线性代数第七次作业

2024 年 4 月 21 日

本次作业

《线性代数习题册 (第三版)》

- $47 \sim 50$页: 线性无关与线性相关
- $51 \sim 54$页: 向量组的极大线性无关组和秩

目录

习题答案会上传至 github 中.

图: github 链接二维码

1. 设 $\alpha_1 = (2, -1, 0), \alpha_2 = (1, 4, -3), \alpha_3 = (1, -2, 1)$, 则 $2\alpha_1 - \alpha_2 + 3\alpha_3 = \underline{(6, -12, 6)}$

解: 直接计算即可, 向量即某一维度为 1 的矩阵, 即

$$2(2, -1, 0) - (1, 4, -3) + 3(1, -2, 1) = (6, -12, 6)$$

2. 设 $\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \alpha_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix}$,若 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 = \alpha_3$, 则 $x_1 = \underline{\frac{7}{2}}, x_2 = \underline{\frac{1}{2}}$.

解: 由分块矩阵的计算, 等式可以化为

$$[\alpha_1, \alpha_2] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \alpha_3$$

对增广矩阵 $[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$作初等行变换.

$$\left[\begin{array}{cc:c} 1 & 1 & 4 \\ -1 & 3 & -2 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc:c} 1 & 0 & 7/2 \\ 0 & 1 & 1/2 \end{array}\right]$$

因此得到

$$\begin{cases} x_1 = \frac{7}{2} \\ x_2 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

3. 设矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&2&-2\\2&1&2\\3&0&4\end{bmatrix}$,向量 $\alpha=\begin{bmatrix}k\\1\\1\end{bmatrix}$, 若 $A\alpha$与 α线性相关, 则 $k=\underline{-1}$.

解: 因为 $A\alpha$与 α线性相关, 即关于 x_1,x_2的线性方程组 $x_1A\alpha+x_2\alpha=0$存在非零解, 即

$$[A\alpha,\alpha]\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=0$$

有无穷解, 对 $[A\alpha,\alpha]$作初等行变换:

$$\begin{bmatrix}k&k\\2k+3&1\\3k+4&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-k\\0&1+k\\0&k(1+k)\end{bmatrix}$$

若要原方程有无穷解, 只需要 $1+k=0$,即 $k=-1$.

4. 当 $h = \underline{-3}$时, 向量组 $\alpha_1 = (2,1,-1)^T, \alpha_2 = (-1,-3,3)^T, \alpha_3 = (2,3,h)^T$线性相关.

解: 即要求 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 = 0$存在非零解即无穷解, 等价于方程

$$[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$$

存在无穷解, 作初等行变换:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 3 \\ -1 & 3 & h \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 0 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & h+3 \end{bmatrix}$$

可知 $h + 3 = 0 \Rightarrow h = -3$

1. 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s (s \geqslant 2)(I)$线性无关的充分必要条件是 (D).

A. (I) 中不含零向量

B. (I) 中任何 $s-1$ 个向量都线性无关

C. (I) 中有一个向量不能由其余向量线性表出

D. (I) 中任何向量都不能由其余向量线性表出

解:(D)项. 必要性:(反证), 若不然存在向量 α_i可以被其余向量线性表出, 即存在 $x_i(i=1,\cdots,i-1,i+1,\cdots,s)$使得

$$x_i = x_1\alpha_1 + \cdots + x_{i-1}\alpha_{i-1} + x_{i+1}\alpha_{i+1} + \cdots + x_s\alpha_s$$

$$\Rightarrow x_1\alpha_1 + \cdots + x_{i-1}\alpha_{i-1} - 1 \cdot x_i + x_{i+1}\alpha_{i+1} + \cdots + x_s\alpha_s = 0$$

此即表示存在系数不全为零的线性组合等于 0, 即 x_i线性相关, 矛盾, 因此必要性得证.

充分性:(反证), 若不然 α_i线性相关, 即存在不全为零的 x_i使得

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_s\alpha_s = 0$$

若其中 $x_i \neq 0$, 那么上式可以化为

$$\alpha_i = \frac{1}{x_i}(x_1\alpha_1 + \cdots + x_{i-1}\alpha_{i-1} + x_{i+1}\alpha_{i+1} + \cdots + x_s\alpha_s)$$

这表示 α_i可以被其他向量线性表出, 产生矛盾, 充分性得证.

