线性代数第九次作业

2024 年 5 月 19 日

目录

本次作业

半期考试

《线性代数习题册 (第三版)》

- $63 \sim 70$页: 线性方程组
- $71 \sim 76$页: 综合练习 (二)

习题课件二维码

图: github 链接二维码

考试成绩及作业完成情况记录

图: 班级 38

图: 班级 13

一、填空题

1. 设 $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 5 & 4\\ 1 & 3 & 4 & 9\\ 1 & -1 & 3 & 1\\ 1 & -2 & 2 & 4\end{bmatrix}$, M_{ij}为矩阵 A的第 i行第 j列元素的余子式,$i,j=1,2,3,4$, 则 $8M_{13}-27M_{23}-M_{33}+8M_{43}=\underline{240}$.

注: 考察行列式按行 (列) 展开的逆运算, 同 31 页第 4 题和 43 页第三题.

一、填空题

1. 设 $A=\begin{bmatrix}1&2&5&4\\1&3&4&9\\1&-1&3&1\\1&-2&2&4\end{bmatrix}$, M_{ij}为矩阵 A的第 i行第 j列元素的余子式,$i,j=1,2,3,4$, 则 $8M_{13}-27M_{23}-M_{33}+8M_{43}=\underline{240}$.

注: 考察行列式按行 (列) 展开的逆运算, 同 31 页第 4 题和 43 页第三题.

解: 若设 A_{ij}为矩阵 A的第 i行第 j列元素的代数余子式, 那么可得

$$A_{13}=M_{13},\ A_{23}=-M_{23},\ A_{33}=M_{33},\ A_{43}=-M_{43}$$

因此

$$8M_{13}-27M_{23}-M_{33}+8M_{43}=8A_{13}+27A_{23}-A_{33}-8A_{43}$$

$$=\begin{vmatrix}1&2&8&4\\1&3&27&9\\1&-1&-1&1\\1&-2&-8&4\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1&2&4&8\\1&3&9&27\\1&-1&1&-1\\1&-2&4&-8\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{范德蒙行列式}}-[-2-(-1)](-2-3)(-2-2)(-1-3)(-1-2)(3-2)$$

$$=240$$

一、填空题

2. 已知非零的 n维向量 $\alpha=(c,0,\cdots,0,c)^T$, I为 n阶单位矩阵. 矩阵 $A=I-\alpha\alpha^T$的逆矩阵为 $B=I+c^{-1}\alpha\alpha^T$,则 $c=$ $\underline{\frac{1}{2}\text{或}-1}$.

注:$I-k\alpha\alpha^T$型的计算涉及矩阵乘法的结合律, 和系数前提的技巧, 同 131 页第 2 题.

一、填空题

2. 已知非零的 n维向量 $\alpha=(c,0,\cdots,0,c)^T$, I为 n阶单位矩阵. 矩阵 $A=I-\alpha\alpha^T$的逆矩阵为 $B=I+c^{-1}\alpha\alpha^T$,则 $c=$ $\underline{\frac{1}{2}\text{或}-1}$.

注:$I-k\alpha\alpha^T$型的计算涉及矩阵乘法的结合律, 和系数前提的技巧, 同 131 页第 2 题.

解: 由题意可知 $AB=I$, 即

$$\begin{aligned}I=AB&=(I-\alpha\alpha^T)(I-c^{-1}\alpha\alpha^T)\\&=I-\left(\frac{1}{c}+1\right)\alpha\alpha^T+\frac{1}{c}\alpha(\alpha^T\alpha)\alpha^T\\&=I+\left(\frac{\alpha^T\alpha}{c}-\frac{1}{c}-1\right)\alpha\alpha^T\\&=I+\frac{2c^2-c-1}{c}\alpha\alpha^T\end{aligned}$$

由于 $\alpha\alpha^T\neq 0, c>0$, 得到 $2c^2-c-1=0$解得

$$c=\frac{1}{2},\ -1$$

即为所求.

一、填空题

3. 已知 $Q=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}$, 三阶方阵 A满足

$$(Q^T)^*AQ^2=\begin{bmatrix}a-2c&0&-c\\0&b&0\\2c&0&c\end{bmatrix},$$ 则 $A=\underline{\begin{bmatrix}a&0&0\\0&b&0\\0&0&c\end{bmatrix}}$.

注: 考察初等矩阵的计算和意义, 即左 (右) 乘初等矩阵相当于作初等行 (列) 变换.

一、填空题

3. 已知 $Q=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}$, 三阶方阵 A满足 $(Q^T)^*AQ^2=\begin{bmatrix}a-2c&0&-c\\0&b&0\\2c&0&c\end{bmatrix}$, 则 $A=\underline{\begin{bmatrix}a&0&0\\0&b&0\\0&0&c\end{bmatrix}}$.

注: 考察初等矩阵的计算和意义, 即左 (右) 乘初等矩阵相当于作初等行 (列) 变换.

解: 由题意可知 $Q=E(3,1(1))$, 直接计算得到 $Q^2=E(3,1(2)), Q^T=E(1,3(1))$, 进而得到

$$(Q^T)^*=|Q^T|(Q^T)^{-1}=1\times E(1,3(-1))=E(1,3(-1))=\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

所以 $[(Q^T)^*]^{-1}=E(1,3(1)),(Q^2)^{-1}=E(3,1(-2))$, 故

$$A=[(Q^T)^*]^{-1}\begin{bmatrix}a-2c&0&-c\\0&b&0\\2c&0&c\end{bmatrix}(Q^2)^{-1}=\begin{bmatrix}a&0&0\\0&b&0\\0&0&c\end{bmatrix}$$

一、填空题

4. 已知 A为 $n(n \geqslant 2)$阶方阵 A满足 $|A| = k \neq 0$, 则 $|(|A^*|A^T)^{-1}|$的值 $= \underline{k^{n-1-n^2}}$.

注: 考察行列式、转置、逆和伴随之间的运算, 同 119 页第 3 题.

一、填空题

4. 已知 A为 $n(n \geqslant 2)$阶方阵 A满足 $|A| = k \neq 0$, 则 $|(|A^*|A^T)^{-1}|$的值 $=$ $\underline{k^{n-1-n^2}}$.

注: 考察行列式、转置、逆和伴随之间的运算, 同 119 页第 3 题.
解: 计算得到

$$
\begin{aligned}
|(|A^*|A^T)^{-1}| &= \frac{1}{||A^*|A^T|} = \frac{1}{|A^*|^n|A^T|} \\
&= \frac{1}{(|A|^{n-1})^n|A|} = \frac{1}{k^{n^2-n+1}} \\
&= k^{n-1-n^2}
\end{aligned}
$$

其中分别使用了性质
$|B^{-1}| = |B|^{-1}, |kB| = k^n|B|, |B^*| = |B|^{n-1}, |B^T| = |B|$,$B$为 n阶可逆方阵.

一、填空题

5. 设方阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$, 则 $|A^{2024}|B^{2024} = \underline{2^{2024}\begin{bmatrix} \cos(2024\theta) & -\sin(2024\theta) \\ \sin(2024\theta) & \cos(2024\theta) \end{bmatrix}}$.

注: 考察方阵幂的计算 (13 页第 3 题) 和行列式的性质 ($|A^n| = |A|^n$).

一、填空题

5. 设方阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$, 则 $|A^{2024}|B^{2024} = \underline{2^{2024}\begin{bmatrix} \cos(2024\theta) & -\sin(2024\theta) \\ \sin(2024\theta) & \cos(2024\theta) \end{bmatrix}}$.

注: 考察方阵幂的计算 (13 页第 3 题) 和行列式的性质 ($|A^n| = |A|^n$).
解: 首先直接计算得到 $|A| = 2$, 因此 $|A^{2024}| = |A|^{2024} = 2^{2024}$; 另一方面由归纳法 (先猜测后证明) 不难证明 (我们省略证明)

$$B^n = \begin{bmatrix} \cos(n\theta) & -\sin(n\theta) \\ \sin(n\theta) & \cos(n\theta) \end{bmatrix}$$

因此可得

$$|A^{2024}|B^{2024} = 2^{2024}\begin{bmatrix} \cos(2024\theta) & -\sin(2024\theta) \\ \sin(2024\theta) & \cos(2024\theta) \end{bmatrix}$$

一、填空题

6. 已知向量组 $\alpha_1=(-1,1,0),\alpha_2=(a,-1,b),\alpha_3=(-1,2,-1)$生成的子空间维数为 2, 则 a,b满足的关系为 $\underline{a+b=1}$.

注: 子空间维数即基的个数, 也即生成所用的向量组的秩.

一、填空题

6. 已知向量组 $\alpha_1=(-1,1,0),\alpha_2=(a,-1,b),\alpha_3=(-1,2,-1)$生成的子空间维数为 2, 则 a,b满足的关系为 $\underline{a+b=1}$.

注: 子空间维数即基的个数, 也即生成所用的向量组的秩.

解: 由题意即 $r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=2$, 因此将其组成矩阵后矩阵的秩也为 2

$$A:=[\alpha_1^T,\alpha_2^T,\alpha_3^T]=\begin{bmatrix}-1 & a & -1\\ 1 & -1 & 2\\ 0 & b & -1\end{bmatrix}$$

注意到 A的第 1,3 行第 1,3 列的二阶子式 $\begin{vmatrix}-1 & -1\\ 0 & -1\end{vmatrix}=1\neq 0$, 因此 $r(A)\geqslant 2$, 因此满足题意只需 A不满秩, 即 $|A|=0$, 计算可得 $a+b-1=0$.

二、设两个三阶矩阵 A, B按列分块表示为 $A=[2\alpha_1, 3\alpha_2, \beta], B=[3\alpha_2, \alpha_1, 2\gamma]$, 且两个矩阵的行列式分别为 $|A|=2a, |B|=b$.

1. 求行列式 $|[\alpha_1, \alpha_2, \beta]|$和 $|[\alpha_1, \alpha_2, \gamma]|$的值;

注: 考察行列式计算的性质.

二、设两个三阶矩阵 A, B按列分块表示为 $A=[2\alpha_1, 3\alpha_2, \beta], B=[3\alpha_2, \alpha_1, 2\gamma]$, 且两个矩阵的行列式分别为 $|A|=2a, |B|=b$.
1. 求行列式 $|[\alpha_1, \alpha_2, \beta]|$和 $|[\alpha_1, \alpha_2, \gamma]|$的值;

注: 考察行列式计算的性质.
解: 直接计算可得

$$|A|=|[2\alpha_1, 3\alpha_2, \beta]|=6|[\alpha_1, \alpha_2, \beta]|=2a$$
$$|B|=|[3\alpha_2, \alpha_1, 2\gamma]|=-6|[\alpha_1, \alpha_2, 2\gamma]|=b$$

所以可得

$$|[\alpha_1, \alpha_2, \beta]|=\frac{a}{3}, \quad |[\alpha_1, \alpha_2, \gamma]|=-\frac{b}{6}$$

二、设两个三阶矩阵 A, B按列分块表示为 $A=[2\alpha_1, 3\alpha_2, \beta], B=[3\alpha_2, \alpha_1, 2\gamma]$, 且两个矩阵的行列式分别为 $|A|=2a, |B|=b$.

