线性代数第十次作业

2024 年 5 月 26 日

目录

本次作业

《线性代数习题册 (第三版)》

- $77 \sim 80$页: 矩阵的特征值与特征向量

目录

习题答案会上传至 github 中.

图: github 链接二维码

1. 设非奇异矩阵 A的一个特征值为 2, 则矩阵 $\left(\frac{1}{3}A^2\right)^{-1}$有一个特征值等于 (B).

A. $\frac{4}{3}$ B. $\frac{3}{4}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{1}{4}$

①: 若矩阵 A的一个特征值和其特征向量为 λ, ξ, $f(x)$为多项式, 那么 $f(A)$的一个特征值和其特征向量为 $f(\lambda), \xi$, 反之不一定.

②若可逆矩阵 A的一个特征值和其特征向量为 λ, ξ, 那么 A^{-1}的一个特征值和其特征向量为 λ^{-1}, ξ, 反之也成立.

1. 设非奇异矩阵 A的一个特征值为 2, 则矩阵 $\left(\frac{1}{3}A^2\right)^{-1}$有一个特征值等于 ($B$).

A. $\dfrac{4}{3}$ B. $\dfrac{3}{4}$ C. $\dfrac{1}{2}$ D. $\dfrac{1}{4}$

①: 若矩阵 A的一个特征值和其特征向量为 λ, ξ, $f(x)$为多项式, 那么 $f(A)$的一个特征值和其特征向量为 $f(\lambda), \xi$, 反之不一定.
②若可逆矩阵 A的一个特征值和其特征向量为 λ, ξ, 那么 A^{-1}的一个特征值和其特征向量为 λ^{-1}, ξ, 反之也成立.

解: 由题意, 可知 $\frac{1}{3}A^2$为 A的一个多项式矩阵, 那么其一定有特征值 $\frac{1}{3} \times 2^2 = \frac{4}{3}$, 进而其逆定有特征值为 $\left(\frac{4}{3}\right)^{-1} = \frac{3}{4}$,($B$)项正确.

拓展: 我们知道 n阶矩阵的特征多项式一定为 n次, 因此在复数域上一定有 n个复根 (包括重数), 若设为 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$,$f(x)$为多项式, 那么 $f(A)$在复数域上的 n个特征值就为 $f(\lambda_1), \cdots, f(\lambda_n)$. 如若 2阶矩阵 A特征值为 $-1, 1$, 那么 A^2的两个特征值就为 $(-1)^2, 1^2$.

2. 下列说法正确的是 (D).

A. 若 0是矩阵 A的特征值, 则与它对应的特征向量可能为零向量

B. 若 A与 B有相同的特征向量, 则它们对应的特征值必相同

C. 不同的矩阵必有不同的特征多项式

D. 矩阵的一个特征值可以有多个特征向量, 但一个特征向量仅能属于一个特征值

2. 下列说法正确的是 (D).
A. 若 0是矩阵 A的特征值, 则与它对应的特征向量可能为零向量
B. 若 A与 B有相同的特征向量, 则它们对应的特征值必相同
C. 不同的矩阵必有不同的特征多项式
D. 矩阵的一个特征值可以有多个特征向量, 但一个特征向量仅能属于一个特征值

解:(A)项, 特征向量必定非零, 因此说法错误
(B)项, 如 $A = I, B = 2I$, 不难验证所有非零向量都是它们的特征向量, 但是 A特征值为 $1, 1$,B特征值为 $2, 2$, 故说法错误
(C)项, 下列两个矩阵的特征多项式都是 $(x - 1)^2$, 但他们显然不同, 说法错误

$$A = I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(D)项, 反证法证明, 若 A的特征向量 ξ即属于 λ_1也属于 λ_2, 那么
$A\xi = \lambda_1\xi = \lambda_2\xi \Rightarrow (\lambda_1 - \lambda_2)\xi = 0 \Rightarrow \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2$.

