线性代数第一次作业

2024 年 3 月 10 日

本次作业

《线性代数习题册 (第三版)》

- $1 \sim 8$页: 线性方程组

习题答案会上传至 github 中.

图: github 链接二维码

一、利用高斯消元法, 化下列方程组为系数矩阵是行阶梯形的方程组, 并判断方程组是否有解, 若有解, 求其解.(在有解时必须进一步回答有唯一解还是无穷解)

$$1.\ \begin{cases} 2x_1+3x_2+x_3=1, \\ x_1+x_2+x_3=3, \\ 3x_1+4x_2+2x_3=4; \end{cases}$$

一、利用高斯消元法, 化下列方程组为系数矩阵是行阶梯形的方程组, 并判断方程组是否有解, 若有解, 求其解.(在有解时必须进一步回答有唯一解还是无穷解)

$$1.\ \begin{cases} 2x_1+3x_2+x_3=1, \\ x_1+x_2+x_3=3, \\ 3x_1+4x_2+2x_3=4; \end{cases}$$

解: 将方程组对应的增广矩阵化为最简行阶梯矩阵后进行判断.

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 2 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{①\Leftrightarrow②} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 2 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow[-3\times①\Rightarrow③]{-2\times①\Rightarrow②} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -5 \\ 0 & 1 & -1 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{-1\times②\Rightarrow③} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{-1\times②\Rightarrow①} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

可以看到系数矩阵的主元数 (2)等于增广矩阵的主元数 (2)且小于未知数个数 (3), 因此有无穷解, 可知原方程等价于

$$\begin{cases} x_1+2x_3=8 \\ x_2-x_3=-5 \end{cases} \xrightarrow{\text{求解得}} \begin{cases} x_1=8-2k \\ x_2=-5+k \qquad (k\in\mathbb{R}) \\ x_3=k \end{cases}$$

一、利用高斯消元法, 化下列方程组为系数矩阵是行阶梯形的方程组, 并判断方程组是否有解, 若有解, 求其解.

$$2.\ \begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 2, \\ x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 1, \\ 5x_1 - 8x_2 + 2x_3 = 5; \end{cases}$$

一、利用高斯消元法, 化下列方程组为系数矩阵是行阶梯形的方程组, 并判断方程组是否有解, 若有解, 求其解.

$$2.\ \begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 2, \\ x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 1, \\ 5x_1 - 8x_2 + 2x_3 = 5; \end{cases}$$

解: 同上进行初等行变换.

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -2 & 1 \\ 5 & -8 & 2 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow[-5\times①\Rightarrow④]{\substack{-2\times①\Rightarrow②\\ -1\times①\Rightarrow③}} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 7 & -3 & 0 \\ 0 & 7 & -3 & 0 \\ 0 & 7 & -3 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[-1\times②\Rightarrow④]{-1\times②\Rightarrow③} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 7 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\frac{3}{7}\times②\Rightarrow①} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{2}{7} & 1 \\ 0 & 7 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{小于未知数个数 (3), 因此存在无穷个解}]{\text{系数矩阵主元数等于增广矩阵主元数 (2)}} \begin{cases} x_1 = 1 + \frac{2}{7}k \\ x_2 = \frac{3}{7}k \qquad (k \in \mathbb{R}) \\ x_3 = k \end{cases}$$

一、利用高斯消元法, 化下列方程组为系数矩阵是行阶梯形的方程组, 并判断方程组是否有解, 若有解, 求其解.

$$3.\ \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = 2, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 5, \\ 3x_1 + 6x_2 - x_3 - x_4 = 4; \end{cases}$$

一、利用高斯消元法, 化下列方程组为系数矩阵是行阶梯形的方程组, 并判断方程组是否有解, 若有解, 求其解.

$$3.\ \begin{cases} 2x_1+3x_2-x_3-x_4=2, \\ x_1+x_2+x_3+x_4=0, \\ 3x_1+2x_2+x_3+x_4=5, \\ 3x_1+6x_2-x_3-x_4=4; \end{cases}$$

解: 同上进行初等行变换.

