线性代数第十二次作业

2024 年 6 月 16 日

本次作业

《线性代数习题册 (第三版)》

- $91 \sim 96$页: 综合练习 (三)
- $97 \sim 100$页: 二次型及其矩阵表示
- $101 \sim 102$页: 二次型化为标准型
- $103 \sim 106$页: 正定二次型
- $107 \sim 110$页: 综合训练 (四)

习题答案会上传至 github 中.

图: github 链接二维码

一、A是正交矩阵且 $|A|=-1$,证明 : -1是 A的一个特征值.

一、A是正交矩阵且 $|A|=-1$,证明：-1是 A的一个特征值.

证明: 只需验证 $|-I-A|=0$即可. 因为

$$
\begin{aligned}
|-I-A| &= -|A^T||-I-A| = -|-A^T-A^TA| = -|-A^T-I| \\
&= -|-I-A^T| = -|-I-A|
\end{aligned}
$$

进而得到 $|-I-A|=0$, 得证.

二、求 n阶方阵 $A=\begin{bmatrix} a & a & \cdots & a \\ a & a & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & a \end{bmatrix}$ 的特征值与对应的特征向量.

二、求 n阶方阵 $A = \begin{bmatrix} a & a & \cdots & a \\ a & a & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & a \end{bmatrix}$ 的特征值与对应的特征向量.

解:①$a = 0$时 $A = 0$, 显然特征值为 0(n重), 特征向量为 $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n$.
②$a \neq 0$时, 设 $\alpha = [1, 1, \cdots, 1]^T \in \mathbb{R}^n$, 有

$$|\lambda I_n - A| = |\lambda I_n - a\alpha\alpha^T| = \lambda^{n-1}(\lambda - a\alpha^T\alpha) = \lambda^{n-1}(\lambda - na)$$

可知特征值为 0($n-1$重) 和 na,0对应的特征向量为

$$\xi_1 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2, \xi_2 = \varepsilon_1 - \varepsilon_3, \cdots, \xi_{n-1} = \varepsilon_1 - \varepsilon_n$$

na对应的特征向量为 $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_n$.

注: 此题和 84 页第 4 题完全相同.

三、设 α_1, α_2是矩阵 A对应于不同特征值 λ_1, λ_2的特征向量, 且 $\lambda_1\lambda_2 \neq 0$,证明:$\lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2$不是 A的特征向量.

三、设 α_1, α_2是矩阵 A对应于不同特征值 λ_1, λ_2的特征向量, 且 $\lambda_1\lambda_2 \neq 0$,证明:$\lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2$不是 A的特征向量.

证明: 反证, 若不然 $\lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2$确为 A的特征向量, 那么存在特征值 λ使得

$$A(\lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2) = \lambda(\lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2)$$

另外也有 $A(\lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2) = \lambda_1^2\alpha_1 + \lambda_2^2\alpha_2$, 和上式联立得到

$$(\lambda_1 - \lambda)\lambda_1\alpha_1 + (\lambda_2 - \lambda)\lambda_2\alpha_2 = 0$$

由于 α_1, α_2是不同特征值的特征向量, 因此必定线性无关, 得到

$$\begin{cases} \lambda_1 - \lambda = 0 \\ \lambda_2 - \lambda = 0 \end{cases} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2$$

与 $\lambda_1 \neq \lambda_2$矛盾, 因此得证.

四、已知向量 $\alpha = [1, k, 1]^T$是矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

的逆矩阵的特征向量, 求常数 k.

四、已知向量 $\alpha = [1, k, 1]^T$ 是矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

的逆矩阵的特征向量, 求常数 k.

解一: 由题意,α为 A^{-1}的特征向量, 那么必定也为 A的特征向量 (小结论). 因为 A已知, 我们可以先求 A的特征向量.
令 $\beta = [1, 1, 1]^T$, 那么不难看出 $A = I + \beta\beta^T$, 而 $\beta\beta^T$的特征值为 0(2重) 和 3, 其中 0的特征向量为 $\xi_1 = [1, -1, 0]^T, \xi_2 = [1, 0, -1]^T$,3的特征向量为 $\xi_3 = [1, 1, 1]^T$(第二题结论), 所以 $I + \beta\beta^T$中 1(2重) 对应的特征向量也为 ξ_1, ξ_2,4对应的特征向量为 ξ_3.
因为 α为 A的特征向量, 那么它或者被 ξ_1, ξ_2线性表出, 或者被 ξ_3线性表出 (不可能同时被两部分线性表出, 为什么?). 对于前者, 可以得到 $2\xi_1 - \xi_3 = [1, -2, 1]^T = \alpha$得到 $k = -2$; 对于后者, 可以得到 $\xi_3 = \alpha$得到 $k = 1$.
综上,$k = 1$或 -2.

四、已知向量 $\alpha = [1, k, 1]^T$ 是矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

的逆矩阵的特征向量, 求常数 k.

解二: 我们可知 α 也为 A 的特征向量, 即存在 λ 使得

$$A\alpha = \lambda\alpha \Rightarrow \begin{cases} 3 + k = \lambda \\ 2 + 2k = \lambda k \\ 3 + k = \lambda \end{cases} \Rightarrow 2 + 2k = (3 + k)k \Rightarrow k = -2, 1$$

五、A, B是 n阶方阵, 证明 : AB与 BA有相同的特征值.

五、A,B是 n阶方阵, 证明 : AB与 BA有相同的特征值.

证明一: 我们只需证明 AB的特征值也为 BA的特征值即可 (反向由对称性立即得到).
①若 AB存在 0特征值, 此即表示 $|AB|=0$, 那么显然有 $|BA|=0$也成立, 即表示 BA也有 0特征值.
②若 AB存在非零特征值 λ, 即存在特征向量 ξ使得 $AB\xi=\lambda\xi$, 左乘 B得到 $(BA)(B\xi)=\lambda(B\xi)$, 我们断言 $B\xi\neq 0$, 这样也表示 λ为 BA的特征值, 因此得证. 若不然 $B\xi=0$, 那么 $\lambda\xi=A(B\xi)=0$, 而结合 $\xi\neq 0$得到 $\lambda=0$, 这与特征值非零的假设矛盾, 因此得证.

五、A, B是 n阶方阵, 证明 : AB与 BA有相同的特征值.

证明一: 我们只需证明 AB的特征值也为 BA的特征值即可 (反向由对称性立即得到).
①若 AB存在 0特征值, 此即表示 $|AB| = 0$, 那么显然有 $|BA| = 0$也成立, 即表示 BA也有 0特征值.
②若 AB存在非零特征值 λ, 即存在特征向量 ξ使得 $AB\xi = \lambda\xi$, 左乘 B得到 $(BA)(B\xi) = \lambda(B\xi)$, 我们断言 $B\xi \neq 0$, 这样也表示 λ为 BA的特征值, 因此得证. 若不然 $B\xi = 0$, 那么 $\lambda\xi = A(B\xi) = 0$, 而结合 $\xi \neq 0$得到 $\lambda = 0$, 这与特征值非零的假设矛盾, 因此得证.

证明二: 由 $|\lambda I_n - AB| = |\lambda I_n - BA|$, 可知 AB, BA的特征多项式相同, 因此 AB, BA的特征值相同.

注: 证明一只证明了特征值的种类相同, 没有证明重数相同; 而证明二可以得到重数也相同的结论.

