

线性代数第四次作业

2024 年 3 月 31 日

本次作业

目录

矩阵的转置及分块

九

1

2

十

十一

十二

行列式的定义与性质

一、填空题

1

2

3

4

5

二、选择题

三

1

2

3

四

五

六

七

《线性代数习题册 (第三版)》

- 25 ~ 26页: 矩阵的转置及分块
- 27 ~ 30页: 行列式的定义与计算

目录

矩阵的转置及分
块

九

1

2

十

十一

十二

行列式的定义与
性质

一、填空题

1

2

3

4

5

二、选择题

三

1

2

3

四

五

六

七

习题答案会上传至 github 中.



图: github 链接二维码

目录

矩阵的转置及分
块

九

1

2

+

十一

十二

行列式的定义与
性质

一、填空题

1

2

3

4

5

二、选择题

三

1

2

3

四

五

六

七

九、已知 n 为非零列向量 α , I 为 n 阶单位阵, $A = I - \alpha\alpha^T$, 证明:
1. $A^2 = A$ 的充要条件是 $\alpha^T\alpha = 1$;

目录

矩阵的转置及分
块

九

1

2

十

十一

十二

行列式的定义与
性质

一、填空题

1

2

3

4

5

二、选择题

三

1

2

3

四

五

六

七

九、已知 n 为非零列向量 α , E 为 n 阶单位阵, $A = I - \alpha\alpha^T$, 证明:
2. 当 $\alpha^T\alpha = 1$ 时, A 是不可逆矩阵.

目录

矩阵的转置及分
块

九

1

2

+

十一

十二

行列式的定义与
性质

一、填空题

1

2

3

4

5

二、选择题

三

1

2

3

四

五

六

七

九、已知 n 为非零列向量 α , E 为 n 阶单位阵, $A = I - \alpha\alpha^T$, 证明:
2. 当 $\alpha^T\alpha = 1$ 时, A 是不可逆矩阵.

证明:(反证法) 若 A 为可逆矩阵, 那么由 (1) 可知 $\alpha^T\alpha = 1$ 可知
 $A^2 = A$, 左乘 A^{-1} 后得到 $A = I$, 而 $A = I - \alpha\alpha^T \Rightarrow \alpha\alpha^T = 0$, 进而
 $\alpha = 0$ 与非零条件矛盾, 因此得证.

目录

矩阵的转置及分
块

九

1

2

十

十一

十二

行列式的定义与
性质

一、填空题

1

2

3

4

5

二、选择题

三

1

2

3

四

五

六

七

十、设 $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$, 求 A^6 .

目录

矩阵的转置及分
块

九

1

2

十

十一

十二

行列式的定义与
性质

一、填空题

1

2

3

4

5

二、选择题

三

1

2

3

四

五

六

七

十、设 $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$, 求 A^6 .

解:(接上文) 综上即可得到

$$A^6 = \begin{bmatrix} 15625 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 15625 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 64 & 0 \\ 0 & 0 & 384 & 64 \end{bmatrix}$$

目录

矩阵的转置及分
块

九

1

2

+

十一

十二

行列式的定义与
性质

一、填空题

1

2

3

4

5

二、选择题

三

1

2

3

四

五

六

七

十一、设 A, B 是 n 阶对称阵, 且 $AB + I$ 及 A 可逆, 证明: $(AB + I)^{-1}A$ 为可逆对称阵.

十一、设 A, B 是 n 阶对称阵, 且 $AB + I$ 及 A 可逆, 证明: $(AB + I)^{-1}A$ 为可逆对称阵.

证明: 首先由

$$[(AB + I)^{-1}A]^T = A^T[(AB + I)^T]^{-1} = A^T(B^T A^T + I)^{-1} = A(BA + I)^{-1}$$

我们只需证明 $(AB + I)^{-1}A = A(BA + I)^{-1}$, 等价于

$$A^{-1}(AB + I)^{-1} = (BA + I)^{-1}A^{-1}$$

$$\Leftrightarrow [(AB + I)A]^{-1} = [A(BA + I)]^{-1}$$

$$\Leftrightarrow (ABA + A)^{-1} = (ABA + A)^{-1}$$

而最后一式是显然成立的, 因此原等式

$[(AB + I)^{-1}A]^T = (AB + I)^{-1}A$ 成立, 即为对称矩阵, 而可逆是显然的 (可逆矩阵的乘积为可逆矩阵).