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & 5 \\ 3 & 6 & -1 & -1 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{①\Leftrightarrow②} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & 5 \\ 3 & 6 & -1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{-2\times①\Rightarrow②\\-3\times①\Rightarrow③\\-3\times①\Rightarrow④}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -3 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & 5 \\ 0 & 3 & -4 & -4 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow[-3\times②\Rightarrow④]{1\times②\Rightarrow③} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & -5 & 7 \\ 0 & 0 & 5 & 5 & -2 \end{bmatrix}$$

一、利用高斯消元法, 化下列方程组为系数矩阵是行阶梯形的方程组, 并判断方程组是否有解, 若有解, 求其解.

$$3.\ \begin{cases} 2x_1+3x_2-x_3-x_4=2, \\ x_1+x_2+x_3+x_4=0, \\ 3x_1+2x_2+x_3+x_4=5, \\ 3x_1+6x_2-x_3-x_4=4; \end{cases}$$

解: 同上进行初等行变换.

$$\xrightarrow{(\text{接上文})} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & -5 & 7 \\ 0 & 0 & 5 & 5 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{1\times③\Rightarrow④} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & -5 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

此时系数矩阵的主元数 (3)不等于增广矩阵的主元数 (4), 因此原方程组无解.

二、设一线性方程组 A分别满足下列条件, 判断该方程组是否有解, 并说明理由.

1. 方程组 A有 3×4系数矩阵, 该矩阵有三个主元列;

二、设一线性方程组 A分别满足下列条件, 判断该方程组是否有解, 并说明理由.
1. 方程组 A有 3×4系数矩阵, 该矩阵有三个主元列;

解: 判断有无解即比较系数矩阵主元数 (列数/行数) 和增广矩阵主元数 (列数/行数) 是否相同.
(1) 该系数矩阵有三个主元列, 该方程组的增广矩阵 (即此系数矩阵最右插入一列) 主元数也只能为 3, 且小于未知数个数 4, 因此有无穷解.

二、设一线性方程组 A分别满足下列条件, 判断该方程组是否有解, 并说明理由.

2. 方程组 A有 3×4增广矩阵, 该矩阵第四列为主元列;

二、设一线性方程组 A分别满足下列条件, 判断该方程组是否有解, 并说明理由.
2. 方程组 A有 3×4增广矩阵, 该矩阵第四列为主元列;

解: 判断有无解即比较系数矩阵主元数 (列数/行数) 和增广矩阵主元数 (列数/行数) 是否相同.
(2) 增广矩阵第四列为主元列, 这表示这个主元对应的行在化为最简行阶梯矩阵形如

$$\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & b\end{bmatrix}, (b\neq 0)$$

(因为阶梯型矩阵中主元的左边必定全为 0), 这样系数矩阵中该行全为 0, 主元数必定减一, 不等于增广矩阵主元数, 所以无解.
注: 事实上, 任意系数矩阵主元数或者等于增广矩阵主元数 (此时有解), 或者等于增广矩阵主元数减一 (此时无解), 为什么?

二、设一线性方程组 A分别满足下列条件, 判断该方程组是否有解, 并说明理由.

3. 方程组 A的系数矩阵的每一行中都有一个主元;

二、设一线性方程组 A分别满足下列条件, 判断该方程组是否有解, 并说明理由.
3. 方程组 A的系数矩阵的每一行中都有一个主元;

解: 判断有无解即比较系数矩阵主元数 (列数/行数) 和增广矩阵主元数 (列数/行数) 是否相同.
(3) 由题意可知若方程组 A有 m行, 那么系数矩阵主元数为 m, 和 (1) 类似可知增广矩阵的主元数也为 m, 因此有解. 因为此时未知数个数可能大于 m也可能等于 m, 因此可能有唯一解, 也可能有无穷解.
注: 未知数个数不可能小于主元个数, 为什么?

二、设一线性方程组 A分别满足下列条件, 判断该方程组是否有解, 并说明理由.

4. 方程组 A有三个变量、三个方程, 其系数矩阵的每一列都有一个主元.