2. 求行列式 $|2A-B|$的值.

二、设两个三阶矩阵 A,B按列分块表示为 $A=[2\alpha_1,3\alpha_2,\beta],B=[3\alpha_2,\alpha_1,2\gamma]$, 且两个矩阵的行列式分别为 $|A|=2a,|B|=b$. 2. 求行列式 $|2A-B|$的值.

解:

$$
\begin{aligned}
|2A-B| &= |2[2\alpha_1,3\alpha_2,\beta]-[3\alpha_2,\alpha_1,2\gamma]| \\
&= |[4\alpha_1-3\alpha_2,6\alpha_2-\alpha_1,2\beta-2\gamma]| \\
&= |[4\alpha_1-3\alpha_2,6\alpha_2-\alpha_1,2\beta]|-|[4\alpha_1-3\alpha_2,6\alpha_2-\alpha_1,2\gamma]| \\
&= \left|[\alpha_1,\alpha_2,\beta]\begin{bmatrix}4&-1&0\\-3&6&0\\0&0&2\end{bmatrix}\right|-\left|[\alpha_1,\alpha_2,\gamma]\begin{bmatrix}4&-1&0\\-3&6&0\\0&0&2\end{bmatrix}\right| \\
&= |[\alpha_1,\alpha_2,\beta]|\left|\begin{bmatrix}4&-1&0\\-3&6&0\\0&0&2\end{bmatrix}\right|-|[\alpha_1,\alpha_2,\gamma]|\left|\begin{bmatrix}4&-1&0\\-3&6&0\\0&0&2\end{bmatrix}\right| \\
&= \frac{a}{3}\times 42-\left(-\frac{b}{6}\right)\times 42 \\
&= 14a+7b
\end{aligned}
$$

三、已知向量组 $\alpha_1=(-1,1,0,0)^T,\alpha_2=(-1,2,-1,1)^T,\alpha_3=(0,a,b,-1)^T,\alpha_4=(1,-3,2,3)^T$.

1. 求向量组的秩和一个极大线性无关组;

三、已知向量组 $\alpha_1=(-1,1,0,0)^T,\alpha_2=(-1,2,-1,1)^T,\alpha_3=(0,a,b,-1)^T,\alpha_4=(1,-3,2,3)^T$.
1. 求向量组的秩和一个极大线性无关组;

解: 将列向量组成一个矩阵作初等行变换

$$\begin{bmatrix}-1&-1&0&-3\\1&2&a&3\\0&-1&b&2\\0&1&-1&3\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}-1&-1&0&1\\0&1&-1&3\\0&0&a+1&-5\\0&0&a+b&0\end{bmatrix}$$

①若 $a+b=0$, 那么向量组的秩为 3, 一个极大线性无关组为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$;
②若 $a+b\neq 0$, 向量组的秩为 4, 一个极大线性无关组为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$.

三、已知向量组 $\alpha_1=(-1,1,0,0)^T,\alpha_2=(-1,2,-1,1)^T,\alpha_3=(0,a,b,-1)^T,\alpha_4=(1,-3,2,3)^T$.

2. α_3能否由其余向量线性表出? 若能, 请给出线性表出的表达式.

三、已知向量组 $\alpha_1=(-1,1,0,0)^T,\alpha_2=(-1,2,-1,1)^T,\alpha_3=(0,a,b,-1)^T,\alpha_4=(1,-3,2,3)^T$.
2. α_3能否由其余向量线性表出? 若能, 请给出线性表出的表达式.

解: 由 1 可知, 当 $a+b\neq 0$时 α_3不能由其余向量线性表出;$a+b=0$时 α_3可以由其余向量线性表出, 此时由

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & a+1 & -5 \\ 0 & 0 & a+b & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1-4a}{5} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3a-2}{5} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{a+1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

即可得到表出表达式

$$\alpha_3=\frac{1-4a}{5}\alpha_1+\frac{3a-2}{5}\alpha_2-\frac{a+1}{5}\alpha_4$$

四、已知 n阶方阵 $H=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$ 和

$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$

1. 将矩阵 A表示成 H的多项式;

注: 考察 H(即前面介绍的 J) 的 n次幂的计算.

四、已知 n阶方阵 $H=\begin{bmatrix}0&1&0&\cdots&0\\0&0&1&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&0&\cdots&1\\0&0&0&\cdots&0\end{bmatrix}$和

$A=\begin{bmatrix}1&1&\cdots&1&1\\0&1&\cdots&1&1\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&\cdots&1&1\\0&0&\cdots&0&1\end{bmatrix}$

1. 将矩阵 A表示成 H的多项式;

注: 考察 H(即前面介绍的 J) 的 n次幂的计算.

解: 计算不难得到 $H^j(j=0,1,\cdots,n-1)$只有 $(i,i+j)$元为 1, 其余均为 0, 且 $j>n-1$时 $H^j=0$, 因此立即得到

$$A=I+H+H^2+\cdots+H^{n-1}$$

四、已知 n阶方阵 H和 A.
2. 求矩阵方程 $AX = I + 2H + 3H^2 + \cdots + nH^{n-1}$中的 X.

四、已知 n阶方阵 H和 A.
2. 求矩阵方程 $AX = I + 2H + 3H^2 + \cdots + nH^{n-1}$中的 X.

解一: 首先可知 A可逆 (因为是对角元非零的上三角矩阵), 故 X有且仅有唯一解, 不难得到方程右端矩阵 B为

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \\ 0 & 1 & \cdots & n-2 & n-1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

可知 B可由 A依次作如下初等列变换得到

$$A \xrightarrow{\text{第一列加到第二列}} A_1 \xrightarrow{\text{第二列加到第三列}} A_2 \rightarrow \cdots \xrightarrow{\text{第 } n-1 \text{ 列加到第 } n \text{ 列}} B$$

因此即

$$AE(1,1(2))E(2,1(3))\cdots E(n-1,1(n)) = B = I+2H+3H^2+\cdots+nH^{n-1}$$

得到 X的唯一解为

$$X = E(1,1(2))E(2,1(3))\cdots E(n-1,1(n)) = A$$

四、已知 n阶方阵 H和 A.

2. 求矩阵方程 $AX = I + 2H + 3H^2 + \cdots + nH^{n-1}$中的 X.

四、已知 n阶方阵 H和 A.
2. 求矩阵方程 $AX = I + 2H + 3H^2 + \cdots + nH^{n-1}$中的 X.

解二: 由 $H^n = 0$, 因此 $I - H^n = I$, 进而

$$(I - H)(I + H + H^2 + \cdots + H^{n-1}) = (I - H)A = I$$

因此将原方程等号两边同时左乘 $I - H$, 得到

$$X = (I - H)(I + 2H + 3H^2 + \cdots + nH^{n-1}) = A$$

五、已知非齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=1 \\ 3x_1+2x_2+x_3+ax_4=1 \\ x_2+2x_3+3x_4=2 \\ 5x_1+4x_2+3x_3+bx_4=4 \end{cases}$

1. 当 a,b取何值时, 方程组无解、有唯一解、无穷多解;

五、已知非齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=1 \\ 3x_1+2x_2+x_3+ax_4=1 \\ x_2+2x_3+3x_4=2 \\ 5x_1+4x_2+3x_3+bx_4=4 \end{cases}$

1. 当 a, b取何值时, 方程组无解、有唯一解、无穷多解;

解: 对增广矩阵作初等行变换

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 5 & 4 & 3 & b & 4 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & b-2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a & 0 \end{array}\right]$$

①当 $b=2$或 $b\neq 2, a\neq 0$时, 方程组无解;
②当 $b\neq 2, a=0$时, 方程组有无穷多解;
③不存在 a, b使得方程组有唯一解

五、已知非齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=1 \\ 3x_1+2x_2+x_3+ax_4=1 \\ x_2+2x_3+3x_4=2 \\ 5x_1+4x_2+3x_3+bx_4=4 \end{cases}$

2. 在方程组有解时求出其全部解.

五、已知非齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=1 \\ 3x_1+2x_2+x_3+ax_4=1 \\ x_2+2x_3+3x_4=2 \\ 5x_1+4x_2+3x_3+bx_4=4 \end{cases}$

2. 在方程组有解时求出其全部解.

解: 由 1 可知 $b\neq 2, a=0$时, 继续作初等行变换

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & b-2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & \frac{4-b}{b-2} \\ 0 & 1 & 2 & 0 & \frac{2b-7}{b-2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{b-2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

可得其全部解为

$$\begin{bmatrix} \frac{4-b}{b-2} \\ \frac{2b-7}{b-2} \\ 0 \\ \frac{1}{b-2} \end{bmatrix} + k \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

其中 k为任意常数.

六、设向量组 $\alpha_1 = (1,1,4)^T, \alpha_2 = (1,0,4)^T, \alpha_3 = (1,2,a)^T$是三维空间 R^3的一组基.$\beta = (1,1,1)^T$在这组基下的坐标为 $(b,c,1)^T$.
1. 求 a,b,c的值;

六、设向量组 $\alpha_1=(1,1,4)^T,\alpha_2=(1,0,4)^T,\alpha_3=(1,2,a)^T$是三维空间 R^3的一组基.$\beta=(1,1,1)^T$在这组基下的坐标为 $(b,c,1)^T$.
1. 求 a,b,c的值;

解: 由题意可知

$$[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]\begin{bmatrix} b \\ c \\ 1 \end{bmatrix}=\beta \Rightarrow \begin{cases} b+c+1=1 \\ b+2=1 \\ 4b+4c+a=1 \end{cases}$$

即可得到 a,b,c的线性方程组, 对增广矩阵作初等行变换

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & 4 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

得到

$$\begin{cases} a=1 \\ b=-1 \\ c=1 \end{cases}$$

六、设向量组 $\alpha_1=(1,1,4)^T,\alpha_2=(1,0,4)^T,\alpha_3=(1,2,a)^T$是三维空间 R^3的一组基.$\beta=(1,1,1)^T$在这组基下的坐标为 $(b,c,1)^T$.

2. 证明 α_2,α_3,β是 R^3的一组基, 并求由基 α_2,α_3,β到基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$的过渡矩阵 M.

六、设向量组 $\alpha_1=(1,1,4)^T,\alpha_2=(1,0,4)^T,\alpha_3=(1,2,a)^T$是三维空间 R^3的一组基.$\beta=(1,1,1)^T$在这组基下的坐标为 $(b,c,1)^T$.
2. 证明 α_2,α_3,β是 R^3的一组基, 并求由基 α_2,α_3,β到基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$的过渡矩阵 M.

