线性代数第七次作业

2024年4月21日

```
线性无关与线性
一、填空额
```

向量组的极大线

性无关组和秩

一、填空额

本次作业

《线性代数习题册 (第三版)》

- 47 ~ 50页: 线性无关与线性相关
- 51 ~ 54页: 向量组的极大线性无关组和秩

```
线性无关与线性
相关
```

一、填空题

向量组的极大线 性无关组和秩

一、填空题

习题答案会上传至 github 中.



图: github 链接二维码

向量组的极大线 性无关组和秩 一、填空题

1. 设
$$\alpha_1=(2,-1,0), \alpha_2=(1,4,-3), \alpha_3=(1,-2,1)$$
, 则 $2\alpha_1-\alpha_2+3\alpha_3={\color{red}(6,-12,6)}$

一、填空额

1. 设
$$\alpha_1=(2,-1,0), \alpha_2=(1,4,-3), \alpha_3=(1,-2,1)$$
, 则 $2\alpha_1-\alpha_2+3\alpha_3=\underline{(6,-12,6)}$

解: 直接计算即可, 向量即某一维度为 1 的矩阵, 即
$$2(2,-1,0)-(1,4,-3)+3(1,-2,1)=(6,-12,6)$$

六

相关

2. 设
$$\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

 $x_1 = \frac{7}{2}, x_2 = \frac{1}{2}$

2. 设 $\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix}$, 若 $x_1 \alpha_1 + x_2 \alpha_2 = \alpha_3$, 则 $x_1 = \frac{7}{2}$, $x_2 = \frac{1}{2}$.

组的极大线

一、填空额

2. 设 $\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix}$,若 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 = \alpha_3$, 则 $x_1 = \frac{7}{2}, x_2 = \frac{1}{2}.$

解: 由分块矩阵的计算, 等式可以化为

$$\left[\alpha_1, \alpha_2\right] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \alpha_3$$

对增广矩阵 $[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$ 作初等行变换.

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 4 \\ -1 & 3 & -2 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 7/2 \\ 0 & 1 & 1/2 \end{array}\right]$$

因此得到

$$\begin{cases} x_1 = \frac{7}{2} \\ x_2 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

3. 设矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \end{bmatrix}$,向量 $\alpha = \begin{bmatrix} k \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, 若 $A\alpha$ 与 α 线性相关,则 $k = \underline{-1}$.

3. 设矩阵
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$
,向量 $\alpha = \begin{bmatrix} k \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$,若 $A\alpha$ 与 α 线性相关,则 $k = -1$.

解: 因为 $A\alpha$ 与 α 线性相关, 即关于 x_1, x_2 的线性方程组 $x_1A\alpha + x_2\alpha = 0$ 存在非零解, 即

$$[A\alpha, \alpha] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0$$

有无穷解, 对 $[A\alpha,\alpha]$ 作初等行变换:

$$\begin{bmatrix} k & k \\ 2k+3 & 1 \\ 3k+4 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -k \\ 0 & 1+k \\ 0 & k(1+k) \end{bmatrix}$$

若要原方程有无穷解,只需要 1+k=0,即 k=-1.

一、填空题

二、选择题

向量组的极大线 性无关组和秩

一、填空题

4. 当 h = -3时, 向量组

 $\alpha_1 = (2, 1, -1)^T, \alpha_2 = (-1, -3, 3)^T, \alpha_3 = (2, 3, h)^T$ 线性相关.

4. 当
$$h = -3$$
时,向量组
 $\alpha_1 = (2, 1, -1)^T$, $\alpha_2 = (-1, -3, 3)^T$, $\alpha_3 = (2, 3, h)^T$ 线性相关.

解: 即要求 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 = 0$ 存在非零解即无穷解, 等价于方 程

$$\begin{bmatrix} \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$$

存在无穷解. 作初等行变换:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 3 \\ -1 & 3 & h \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 0 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & h+3 \end{bmatrix}$$

可知 $h+3=0 \Rightarrow h=-3$

线性无关与线性

相关 一、填空題

2

二、选择额

1

2 3 4 三 四 五 ÷

向量组的极大线 性无关组和秩

4 二三四五六

- 1. 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s (s \ge 2)(I)$ 线性无关的充分必要条件是 (D).
 - A. (I) 中不含零向量
 - B. (I) 中任何 s-1 个向量都线性无关
 - C. (I) 中有一个向量不能由其余向量线性表出
 - D. (I) 中任何向量都不能由其余向量线性表出

线性无关与线性

- 作大 一、填空題 1 2
- 二、选择题
- 2 3 4 三 四 五 六

向量组的极大统 性无关组和秩

- 1. 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s (s \ge 2)(I)$ 线性无关的充分必要条件是 (D).
 - A. (I) 中不含零向量
 - B. (I) 中任何 s-1 个向量都线性无关
 - C.(I) 中有一个向量不能由其余向量线性表出
 - D. (I) 中任何向量都不能由其余向量线性表出

解:(D)项. 必要性:(反证), 若不然存在向量 α_i 可以被其余向量线性表出, 即存在 x_i ($i=1,\cdots,i-1,i+1,\cdots,s$)使得

$$x_i = x_1\alpha_1 + \dots + x_{i-1}\alpha_{i-1} + x_{i+1}\alpha_{i+1} + \dots + x_s\alpha_s$$

$$\Rightarrow x_1\alpha_1 + \dots + x_{i-1}\alpha_{i-1} - 1 \cdot x_i + x_{i+1}\alpha_{i+1} + \dots + x_s\alpha_s = 0$$

此即表示存在系数不全为零的线性组合等于 0, 即 x_i 线性相关, 矛盾, 因此必要性得证.