二、设一线性方程组 A分别满足下列条件, 判断该方程组是否有解, 并说明理由.
4. 方程组 A有三个变量、三个方程, 其系数矩阵的每一列都有一个主元.

解: 判断有无解即比较系数矩阵主元数 (列数/行数) 和增广矩阵主元数 (列数/行数) 是否相同.
(4) 由题意可知系数矩阵主元数为 3, 和 (3) 类似可知增广矩阵的主元数也为 3, 且等于未知数个数 3, 因此存在唯一解.

三、方程个数比未知量个数少的一个方程组, 称为一个亚定组. 亚定方程组可能有解, 也可能无解, 为什么? 若一个亚定组有解, 试说明它一定有无穷多解. 请给出一个含两个方程的三元线性方程组, 并举例说明.

三、方程个数比未知量个数少的一个方程组, 称为一个亚定组. 亚定方程组可能有解, 也可能无解, 为什么? 若一个亚定组有解, 试说明它一定有无穷多解. 请给出一个含两个方程的三元线性方程组, 并举例说明.

解: 此题举例即可. 有解的亚定组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} \quad \text{存在解} \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

无解的亚定组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \end{cases} \quad \text{显然无解}$$

若一个亚定组有解, 此时增广矩阵主元数 $\leqslant$方程个数 (增广矩阵行数)$<$未知数个数, 因此必定有无穷多解.

四、方程个数比未知量个数多的一个方程组, 称为一个超定组. 超定方程组是否有解? 请给出一个含三个方程的二元线性方程组, 并举例说明.

四、方程个数比未知量个数多的一个方程组, 称为一个超定组. 超定方程组是否有解? 请给出一个含三个方程的二元线性方程组, 并举例说明.

解: 举例即可. 无解的超定组:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 + x_2 = 3 \end{cases} \quad \text{显然无解}$$

存在唯一解的超定组:

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases} \quad \text{显然存在唯一解 (就是其本身)}$$

存在无穷解的超定组:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases} \quad \text{显然存在无穷解}$$

五、设线性方程组的增广矩阵为

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & a & 0 \end{bmatrix}$$

1. 该方程组是否无解?

五、设线性方程组的增广矩阵为

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & a & 0 \end{bmatrix}$$

1. 该方程组是否无解?

解:(1) 因为增广矩阵最右列全为 0, 即常数项全为 0, 所以该线性方程组为齐次线性方程组, 故一定有解 (至少存在零解).
注: 当然也可以使用初等行变换进行判断.

五、设线性方程组的增广矩阵为

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & a & 0 \end{bmatrix}$$

2. 当 a为何值时, 方程组有唯一解? 当 a为何值时, 方程组有无穷多解?

五、设线性方程组的增广矩阵为

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & a & 0 \end{bmatrix}$$

2. 当 a为何值时, 方程组有唯一解? 当 a为何值时, 方程组有无穷多解?

解: 先进行初等行变换.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & a & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[1\times①\Rightarrow③]{-2\times①\Rightarrow②} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & a+1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{-3\times②\Rightarrow③} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a-2 & 0 \end{bmatrix}$$

要使方程组有唯一解, 只需主元数等于未知数个数 3, 即 $a-2\neq 0 \Rightarrow a\neq 2$;
要使方程组有无穷多解 (由 1 的结论, 我们无需考虑是否有解), 只需增广矩阵主元个数小于未知数个数 3, 即 $a-2=0$时成立, 得到 $a=2$.

六、设线性方程组的增广矩阵为

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & a & b \end{bmatrix}$$

1. 当 a, b为何值时, 方程组有无穷多解?

六、设线性方程组的增广矩阵为

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & a & b \end{bmatrix}$$

1. 当 a, b为何值时, 方程组有无穷多解?

