccc}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\\\hdashline 1&0&2\\9&-3&16\\-5&3&-12\end{array}\right]$$

所以得到

$$X=\begin{bmatrix}1&0&2\\9&-3&16\\-5&3&-12\end{bmatrix}$$

## 四、解下列矩阵方程.

3. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$

四、解下列矩阵方程.

3. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$

解: 不难发现 $X$左右的两个矩阵都是可逆的, 因此

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}^{-1}$$

若记原方程为 $AXB = C$, 那么得到 $X = A^{-1}CB^{-1}$, 可以先计算 $A^{-1}C$, 最后计算 $(A^{-1}C)B^{-1}$. 求 $A^{-1}C$需要对 $[A\ C]$作初等行变换.

$$\left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & 5 \end{array}\right] \xrightarrow{E(2,1(-2))} \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & 4 & -7 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & 5 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E(2,3(-3))} \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -13 & -15 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & 5 \end{array}\right] \xrightarrow{E(3,2(-1))} \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -13 & -15 \\ 0 & -1 & 0 & 15 & 20 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E(1,3(2))} \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 33 & 41 \\ 0 & 0 & 1 & -13 & -15 \\ 0 & -1 & 0 & 15 & 20 \end{array}\right] \xrightarrow[E(1,2)]{E(3(-1))} \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 33 & 41 \\ 0 & 1 & 0 & -15 & -20 \\ 0 & 0 & 1 & -13 & -15 \end{array}\right]$$

这样就得到了

$$A^{-1}C = \begin{bmatrix} 33 & 41 \\ -15 & -20 \\ -13 & -15 \end{bmatrix}$$

最后再计算 $(A^{-1}C)B^{-1}$, 即对

$$\begin{bmatrix} B \\ A^{-1}C \end{bmatrix}$$

作初等列变换.

$$\left[\begin{array}{cc} 1 & -2 \\ -1 & 3 \\ \hdashline 33 & 41 \\ -15 & -20 \\ -13 & -15 \end{array}\right] \xrightarrow{E(2,1(2))} \left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ \hdashline 33 & 107 \\ -15 & -50 \\ -13 & -41 \end{array}\right] \xrightarrow{E(1,2(1))} \left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \hdashline 140 & 107 \\ -65 & -50 \\ -54 & -41 \end{array}\right]$$

最后得到

$$X = (A^{-1}C)B^{-1} = \begin{bmatrix} 140 & 107 \\ -65 & -50 \\ -54 & -41 \end{bmatrix}$$

## 四、解下列矩阵方程.

4. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$

## 四、解下列矩阵方程.

4. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$

解: 注意到 $X$左右的矩阵分别为初等矩阵 $E(1,2)$和 $E(2,3)$, 他们都可逆且逆矩阵都为本身, 因此

$$
\begin{aligned}
X &= [E(1,2)]^{-1} \begin{bmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix} [E(2,3)]^{-1} \\
&= E(1,2) \begin{bmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix} E(2,3) \\
&= \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & -4 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix} E(2,3) \\
&= \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -4 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

五、设 $A, B$均为 $n$阶方阵.
1.$A, B$满足 $A+B+AB=O$. 证明:$I+A, I+B$互为逆矩阵, 并且 $AB=BA$;

五、设 $A, B$均为 $n$阶方阵.
1.$A, B$满足 $A+B+AB=O$. 证明:$I+A, I+B$互为逆矩阵, 并且 $AB=BA$;

解: 对 $A+B+AB=O$进行等价变换.

$$\begin{aligned}
&A+B+AB=O\\
\Leftrightarrow &A(I+B)+B=O\\
\Leftrightarrow &A(I+B)+I+B=I\\
\Leftrightarrow &(I+A)(I+B)=I
\end{aligned}$$

此即表示 $I+A, I+B$互为逆矩阵, 并且有

$$\begin{aligned}
&(I+A)(I+B)=(I+B)(I+A)\\
\Leftrightarrow &I+B+A+AB=I+A+B+BA\\
\Leftrightarrow &AB=BA
\end{aligned}$$

因此得证.

五、设 $A,B$均为 $n$阶方阵.
2. 若 $B$可逆, 且满足 $A^2+AB+B^2=O$. 证明:$A$与 $A+B$都是逆矩阵.