线性无关与线性

- 1. 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s (s \geq 2)(I)$ 线性无关的充分必要条件是 (D).
 - A. (I) 中不含零向量
 - B. (I) 中任何 s-1 个向量都线性无关
 - C. (I) 中有一个向量不能由其余向量线性表出
 - D. (I) 中任何向量都不能由其余向量线性表出

解:(D)项. 必要性:(反证), 若不然存在向量 α_i 可以被其余向量线性表 出, 即存在 x_i ($i = 1, \dots, i - 1, i + 1, \dots, s$)使得

$$x_i = x_1\alpha_1 + \cdots + x_{i-1}\alpha_{i-1} + x_{i+1}\alpha_{i+1} + \cdots + x_s\alpha_s$$

$$\Rightarrow x_1\alpha_1 + \dots + x_{i-1}\alpha_{i-1} - 1 \cdot x_i + x_{i+1}\alpha_{i+1} + \dots + x_s\alpha_s = 0$$

此即表示存在系数不全为零的线性组合等于 0, 即 x_i 线性相关, 矛 盾. 因此必要性得证.

充分性:(反证), 若不然 α_i 线性相关, 即存在不全为零的 x_i 使得

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \dots + x_s\alpha_s = 0$$

若其中 $x_i \neq 0$, 那么上式可以化为

$$\alpha_i = \frac{1}{r_i}(x_1\alpha_1 + \dots + x_{i-1}\alpha_{i-1} + x_{i+1}\alpha_{i+1} + \dots + x_s\alpha_s)$$

这表示 α_i 可以被其他向量线性表出, 产生矛盾, 充分性得证.

线性无关与线性

- 相关 一、填空题 1 2
- 4 二、选择题
- 2 3 4 三 四 五 六

向量组的极大约 性无关组和秩

一、填空题 1 2 3 4 二 三

- 1. 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s (s \ge 2)(I)$ 线性无关的充分必要条件是 (D).
 - A. (I) 中不含零向量
 - B. (I) 中任何 s-1 个向量都线性无关
 - C. (I) 中有一个向量不能由其余向量线性表出
 - D. (I) 中任何向量都不能由其余向量线性表出

解: 其余项可以举出反例证伪.

(A)项. 不含零向量不一定线性线性无关, 如

 $\alpha_1 = (1,1)^T, \alpha_2 = (2,2)^T$; 反之正确, 线性无关一定没有零向量.

线性无关与线性 相关

和天 一、填空题 1 2 3

> → 二、选择部

2 3 4 三 四 五 六

向量组的极大约 性无关组和秩

生无关组和 一、填空题 1 2 3 4 二 三 四 1. 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s (s \ge 2)(I)$ 线性无关的充分必要条件是 (D).

A. (I) 中不含零向量

B. (I) 中任何 s-1 个向量都线性无关

C. (I) 中有一个向量不能由其余向量线性表出

D. (I) 中任何向量都不能由其余向量线性表出

解: 其余项可以举出反例证伪.

(4)项. 不含零向量不一定线性线性无关, 如

 $\alpha_1 = (1,1)^T, \alpha_2 = (2,2)^T$; 反之正确, 线性无关一定没有零向量.

(B)项. 选项不一定能推出题干, 如

 $\alpha_1 = (1,2)^T$, $\alpha_2 = (2,1)$, $\alpha_3 = (3,3)^T$ 满足任意两个向量线性无关,但显然 $\alpha_3 = \alpha_1 + \alpha_2$ 故他们线性无关;反之正确,整体线性无关可以推出部分向量线性无关.

- 1. 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s (s \ge 2)(I)$ 线性无关的充分必要条件是 (D).
 - A. (I) 中不含零向量
 - B. (I) 中任何 s-1 个向量都线性无关
 - C.(I) 中有一个向量不能由其余向量线性表出
 - D. (I) 中任何向量都不能由其余向量线性表出

解: 其余项可以举出反例证伪.

- (A)项. 不含零向量不一定线性线性无关, 如
- $\alpha_1 = (1,1)^T$, $\alpha_2 = (2,2)^T$; 反之正确, 线性无关一定没有零向量.
- (B)项. 选项不一定能推出题干, 如

 $\alpha_1 = (1,2)^T, \alpha_2 = (2,1), \alpha_3 = (3,3)^T$ 满足任意两个向量线性无关,但显然 $\alpha_3 = \alpha_1 + \alpha_2$ 故他们线性无关; 反之正确, 整体线性无关可以推出部分向量线性无关.

(C)项. 选项不一定能推出题干, 如 $\alpha_1 = (1,1)^T$, $\alpha_2 = (0,0)^T$ 中 α_1 无 法由 α_2 线性表出, 但他们线性无关; 反之正确.

二、选择题

3 4 三 四 五

向量组的极大线 性无关组和秩

4 二三四五六 2. 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关,则下列向量组线性相关的是 (B).

A. $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1$

B. $\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_2 - \alpha_3, \alpha_3 - \alpha_1$

C. $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 - \alpha_3, \alpha_3 - \alpha_1$

D. $\alpha_1, \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$

2. 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关,则下列向量组线性相关的是 (B).

A. $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1$

B. $\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_2 - \alpha_3, \alpha_3 - \alpha_1$

C. $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 - \alpha_3, \alpha_3 - \alpha_1$

D. $\alpha_1, \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$

解: 由题意可知线性无关等价于 $[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$ $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = 0$ 只有零解. 逐

个判断选项.

(A)项. 若令

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$$

由条件可知 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$ (因为只有零解),由系数矩阵可逆

即可得到 $\begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{vmatrix} = 0$ 即只有零解, 故线性无关.

2. 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关,则下列向量组线性相关的是 (B).