六、设 $A \sim B$, 且 $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & a & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & b \end{bmatrix}$

1. 求 a, b;

六、设 $A \sim B$, 且 $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & a & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & b \end{bmatrix}$

1. 求 a, b;

解:A, B相似, 那么它们的迹和行列式相等,

$$\begin{cases} 5 + a = 3 + b \\ 6a - 8 = 2b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 5 \end{cases}$$

六、设 $A \sim B$, 且 $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & a & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & b \end{bmatrix}$

2. 求可逆阵 P, 使 $P^{-1}AP = B$.

六、设 $A \sim B$, 且 $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & a & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & b \end{bmatrix}$

2. 求可逆阵 P, 使 $P^{-1}AP = B$.

解: 因为 B为对角矩阵, 即将 A对角化 (因为指定了对角元的位置, 因此 P中特征向量的位置还需要注意). 求得 $|\lambda I - A| = (\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 5)$, 得到特征值为 $1, 2, 5$, 他们的特征向量分别为

$$\xi_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \xi_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \xi_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

这样令 $P = [\xi_1, \xi_2, \xi_3]$, 即可得到 $P^{-1}AP = B$.

七、设向量 $\alpha=[a_1,a_2,\cdots,a_n]^T,\beta=[b_1,b_2,\cdots,b_n]^T$都是非零向量, 且 $\alpha^T\beta=0$, 记 $A=\alpha\beta^T$, 求:
1.A^2.

七、设向量 $\alpha = [a_1, a_2, \cdots, a_n]^T, \beta = [b_1, b_2, \cdots, b_n]^T$都是非零向量, 且 $\alpha^T\beta = 0$, 记 $A = \alpha\beta^T$, 求:
1.A^2.

解: 由

$$A^2 = \alpha(\beta^T\alpha)\beta^T = (\beta^T\alpha)\alpha\beta^T = (\alpha^T\beta)\alpha\beta^T = 0$$

七、设向量 $\alpha = [a_1, a_2, \cdots, a_n]^T, \beta = [b_1, b_2, \cdots, b_n]^T$都是非零向量, 且 $\alpha^T\beta = 0$, 记 $A = \alpha\beta^T$, 求:
2. 矩阵 A的特征值与特征向量;

七、设向量 $\alpha = [a_1, a_2, \cdots, a_n]^T, \beta = [b_1, b_2, \cdots, b_n]^T$都是非零向量, 且 $\alpha^T\beta = 0$, 记 $A = \alpha\beta^T$, 求:
2. 矩阵 A的特征值与特征向量;

解: 首先特征多项式 $|\lambda I_n - \alpha\beta^T| = \lambda^{n-1}(\lambda - \beta^T\alpha) = \lambda^n$可知特征值为 0(n重), 另一方面,$0 < r(A) = r(\alpha\beta^T) \leqslant r(\alpha) = 1$, 因此 $r(A) = 1$, 可知 $Ax = 0$的解空间维数为 $n-1$, 只需要找到 $n-1$个线性无关的解即为特征向量.
又由 $Ax = 0 \Rightarrow \alpha\beta^Tx = (\beta^Tx)\alpha = 0 \Rightarrow \beta^Tx = 0$. 设 β中 $b_k \neq 0$, 那么可得特征向量

$$\xi_i = \varepsilon_i - \frac{b_i}{b_k}\varepsilon_k \ (i = 1, 2, \cdots, k-1, k+1, \cdot, n)$$

注 1: 当然显然有 $\beta^T\alpha = 0$, 因此 α也是一个特征向量, 它必然可以由 $\xi_1, \cdot, \xi_{k-1}, \xi_{k+1}, \cdots, \xi_n$线性表出.
注 2: 第 2 问的特征值也可以由第一问得到, 因为 $A^2 = 0$, 那么 A的特征值必定为 $x^2 = 0$的根, 即为 0.

八、求解微分方程组 $\begin{bmatrix} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$

八、求解微分方程组 $\begin{bmatrix} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$.

解: 令 $z = [x, y]^T, A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$,那么原方程组可以写为 $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = Az$. 求解该齐次常系数线性方程组有固定方法.

首先求得 A的特征值为 $5, -1$, 都为 1重根, 因此分别求特征向量得到

$$\xi_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \xi_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

那么可得解

$$z = k_1 e^{5t} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + k_2 e^{-t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 e^{5t} + k_2 e^{-t} \\ 2k_1 e^{5t} - k_2 e^{-t} \end{bmatrix}$$

即

$$\begin{cases} x = k_1 e^{5t} + k_2 e^{-t} \\ y = 2k_1 e^{5t} - k_2 e^{-t} \end{cases}$$

其中 k_1, k_2为任意常数.

拓展: 对于 $z=[x_1,x_2,\cdots,x_n]^T$, A为 n阶常数矩阵, 求解 $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=Az$的方法如下:

①首先求出 A的 n个特征值, 设 $\lambda_1,\cdots,\lambda_s$互不相同, 重数为 $n_1,\cdots,n_s$, 即 $n_1+\cdots+n_s=n$;

②对于 λ_i, 由

$$\begin{cases}(A-\lambda_i I)^{n_i}c_0=0, c_0\neq 0\\ c_1=(A-\lambda_i I)c_0\\ c_2=(A-\lambda_i I)c_1\\ \vdots\\ c_{n_i-1}=(A-\lambda_i I)c_{n_i-2}\end{cases}$$

求出向量 $c_0,c_1,\cdots,c_{n_i-1}$.c_0可取 $(A-\lambda_i I)^{n_i}x=0$的基础解系的任意一个向量, 因此得到的不同的 $c_0,c_1,\cdots,c_{n_i-1}$序列共有 $r=n-r((A-\lambda_i I)^{n_i})$组, 可记为

$$\begin{aligned}&c_0^{(1)}\to c_1^{(1)}\to\cdots\to c_{n_i-1}^{(1)}\\ &c_0^{(2)}\to c_1^{(2)}\to\cdots\to c_{n_i-1}^{(2)}\\ &\vdots\\ &c_0^{(r)}\to c_1^{(r)}\to\cdots\to c_{n_i-1}^{(r)}\end{aligned}$$

③每一组 $c_0^{(j)},\cdots,c_{n_i-1}^{(j)}$都组成一个关于 t的向量

$$P^{(j)}=c_0^{(j)}+\frac{t}{1!}c_1^{(j)}+\cdots+\frac{t^{n_i-1}}{(n_i-1)!}c_{n_i-1}^{(j)}$$

即得到 r个向量 $P^{(1)},\cdots,P^{(r)}$.

④关于特征值 λ_i的 n_i个线性无关的解向量即为

$$e^{\lambda_i}P^{(1)},e^{\lambda_i t}P^{(2)},\cdots,e^{\lambda_i t}P^{(r)}$$

⑤回到第②步直至所有不同的 λ_i对应的解向量都得到, 这样 z即为这些解向量 (共有 n个) 的线性组合, 其中系数为任意常数.

注: 特别的, 如果某个特征值 λ_i的重数为 1, 其特征向量为 ξ, 那么该特征值的解向量为 $e^{\lambda_i t}\xi$.

九、$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}_{n\times n}$, $B = \begin{bmatrix} n & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{n\times n}$, 证明:$A \sim B$.

注: 我们求出 A, B的相似对角矩阵, 如果他们的对角元除了排列顺序外完全相同, 那么则有 A, B相似.

九、$A=\begin{bmatrix}1&1&\cdots&1\\1&1&\cdots&1\\\vdots&\vdots&&\vdots\\1&1&\cdots&1\end{bmatrix}_{n\times n}$, $B=\begin{bmatrix}n&0&\cdots&0\\1&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\1&0&\cdots&0\end{bmatrix}_{n\times n}$, 证明:$A\sim B$.