1. 向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s(s\geqslant 2)(I)$线性无关的充分必要条件是 (D).

A. (I) 中不含零向量

B. (I) 中任何 $s-1$ 个向量都线性无关

C. (I) 中有一个向量不能由其余向量线性表出

D. (I) 中任何向量都不能由其余向量线性表出

解: 其余项可以举出反例证伪.

(A)项. 不含零向量不一定线性线性无关, 如 $\alpha_1=(1,1)^T,\alpha_2=(2,2)^T$; 反之正确, 线性无关一定没有零向量.

(B)项. 选项不一定能推出题干, 如 $\alpha_1=(1,2)^T,\alpha_2=(2,1),\alpha_3=(3,3)^T$满足任意两个向量线性无关, 但显然 $\alpha_3=\alpha_1+\alpha_2$故他们线性无关; 反之正确, 整体线性无关可以推出部分向量线性无关.

(C)项. 选项不一定能推出题干, 如 $\alpha_1=(1,1)^T,\alpha_2=(0,0)^T$中 α_1无法由 α_2线性表出, 但他们线性无关; 反之正确.

2. 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性无关, 则下列向量组线性相关的是 (B).

A. $\alpha_1+\alpha_2, \alpha_2+\alpha_3, \alpha_3+\alpha_1$
B. $\alpha_1-\alpha_2, \alpha_2-\alpha_3, \alpha_3-\alpha_1$
C. $\alpha_1+\alpha_2, \alpha_2-\alpha_3, \alpha_3-\alpha_1$
D. $\alpha_1, \alpha_1+\alpha_2, \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$

解: 由题意可知线性无关等价于 $[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=0$只有零解. 逐个判断选项.

(A)项. 若令

$$[\alpha_1+\alpha_2, \alpha_2+\alpha_3, \alpha_3+\alpha_1]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=0$$

由条件可知 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=0$(因为只有零解), 由系数矩阵可逆

即可得到 $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=0$即只有零解, 故线性无关.

2. 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性无关, 则下列向量组线性相关的是 (B).

A. $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1$
B. $\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_2 - \alpha_3, \alpha_3 - \alpha_1$
C. $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 - \alpha_3, \alpha_3 - \alpha_1$
D. $\alpha_1, \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$

解: (B)项. 由 $[\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_2 - \alpha_3, \alpha_3 - \alpha_1] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} =$

$[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$ 可得

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$, 此时系数矩阵不可逆, 可知 $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ 存在非零解, 即存在不全为零 0 的系数使得线性组合为 0, 故线性相关, 选择 (B)项.

2. 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性无关, 则下列向量组线性相关的是 (B).

A. $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1$

B. $\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_2 - \alpha_3, \alpha_3 - \alpha_1$

C. $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 - \alpha_3, \alpha_3 - \alpha_1$

D. $\alpha_1, \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$

解: (C)项. 同理因为

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0\text{只有零解}$$

因此线性无关.

(D)项. 因为

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0\text{只有零解}$$

因此线性无关.

3. 设 $\alpha_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ c_1 \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ c_2 \end{bmatrix}, \alpha_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ c_3 \end{bmatrix}, \alpha_4 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ c_4 \end{bmatrix}$, 其中 c_1, c_2, c_3, c_4为任意常数, 则下列向量组一定线性相关的是 (C).

A. $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$　B. $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$

C. $\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4$　D. $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$

解: 同时对四个列向量作初等行变换.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ c_1 & 0 & 0 & c_3 + c_4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

可以看到无论 c_i取何值, 第 1,3,4 列的主元个数都至多为 2, 始终小于未知数个数 3, 因此必定有无穷解, 即一定线性相关, 对应的 $\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4$一定线性相关, 选择 (C)项.

4. 若向量组 α,β,γ线性无关,α,β,δ线性相关, 则 (D).