A.
$$\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1$$

B.
$$\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_2 - \alpha_3, \alpha_3 - \alpha_1$$

C.
$$\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 - \alpha_3, \alpha_3 - \alpha_1$$

D.
$$\alpha_1, \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$$

解:
$$(B)$$
项. 由 $\begin{bmatrix} \alpha_1 - \alpha_2, \alpha_2 - \alpha_3, \alpha_3 - \alpha_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} =$

$$\begin{bmatrix} \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0$$
可得

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$$
,此时系数矩阵不可逆,可知 $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ 存在非

零解,即存在不全为零 0 的系数使得线性组合为 0, 故线性相关,选择 (B)项.

线性无关与线性

- 相天 一、填空題 1 2
- 4 二、选择题
- 3 4 三 四 五

向量组的极大线 性无关组和秩

エルスコ 一、填空 1 2 3

一、 1 2 3 4 三 四 2. 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关,则下列向量组线性相关的是 (B).

A.
$$\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1$$

B.
$$\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_2 - \alpha_3, \alpha_3 - \alpha_1$$

C.
$$\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 - \alpha_3, \alpha_3 - \alpha_1$$

D. $\alpha_1, \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$

解: (C)项. 同理因为

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$$
只有零解

因此线性无关.

(D)项. 因为

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$$
只有零解

因此线性无关.

线性无关与线性 相关

3 4 二、选择题

3 4

三四五六

向量组的极大线 性无关组和秩 一、填空题

一、均 1 2 3 4 二 三 四 王

3. 设
$$\alpha_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ c_1 \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ c_2 \end{bmatrix}, \alpha_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ c_3 \end{bmatrix}, \alpha_4 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ c_4 \end{bmatrix}, 其中$$

 c_1, c_2, c_3, c_4 为任意常数,则下列向量组一定线性相关的是 (C).

A. $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ B. $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$

C. $\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4$ D. $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$

线性无关与线性

3. 设
$$\alpha_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ c_1 \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ c_2 \end{bmatrix}, \alpha_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ c_3 \end{bmatrix}, \alpha_4 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ c_4 \end{bmatrix}, 其中$$

 c_1, c_2, c_3, c_4 为任意常数,则下列向量组一定线性相关的是 (C).

A.
$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$$
 B. $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$

C.
$$\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4$$
 D. $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$

解: 同时对四个列向量作初等行变换.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ c_1 & 0 & 0 & c_3 + c_4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

可以看到无论 c_i 取何值, 第 1.3.4 列的主元个数都至多为 2. 始终小 于未知数个数 3, 因此必定有无穷解, 即一定线性相关, 对应的 $\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4$ 一定线性相关, 选择 (C)项.

线性无关与线性

一、填空额

向量组的极大线 性无关组和秩

一、填空额

4. 若向量组 α , β , γ 线性无关, α , β , δ 线性相关, 则 (D).

A. β , γ , δ 线性无关 B. β , γ , δ 线性相关

 $C. \alpha$ 必可由 β, γ, δ 线性表示 $D. \delta$ 必可由 α, β, γ 线性表示

线性无关与线性 一、填空额

4. 若向量组 α, β, γ 线性无关, α, β, δ 线性相关, 则 (D).

A. β , γ , δ 线性无关 B. β , γ , δ 线性相关

 $C. \alpha$ 必可由 β, γ, δ 线性表示 $D. \delta$ 必可由 α, β, γ 线性表示

解: 由 α, β, γ 线性无关可知部分向量 α, β 也线性无关; 另外我们由 α, β, δ 线性相关可知存在不全为零的 x_1, x_2, x_3 使得

$$x_1\alpha + x_2\beta + x_3\delta = 0$$

其中若 $x_3 = 0$, 那么等式变为 $x_1 \alpha + x_2 \beta = 0$ 且 x_1, x_2 不全为 0, 这与 α, β 线性无关矛盾, 因此 $x_3 \neq 0$, 即

$$\delta = \frac{1}{x_3}(x_1\alpha + x_2\beta)$$

这表示 δ 可以被 α , β 线性表出, 我们不妨设 $\delta = k_1\alpha + k_2\beta$, 且 k_1, k_2 可以取任意常数值, 因此我们可以取特殊值来排除错误选项.

线性无关与线性

关组和秩

4. 若向量组 α, β, γ 线性无关, α, β, δ 线性相关, 则 (D).

A. β , γ , δ 线性无关 B. β , γ , δ 线性相关

 $C. \alpha$ 必可由 β, γ, δ 线性表示 $D. \delta$ 必可由 α, β, γ 线性表示

解: 由 α, β, γ 线性无关可知部分向量 α, β 也线性无关; 另外我们由 α, β, δ 线性相关可知存在不全为零的 x_1, x_2, x_3 使得

$$x_1\alpha + x_2\beta + x_3\delta = 0$$

其中若 $x_3 = 0$, 那么等式变为 $x_1 \alpha + x_2 \beta = 0$ 且 x_1, x_2 不全为 0, 这与 α, β 线性无关矛盾, 因此 $x_3 \neq 0$. 即

$$\delta = \frac{1}{x_3}(x_1\alpha + x_2\beta)$$

这表示 δ 可以被 α , β 线性表出, 我们不妨设 $\delta = k_1\alpha + k_2\beta$, 且 k_1, k_2 可以取任意常数值, 因此我们可以取特殊值来排除错误选项.

- (A)项. 若 $\delta = 0 \cdot \alpha + 1 \cdot \beta = \beta$, 那么 β, γ, β 显然线性相关, 错误.
- (B)项. 若 $\delta = 1 \cdot \alpha + 0 \cdot \beta = \alpha$, 那么 β, γ, α 显然线性无关, 错误.
- (C)项. 若 $\delta = 0 \cdot \alpha + 1 \cdot \beta = \beta$, 那么 α 若可被 β, γ, β 线性表出, 那么 与 α , β , γ 线性无关矛盾, 错误.
- (D)项. 显然有 $\delta = k_1 \alpha + k_2 \beta + 0 \gamma$, 正确.