五、设 $A, B$均为 $n$阶方阵.
2. 若 $B$可逆, 且满足 $A^2+AB+B^2=O$. 证明:$A$与 $A+B$都是逆矩阵.

证明: 从已知等式出发, 凑出两个矩阵相乘等于 $I$后即可得到可逆结果.

$$\begin{aligned} & A^2+AB+B^2=O \\ \Leftrightarrow & A^2+AB=A(A+B)=-B^2 \\ \Leftrightarrow & A(A+B)(-B^2)^{-1}=I \end{aligned}$$

此即表示 $A$与 $(A+B)(-B^2)^{-1}$互为逆矩阵, 即 $A$为逆矩阵; 同时由可逆可得 $(A+B)(-B^2)^{-1}A=I$也成立, 这告诉我们 $A+B$与 $(-B^2)^{-1}A$互为逆矩阵, 即 $A+B$为逆矩阵, 得证.

六、若 $n$阶矩阵 $A$满足 $A^k = O, k$为正整数. 证明:$I - A$可逆, 并求 $(I - A)^{-1}$.

六、若 $n$阶矩阵 $A$满足 $A^k = O, k$为正整数. 证明:$I-A$可逆, 并求 $(I-A)^{-1}$.

证明: 要证 $I-A$可逆, 需要凑出 $I-A$与另一矩阵乘积等于 $I$的等式. 从 $A^k = O$入手, 转换为 $I-A^k = I$, 注意到

$$I-A^k = (I-A)(I+A+A^2+\cdots+A^{k-1}) = I$$

此即表示 $I-A$可逆, 同时

$$(I-A)^{-1} = I+A+A^2+\cdots+A^{k-1}$$

注: 已知 $f(A) = O$, 证明 $g(A)$可逆, 其中 $f(x), g(x)$都是多项式. 此类题型其中一种方法是将题意中等式 $f(A)+I = I$中左边 $f(A)+I$分解为含因式 $g(A)$的两个乘积, 即 $f(A)+I = g(A)h(A) = I$, 从而得到 $g(A)$可逆, 其中需要用到多项式除法 (见最后一题).

## 七、设 $A, B, A+B$都可逆. 证明:$C = A^{-1} + B^{-1}$可逆.

## 七、设 $A, B, A+B$都可逆. 证明:$C = A^{-1} + B^{-1}$可逆.

证明: 由 $A+B$和 $A$可逆, 可知 $A^{-1}(A+B) = I + A^{-1}B$也可逆, 结合 $B$可逆得到

$$(I + A^{-1}B)B^{-1} = B^{-1} + A^{-1} = C$$

可逆, 因此得证.

八、设 3 阶方阵 $A$和 $B$满足 $A^{-1}BA=6A+BA, A=\begin{bmatrix}\frac{1}{3}&0&0\\0&\frac{1}{4}&0\\0&0&\frac{1}{7}\end{bmatrix}$，求 $B$.

八、设 3 阶方阵 $A$和 $B$满足 $A^{-1}BA=6A+BA, A=\begin{bmatrix}\frac{1}{3} & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{4} & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{7}\end{bmatrix}$, 求 $B$.

解: 从等式入手, 得到

$$A^{-1}BA=6A+BA$$
$$\Leftrightarrow (A^{-1}-I)BA=6A$$

不难计算得到

$$A^{-1}-I=\begin{bmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 7\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 6\end{bmatrix}$$

因此 $A^{-1}-I$和 $A$都是可逆矩阵, 进而

$$B=(A^{-1}-I)^{-1}(6I_3)$$
$$=6\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{3} & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{6}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

1. 设 $A=\begin{bmatrix}2&1&0\\1&0&3\\0&2&1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}B_1\\B_2\\B_3\end{bmatrix}$ 为行分块矩阵, $C=AB=\begin{bmatrix}C_1\\C_2\\C_3\end{bmatrix}$, 则 $C_1=\underline{2B_1+B_2}$, $C_2=\underline{B_1+3B_3}$, $C_3=\underline{2B_2+B_3}$.

解: 由分块矩阵的运算规律可知即可得到结果.