A. β,γ,δ 线性无关　　B. β,γ,δ 线性相关

C. α 必可由 β,γ,δ 线性表示　　D. δ 必可由 α,β,γ 线性表示

解: 由 α,β,γ线性无关可知部分向量 α,β也线性无关; 另外我们由 α,β,δ线性相关可知存在不全为零的 x_1,x_2,x_3使得

$$x_1\alpha+x_2\beta+x_3\delta=0$$

其中若 $x_3=0$, 那么等式变为 $x_1\alpha+x_2\beta=0$且 x_1,x_2不全为 0, 这与 α,β线性无关矛盾, 因此 $x_3\neq 0$, 即

$$\delta=\frac{1}{x_3}(x_1\alpha+x_2\beta)$$

这表示 δ可以被 α,β线性表出, 我们不妨设 $\delta=k_1\alpha+k_2\beta$, 且 k_1,k_2可以取任意常数值, 因此我们可以取特殊值来排除错误选项.

(A)项. 若 $\delta=0\cdot\alpha+1\cdot\beta=\beta$, 那么 β,γ,β显然线性相关, 错误.
(B)项. 若 $\delta=1\cdot\alpha+0\cdot\beta=\alpha$, 那么 β,γ,α显然线性无关, 错误.
(C)项. 若 $\delta=0\cdot\alpha+1\cdot\beta=\beta$, 那么 α若可被 β,γ,β线性表出, 那么与 α,β,γ线性无关矛盾, 错误.
(D)项. 显然有 $\delta=k_1\alpha+k_2\beta+0\gamma$, 正确.

三、设向量组 $\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \alpha_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \alpha_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 7 \\ 0 \end{bmatrix}$

1. 判断 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$的线性相关性.

解: 即验证 $[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$是否有非零解, 作行变换即可.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \to \cdots \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

可以看到主元个数等于未知数个数, 因此只有零解, 故 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性无关.

三、设向量组 $\alpha_1=\begin{bmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{bmatrix},\alpha_2=\begin{bmatrix}1\\2\\0\\1\end{bmatrix},\alpha_3=\begin{bmatrix}1\\0\\3\\1\end{bmatrix},\alpha_4=\begin{bmatrix}2\\-3\\7\\0\end{bmatrix}$

2. 判断 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$的线性相关性.

解: 即验证 $[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4]\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=0$是否有非零解, 作行变换即可.

$$\begin{bmatrix}1&1&1&2\\-1&2&0&-3\\1&0&3&7\\-1&1&1&0\end{bmatrix}\to\cdots\to\begin{bmatrix}1&1&1&2\\0&-1&2&-3\\0&0&1&2\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

可以看到主元个数小于未知数个数, 因此有非零解, 故 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性相关.

三、设向量组 $\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \alpha_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \alpha_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 7 \\ 0 \end{bmatrix}$

3. 问 α_4能否由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性表出? 如果可以, 将 α_4写出 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$的线性组合.

解: 继续对 2 中的矩阵化简

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \cdots \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

即可得到通解

$$\begin{cases} x_1 = -k \\ x_2 = -k \\ x_3 = -2k \\ x_4 = k \end{cases} (k \in \mathbb{R}) \Rightarrow -k\alpha_1 - k\alpha_2 - 2k\alpha_3 + k\alpha_4 = 0$$

在 $k \neq 0$时即可得到 $\alpha_4 = \alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3$, 即为所求.

四、设向量组

$$\alpha_1=\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix},\alpha_2=\begin{bmatrix}1\\a+2\\-3a\end{bmatrix},\alpha_3=\begin{bmatrix}-1\\-b-2\\a+2b\end{bmatrix},\beta=\begin{bmatrix}1\\3\\-3\end{bmatrix}.$$

试讨论当 a,b为何值时,

1.β不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示

解: 即 $[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\beta$无解, 对增广矩阵作初等行变换:

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&-1&1\\2&a+2&-b-2&3\\0&-3a&a+2b&-3\end{array}\right]\to\cdots\to\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&-1&1\\0&0&a-b&0\\0&-3a&a+2b&-3\end{array}\right]$$

$$\to\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&-1&1\\0&0&a-b&0\\0&-3a&3a&-3\end{array}\right]$$

可以看到, 原方程无解, 只需要 $a=0$.

注: 如果直接从倒数第二个矩阵得到 $-3a=0,a+2b=0$, 会使答案范围变小.

四、设向量组

$\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ a+2 \\ -3a \end{bmatrix}, \alpha_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ -b-2 \\ a+2b \end{bmatrix}, \beta = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix}$. 试讨论当 a, b为何值时,

2.β能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性表示, 且表示式唯一, 并写出线性表示式.