线性无关与线性

相关 一、填空题 1 2

4 二、选择题

1 2 3

四五

五六

向量组的极大线 性无关组和秩 一、填空题

4 二 三 四 五

三、设向量组 $\alpha_1=\begin{bmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{bmatrix}$ $,\alpha_2=\begin{bmatrix}1\\2\\0\\1\end{bmatrix}$ $,\alpha_3=\begin{bmatrix}1\\0\\3\\1\end{bmatrix}$ $,\alpha_4=\begin{bmatrix}1\\0\\3\\1\end{bmatrix}$

1. 判断 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的线性相关性.

三、设向量组
$$\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \alpha_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \alpha_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 7 \\ 0 \end{bmatrix}$$

1. 判断 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的线性相关性.

解: 即验证 $[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$ $\begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix} = 0$ 是否有非零解, 作行变换即可.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \cdots \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

可以看到主元个数等于未知数个数, 因此只有零解, 故 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关.

三、设向量组
$$\alpha$$

三、设向量组
$$\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \alpha_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \alpha_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

2. 判断 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 的线性相关性.

三、设向量组
$$\alpha_1=\begin{bmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{bmatrix}$$
 , $\alpha_2=\begin{bmatrix}1\\2\\0\\1\end{bmatrix}$, $\alpha_3=\begin{bmatrix}1\\0\\3\\1\end{bmatrix}$, $\alpha_4=\begin{bmatrix}2\\-3\\7\\0\end{bmatrix}$

2. 判断 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 的线性相关性.

解: 即验证
$$[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4]$$
 $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = 0$ 是否有非零解,作行变换即可.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 3 & 7 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \cdots \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

可以看到主元个数小于未知数个数, 因此有非零解, 故 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性相关.

2 3 4

四五

介量组的极大线 性无关组和秩

一、填空題 1 2

2 3 4 二 三

三、设向量组
$$\alpha_1=\begin{bmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{bmatrix},\alpha_2=\begin{bmatrix}1\\2\\0\\1\end{bmatrix},\alpha_3=\begin{bmatrix}1\\0\\3\\1\end{bmatrix},\alpha_4=\begin{bmatrix}2\\-3\\7\\0\end{bmatrix}$$

3. 问 α_4 能否由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出? 如果可以, 将 α_4 写出 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的线性组合.

线性无关与线性

一、填空额

关组和秩

三、设向量组
$$\alpha_1=\begin{bmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{bmatrix},\alpha_2=\begin{bmatrix}1\\2\\0\\1\end{bmatrix},\alpha_3=\begin{bmatrix}1\\0\\3\\1\end{bmatrix},\alpha_4=\begin{bmatrix}2\\-3\\7\\0\end{bmatrix}$$

3. 问 α_4 能否由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出? 如果可以, 将 α_4 写出 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的线性组合.

解: 继续对 2 中的矩阵化简

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \cdots \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

即可得到诵解

$$\begin{cases} x_1 = -k \\ x_2 = -k \\ x_3 = -2k \\ x_4 = k \end{cases} (k \in \mathbb{R}) \Rightarrow -k\alpha_1 - k\alpha_2 - 2k\alpha_3 + k\alpha_4 = 0$$

在 $k \neq 0$ 时即可得到 $\alpha_4 = \alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3$, 即为所求.

四、设向量组

$$\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ a+2 \\ -3a \end{bmatrix}, \alpha_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ -b-2 \\ a+2b \end{bmatrix}, \beta = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix}.$$
 试讨论当

a,b为何值时,

1. β 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示

线性无关与线性

四、设向量组

a, b为何值时.

 $1.\beta$ 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示

解: 即 $\left[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\right]$ $\left|\begin{matrix} x_1\\x_2 \end{matrix}\right|=\beta$ 无解, 对增广矩阵作初等行变换:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & a+2 & -b-2 & 3 \\ 0 & -3a & a+2b & -3 \end{bmatrix} \rightarrow \cdots \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & a-b & 0 \\ 0 & -3a & a+2b & -3 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & a-b & 0 \\ 0 & -3a & 3a & -3 \end{array} \right]$$

可以看到, 原方程无解, 只需要 a=0.

注: 如果直接从倒数第二个矩阵得到 -3a = 0, a + 2b = 0, 会使答案 范围变小.

线性无关与线性 相关

一、填空额

向量组的极大线 性无关组和秩 一、填空额

四、设向量组

a, b为何值时,

 $2.\beta$ 能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示, 且表示式唯一, 并写出线性表示式.

线性无关与线性 相关

作大 一、填空題 1 2 3

向量组 性无关 一、填 1

任尤 一、1 2 3 4 二 三 四 四、设向量组

$$\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ a+2 \\ -3a \end{bmatrix}, \alpha_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ -b-2 \\ a+2b \end{bmatrix}, \beta = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix}.$$
 试讨论当

a, b为何值时,

 $2.\beta$ 能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示,且表示式唯一,并写出线性表示式.

解: 即 $\begin{bmatrix} \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \end{bmatrix}$ $\begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix} = \beta$ 有解且只有唯一解, 由 1 的结果

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & | & 1 \\ 0 & 0 & a-b & | & 0 \\ 0 & -3a & a+2b & | & -3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & | & 1 \\ 0 & -3a & 3a & | & -3 \\ 0 & 0 & a-b & | & 0 \end{bmatrix}$$

此时主元个数需要等于 3, 即 $a \neq 0$, $a - b \neq 0$, 继续化简

$$\rightarrow \cdots \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 - \frac{1}{a} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{a} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 - \frac{1}{a} \\ x_2 = \frac{1}{a} \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

得到 $\left(1-\frac{1}{a}\right)\alpha_1+\frac{1}{a}\alpha_2=\beta$ 即为所求.

