

线性代数第七次作业

2024 年 4 月 21 日

本次作业

目录

线性无关与线性 相关

一、填空题

1

2

3

4

二、选择题

1

2

3

4

三

四

五

六

向量组的极大线 性无关组和秩

一、填空题

1

2

3

4

二

三

四

五

六

七

《线性代数习题册 (第三版)》

- 47 ~ 50页: 线性无关与线性相关
- 51 ~ 54页: 向量组的极大线性无关组和秩

目录

线性无关与线性
相关

一、填空题

1

2

3

4

二、选择题

1

2

3

4

三

四

五

六

向量组的极大线
性无关组和秩

一、填空题

1

2

3

4

二

三

四

五

六

七

习题答案会上传至 github 中.



图: github 链接二维码

目录

线性无关与线性
相关

一、填空题

1

2

3

4

二、选择题

1

2

3

4

三

四

五

六

向量组的极大线
性无关组和秩

一、填空题

1

2

3

4

二

三

四

五

六

七

1. 设 $\alpha_1 = (2, -1, 0), \alpha_2 = (1, 4, -3), \alpha_3 = (1, -2, 1)$, 则
 $2\alpha_1 - \alpha_2 + 3\alpha_3 = \underline{(6, -12, 6)}$

目录

线性无关与线性
相关

一、填空题

1

2

3

4

二、选择题

1

2

3

4

三

四

五

六

向量组的极大线
性无关组和秩

一、填空题

1

2

3

4

二

三

四

五

六

七

1. 设 $\alpha_1 = (2, -1, 0), \alpha_2 = (1, 4, -3), \alpha_3 = (1, -2, 1)$, 则
 $2\alpha_1 - \alpha_2 + 3\alpha_3 = \underline{(6, -12, 6)}$

解: 直接计算即可, 向量即某一维度为 1 的矩阵, 即

$$2(2, -1, 0) - (1, 4, -3) + 3(1, -2, 1) = (6, -12, 6)$$

目录

线性无关与线性
相关

一、填空题

1

2

3

4

二、选择题

1

2

3

4

三

四

五

六

向量组的极大线
性无关组和秩

一、填空题

1

2

3

4

二

三

四

五

六

七

2. 设 $\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix}$, 若 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 = \alpha_3$, 则
 $x_1 = \underline{\frac{7}{2}}$, $x_2 = \underline{\frac{1}{2}}$.

2. 设 $\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix}$, 若 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 = \alpha_3$, 则 $x_1 = \frac{7}{2}$, $x_2 = \frac{1}{2}$.

解: 由分块矩阵的计算, 等式可以化为

$$[\alpha_1, \alpha_2] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \alpha_3$$

对增广矩阵 $[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$ 作初等行变换.

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 4 \\ -1 & 3 & -2 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 7/2 \\ 0 & 1 & 1/2 \end{array} \right]$$

因此得到

$$\begin{cases} x_1 = \frac{7}{2} \\ x_2 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

目录

线性无关与线性
相关

一、填空题

1

2

3

4

二、选择题

1

2

3

4

三

四

五

六

向量组的极大线
性无关组和秩

一、填空题

1

2

3

4

二

三

四

五

六

七

3. 设矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \end{bmatrix}$, 向量 $\alpha = \begin{bmatrix} k \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, 若 $A\alpha$ 与 α 线性相关, 则 $k = \underline{-1}$.

3. 设矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \end{bmatrix}$, 向量 $\alpha = \begin{bmatrix} k \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, 若 $A\alpha$ 与 α 线性相关, 则 $k = -1$.

解: 因为 $A\alpha$ 与 α 线性相关, 即关于 x_1, x_2 的线性方程组 $x_1 A\alpha + x_2 \alpha = 0$ 存在非零解, 即

$$[A\alpha, \alpha] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0$$

有无穷解, 对 $[A\alpha, \alpha]$ 作初等行变换:

$$\begin{bmatrix} k & k \\ 2k+3 & 1 \\ 3k+4 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -k \\ 0 & 1+k \\ 0 & k(1+k) \end{bmatrix}$$

若要原方程有无穷解, 只需要 $1+k=0$, 即 $k=-1$.