3. 下列说法错误的是 (CD).
A. 若 λ是 A的特征值, 则 λ^k(k为正整数)为 A^k的特征值
B. 若 n阶矩阵 A的秩小于 $n-1$, 则 A^*的特征值为 0
C. 若 n阶矩阵 A的秩等于 $n-1$, 则 A^*有一个 $n-1$重的零特征值以及一个单特征值
D. 设 A, B为 n阶对称矩阵, 则 AB与 BA可能有不同的特征值

3. 下列说法错误的是 (CD).
A. 若 λ是 A的特征值, 则 λ^k(k为正整数)为 A^k的特征值
B. 若 n阶矩阵 A的秩小于 $n-1$, 则 A^*的特征值为 0
C. 若 n阶矩阵 A的秩等于 $n-1$, 则 A^*有一个 $n-1$重的零特征值以及一个单特征值
D. 设 A, B为 n阶对称矩阵, 则 AB与 BA可能有不同的特征值

解:(A)项, 若 λ为 A特征值, 那存在 $\xi \neq 0$使得 $A\xi = \lambda\xi$, 因此可得 $A^k\xi = \lambda^k\xi$, 此即说明 λ^k为 A^k的特征值, 说法正确 (直接由 1 题补充的结论得到)
(B)项,$r(A) < n-1 \Rightarrow r(A^*) = 0 \Rightarrow A^* = 0, A^*$的 n个特征值全为零
(C)项,$r(A) = n-1 \Rightarrow r(A^*) = 1$, 那么 A^*一定能表示为 $\alpha\beta^T$的形式 (秩一矩阵总能表示为列向量乘以行向量的形式), 这样 A^*的特征多项式为

$$|\lambda I_n - A^*| = |\lambda I_n - \alpha\beta^T| \xlongequal{*} \lambda^{n-1}|\lambda I_1 - \beta^T\alpha| = \lambda^{n-1}(\lambda - \beta^T\alpha)$$

此即表示 A^*有 $n-1$重零特征值和一个特征值 $\beta^T\alpha$, 但 $\beta^T\alpha$也可能为零, 因此说法错误.
(D)项, 因为 $|\lambda I_n - AB| = |(\lambda I_n - AB)^T| = |\lambda I_n - B^TA^T| = |\lambda I_n - BA|$, 这说明 AB, BA的特征多项式完全相同, 因此它们的特征值完全相同 (包括重数), 说法错误.

3. 下列说法错误的是 (CD).
A. 若 λ是 A的特征值, 则 λ^k(k为正整数)为 A^k的特征值
B. 若 n阶矩阵 A的秩小于 $n-1$, 则 A^*的特征值为 0
C. 若 n阶矩阵 A的秩等于 $n-1$, 则 A^*有一个 $n-1$重的零特征值以及一个单特征值
D. 设 A,B为 n阶对称矩阵, 则 AB与 BA可能有不同的特征值

注 1:(A)项运用第一题补充的结论, 即矩阵的特征值随多项式和取逆变化而变化, 属于的特征向量不变, 此结论经常使用;

注 2: 非常好用的两个行列式推论, 若 A为 $m\times n$矩阵,B为 $n\times m$矩阵, 那么有 $|I_m-AB|=|I_n-BA|$成立; 如果 $m>n$, 那么还有

$$|\lambda I_m-AB|=\lambda^{m-n}|\lambda I_n-BA|$$

第二个结论常用于低秩矩阵乘积的特征多项式求解, 如 (C)项.

注 3:(D)项可以去掉对称的条件, 即对于任意 n阶矩阵 A,B都有 AB,BA的特征值相同, 这由注 2 的结论 $|\lambda I_n-AB|=|\lambda I_n-BA|$立即得到, 但注意特征向量不一定相同.

