# 线性代数第四次作业

2024年3月31日

++-

行列式的定义与 性质

一、填空題

1 2 3

4

二、选择题

1 2

四

六

# 本次作业

## 《线性代数习题册 (第三版)》

- 25 ~ 26页: 矩阵的转置及分块
- 27 ~ 30页: 行列式的定义与计算

```
矩阵的转置及分
行列式的定义与
性质
一、填空题
```

二、选择题

# 习题答案会上传至 github 中.



图: github 链接二维码

```
矩阵的转置及分
```

行列式的定义与

一、填空额

二、选择题

九、已知 n为非零列向量  $\alpha$ , I为 n阶单位阵,  $A = I - \alpha \alpha^{T}$ , 证明:  $1.A^2 = A$ 的充要条件是  $\alpha^T \alpha = 1$ ;

九、已知 n为非零列向量  $\alpha$ , I为 n阶单位阵,  $A = I - \alpha \alpha^T$ , 证明: 1,  $A^2 = A$ 的充要条件是  $\alpha^T \alpha = 1$ :

证明: 因为

$$A^{2} = (I - \alpha \alpha^{T})(I - \alpha \alpha^{T}) = I - \alpha \alpha^{T} - \alpha \alpha^{T} + \alpha(\alpha^{T}\alpha)\alpha^{T}$$
$$= I - 2\alpha \alpha^{T} + (\alpha^{T}\alpha)\alpha\alpha^{T} = I + (\alpha^{T}\alpha - 2)\alpha\alpha^{T}$$

因此

$$A^{2} = A$$

$$\Leftrightarrow I + (\alpha^{T}\alpha - 2)\alpha\alpha^{T} = I - \alpha\alpha^{T}$$

$$\Leftrightarrow \alpha^{T}\alpha - 2 = -1$$

$$\Leftrightarrow \alpha^{T}\alpha = 1$$

其中第二个等价符号由  $\alpha \alpha^T \neq 0$ 保证, 因此得证.

```
矩阵的转置及分
块
```

2 +

+二 行列式的定义与

行列式的定义与 性质

性质 一、填空題

1 2

3 4

Ξ

2

四

五

^

t

九、已知 n为非零列向量  $\alpha$ , E为 n阶单位阵,  $A = I - \alpha \alpha^T$ , 证明: 2. 当  $\alpha^T \alpha = 1$ 时, A是不可逆矩阵.

行列式的定义与

一、填空额

矩阵的转置及分

九、已知 n为非零列向量  $\alpha$ , E为 n阶单位阵,  $A = I - \alpha \alpha^T$ , 证明: 2. 当  $\alpha^T \alpha = 1$ 时.A是不可逆矩阵.

证明:(反证法) 若 A为可逆矩阵, 那么由 (1) 可知  $\alpha^T \alpha = 1$ 可知  $A^2 = A$ , 左乘  $A^{-1}$ 后得到 A = I, 而  $A = I - \alpha \alpha^T \Rightarrow \alpha \alpha^T = 0$ . 进而  $\alpha = 0$ 与非零条件矛盾, 因此得证.

矩阵的转置及分

块

九

+=

行列式的定义与 性质

一、填空题

二、选择题

五

七

3 0 4 0 0 十、设 A =  $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ 2

矩阵的转置及分

- 、填空题

二、选择额

十、设
$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$
,求 $A^6$ .

解: 注意到 4可以写为对角分块矩阵的形式.. 即

$$A_1 = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} A_1 & O \\ O & A_2 \end{bmatrix}$$

因此由分块对角矩阵的性质可知

$$A^6 = \begin{bmatrix} A_1^6 & O \\ O & A_2^6 \end{bmatrix}$$

只需计算  $A_1^6, A_2^6$ . 对于  $A_1^6$ , 尝试计算后发现  $A_1^2 = 25I_2$ , 可知  $A_1^6 = (25I_2)^3 = 25^3I_2$ ; 另一方面, 可知

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad J^k = 0 (k \geqslant 2)$$

由二项式定理可知

$$A_2^6 = (2I_2 + 2J)^6 = 2^6 (I_2 + J)^6 = 64 (I_2^6 J^0 + C_6^1 I_2^5 J + C_6^2 I_2^4 J^2 + \cdots)$$
$$= 64 (I_2 + 6J) = \begin{bmatrix} 64 & 0\\384 & 64 \end{bmatrix}$$

十、设
$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$
,求 $A^6$ .