目录

线性无关与线性
相关

一、填空题

1

2

3

4

二、选择题

1

2

3

4

三

四

五

六

向量组的极大线
性无关组和秩

一、填空题

1

2

3

4

二

三

四

五

六

七

4. 当 $h = \underline{-3}$ 时, 向量组

$\alpha_1 = (2, 1, -1)^T, \alpha_2 = (-1, -3, 3)^T, \alpha_3 = (2, 3, h)^T$ 线性相关.

4. 当 $h = -3$ 时, 向量组

$\alpha_1 = (2, \overline{1}, -1)^T, \alpha_2 = (-1, -3, 3)^T, \alpha_3 = (2, 3, h)^T$ 线性相关.

解: 即要求 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 = 0$ 存在非零解即无穷解, 等价于方程

$$[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$$

存在无穷解, 作初等行变换:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 3 \\ -1 & 3 & h \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 0 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & h+3 \end{bmatrix}$$

可知 $h + 3 = 0 \Rightarrow h = -3$

目录

线性无关与线性
相关

一、填空题

1

2

3

4

二、选择题

1

2

3

4

三

四

五

六

向量组的极大线
性无关组和秩

一、填空题

1

2

3

4

二

三

四

五

六

七

1. 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s (s \geq 2)$ 线性无关的充分必要条件是 (D).

A. (I) 中不含零向量

B. (I) 中任何 $s - 1$ 个向量都线性无关

C. (I) 中有一个向量不能由其余向量线性表出

D. (I) 中任何向量都不能由其余向量线性表出

1. 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s (s \geq 2)$ 线性无关的充分必要条件是 (D).

A. (I) 中不含零向量

B. (I) 中任何 $s - 1$ 个向量都线性无关

C. (I) 中有一个向量不能由其余向量线性表出

D. (I) 中任何向量都不能由其余向量线性表出

解:(D)项. 必要性:(反证), 若不然存在向量 α_i 可以被其余向量线性表出, 即存在 $x_i (i = 1, \dots, i - 1, i + 1, \dots, s)$ 使得

$$x_i = x_1 \alpha_1 + \dots + x_{i-1} \alpha_{i-1} + x_{i+1} \alpha_{i+1} + \dots + x_s \alpha_s$$

$$\Rightarrow x_1 \alpha_1 + \dots + x_{i-1} \alpha_{i-1} - 1 \cdot x_i + x_{i+1} \alpha_{i+1} + \dots + x_s \alpha_s = 0$$

此即表示存在系数不全为零的线性组合等于 0, 即 x_i 线性相关, 矛盾, 因此必要性得证.

D. (I) 中任何向量都不能由其余向量线性表出

这表示 α_j 可以被其他向量线性表出, 产生矛盾, 充分性得证.

目录

线性无关与线性
相关

一、填空题

1

2

3

4

二、选择题

1

2

3

4

三

四

五

六

向量组的极大线
性无关组和秩

一、填空题

1

2

3

4

二

三

四

五

六

七

1. 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s (s \geq 2)$ 线性无关的充分必要条件是 (D).

A. (I) 中不含零向量

B. (I) 中任何 $s - 1$ 个向量都线性无关

C. (I) 中有一个向量不能由其余向量线性表出

D. (I) 中任何向量都不能由其余向量线性表出

解: 其余项可以举出反例证伪.

(A)项. 不含零向量不一定线性无关, 如

$\alpha_1 = (1, 1)^T, \alpha_2 = (2, 2)^T$; 反之正确, 线性无关一定没有零向量.

1. 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s (s \geq 2)$ 线性无关的充分必要条件是 (D).

A. (I) 中不含零向量

B. (I) 中任何 $s - 1$ 个向量都线性无关

C. (I) 中有一个向量不能由其余向量线性表出

D. (I) 中任何向量都不能由其余向量线性表出

解: 其余项可以举出反例证伪.

(A)项. 不含零向量不一定线性无关, 如

 $\alpha_1 = (1, 1)^T, \alpha_2 = (2, 2)^T$; 反之正确, 线性无关一定没有零向量.