解: 因为

$$|[\alpha_2,\alpha_3,\beta]|=\begin{vmatrix}1&1&1\\0&2&1\\4&1&1\end{vmatrix}=-3\neq 0$$

因此矩阵的列向量组即 α_2,α_3,β线性无关, 因此为 R^3的一组基. 另一方面, 得到过渡矩阵只需求解方程

$$[\alpha_2,\alpha_3,\beta]M=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]$$

由增广矩阵初等行变换可得

$$\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&1&1&1&1&1\\0&2&1&1&0&2\\4&1&1&4&4&1\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&1&1&0\\0&1&0&1&0&1\\0&0&1&-1&0&0\end{array}\right]$$

得到

$$M=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&0&1\\-1&0&0\end{bmatrix}$$

七、证明题

1. 设 $n(n>4)$维向量 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性无关,$\beta_i=\alpha_i+k\alpha_4, i=1,2,3$. 证明对任意的数 k,β_1,β_2,β_3都线性无关;

七、证明题

1. 设 $n(n>4)$维向量 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性无关,$\beta_i=\alpha_i+k\alpha_4, i=1,2,3$. 证明对任意的数 k,β_1,β_2,β_3都线性无关;

证明一: 对于方程 $x_1\beta_1+x_2\beta_2+x_3\beta_3=0$, 整理后可得

$$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3+k(x_1+x_2+x_3)\alpha_4=0$$

再由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性无关得到

$$\begin{cases} x_1=0 \\ x_2=0 \\ x_3=0 \\ k(x_1+x_2+x_3)=0 \end{cases}$$

即得到 $x_1=x_2=x_3=0$, 因此任意 k都有 β_1,β_2,β_3线性无关.

七、证明题

1. 设 $n(n>4)$维向量 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性无关,$\beta_i=\alpha_i+k\alpha_4, i=1,2,3$. 证明对任意的数 k,β_1,β_2,β_3都线性无关;

七、证明题

1. 设 $n(n>4)$维向量 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性无关,$\beta_i=\alpha_i+k\alpha_4, i=1,2,3$. 证明对任意的数 k,β_1,β_2,β_3都线性无关;

证明二: 由

$$\begin{aligned}
r([\beta_1,\beta_2,\beta_3]) &= r([\alpha_1+k\alpha_4,\alpha_2+k\alpha_4,\alpha_3+k\alpha_4]) \\
&= r([\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4]\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\\k&k&k\end{bmatrix}) \\
&= r(\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\\k&k&k\end{bmatrix}) \\
&= 3
\end{aligned}$$

因此得到 β_1,β_2,β_3线性无关, 其中第三个等号由左乘列满秩矩阵秩不变得到, 因此得证.

七、证明题

2. 设 $n(n>4)$维向量 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$满足 $\alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_3+4\alpha_4=0$且 $\beta_i=\alpha_i+i\lambda_i\xi, i=1,2,3,4$.问当不全为零的数 $\lambda_i(i=1,2,3,4)$满足什么条件时, 对任意的 n维向量 ξ, 向量组 $\beta_1.\beta_2,\beta_3,\beta_4$总线性相关, 并证明.

七、证明题

2. 设 $n(n>4)$维向量 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$满足 $\alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_3+4\alpha_4=0$且 $\beta_i=\alpha_i+i\lambda_i\xi, i=1,2,3,4$.问当不全为零的数 $\lambda_i(i=1,2,3,4)$满足什么条件时, 对任意的 n维向量 ξ, 向量组 $\beta_1.\beta_2,\beta_3,\beta_4$总线性相关, 并证明.

证明一: 由题意, 即 $x_1\beta_1+x_2\beta_2+x_3\beta_3+x_4\beta_4=0$对任意 ξ总有非零解, 整理得

$$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3+x_4\alpha_4+(\lambda_1x_1+2\lambda_2x_2+3\lambda_3x_3+4\lambda_4x_4)\xi=0$$

不妨设 $x_1\neq 0$, 上式变为

$$(x_2-2x_1)\alpha_2+(x_3-3x_1)\alpha_3+(x_4-4x_1)\alpha_4+(\lambda_1+4\lambda_2+9\lambda_3+16\lambda_4)x_1\xi=0$$

因为 $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$可能线性无关, 此时取 ξ使得 $\xi,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$也线性无关, 那么由上式可得到 $(\lambda_1+4\lambda_2+9\lambda_3+16\lambda_4)x_1=0$, 即 $\lambda_1+4\lambda_2+9\lambda_3+16\lambda_4=0$.
反之, 若满足 $\lambda_1+4\lambda_2+9\lambda_3+16\lambda_4=0$, 那么方程 $x_1\beta_1+x_2\beta_2+x_3\beta_3+x_4\beta_4=0$总有非零解 $x_1=1,x_2=2,x_3=3,x_4=4$.
综上, 满足条件 $x_1\beta_1+x_2\beta_2+x_3\beta_3+x_4\beta_4=0$时总有非零解.

七、证明题

2. 设 $n(n>4)$维向量 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$满足 $\alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_3+4\alpha_4=0$且 $\beta_i=\alpha_i+i\lambda_i\xi, i=1,2,3,4$.问当不全为零的数 $\lambda_i(i=1,2,3,4)$满足什么条件时, 对任意的 n维向量 ξ, 向量组 $\beta_1.\beta_2,\beta_3,\beta_4$总线性相关, 并证明.

七、证明题

2. 设 $n(n>4)$维向量 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$满足 $\alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_3+4\alpha_4=0$且 $\beta_i=\alpha_i+i\lambda_i\xi, i=1,2,3,4.$问当不全为零的数 $\lambda_i(i=1,2,3,4)$满足什么条件时, 对任意的 n维向量 ξ, 向量组 $\beta_1.\beta_2,\beta_3,\beta_4$总线性相关, 并证明.

证明二: 首先由 $\alpha_1=-2\alpha_2-3\alpha_3-4\alpha_4$

$$r([\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4])=r([\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\xi]\underbrace{\begin{bmatrix}-2 & 1 & 0 & 0\\ -3 & 0 & 1 & 0\\ -4 & 0 & 0 & 1\\ \lambda_1 & 2\lambda_2 & 3\lambda_3 & 4\lambda_4\end{bmatrix}}_{P})$$

若 $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性相关, 那么

$$r([\beta_1.\beta_2,\beta_3,\beta_4])\leqslant r([\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\xi])<4$$

此时已经线性无关, 故 λ_i可以满足任意条件; 若 $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性无关, 那么取 ξ使得 $\xi,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$也线性无关, 那么只需满足 (下式用到了左乘列满秩秩不变的结论)$r([\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4])=r(P)<4$, 等价于 $|P|=0$, 即 $\lambda_1+4\lambda_2+9\lambda_3+16\lambda_4=0$; 反之, 如果满足 $\lambda_1+4\lambda_2+9\lambda_3+16\lambda_4=0$, 那么 $|P|=0\Rightarrow r(P)<4$, 进而得到 $r([\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4])\leqslant r(P)<4$, 即线性相关.

1. 设 ξ_1,ξ_2都是线性方程组 $AX=b(b\neq 0)$的解, 则 $\xi_1-\xi_2$是方程组 $\underline{AX=0}$的解,$\xi_2+k(\xi_1-\xi_2)$是方程组 $\underline{AX=b}$的解.

1. 设 ξ_1,ξ_2都是线性方程组 $AX=b(b\neq 0)$的解, 则 $\xi_1-\xi_2$是方程组 $\underline{AX=0}$的解,$\xi_2+k(\xi_1-\xi_2)$是方程组 $\underline{AX=b}$的解.

解: 带入验证即可

$$A(\xi_1-\xi_2)=A\xi_1-A\xi_2=b-b=0$$

此即表示 $\xi_1-\xi_2$是 $AX=0$的一个解; 同理由

$$A[\xi_2+k(\xi_1-\xi_2)]=A\xi_2+kA\xi_1-kA\xi_2=b+kb-kb=b$$

因此 $\xi_2+k(\xi_1-\xi_2)$是 $AX=b$的解.

2. 设 A是秩为 r的 $m\times n$矩阵,$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$是 $Ax=0$的一个基础解系,n维列向量 ξ不是 $Ax=0$的解, 则 $r\{\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r},\xi\}=\underline{n-r+1}$.

2. 设 A是秩为 r的 $m\times n$矩阵,$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$是 $Ax=0$的一个基础解系,n维列向量 ξ不是 $Ax=0$的解, 则 $r\{\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r},\xi\}=\underline{n-r+1}$.

解: 首先由基础解系可知 $\xi_1,\cdots,\xi_{n-r}$线性无关, 另外 ξ不是 $Ax=0$的解表示它不能被 $\xi_1,\cdots,\xi_{n-r}$线性表出 (否则一定是 $Ax=0$的解), 因此 $\xi_1,\cdots,\xi_{n-r},\xi$也线性无关, 即秩为 $n-r+1$.

3. 设 A是 n阶方阵, 则 $AX=b(n\neq 0)$有无穷多解或无解的充分必要条件是 $\underline{r([A,b])=r(A)<n}$, $\underline{r([A,b] > r(A))}$.

3. 设 A是 n阶方阵, 则 $AX=b(n\neq 0)$有无穷多解或无解的充分必要条件是 $\underline{r([A,b])=r(A)<n}$, $\underline{r([A,b]>r(A))}$.

解:$AX=b$有解等价于系数矩阵的主元数等于增广矩阵的主元数即 $r([A,b])=r(A)$, 无穷多解等价于系数矩阵主元数小于未知数个数 n, 即 $r(A)<n$, 合并后即得到

$$r([A,b])=r(A)<n$$

无解等价于系数矩阵的主元数小于增广矩阵的主元数, 即

$$r([A,b])>r(A)$$

或者也可以写为 $r([A,b])=r(A)+1$.

4. 已知方程组 $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & a+2 \\ 1 & a & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$ 无解, 则 $a = \underline{-1}$.

4. 已知方程组 $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & a+2 \\ 1 & a & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$ 无解, 则 $a = \underline{-1}$.

解: 对增广矩阵作初等行变换, 得到

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & a+2 & 3 \\ 1 & a & -2 & 0 \end{array}\right] \to \cdots \to \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & a & 1 \\ 0 & 0 & (a-3)(a+1) & a-3 \end{array}\right]$$

要使方程无解, 只需要 $(a-3)(a+1)=0$且 $a-3 \neq 0$, 得到 $a=-1$.

5. 若 ξ_1,ξ_2,ξ_3是齐次线性方程组 $Ax=0$的基础解系, 当 k满足条件 $\underline{k\neq 1,-2}$时, 向量组 $k\xi_1+\xi_2+\xi_3,\xi_1+k\xi_2+\xi_3,\xi_1+\xi_2+k\xi_3$也是 $Ax=0$的基础解系.

5. 若 ξ_1, ξ_2, ξ_3是齐次线性方程组 $Ax = 0$的基础解系, 当 k满足条件 $\underline{k \neq 1, -2}$时, 向量组 $k\xi_1 + \xi_2 + \xi_3, \xi_1 + k\xi_2 + \xi_3, \xi_1 + \xi_2 + k\xi_3$也是 $Ax = 0$的基础解系.