## 解:(接上文) 综上即可得到

$$A^{6} = \begin{bmatrix} 15625 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 15625 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 64 & 0\\ 0 & 0 & 384 & 64 \end{bmatrix}$$

矩阵的转置及分

行列式的定义与 性质

一、填空題

二、选择题

十一、设 A, B是 n阶对称阵, 且 AB + I及 A可逆, 证明: $(AB + I)^{-1}A$ 为 可逆对称阵.

矩阵的转置及分 块

九 1 2 十

<sup>十一</sup> 行列式的定义与

17列式的定义· 性质 一、填空题 1 2 3

5 二、选择题

五六

十一、设 A, B是 n阶对称阵, 且 AB+I及 A可逆, 证明: $(AB+I)^{-1}A$ 为可逆对称阵.

证明: 首先由

$$\begin{split} [(AB+I)^{-1}A]^T &= A^T[(AB+I)^T]^{-1} = A^T(B^TA^T+I)^{-1} = A(BA+I)^{-1} \\ 我们只需证明 & (AB+I)^{-1}A = A(BA+I)^{-1}, 等价于 \\ & A^{-1}(AB+I)^{-1} = (BA+I)^{-1}A^{-1} \\ \Leftrightarrow [(AB+I)A]^{-1} = [A(BA+I)]^{-1} \\ \Leftrightarrow (ABA+A)^{-1} = (ABA+A)^{-1} \end{split}$$

而最后一式是显然成立的, 因此原等式  $[(AB+I)^{-1}A]^T = (AB+I)^{-1}A$ 成立, 即为对称矩阵, 而可逆是显然的 (可逆矩阵的乘积为可逆矩阵).

矩阵的转置及分

行列式的定义与

- 、填空题

二、选择额

十一、设 A, B是 n阶对称阵, 且 AB + I及 A可逆, 证明: $(AB + I)^{-1}A$ 为 可逆对称阵.

证明: 首先由

$$\begin{split} [(AB+I)^{-1}A]^T &= A^T[(AB+I)^T]^{-1} = A^T(B^TA^T+I)^{-1} = A(BA+I)^{-1} \\ 我们只需证明 & (AB+I)^{-1}A = A(BA+I)^{-1}, 等价于 \\ & A^{-1}(AB+I)^{-1} = (BA+I)^{-1}A^{-1} \\ &\Leftrightarrow [(AB+I)A]^{-1} = [A(BA+I)]^{-1} \\ &\Leftrightarrow (ABA+A)^{-1} = (ABA+A)^{-1} \end{split}$$

而最后一式是显然成立的, 因此原等式

 $[(AB+I)^{-1}A]^T = (AB+I)^{-1}A$ 成立, 即为对称矩阵, 而可逆是显然的 (可逆矩阵的乘积为可逆矩阵). 注: 另一种更为直接的方法如下, 这 是有关逆矩阵常见的技巧

$$[(AB + I)^{-1}A]^{T} = A(BA + I)^{-1} = (A^{-1})^{-1}(BA + I)^{-1}$$

$$= [(BA + I)A^{-1}]^{-1} = (B + A^{-1})^{-1}$$

$$= [A^{-1}(AB + I)]^{-1} = (AB + I)^{-1}(A^{-1})^{-1}$$

$$= (AB + I)^{-1}A$$

矩阵的转置及分

行列式的定义与

性质 一、填空额

二、选择题

五

t.

十二、设 
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 7 \end{bmatrix}, B = (I+A)^{-1}(I-A).$$
证明: $B+I$ 可逆,并求其逆.

十二、设 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 7 \end{bmatrix}, B = (I+A)^{-1}(I-A).$  证

明:B + I可逆. 并求其逆.