(B)项. 选项不一定能推出题干, 如

$\alpha_1 = (1, 2)^T, \alpha_2 = (2, 1), \alpha_3 = (3, 3)^T$ 满足任意两个向量线性无关, 但显然 $\alpha_3 = \alpha_1 + \alpha_2$ 故他们线性无关; 反之正确, 整体线性无关可以推出部分向量线性无关.

1. 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s (s \geq 2)$ 线性无关的充分必要条件是 (D).

A. (I) 中不含零向量

B. (I) 中任何 $s-1$ 个向量都线性无关

C. (I) 中有一个向量不能由其余向量线性表出

D. (I) 中任何向量都不能由其余向量线性表出

解: 其余项可以举出反例证伪.

(A)项. 不含零向量不一定线性无关, 如

 $\alpha_1 = (1, 1)^T, \alpha_2 = (2, 2)^T$; 反之正确, 线性无关一定没有零向量.

(B)项. 选项不一定能推出题干, 如

$\alpha_1 = (1, 2)^T, \alpha_2 = (2, 1)^T, \alpha_3 = (3, 3)^T$ 满足任意两个向量线性无关, 但显然 $\alpha_3 = \alpha_1 + \alpha_2$ 故他们线性无关; 反之正确, 整体线性无关可以推出部分向量线性无关.

(C)项. 选项不一定能推出题干, 如 $\alpha_1 = (1, 1)^T, \alpha_2 = (0, 0)^T$ 中 α_1 无法由 α_2 线性表出, 但他们线性无关; 反之正确.

目录

线性无关与线性
相关

一、填空题

1

2

3

4

二、选择题

1

2

3

4

三

四

五

六

向量组的极大线
性无关组和秩

一、填空题

1

2

3

4

二

三

四

五

六

七

2. 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 则下列向量组线性相关的是 (*B*).

A. $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1$

B. $\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_2 - \alpha_3, \alpha_3 - \alpha_1$

C. $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 - \alpha_3, \alpha_3 - \alpha_1$

D. $\alpha_1, \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$

◀ ◻ ▶ ◀ ◻ ▶ ◀ ≡ ▶ ◀ ≡ ▶ ≡ ↺ 🔍 ↻

D. $\alpha_1, \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$

零解, 即存在不全为零 0 的系数使得线性组合为 0, 故线性相关, 选择 (B) 项.

2. 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 则下列向量组线性相关的是 (B).

A. $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1$

B. $\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_2 - \alpha_3, \alpha_3 - \alpha_1$

C. $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 - \alpha_3, \alpha_3 - \alpha_1$

D. $\alpha_1, \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$

解: (C)项. 同理因为

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0 \text{ 只有零解}$$

因此线性无关.

(D)项. 因为

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0 \text{ 只有零解}$$

因此线性无关.

目录

线性无关与线性相关

一、填空题

1

2

3

4

二、选择题

1

2

3

4

—

四

五

六

向量组的极大线性无关组和秩

一、填空题

1

2

3

4

—

四

五

六

七

3. 设 $\alpha_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ c_1 \end{bmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ c_2 \end{bmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ c_3 \end{bmatrix}$, $\alpha_4 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ c_4 \end{bmatrix}$, 其中 c_1, c_2, c_3, c_4 为任意常数, 则下列向量组一定线性相关的是 (C).

A. $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ B. $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$

C. $\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4$ D. $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$

3. 设 $\alpha_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ c_1 \end{bmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ c_2 \end{bmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ c_3 \end{bmatrix}$, $\alpha_4 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ c_4 \end{bmatrix}$, 其中 c_1, c_2, c_3, c_4 为任意常数, 则下列向量组一定线性相关的是 (C).

A. $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ B. $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$
C. $\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4$ D. $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$

解: 同时对四个列向量作初等行变换.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ c_1 & 0 & 0 & c_3 + c_4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

可以看到无论 c_i 取何值, 第 1, 3, 4 列的主元个数都至多为 2, 始终小于未知数个数 3, 因此必定有无穷解, 即一定线性相关, 对应的 $\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4$ 一定线性相关, 选择 (C) 项。

目录

线性无关与线性
相关

一、填空题

1

2

3

4

二、选择题

1

2

3

4

三

四

五

六

向量组的极大线
性无关组和秩

一、填空题

1

2

3

4

二

三

四

五

六

七

4. 若向量组 α, β, γ 线性无关, α, β, δ 线性相关, 则 (D).