目录

矩阵的转置及分

块

九

1

2

+

十一

十二

行列式的定义与
性质

一、填空题

1

2

3

4

5

二、选择题

三

1

2

3

四

五

六

七

十二、设 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 7 \end{bmatrix}$, $B = (I + A)^{-1}(I - A)$. 证
明: $B + I$ 可逆, 并求其逆.

目录

矩阵的转置及分

块

九

1

2

+

十一

十二

行列式的定义与
性质

一、填空题

1

2

3

4

5

二、选择题

三

1

2

3

四

五

六

七

$$1. \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix} = \underline{a_{11}a_{22}a_{33}}.$$

◀ ◻ ▶ ◀ ▢ ▶ ◀ ≡ ▶ ◀ ≡ ▶ ≡ ↺ 🔍 ↻

目录

矩阵的转置及分
块

九
1
2
+
十一
十二

行列式的定义与
性质

一、填空题

1

2

3

4

5

二、选择题

三

1

2

3

四

五

六

七

$$2. \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix} = \underline{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{n1} \cdots a_{2,n-1} a_{1n}}$$

目录

矩阵的转置及分
块

九

1

2

+

十一

十二

行列式的定义与
性质

一、填空题

1

2

3

4

5

二、选择题

三

1

2

3

四

五

六

七

$$3. \text{ 方程 } \begin{vmatrix} \lambda & 0 & 2 \\ 0 & \lambda - 1 & 0 \\ 2 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = 0 \text{ 的根为 } \underline{1, \pm 2}.$$

目录

矩阵的转置及分
块

九

1

2

+

十一

十二

行列式的定义与
性质

一、填空题

1

2

3

4

5

二、选择题

三

1

2

3

四

五

六

七

3. 方程 $\begin{vmatrix} \lambda & 0 & 2 \\ 0 & \lambda - 1 & 0 \\ 2 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = 0$ 的根为 $1, \pm 2$.

解: 按第一行展开行列式可得

$$\begin{aligned} \lambda \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 0 & \lambda - 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} &= \lambda^2(\lambda - 1) - 4(\lambda - 1) \\ &= (\lambda - 1)(\lambda^2 - 4) = 0 \end{aligned}$$

即可得到 $\lambda = 1, \pm 2$.

目录

矩阵的转置及分
块

九

1

2

+

十一

十二

行列式的定义与
性质

一、填空题

1

2

3

4

5

二、选择题

三

1

2

3

四

五

六

七

4. 设 $D_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 1$, 则

$$D_2 = \begin{vmatrix} 2a_{21} & 3a_{21} - 5a_{22} & a_{23} \\ 2a_{11} & 3a_{11} - 5a_{12} & a_{13} \\ 2a_{31} & 3a_{31} - 5a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \underline{10}.$$

目录

矩阵的转置及分
块

九

1

2

十

十一

十二

行列式的定义与
性质

一、填空题

1

2

3

4

5

二、选择题

三

1

2

3

四

五

六

七

5. 写出两个矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, 使得 $|A| = |B|$, 但 $A \neq B$.

目录

矩阵的转置及分
块

九

1

2

+

十一

十二

行列式的定义与
性质

一、填空题

1

2

3

4

5

二、选择题

三

1

2

3

四

五

六

七

若 3 阶矩阵 A 的行列式 $|A| = 0$, 则 (D).

A. A 有一行为 0 B. A 有两行成比例

C. $A = O$ D. A 有一行是其余行的线性组合

目录

矩阵的转置及分
块

九

1

2

+

十一

十二

行列式的定义与
性质

一、填空题

1

2

3

4

5

二、选择题

三

1

2

3

四

五

六

七

若 3 阶矩阵 A 的行列式 $|A| = 0$, 则 (D).

A. A 有一行为 0 B. A 有两行成比例

C. $A = O$ D. A 有一行是其余行的线性组合

解: 举反例即可, 如

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 0 (\text{第三列为 } 0)$$

但不满足 (A)(B)(C) 说法, 因此选择 (D) 项.

目录

矩阵的转置及分
块

九

1

2

+

十一

十二

行列式的定义与
性质

一、填空题

1

2

3

4

5

二、选择题

三

1

2

3

四

五

六

七

三、利用行列式的定义计算

$$1. \begin{vmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 5 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

目录

矩阵的转置及分
块

九

1

2

+

十一

十二

行列式的定义与
性质

一、填空题

1

2

3

4

5

二、选择题

三

1

2

3

四

五

六

七

三、利用行列式的定义计算

$$1. \begin{vmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 5 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

解: 三阶和二阶行列式的计算最经常使用, 因此需要掌握计算方法.
二阶行列式为主对角线乘积减去反对角线乘积, 三阶行列式为“三顺减三逆”.