四、设向量组

$$\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ a+2 \\ -3a \end{bmatrix}, \alpha_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ -b-2 \\ a+2b \end{bmatrix}, \beta = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix}.$$
 试讨论当

a,b为何值时,

 $3.\beta$ 能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示, 但表示式不唯一, 此时写出一个线性表示式.

四、设向量组
$$\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ a+2 \\ -3a \end{bmatrix}, \alpha_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ -b-2 \\ a+2b \end{bmatrix}, \beta = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix}.$$
 试讨论当

a, b为何值时,

 $3.\beta$ 能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示, 但表示式不唯一, 此时写出一个线性表 示式.

解: 即 $\left[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\right]$ $\left| \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ y_2 \end{array} \right| = \beta$ 有解且只有唯一解, 由 2 的结果

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -3a & 3a & -3 \\ 0 & 0 & a-b & 0 \end{bmatrix}$$

此时只需要, 即 $a \neq 0$, a - b = 0, 继续化简

$$\rightarrow \cdots \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 - \frac{1}{a} \\ 0 & 1 & -1 & \frac{1}{a} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 - \frac{1}{a} \\ x_2 = \frac{1}{a} + k & (k \in \mathbb{R}) \\ x_3 = k \end{cases}$$

带入 k = 0即得到一个线性表示 $\left(1 - \frac{1}{a}\right) \alpha_1 + \frac{1}{a} \alpha_2 = \beta$.

```
线性无关与线性
```

```
一、填空额
```

向量组的极大线 性无关组和秩

一、填空额

五、设在向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 中, $\alpha_1\neq 0$,并且每一个 α_i 都不能由前 面的 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{i-1}$ 线性表示, 证明 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性无关.

五、设在向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 中, $\alpha_1 \neq 0$,并且每一个 α_i 都不能由前面的 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{i-1}$ 线性表示, 证明 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 线性无关.

证明: 反证, 若不然 $\alpha_1, \cdots, \alpha_m$ 线性相关, 存在不全为零的 x_i 使得

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \dots + x_m\alpha_m = 0$$

设从右到左第一个非零的系数为 x_j, 即有

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \dots + x_j\alpha_j = 0(x_i \neq 0)$$

得到

$$\alpha_j = \frac{1}{x_i}(x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \dots + x_{j-1}\alpha_{j-1})$$

此即表示 α_j 可以由前面的 $\alpha_1, \cdots, \alpha_{j-1}$ 线性表出, 矛盾, 进而得证.

```
线性无关与线性
相关
```

```
一、填空题
二、选择题
```

```
向量组的极大线
性无关组和秩
一、填空题
```

六、设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关.

1. 判断向量组 $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_4, \alpha_4 + \alpha_1$ 的线性相关性, 并 说明理由.

线性无关与线性 相关

- 一、填空題 1 2 3 4 二、选择題 1
- 三 四 五

六

向量组的极大约性无关组和秩一、填空题 1 2

一、填空題 3 4 二三四五六七

六、设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关.

1. 判断向量组 $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_4, \alpha_4 + \alpha_1$ 的线性相关性, 并说明理由.

解: 由题意可知 $\left[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\right]$ $\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=0$ 只有零解. 因为

$$\left[\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_4, \alpha_4 + \alpha_1\right] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = 0$$
有非零解,因此线性相关.

线性无关与线性 相关

- 一、填空题

向量组的极大线 性无关组和秩

- 一、填空题

- 六、设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关.
- 2. 判断向量组 $\alpha_1 + \alpha_4, \alpha_2 + 2\alpha_4, \alpha_3 + 3\alpha_4, \alpha_4$ 的线性相关性, 并说 明理由.

线性无关与线性 相关

- 一、填空題 1 2 3
- 4 二、选择是 1 2
- 1 2 3 4 三 四 五
- 向量组的极

生无关组和秩一、填空题 1

1 2 3 4 二 三 四

六、设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关.

2. 判断向量组 $\alpha_1 + \alpha_4, \alpha_2 + 2\alpha_4, \alpha_3 + 3\alpha_4, \alpha_4$ 的线性相关性, 并说明理由.

解: 和 1 同理, 因为

$$[\alpha_1 + \alpha_4, \alpha_2 + 2\alpha_4, \alpha_3 + 3\alpha_4, \alpha_4] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = 0$$
只有零解,因此线性无关.

线性无关与线性

向量组的极大线

一、填空题

相关

一、填空題

性无关组和秩

1. 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \beta$ 线性相关,则 $r\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s\} = r\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s, \beta\}.$

1. 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \beta$ 线性相关,则 $r\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s\} = r\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \beta\}$.

解: 首先显然有 $s=r\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\}\leqslant r\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\beta\}$, 又由 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s,\beta$ 线性相关, 那么

$$r\{\alpha_1, \cdots, \alpha_s, \beta\} < s+1$$

那么即可得到 $r\{\alpha_1, \dots, \alpha_s, \beta\} = s$, 因此等号成立.

注: 此结论在后面经常使用, 以及以下延伸:

- ①若 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ 线性无关, 那么 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, β 线性无关等价于 β 不能被 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ 线性表出;
- ②若 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ 线性无关, 那么 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, β 线性相关等价于 β 能被 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ 线性表出, 此时可将 β 记为 $k_1\alpha_1 + \dots + k_n\alpha_n$;

线性无关与线性 相关

- 、填空题

关组和秩

2. 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 的秩为 r, 向量 β 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线 性表出,则 $r\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\beta\}=r+1$.

注: 对于任意向量组. 以下三条性质知道两个即可推出另一个:

- ① 秋为 r
- ②存在 r个向量线性无关
- ◎存在 r个向量可以线性表出向量组所有向量

并且此时满足23的 r个向量即为极大线性无关组.

如此题要证明秩为 r+1, 那么只需要找到 r+1个向量线性无关且 可以表出其它向量即可 (当然23所要求的 r个向量可以不一样).