A. β, γ, δ 线性无关

B. β, γ, δ 线性相关

C. α 必可由 β, γ, δ 线性表示

D. δ 必可由 α, β, γ 线性表示

D. δ 必可由 α, β, γ 线性表示

(D)项. 显然有 $\delta = k_1\alpha + k_2\beta + 0\gamma$, 正确.

目录

线性无关与线性
相关

一、填空题

1

2

3

4

二、选择题

1

2

3

4

三

四

五

六

向量组的极大线
性无关组和秩

一、填空题

1

2

3

4

二

三

四

五

六

七

三、设向量组 $\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \alpha_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \alpha_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 7 \\ 0 \end{bmatrix}$

1. 判断 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的线性相关性.

三、设向量组 $\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \alpha_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \alpha_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 7 \\ 0 \end{bmatrix}$

1. 判断 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的线性相关性.

解: 即验证 $[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$ 是否有非零解, 作行变换即可.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \dots \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

可以看到主元个数等于未知数个数, 因此只有零解, 故 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关.

目录

线性无关与线性
相关

一、填空题

1

2

3

4

二、选择题

1

2

3

4

三

四

五

六

向量组的极大线
性无关组和秩

一、填空题

1

2

3

4

二

三

四

五

六

七

三、设向量组 $\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\alpha_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 7 \\ 0 \end{bmatrix}$

2. 判断 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 的线性相关性.

三、设向量组 $\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \alpha_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \alpha_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 7 \\ 0 \end{bmatrix}$

2. 判断 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 的线性相关性.

解: 即验证 $[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = 0$ 是否有非零解, 作行变换即可.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 3 & 7 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \cdots \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

可以看到主元个数小于未知数个数, 因此有非零解, 故 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性相关.

目录

线性无关与线性
相关

一、填空题

1

2

3

4

二、选择题

1

2

3

4

三

四

五

六

向量组的极大线
性无关组和秩

一、填空题

1

2

3

4

二

三

四

五

六

七

$$\text{三、设向量组 } \alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \alpha_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \alpha_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 7 \\ 0 \end{bmatrix}$$

3. 问 α_4 能否由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出? 如果可以, 将 α_4 写出 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的线性组合.

目录

线性无关与线性
相关

一、填空题

1

2

3

4

二、选择题

1

2

3

4

三

四

五

六

向量组的极大线
性无关组和秩

一、填空题

1

2

3

4

二

三

四

五

六

七

四、设向量组

$$\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ a+2 \\ -3a \end{bmatrix}, \alpha_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ -b-2 \\ a+2b \end{bmatrix}, \beta = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix}. \text{ 试讨论当}$$

a, b 为何值时,

1. β 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示

◀ ◻ ▶ ◀ ◻ ▶ ◀ ≡ ▶ ◀ ≡ ▶ ≡ ↺ 🔍 ↻

目录

线性无关与线性
相关

一、填空题

1

2

3

4

二、选择题

1

2

3

4

三

四

五

六

向量组的极大线
性无关组和秩

一、填空题

1

2

3

4

二

三

四

五

六

七

四、设向量组

$$\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ a+2 \\ -3a \end{bmatrix}, \alpha_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ -b-2 \\ a+2b \end{bmatrix}, \beta = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix}. \text{ 试讨论当}$$

a, b 为何值时,

2. β 能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示, 且表示式唯一, 并写出线性表示式.

◀ ◻ ▶ ◀ ◻ ▶ ◀ ≡ ▶ ◀ ≡ ▶ ≡ ↺ 🔍 ↻

目录

线性无关与线性
相关

一、填空题

1

2

3

4

二、选择题

1

2

3

4

三

四

五

六

向量组的极大线
性无关组和秩

一、填空题

1

2

3

4

二

三

四

五

六

七

四、设向量组

$$\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ a+2 \\ -3a \end{bmatrix}, \alpha_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ -b-2 \\ a+2b \end{bmatrix}, \beta = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix}. \text{ 试讨论当}$$

a, b 为何值时,

3. β 能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示, 但表示式不唯一, 此时写出一个线性表示式.

Navigation icons: back, forward, search, and other controls.