## 分块矩阵常见运算:$\alpha_i$为列向量,$\beta_i^T$为行向量.

$$A[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n]=[A\alpha_1,A\alpha_2,\cdots,A\alpha_n]$$

$$[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n]\begin{bmatrix} b_{11} & * & \cdots & * \\ b_{21} & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & * & \cdots & * \end{bmatrix}=\left[\sum_{i=1}^n b_{i1}\alpha_i,*,\cdots,*\right]$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ * & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & * & \cdots & * \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \beta_1^T \\ \beta_2^T \\ \vdots \\ \beta_n^T \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n a_{1i}\beta_i^T \\ * \\ \vdots \\ * \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \beta_1^T \\ \beta_2^T \\ \vdots \\ \beta_n^T \end{bmatrix}B=\begin{bmatrix} \beta_1^TB \\ \beta_2^TB \\ \vdots \\ \beta_n^TB \end{bmatrix}$$

2. 设 $A, B, C, D, F$都是 $n$阶方阵, 满足 $AB = I_n, CD = I_n$, 则分块矩阵乘积 $\begin{bmatrix} A & O \\ -CFA & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B & O \\ F & D \end{bmatrix} = \underline{I_{2n}}$.

2. 设 $A,B,C,D,F$都是 $n$阶方阵, 满足 $AB=I_n, CD=I_n$, 则分块矩阵乘积 $\begin{bmatrix} A & O \\ -CFA & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B & O \\ F & D \end{bmatrix} = \underline{I_{2n}}$.

解: 分块矩阵的乘法和矩阵乘法类似, 即

$$\begin{bmatrix} A & O \\ -CFA & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B & O \\ F & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} AB+OF & AO+OD \\ -CFAB+CF & -CFAO+CD \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} I_n & O \\ O & I_n \end{bmatrix} = I_{2n}$$

3. 设 $A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 3\\ 2 & 3 & 1\\ 1 & 2 & 3\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 2 & 3\\ -1 & 5\end{bmatrix}$, $B$的列分块矩阵 $B=[\beta_1\ \beta_2]$, 则 $AB=\underline{\begin{bmatrix}-4 & 11\\ 7 & 12\\ 2 & 20\end{bmatrix}}$, $[A\beta_1\ A\beta_2]=\underline{\begin{bmatrix}-4 & 11\\ 7 & 12\\ 2 & 20\end{bmatrix}}$

解: 直接进行计算即可. 此题告诉我们 $AB=[A\beta_1, A\beta_2]$.

1. 设矩阵 $A$是 $n$阶方阵, 且 $A \neq A^T$. 下列矩阵中,$(B)$不是对称矩阵.

A. $A + A^T$ B. $A - A^T$ C. $AA^T$ D. $A^TA$

1. 设矩阵 $A$是 $n$阶方阵, 且 $A \neq A^T$. 下列矩阵中,($B$)不是对称矩阵.

A. $A+A^T$　B. $A-A^T$　C. $AA^T$　D. $A^TA$

解：因为

$$(A+A^T)^T = A^T + (A^T)^T = A^T + A$$

$$(AA^T)^T = (A^T)^T A^T = AA^T$$

$$(A^TA)^T = A^T(A^T)^T = A^TA$$

所以选择 (B) 项. 事实上, 若 $(A-A^T)^T = -(A-A^T) \neq A-A^T$.

注: 转置的基本性质, 设 $A, B$为同阶方阵, 那么

$$(A^T)^T = A, \quad (kA)^T = kA^T$$

$$(A \pm B)^T = A^T \pm B^T$$

$$(AB)^T = B^TA^T$$

2. 若矩阵 $A$满足 $A^T = -A$, 则称 $A$为反对称矩阵. 下列矩阵中,(C) 不是反对称矩阵.

A. $\begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 \end{bmatrix}$  B. $\begin{bmatrix} 0 & a_{12} \\ -a_{12} & 0 \end{bmatrix}^T - \begin{bmatrix} 0 & a_{12} \\ -a_{12} & 0 \end{bmatrix}$

C. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \\ -2 & -3 & 3 \end{bmatrix}$  D. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \\ -2 & -3 & 3 \end{bmatrix}^T - \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \\ -2 & -3 & 3 \end{bmatrix}$

2. 若矩阵 $A$满足 $A^T = -A$, 则称 $A$为反对称矩阵. 下列矩阵中,(C) 不是反对称矩阵.