解: 首先 $k\xi_1 + \xi_2 + \xi_3, \xi_1 + k\xi_2 + \xi_3, \xi_1 + \xi_2 + k\xi_3$都是 ξ_1, ξ_2, ξ_3的线性组合, 因此必定都是 $Ax = 0$的解, 因此只需要他们线性无关即可称为基础解系, 即需要

$$[k\xi_1 + \xi_2 + \xi_3, \xi_1 + k\xi_2 + \xi_3, \xi_1 + \xi_2 + k\xi_3]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$$

只有零解, 该方程等价于

$$[\xi_1, \xi_2, \xi_3]\begin{bmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$$

因为 ξ_1, ξ_2, ξ_3线性无关, 此方程等价于

$$\begin{bmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$$

该方程只有零解等价于系数矩阵可逆, 行列式 $(k-1)^2(k+2) \neq 0$即可, 等价于 $k \neq 1, -2$.

1. 在非齐次线性方程组 $Ax = b$中, 方程个数少于未知量个数, 则 (C).

A. $Ax = b$ 有无穷多解
B. $Ax = b$ 有唯一解
C. $Ax = 0$ 有无穷多解
D. $Ax = 0$ 仅有零解

1. 在非齐次线性方程组 $Ax=b$中, 方程个数少于未知量个数, 则 (C).

A. $Ax=b$ 有无穷多解
B. $Ax=b$ 有唯一解
C. $Ax=0$ 有无穷多解
D. $Ax=0$ 仅有零解

解: 举例证伪即可. 方程

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\1 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$$

满足条件, 但显然无解, 因此 $(A)(B)$错误; 而方程

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\1 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

显然有无穷多解, 因此 (D)错误, 选择 (C)项.
若 A为 $m\times n$阶矩阵, 方程个数 m小于未知数个数 n, 因此

$$r([A,b])\leqslant m<n$$

并且 $Ax=0$一定有解, 故有无穷多解.

2. 设 A是 $s\times n$矩阵, 秩 $A=s$, 则线性方程组 $Ax=b$一定 (C).

A. 有唯一解　B. 有无穷多解

C. 有解　D. 无解

2. 设 A是 $s\times n$矩阵, 秩 $A=s$, 则线性方程组 $Ax=b$一定 (C).

A. 有唯一解　B. 有无穷多解

C. 有解　D. 无解

解: 由题意可知 A行满秩, 其行向量线性无关, 而 $[A,b]$的行向量相当于 A行向量的伸长组, 因此也线性无关, 因此得到

$$r([A,b])=r(A)=s$$

这说明 $Ax=b$有解,(C)正确,(D)错误. 而解的数量是不确定的, 如

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix},\quad\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix}$$

左边的方程有无穷解, 右边的只有唯一解.

3. 已知 β_1,β_2是非齐次线性方程组 $Ax=b$的两个不同的解,α_1,α_2是其导出组 $Ax=0$的基础解系,k_1,k_2为任意常数, 则 $Ax=b$的通解为 (B).

A. $k_1\alpha_1+k_2(\alpha_1+\alpha_2)+\dfrac{\beta_1-\beta_2}{2}$

B. $k_1\alpha_1+k_2(\alpha_1-\alpha_2)+\dfrac{\beta_1+\beta_2}{2}$

C. $k_1\alpha_1+k_2(\beta_1+\beta_2)+\dfrac{\beta_1-\beta_2}{2}$

D. $k_1\alpha_1+k_2(\beta_1-\beta_2)+\dfrac{\beta_1+\beta_2}{2}$

3. 已知 β_1, β_2是非齐次线性方程组 $Ax=b$的两个不同的解,α_1, α_2是其导出组 $Ax=0$的基础解系,k_1, k_2为任意常数, 则 $Ax=b$的通解为 (B).

A. $k_1\alpha_1 + k_2(\alpha_1+\alpha_2) + \dfrac{\beta_1-\beta_2}{2}$

B. $k_1\alpha_1 + k_2(\alpha_1-\alpha_2) + \dfrac{\beta_1+\beta_2}{2}$

C. $k_1\alpha_1 + k_2(\beta_1+\beta_2) + \dfrac{\beta_1-\beta_2}{2}$

D. $k_1\alpha_1 + k_2(\beta_1-\beta_2) + \dfrac{\beta_1+\beta_2}{2}$

解: 非齐次线性方程组的通解即为 $Ax=b$的一个特解加上其导出组的基础解系的任意线性组合, 因此四个选项逐个验证即可.(B)项中

$$A\frac{\beta_1+\beta_2}{2} = \frac{1}{2}A\beta_1 + \frac{1}{2}A\beta_2 = \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}b = b$$

$$A\alpha_1 = 0,\quad A(\alpha_1-\alpha_2) = A\alpha_1 - A\alpha_2 = 0$$

并且 $\alpha_1, \alpha_1-\alpha_2$线性无关, 因此满足所有条件, 即为 $Ax=b$的通解.

4. 设 $A=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]$是秩为 2的三阶矩阵,$A^*$是 A的伴随矩阵, 则齐次线性方程组 $A^*x=0$的解一定能表示为 (D), 其中 k,l,m是任意常数.

A. $k\alpha_1+l\alpha_2$　　B. $l\alpha_2+m\alpha_3$

C. $k\alpha_1+m\alpha_3$　　D. $k\alpha_1-l\alpha_2+m\alpha_3$

4. 设 $A=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]$是秩为 2的三阶矩阵,$A^*$是 A的伴随矩阵, 则齐次线性方程组 $A^*x=0$的解一定能表示为 (D), 其中 k,l,m是任意常数.

A. $k\alpha_1+l\alpha_2$ B. $l\alpha_2+m\alpha_3$

C. $k\alpha_1+m\alpha_3$ D. $k\alpha_1-l\alpha_2+m\alpha_3$

解: 因为 A不满秩, 因此 $A^*A=0$, 这表示 A的列向量都是 $A^*x=0$的解, 因此他们的线性组合也都是解; 另一方面, 可知 $r(A^*)=1$, 故 $A^*x=0$的解空间维数为 $3-r(A^*)=3-1-2$, 其中一个基础解系为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$中的极大线性无关组.

但我们不知道 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$中极大线性无关组是哪两个, 因此 $(A)(B)(C)$都不一定正确,(D)项一定包含极大线性无关组, 因此可以表示所有解, 正确.

三、求下列齐次线性方程组的一个基础解系及通解.

1. $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$

三、求下列齐次线性方程组的一个基础解系及通解.

1. $\begin{cases} x_1+x_2+2x_3-x_4=0 \\ x_1+x_2+x_3+2x_4=0 \\ 2x_1+2x_2+3x_3+x_4=0 \end{cases}$

解: 作初等行变换

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \to \cdots \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

因此可得基础解系为 $\begin{bmatrix} -5 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, 通解为 $k_1\begin{bmatrix} -5 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} + k_2\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, 其中 k_1, k_2为任意常数.

注: 可以看到, 解空间维数 $n-r(A)$中的 n指的是列数, 而非行数.

三、求下列齐次线性方程组的一个基础解系及通解.

2. 方程组 $Ax=0$,其系数矩阵 A可经初等行变换化为

$$B=\begin{bmatrix}1&1&1&1&1\\0&0&2&1&2\\0&0&0&a&0\end{bmatrix}$$

三、求下列齐次线性方程组的一个基础解系及通解.

2. 方程组 $Ax=0$,其系数矩阵 A可经初等行变换化为

$$B=\begin{bmatrix}1&1&1&1&1\\0&0&2&1&2\\0&0&0&a&0\end{bmatrix}$$

解: 由题意, 根据 a是否为零导出不同的结果.

①$a=0$时, 进行初等行变换

$$A\to B\to\cdots\to\begin{bmatrix}1&1&0&\frac{1}{2}&0\\0&0&2&1&2\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

此时基础解系为 $\begin{bmatrix}0\\0\\-1\\0\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1\\0\\-1\\2\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1\\1\\0\\0\\0\end{bmatrix}$, 通解为

$$k_1\begin{bmatrix}0\\0\\-1\\0\\1\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}-1\\0\\-1\\2\\0\end{bmatrix}+k_3\begin{bmatrix}-1\\1\\0\\0\\0\end{bmatrix}$$, 其中 k_1,k_2,k_3为任意常数.

三、求下列齐次线性方程组的一个基础解系及通解.

2. 方程组 $Ax=0$,其系数矩阵 A可经初等行变换化为

$$B=\begin{bmatrix}1&1&1&1&1\\0&0&2&1&2\\0&0&0&a&0\end{bmatrix}$$

解:(接上文)

②$a\neq 0$时, 进行如下初等行变换

$$A\to B\to\begin{bmatrix}1&1&1&1&1\\0&0&2&1&2\\0&0&0&1&0\end{bmatrix}\to\cdots\to\begin{bmatrix}1&1&0&0&0\\0&0&1&0&1\\0&0&0&1&0\end{bmatrix}$$

因此基础解系为 $\begin{bmatrix}0\\0\\-1\\0\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1\\1\\0\\0\\0\end{bmatrix}$, 通解为 $k_1\begin{bmatrix}0\\0\\-1\\0\\1\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}-1\\1\\0\\0\\0\end{bmatrix}$, 其中 k_1,k_2为任意常数.

四、解下列线性方程组.

1. $$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 + 2x_5 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 2, \\ 3x_1 + 3x_2 + 3x_4 + x_5 = 3 \end{cases}$$

四、解下列线性方程组.

1. $\begin{cases} x_1+x_2-x_3+x_4+2x_5=1, \\ 2x_1+2x_2+x_3+2x_4+3x_5=2, \\ 3x_1+3x_2+3x_4+x_5=3 \end{cases}$

解: 对增广矩阵进行初等行变换.

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 0 & 3 & 1 & 3 \end{array}\right] \to \cdots \to \left[\begin{array}{ccccc|c} 4 & 4 & 0 & 4 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 3 \end{array}\right]$$

因此得到特解 $\begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ 0 \\ -\frac{1}{4} \\ 0 \\ \frac{3}{4} \end{bmatrix}$, 同样可以得到导出组的基础解系为

$\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, 进而得到通解为 $\begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ 0 \\ -\frac{1}{4} \\ 0 \\ \frac{3}{4} \end{bmatrix} + k_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, 其中 k_1, k_2为任意常数

四、解下列线性方程组.

2. 方程组 $Ax=\beta$, 其增广矩阵 $\widetilde{A}=(A,\beta)$可经初等行变换化为

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

四、解下列线性方程组.

2. 方程组 $Ax=\beta$, 其增广矩阵 $\widetilde{A}=(A,\beta)$可经初等行变换化为
$$\begin{bmatrix}1 & 2 & -1 & 2 & 5\\ 0 & 0 & 0 & a-1 & b\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

解: 按 $a-1$是否为零分类讨论.