目录

线性无关与线性
相关

一、填空题

1

2

3

4

二、选择题

1

2

3

4

三

四

五

六

向量组的极大线
性无关组和秩

一、填空题

1

2

3

4

二

三

四

五

六

七

五、设在向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 中, $\alpha_1 \neq 0$, 并且每一个 α_i 都不能由前面的 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{i-1}$ 线性表示, 证明 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性无关.

目录

线性无关与线性
相关

一、填空题

1

2

3

4

二、选择题

1

2

3

4

三

四

五

六

向量组的极大线
性无关组和秩

一、填空题

1

2

3

4

二

三

四

五

六

七

五、设在向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 中, $\alpha_1 \neq 0$, 并且每一个 α_i 都不能由前面的 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{i-1}$ 线性表示, 证明 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性无关.

证明: 反证, 若不然 $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ 线性相关, 存在不全为零的 x_i 使得

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \dots + x_m\alpha_m = 0$$

设从右到左第一个非零的系数为 x_j , 即有

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \dots + x_j\alpha_j = 0 (x_i \neq 0)$$

得到

$$\alpha_j = \frac{1}{x_j}(x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \dots + x_{j-1}\alpha_{j-1})$$

此即表示 α_j 可以由前面的 $\alpha_1, \dots, \alpha_{j-1}$ 线性表出, 矛盾, 进而得证.

目录

线性无关与线性
相关

一、填空题

1

2

3

4

二、选择题

1

2

3

4

三

四

五

六

向量组的极大线
性无关组和秩

一、填空题

1

2

3

4

二

三

四

五

六

七

六、设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关.

1. 判断向量组 $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_4, \alpha_4 + \alpha_1$ 的线性相关性, 并说明理由.

六、设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关.

1. 判断向量组 $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_4, \alpha_4 + \alpha_1$ 的线性相关性, 并说明理由.

解: 由题意可知 $[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = 0$ 只有零解. 因为

$$[\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_4, \alpha_4 + \alpha_1] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = 0 \text{ 有非零解, 因此线性相关.}$$

目录

线性无关与线性
相关

一、填空题

1

2

3

4

二、选择题

1

2

3

4

三

四

五

六

向量组的极大线
性无关组和秩

一、填空题

1

2

3

4

二

三

四

五

六

七

六、设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关.

2. 判断向量组 $\alpha_1 + \alpha_4, \alpha_2 + 2\alpha_4, \alpha_3 + 3\alpha_4, \alpha_4$ 的线性相关性, 并说明理由.

六、设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关.

2. 判断向量组 $\alpha_1 + \alpha_4, \alpha_2 + 2\alpha_4, \alpha_3 + 3\alpha_4, \alpha_4$ 的线性相关性, 并说明理由.

解: 和 1 同理, 因为

$$[\alpha_1 + \alpha_4, \alpha_2 + 2\alpha_4, \alpha_3 + 3\alpha_4, \alpha_4] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = 0 \text{ 只有零解, 因此线性无关.}$$

目录

线性无关与线性
相关

一、填空题

1

2

3

4

二、选择题

1

2

3

4

三

四

五

六

向量组的极大线
性无关组和秩

一、填空题

1

2

3

4

二

三

四

五

六

七

1. 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \beta$ 线性相关, 则 $r\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s\} \equiv r\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \beta\}$.

目录

线性无关与线性
相关

一、填空题

1

2

3

4

二、选择题

1

2

3

4

三

四

五

六

向量组的极大线
性无关组和秩

一、填空题

1

2

3

4

二

三

四

五

六

七

2. 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 的秩为 r , 向量 β 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性表出, 则 $r\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \beta\} = \underline{r+1}$.

注: 对于任意向量组, 以下三条性质知道两个即可推出另一个:

- ①秩为 r
- ②存在 r 个向量线性无关
- ③存在 r 个向量可以线性表出向量组所有向量

并且此时满足②③的 r 个向量即为极大线性无关组.

如此题要证明秩为 $r+1$, 那么只需要找到 $r+1$ 个向量线性无关且可以表出其它向量即可 (当然②③所要求的 r 个向量可以不一样).