解:(1) 先进行初等行变换.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & a & b \end{bmatrix} \xrightarrow[-1\times①\Rightarrow③]{-1\times①\Rightarrow②} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & a-3 & b-2 \end{bmatrix} \xrightarrow{-2\times②\Rightarrow③} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a-5 & b-4 \end{bmatrix}$$

要使方程组有无穷多解, 只需方程组有解且增广矩阵主元个数小于未知数个数 3, 即最后一行全为 0, 得到

$$\begin{cases} a-5=0 \\ b-4=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=5 \\ b=4 \end{cases}$$

六、设线性方程组的增广矩阵为

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & a & b \end{bmatrix}$$

2. 当 a, b为何值时, 方程组无解?

六、设线性方程组的增广矩阵为

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & a & b \end{bmatrix}$$

2. 当 a, b为何值时, 方程组无解?

解:(2) 由 (1) 初等行变换矩阵

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a-5 & b-4 \end{bmatrix}$$

要使方程组无解, 只需增广矩阵主元数大于系数矩阵主元数, 故

$$\begin{cases} a-5=0 \\ b-4 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=5 \\ b \neq 4 \end{cases}$$

七、已知方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + 2x_2 - ax_3 = 9, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = b. \end{cases}$$

1. 当 a, b为何值时, 方程组无解?

七、已知方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + 2x_2 - ax_3 = 9, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = b. \end{cases}$$

1. 当 a, b为何值时, 方程组无解?

解:(1) 对增广矩阵进行初等行变换.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -a & 9 \\ 2 & -1 & 3 & b \end{bmatrix} \xrightarrow[-2\times①\Rightarrow③]{-1\times①\Rightarrow②} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -a-1 & 6 \\ 0 & -3 & 1 & b-6 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{3\times②\Rightarrow③} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -a-1 & 6 \\ 0 & 0 & -3a-2 & b+12 \end{bmatrix}$$

要使方程组无解, 只需增广矩阵主元数大于系数矩阵主元数, 即

$$\begin{cases} -3a-2=0 \\ b+12 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -\frac{2}{3} \\ b \neq -12 \end{cases}$$

七、已知方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + 2x_2 - ax_3 = 9, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = b. \end{cases}$$

2. 当 a, b为何值时, 方程组有唯一解?

七、已知方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + 2x_2 - ax_3 = 9, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = b. \end{cases}$$

2. 当 a, b为何值时, 方程组有唯一解?

解:(2) 由 (1) 行阶梯矩阵

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -a-1 & 6 \\ 0 & 0 & -3a-2 & b+12 \end{bmatrix}$$

要使方程组有唯一解, 只需增广矩阵主元数等于系数矩阵主元数等于未知数个数 3, 即

$$-3a - 2 \neq 0 \Rightarrow a \neq -\frac{2}{3}$$

八、求数据 $(1,12),(1,15),(3,16)$插值多项式 $P(t)=a_0+a_1t+a_2t^2$，即求 a_0,a_1,a_2,使得

$$\begin{cases} a_0+a_1(1)+a_2(1)^2=12, \\ a_0+a_1(2)+a_2(2)^2=15, \\ a_0+a_1(3)+a_2(3)^2=16. \end{cases}$$

八、求数据 $(1,12),(1,15),(3,16)$插值多项式 $P(t)=a_0+a_1t+a_2t^2$，即求 a_0,a_1,a_2,使得

$$\begin{cases} a_0+a_1(1)+a_2(1)^2=12, \\ a_0+a_1(2)+a_2(2)^2=15, \\ a_0+a_1(3)+a_2(3)^2=16. \end{cases}$$

解: 由增广矩阵进行初等行变换即可求解.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 13 \\ 1 & 2 & 4 & 15 \\ 1 & 3 & 9 & 16 \end{bmatrix} \xrightarrow[-1\times①\Rightarrow③]{-1\times①\Rightarrow②} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 12 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 8 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{-2\times②\Rightarrow③} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 12 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{2}\times③} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 12 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[-1\times③\Rightarrow①]{-3\times③\Rightarrow②} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 13 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{-1\times②\Rightarrow①} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

此即得到结果 $a_0=7,a_1=6,a_2=-1$.