解: 即 $[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \beta$有解且只有唯一解, 由 1 的结果

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & a-b & 0 \\ 0 & -3a & a+2b & -3 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -3a & 3a & -3 \\ 0 & 0 & a-b & 0 \end{array}\right]$$

此时主元个数需要等于 3, 即 $a \neq 0, a-b \neq 0$, 继续化简

$$\to \cdots \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1-\frac{1}{a} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{a} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 - \frac{1}{a} \\ x_2 = \frac{1}{a} \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

得到 $\left(1 - \frac{1}{a}\right) \alpha_1 + \frac{1}{a} \alpha_2 = \beta$即为所求.

四、设向量组

$$\alpha_1=\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix},\alpha_2=\begin{bmatrix}1\\a+2\\-3a\end{bmatrix},\alpha_3=\begin{bmatrix}-1\\-b-2\\a+2b\end{bmatrix},\beta=\begin{bmatrix}1\\3\\-3\end{bmatrix}.$$

试讨论当 a,b为何值时,

3.β能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示, 但表示式不唯一, 此时写出一个线性表示式.

解: 即 $[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\beta$有解且只有唯一解, 由 2 的结果

$$\left[\begin{array}{ccc:c}1&1&-1&1\\0&-3a&3a&-3\\0&0&a-b&0\end{array}\right]$$

此时只需要, 即 $a\neq 0, a-b=0$, 继续化简

$$\to\cdots\to\left[\begin{array}{ccc:c}1&0&0&1-\frac{1}{a}\\0&1&-1&\frac{1}{a}\\0&0&0&0\end{array}\right]\Rightarrow\begin{cases}x_1=1-\frac{1}{a}\\x_2=\frac{1}{a}+k\\x_3=k\end{cases}\quad(k\in\mathbb{R})$$

带入 $k=0$即得到一个线性表示 $\left(1-\frac{1}{a}\right)\alpha_1+\frac{1}{a}\alpha_2=\beta.$

五、设在向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$中,$\alpha_1 \neq 0$,并且每一个 α_i都不能由前面的 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{i-1}$线性表示, 证明 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$线性无关.

证明: 反证, 若不然 $\alpha_1, \cdots, \alpha_m$线性相关, 存在不全为零的 x_i使得

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_m\alpha_m = 0$$

设从右到左第一个非零的系数为 x_j, 即有

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_j\alpha_j = 0 (x_i \neq 0)$$

得到

$$\alpha_j = \frac{1}{x_j}(x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_{j-1}\alpha_{j-1})$$

此即表示 α_j可以由前面的 $\alpha_1, \cdots, \alpha_{j-1}$线性表出, 矛盾, 进而得证.

六、设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$线性无关.
1. 判断向量组 $\alpha_1+\alpha_2, \alpha_2+\alpha_3, \alpha_3+\alpha_4, \alpha_4+\alpha_1$的线性相关性, 并说明理由.

解: 由题意可知 $[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = 0$只有零解. 因为

$$[\alpha_1+\alpha_2, \alpha_2+\alpha_3, \alpha_3+\alpha_4, \alpha_4+\alpha_1]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4]\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = 0\text{有非零解, 因此线性相关.}$$

六、设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$线性无关.
2. 判断向量组 $\alpha_1+\alpha_4, \alpha_2+2\alpha_4, \alpha_3+3\alpha_4, \alpha_4$的线性相关性, 并说明理由.

解: 和 1 同理, 因为

$$[\alpha_1+\alpha_4, \alpha_2+2\alpha_4, \alpha_3+3\alpha_4, \alpha_4]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4]\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = 0 \text{只有零解, 因此线性无关.}$$

1. 设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性无关,$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\beta$线性相关, 则 $r\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\}\underline{=}r\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\beta\}$.

解: 首先显然有 $s=r\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\}\leqslant r\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\beta\}$, 又由 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s,\beta$线性相关, 那么

$$r\{\alpha_1,\cdots,\alpha_s,\beta\}<s+1$$

那么即可得到 $r\{\alpha_1,\cdots,\alpha_s,\beta\}=s$, 因此等号成立.