目录

线性无关与线性
相关

一、填空题

1

2

3

4

二、选择题

1

2

3

4

三

四

五

六

向量组的极大线
性无关组和秩

一、填空题

1

2

3

4

二

三

四

五

六

七

2. 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 的秩为 r , 向量 β 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性表出, 则 $r\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \beta\} = \underline{r+1}$.

目录

线性无关与线性
相关

一、填空题

12

6

二、选择题

12

5

1四五六

向量组的极大线性无关组和秩

一、填空题

123-

==

四五六

2

2. 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 的秩为 r , 向量 β 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性表出, 则 $r\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \beta\} = \underline{r+1}$.

解: 因为 $r\{\alpha_1, \cdots, \alpha_s\} = r$, 那么找到其一个极大无关组 $\alpha_{i_1}, \cdots, \alpha_{i_r}$; 另一方面, 因为 β 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性表出, 那么自然也不能被 $\alpha_{i_1}, \cdots, \alpha_{i_r}$ 线性表出, 因此不难证明 $\alpha_{i_1}, \cdots, \alpha_{i_r}, \beta$ 线性无关 (证明是简单的), 即

$$r + 1 = r\{\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_r}, \beta\}$$

另一方面, 由极大线性无关组的性质可知 $\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_r}$ 可以线性表出 $\alpha_1, \dots, \alpha_s$, 自然有 $\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_r}, \beta$ 可以线性表出 $\alpha_1, \dots, \alpha_s, \beta$. 综上可知 $\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_r}, \beta$ 满足②和③, 因此可知秩为 $r+1$.

注: 在已知 $r+1 = r\{\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_r}, \beta\}$ 后也可以直接通过秩不等式

$$\begin{aligned} r+1 &= r\{\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_r}, \beta\} \leq r\{\alpha_1, \dots, \alpha_s, \beta\} \\ &\leq r\{\alpha_1, \dots, \alpha_s\} + r\{\beta\} \\ &= r+1 \end{aligned}$$

得到结果.(其中 $r\{\beta\} = 0$ 由 $\beta \neq 0$ 保证)

目录

线性无关与线性
相关

一、填空题

1

2

3

4

二、选择题

1

2

3

4

三

四

五

六

向量组的极大线
性无关组和秩

一、填空题

1

2

3

4

二

三

四

五

六

七

3. 已知向量组 α_1, α_2 的秩为 2, 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的秩为 2, 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$ 的秩为 3, 则向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4 - \alpha_3$ 的秩为 3.

目录

线性无关与线性
相关

一、填空题

1

2

3

4

二、选择题

1

2

3

4

三

四

五

六

向量组的极大线
性无关组和秩

一、填空题

1

2

3

4

二

三

四

五

六

七

4. 设 4阶矩阵 A 按列分块为 $A = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4]$, 其中 $\alpha_1 = (-3, 5, 2, 1)^T$, $\alpha_2 = (4, -3, 7, -1)^T$, 若 A 行等价于

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ 则向量 } \alpha_3 = \underline{\alpha_1 + \alpha_2}, \alpha_4 = \underline{\alpha_1 - \alpha_2}$$

4. 设 4 阶矩阵 A 按列分块为 $A = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4]$, 其中 $\alpha_1 = (-3, 5, 2, 1)^T, \alpha_2 = (4, -3, 7, -1)^T$, 若 A 行等价于

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ 则向量 } \alpha_3 = \underline{\alpha_1 + \alpha_2}, \alpha_4 = \underline{\alpha_1 - \alpha_2}$$

解: 矩阵的列向量在初等行变换前后线性相关、线性无关和线性表示系数关系不变, 因此从 B 可以看出要找到 α_3, α_4 满足: 任意向量秩为 1 (即非零), 任意两个向量秩为 2, 任意三个向量秩为 2, 四个向量秩为 2. 经验证 $\alpha_3 = \alpha_1 + \alpha_2$ 和 $\alpha_4 = \alpha_1 - \alpha_2$ 满足所有要求, 即为所求.

注: 因为初等行变换等价于左乘初等矩阵, 因此此题也可以求可逆矩阵 P 使得 $PA = B \Rightarrow A = P^{-1}B$, 因此对 $[P, B]$ 作初等行变换为 $[I, P^{-1}B]$ 即可.