九、一个投资者将 100 万元投给三家企业甲、乙、丙, 所得利润率分别为 $12\%, 15\%, 22\%$. 他想得到 20 万元的利润.

1. 如果投给乙的钱是投给甲的钱的 2 倍, 那么应分别给甲、乙、丙投资多少?

九、一个投资者将 100 万元投给三家企业甲、乙、丙, 所得利润率分别为 $12\%, 15\%, 22\%$. 他想得到 20 万元的利润.
1. 如果投给乙的钱是投给甲的钱的 2 倍, 那么应分别给甲、乙、丙投资多少?

解:(1) 设甲、乙、丙分别投资 x, y, z万元, 由题意即可设方程组, 并使用初等行变换求解

$$\begin{cases} x+y+z=100 \\ 2x=y \\ 0.12x+0.15y+0.22z=20 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 100 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0.12 & 0.15 & 0.22 & 20 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[-0.12\times①\Rightarrow③]{-2\times①\Rightarrow②} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 100 \\ 0 & -3 & -2 & -200 \\ 0 & 0.03 & 0.1 & 8 \end{bmatrix} \xrightarrow{0.01\times②\Rightarrow③} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 100 \\ 0 & -3 & -2 & -200 \\ 0 & 0 & 0.08 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{12.5\times③} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 100 \\ 0 & -3 & -2 & -200 \\ 0 & 0 & 1 & 75 \end{bmatrix} \xrightarrow[-1\times③\Rightarrow①]{2\times③\Rightarrow②} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 25 \\ 0 & -3 & 0 & -50 \\ 0 & 0 & 1 & 75 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{3}\times②\Rightarrow①} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{25}{3} \\ 0 & -3 & 0 & -50 \\ 0 & 0 & 1 & 75 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{25}{3} \\ -3y=-50 \\ z=75 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{25}{3} \\ y=\frac{50}{3} \\ z=75 \end{cases}$$

九、一个投资者将 100 万元投给三家企业甲、乙、丙, 所得利润率分别为 $12\%, 15\%, 22\%$. 他想得到 20 万元的利润.
2. 可不可以投给丙的钱等于投给甲与乙的钱的和?

九、一个投资者将 100 万元投给三家企业甲、乙、丙, 所得利润率分别为 $12\%, 15\%, 22\%$. 他想得到 20 万元的利润.
2. 可不可以投给丙的钱等于投给甲与乙的钱的和?

解: 由题意, 即 (1) 中方程组修改为

$$\begin{cases} x+y+z=100 \\ 0.12x+0.15y+0.22z=20 \\ x+y=z \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 100 \\ 0.12 & 0.15 & 0.22 & 20 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[-1\times①\Rightarrow③]{-0.12\times①\Rightarrow②} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 100 \\ 0 & 0.03 & 0.1 & 8 \\ 0 & 0 & -2 & -100 \end{bmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{2}\times③} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 100 \\ 0 & 0.03 & 0.1 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 50 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[-1\times③\Rightarrow①]{-0.1\times③\Rightarrow②} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 50 \\ 0 & 0.03 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 50 \end{bmatrix} \xrightarrow{-\frac{100}{3}\times②\Rightarrow①} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -50 \\ 0 & 0.03 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 50 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=-50 \\ 0.03y=3 \\ z=50 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-50 \\ y=100 \\ z=50 \end{cases}$$

甲投资的钱为负数, 不合题意, 故不可

十、某厂在每批次投料生产中，获得四种不同产量的产品，同时测算出各批次的生成总成本，列表如下：

生成批次	含量 (吨)				总成本 (万元)
	A	B	C	D	
1	4	2	2	1	58
2	10	5	4	2	141
3	5	2	2	1	68
4	20	9	8	3	275

求每种产品的单位成本.

十、某厂在每批次投料生产中, 获得四种不同产量的产品, 同时测算出各批次的生成总成本, 列表如下:

生成批次	含量 (吨)				总成本 (万元)
	A	B	C	D	
1	4	2	2	1	58
2	10	5	4	2	141
3	5	2	2	1	68
4	20	9	8	3	275

求每种产品的单位成本.