3. 下列说法错误的是 (D).
A. 若 λ是 A的特征值, 则 λ^k(k为正整数)为 A^k的特征值
B. 若 n阶矩阵 A的秩小于 $n-1$, 则 A^*的特征值为 0
C. 若 n阶矩阵 A的秩等于 $n-1$, 则 A^*有一个 $n-1$重的零特征值以及一个单特征值
D. 设 A, B为 n阶对称矩阵, 则 AB与 BA可能有不同的特征值

注 4:(C)项另解,$r(A)=n-1 \Rightarrow r(A^*)=1$, 那么 $A^*x=0$存在一个基础解系 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{n-1}$, 若 A^*特征值全为零那么显然满足题意; 若 A^*存在非零特征值 $\lambda \neq 0$, 那么必定存在其特征值向量 $\xi \neq 0$, 令 $P=[\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{n-1}, \xi]$, 则有

$$P^{-1}A^*P = P^{-1}A^*[\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{n-1}, \xi] = P^{-1}[A^*\xi_1, A^*\xi_2, \cdots, A^*\xi_{n-1}, A^*\xi]$$

$$= P^{-1}[0, 0, \cdots, 0, \lambda\xi] = P^{-1}\underbrace{[\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{n-1}, \xi]}_{=P}\begin{bmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda \end{bmatrix}$$

这表示 A^*相似于对角元为 $n-1$个 0和一个 λ的对角矩阵, 因此特征值也为 $n-1$个 0和一个 λ, 命题成立. 顺便我们还可知存在非零特征值的秩一矩阵必定可对角化.

3. 下列说法错误的是 (CD).
A. 若 λ是 A的特征值, 则 λ^k(k为正整数)为 A^k的特征值
B. 若 n阶矩阵 A的秩小于 $n-1$, 则 A^*的特征值为 0
C. 若 n阶矩阵 A的秩等于 $n-1$, 则 A^*有一个 $n-1$重的零特征值以及一个单特征值
D. 设 A, B为 n阶对称矩阵, 则 AB与 BA可能有不同的特征值

注 5:(C)项推广结论, 若 n阶矩阵 A的秩 $r(A)=r$, 那么 A必定有 0特征值且其重数大于等于 $n-r$.

4. 设矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, 则 A的特征值为 (C).

A. $1, 0, 1$ B. $1, 1, 2$ C. $-1, 1, 2$ D. $-1, 1, 1$

4. 设矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&0&1\\0&1&1\end{bmatrix}$, 则 A的特征值为 (C).

A. $1,0,1$　　B. $1,1,2$　　C. $-1,1,2$　　D. $-1,1,1$

解一: 按照定义计算特征值即可

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-1&0\\-1&\lambda&-1\\0&-1&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda+1)(\lambda-2)=0$$

解得 $\lambda=-1,1,2$, 故选择 (C)项.

4. 设矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&0&1\\0&1&1\end{bmatrix}$, 则 A的特征值为 (C).

A. $1,0,1$ B. $1,1,2$ C. $-1,1,2$ D. $-1,1,1$

解一: 按照定义计算特征值即可

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-1&0\\-1&\lambda&-1\\0&-1&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda+1)(\lambda-2)=0$$

解得 $\lambda=-1,1,2$, 故选择 (C)项.

解二: 使用小结论进行排除.n阶矩阵的所有特征值之和等于矩阵的迹 (所有对角线的和), 所有特征值的乘积等于行列式的值. 首先不难计算 A的迹 $\operatorname{tr}(A)=1+0+1=2$应该等于所有特征值的和, 即可排除 $(B),(D)$项; 再计算行列式 $|A|=-2\neq 0$, 因此说明没有零特征值, 故排除 (A)项, 选择 (C)项.

1. 已知 3阶矩阵 A的特征值为 $-1, 1, 2$且 $B = A^3 - 2A^2$, 则 $|B| = \underline{0}$.

1. 已知 3阶矩阵 A的特征值为 $-1,1,2$且 $B=A^3-2A^2$, 则 $|B|=\underline{0}$.

解: 使用特征值多项式的结论 (1 题,3 题), 可知 B的特征值为 $-3,-1,0$, 因此行列式为特征值乘积, 即为 0.

2. 设 $A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & 4 & -2\\ -3 & -3 & a\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & b\end{bmatrix}$, A和 B有相同的特征值, 则 $a=\underline{5}, b=\underline{6}$.

2. 设 $A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & 4 & -2\\ -3 & -3 & a\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & b\end{bmatrix}$,$A$和 B有相同的特征值,则 $a=\underline{5}, b=\underline{6}$.