注: 我们求出 A,B的相似对角矩阵, 如果他们的对角元除了排列顺序外完全相同, 那么则有 A,B相似.

证明: 令 $\alpha=(1,1,\cdots,1)^T\in\mathbb{R}^n$, 那么显然有 $A=\alpha\alpha^T$. 首先可得 A的特征多项式

$$|\lambda I_n-A|=|\lambda I_n-\alpha\alpha^T|=\lambda^{n-1}(\lambda-\alpha^T\alpha)=\lambda^{n-1}(\lambda-n)$$

因此可知特征值为 $0(n-1$重) 和 $n(1$重),n的代数重数必定等于几何重数 (为 1), 而因为 $n-r(A)=n-1$可知 0的几何重数 $n-1$也等于代数重数, 因此 A可对角化, 其对角矩阵的对角元为 1个 n和 $n-1$个 0;

另一方面,B为下三角矩阵, 因此立即得到特征值为对角元, 即 $0(n-1$重) 和 $n(1$重), 同理 n的代数重数等于几何重数 (1), 由 $n-r(B)=n-1$可知 0的代数重数也等于几何重数 $(n-1)$, 因此 B也可对角化, 其对角元也为 1个 n和 $n-1$个 0, 因此可知 $A\sim B$.

十、$\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$,求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n, \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

注: 此类矩阵表示的递推数列即转换为求矩阵的 n次幂, 其中一种方法即为对角化.

十、$\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$,求 $\lim_{n\to\infty} x_n, \lim_{n\to\infty} y_n$.

注: 此类矩阵表示的递推数列即转换为求矩阵的 n次幂, 其中一种方法即为对角化.

解: 令 $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$, 那么不难得到

$$\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{bmatrix} = A^2 \begin{bmatrix} x_{n-2} \\ y_{n-2} \end{bmatrix} = \cdots = A^n \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$$

先求 A^n, 首先 $|\lambda I - A| = (\lambda - \frac{1}{2})(\lambda - 1)$可知特征值为 $\frac{1}{2}, 1$, 进而得到他们的特征向量分别为 $\xi_1 = [2, 3]^T, \xi_2 = [1, 1]^T$, 因此令

$P = [\xi_1, \xi_2]$, 那么 $P^{-1}AP = \Lambda = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, 得到 $n \to \infty$时

$$A^n = P\Lambda^n P^{-1} = P \begin{bmatrix} \frac{1}{2^n} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} P^{-1} \to P \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} P^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$$

所以

$$\lim_{n\to\infty} \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} = \lim_{n\to\infty} A^n \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ -5 \end{bmatrix}$$

即 $\lim_{n\to\infty} x_n = -5, \lim_{n\to\infty} y_n = -5.$

一、写出下列二次型的矩阵, 并求出该二次型的秩.

1.$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 + 3x_2^2 - x_3^2 - 3x_4^2 + 2x_1x_2 + x_1x_3 - 2x_2x_4 + x_3x_4$;

一、写出下列二次型的矩阵，并求出该二次型的秩.

1.$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=x_1^2+3x_2^2-x_3^2-3x_4^2+2x_1x_2+x_1x_3-2x_2x_4+x_3x_4$;

解: 对角元照写, 非对角元要除以 2. 二次型矩阵为

$$A=\begin{bmatrix}1&1&\frac{1}{2}&0\\1&3&0&-1\\\frac{1}{2}&0&-1&\frac{1}{2}\\0&-1&\frac{1}{2}&-3\end{bmatrix}$$

对 A作初等行变换可得

$$A\rightarrow\begin{bmatrix}2&2&1&0\\0&1&0&-4\\0&0&1&-14\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

因此可知 $r(A)=4$.

一、写出下列二次型的矩阵，并求出该二次型的秩.

2.$f(x_1,x_2,x_3)=[x_1,x_2,x_3]\begin{bmatrix}1&2&3\\0&1&2\\2&3&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$.

一、写出下列二次型的矩阵, 并求出该二次型的秩.

2. $f(x_1,x_2,x_3)=[x_1,x_2,x_3]\begin{bmatrix}1&2&3\\0&1&2\\2&3&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$.

注: 此时的矩阵不是二次型的矩阵, 需要调整为对称矩阵, 即将对称的两个元均分即可.

解: 由题意二次型矩阵为

$$A=\begin{bmatrix}1&1&\frac{5}{2}\\1&1&\frac{5}{2}\\\frac{5}{2}&\frac{5}{2}&1\end{bmatrix}$$

对 A作初等行变换可得

$$A\to\begin{bmatrix}2&2&5\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}$$

因此可知 $r(A)=2$.

二、已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=5x_1^2+5x_2^2+kx_3^2\boxed{-3x_4^2}-2x_1x_2+6x_1x_3-6x_2x_3$的秩为 2, 求参数 k.

二、已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=5x_1^2+5x_2^2+kx_3^2\boxed{-3x_4^2}-2x_1x_2+6x_1x_3-6x_2x_3$的秩为2, 求参数 k.

注: 原题有误, 删除带框部分.
解: 对二次型的矩阵作初等变换,

$$A=\begin{bmatrix}5&-1&3\\-1&5&-3\\3&-3&k\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}-1&5&-3\\0&2&-1\\0&0&k-3\end{bmatrix}$$

若要 $r(A)=2$, 只需 $k=3$.

三、设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+x_2^2-4x_1x_2-4x_2x_3$, 分别作如下4个可逆线性替换, 求新二次型.

1. $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$

三、设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+x_2^2-4x_1x_2-4x_2x_3$, 分别作如下4个可逆线性替换, 求新二次型.

1. $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$

解: 设

$$A=\begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

可知 A即为该二次型的矩阵, 且作线性变换 $x=By$, 因此

$$f=x^TAx=(By)^TA(By)=y^T(B^TAB)y$$

可知新二次型的矩阵即为

$$B^TAB=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

新二次型即

$$g(y_1,y_2,y_3)=2y_1^2-y_2^2+4y_3^2$$

三、设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+x_2^2-4x_1x_2-4x_2x_3$, 分别作如下4个可逆线性替换, 求新二次型.

2. $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$

三、设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+x_2^2-4x_1x_2-4x_2x_3$, 分别作如下4个可逆线性替换, 求新二次型.

2. $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$

解: 设

$$A=\begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

可知 A即为该二次型的矩阵, 且作线性变换 $x=By$, 因此

$$f=x^TAx=(By)^TA(By)=y^T(B^TAB)y$$

可知新二次型的矩阵即为

$$B^TAB=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

新二次型即

$$g(y_1,y_2,y_3)=y_1^2-y_2^2+y_3^2$$

三、设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+x_2^2-4x_1x_2-4x_2x_3$, 分别作如下 4 个可逆线性替换, 求新二次型.

3. $\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$

三、设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+x_2^2-4x_1x_2-4x_2x_3$, 分别作如下4个可逆线性替换, 求新二次型.

3. $\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$

解: 设

$$A=\begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

可知 A即为该二次型的矩阵, 且作线性变换 $y=Bx$即 $x=B^{-1}y$, 因此

$$f=x^TAx=(B^{-1}y)^TA(B^{-1}y)=y^T(B^{-1})^TAB^{-1}y$$

可知新二次型的矩阵即为

$$(B^{-1})^TAB^{-1}=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

新二次型即

$$g(y_1,y_2,y_3)=2y_1^2-y_2^2+4y_3^2$$

三、设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+x_2^2-4x_1x_2-4x_2x_3$, 分别作如下4个可逆线性替换, 求新二次型.