解: 设 A, B, C, D四种产品的单位成本为 a, b, c, d万元/吨, 即可得到线性方程组

$$\begin{cases} 4a+2b+2c+d=58 \\ 10a+5b+4c+2d=141 \\ 5a+2b+2c+d=68 \\ 20a+9b+8c+3d=275 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d+2c+2b+4a=58 \\ 2d+4c+5b+10a=141 \\ d+2c+2b+5a=68 \\ 3d+8c+9b+20a=275 \end{cases}$$

进行上述变换是因为初等行变换在消去其它行非零元时用 1最方便, 而原式线性方程组的第一列没有 1.

$$
\begin{bmatrix}1&2&2&4&58\\2&4&5&10&141\\1&2&2&5&68\\3&8&9&20&275\end{bmatrix}
\xrightarrow[-3\times\text{①}\Rightarrow\text{④}]{\substack{-2\times\text{①}\Rightarrow\text{②}\\-1\times\text{①}\Rightarrow\text{③}}}
\begin{bmatrix}1&2&2&4&58\\0&0&1&2&25\\0&0&0&1&10\\0&2&3&8&101\end{bmatrix}
$$

$$
\xrightarrow[-4\times\text{③}\Rightarrow\text{①}]{\substack{-2\times\text{③}\Rightarrow\text{②}\\-8\times\text{③}\Rightarrow\text{④}}}
\begin{bmatrix}1&2&2&0&18\\0&0&1&0&5\\0&0&0&1&10\\0&2&3&0&21\end{bmatrix}
\xrightarrow[-3\times\text{②}\Rightarrow\text{④}]{-2\times\text{②}\Rightarrow\text{①}}
\begin{bmatrix}1&2&0&0&8\\0&0&1&0&5\\0&0&0&1&10\\0&2&0&0&6\end{bmatrix}
$$

$$
\xrightarrow{-1\times\text{④}\Rightarrow\text{①}}
\begin{bmatrix}1&0&0&0&2\\0&0&1&0&5\\0&0&0&1&10\\0&2&0&0&6\end{bmatrix}
\xrightarrow{\text{交换行}}
\begin{bmatrix}1&0&0&0&2\\0&2&0&0&6\\0&0&1&0&5\\0&0&0&1&10\end{bmatrix}
$$

$$
\xrightarrow{\frac{1}{2}\times\text{②}}
\begin{bmatrix}1&0&0&0&2\\0&1&0&0&3\\0&0&1&0&5\\0&0&0&1&10\end{bmatrix}
\Rightarrow
\begin{cases}d=2\\c=3\\b=5\\a=10\end{cases}
$$

十一、已知方程组

$$\begin{cases} \lambda x + y + z = 0, \\ x + \lambda y - z = 0, \\ 2x - y + z = 0. \end{cases}$$

则当 λ 为何值时, 方程组有非零解? 并求其解.

十一、已知方程组

$$\begin{cases} \lambda x + y + z = 0, \\ x + \lambda y - z = 0, \\ 2x - y + z = 0. \end{cases}$$

则当 λ为何值时, 方程组有非零解? 并求其解.

解: 对系数矩阵进行初等行变换 (此为齐次线性方程组, 一定有解, 故可以只考虑系数矩阵).

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[-2\times②\Rightarrow③]{-\lambda\times②\Rightarrow①} \begin{bmatrix} 0 & 1-\lambda^2 & 1+\lambda \\ 1 & \lambda & -1 \\ 0 & -1-2\lambda & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{①\Leftrightarrow②} \begin{bmatrix} 1 & \lambda & -1 \\ 0 & 1-\lambda^2 & 1+\lambda \\ 0 & -1-2\lambda & 3 \end{bmatrix}$$

要使方程组有非零, 只需系数矩阵主元个数小于未知数个数 3, 现第二行第三行都有数可能为 0, 我们从第二行进行讨论.