解: 使用小结论计算,A, B特征值相同, 因此他们的迹和行列式相等

$$\begin{cases}5+a=4+b\\ 6a-6=4b\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a=5\\ b=6\end{cases}$$

三、求下列矩阵的特征值与特征向量

1.$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

三、求下列矩阵的特征值与特征向量

1.$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

解: 直接计算.$|\lambda I - A| = (\lambda+1)^2(\lambda-5)$, 因此特征值为 -1(2重) 和 5, 然后分别求解 $(-I-A)x = 0$和 $(5I-A)x = 0$的基础解系即为对应特征值的特征向量.

①$\lambda = -1$时, 作初等行变换

$$A-(-I) = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \xi_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \xi_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

②$\lambda = 5$时, 作初等行变换

$$A-5I = \begin{bmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \xi_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

三、求下列矩阵的特征值与特征向量

$$2.B = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

三、求下列矩阵的特征值与特征向量

2.$B=\begin{bmatrix}4&0&3\\-1&1&0\\-1&1&-1\end{bmatrix}$

解: 直接计算特征值,$|\lambda I-B|=(\lambda-2)(\lambda^2-2\lambda-2)$, 得到特征值为 $2,1\pm\sqrt{3}$.

①$\lambda=2$时, 作初等行变换

$$B-(2I)=\begin{bmatrix}2&0&3\\-1&-1&0\\-1&1&3\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}-1&0&-3/2\\0&-2&3\\0&0&0\end{bmatrix}\Rightarrow\xi_1=\begin{bmatrix}-3/2\\3/2\\1\end{bmatrix}$$

②$\lambda=1+\sqrt{3}$时,$A-(1+\sqrt{3})I$作初等行变换

$$\begin{bmatrix}3-\sqrt{3}&0&3\\-1&-\sqrt{3}&0\\-1&1&-2-\sqrt{3}\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}-1&0&-\frac{\sqrt{3}+3}{2}\\0&1&-\frac{\sqrt{3}+1}{2}\\0&0&0\end{bmatrix}\Rightarrow\xi_2=\begin{bmatrix}-\frac{\sqrt{3}+3}{2}\\\frac{\sqrt{3}+1}{2}\\1\end{bmatrix}$$

③$\lambda=1-\sqrt{3}$时,$A-(1-\sqrt{3})I$作初等行变换

$$\begin{bmatrix}3+\sqrt{3}&0&3\\-1&\sqrt{3}&0\\-1&1&-2+\sqrt{3}\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}-1&0&\frac{\sqrt{3}-3}{2}\\0&1&\frac{\sqrt{3}-1}{2}\\0&0&0\end{bmatrix}\Rightarrow\xi_3=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{3}-3}{2}\\-\frac{\sqrt{3}-1}{2}\\1\end{bmatrix}$$

三、求下列矩阵的特征值与特征向量

3.$C = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

三、求下列矩阵的特征值与特征向量

3.$C = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

解: 直接计算特征值,$|\lambda I - C| = \lambda(\lambda - 4)(\lambda + 2)$, 得到特征值为 $0, -2, 4$.

①$\lambda = 0$时, 作初等行变换

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \xi_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

②$\lambda = -2$时,$C - (-2I)$作初等行变换

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \xi_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

③$\lambda = 4$时,$C - 4I$作初等行变换

$$\begin{bmatrix} -4 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \xi_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

三、求下列矩阵的特征值与特征向量

$$4.D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

三、求下列矩阵的特征值与特征向量

4.$D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

解:n阶上 (下) 三角矩阵的所有特征值即为对角元, 因此直接得到特征值为 $1, 2, 3$.

①$\lambda = 1$时, 作初等行变换

$$D - I = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \xi_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

②$\lambda = 2$时,$D - 2I$作初等行变换

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \xi_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

③$\lambda = 3$时,$D - 3I$作初等行变换

$$\begin{bmatrix} -2 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} -2 & 0 & 9 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \xi_3 = \begin{bmatrix} \frac{9}{2} \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

四、设 n阶矩阵 A的各行元素之和为 2.
1. 求证:$\lambda = 2$是 A的一个特征值, 且 $\beta = [1, 1, \cdots, 1]^T$是相应的特征向量;

四、设 n阶矩阵 A的各行元素之和为 2.
1. 求证:$\lambda = 2$是 A的一个特征值, 且 $\beta = [1, 1, \cdots, 1]^T$是相应的特征向量;

证明: 由题意可知

$$A \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ \vdots \\ 2 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

此即表示 2为一个 A的特征值, 对应的特征向量为 β, 得证.