证明: 对 B + I进行变换

$$I + B = I + (I + A)^{-1}(I - A) = I + (I + A)^{-1}[2I - (I + A)]$$

$$= I + [2(I + A)^{-1} - (I + A)^{-1}(I + A)]$$

$$= I + 2(I + A)^{-1} - I$$

$$= 2(I + A)^{-1}$$

因此可知 I + B可逆. 目

$$(I+B)^{-1} = \frac{1}{2}(I+A) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\\ -1 & 2 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 3 & 0\\ 0 & 0 & -3 & 4 \end{bmatrix}$$

矩阵的转置及分

块

性质 一、填空題

行列式的定义与

二、选择题

五

七

 $a_{11}$  $a_{12}$  $a_{13}$ 0  $a_{22}$  $|a_{23}| = a_{11}a_{22}a_{33}.$ 0 0  $a_{33}$ 

性质

一、填空额

二、选择额

### $a_{11}$ $a_{12}$ $a_{13}$ 0 $a_{22}$ $|a_{23}| = a_{11}a_{22}a_{33}$ . 0 $a_{33}$

(分块) 上三角矩阵或 (分块) 下三角矩阵的行列式即为对角元的乘 积 (对角块行列式的乘积), 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & * & \cdots & * \\ & a_{22} & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & * \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} \\ * & a_{22} \\ \vdots & \ddots & \ddots \\ * & \cdots & * & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

```
矩阵的转置及分
块
```

行列式的定义与 性质

一、填空题

3

二、选择题

五

七

```
0
                           0
                                     a_{1n}
                                       0
      0
                       a_{2,n-1}
                                             = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{n1} \cdots a_{2,n-1} a_{1n}
2.
               0
                                       0
    a_{n1}
                          . . .
```

### 矩阵的转置及分

行列式的定义与

一、填空额

# 3

## 二、选择额

五

$$2.\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix} = \underbrace{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{n1} \cdots a_{2,n-1} a_{1n}}_{}$$

解: 由行列式的定义, 其中可能非零的项只有逆对角线的元乘积, 即 行列式为

$$(-1)^{\tau(n,n-1,\dots,1)}a_{n1}\cdots a_{2,n-1}a_{1n}$$

$$=(-1)^{(n-1)+(n-2)+\dots+1}a_{n1}\cdots a_{2,n-1}a_{1n}$$

$$=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{n1}\cdots a_{2,n-1}a_{1n}$$

1 2

++-

+-

行列式的定义与 性质

一、填空题

1 2

3

5

二、选择题

三

2

四

五

六

t

3. 方程  $\begin{vmatrix} \lambda & 0 & 2 \\ 0 & \lambda - 1 & 0 \\ 2 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = 0$ 的根为  $\underline{1, \pm 2}$ .

3. 方程 
$$\begin{vmatrix} \lambda & 0 & 2 \\ 0 & \lambda - 1 & 0 \\ 2 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = 0$$
的根为  $\frac{1, \pm 2}{2}$ .

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \lambda \end{vmatrix} = 0$$
的根为  $\frac{1,\pm 2}{2}$ 

解: 按第一行展开行列式可得

$$\lambda \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 0 & \lambda - 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = \lambda^2 (\lambda - 1) - 4(\lambda - 1)$$
$$= (\lambda - 1)(\lambda^2 - 4) = 0$$

即可得到  $\lambda = 0, \pm 2$ .

```
目录
```

```
矩阵的转置及分
```

$$\begin{vmatrix} 2a_{21} & 3a_{21} \\ 2a_{21} & 3a_{22} \end{vmatrix}$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 2a_{21} & 3a_{21} - 5a_{22} & a_{23} \\ 2a_{11} & 3a_{11} - 5a_{12} & a_{13} \end{vmatrix} = \underline{10}.$$

 $a_{11}$   $a_{12}$   $a_{13}$ 4. 设  $D_1 = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} = 1$ ,则

 $|a_{31} \quad a_{32} \quad a_{33}|$ 

$$\begin{vmatrix} 2a_{31} & 3a_{31} - 5a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ 2a_{21} & 3a_{21} - 5a_{22} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2a_{21} & 3a_{21} - 5a_{22} & a_{23} \\ 2a_{21} & 3a_{22} - 5a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 2a_{21} & 3a_{21} - 3a_{22} & a_{23} \\ 2a_{11} & 3a_{11} - 5a_{12} & a_{13} \end{vmatrix} = \underline{10}.$$

$$2a_{11} - 3a_{11} - 3a_{12} - a_{13}$$
  
 $2a_{31} - 3a_{31} - 5a_{32} - a_{33}$ 

 $a_{11}$   $a_{12}$   $a_{13}$ 4. 设  $D_1 = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} = 1$ ,则