线性无关与线性 相关

```
一、填空题
```

向量组的极大线 性无关组和秩 一、填空题

2. 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 的秩为 r, 向量 β 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线 性表出,则 $r\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\beta\}=r+1$.

2. 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 的秩为 r, 向量 β 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性表出,则 $r\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \beta\} = r + 1$.

解: 因为 $r\{\alpha_1,\cdots,\alpha_s\}=r$, 那么找到其一个极大无关组 $\alpha_{i_1},\cdots,\alpha_{i_r}$; 另一方面,因为 β 不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性表出,那么 自然也不能被 $\alpha_{i_1},\cdots,\alpha_{i_r}$ 线性表出,因此不难证明 $\alpha_{i_1},\cdots,\alpha_{i_r}$, 多线性无关 (证明是简单的),即

$$r+1=r\{\alpha_{i_1},\cdots,\alpha_{i_r},\beta\}$$

另一方面, 由极大线性无关组的性质可知 $\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_r}$ 可以线性表出 $\alpha_1, \dots, \alpha_s$, 自然有 $\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_r}$, β 可以线性表出 $\alpha_1, \dots, \alpha_s$, β 综上可知 $\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_r}$, β 满足②和③, 因此可知秩为 r+1.

注: 在已知
$$r+1=r\{\alpha_{i_1},\cdots,\alpha_{i_r},\beta\}$$
后也可以直接通过秩不等式
$$r+1=r\{\alpha_{i_1},\cdots,\alpha_{i_r},\beta\}\leqslant r\{\alpha_1,\cdots,\alpha_s,\beta\}$$

$$\leqslant r\{\alpha_1,\cdots,\alpha_s\}+r\{\beta\}$$

$$=r+1$$

得到结果.(其中 $r\{\beta\} = 0$ 由 $\beta \neq 0$ 保证)

线性无关与线性 相关

```
一、填空題
1
2
3
4
二、选择題
1
2
3
```

へ 向量组的极大线 性无关组和秩

一、填空題 1

4 =

二三四五六

3. 已知向量组 α_1, α_2 的秩为 2, 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的秩为 2, 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$ 的秩为 3, 则向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4 - \alpha_3$ 的秩为 3.

3. 已知向量组 α_1, α_2 的秩为 2, 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的秩为 2, 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$ 的秩为 3, 则向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4 - \alpha_3$ 的秩为 3.

解: 由题意可知 α_1,α_2 线性无关, 且 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关, 那么根据前面结论 (1. 注) 可知 α_3 可被 α_1,α_2 线性表出, 可写为 $\alpha_3=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2$, 因此对于方程组

$$\begin{bmatrix} \alpha_1, \alpha_2, \alpha_4 - \alpha_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 - k_1 \alpha_1 - k_2 \alpha_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} \alpha_1, \alpha_2, \alpha_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -k \\ 0 & 1 & -k \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -k \\ 0 & 1 & -k \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$$

进而得到 x_1, x_2, x_3 只有零解, 所以 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4 - \alpha_3$ 线性无关, 秩为 3.

注: 如果将 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4 - \alpha_3$ 作为矩阵的列向量, 那该矩阵只是 $[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4]$ 做了两次初等列变换, 秩当然不变, 即 $r([\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4]) = r([\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4 - k_1\alpha_1]) = r([\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4 - k_1\alpha_1])$

线性无关与线性 相关 一、填空额

向量组的极大线 性无关组和秩 一、填空额

4. 设 4阶矩阵 *A*按列分块为 $A = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4]$, 其中

 $\alpha_1 = (-3, 5, 2, 1)^T, \alpha_2 = (4, -3, 7, -1)^T,$ \overleftarrow{A} \overleftarrow{A} \overleftarrow{F}

 $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, 则向量 \alpha_3 = \underline{\alpha_1 + \alpha_2}, \alpha_4 = \underline{\alpha_1 - \alpha_2}$

线性无关与线性

4. 设 4阶矩阵 A按列分块为 $A = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4]$, 其中 $\alpha_1 = (-3, 5, 2, 1)^T, \alpha_2 = (4, -3, 7, -1)^T,$ Ξ A Ξ

$$\alpha_1 = (-3, 5, 2, 1)^T, \alpha_2 = (4, -3, 7, -1)^T, 若 A行等价于$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, 则向量 \alpha_3 = \underline{\alpha_1 + \alpha_2}, \alpha_4 = \underline{\alpha_1 - \alpha_2}$$

解: 矩阵的列向量在初等行变换前后线性相关、线性无关和线性表 出系数关系不变, 因此从 B可以看出要找到 α_3 , α_4 满足: 任意向量秩 为 1(即非零), 任意两个向量秩为 2, 任意三个向量秩为 2, 四个向量 秩为 2. 经验证 $\alpha_3 = \alpha_1 + \alpha_2$ 和 $\alpha_4 = \alpha_1 - \alpha_2$ 满足所有要求, 即为所 求.

注: 因为初等行变换等价于左乘初等矩阵, 因此此题也可以求可逆 矩阵 P使得 $PA = B \Rightarrow A = P^{-1}B$, 因此对 [P, B]作初等行变换为 $[I, P^{-1}B]$ 即可.

```
线性无关与线性
相关
```

```
一、填空题
1
2
3
```

二、选择

2

3 4 =

四五

六

向量组的极大线 性无关组和秩

```
一、填空題
1
2
3
4
```

三三四

四 五

六

二、求下列向量组的秩与一个极大线性无关组.

```
\mathbf{1}.\alpha_1 = (0, 1, -1, 2)^T, \alpha_2 = (0, 3, -3, 6)^T, \alpha_3 = (1, 1, -2, 1)^T, \alpha_4 = (-1, 0, 1, 2)^T;
```

二、求下列向量组的秩与一个极大线性无关组.