目录

线性无关与线性
相关

一、填空题

1

2

3

4

二、选择题

1

2

3

4

三

四

五

六

向量组的极大线
性无关组和秩

一、填空题

1

2

3

4

二

三

四

五

六

七

二、求下列向量组的秩与一个极大线性无关组.

$$1. \alpha_1 = (0, 1, -1, 2)^T, \alpha_2 = (0, 3, -3, 6)^T, \alpha_3 = (1, 1, -2, 1)^T, \alpha_4 = (-1, 0, 1, 2)^T;$$

二、求下列向量组的秩与一个极大线性无关组.

$$1.\alpha_1 = (0, 1, -1, 2)^T, \alpha_2 = (0, 3, -3, 6)^T, \alpha_3 = (1, 1, -2, 1)^T, \alpha_4 = (-1, 0, 1, 2)^T;$$

解: 对 $[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4]$ 作初等行变换,

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & -2 & 1 \\ 2 & 6 & 1 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \dots \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

可以看到三个主元分别在第 1,3,4 列, 因此其中一组极大线性无关组为 $\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4$.

注:除了观察主元,观察余子式也可以找到线性无关的向量,如上述后三列前三行的三阶余子式

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$$

因此他们的列向量 (3 维) 线性无关, 故他们的伸长组 (即原来的 4 维) $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关, 为一个极大线性无关组

目录

线性无关与线性
相关

一、填空题

1

2

3

4

二、选择题

1

2

3

4

三

四

五

六

向量组的极大线
性无关组和秩

一、填空题

1

2

3

4

二

三

四

五

六

七

二、求下列向量组的秩与一个极大线性无关组.

$$2. \alpha_1 = (1, 0, 3, 6)^T, \alpha_2 = (-1, 2, -2, -5)^T, \alpha_3 = (1, k, 5, 8)^T, \alpha_4 = (0, 2, 1, 1)^T;$$

二、求下列向量组的秩与一个极大线性无关组.

$$2.\alpha_1 = (1, 0, 3, 6)^T, \alpha_2 = (-1, 2, -2, -5)^T, \alpha_3 = (1, k, 5, 8)^T, \alpha_4 = (0, 2, 1, 1)^T;$$

解: 对 $[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4]$ 作初等行变换,

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & k & 2 \\ 3 & -2 & 5 & 1 \\ 6 & -5 & 8 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \cdots \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & k-4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

可以看到三个主元分别在第 1, 2 列, 第三列需要进行讨论;
 $k \neq 4$ 时秩为 3, 极大线性无关组为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$;
 $k = 4$ 时秩为 2, 极大线性无关组为 α_1, α_2 .

目录

线性无关与线性
相关

一、填空题

1

2

3

4

二、选择题

1

2

3

4

三

四

五

六

向量组的极大线
性无关组和秩

一、填空题

1

2

3

4

二

三

四

五

六

七

三、设 4 维向量组 $\alpha_1 = (1 + k, 1, 1, 1)^T$, $\alpha_2 = (2, 2 + k, 2, 2)^T$, $\alpha_3 = (3, 3, 3 + k, 3)^T$, $\alpha_4 = (4, 4, 4, 4 + k)^T$. 问当 k 为何值时, 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性相关? 当 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性相关时, 求其一个极大线性无关组, 并用该极大线性无关组线性表出向量组中的其余向量.

◀ ◻ ▶ ◀ ◻ ▶ ◀ ≡ ▶ ◀ ≡ ▶ ≡ ↺ 🔍 ↻

目录

线性无关与线性
相关

一、填空题

1

2

3

4

二、选择题

1

2

3

4

三

四

五

六

向量组的极大线
性无关组和秩

一、填空题

1

2

3

4

二

三

四

五

六

七

四、已知秩 $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 3$, 秩 $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = 4$, 秩 $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_5) = 4$. 求秩 $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_5 - \alpha_4)$

四、已知秩 $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 3$, 秩 $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = 4$, 秩 $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_5) = 4$. 求秩 $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_5 - \alpha_4)$