## 解: 将 Do变换后按第二列展开

$$D_2 = - \begin{vmatrix} 2a_{11} & 3a_{11} - 5a_{12} & a_{13} \\ 2a_{21} & 3a_{21} - 5a_{22} & a_{23} \\ 2a_{31} & 3a_{31} - 5a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = - 2 \begin{vmatrix} a_{11} & 3a_{11} - 5a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & 3a_{21} - 5a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & 3a_{31} - 5a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 3a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & 3a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

$$=-2\left(\begin{vmatrix} a_{11} & 3a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & 3a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & 3a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & -5a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & -5a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & -5a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}\right)$$

$$= -6 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{21} & a_{23} \\ a_{21} & a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + 10 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} = 10D_1$$

$$\begin{vmatrix} a_{33} \\ a_{11} & -5a \end{vmatrix}$$

$$+\begin{vmatrix} a_{11} & -5a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & -5a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{21} & a_{22} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} + 10 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} = 1$$

$$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

行列式的定义与 性质

一、填空额

二、选择题

五

5. 写出两个矩阵  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ , 使得 |A| = |B|, 但  $A \neq B$ .

### 矩阵的转置及分

行列式的定义与

一、填空额

若 3 阶矩阵 A的行列式 |A|=0, 则 (D).

A. A 有一行为 0 B. A 有两行成比例

C. A = O D. A 有一行是其余行的线性组合

## 矩阵的转置及分

行列式的定义与

一、填空额

### 二、选择额

若 3 阶矩阵 A的行列式 |A| = 0, 则 (D).

A. A 有一行为 0 B. A 有两行成比例

C. A = O D. A 有一行是其余行的线性组合

解: 举反例即可, 如

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 0 (第三列为 0)$$

但不满足 (A)(B)(C)说法, 因此选择 (D)项.

### 矩阵的转置及分

行列式的定义与 性质

## 一、填空题

二、选择题

# 三、利用行列式的定义计算

5 5 3

### 矩阵的转置及分

行列式的定义与

一、填空额

二、选择额

# 三、利用行列式的定义计算

1. 
$$\begin{vmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 5 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

解: 三阶和二阶行列式的计算最经常使用, 因此需要掌握计算方法. 二阶行列式为主对角线乘积减去反对角线乘积, 三阶行列式为"三 顺减三逆"。

原式 = 
$$5 \times 3 \times 1 + 2 \times 5 \times 4 + 0 \times 2 \times 3$$
  
-  $0 \times 3 \times 4 - 5 \times 3 \times 5 - 1 \times 2 \times 2$   
=  $-24$ 

```
矩阵的转置及分
块
```

九 1

2 + +-

十一 行列式的定义与

# 性质・検空題

1 2

2

3 4 5

二、选择题

三

2

四

~

+

# 三、利用行列式的定义计算

 $\begin{bmatrix} 1 & a & a^1 \\ 1 & b & b^2 \end{bmatrix}$ 

 $|1 \quad c \quad c'$ 

行列式的定义与

一、填空额

二、选择题

# 三、利用行列式的定义计算

 $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \end{vmatrix}$ 2. 1 b  $b^2$ 

解: 和上题同理

原式 =  $bc^2 + ab^2 + ac^2 - ba^2 - cb^2 - ac^2$ 

```
矩阵的转置及分
```

行列式的定义与 性质

一、填空题

二、选择题

# 利用行列式的定义计算

b 0 a 0 b а 0 b а

# 三、利用行列式的定义计算

$$3. \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & b \\ b & a & 0 & 0 \\ 0 & b & a & 0 \\ 0 & 0 & b & a \end{vmatrix}$$

解: 按第一行展开

原式 = 
$$a \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & b & a \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} b & a & 0 \\ 0 & b & a \\ 0 & 0 & b \end{vmatrix}$$
=  $a^4 - b^4$ 

矩阵的转置及分

- 、填空题

选择额

五

四、将 4 阶方阵

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

的行列式按照定义展开到一

阶行列式, 并归纳出 4 阶方阵的行列式的值等于 4!项取自不同行不 同列的元素乘积的代数和, 且可推广至 n阶方阵的行列式的值等于 n!项取自不同行不同列的元素乘积的代数和.