4. $\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$

三、设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+x_2^2-4x_1x_2-4x_2x_3$，分别作如下4个可逆线性替换，求新二次型.

4. $\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$

解: 设

$$A=\begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

可知 A即为该二次型的矩阵，且作线性变换 $y=Bx$即 $x=B^{-1}y$，因此

$$f=x^TAx=(B^{-1}y)^TA(B^{-1}y)=y^T(B^{-1})^TAB^{-1}y$$

可知新二次型的矩阵即为

$$(B^{-1})^TAB^{-1}=\begin{bmatrix} 2 & -6 & 6 \\ -6 & 17 & -18 \\ 6 & -18 & 22 \end{bmatrix}$$

新二次型即

$$g(y_1,y_2,y_3)=2y_1^2+17y_2^2+22y_3^2-12y_1y_2+12y_1y_3-36y_2y_3$$

一、分别用正交变换法和配方法化下列二次型为标准型.

1.$f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 4x_2x_3$;

解:(正交变换法) 即求二次型矩阵的正交相似对角矩阵, 只需再得到特征向量后进行施密特正交化 (不同特征值的特征向量一定正交).

一、分别用正交变换法和配方法化下列二次型为标准型.

1.$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1x_2+2x_1x_3-4x_2x_3$;

解:(正交变换法) 即求二次型矩阵的正交相似对角矩阵, 只需再得到特征向量后进行施密特正交化 (不同特征值的特征向量一定正交).首先二次型矩阵为

$$A=\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&-2\\1&-2&0\end{bmatrix},\ |\lambda I-A|=(\lambda-2)(\lambda^2+2\lambda-2)\Rightarrow\lambda=2,-1\pm\sqrt{3}$$

此时只需将特征向量单位化即可, 得到

$$Q=\begin{bmatrix}0&\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{6+2\sqrt{3}}}&\frac{1-\sqrt{3}}{\sqrt{6-2\sqrt{3}}}\\-\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{1}{\sqrt{6+2\sqrt{3}}}&\frac{1}{\sqrt{6-2\sqrt{3}}}\\\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{1}{\sqrt{6+2\sqrt{3}}}&\frac{1}{\sqrt{6-2\sqrt{3}}}\end{bmatrix},Q^TAQ=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&-1+\sqrt{3}&0\\0&0&-1-\sqrt{3}\end{bmatrix}$$

这样令 $x=Qy$后即可得到标准型

$$f=2y_1^2+(\sqrt{3}-1)y_2^2-(1+\sqrt{3})y_3^2$$

一、分别用正交变换法和配方法化下列二次型为标准型.

1.$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1x_2+2x_1x_3-4x_2x_3$;

解:(配方法) 配方法即不断使用完全平方公式进行配凑, 一个变量一个变量依次进行, 如果开始没有二次项, 就使用 $x_1=y_1+y_2, x_2=y_1-y_2, x_3=y_3$先初始化.

一、分别用正交变换法和配方法化下列二次型为标准型.

1.$f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 4x_2x_3$;

解:(配方法) 配方法即不断使用完全平方公式进行配凑, 一个变量一个变量依次进行, 如果开始没有二次项, 就使用 $x_1 = y_1 + y_2, x_2 = y_1 - y_2, x_3 = y_3$先初始化.
首先作可逆线性变换

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

得到二次型 $f = 2y_1^2 - 2y_2^2 - 2y_1y_3 - 2y_2y_3$, 进行配方

$$f = 2y_1^2 - 2y_2^2 - 2y_1y_3 + 6y_2y_3 = 2(y_1^2 - y_1y_3) - 2y_2^2 + 6y_2y_3$$

$$= 2\left(y_1 - \frac{1}{2}y_3\right)^2 - \frac{1}{2}y_3^2 - 2(y_2^2 - 3y_2y_3)$$

$$= 2\left(y_1 - \frac{1}{2}y_3\right)^2 - 2\left(y_2 - \frac{3}{2}y_3\right)^2 + 4y_3^2$$

一、分别用正交变换法和配方法化下列二次型为标准型.

1.$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1x_2+2x_1x_3-4x_2x_3$;

解:(配方法)(接上文) 因此作可逆线性变换

$$\begin{bmatrix} z_1\\ z_2\\ z_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2}\\ 0 & 1 & -\frac{3}{2}\\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1\\ y_2\\ y_3 \end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix} y_1\\ y_2\\ y_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2}\\ 0 & 1 & \frac{2}{3}\\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z_1\\ z_2\\ z_3 \end{bmatrix}$$

即可化为标准形 $f=2z_1^2-2z_2^2+4y_3^2$, 总的可逆线性变换为

$$\begin{bmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2}\\ 0 & 1 & \frac{2}{3}\\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1\\ y_2\\ y_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{10}{6}\\ 1 & -1 & -\frac{1}{6}\\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1\\ y_2\\ y_3 \end{bmatrix}$$

注: 使用正交变换法求出的标准型在不考虑系数排列是唯一的, 因为系数都是二次型矩阵的特征值, 而配方法得到的标准型不是唯一的, 但所有标准型中正数、复数和零的个数是确定的, 即惯性定理.

一、分别用正交变换法和配方法化下列二次型为标准型.

2.$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3$;

一、分别用正交变换法和配方法化下列二次型为标准型.

2.$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2+3x_3^2+4x_1x_2-2x_1x_3-2x_2x_3$;

解: 同理, 因为

$$A=\begin{bmatrix}1&2&-1\\2&2&-1\\-1&-1&3\end{bmatrix},|\lambda I-A|=\lambda^3-6\lambda^2+5\lambda+5$$

得到特征值近似为 $4.71448, 1.85672, -0.571201$, 因此只需要求特征向量后单位化即可, 得到

$$\xi_1=\begin{bmatrix}-0.775041\\-0.939437\\1\end{bmatrix},\xi_2=\begin{bmatrix}0.45036\\0.692917\\1\end{bmatrix},\xi_3=\begin{bmatrix}14.3247\\-10.7535\\1\end{bmatrix}$$

$$Q=\left[\frac{\xi_1}{|\xi_1|},\frac{\xi_2}{|\xi_2|},\frac{\xi_3}{|\xi_3|}\right],Q^TAQ=\begin{bmatrix}4.71448&0&0\\0&1.85672&0\\0&0&-0.571201\end{bmatrix}$$

作变换 $x=Qy$后得到标准型

$$f=4.71448y_1^2+1.85672y_2^2-0.571201y_3^2$$

一、分别用正交变换法和配方法化下列二次型为标准型.

2.$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3$;

解:(配方法) 由

$$\begin{aligned}
f &= (x_1^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3) + 2x_2^2 + 3x_3^2 - 2x_2x_3 \\
&= (x_1 + 2x_2 - x_3)^2 - 4x_2^2 - x_3^2 + 4x_2x_3 + 2x_2^2 + 3x_3^2 - 2x_2x_3 \\
&= (x_1 + 2x_2 - x_3)^2 - 2(x_2^2 - x_2x_3) + 2x_3^2 \\
&= (x_1 + 2x_2 - x_3)^2 - 2\left(x_2 - \frac{1}{2}x_3\right)^2 + \frac{1}{2}x_3^2 + 2x_3^2 \\
&= (x_1 + 2x_2 - x_3)^2 - 2\left(x_2 - \frac{1}{2}x_3\right)^2 + \frac{5}{2}x_3^2
\end{aligned}$$

因此作可逆线性变换

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

即可得到标准形 $f = y_1^2 - 2y_2^2 + \frac{5}{2}y_3^2$

一、分别用正交变换法和配方法化下列二次型为标准型.