四、设 n阶矩阵 A的各行元素之和为 2.
2. 当 A可逆时,A^{-1}的各行元素之和为多少? 矩阵 $3A^{-1}+A^2+2A$的各行元素之和为多少?

四、设 n阶矩阵 A的各行元素之和为 2.
2. 当 A可逆时,A^{-1}的各行元素之和为多少? 矩阵 $3A^{-1}+A^2+2A$的各行元素之和为多少?

解: 由 1 得到 $A\beta=2\beta$, 又 A可逆, 那么得到 $\frac{1}{2}\beta=A^{-1}\beta$, 因此 A^{-1}各行元素之和为 $\frac{1}{2}$.
同理因为
$(3A^{-1}+A^2+2A)\beta=3(A^{-1}\beta)+A(A\beta)+2(A\beta)=\frac{3}{2}\beta+4\beta+4\beta=\frac{19}{2}\beta$,
因此可知 $3A^{-1}+A^2+2A$各行元素之和为 $\frac{19}{2}$.

注: 使用特征值多项式的结论可以立即得到结论.

五、设 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 与 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 是 n 阶矩阵 A 的全部特征值和相应的特征向量, 求 $P^{-1}AP$ 的全部特征值与相应的特征向量.

五、设 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$与 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$是 n阶矩阵 A的全部特征值和相应的特征向量, 求 $P^{-1}AP$的全部特征值与相应的特征向量.

解: 由题意可知 $A\alpha_i = \lambda_i \alpha_i$, 因为

$$(P^{-1}AP)(P^{-1}\alpha_i) = P^{-1}A\alpha_i = \lambda_i P^{-1}\alpha_i$$

可知 $P^{-1}AP$的特征值也为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$, 相应的特征向量为 $P^{-1}\alpha_1, P^{-1}\alpha_2, \cdots, P^{-1}\alpha_n$.

注: 可以看到, 相似矩阵的特征值相同, 但特征向量一般不同.

六、设方阵 A满足 $A^2 = A$, 证明:A的特征值只有 0或 1.

六、设方阵 A满足 $A^2 = A$, 证明:A的特征值只有 0或 1.

证明: 设 λ为 A的特征值,ξ为对应的特征向量, 那么有 $A\xi = \lambda\xi$, 因此

$$0 = 0\xi = (A^2 - A)\xi = A(A\xi) - A\xi = (\lambda^2 - \lambda)\xi \Rightarrow \lambda^2 - \lambda = 0$$

进而可知 λ只能为 0或 1.

注: 若 n阶方阵 A的一个多项式 $f(A) = 0$, 那么其特征值只能为 $f(x) = 0$的根, 但不能保证所有根都是特征值, 如 $A = 0$时满足 $A^2 = A$但却没有特征值 1.

七、设 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$是 n阶矩阵 A的 n个特征值,$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$是对应的 n个线性无关的特征向量, 求 $A - \lambda_1 I$的全部特征值与一组对应的线性无关的特征向量.

七、设 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$是 n阶矩阵 A的 n个特征值,$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$是对应的 n个线性无关的特征向量, 求 $A - \lambda_1 I$的全部特征值与一组对应的线性无关的特征向量.

解: 已知 $A\beta_i = \lambda_i\beta_i$, 且由

$$(A - \lambda_1 I)\beta_i = A\beta_i - \lambda_1\beta_i = \lambda_i\beta_i - \lambda_1\beta_i = (\lambda_i - \lambda_1)\beta_i$$

可知 $A - \lambda_1 I$的全部特征值为 $0, \lambda_2 - \lambda_1, \cdots, \lambda_n - \lambda_1$, 对应的线性无关的特征向量为 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$.

注: 使用特征值多项式的结论可以立即得到结论.