1.
$$\alpha_1 = (0, 1, -1, 2)^T$$
, $\alpha_2 = (0, 3, -3, 6)^T$, $\alpha_3 = (1, 1, -2, 1)^T$, $\alpha_4 = (-1, 0, 1, 2)^T$;

解: 对 $[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4]$ 作初等行变换,

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & -2 & 1 \\ 2 & 6 & 1 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \cdots \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

可以看到三个主元分别在第 1,3,4 列, 因此其中一组极大线性无关组为 $\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4$.

注:除了观察主元,观察余子式也可以找到线性无关的向量,如上述后三列前三行的三阶余子式

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$$

因此他们的列向量 (3 维) 线性无关, 故他们的伸长组 (即原来的 4 维) α_2 , α_3 , α_4 线性无关, 为一个极大线性无关组

```
线性无关与线性
相关
```

一、填空额

向量组的极大线

性无关组和秩 一、填空额

二、求下列向量组的秩与一个极大线性无关组.

2.
$$\alpha_1 = (1, 0, 3, 6)^T$$
, $\alpha_2 = (-1, 2, -2, -5)^T$, $\alpha_3 = (1, k, 5, 8)^T$, $\alpha_4 = (0, 2, 1, 1)^T$;

线性无关与线性 相关

向量组的极大 性无关组和秩

三三四五六七

二、求下列向量组的秩与一个极大线性无关组.

2.
$$\alpha_1 = (1, 0, 3, 6)^T$$
, $\alpha_2 = (-1, 2, -2, -5)^T$, $\alpha_3 = (1, k, 5, 8)^T$, $\alpha_4 = (0, 2, 1, 1)^T$;

解: 对 $[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4]$ 作初等行变换,

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & k & 2 \\ 3 & -2 & 5 & 1 \\ 6 & -5 & 8 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \cdots \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & k-4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

可以看到三个主元分别在第 1,2 列, 第三列需要进行讨论;

 $k \neq 4$ 时秩为 3, 极大线性无关组为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$;

k = 4时秩为 2, 极大线性无关组为 α_1, α_2 .

```
目录
```

```
线性无关与线性
相关
```

二、选择

3 4 =

六 向量组的极大 性无关组和秩

一、填空题 1 2

4 __ =

四五六

三、设 4维向量组 $\alpha_1=(1+k,1,1,1)^T,\alpha_2=(2,2+k,2,2)^T,\alpha_3=(3,3,3+k,3)^T,\alpha_4=(4,4,4,4+k)^T.$ 问当 k为何值时,向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性相关?当 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性相关时,求其一个极大 线性无关组,并用该极大线性无关组线性表出向量组中的其余向量.

线性无关与线性 相关

一、填空題 1 2

3 4

五 六 向量组的极大 性无关组和秩

三四五六七

三、设 4维向量组 $\alpha_1 = (1+k,1,1,1)^T$, $\alpha_2 = (2,2+k,2,2)^T$, $\alpha_3 = (3,3,3+k,3)^T$, $\alpha_4 = (4,4,4,4+k)^T$. 问当 k为何值时,向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性相关?当 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性相关时,求其一个极大 线性无关组,并用该极大线性无关组线性表出向量组中的其余向量.

解: 对 $[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4]$ 作初等行变换.

$$\begin{bmatrix} 1+k & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2+k & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3+k & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4+k \end{bmatrix} \rightarrow \cdots \rightarrow \begin{bmatrix} k & 0 & 0 & -k \\ 0 & k & 0 & -k \\ 0 & 0 & k & -k \\ 1 & 2 & 3 & 4+k \end{bmatrix}$$

当 k=0时, 显然线性相关, 此时极大线性无关组为 α_1 , 表出情况为 $\alpha_2=2\alpha_1,\alpha_3=3\alpha_1,\alpha_4=4\alpha_4$;

当 $k \neq 0$ 时, 继续化简

$$\begin{bmatrix} k & 0 & 0 & -k \\ 0 & k & 0 & -k \\ 0 & 0 & k & -k \\ 1 & 2 & 3 & 4+k \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 4+k \end{bmatrix} \rightarrow \cdots \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 10+k \end{bmatrix}$$

可知 k = -10时线性相关, 极大线性无关组为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, 表出关系 为 $\alpha_4 = -\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3$.

线性无关与线性

一、填空題

性无关组和秩

一、填空题

四、已知秩 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=3$, 秩 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=4$, 秩 $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_5) = 4$. $\mathbf{x} \mathbf{x} (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_5 - \alpha_4)$

线性无关与线性 相关

一、填空題 1

一四五 五六 中量组的极大生无关组和秩

生无关组和秩 一、填空題 1

1 2

五 六

四、已知秩 $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 3$, 秩 $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = 4$, 秩 $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_5) = 4$. 求秩 $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_5 - \alpha_4)$

解: 由题意和前面的结论, α_4 可被 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表出, 记为 $\alpha_4=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3$, 断言 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_5-\alpha_4$ 线性无关, 即秩为 4. 若

$$x_{1}\alpha_{1} + x_{2}\alpha_{2} + x_{3}\alpha_{3} + x_{4}(\alpha_{5} - \alpha_{4}) = 0$$

$$\Rightarrow x_{1}\alpha_{1} + x_{2}\alpha_{2} + x_{3}\alpha_{3} + x_{4}(\alpha_{5} - k_{1}\alpha_{1} - k_{2}\alpha_{2} - k_{3}\alpha_{3}) = 0$$

$$\Rightarrow (x_{1} - k_{1}x_{4})\alpha_{1} + (x_{2} - k_{2}x_{4})\alpha_{2} + (x_{3} - k_{3}x_{4})\alpha_{3} + x_{4}\alpha_{5} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_{1} - k_{1}x_{4} = 0 \\ x_{2} - k_{2}x_{4} = 0 \\ x_{3} - k_{3}x_{4} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -k_{1} \\ 0 & 1 & 0 & -k_{2} \\ 0 & 0 & 1 & -k_{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1} \\ x_{2} \\ x_{3} \\ x_{4} \end{bmatrix} = 0$$

最后得到 x_1, x_2, x_3, x_4 只有零解, 因此 $r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_5 - \alpha_4) = 4$.