3.$f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 - x_2^2 + 9x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3$;

一、分别用正交变换法和配方法化下列二次型为标准型.

3.$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2-x_2^2+9x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3+4x_2x_3$;

解: 因为

$$A=\begin{bmatrix}2&1&1\\1&-1&2\\1&2&9\end{bmatrix},|\lambda I-A|=(\lambda-2)(\lambda-4-\sqrt{31})(\lambda-4+\sqrt{31})$$

计算特征向量并单位化, 得到

$$\xi_1=\begin{bmatrix}-5\\-1\\1\end{bmatrix},\xi_2=\begin{bmatrix}2\\3-\sqrt{31}\\7+\sqrt{31}\end{bmatrix},\xi_3=\begin{bmatrix}-2\\3+\sqrt{31}\\\sqrt{31}-7\end{bmatrix}$$

$$Q=\left[\frac{\xi_1}{|\xi_1|},\frac{\xi_2}{|\xi_2|},\frac{\xi_3}{|\xi_3|}\right],Q^TAQ=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&4+\sqrt{31}&0\\0&0&4-\sqrt{31}\end{bmatrix}$$

作变换 $x=Qy$后得到标准型

$$f=2y_1^2+(4+\sqrt{31})y_2^2+(4-\sqrt{31})y_3^2$$

一、分别用正交变换法和配方法化下列二次型为标准型.

3.$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2-x_2^2+9x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3+4x_2x_3$;

解:(配方法) 由

$$f=2(x_1^2+x_1x_2+x_1x_3)-x_2^2+9x_3^2+4x_2x_3$$

$$=2\left(x_1+\frac{1}{2}x_2+\frac{1}{2}x_3\right)^2-\frac{1}{2}x_2^2-\frac{1}{2}x_3^2-x_2x_3-x_2^2+9x_3^2+4x_2x_3$$

$$=2\left(x_1+\frac{1}{2}x_2+\frac{1}{2}x_3\right)^2-\frac{3}{2}(x_2^2-2x_2x_3)+\frac{17}{2}x_3^2$$

$$=2\left(x_1+\frac{1}{2}x_2+\frac{1}{2}x_3\right)^2-\frac{3}{2}(x_2-x_3)^2+\frac{3}{2}x_3^2+\frac{17}{2}x_3^2$$

$$=2\left(x_1+\frac{1}{2}x_2+\frac{1}{2}x_3\right)^2-\frac{3}{2}(x_2-x_3)^2+10x_3^2$$

因此作可逆线性变换

$$\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1/2&1/2\\0&1&-1\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-\frac{1}{2}&-1\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix}$$

即可得到标准形 $f=2y_1^2-\frac{3}{2}y_2^2+10y_3^2$

一、分别用正交变换法和配方法化下列二次型为标准型.

4.$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=2x_1^2+2x_2^2+2x_3^2+2x_4^2+2x_1x_2+2x_3x_4$.

一、分别用正交变换法和配方法化下列二次型为标准型.

4.$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_4^2 + 2x_1x_2 + 2x_3x_4$.

解: 因为

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, |\lambda I - A| = (\lambda - 1)^2(\lambda - 3)^2$$

因此 1和 3的特征向量各自需要正交单位化, 得到

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{bmatrix}, Q^TAQ = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

即得到标准形

$$f = y_1^2 + y_2^2 + 3y_3^2 + 3y_4^2$$

一、分别用正交变换法和配方法化下列二次型为标准型.

4. $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=2x_1^2+2x_2^2+2x_3^2+2x_4^2+2x_1x_2+2x_3x_4.$

解:(配方法) 由

$$\begin{aligned} f &= 2(x_1^2+x_1x_2)+2x_2^2+2x_3^2+2x_4^2+2x_3x_4 \\ &= 2\left(x_1+\frac{1}{2}x_2\right)^2-\frac{1}{2}x_2^2+2x_2^2+2x_3^2+2x_4^2+2x_3x_4 \\ &= 2\left(x_1+\frac{1}{2}x_2\right)^2+\frac{3}{2}x_2^2+2\left(x_3+\frac{1}{2}x_4\right)^2+\frac{3}{2}x_4^2 \end{aligned}$$

因此作可逆线性变换

$$\begin{bmatrix} y_1\\ y_2\\ y_3\\ y_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1/2\\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4 \end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1\\ y_2\\ y_3\\ y_4 \end{bmatrix}$$

即可得到标准形 $f=2y_1^2+\frac{3}{2}y_2^2+2y_3^2+\frac{3}{2}y_4^2$

二、已知 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+3x_2^2+3x_3^2+2ax_2x_3\,(a>0)$经过正交变换化为标准形 $f(x_1,x_2,x_3)=y_1^2+2y_2^2+5y_3^2$, 求参数 a以及所用的正交变换.

二、已知 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+3x_2^2+3x_3^2+2ax_2x_3(a>0)$经过正交变换化为标准形 $f(x_1,x_2,x_3)=y_1^2+2y_2^2+5y_3^2$, 求参数 a以及所用的正交变换.

解: 由题意, 可知 A,B正交相似, 即相似, 因此 $|A|=2(9-a^2)=|B|=10$, 得到 $a=2(a=-2$舍去$)$. 另一方面, 因为

$$|\lambda I-A|=(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-5)\Rightarrow\lambda=1,2,5$$

求得特征向量为

$$\xi_1=\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix},\xi_2=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\xi_3=\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}\Rightarrow Q=\begin{bmatrix}0&1&0\\\frac{\sqrt{2}}{2}&0&\frac{\sqrt{2}}{2}\\-\frac{\sqrt{2}}{2}&0&\frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}$$

因此作正交变换 $x=Qy$后即为所求.

三、设 3阶实对称矩阵 A的特征值为 $1, 2, 3, \alpha = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]^T, f(\alpha) = \alpha^T A\alpha$. 当 $\|\alpha\| = 1$时, 求 $f(\alpha)$的最大值和最小值.

三、设 3阶实对称矩阵 A的特征值为 $1,2,3,\alpha=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]^T$,$f(\alpha)=\alpha^TA\alpha$. 当 $\|\alpha\|=1$时, 求 $f(\alpha)$的最大值和最小值.

解: 由题意可知,A正交相似于 $1,2,3$, 即存在正交矩阵 Q使得 $Q^TAQ=\Lambda=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{bmatrix}$, 故

$$f(\alpha)=\alpha^TA\alpha=\alpha Q\Lambda Q^T\alpha=(Q^T\alpha)\Lambda(Q^T\alpha)$$

令 $Q^T\alpha=\beta$, 可知 $\|\alpha\|=1$等价于 $\|\beta\|=1$, 因为 $\|\beta\|^2=\beta^T\beta=\alpha^TQ^TQ\alpha=\alpha^T\alpha=\|\alpha\|^2$, 因此 $f(\alpha)$在 $\|\alpha\|=1$时的最大值最小值即为 $g(\beta)=\beta^T\Lambda\beta$在 $\|\beta\|=1$的最大值最小值, 后者显然由

$$g(\beta)=\beta^T\Lambda\beta=\beta_1^2+2\beta_2^2+3\beta_3^2\leqslant 3\beta_1^2+3\beta_2^2+3\beta_3^2=3(\beta_1^2+\beta_2^2+\beta_3^2)$$
$$=3\beta^T\beta=3\|\beta\|^2=3$$

和

$$g(\beta)=\beta^T\Lambda\beta=\beta_1^2+2\beta_2^2+3\beta_3^2\geqslant\beta_1^2+\beta_2^2+\beta_3^2=\beta^T\beta=\|\beta\|^2=1$$

得到 $g(\beta)$的最值分别为 $1,3$, 因此 $f(\alpha)$的最大值为 3, 最小值为 1.