A. $\begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 \end{bmatrix}$ B. $\begin{bmatrix} 0 & a_{12} \\ -a_{12} & 0 \end{bmatrix}^T - \begin{bmatrix} 0 & a_{12} \\ -a_{12} & 0 \end{bmatrix}$

C. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \\ -2 & -3 & 3 \end{bmatrix}$ D. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \\ -2 & -3 & 3 \end{bmatrix}^T - \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \\ -2 & -3 & 3 \end{bmatrix}$

解: 因为反对称矩阵成立等式 $A + A^T = O$, 可知其对角元必定为 0, 因此 $(C)$不是反对称矩阵.

3. 设 $A, B$均为 3阶矩阵,$A, B$的列分块矩阵分别为 $A = [A_1\ A_2\ A_3], B = [B_1\ B_2\ B_3]$,$k$是一个常数. 下列式子中,$(B)$不成立.

A. $AB = [AB_1\ AB_2\ AB_3]$　B. $AB = [A_1B\ A_2B\ A_3B]$

C. $kA = [kA_1\ kA_2\ kA_3]$　D. $A + B = [A_1 + B_1\ A_2 + B_2\ A_3 + B_3]$

解: 由分块矩阵的计算,$A, C, D$显然正确, 故选择 $(B)$项.

4. 设 $A, B, C$都是 $n$阶矩阵, 则下列运算中, 不正确的是 (C).

A. $[B\ C]\begin{bmatrix} A \\ A \end{bmatrix} = BA + CA$　B. $A[B\ C] = [AB\ AC]$

C. $\begin{bmatrix} B \\ C \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} AB \\ AC \end{bmatrix}$　D. $\begin{bmatrix} B \\ C \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} BA \\ CA \end{bmatrix}$

解: 由分块矩阵的计算,$(C)$项错误 (正确结果应该为 $(D)$项), 因此选择 $(C)$.

三、设 $A, C$是同阶可逆矩阵, 求 $X = \begin{bmatrix} O & A \\ C & O \end{bmatrix}$的逆.

## 三、设 $A, C$是同阶可逆矩阵, 求 $X=\begin{bmatrix} O & A \\ C & O \end{bmatrix}$的逆.

解一: 由结论, 逆对角分块矩阵若可逆, 其逆矩阵也为逆对角分块矩阵, 且排列次序相反, 即

$$\begin{bmatrix} O & A \\ C & O \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} O & C^{-1} \\ A^{-1} & O \end{bmatrix}$$

## 三、设 $A, C$是同阶可逆矩阵, 求 $X = \begin{bmatrix} O & A \\ C & O \end{bmatrix}$的逆.

解一: 由结论, 逆对角分块矩阵若可逆, 其逆矩阵也为逆对角分块矩阵, 且排列次序相反, 即

$$\begin{bmatrix} O & A \\ C & O \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} O & C^{-1} \\ A^{-1} & O \end{bmatrix}$$

解二: 对 $[X\ I]$作广义初等行变换也可以得到 $X^{-1}$, 即

$$\left[\begin{array}{cc:cc} O & A & I & O \\ C & O & O & I \end{array}\right] \xrightarrow[\text{第二行左乘 } C^{-1}]{\text{第一行左乘 } A^{-1}} \left[\begin{array}{cc:cc} O & I & A^{-1} & O \\ I & O & O & C^{-1} \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\text{第一行和第二行交换}} \left[\begin{array}{cc:cc} I & O & O & C^{-1} \\ O & I & A^{-1} & O \end{array}\right]$$

得到

$$\begin{bmatrix} O & A \\ C & O \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} O & C^{-1} \\ A^{-1} & O \end{bmatrix}$$

## 四、设 $A$是一个方阵，证明 $A+A^T$为对称矩阵,$A-A^T$为反对称矩阵，并将 $A$表示为对称矩阵和反对称矩阵之和

**四、设 $A$是一个方阵, 证明 $A+A^T$为对称矩阵,$A-A^T$为反对称矩阵, 并将 $A$表示为对称矩阵和反对称矩阵之和**

解: 因为

$$(A+A^T)^T = A^T + A$$

$$(A-A^T)^T = A^T - A = -(A-A^T)$$

因此可知 $A+A^T$为对称矩阵,$A-A^T$为反对称矩阵, 并且由

$$A = \underbrace{\frac{1}{2}(A+A^T)}_{\text{对称矩阵}} + \underbrace{\frac{1}{2}(A-A^T)}_{\text{反对称矩阵}}$$

因此得证.

五、设 $A$是 3 阶实数矩阵,$AA^T = O$,证明:$A = O$.