$$\begin{aligned} \text{原式} &= 5 \times 3 \times 1 + 2 \times 5 \times 4 + 0 \times 2 \times 3 \\ &\quad - 0 \times 3 \times 4 - 5 \times 3 \times 5 - 1 \times 2 \times 2 \\ &= -24 \end{aligned}$$

目录

矩阵的转置及分
块

九

1

2

+

十一

十二

行列式的定义与
性质

一、填空题

1

2

3

4

5

二、选择题

三

1

2

3

四

五

六

七

三、利用行列式的定义计算

$$2. \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$$

目录

矩阵的转置及分
块

九

1

2

+

十一

十二

行列式的定义与
性质

一、填空题

1

2

3

4

5

二、选择题

三

1

2

3

四

五

六

七

三、利用行列式的定义计算

$$2. \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$$

解: 和上题同理

$$\text{原式} = bc^2 + ab^2 + ac^2 - ba^2 - cb^2 - ac^2$$

目录

矩阵的转置及分

块

九

1

2

+

十一

十二

行列式的定义与
性质

一、填空题

1

2

3

4

5

二、选择题

三

1

2

3

四

五

六

七

三、利用行列式的定义计算

$$3. \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & b \\ b & a & 0 & 0 \\ 0 & b & a & 0 \\ 0 & 0 & b & a \end{vmatrix}$$

目录

矩阵的转置及分
块

九

1

2

+

十一

十二

行列式的定义与
性质

一、填空题

1

2

3

4

5

二、选择题

三

1

2

3

四

五

六

七

三、利用行列式的定义计算

$$3. \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & b \\ b & a & 0 & 0 \\ 0 & b & a & 0 \\ 0 & 0 & b & a \end{vmatrix}$$

解: 按第一行展开

$$\begin{aligned} \text{原式} &= a \begin{vmatrix} b & a & 0 \\ 0 & b & a \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} b & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{vmatrix} \\ &= a^4 - b^4 \end{aligned}$$

的行列式按照定义展开到一

◀ ◻ ▶ ◀ ◻ ▶ ◀ ≡ ▶ ◀ ≡ ▶ ≡ ↺ 🔍 ↻

目录

矩阵的转置及分
块

九

1

2

+

十一

十二

行列式的定义与
性质

一、填空题

1

2

3

4

5

二、选择题

三

1

2

3

四

五

六

七

五、若 n 阶方阵 A 中为零的元多于 $n^2 - n$ 个, 求 A 的行列式的值.

五、若 n 阶方阵 A 中为零的元多于 $n^2 - n$ 个, 求 A 的行列式的值.

解: 由题意可知 A 中非零元少于 $n^2 - (n^2 - n) = n$ 个, 这表示

$$\sum_{i_1, i_2, \dots, i_n} (-1)^{\tau(i_1, i_2, \dots, i_n)} a_{1i_1} a_{2i_2} \cdots a_{ni_n}$$

中任一项的 $a_{1i_1}, a_{2i_2}, \dots, a_{ni_n}$ 中 n 个数不可能都不为零, 因此每一项乘积均等于 0, 从而得到 $|A| = 0$.

目录

矩阵的转置及分

块

九

1

2

+

十一

十二

行列式的定义与
性质

一、填空题

1

2

3

4

5

二、选择题

三

1

2

3

四

五

六

七

六、设平面直线 $y = mx + b$ 通过平面上两点 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$, 验证直线方程可以表示为
$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

六、设平面直线 $y = mx + b$ 通过平面上两点 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$, 验证直

线方程可以表示为 $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$.

证明: 首先该等式展开后为

$$\begin{vmatrix} y_1 & 1 \\ y_2 & 1 \end{vmatrix} x - \begin{vmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \end{vmatrix} y + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = 0$$

为直线的一般式方程, 故只需验证该直线确实过 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ 两点. 带入 $x = x_1, y = y_1$ 到等式得到

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \text{ 成立, 因为第一行和第二行相等}$$

此即表示该直线过 (x_1, y_1) , 同理可知也必定过点 (x_2, y_2) , 因此得证.

目录

矩阵的转置及分
块

九

一

二

十

十一

十二

行列式的定义与
性质

一、填空题

1

2

3

4

5

二、选择题

三

1

2

3

四

五

六

七

七、写出行列式 $D = \begin{vmatrix} 5x & 1 & 2 & 3 \\ x & x & 1 & 2 \\ 1 & 2 & x & 3 \\ x & 1 & 2 & 2x \end{vmatrix}$ 的展开式中包含 x^3 和 x^4 的项.