①$a=1, b\neq 0$时, 显然 $r(\widetilde{A})=2\neq r(A)=1$, 因此方程无解;

②$a=1, b=0$时, 只有第一行非零, 因此直接得到特解 $\begin{bmatrix}-5\\0\\0\\0\end{bmatrix}$, 导出组通解为 $\begin{bmatrix}-2\\1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-2\\0\\0\\1\end{bmatrix}$, 因此得到通解为

$$\begin{bmatrix}-5\\0\\0\\0\end{bmatrix}+k_1\begin{bmatrix}-2\\1\\0\\0\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}1\\0\\1\\0\end{bmatrix}+k_3\begin{bmatrix}-2\\0\\0\\1\end{bmatrix}, k_1,k_2,k_3\text{为任意常数}$$

目录

四、解下列线性方程组.

2. 方程组 $Ax=\beta$, 其增广矩阵 $\widetilde{A}=(A,\beta)$可经初等行变换化为

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & -1 & 2 & 5\\ 0 & 0 & 0 & a-1 & b\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

解:(接上文)

③$a-1\neq 0$时, 继续进行行变换

$$\to\cdots\to\begin{bmatrix}1 & 2 & -1 & 0 & 5-\frac{2b}{a-1}\\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{b}{a-1}\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

得到特解 $\begin{bmatrix}5-\frac{2b}{a-1}\\ 0\\ 0\\ \frac{b}{a-1}\end{bmatrix}$, 导出组通解为 $\begin{bmatrix}-2\\ 1\\ 0\\ 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 1\\ 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-2\\ 1\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$, 因此得到

通解为

$$\begin{bmatrix}5-\frac{2b}{a-1}\\ 0\\ 0\\ \frac{b}{a-1}\end{bmatrix}+k_1\begin{bmatrix}-2\\ 1\\ 0\\ 0\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 1\\ 0\end{bmatrix}+k_3\begin{bmatrix}-2\\ 1\\ 0\\ 0\end{bmatrix}, k_1,k_2,k_3\text{为任意常数}$$

五、λ为何值时, 方程组 $\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = \lambda, \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = \lambda^2 \end{cases}$ 有解? 有解时, 求出通解.

五、λ为何值时，方程组 $\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = \lambda, \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = \lambda^2 \end{cases}$ 有解？有解时，求出通解.

解：作初等行变换

$$\left[\begin{array}{ccc:c} \lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & \lambda \\ 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \end{array}\right]$$

$$\rightarrow \cdots \rightarrow \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \\ 0 & \lambda - 1 & 1 - \lambda & \lambda(1-\lambda) \\ 0 & 0 & (1-\lambda)(2+\lambda) & (1-\lambda)(\lambda+1)^2 \end{array}\right]$$

其中第二行虚线左边为零当且仅当 $\lambda = 1$，此时虚线右边也为零，因此第二行无论如何不影响是否有解；第三行虚线左边为零当且仅当 $\lambda = 1$或 -2，同样的 $\lambda = 1$时虚线右边也为零即不影响有解，故可知在 $\lambda \neq -2$时都有解.

①$\lambda = 1$时原矩阵只有第一行非零，且为 $[1, 1, 1, 1]$，通解为

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + k_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, k_1, k_2\text{为任意常数}$$

五、λ为何值时, 方程组 $\begin{cases}\lambda x_1+x_2+x_3=1,\\ x_1+\lambda x_2+x_3=\lambda,\\ x_1+x_2+\lambda x_3=\lambda^2\end{cases}$ 有解? 有解时, 求出通解.

解:(接上文)

②$\lambda\neq 1,-2$继续化简矩阵

$$\to\left[\begin{array}{ccc:c}1 & 1 & \lambda & \lambda^2\\ 0 & -1 & 1 & \lambda\\ 0 & 0 & 2+\lambda & (1+\lambda)^2\end{array}\right]\to\cdots\to\left[\begin{array}{ccc:c}1 & 0 & 0 & -\frac{\lambda+1}{\lambda+2}\\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{\lambda+2}\\ 0 & 0 & 1 & \frac{(\lambda+1)^2}{\lambda+2}\end{array}\right]$$

有唯一解

$$\begin{bmatrix}-\frac{\lambda+1}{\lambda+2}\\ \frac{1}{\lambda+2}\\ \frac{(\lambda+1)^2}{\lambda+2}\end{bmatrix}$$

六、写出方程组

$x_1 - x_2 = a_1, x_2 - x_3 = a_2, x_3 - x_4 = a_3, x_4 - x_1 = a_4$有解的充要条件, 并求解.

六、写出方程组

$x_1-x_2=a_1, x_2-x_3=a_2, x_3-x_4=a_3, x_4-x_1=a_4$有解的充要条件, 并求解.

解: 方程组写为

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix}$$

对增广矩阵作初等行变换 (只需要将前三行加到第四行):

$$\left[\begin{array}{cccc:c} 1 & -1 & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & a_3 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & a_4 \end{array}\right]\to\left[\begin{array}{cccc:c} 1 & -1 & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_1+a_2+a_3+a_4 \end{array}\right]$$

因此有解当且仅当 $a_1+a_2+a_3+a_4=0$, 此时特解为 $[a_1+a_2+a_3, a_2+a_3, a_3, 0]^T$, 导出组基础解系为 $[1,1,1,1]^T$, 因此得到通解

$$[a_1+a_2+a_3, a_2+a_3, a_3, 0]^T+k[1,1,1,1]^T, \quad (k\text{为任意常数})$$

七、设 η_0是非齐次线性方程组 $Ax = b(b \neq 0)$的一个解,$\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{n-r}$是其导出组 $Ax = 0$的一个基础解系, 令 $\eta_j = \eta_0 + \xi_j$,$j = 1, 2, \cdots, n - r$, 证明:

1.$\eta_0, \xi_1, \cdots, \xi_{n-r}$线性无关;

七、设 η_0是非齐次线性方程组 $Ax=b(b\neq 0)$的一个解,$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$是其导出组 $Ax=0$的一个基础解系, 令 $\eta_j=\eta_0+\xi_j,j=1,2,\cdots,n-r$, 证明:
1.$\eta_0,\xi_1,\cdots,\xi_{n-r}$线性无关;

证明: 由题意可知 $A\eta_0=b\neq 0$, 这表示 η_0不是 $Ax=0$的解, 那么必然不在 $Ax=0$的解空间中, 也就不可被其基础解系 $\xi_1,\cdots,\xi_{n-r}$线性表出, 又由 $\xi_1,\cdots,\xi_{n-r}$线性无关, 那么 $\eta_0,\xi_1,\cdots,\xi_{n-r}$也线性无关.

七、设 η_0是非齐次线性方程组 $Ax = b(b \neq 0)$的一个解,$\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{n-r}$是其导出组 $Ax = 0$的一个基础解系, 令 $\eta_j = \eta_0 + \xi_j, j = 1, 2, \cdots, n - r$, 证明:
2.$\eta_0, \eta_1, \cdots, \eta_{n-r}$线性无关, 且都是 $Ax = b$的解;

七、设 η_0是非齐次线性方程组 $Ax = b(b \neq 0)$的一个解,$\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{n-r}$是其导出组 $Ax = 0$的一个基础解系, 令 $\eta_j = \eta_0 + \xi_j, j = 1, 2, \cdots, n-r$, 证明:
2.$\eta_0, \eta_1, \cdots, \eta_{n-r}$线性无关, 且都是 $Ax = b$的解;

证明: 首先由 $A\eta_0 = b, A\eta_j = A(\eta_0 + \xi_j) = A\eta_0 + A\xi_j = b + 0 = b$可知它们都是 $Ax = b$的解, 下证它们线性无关, 由 1 已知 $\eta_0, \xi_1, \cdots, \xi_{n-r}$线性无关, 因此对于方程组

$$[\eta_0, \eta_1, \cdots, \eta_{n-r}] \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{n-r} \end{bmatrix} = [\eta_0, \xi_1, \cdots, \xi_{n-r}] \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{n-r} \end{bmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{n-r} \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{n-r} \end{bmatrix} = 0$$

这表示只有零解, 即证.

七、设 η_0是非齐次线性方程组 $Ax=b(b\neq 0)$的一个解,$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$是其导出组 $Ax=0$的一个基础解系, 令 $\eta_j=\eta_0+\xi_j, j=1,2,\cdots,n-r$, 证明:

3. 方程组 $Ax=b$的任一解可表示为 $x=\lambda_0\eta_0+\lambda_1\eta_1+\cdots+\lambda_{n-r}\eta_{n-r}$的形式, 其中常数 $\lambda_0,\lambda_1,\cdots,\lambda_{n-r}$满足 $\lambda_0+\lambda_1+\cdots+\lambda_{n-r}=1$.

七、设 η_0是非齐次线性方程组 $Ax=b(b\neq 0)$的一个解,$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$是其导出组 $Ax=0$的一个基础解系, 令 $\eta_j=\eta_0+\xi_j,j=1,2,\cdots,n-r$, 证明:
3. 方程组 $Ax=b$的任一解可表示为 $x=\lambda_0\eta_0+\lambda_1\eta_1+\cdots+\lambda_{n-r}\eta_{n-r}$的形式, 其中常数 $\lambda_0,\lambda_1,\cdots,\lambda_{n-r}$满足 $\lambda_0+\lambda_1+\cdots+\lambda_{n-r}=1$.

证明: 因为

$$\begin{aligned}&\lambda_0\eta_0+\lambda_1\eta_1+\cdots+\lambda_{n-r}\eta_{n-r}\\=&(\lambda_0+\cdots+\lambda_{n-r})\eta_0+\lambda_1\xi_1+\cdots+\lambda_{n-r}\xi_{n-r}\\=&\eta_0+\lambda_1\xi_1+\cdots+\lambda_{n-r}\xi_{n-r}\end{aligned}$$

其中 η_0为 $Ax=b$的特解,$\xi_1,\cdots,\xi_{n-r}$为其导出组的基础解系, 所以上式确为 $Ax=b$的通解.

注: 虽然 $A_{m\times n}x=b(b\neq 0)$的解集不是一个子空间 (是仿射空间), 但可以知道其中一定有 $n-r(A)+1$个线性无关的向量.

八、设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$是四元非齐次线性方程组 $Ax = \beta(\beta \neq 0)$的 3个线性无关的解向量,$r(A) = 3$, 且 $\alpha_1 + \alpha_2 = (1, 1, 0, 2)^T, \alpha_2 + \alpha_3 = (1, 0, 1, 3)^T$, 求方程组 $Ax = \beta$的通解.

八、设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是四元非齐次线性方程组 $Ax=\beta(\beta\neq 0)$的 3个线性无关的解向量,$r(A)=3$, 且 $\alpha_1+\alpha_2=(1,1,0,2)^T,\alpha_2+\alpha_3=(1,0,1,3)^T$, 求方程组 $Ax=\beta$的通解.