注: 此结论在后面经常使用, 以及以下延伸:
①若 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$线性无关, 那么 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n,\beta$线性无关等价于 β不能被 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$线性表出;
②若 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$线性无关, 那么 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n,\beta$线性相关等价于 β能被 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$线性表出, 此时可将 β记为 $k_1\alpha_1+\cdots+k_n\alpha_n$;

2. 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$的秩为 r, 向量 β不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$线性表出, 则 $r\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s, \beta\} = \underline{r+1}$.

注: 对于任意向量组, 以下三条性质知道两个即可推出另一个:

- ①秩为 r
- ②存在 r个向量线性无关
- ③存在 r个向量可以线性表出向量组所有向量

并且此时满足②③的 r个向量即为极大线性无关组.

如此题要证明秩为 $r+1$, 那么只需要找到 $r+1$个向量线性无关且可以表出其它向量即可 (当然②③所要求的 r个向量可以不一样).

2. 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$的秩为 r, 向量 β不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$线性表出, 则 $r\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s, \beta\} = \underline{r+1}$.

解: 因为 $r\{\alpha_1, \cdots, \alpha_s\} = r$, 那么找到其一个极大无关组 $\alpha_{i_1}, \cdots, \alpha_{i_r}$; 另一方面, 因为 β不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$线性表出, 那么自然也不能被 $\alpha_{i_1}, \cdots, \alpha_{i_r}$线性表出, 因此不难证明 $\alpha_{i_1}, \cdots, \alpha_{i_r}, \beta$线性无关 (证明是简单的), 即

$$r+1 = r\{\alpha_{i_1}, \cdots, \alpha_{i_r}, \beta\}$$

另一方面, 由极大线性无关组的性质可知 $\alpha_{i_1}, \cdots, \alpha_{i_r}$可以线性表出 $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$, 自然有 $\alpha_{i_1}, \cdots, \alpha_{i_r}, \beta$可以线性表出 $\alpha_1, \cdots, \alpha_s, \beta$
综上可知 $\alpha_{i_1}, \cdots, \alpha_{i_r}, \beta$满足②和③, 因此可知秩为 $r+1$.

注: 在已知 $r+1 = r\{\alpha_{i_1}, \cdots, \alpha_{i_r}, \beta\}$后也可以直接通过秩不等式

$$\begin{aligned} r+1 = r\{\alpha_{i_1}, \cdots, \alpha_{i_r}, \beta\} &\leqslant r\{\alpha_1, \cdots, \alpha_s, \beta\} \\ &\leqslant r\{\alpha_1, \cdots, \alpha_s\} + r\{\beta\} \\ &= r+1 \end{aligned}$$

得到结果.(其中 $r\{\beta\} = 0$由 $\beta \neq 0$保证)

3. 已知向量组 α_1,α_2的秩为 2, 向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$的秩为 2, 向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$的秩为 3, 则向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4-\alpha_3$的秩为 $\underline{3}$.

解: 由题意可知 α_1,α_2线性无关, 且 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性相关, 那么根据前面结论 (1. 注) 可知 α_3可被 α_1,α_2线性表出, 可写为 $\alpha_3=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2$, 因此对于方程组

$$[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4-\alpha_3]\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=0\Rightarrow[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3-k_1\alpha_1-k_2\alpha_2]\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=0$$

$$[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4]\begin{bmatrix}1&0&-k\\0&1&-k\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=0\Leftrightarrow\begin{bmatrix}1&0&-k\\0&1&-k\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=0$$

进而得到 x_1,x_2,x_3只有零解, 所以 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4-\alpha_3$线性无关, 秩为 3.

注: 如果将 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4-\alpha_3$作为矩阵的列向量, 那该矩阵只是 $[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4]$做了两次初等列变换, 秩当然不变, 即

$$r([\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4])=r([\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4-k_1\alpha_1])=r([\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4-k_1\alpha_1-k_2\alpha_2])$$

4. 设 4阶矩阵 A按列分块为 $A=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4]$, 其中 $\alpha_1=(-3,5,2,1)^T,\alpha_2=(4,-3,7,-1)^T$,若 A行等价于 $B=\begin{bmatrix}1&0&2&1\\0&1&1&3\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$, 则向量 $\alpha_3=\underline{\alpha_1+\alpha_2}$, $\alpha_4=\underline{\alpha_1-\alpha_2}$

解: 矩阵的列向量在初等行变换前后线性相关、线性无关和线性表出系数关系不变, 因此从 B可以看出要找到 α_3,α_4满足: 任意向量秩为 1(即非零), 任意两个向量秩为 2, 任意三个向量秩为 2, 四个向量秩为 2. 经验证反证 $\alpha_3=\alpha_1+\alpha_2$和 $\alpha_4=\alpha_1-\alpha_2$满足所有要求, 即为答案.