(1)$1-\lambda^2 = 0, 1+\lambda = 0$即 $\lambda = -1$时, 原矩阵为

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{1\times③\Rightarrow①} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x + 2z = 0 \\ y + 3z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2k \\ y = -3k \quad (k \in \mathbb{R}) \\ z = k \end{cases}$$

十一、已知方程组

$$\begin{cases} \lambda x + y + z = 0, \\ x + \lambda y - z = 0, \\ 2x - y + z = 0. \end{cases}$$

则当 λ为何值时, 方程组有非零解? 并求其解.

解:(接上文)

$$\begin{bmatrix} 1 & \lambda & -1 \\ 0 & 1-\lambda^2 & 1+\lambda \\ 0 & -1-2\lambda & 3 \end{bmatrix}$$

(2)$1-\lambda^2=0, 1+\lambda \neq 0$即 $\lambda = 1$时, 原矩阵为

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{②\Leftrightarrow③} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

此时系数矩阵主元数等于未知数个数 3, 故可知只有唯一解 (零解).

十一、已知方程组

$$\begin{cases} \lambda x + y + z = 0, \\ x + \lambda y - z = 0, \\ 2x - y + z = 0. \end{cases}$$

则当 λ为何值时, 方程组有非零解? 并求其解.

解:(接上文) (3)$1-\lambda^2 \neq 0$即 $\lambda \neq \pm 1$时, 原矩阵为

$$\begin{bmatrix} 1 & \lambda & -1 \\ 0 & 1-\lambda^2 & 1+\lambda \\ 0 & -1-2\lambda & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1+2\lambda}{1-\lambda^2}\times②\Rightarrow③} \begin{bmatrix} 1 & \lambda & -1 \\ 0 & 1-\lambda^2 & 1+\lambda \\ 0 & 0 & \frac{(1+\lambda)(1+2\lambda)}{1-\lambda^2}+3 \end{bmatrix}$$

此时若要方程组有非零解, 只需要

$$\frac{(1+\lambda)(1+2\lambda)}{1-\lambda^2}+3=0 \Rightarrow \lambda = 4$$

这样原矩阵和解为 ($k \in \mathbb{R}$)

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 0 & -15 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{4}{15}\times②\Rightarrow①} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & -15 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x+\frac{1}{3}z=0 \\ -15y+5z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-\frac{1}{3}k \\ y=\frac{1}{3}k \\ z=k \end{cases}$$

十一、已知方程组

$$\begin{cases} \lambda x + y + z = 0, \\ x + \lambda y - z = 0, \\ 2x - y + z = 0. \end{cases}$$

则当 λ为何值时, 方程组有非零解? 并求其解.

解:(接上文) 综上所述, 当 $\lambda = -1$或 4时有非零解, 其中 $\lambda = -1$时解为

$$\begin{cases} x = -2k \\ y = -3k \\ z = k \end{cases} \quad (k \in \mathbb{R})$$

$\lambda = 4$时解为

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{3}k \\ y = \frac{1}{3}k \\ z = k \end{cases} \quad (k \in \mathbb{R})$$

十二、对一同一矩阵 A, 关于非齐次线性方程组 $Ax = b(b \neq 0)$和齐次线性方程组 $Ax = 0$, 下列说法中正确的是 (4)

1.$Ax = 0$无非零解时,$Ax = b$无解;
2.$Ax = 0$有无穷多解时,$Ax = b$有无穷多解;
3.$Ax = b$有无穷多解时,$Ax = 0$无非零解;
4.$Ax = b$有唯一解时,$Ax = 0$只有零解.

十二、对一同一矩阵 A, 关于非齐次线性方程组 $Ax = b(b \neq 0)$和齐次线性方程组 $Ax = 0$, 下列说法中正确的是 (4)

1.$Ax = 0$无非零解时,$Ax = b$无解;
2.$Ax = 0$有无穷多解时,$Ax = b$有无穷多解;
3.$Ax = b$有无穷多解时,$Ax = 0$无非零解;
4.$Ax = b$有唯一解时,$Ax = 0$只有零解.