解: 得到 $Ax=\beta$的通解需要得到一个特解和导出组的基础解系. 因为 $A(\alpha_1+\alpha_2)=2\beta$, 那么 $A\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}=\beta$, 这表示 $\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0,1\right)^T$即为 $Ax=\beta$的一个特解.
另一方面, 容易知道 $\alpha_1+\alpha_2$和 $\alpha_2+\alpha_3$都是 $Ax=2\beta$的解, 那么 $\alpha_1-\alpha_3=(\alpha_1+\alpha_2)-(\alpha_2+\alpha_3)=(0,1,-1,-1)^T$即为 $Ax=0$的解, 同时可知 $Ax=0$的解空间维数为 $4-r(A)=1$, 因此 $Ax=\beta$的通解即为

$$\begin{bmatrix}1/2\\1/2\\0\\1\end{bmatrix}+k\begin{bmatrix}0\\1\\-1\\-1\end{bmatrix},k\text{为任意常数}$$

九、已知四阶方阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4),\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$均为 4维列向量, 其中 $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性无关,$\alpha_1=2\alpha_2-\alpha_3$. 如果 $\beta=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4$, 求方程组 $Ax=\beta$的通解.

九、已知四阶方阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4),\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$均为 4维列向量, 其中 $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性无关,$\alpha_1=2\alpha_2-\alpha_3$. 如果 $\beta=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4$, 求方程组 $Ax=\beta$的通解.

解: 求通解需要找到一个特解和导出组的基础解系. 由 β定义可知

$$\beta=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4]\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}=A\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}$$

因此 $[1,1,1,1]^T$即为 $Ax=\beta$的一个特解; 另一方面, 由

$$\alpha_1-2\alpha_2+\alpha_3=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4]\begin{bmatrix}1\\-2\\1\\0\end{bmatrix}=A\begin{bmatrix}1\\-2\\1\\0\end{bmatrix}=0$$

这表示 $[1,-2,1,0]^T$为 $Ax=0$的一个解, 因为 $Ax=0$解空间维数为 $4-r(A)=1$, 因此通解为

$$\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}+k\begin{bmatrix}1\\-2\\1\\0\end{bmatrix},k\text{为任意常数}$$

十、设 A是秩为 n的 $s \times n$矩阵,$AB = AC$, 证明:$B = C$.

十、设 A是秩为 n的 $s \times n$矩阵,$AB = AC$, 证明:$B = C$.

证明:$AB = AC$即 $A(B - C) = 0$, 这表示 $B - C$的每一个列向量都是 $Ax = 0$的解, 因为 A列满秩, 因此基础解系的维数为 $n - r(A) = n - n = 0$, 这表示解空间为 $\{0\}$即只有零解, 即 $B - C$的列向量全为零, 得到 $B - C = 0 \Rightarrow B = C$.

十一、设 n阶矩阵 A满足:$A^2-3A+10I=O, I$为 n阶单位矩阵, 证明:

$$\operatorname{rank}(A-5I)+\operatorname{rank}(A+2I)=n.$$

十一、设 n阶矩阵 A满足:$A^2 - 3A + 10I = O, I$为 n阶单位矩阵, 证明:

$$\mathrm{rank}(A - 5I) + \mathrm{rank}(A + 2I) = n.$$

证明: 由 $A^2 - 3A + 10I = (A - 5I)(A + 2I) = O$, 可知 $A - 2I$的列向量都是 $(A - 5I)x = 0$的解, 而其解空间维数为 $n - r(A - 5I)$, 因此可知

$$r(A + 2I) \leqslant n - r(A - 5I) \Rightarrow r(A + 2I) + r(A - 5I) \leqslant n$$

另一方面, 因为

$$n = r(7I) = r((A + 2I) - (A - 5I)) \leqslant r(A + 2I) + r(A - 5I)$$

因此得到

$$r(A + 2I) + r(A - 5I) = n$$

十二、设 A为 $n(n>1)$阶矩阵,A^*是 A的伴随矩阵, 证明:

$$r(A^*)=\begin{cases} n, r(A)=n \\ 1, r(A)=n-1, \\ 0, r(A)\leqslant n-2 \end{cases}$$

十二、设 A为 $n(n>1)$阶矩阵,A^*是 A的伴随矩阵, 证明:

$$r(A^*)=\begin{cases} n, r(A)=n \\ 1, r(A)=n-1, \\ 0, r(A)\leqslant n-2 \end{cases}$$

证明:①$r(A)=n$时,A可逆, 即 $|A|\neq 0$, 因此 $AA^*=|A|I$可知 A^*也可逆, 即得到 $r(A^*)=n$;

②$r(A)=n-1$时, 由 $AA^*=|A|I=0$可知,A^*的列向量都是 $Ax=0$的解, 因此有

$$r(A^*)\leqslant n-r(A)=n-(n-1)=1$$

而 $r(A)=n-1$表示至少存在 A的一个 $n-1$阶子式不为零, 因此 $A^*\neq 0$, 即 $r(A^*)\geqslant 1$, 得到 $r(A^*)=1$;

③$r(A)\leqslant n-2$时, 表示任意 A的 $n-1$子式都为零, 即 $A^*=0$, 因此 $r(A^*)=0$.

十三、若任意一个 n维向量都是 n元齐次线性方程组 $Ax = 0$解, 证明 : $A = O$.

十三、若任意一个 n维向量都是 n元齐次线性方程组 $Ax = 0$解, 证明 : $A = O$.

证明: 设 A为 $m \times n$维矩阵, 由题意可知 $Ax = 0$的解空间为 $\mathbb{R}^n$, 即解空间维数为 n, 那么有

$$n - r(A) = n \Rightarrow r(A) = 0 \Rightarrow A = 0$$

成立.

1. 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性无关, 向量组 $p\alpha_1 - \alpha_2, s\alpha_2 - \alpha_3, t\alpha_3 - \alpha_1$线性相关, 则 p, s, t满足条件 $\underline{pst = 1}$.

1. 设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关, 向量组 $p\alpha_1-\alpha_2, s\alpha_2-\alpha_3, t\alpha_3-\alpha_1$线性相关, 则 p,s,t满足条件 $\underline{pst=1}$.

解: 由题意即以下方程组存在非零解

$$[p\alpha_1-\alpha_2, s\alpha_2-\alpha_3, t\alpha_3-\alpha_1]\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=0$$

方程组变换为

$$[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]\begin{bmatrix}p&0&-1\\-1&s&0\\0&-1&t\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=0$$

由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$无关可知上述方程等价于

$$\begin{bmatrix}p&0&-1\\-1&s&0\\0&-1&t\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=0$$

要使此方程存在零解, 即行列式为零即可, 得到

$$pst-1=0$$

2. 设 $\alpha_i=(1,\lambda_i,\lambda_i^2,\cdots,\lambda_i^{n-1})^T, i=1,2,\cdots,r$, 其中 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_r$是互不相同的 r个数, 则对于向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$, 当 $r>n$时, 线性<u>相关</u>; 当 $r=n$时, 线性<u>无关</u>; 当 $r<n$时, 线性<u>无关</u>.

2. 设 $\alpha_i=(1,\lambda_i,\lambda_i^2,\cdots,\lambda_i^{n-1})^T, i=1,2,\cdots,r$, 其中 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_r$是互不相同的 r个数, 则对于向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$, 当 $r>n$时, 线性<u>相关</u>; 当 $r=n$时, 线性<u>无关</u>; 当 $r<n$时, 线性<u>无关</u>.

解: 将这些 α_i作为列向量组成一个 $n\times r$矩阵

$$[\alpha_1,\cdots,\alpha_r]=\begin{bmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_r\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \cdots & \lambda_r^{n-1}\end{bmatrix}$$

当 $r>n$时, 此矩阵的秩小于等于 $\min(r,n)=n$, 这表示列向量的极大线性无关组数量必定小于 r, 因此线性相关;
当 $r=n$时, 此矩阵的行列式即范德蒙行列式, 非零, 进而可知满秩, 即列向量线性无关;
当 $r<n$时, 取前 r行的 r阶子式, 它也是范德蒙行列式, 因此非零, 这样子式的列向量线性无关,α_i作为其伸长组也线性无关.

3. 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是 $\mathbb{R}^3$ 的一组基, 则由基 $\alpha_1, \frac{1}{2}\alpha_2, \frac{1}{3}\alpha_3$ 到 $\alpha_1+\alpha_2, \alpha_2+\alpha_3, \alpha_3+\alpha_1$ 的过渡矩阵为 $\underline{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \end{bmatrix}}$.

3. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是 $\mathbb{R}^3$的一组基, 则由基 $\alpha_1,\frac{1}{2}\alpha_2,\frac{1}{3}\alpha_3$到 $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$的过渡矩阵为 $\underline{\begin{bmatrix}1&0&1\\2&2&0\\0&3&3\end{bmatrix}}$.

解: 首先不难得到

$$[\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1]=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]\underbrace{\begin{bmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{bmatrix}}_{P_1}$$

$$\left[\alpha_1,\frac{1}{2}\alpha_2,\frac{1}{3}\alpha_3\right]=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]\underbrace{\begin{bmatrix}1&0&1\\0&\frac{1}{2}&0\\0&0&\frac{1}{3}\end{bmatrix}}_{P_2}$$

若设待求过渡矩阵为 P, 那么

$$\left[\alpha_1,\frac{1}{2}\alpha_2,\frac{1}{3}\alpha_3\right]P=[\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1]$$

$$\Leftrightarrow[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]P_2P=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]P_1$$

$$\Leftrightarrow P=P_2^{-1}P_1$$

4. 设 α为 3维列向量,$\alpha^T\alpha = 1, I$为 3阶单位矩阵, 则矩阵 $I - \alpha\alpha^T$的秩为 $\underline{2}$.

4. 设 α为 3维列向量,$\alpha^T\alpha=1, I$为 3阶单位矩阵, 则矩阵 $I-\alpha\alpha^T$的秩为 $\underline{2}$.

解: 记 $A=I-\alpha\alpha^T$, 首先由秩不等式可知

$$2=|3-1|=|r(I)-r(\alpha\alpha^T)|\leqslant r(I-\alpha\alpha^T)\leqslant 3$$

因此 $r(A)$只可能为 2或 3. 由 25页第九题 2 结论,A不可逆, 因此 $r(A)$只能为 2.

注: 此题可以借助很多推论完成, 以下提出三个.

- 不难计算得到 $A^2=A$(25页第九题 1), 即 $A(I-A)=0$, 和 69 页十一题类似结论可得 $r(A)+r(I-A)=3$, 如果 $r(A)=3$, 那么 $r(I-A)=0\Rightarrow I-A=0\Rightarrow A=I\Rightarrow \alpha\alpha^T=0\Rightarrow\alpha=0\Rightarrow \alpha^T\alpha=0$矛盾, 因此 $r(A)$只能为 2;
- 推论: 若 A为 $m\times n$阶矩阵,B为 $n\times m$阶矩阵, 那么 $|I_m-AB|=|I_n-BA|$. 使用此结论, 我们对 A求行列式, 即 $|I-\alpha\alpha^T|=|1-\alpha^T\alpha|=|1-1|=0$, 即 $r(A)<3$, 进而得到 $r(A)=2$.