五、设 $A$是 3 阶实数矩阵,$AA^T = O$,证明:$A = O$.

证明: 设 $A = (a_{ij})_{3\times3}$,$AA^T$的第 $i$个对角元为 0, 即

$$a_{i1}^2 + a_{i2}^2 + a_{i3}^2 = 0$$

因此可知 $a_{ij} = 0$恒成立, 即 $A = O$.

六、设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$的列向量为 $A_1,A_2,\cdots,A_n,B=(b_{ij})_{n\times s}$的行向量为 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$.

证明:

$AB$的第 $i$个行向量为 $a_{i1}\beta_1+a_{i2}\beta_2+\cdots+a_{in}\beta_n$;

$AB$的第 $j$个列向量为 $b_{1j}A_1+b_{2j}A_2+\cdots+n_{nj}A_n$;

六、设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$的列向量为 $A_1,A_2,\cdots,A_n,B=(b_{ij})_{n\times s}$的行向量为 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$.
证明:
$AB$的第 $i$个行向量为 $a_{i1}\beta_1+a_{i2}\beta_2+\cdots+a_{in}\beta_n$;
$AB$的第 $j$个列向量为 $b_{1j}A_1+b_{2j}A_2+\cdots+n_{nj}A_n$;

证明: 只需验证 $AB$的 $(i,j)$元为对应向量的分量值即可. 首先 $AB$的 $(i,j)$元为

$$a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{in}b_{nj}$$

因为 $\beta_k$的第 $j$个分量为 $b_{kj}$,$A_k$的第 $i$个分量为 $a_{ik}$, 因此行向量 $a_{i1}\beta_1+a_{i2}\beta_2+\cdots+a_{in}\beta_n$的第 $j$个元和列向量 $b_{1j}A_1+b_{2j}A_2+\cdots+n_{nj}A_n$的第 $i$个分量即为上式, 因此得证.

七、设 $B$为 $n$阶矩阵, 又 $U=[u_1,u_2,\cdots,u_n]^T$, $V=[v_1,v_2,\cdots,v_n]^T$, 令 $A=B+UV^T$. 证明: 当 $\gamma=1+V^TB^{-1}U\neq 0$时,

$$A^{-1}=B^{-1}-\frac{1}{\gamma}(B^{-1}UV^TB^{-1}).$$

七、设 $B$为 $n$阶矩阵, 又 $U=[u_1,u_2,\cdots,u_n]^T$, $V=[v_1,v_2,\cdots,v_n]^T$, 令 $A=B+UV^T$. 证明: 当 $\gamma=1+V^TB^{-1}U\neq 0$时,

$$A^{-1}=B^{-1}-\frac{1}{\gamma}(B^{-1}UV^TB^{-1}).$$

解: 验证 $AA^{-1}=I$即可.

$$\begin{aligned}
AA^{-1}&=(B+UV^T)\left[B^{-1}-\frac{1}{\gamma}B^{-1}UV^TB^{-1}\right]\\
&=I-\frac{1}{\gamma}UV^TB^{-1}+UV^TB^{-1}-\frac{1}{\gamma}U(V^TB^{-1}U)V^TB^{-1}\\
&=I+\left[-\frac{1}{\gamma}+1-\frac{V^TB^{-1}U}{\gamma}\right]UV^TB^{-1}\\
&=I+\frac{-1+\gamma-V^TB^{-1}U}{\gamma}UV^TB^{-1}\\
&=I
\end{aligned}$$

## 八、设列矩阵 $X=[x_1,x_2,\cdots,x_n]^T$满足 $X^TX=1, A=I-2XX^T$. 证明:$A$是对称阵, 且 $AA^T=I$.

## 八、设列矩阵 $X=[x_1,x_2,\cdots,x_n]^T$满足 $X^TX=1, A=I-2XX^T$. 证明:$A$是对称阵, 且 $AA^T=I$.

证明: 因为

$$A^T=(I-2XX^T)^T=I^T-2(XX^T)^T=I=2XX^T=A$$

可知 $A$对称. 另一方面, 由

$$\begin{aligned}AA^T=A^2&=(I-2XX^T)(I-2XX^T)\\&=I-2XX^T-2XX^T+4X(X^TX)X^T\\&=I-4XX^T+4(X^TX)XX^T\\&=I\end{aligned}$$

因此得证.