三、设 3阶实对称矩阵 A的特征值为 $1, 2, 3, \alpha = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]^T, f(\alpha) = \alpha^T A\alpha$. 当 $\|\alpha\| = 1$时, 求 $f(\alpha)$的最大值和最小值.

注: 更一般的结论见 109 页第五题.

一、正定 (以下均假定 A为 n阶对称方阵)

$$
\begin{cases}
A\text{为正定矩阵} \\
\Leftrightarrow \text{(定义)}\forall x \neq 0, x^T A x > 0 \\
\Leftrightarrow A\text{特征值全大于}0 \\
\Leftrightarrow A\text{的所有顺序主子式全大于}0 \\
\Leftrightarrow A\text{的所有主子式全大于}0 \\
\Leftrightarrow \text{存在可逆矩阵}P\text{使得}A = P^T P \\
\Leftrightarrow \text{存在正交矩阵}Q\text{使得}Q^T A Q\text{为对角元全大于 } 0 \text{ 的对角矩阵} \\
\Rightarrow |A| > 0\text{且}A\text{所有对角元大于}0
\end{cases}
$$

二、负定 (以下均假定 A为 n阶对称方阵)

$$
\begin{cases}
A\text{为负定矩阵} \\
\Leftrightarrow \text{(定义)}\forall x \neq 0, x^T A x < 0 \\
\Leftrightarrow A\text{特征值全小于}0 \\
\Leftrightarrow A\text{的所有奇数阶顺序主子式小于}0,\text{所有偶数阶顺序主子式大于}0 \\
\Leftrightarrow A\text{的所有奇数阶主子式小于 }0,\text{ 所有偶数阶主子式大于}0 \\
\Leftrightarrow \text{存在正交矩阵}Q\text{使得}Q^T A Q\text{为对角元全小于 }0\text{ 的对角矩阵} \\
\Leftrightarrow -A\text{正定} \\
\Rightarrow A\text{所有对角元小于}0
\end{cases}
$$

三、半正定 (以下均假定 A为 n阶对称方阵)

$$
\begin{cases}
A\text{为半正定矩阵} \\
\Leftrightarrow \text{(定义)}\forall x \neq 0, x^T A x \geqslant 0 \\
\Leftrightarrow A\text{特征值全大于等于}0 \\
\Rightarrow A\text{的所有顺序主子式全大于等于}0 \\
\Leftrightarrow A\text{的所有主子式全大于等于}0 \\
\Leftrightarrow \text{存在矩阵}P\text{使得}A = P^T P \\
\Leftrightarrow \text{存在正交矩阵}Q\text{使得}Q^T A Q\text{为对角元全大于等于 0 的对角矩阵} \\
\Rightarrow |A| \geqslant 0\text{且}A\text{所有对角元大于等于}0
\end{cases}
$$

注: 只靠顺序主子式非负不能推出半正定, 如

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

其顺序主子式都为 0 即非负, 但 A是半负定的.

二、半负定 (以下均假定 A为 n阶对称方阵)

A为半负定矩阵

$\Leftrightarrow$ (定义)$\forall x \neq 0, x^T Ax \leqslant 0$

$\Leftrightarrow$ A特征值全小于等于0

$\Rightarrow$ A的所有奇数阶顺序主子式小于等于0, 所有偶数阶顺序主子式大于等于0

$\Leftrightarrow$ A的所有奇数阶主子式小于等于 0, 所有偶数阶主子式大于等于0

$\Leftrightarrow$ 存在正交矩阵Q使得$Q^T AQ$为对角元全小于等于 0 的对角矩阵

$\Leftrightarrow$ $-A$半正定

$\Rightarrow$ A所有对角元小于等于0

一、请对下列二次型进行分类 (正定、负定、半正定、半负定、不定).

1.$f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$.

一、请对下列二次型进行分类 (正定、负定、半正定、半负定、不定).

1.$f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$.

已知二次型的矩阵为

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{bmatrix}$$

解一: 由 $|\lambda I - A| = (\lambda - 1)^2(\lambda - 10)$可知特征值为 $1, 1, 10$全正, 因此为正定二次型.

解二: 计算顺序主子式

$$|2| = 2 > 0, \ \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 6 > 0, \ |A| = 26 > 0$$

可知全正, 因此二次型是正定的.

一、请对下列二次型进行分类 (正定、负定、半正定、半负定、不定).

2.$f(x_1,x_2,x_3)=-5x_1^2-6x_2^2-4x_3^2+4x_1x_2+4x_1x_3$.

一、请对下列二次型进行分类 (正定、负定、半正定、半负定、不定).

2.$f(x_1, x_2, x_3) = -5x_1^2 - 6x_2^2 - 4x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3$.

已知二次型的矩阵为

$$A = \begin{bmatrix} -5 & 2 & 2 \\ 2 & -6 & 0 \\ -2 & -4 & 5 \end{bmatrix}$$

解一: 由 $|\lambda I - A| = (\lambda + 2)(\lambda + 5)(\lambda + 8)$可知特征值为 $-2, -5, -8$全负, 因此为负定二次型.

解二: 计算顺序主子式

$$|-5| = -5 < 0, \quad \begin{vmatrix} -5 & 2 \\ 2 & -6 \end{vmatrix} = 26 > 0, \quad |A| = -80 < 0$$

即所有奇数阶顺序主子式小于零, 偶数阶主子式大于零, 因此为负定二次型.

一、请对下列二次型进行分类 (正定、负定、半正定、半负定、不定).

3.$f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_3$.

一、请对下列二次型进行分类 (正定、负定、半正定、半负定、不定).

3.$f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_3$.

已知二次型的矩阵为

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

解一: 由 $|\lambda I - A| = (\lambda - 3)(\lambda - \frac{1}{2}(5 + \sqrt{33}))(\lambda - \frac{1}{2}(5 - \sqrt{33}))$可知特征值为 $3, \frac{1}{2}(5 \pm \sqrt{33})$有正有负, 因此二次型不定.

解二: 因为 $|A| - 6 < 0$, 因此 A的三个特征值的符号只能为三负或一负两正, 而再由 $\mathrm{tr}(A) = 8 > 0$为特征值之和, 因此特征值不可能为三负, 只能为一负两正, 因此二次型不定.

二、试确定参数 a的取值范围, 使得 $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & a\\ 2 & 6 & 0\\ a & 0 & a\end{bmatrix}$为正定矩阵.

二、试确定参数 a的取值范围, 使得 $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & a\\ 2 & 6 & 0\\ a & 0 & a\end{bmatrix}$ 为正定矩阵.

解:A正定当且仅当所有顺序主子式大于 0, 因此只需

$$\begin{cases} |1| = 1 > 0 \\ \begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 6\end{vmatrix} = 2 > 0 \\ |A| = a(2-6a) > 0 \end{cases} \Rightarrow 0 < a < \frac{1}{3}$$

即为所求.

三、设 A, B为正定矩阵, 证明:$A^T, A^{-1}, A^*, A+B$也是正定矩阵.

三、设 A, B为正定矩阵, 证明:$A^T, A^{-1}, A^*, A+B$也是正定矩阵.