注: 此题同选择题第三题, 两种方法实际上是一样的.

```
线性无关与线性
```

一、填空额

向量组的极大线 性无关组和秩

一、填空额

五、向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 线性无关, 而向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r, \beta, \gamma$ 线 性相关, 证明: 或者 β 与 γ 中至少有一个可由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 线性表 出, 或者向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r, \beta$ 与 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r, \gamma$ 等价.

五、向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性无关, 而向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r,\beta,\gamma$ 线性相关, 证明: 或者 β 与 γ 中至少有一个可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性表出, 或者向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r,\beta$ 与 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r,\gamma$ 等价.

证明: 假设 β , γ 都不可以被 $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ 线性表出, 那么只需证明此时后者成立.

采用反证法, 若不然两个向量组不等价, 不妨设 β 不能被 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r,\gamma$ 线性表出, 那么也不能被 α_1,\cdots,α_r 线性表出, 即可得 到 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r,\beta$ 线性无关, 结合 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r,\beta,\gamma$ 线性相关, 这表示 γ 可被 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r,\beta$ 线性表出, 即

$$\gamma = x_1 \alpha_1 + \dots + x_r \alpha_r + y \beta$$

若 y = 0, 那么表示 γ 可被 $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ 线性表出, 与假设矛盾; 若 $y \neq 0$, 那么变形得到

$$\beta = \frac{1}{\nu}(\gamma - x_1\alpha_1 + \dots + x_r\alpha_r)$$

这表示 β 可被 $\alpha_1, \dots, \alpha_r, \gamma$ 线性表出, 也与假设矛盾. 综上得证.

```
线性无关与线性
相关
一、填空题
```

4 二、选择

1 2

4 =

四五、

向量组的极大线 性无关组和秩

3 4 =

三四四

六

六、证明: 向量组 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_r$ 能由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性表出 的充分必要条件是

$$r(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s) = r(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s, \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t).$$

六、证明: 向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$ 能由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性表出的充分必要条件是

$$r(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s) = r(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s, \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t).$$

证明: 必要性. 首先显然有

$$r(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s) \leq r(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s, \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t)$$

另一方面, 由题意 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t$ 能由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性表出, 这表示

$$r(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s) \geqslant r(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s, \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t)$$

因此等号成立.

充分性. 因为 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 可以表出 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$, 且他们秩相等,因此他们等价,故 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 也可被 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性表出,即 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 可被 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性表出. 得证.

向量组的极大线 性无关组和秩

一、填空额

七、设向量组 $\alpha_1 = (1,0,1)^T, \alpha_2 = (0,1,1)^T, \alpha_3 = (1,3,5)^T$ 不能由 向量组 $\beta_1 = (1,1,1)^T$, $\beta_2 = (1,2,3)^T$, $\beta_3 = (3,4,k)^T$ 线性表出. 1. 求 k的值:

线性无关与线性 - 、填空题

七、设向量组 $\alpha_1 = (1,0,1)^T$, $\alpha_2 = (0,1,1)^T$, $\alpha_3 = (1,3,5)^T$ 不能由 向量组 $\beta_1 = (1,1,1)^T$, $\beta_2 = (1,2,3)^T$, $\beta_3 = (3,4,k)^T$ 线性表出. 1. 求 k的值:

解: 由题意即

$$\begin{bmatrix} \beta_1, \beta_2, \beta_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \end{bmatrix}$$

无解, 故对增广矩阵作初等行变换.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & k & 1 & 1 & 5 \end{bmatrix} \rightarrow \cdots \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & k - 5 & 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

要使上述方程无解, 只需要 k-5=0, 得到 k=5.

```
线性无关与线性
```

一、填空额

性无关组和秩

```
一、填空额
```

七、设向量组 $\alpha_1 = (1,0,1)^T$, $\alpha_2 = (0,1,1)^T$, $\alpha_3 = (1,3,5)^T$ 不能由 向量组 $\beta_1 = (1,1,1)^T$, $\beta_2 = (1,2,3)^T$, $\beta_3 = (3,4,k)^T$ 线性表出. 2. 将 β_1 , β_2 , β_3 用 α_1 , α_2 , α_3 线性表出.

线性无关与线性 - 、填空题

七、设向量组 $\alpha_1 = (1,0,1)^T$, $\alpha_2 = (0,1,1)^T$, $\alpha_3 = (1,3,5)^T$ 不能由 向量组 $\beta_1 = (1,1,1)^T$, $\beta_2 = (1,2,3)^T$, $\beta_3 = (3,4,k)^T$ 线性表出. 2. 将 β_1 , β_2 , β_3 用 α_1 , α_2 , α_3 线性表出.

解: 由题意即解下面的矩阵方程

$$\begin{bmatrix} \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1,\beta_2,\beta_3 \end{bmatrix}$$

无解. 故对增广矩阵作初等行变换.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 5 & 1 & 3 & k \end{bmatrix} \rightarrow \cdots \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 10 - k \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 2 & 25 - 3k \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & k - 7 \end{bmatrix}$$

即得到

$$\begin{cases} \beta_1 = 2\alpha_1 + 4\alpha_2 - \alpha_3 \\ \beta_2 = \alpha_1 + 2\alpha_2 \\ \beta_3 = (10 - k)\alpha_1 + (25 - 3k)\alpha_2 + (k - 7)\alpha_3 \end{cases}$$