·直接对 $A=I-\alpha\alpha^T$求行列式: 设 $\alpha=(x_1,x_2,x_3)^T$, 可知 $x_1^2+x_2^2+x_3^2=1$, 那么 (加边法)

$$|I-\alpha\alpha^T|=\begin{vmatrix}1-x_1^2 & -x_1x_2 & -x_1x_3\\ -x_2x_1 & 1-x_2^2 & -x_2x_3\\ -x_3x_1 & -x_3x_2 & 1-x_3^2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & x_1 & x_2 & x_3\\ 0 & 1-x_1^2 & -x_1x_2 & -x_1x_3\\ 0 & -x_2x_1 & 1-x_2^2 & -x_2x_3\\ 0 & -x_3x_1 & -x_3x_2 & 1-x_3^2\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}1 & x_1 & x_2 & x_3\\ x_1 & 1 & 0 & 0\\ x_2 & 0 & 1 & 0\\ x_3 & 0 & 0 & 1\end{vmatrix}\overset{\text{爪形行列式}}{=\!=\!=}\begin{vmatrix}1-x_1^2-x_2^2-x_3^2 & 0 & 0 & 0\\ x_1 & 1 & 0 & 0\\ x_2 & 0 & 1 & 0\\ x_3 & 0 & 0 & 1\end{vmatrix}$$

$$=0$$

因此也得到 $r(A)<3$, 进而 $r(A)=2$.

注: 如果将此题改为 n阶矩阵, 可得 $r(I-\alpha\alpha^T)=n-1$, 方法是类似的.

5. 设 A,B均为 n阶矩阵, 齐次线性方程组 $Ax=0$的解都是 $Bx=0$的解, 则 $r(A)\underline{\geqslant}r(B)$.

5. 设 A, B均为 n阶矩阵, 齐次线性方程组 $Ax=0$的解都是 $Bx=0$的解, 则 $r(A)\underline{\geqslant}r(B)$.

解: 设 $Ax=0, Bx=0$的解空间分别为 W_A, W_B, 由题意可知 $W_A \subseteq W_B$, 那么就有

$$\dim W_A \leqslant \dim W_B$$

此即

$$n-r(A) \leqslant n-r(B)$$

得到

$$r(A) \geqslant r(B)$$

6. 设 $A=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]$为 3阶矩阵, 若 α_1,α_2线性无关, 且 $\alpha_3=-\alpha_1+2\alpha_2$, 则线性方程组 $Ax=0$的通解为 $\underline{k\begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix}}$.

6. 设 $A=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]$为 3阶矩阵, 若 α_1,α_2线性无关, 且 $\alpha_3=-\alpha_1+2\alpha_2$, 则线性方程组 $Ax=0$的通解为 $\underline{k\begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix}}$.

解: 首先由题意可知

$$\alpha_1-2\alpha_2+\alpha_3=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]\begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix}=0$$

这表示 $[1,-2,1]^T$是 $Ax=0$的一个解; 而 $Ax=0$的解空间维数为 $3-r(A)=3-2=1$, 因此通解即为

$$k\begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix}$$

k为任意常数.

1. 设 A,B满足 $AB=O$的任意两个非零矩阵, 则必有 (A).

A. A 的列向量组线性相关,B 的行向量组线性相关

B. A 的列向量组线性相关,B 的列向量组线性相关

C. A 的行向量组线性相关,B 的行向量组线性相关

D. A 的行向量组线性相关,B 的列向量组线性相关

1. 设 A, B满足 $AB = O$的任意两个非零矩阵, 则必有 (A).

A. A 的列向量组线性相关,B 的行向量组线性相关

B. A 的列向量组线性相关,B 的列向量组线性相关

C. A 的行向量组线性相关,B 的行向量组线性相关

D. A 的行向量组线性相关,B 的列向量组线性相关

解: 首先设 $A = [\alpha_1, \cdots, \alpha_n]$, 其中 α_i为列向量, 如果 A的列向量组线性无关, 那么

$$[\alpha_1, \cdots, \alpha_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = 0$$

必然只有零解, 此即表示 B的列向量只能为零, 得到 $B = 0$与非零矛盾, 因此 A的列向量必然线性相关;

另一方面, 对 $AB = O$转置可得 $B^T A^T = O$, 由上结论可知 B^T的列向量线性相关, 即 B的行向量线性相关, 因此 (A)项正确.

2. 设 A为 4×3矩阵,η_1,η_2,η_3是非齐次线性方程组 $Ax=b$的 3个线性无关的解,k_1,k_2,k_3是任意常数, 则 $Ax=\beta$的通解为 (C).

A. $k_1\eta_1+k_2\eta_2+k_3\eta_3$

B. $k_1(\eta_2-\eta_1)+k_2(\eta_3-\eta_1)$

C. $\dfrac{\eta_2+\eta_3}{2}+k_1(\eta_2-\eta_1)+k_2(\eta_3-\eta_1)$

D. $\dfrac{\eta_2-\eta_3}{2}+k_1(\eta_2-\eta_1)+k_2(\eta_3-\eta_1)$

2. 设 A为 4×3矩阵,η_1,η_2,η_3是非齐次线性方程组 $Ax=b$的 3个线性无关的解,k_1,k_2,k_3是任意常数, 则 $Ax=\beta$的通解为 (C).

A. $k_1\eta_1+k_2\eta_2+k_3\eta_3$

B. $k_1(\eta_2-\eta_1)+k_2(\eta_3-\eta_1)$

C. $\dfrac{\eta_2+\eta_3}{2}+k_1(\eta_2-\eta_1)+k_2(\eta_3-\eta_1)$

D. $\dfrac{\eta_2-\eta_3}{2}+k_1(\eta_2-\eta_1)+k_2(\eta_3-\eta_1)$

解: 取特殊值排除即可.

(A)项, 取 $k_1=k_2=k_3=0$得到 0, 而 $Ax=b$不一定有零解, 故错误;

(B)项, 取 $k_1=k_2=0$同上可知错误;

(D)项, 取 $k_1=k_2=0$, 因为 $A\frac{\eta_2-\eta_3}{2}=\frac{\beta-\beta}{2}=0$也不一定等于 b, 因此错误.

(C)项, 易知 $\frac{\eta_2+\eta_3}{2}$为 $Ax=\beta$的解,$\eta_2-\eta_1,\eta_3-\eta_1$为 $Ax=0$的解且他们线性无关, 因此 (C)项即为通解.

3. 设 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$是 4阶矩阵,$A^*$是 A的伴随矩阵. 若 $(1,0,1,0)^T$是线性方程组 $Ax=0$的一个基础解系, 则 $A^*x=0$的基础解系为 (C).

A. α_1,α_3

B. $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$

C. $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$

D. $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$

3. 设 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$是 4阶矩阵,$A^*$是 A的伴随矩阵. 若 $(1,0,1,0)^T$是线性方程组 $Ax=0$的一个基础解系, 则 $A^*x=0$的基础解系为 (C).

A. α_1,α_3

B. $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$

C. $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$

D. $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$

解: 首先可知 $Ax=0$的解空间维数为 1, 即 $4-r(A)=1\Rightarrow r(A)=3\Rightarrow r(A^*)=1$, 因此 $A^*x=0$的解空间维数即为 $4-r(A^*)=4-1=3$, 故 $(A)(D)$项排除.

另一方面, 因为 $A(1,0,1,0)^T=\alpha_1+\alpha_3=0$, 这表示 (B)项中 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$必定线性相关, 也排除, 最后选择 (C)项.

三、设向量组 $\alpha_1=(1,1,1,3)^T,\alpha_2=(-1,-3,5,1)^T,\alpha_3=(3,2,-1,p+2)^T,\alpha_4=(-2,-6,10,p)^T$.

1.p取何值时,$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性无关? 此时将 $\beta=(4,1,6,10)^T$用$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性表出;

三、设向量组 $\alpha_1=(1,1,1,3)^T,\alpha_2=(-1,-3,5,1)^T,\alpha_3=(3,2,-1,p+2)^T,\alpha_4=(-2,-6,10,p)^T$.
1.p取何值时,$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性无关? 此时将 $\beta=(4,1,6,10)^T$用 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性表出;

解: 直接对 $[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\beta]$进行初等行变换,

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 1 & -3 & 2 & -6 & 1 \\ 1 & 5 & -1 & 10 & 6 \\ 3 & 1 & p+2 & p & 10 \end{array}\right] \to \cdots \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & p-2 & 1-p \end{array}\right]$$

可以看到当 $p-2\neq 0$时 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_3$线性无关, 此时继续对上式进行初等行变换

$$\to \cdots \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{3p-4}{p-2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1-p}{p-2} \end{array}\right]$$

进而得到

$$\beta=2\alpha_1+\frac{3p-4}{p-2}\alpha_2+\alpha_3+\frac{1-p}{p-2}\alpha_4$$

三、设向量组 $\alpha_1 = (1,1,1,3)^T, \alpha_2 = (-1,-3,5,1)^T, \alpha_3 = (3,2,-1,p+2)^T, \alpha_4 = (-2,-6,10,p)^T$.

2.p取何值时,$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性相关? 此时求 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$的秩及一个极大线性无关组.

三、设向量组 $\alpha_1 = (1,1,1,3)^T, \alpha_2 = (-1,-3,5,1)^T, \alpha_3 = (3,2,-1,p+2)^T, \alpha_4 = (-2,-6,10,p)^T$.
2.p取何值时,$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性相关? 此时求 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$的秩及一个极大线性无关组.

解: 由 1 结果

$$\left[\begin{array}{cccc:c} 1 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & p-2 & 1-p \end{array}\right]$$

可知 $p=2$时 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性相关, 此时 $r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=3$, 极大线性无关组为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$.

四、设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r (r \geqslant 2)$线性无关, 任取 $k_1, k_2, \cdots, k_{r-1} \in \mathbb{R}$, 证明: 向量组

$\beta_1 = \alpha_1 + k_1\alpha_r, \beta_2 = \alpha_2 + k_2\alpha_r, \cdots, \beta_{r-1} = \alpha_{r-1} + k_{r-1}\alpha_r, \beta_r = \alpha_r$线性无关.

四、设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r(r\geqslant 2)$线性无关, 任取 $k_1,k_2,\cdots,k_{r-1}\in\mathbb{R}$, 证明: 向量组 $\beta_1=\alpha_1+k_1\alpha_r,\beta_2=\alpha_2+k_2\alpha_r,\cdots,\beta_{r-1}=\alpha_{r-1}+k_{r-1}\alpha_r,\beta_r=\alpha_r$线性无关.