解: 我们需要将线性方程组的解问题转换为增广矩阵主元数、系数矩阵主元数与未知数个数进行关联.
(1)$Ax = 0$无非零解, 表示系数矩阵 A作初等行变换变为最简行阶梯矩阵后 (它是唯一的) 系数矩阵主元个数等于未知数个数. 而对于 $Ax = b$, 其增广矩阵 $(A\ b)$作相同的初等行变换 (相同是指所作变换和顺序完全相同) 后除最右一列外 (即系数矩阵 A部分) 也会变为主元数等于未知数个数的最简行阶梯矩阵, 同时最右一列在非主元行可能全为 0(此时有解) 可能不为零 (此时无解), 因此说法错误.
如

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases} \quad \text{无非零解, 但} \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 1 \end{cases} \quad \text{却有解}$$

十二、对一同一矩阵 A, 关于非齐次线性方程组 $Ax=b(b\neq 0)$和齐次线性方程组 $Ax=0$, 下列说法中正确的是 (4).
1.$Ax=0$无非零解时,$Ax=b$无解;
2.$Ax=0$有无穷多解时,$Ax=b$有无穷多解;
3.$Ax=b$有无穷多解时,$Ax=0$无非零解;
4.$Ax=b$有唯一解时,$Ax=0$只有零解.

解: 我们需要将线性方程组的解问题转换为增广矩阵主元数、系数矩阵主元数与未知数个数进行关联.
(2)$Ax=0$由无穷解, 表示 A的最简行阶梯形矩阵中主元个数小于未知数个数. 对于 $Ax=b$, 其增广矩阵 $(A\ b)$作相同的行变换后同样最右一列的非主元行可能为 0, 此时 $Ax=b$无解, 说法错误.
如

$$\begin{cases} x_1+x_2=0 \\ x_1+x_2=0 \end{cases} \quad \text{有无穷多解, 但} \begin{cases} x_1+x_2=1 \\ x_1+x_2=2 \end{cases} \quad \text{却无解}$$

十二、对一同一矩阵 A, 关于非齐次线性方程组 $Ax = b(b \neq 0)$和齐次线性方程组 $Ax = 0$, 下列说法中正确的是 (4).

1.$Ax = 0$无非零解时,$Ax = b$无解;
2.$Ax = 0$有无穷多解时,$Ax = b$有无穷多解;
3.$Ax = b$有无穷多解时,$Ax = 0$无非零解;
4.$Ax = b$有唯一解时,$Ax = 0$只有零解.

解: 我们需要将线性方程组的解问题转换为增广矩阵主元数、系数矩阵主元数与未知数个数进行关联.

(3)$Ax = b$有无穷多解, 表示 $(A\ b)$的最简行阶梯性矩阵中系数矩阵主元数等于增广矩阵主元数小于未知数个数. 对于 $Ax = 0$(首先齐次线性方程组一定有解, 故只需考虑是否有无穷解), 对系数矩阵作相同的初等行变换后系数矩阵主元数也必定小于未知数个数, 因此有无穷多解, 进而一定有非零解, 说法错误.

如

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 = 1 \end{cases} \quad \text{有无穷多解, 且} \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases} \quad \text{也有无穷多解}$$

十二、对一同一矩阵 A, 关于非齐次线性方程组 $Ax=b(b\neq 0)$和齐次线性方程组 $Ax=0$, 下列说法中正确的是 (4).

1.$Ax=0$无非零解时,$Ax=b$无解;

2.$Ax=0$有无穷多解时,$Ax=b$有无穷多解;

3.$Ax=b$有无穷多解时,$Ax=0$无非零解;

4.$Ax=b$有唯一解时,$Ax=0$只有零解.

解: 我们需要将线性方程组的解问题转换为增广矩阵主元数、系数矩阵主元数与未知数个数进行关联.

(4)$Ax=b$有唯一解, 说明 $(A\ b)$的最简行阶梯形矩阵中系数矩阵主元数等于增广矩阵主元数等于未知数个数, 因此 A作相同的初等行变换后也有系数矩阵主元数等于未知数个数, 即 $Ax=0$有唯一解, 即零解, 说法正确.