注: 因为初等行变换等价于左乘初等矩阵, 因此此题也可以求可逆矩阵 P使得 $PA=B\Rightarrow A=P^{-1}B$, 因此对 $[P,B]$作初等行变换为 $[I,P^{-1}B]$即可.

二、求下列向量组的秩与一个极大线性无关组.

1.$\alpha_1=(0,1,-1,2)^T,\alpha_2=(0,3,-3,6)^T,\alpha_3=(1,1,-2,1)^T,\alpha_4=(-1,0,1,2)^T$;

解: 对 $[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4]$作初等行变换,

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & -2 & 1 \\ 2 & 6 & 1 & 2 \end{bmatrix} \to \cdots \to \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

可以看到三个主元分别在第 1,3,4 列, 因此其中一组极大线性无关组为 $\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4$.

注: 除了观察主元, 观察余子式也可以找到线性无关的向量, 如上述后三列前三行的三阶余子式

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$$

因此他们的列向量 (3 维) 线性无关, 故他们的伸长组 (即原来的 4 维)$\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性无关, 为一个极大线性无关组

二、求下列向量组的秩与一个极大线性无关组.

2.$\alpha_1 = (1,0,3,6)^T, \alpha_2 = (-1,2,-2,-5)^T, \alpha_3 = (1,k,5,8)^T, \alpha_4 = (0,2,1,1)^T$;

解: 对 $[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4]$作初等行变换,

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & k & 2 \\ 3 & -2 & 5 & 1 \\ 6 & -5 & 8 & 1 \end{bmatrix} \to \cdots \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & k-4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

可以看到三个主元分别在第 1,2 列, 第三列需要进行讨论;
$k \neq 4$时秩为 3, 极大线性无关组为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$;
$k = 4$时秩为 2, 极大线性无关组为 α_1,α_2.

三、设 4维向量组 $\alpha_1=(1+k,1,1,1)^T,\alpha_2=(2,2+k,2,2)^T,\alpha_3=(3,3,3+k,3)^T,\alpha_4=(4,4,4,4+k)^T$. 问当 k为何值时, 向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性相关? 当 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性相关时, 求其一个极大线性无关组, 并用该极大线性无关组线性表出向量组中的其余向量.

解: 对 $[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4]$作初等行变换.

$$\begin{bmatrix}1+k & 2 & 3 & 4\\ 1 & 2+k & 3 & 4\\ 1 & 2 & 3+k & 4\\ 1 & 2 & 3 & 4+k\end{bmatrix}\to\cdots\to\begin{bmatrix}k & 0 & 0 & -k\\ 0 & k & 0 & -k\\ 0 & 0 & k & -k\\ 1 & 2 & 3 & 4+k\end{bmatrix}$$

当 $k=0$时, 显然线性相关, 此时极大线性无关组为 α_1, 表出情况为 $\alpha_2=2\alpha_1,\alpha_3=3\alpha_1,\alpha_4=4\alpha_4$;

当 $k\neq 0$时, 继续化简

$$\begin{bmatrix}k & 0 & 0 & -k\\ 0 & k & 0 & -k\\ 0 & 0 & k & -k\\ 1 & 2 & 3 & 4+k\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1 & -1\\ 1 & 2 & 3 & 4+k\end{bmatrix}\to\cdots\to\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 10+k\end{bmatrix}$$

可知 $k=-10$时线性相关, 极大线性无关组为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$, 表出关系为 $\alpha_4=-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3$.