注: 由行列式定义

$$\sum_{i_1,i_2,i_3,i_4} (-1)^{\tau(i_1,i_2,i_3,i_4)} a_{1i_1} a_{2i_2} a_{3i_3} a_{4i_4}$$

其中上述求和  $i_1, i_2, i_3, i_4$ 为 1, 2, 3, 4的一个有序排列, 因此共有 4!项. 对于 n阶方阵由定义也可以得到类似的结果

$$\sum_{i_1,i_2,\cdots,i_n} (-1)^{\tau(i_1,i_2,\cdots,i_n)} a_{1i_1} a_{2i_2} \cdots a_{ni_n}$$

解: 如上定义立即可得.

```
矩阵的转置及分
```

九

1

2

+-

+=

## 行列式的定义与

一、填空題

一、典空; 1

2

3

4

二、选择题

\_

1

3

Ŧī

六

五、若 n阶方阵 A中为零的元多于  $n^2-n$ 个, 求 A的行列式的值.

```
矩阵的转置及分
```

九 1 2 + -

行列式的定义与

## 性质

4 5 二、选择题 —

1 2 3

五

# 六

たのためたまますハ

## 五、若 n阶方阵 A中为零的元多于 $n^2 - n$ 个, 求 A的行列式的值.

解: 由题意可知 A中非零元少于  $n^2 - (n^2 - n) = n$ 个, 这表示

$$\sum_{i_1,i_2,\cdots,i_n} (-1)^{\tau(i_1,i_2,\cdots,i_n)} a_{1i_1} a_{2i_2} \cdots a_{ni_n}$$

中任一项的  $a_{1i_1}, a_{2i_2}, \cdots, a_{ni_n}$ 中 n个数不可能都不为零, 因此每一项乘积均等于 0, 从而得到 |A|=0.

```
矩阵的转置及分
```

行列式的定义与

### 一、填空额

二、选择题

六、设平面直线 y = mx + b通过平面上两点  $(x_1, y_1), (x_2, y_2),$  验证直 线方程可以表示为  $|x_1 y_1 1| = 0$ .  $|x_2 \ y_2 \ 1|$ 

矩阵的转置及分

九 1 2 + +-

### 行列式的定义与

性质

5 二、选择题 三 1

2 3 四

七

六、设平面直线 y=mx+b通过平面上两点  $(x_1,y_1),(x_2,y_2)$ , 验证直 发方程可以表示为  $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$ 

 $|x_2 \ y_2 \ 1|$ 

证明: 首先该等式展开后为

$$\begin{vmatrix} y_1 & 1 \\ y_2 & 1 \end{vmatrix} x - \begin{vmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \end{vmatrix} y + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = 0$$

为直线的一般式方程, 故只需验证该直线确实过  $(x_1,y_1),(x_2,y_2)$ 两点. 带入  $x = x_1, y = y_1$ 到等式得到

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$
成立,因为第一行和第二行相等

此即表示该直线过  $(x_1,y_1)$ , 同理可知也必定过点  $(x_2,y_2)$ , 因此得证.

行列式的定义与 性质

一、填空额

二、选择题

## $5x \ 1 \ 2 \ 3$ 七、写出行列式 D= 1 2 2xx

的展开式中包含  $x^3$  和  $x^4$  的项.

七、写出行列式  $D = \begin{vmatrix} x & x & 1 & 2 \\ 1 & 2 & x & 3 \end{vmatrix}$ 的展开式中包含  $x^3$  和  $x^4$  的项.  $x \quad 1 \quad 2 \quad 2x$ 

解: 由行列式定义

$$\sum_{i_1, i_2, i_3, i_4} (-1)^{\tau(i_1, i_2, i_3, i_4)} a_{1i_1} a_{2i_2} a_{3i_3} a_{4i_4}$$

先计算  $x^4$ 项的系数. 因为 D为四阶行列式, 因此要得到  $x^4$ 的项, 上述 求和项中必须每一项都带有 x, 故只有主对角线上四项为不同行不 同列的均带有 x的项, 因此 x4项为

$$(5x)x \cdot x(2x) = 10x^4$$

接下来计算 x3的项, 以第一行展开

$$D = 5x \begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ 2 & x & 3 \\ 1 & 2 & 2x \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ 1 & x & 3 \\ x & 2 & 2x \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} x & x & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ x & 1 & 2x \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} x & x & 1 \\ 1 & 2 & x \\ x & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

从中依次找到三次项即可: $(0) + (-2x^3) + (0) + (-3x^3) = -5x^3$ .