证明: 因为 A正定, 所以其特征值全部为正, 若设其特征值为 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$, 那么可知 A^T的特征值也为 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$,$A^{-1}$的特征值为 $\lambda_1^{-1}, \cdots, \lambda_n^{-1}$, 再由 $A^* = |A|A^{-1}$可知 A^*的特征值为 $|A|\lambda_1, \cdots, |A|\lambda_n$, 由 $|A| > 0$和 $\lambda_i > 0$可知上述特征值全部为正, 因此 A^T, A^{-1}, A^*都是正定矩阵 (对称性是显然的).

另一方面 ($A+B$的正定需要使用定义证明),$\forall x \neq 0$, 有

$$x^T(A+B)x = x^TAx + x^TBx > 0 + 0 = 0$$

即可知 $A+B$正定 (对称是显然的), 其中上式大于号由 A, B正定得到.

注: 虽然 $A+B$也是正定的, 但是它的特征值不一定是 A, B特征值的和.

四、设 A, B分别为 m阶和 n阶正定矩阵, 矩阵 $C = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}$, 证明:$C$为正定矩阵.

四、设 A, B分别为 m阶和 n阶正定矩阵, 矩阵 $C = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}$, 证明:$C$为正定矩阵.

证明一: 因为 A, B正定, 那么存在可逆矩阵 P_1, P_2使得 $A = P_1^T P_1, B = P_2^T P_2$, 可知 $P = \begin{bmatrix} P_1 & O \\ O & P_2 \end{bmatrix}$也是可逆的, 且

$$\begin{aligned} P^T P &= \begin{bmatrix} P_1 & O \\ O & P_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P_1 & O \\ O & P_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1^T & O \\ O & P_2^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 & O \\ O & P_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} P_1^T P_1 & O \\ O & P_2^T P_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix} = C \end{aligned}$$

此即表示 C也是正定矩阵.

四、设 A, B分别为 m阶和 n阶正定矩阵, 矩阵 $C = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}$, 证明:$C$为正定矩阵.

证明二: 将 n维列向量 x分块为 $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$, 其中 x_1为 m维列向量,x_2为 n为列向量, 因此 $\forall x \neq 0$, 有

$$x^T Cx = (x_1^T, x_2^T) \begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = (x^T A, x^T B) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_1^T Ax_1 + x_2^T Bx_2$$

因为 $x \neq 0$表示 x_1, x_2至少有一个不为零, 因此 A, B正定可知 $x_1^T Ax_1, x_2^T Bx_2$两个非负且至少有一个为正, 即得到 $x^T Cx > 0$, 得到 C正定.

五、求参数 t的值, 使得二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = -x_1^2 + tx_2^2 + 4tx_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2x_3$为负定二次型.

五、求参数 t的值, 使得二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=-x_1^2+tx_2^2+4tx_3^2+2x_1x_2+4x_1x_3+2x_2x_3$为负定二次型.

解: 首先得到二次型的矩阵

$$A=\begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & t & 1 \\ 2 & 1 & 4t \end{vmatrix}$$

要使 A负定, 当且仅当奇数阶顺序主子式为负, 偶数阶顺序主子式为正, 即

$$\begin{cases} |-1| = -1 < 0 \\ \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & t \end{bmatrix} = -t-1 > 0 \\ |A| = -4t^2-8t+5 < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t < -1 \\ t > \frac{1}{2}\text{或}t < -\frac{5}{2} \end{cases} \Rightarrow t < -\frac{5}{2}$$

因此 $t < -\frac{5}{2}$时满足题意.

六、设 A为实对称矩阵, 且满足 $6A^2-7A+2I=0$,证明 : A是正定矩阵.

六、设 A为实对称矩阵, 且满足 $6A^2-7A+2I=0$,证明 : A是正定矩阵.

证明: 由前结论,A的特征值只能为 $6\lambda^2-7\lambda+2=0$的根, 即只能为 $\frac{1}{2}$或 $\frac{2}{3}$, 因此 A的所有特征值必定全正, 因此为正定矩阵.

一、二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+3x_2^2+3x_3^2+2ax_1x_2(a>0)$可通过正交变换化为标准形 $f(x_1,x_2,x_3)=y_1^2+2y_2^2+5y_3^2$.
1. 求参数 a及所用的正交变换矩阵.

注: 同 102 页第二题.

一、二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+3x_2^2+3x_3^2+2ax_1x_2(a>0)$可通过正交变换化为标准形 $f(x_1,x_2,x_3)=y_1^2+2y_2^2+5y_3^2$.
1. 求参数 a及所用的正交变换矩阵.

注: 同 102 页第二题.

解: 由题意, 可知 A,B正交相似, 即相似, 因此 $|A|=2(9-a^2)=|B|=10$, 得到 $a=2(a=-2$舍去). 另一方面, 因为

$$|\lambda I-A|=(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-5)\Rightarrow\lambda=1,2,5$$

求得特征向量为

$$\xi_1=\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix},\xi_2=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\xi_3=\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}\Rightarrow Q=\begin{bmatrix}0&1&0\\\frac{\sqrt{2}}{2}&0&\frac{\sqrt{2}}{2}\\-\frac{\sqrt{2}}{2}&0&\frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}$$

因此作正交变换 $x=Qy$后即为所求.

一、二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+3x_2^2+3x_3^2+2ax_1x_2(a>0)$可通过正交变换化为标准形 $f(x_1,x_2,x_3)=y_1^2+2y_2^2+5y_3^2$.
2. 为 $f(x_1,x_2,x_3)=1$表示什么曲面.

注: 若 $f(x_1,x_2,x_3)$为实二次型, 那么根据特征值符号不同,$f(x_1,x_2,x_3)=1$表示不同曲面.

$$\begin{cases} \text{三正: 椭球面} \\ \text{二正一负: 单叶双曲面} \\ \text{二正一零: 椭球柱面} \\ \text{一正二负: 双叶双曲面} \\ \text{一正一负一零: 双曲柱面} \end{cases}$$

一、二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+3x_2^2+3x_3^2+2ax_1x_2(a>0)$可通过正交变换化为标准形 $f(x_1,x_2,x_3)=y_1^2+2y_2^2+5y_3^2$.
2. 为 $f(x_1,x_2,x_3)=1$表示什么曲面.

注: 若 $f(x_1,x_2,x_3)$为实二次型, 那么根据特征值符号不同,$f(x_1,x_2,x_3)=1$表示不同曲面.

$$\begin{cases} \text{三正: 椭球面} \\ \text{二正一负: 单叶双曲面} \\ \text{二正一零: 椭球柱面} \\ \text{一正二负: 双叶双曲面} \\ \text{一正一负一零: 双曲柱面} \end{cases}$$

解: 由题意可知 A,B正交相似, 即相似, 即特征值相同, 故 A的特征值为 $1,2,5$, 全正, 因此 $f(x_1,x_2,x_3)=1$表示椭球面.

二、设 n阶实对称矩阵 A的最大特征值为 λ,α是 n维实向量, 且 $\|\alpha\| = 1$.证明:$f(\alpha) = \alpha^T A\alpha \leqslant \lambda$.

二、设 n阶实对称矩阵 A的最大特征值为 λ,α是 n维实向量, 且 $\|\alpha\| = 1$.证明:$f(\alpha) = \alpha^T A\alpha \leqslant \lambda$.