四、已知秩 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=3$, 秩 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=4$, 秩 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_5)=4$. 求秩 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_5-\alpha_4)$

解: 由题意和前面的结论,α_4可被 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表出, 记为 $\alpha_4=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3$, 断言 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_5-\alpha_4$线性无关, 即秩为 4, 若

$$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3+x_4(\alpha_5-\alpha_4)=0$$
$$\Rightarrow x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3+x_4(\alpha_5-k_1\alpha_1-k_2\alpha_2-k_3\alpha_3)=0$$
$$\Rightarrow (x_1-k_1x_4)\alpha_1+(x_2-k_2x_4)\alpha_2+(x_3-k_3x_4)\alpha_3+x_4\alpha_5=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1-k_1x_4=0 \\ x_2-k_2x_4=0 \\ x_3-k_3x_4=0 \\ x_4=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -k_1 \\ 0 & 1 & 0 & -k_2 \\ 0 & 0 & 1 & -k_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = 0$$

最后得到 x_1,x_2,x_3,x_4只有零解, 因此 $r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_5-\alpha_4)=4$.

注: 此题同选择题第三题, 两种方法实际上是一样的.

五、向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$线性无关, 而向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r, \beta, \gamma$线性相关, 证明: 或者 β与 γ中至少有一个可由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$线性表出, 或者向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r, \beta$与 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r, \gamma$等价.

证明: 假设 β, γ都不可以被 $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$线性表出, 那么只需证明此时后者成立.
采用反证法, 若不然两个向量组不等价, 不妨设 β不能被 $\alpha_1, \cdots, \alpha_r, \gamma$线性表出, 那么也不能被 $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$线性表出, 即可得到 $\alpha_1, \cdots, \alpha_r, \beta$线性无关, 结合 $\alpha_1, \cdots, \alpha_r, \beta, \gamma$线性相关, 这表示 γ可被 $\alpha_1, \cdots, \alpha_r, \beta$线性表出, 即

$$\gamma = x_1\alpha_1 + \cdots + x_r\alpha_r + y\beta$$

若 $y = 0$, 那么表示 γ可被 $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$线性表出, 与假设矛盾;
若 $y \neq 0$, 那么变形得到

$$\beta = \frac{1}{y}(\gamma - x_1\alpha_1 + \cdots + x_r\alpha_r)$$

这表示 β可被 $\alpha_1, \cdots, \alpha_r, \gamma$线性表出, 也与假设矛盾.
综上得证.

六、证明: 向量组 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t$能由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$线性表出的充分必要条件是

$$r(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s) = r(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s, \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t).$$

证明: 必要性. 首先显然有

$$r(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s) \leqslant r(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s, \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t)$$

另一方面, 由题意 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t$能由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$线性表出, 这表示

$$r(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s) \geqslant r(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s, \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t)$$

因此等号成立.

充分性. 因为 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s, \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t$可以表出 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$, 且他们秩相等, 因此他们等价, 故 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s, \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t$也可被 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$线性表出, 即 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t$可被 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$线性表出, 得证.

七、设向量组 $\alpha_1=(1,0,1)^T,\alpha_2=(0,1,1)^T,\alpha_3=(1,3,5)^T$不能由向量组 $\beta_1=(1,1,1)^T,\beta_2=(1,2,3)^T,\beta_3=(3,4,k)^T$线性表出.
1. 求 k的值;

解: 由题意即

$$[\beta_1,\beta_2,\beta_3]\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{bmatrix}=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]$$

无解, 故对增广矩阵作初等行变换.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & k & 1 & 1 & 5 \end{array}\right] \to \cdots \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & k-5 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

要使上述方程无解, 只需要 $k-5=0$, 得到 $k=5$.

七、设向量组 $\alpha_1=(1,0,1)^T,\alpha_2=(0,1,1)^T,\alpha_3=(1,3,5)^T$不能由向量组 $\beta_1=(1,1,1)^T,\beta_2=(1,2,3)^T,\beta_3=(3,4,k)^T$线性表出.
2. 将 β_1,β_2,β_3用 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表出.

解: 由题意即解下面的矩阵方程

$$[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{bmatrix}=[\beta_1,\beta_2,\beta_3]$$

无解, 故对增广矩阵作初等行变换.

$$\left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 5 & 1 & 3 & k \end{array}\right]\to\cdots\to\left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 10-k \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 2 & 25-3k \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & k-7 \end{array}\right]$$

即得到

$$\begin{cases} \beta_1=2\alpha_1+4\alpha_2-\alpha_3 \\ \beta_2=\alpha_1+2\alpha_2 \\ \beta_3=(10-k)\alpha_1+(25-3k)\alpha_2+(k-7)\alpha_3 \end{cases}$$