解: 由题意和前面的结论, α_4 可被 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出, 记为 $\alpha_4 = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3$, 断言 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_5 - \alpha_4$ 线性无关, 即秩为 4, 若

$$\begin{aligned} & x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 + x_4(\alpha_5 - \alpha_4) = 0 \\ \Rightarrow & x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 + x_4(\alpha_5 - k_1\alpha_1 - k_2\alpha_2 - k_3\alpha_3) = 0 \\ \Rightarrow & (x_1 - k_1x_4)\alpha_1 + (x_2 - k_2x_4)\alpha_2 + (x_3 - k_3x_4)\alpha_3 + x_4\alpha_5 = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 - k_1 x_4 = 0 \\ x_2 - k_2 x_4 = 0 \\ x_3 - k_3 x_4 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -k_1 \\ 0 & 1 & 0 & -k_2 \\ 0 & 0 & 1 & -k_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = 0$$

最后得到 x_1, x_2, x_3, x_4 只有零解, 因此 $r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_5 - \alpha_4) = 4$.

注: 此题同选择题第三题, 两种方法实际上是一样的.

目录

线性无关与线性
相关

一、填空题

1

2

3

4

二、选择题

1

2

3

4

三

四

五

六

向量组的极大线
性无关组和秩

一、填空题

1

2

3

4

二

三

四

五

六

七

五、向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 线性无关, 而向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r, \beta, \gamma$ 线性相关, 证明: 或者 β 与 γ 中至少有一个可由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 线性表出, 或者向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r, \beta$ 与 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r, \gamma$ 等价.

目录

线性无关与线性
相关

一、填空题

1

2

3

4

二、选择题

1

2

3

4

三

四

五

六

向量组的极大线
性无关组和秩

一、填空题

1

2

3

4

二

三

四

五

六

七

六、证明: 向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 能由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性表出的充分必要条件是

$$r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) = r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t).$$

六、证明: 向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 能由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性表出的充分必要条件是

$$r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) = r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t).$$

证明: 必要性. 首先显然有

$$r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) \leq r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t)$$

另一方面, 由题意 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t$ 能由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性表出, 这表示

$$r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) \geq r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t)$$

因此等号成立.

充分性. 因为 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 可以表出 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$, 且他们秩相等, 因此他们等价, 故 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 也可被 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性表出, 即 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 可被 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性表出, 得证.

目录

线性无关与线性
相关

一、填空题

1

2

3

4

二、选择题

1

2

3

4

三

四

五

六

向量组的极大线
性无关组和秩

一、填空题

1

2

3

4

二

三

四

五

六

七

七、设向量组 $\alpha_1 = (1, 0, 1)^T, \alpha_2 = (0, 1, 1)^T, \alpha_3 = (1, 3, 5)^T$ 不能由
向量组 $\beta_1 = (1, 1, 1)^T, \beta_2 = (1, 2, 3)^T, \beta_3 = (3, 4, k)^T$ 线性表出.
1. 求 k 的值;

七、设向量组 $\alpha_1 = (1, 0, 1)^T, \alpha_2 = (0, 1, 1)^T, \alpha_3 = (1, 3, 5)^T$ 不能由向量组 $\beta_1 = (1, 1, 1)^T, \beta_2 = (1, 2, 3)^T, \beta_3 = (3, 4, k)^T$ 线性表出.

1. 求 k 的值;

解: 由题意即

$$[\beta_1, \beta_2, \beta_3] \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{bmatrix} = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$$

无解, 故对增广矩阵作初等行变换.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & k & 1 & 1 & 5 \end{array} \right] \rightarrow \cdots \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & k-5 & 2 & -1 & 0 \end{array} \right]$$

要使上述方程无解, 只需要 $k - 5 = 0$, 得到 $k = 5$.

目录

线性无关与线性
相关

一、填空题

1

2

3

4

二、选择题

1

2

3

4

三

四

五

六

向量组的极大线
性无关组和秩

一、填空题

1

2

3

4

二

三

四

五

六

七

七、设向量组 $\alpha_1 = (1, 0, 1)^T, \alpha_2 = (0, 1, 1)^T, \alpha_3 = (1, 3, 5)^T$ 不能由
向量组 $\beta_1 = (1, 1, 1)^T, \beta_2 = (1, 2, 3)^T, \beta_3 = (3, 4, k)^T$ 线性表出.
2. 将 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 用 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出.