证明: 对于方程组

$$[\beta_1,\cdots,\beta_r]\begin{bmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_r\end{bmatrix}=[\alpha_1+k_1\alpha_r,\cdots,\alpha_{r-1}+k_{r-1}\alpha_r,\alpha_r]\begin{bmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_r\end{bmatrix}=0$$

等价于下列线性方程组

$$[\alpha_1,\cdots,\alpha_r]\underbrace{\begin{bmatrix}1&&&&\\&1&&&\\&&\ddots&&\\&&&1&\\k_1&k_2&\cdots&k_{r-1}&1\end{bmatrix}}_{P}\begin{bmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_r\end{bmatrix}=0$$

因为 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$线性无关, 故该方程组等价于 $P[x_1,\cdots,x_r]^T=0$, 进而由 $|P|=1\neq 0$可知 P可逆, 等价于 $[x_1,\cdots,x_r]^T=0$, 即只有零解, 因此得到线性无关.

五、设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$是 $\mathbb{R}^3$的一个基,$\beta_1 = 2\alpha_1 + 2k\alpha_3, \beta_2 = 2\alpha_2, \beta_3 = \alpha_1 + (k+1)\alpha_3$.

1. 证明: 向量组 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$是 $\mathbb{R}^3$的一个基.

五、设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$是 $\mathbb{R}^3$的一个基,$\beta_1 = 2\alpha_1 + 2k\alpha_3, \beta_2 = 2\alpha_2, \beta_3 = \alpha_1 + (k+1)\alpha_3$.
1. 证明: 向量组 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$是 $\mathbb{R}^3$的一个基.

证明: 对于方程组

$$[\beta_1, \beta_2, \beta_3]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2k & 0 & k+1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$$

由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性无关可得原方程组等价于

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2k & 0 & k+1 \end{bmatrix}}_{P}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$$

因为 $|P| = 4(k+1) - 4k = 4 \neq 0$, 因此 P可逆, 方程组只有零解, 因此三维向量组 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$线性无关, 即为一组 $\mathbb{R}^3$的基.

五、设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$是 $\mathbb{R}^3$的一个基,$\beta_1 = 2\alpha_1 + 2k\alpha_3, \beta_2 = 2\alpha_2, \beta_3 = \alpha_1 + (k+1)\alpha_3$.
2. 当 k为何值时, 存在非零向量 ξ在基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$与基 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$下的坐标相同, 并求出所有的 ξ.

五、设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$是 $\mathbb{R}^3$的一个基,$\beta_1 = 2\alpha_1 + 2k\alpha_3, \beta_2 = 2\alpha_2, \beta_3 = \alpha_1 + (k+1)\alpha_3$.
2. 当 k为何值时, 存在非零向量 ξ在基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$与基 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$下的坐标相同, 并求出所有的 ξ.

解: 由题意, 即存在 $\xi \neq 0$和坐标列向量 η使得

$$\xi = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]\eta = [\beta_1, \beta_1, \beta_2]\eta = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]P\eta$$

(P在 1 中定义) 我们可以知道坐标 η也非零, 否则得到 $\xi = 0$而矛盾, 因此从上式得到 $[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3](P - I)\eta = 0$有非零解, 结合 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性无关等价于 $(P - I)\eta = 0$有非零解, 即 $P - I$不可逆, 即 $|P - I| = -k = 0 \Rightarrow k = 0$. 此时求解

$$(P - I)\eta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \eta = 0 \Rightarrow \eta = k \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, k\text{为常数}$$

因此得到所有可能的 ξ为

$$\xi = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] \begin{bmatrix} -k \\ 0 \\ k \end{bmatrix} = -k\alpha_1 + k\alpha_3$$

注意还要求 $\xi \neq 0$, 因此 $k \neq 0$.

六、设 A是秩为 n的 $s \times n$矩阵, 证明:$r(AB) = r(B)$.

六、设 A是秩为 n的 $s\times n$矩阵, 证明:$r(AB)=r(B)$.

证明: 设 B为 $n\times m$阶矩阵, 我们只需证明 $ABx=0$和 $Bx=0$的解空间相同, 这样他们维数也相同, 得到 $m-r(B)=m-r(AB)$进而得到 $r(AB)=r(B)$.
首先若 x_0满足 $Bx_0=0$, 左乘 A即得到 $ABx_0=0$, 这说明 x_0也是 $ABx=0$的解;
反之若 x_0满足 $ABx_0=A(Bx_0)=0$, 因为 A列满秩, 故列向量线性无关, 因此 $Bx_0=0$, 即 x_0也是 $Bx=0$的解, 因此得证.

注: 此题告诉我们一个矩阵左乘列满秩矩阵秩也不变, 用转置不难证明右乘行满秩矩阵秩也不变.

七、设 $A=\begin{bmatrix}\lambda & 1 & 1\\ 0 & \lambda-1 & 0\\ 1 & 1 & \lambda\end{bmatrix}$, $b=\begin{bmatrix}a\\ 1\\ 1\end{bmatrix}$,已知线性方程组 $Ax=b$存在2个不同的解.

1. 求 λ, a;

七、设 $A = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 0 & \lambda-1 & 0 \\ 1 & 1 & \lambda \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} a \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$,已知线性方程组 $Ax = b$存在2个不同的解.

1. 求 λ, a;

解: 由题意可知 $Ax = b$有解且有无穷解, 对增广矩阵作初等行变换.

$$\left[\begin{array}{ccc:c} \lambda & 1 & 1 & a \\ 0 & \lambda-1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda & 1 \end{array}\right] \to \cdots \to \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & \lambda & 1 \\ 0 & \lambda-1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda^2 & a-\lambda+1 \end{array}\right]$$

首先有解要求 $\lambda - 1 \neq 0$, 否则第二行虚线左边全 0 而右边非零, 那么第三行需要全为零 (这样才有无穷解), 即

$$\begin{cases} \lambda - 1 \neq 0 \\ 1 - \lambda^2 = 0 \\ a - \lambda + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = -1 \\ a = -2 \end{cases}$$

七、设 $A=\begin{bmatrix}\lambda & 1 & 1\\ 0 & \lambda-1 & 0\\ 1 & 1 & \lambda\end{bmatrix}$,$b=\begin{bmatrix}a\\1\\1\end{bmatrix}$,已知线性方程组 $Ax=b$存在2个不同的解.

2. 求方程组 $Ax=b$的通解.

七、设 $A=\begin{bmatrix}\lambda & 1 & 1\\ 0 & \lambda-1 & 0\\ 1 & 1 & \lambda\end{bmatrix}$, $b=\begin{bmatrix}a\\1\\1\end{bmatrix}$,已知线性方程组 $Ax=b$存在2个不同的解.

2. 求方程组 $Ax=b$的通解.

解: 由 1 结论 $\lambda=-1, a=-2$, 对增广矩阵 $[A \ \ b]$进行初等行变换

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & -1 & 1\\ 0 & -2 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right]\to\cdots\to\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & -1 & \frac{3}{2}\\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right]$$

即可得到通解为

$$\begin{bmatrix}\frac{3}{2}\\ -\frac{1}{2}\\ 0\end{bmatrix}+k\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}, k\text{为任意常数}$$

八、设线性方程组 $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + ax_3 = 0 \\ x_1 + 4x_2 + a^2x_3 = 0 \end{cases}$ 与方程 $x_1 + 2x_2 + x_3 = a - 1$有公共解, 求 a的值和所有公共解.

八、设线性方程组 $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=0 \\ x_1+2x_2+ax_3=0 \\ x_1+4x_2+a^2x_3=0 \end{cases}$ 与方程 $x_1+2x_2+x_3=a-1$有公共解, 求 a的值和所有公共解.

解: 两个方程组的公共解即同时满足两个方程的解, 因此由题意可知

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=0 \\ x_1+2x_2+ax_3=0 \\ x_1+4x_2+a^2x_3=0 \\ x_1+2x_2+x_3=a-1 \end{cases}$$

有解, 故对增广矩阵作初等行变换

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & a & 0 \\ 1 & 4 & a^2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & a-1 \end{array}\right] \to \cdots \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-a & a-1 \\ 0 & 0 & 0 & (a-1)(a-2) \end{array}\right]$$

因此需要 $a=1$或 $a=2$.

八、设线性方程组 $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=0 \\ x_1+2x_2+ax_3=0 \\ x_1+4x_2+a^2x_3=0 \end{cases}$ 与方程 $x_1+2x_2+x_3=a-1$有公共解, 求 a的值和所有公共解.

解:(接上文)

①$a=1$时, 由

$$\to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \text{公共解} k\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, k\text{为任意常数}$$

②$a=2$时, 由

$$\to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \text{公共解} k\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, k\text{为任意常数}$$

九、设 $A=\begin{bmatrix}1&-2&3&-4\\0&1&-1&1\\1&2&0&-3\end{bmatrix}$, I为 3阶单位矩阵.

1. 求 $Ax=0$的一个基础解系;

2. 求满足 $AB=I$的所有矩阵 B.

九、设 $A=\begin{bmatrix}1&-2&3&-4\\0&1&-1&1\\1&2&0&-3\end{bmatrix}$, I为 3阶单位矩阵.

1. 求 $Ax=0$的一个基础解系;
2. 求满足 $AB=I$的所有矩阵 B.

注: 第二问需要对增广矩阵作初等行变换, 其系数矩阵部分则是第一部分需要的, 可以一并计算.

解:1. 对 $[A\quad I]$作初等行变换

$$\left[\begin{array}{cccc:ccc}1&-2&3&-4&1&0&0\\0&1&-1&1&0&1&0\\1&2&0&-3&0&0&1\end{array}\right]$$

$$\to\left[\begin{array}{cccc:ccc}1&0&0&1&2&6&-1\\0&1&0&-2&-1&-3&1\\0&0&1&-3&-1&4&1\end{array}\right]$$

即可得到基础解系为 $[-1,2,3,1]^T$.

九、设 $A=\begin{bmatrix}1 & -2 & 3 & -4\\ 0 & 1 & -1 & 1\\ 1 & 2 & 0 & -3\end{bmatrix}$,I为 3阶单位矩阵.

2. 求满足 $AB=I$的所有矩阵 B.

九、设 $A=\begin{bmatrix}1 & -2 & 3 & -4\\ 0 & 1 & -1 & 1\\ 1 & 2 & 0 & -3\end{bmatrix}$, I为 3阶单位矩阵.

2. 求满足 $AB=I$的所有矩阵 B.

解:2. 由 1 矩阵

$$\left[\begin{array}{cccc:ccc}1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 6 & -1\\ 0 & 1 & 0 & -2 & -1 & -3 & 1\\ 0 & 0 & 1 & -3 & -1 & 4 & 1\end{array}\right]$$

可得方程 $Ax=\varepsilon_1, Ax=\varepsilon_2, Ax=\varepsilon_3$的特解分别为

$$\begin{bmatrix}2\\ -1\\ -1\\ 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}6\\ -3\\ 4\\ 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1\\ 1\\ 1\\ 0\end{bmatrix}$$

结合 1 的导出组通解可得 B

$$B=\begin{bmatrix}2-k_1 & 6-k_2 & -1-k_3\\ -1+2k_1 & -3+2k_2 & 1+2k_3\\ -1+3k_1 & 4+3k_2 & 1+3k_3\\ k_1 & k_2 & k_3\end{bmatrix}$$

其中 k_1, k_2, k_3为任意常数.