证明: 设 A的 n个特征值为 $\lambda, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$, 由题意可知 $\lambda \geqslant \lambda_i (i = 2, \cdots, n)$. 另一方面, 存在正交矩阵 Q使得 $Q^T AQ = \Lambda$, 其中 Λ是对角元为 $\lambda, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$的对角矩阵, 那么

$$f(\alpha) = \alpha^T A\alpha = (Q^T\alpha)^T A(Q^T\alpha)$$

令 $Q^T\alpha = \beta$, 可知 $\|\alpha\| = 1$等价于 $\|\beta\| = 1$且一一对应, 因此 $f(\alpha)$在 $\|\alpha\| = 1$的值域和 $g(\beta) = \beta^T\Lambda\beta$在 $\|\beta\| = 1$的值域相同, 那么由

$$\begin{aligned} g(\beta) = \beta^T\Lambda\beta &= \lambda\beta_1^2 + \lambda_2\beta_2^2 + \cdots + \lambda_n\beta_n^2 \\ &\leqslant \lambda\beta_1^2 + \lambda\beta_2^2 + \cdots + \lambda\beta_n^2 \\ &= \lambda(\beta_1^2 + \cdots + \beta_n^2) \\ &= \lambda\beta^T\beta \\ &= \lambda\|\beta\|^2 \\ &= \lambda \end{aligned}$$

因此 $f(\alpha) \leqslant \lambda$得证.

三、设 A是实对称矩阵, 证明: 存在常数 k, 使当 $\mu > k$时,$\mu I + A$总是正定矩阵.

三、设 A是实对称矩阵, 证明: 存在常数 k, 使当 $\mu > k$时,$\mu I + A$总是正定矩阵.

证明: 设 A的所有特征值为 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$, 那么 $\mu I + A$的所有特征值即为 $\mu + \lambda_1, \cdots, \mu + \lambda_n$. 令

$$\mu = \max(|\lambda_1|, |\lambda_2|, \cdots, |\lambda_n|) + 1$$

因此对任意 $i = 1, 2, \cdots, n$, 可以得到

$$\begin{aligned} \mu + \lambda_i &= \max(|\lambda_1|, \cdots, |\lambda_n|) + 1 + \lambda_i > \max(|\lambda_1|, \cdots, |\lambda_n|) + \lambda_i \\ &\geqslant |\lambda_i| + \lambda_i \geqslant 0 \end{aligned}$$

此即表示 $\mu I + A$的特征值全正, 对称是显然的, 进而为正定矩阵, 命题得证.

四、设 A是 n阶正定矩阵,B是 $n \times r$矩阵, 且秩 $(B) = r$. 证明:$B^T AB$是正定矩阵.

四、设 A是 n阶正定矩阵,B是 $n\times r$矩阵, 且秩 $(B)=r$. 证明:B^TAB是正定矩阵.

证明: 只需证 $\forall x\neq 0$时 $x^T(B^TAB)x>0$.
(反证) 若不然存在非零 x使得 $x^T(B^TAB)x=0$, 因为 A正定, 那么由 $x^T(B^TAB)x=(Bx)^TA(Bx)$可知 $Bx=0$, 而 B列满秩, 进而得到 $x=0$, 这与 x非零矛盾, 因此 $x^T(B^TAB)x>0$对任意 $x\neq 0$成立, 得证.

五、设 $f(\alpha)=\alpha^T A\alpha$是一实二次型,$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$是 A的特征值, 且 $\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\cdots\leqslant\lambda_n$. 证明:$\forall\alpha\in\mathbb{R}^n$, 由 $\lambda_1\|\alpha\|^2\leqslant f(\alpha)\leqslant\lambda_n\|\alpha\|^2$.

五、设 $f(\alpha)=\alpha^TA\alpha$是一实二次型,$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$是 A的特征值, 且 $\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\cdots\leqslant\lambda_n$. 证明:$\forall\alpha\in\mathbb{R}^n$, 由 $\lambda_1\|\alpha\|^2\leqslant f(\alpha)\leqslant\lambda_n\|\alpha\|^2$.

证明: 由题意, 存在正交矩阵 Q使得

$$Q^TAQ=\Lambda=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{bmatrix}$$

进而 $f(\alpha)=(Q^T\alpha)^TA(Q^T\alpha)$, 令 $Q^T\alpha=\beta$, 可知 $\|\alpha\|=1$等价于 $\|\beta\|=1$且一一对应, 因此 $f(\alpha)$在 $\|\alpha\|=1$的值域和 $g(\beta)=\beta^T\Lambda\beta$在 $\|\beta\|=1$的值域相同, 只需证 $\lambda_1\|\beta\|^2\leqslant g(\beta)=\beta^T\Lambda\beta\leqslant\lambda_n\|\beta\|^2$ 这由

$$\begin{aligned}g(\beta)&=\beta^T\Lambda\beta=\lambda_1\beta_1^2+\cdots+\lambda_n\beta_n^2\leqslant\lambda_n\beta_1^2+\cdots+\lambda_n\beta_n^2\\&=\beta_n^2(\beta_1^2+\cdots+\beta_n^2)\\&=\lambda_n\|\beta\|^2=\lambda_n\\g(\beta)&=\lambda_1\beta_1^2+\cdots+\lambda_n\beta_n^2\geqslant\lambda_1\beta_1^2+\cdots+\lambda_n\beta_n^2\\&=\lambda_1\end{aligned}$$

即得 $\lambda_1\|\beta\|^2\leqslant g(\beta)\leqslant\lambda_n\|\beta\|^2$.

六、设 A为 n阶实对称矩阵,$\forall\alpha \in \mathbb{R}^{n\times 1}$, 有 $f(\alpha) = \alpha^T A\alpha = 0$. 证明:$A$为零矩阵.

六、设 A为 n阶实对称矩阵,$\forall\alpha\in\mathbb{R}^{n\times 1}$, 有 $f(\alpha)=\alpha^TA\alpha=0$. 证明:$A$为零矩阵.

解: 由题意, 存在正交矩阵 Q使得

$$Q^TAQ=\Lambda=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{bmatrix}$$

$\forall\beta$, 由题意可知 $f(Q\beta)=(Q\beta)^TA(Q\beta)=\beta^T(Q^TAQ)\beta=\beta^T\Lambda\beta=0$, 即

$$\forall\beta_i,\quad \lambda_1\beta_1^2+\lambda_2\beta_2^2+\cdots+\lambda_n\beta_n^2=0$$

取 $\beta_i=1$其余为零, 可得 $\lambda_i\beta_i^2=0\Rightarrow\lambda_i=0$, 因此得到 $\lambda_1=\cdots=\lambda_n=0$, 即 $Q^TAQ=0\Rightarrow A=QOQ^T=0$, 因此 $A=0$成立.

七、A既是正定矩阵, 又是正交矩阵. 证明:A一定是单位矩阵.

七、A既是正定矩阵, 又是正交矩阵. 证明:A一定是单位矩阵.

证明: 由题意可知 $AA^T = A^2 = I$, 可知 A的特征值只能为 $\lambda^2 = 1$的根即 ± 1, 又由 A正定, 可知 A的特征值全为 1, 即存在正交矩阵 Q使得 $Q^TAQ = I \Rightarrow A = QQ^T = I$, 因此得证.

八、A是实反对称矩阵, 证明:$I-A^2$是正定矩阵.

八、A是实反对称矩阵，证明:$I - A^2$是正定矩阵.

证明: 由题意可知 $A^T = -A, I - A^2 = I + A^T A$. 对任意 $x \neq 0$, 有

$$x^T(I + A^T A)x = x^T x + x^T A^T A x = x^T x + (Ax)^T (Ax)$$

其中 x, Ax都是实向量，且 $x \neq 0$, 可以得到 $x^T x > 0, (Ax)^T (Ax) \geqslant 0$, 得到 $x^T(I - A^2)x > 0$成立，即 $I - A^2$正定.