

线性代数第九次作业

2024 年 5 月 19 日

本次作业

目录

2023-2024 学年
第 2 学期半期考
试试题

一、填空题

三

四

五

六

七

线性方程组

一、填空题

二、选择题

—
—
—

四

五

六

七

八

九

+

+

+

+

综合练习 (二)

一、填空题

二、选择题

—

四

五

六

七

半期考试

《线性代数习题册(第三版)》

- 63 ~ 70页: 线性方程组
- 71 ~ 76页: 综合练习 (二)

目录

2023-2024 学年
第 2 学期半期考
试试题

一、填空题

二
三
四
五
六
七

线性方程组

一、填空题

二、选择题

三
四
五
六
七
八
九
十
十一
十二
十三

综合练习 (二)

一、填空题

二、选择题

三
四
五
六
七

习题答案会上传至 github 中.



图: github 链接二维码

$$\begin{aligned} & \underline{\underline{\text{范德蒙行列式}}} - [-2 - (-1)](-2 - 3)(-2 - 2)(-1 - 3)(-1 - 2)(3 - 2) \\ & = 240 \end{aligned}$$

一、填空题

2. 已知非零的 n 维向量 $\alpha = (c, 0, \dots, 0, c)^T$, I 为 n 阶单位矩阵. 矩阵 $A = I - \alpha\alpha^T$ 的逆矩阵为 $B = I + c^{-1}\alpha\alpha^T$, 则 $c = \frac{1}{2}$ 或 -1 .

注: $I - k\alpha\alpha^T$ 型的计算涉及矩阵乘法的结合律, 和系数前提的技巧, 同 131 页第 2 题.

一、填空题

2. 已知非零的 n 维向量 $\alpha = (c, 0, \cdots, 0, c)^T$, I 为 n 阶单位矩阵. 矩阵 $A = I - \alpha\alpha^T$ 的逆矩阵为 $B = I + c^{-1}\alpha\alpha^T$, 则 $c = \frac{1}{2}$ 或 -1 .

注: $I - k\alpha\alpha^T$ 型的计算涉及矩阵乘法的结合律, 和系数前提的技巧, 同 131 页第 2 题.

解: 由题意可知 $AB = I$, 即

$$\begin{aligned} I &= AB = (I - \alpha\alpha^T)(I - c^{-1}\alpha\alpha^T) \\ &= I - \left(\frac{1}{c} + 1\right)\alpha\alpha^T + \frac{1}{c}\alpha(\alpha^T\alpha)\alpha^T \\ &= I + \left(\frac{\alpha^T\alpha}{c} - \frac{1}{c} - 1\right)\alpha\alpha^T \\ &= I + \frac{2c^2 - c - 1}{c}\alpha\alpha^T \end{aligned}$$

由于 $\alpha\alpha^T \neq 0, c > 0$, 得到 $2c^2 - c - 1 = 0$ 解得

$$c = \frac{1}{2}, -1$$

即为所求.

一、填空题

目录

2023-2024 学年
第 2 学期半期考
试试题

一、填空题

二
三
四
五
六
七

线性方程组

一、填空题

二、选择题

三四五六七八九十

综合练习 (二)

一、填空题

二、选择题

三四五六七

3. 已知 $Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, 三阶方阵 A 满足

$$(Q^T)^* A Q^2 = \begin{bmatrix} a-2c & 0 & -c \\ 0 & b & 0 \\ 2c & 0 & c \end{bmatrix}, \text{ 则 } A = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}.$$

注: 考察初等矩阵的计算和意义, 即左 (右) 乘初等矩阵相当于作初等行 (列) 变换.

一、填空题

目录

2023-2024 学年
第 2 学期半期考
试试题

一、填空题

二
三
四
五
六
七

线性方程组

一、填空题
二、选择题

三
四
五
六
七
八
九
十
十一
十二
十三

综合练习 (二)

一、填空题

二、选择题

三四五六七

3. 已知 $Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, 三阶方阵 A 满足

$$(Q^T)^* A Q^2 = \begin{bmatrix} a-2c & 0 & -c \\ 0 & b & 0 \\ 2c & 0 & c \end{bmatrix}, \text{ 则 } A = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}.$$

注: 考察初等矩阵的计算和意义, 即左 (右) 乘初等矩阵相当于作初等行 (列) 变换.

解: 由题意可知 $Q = E(3, 1(1))$, 直接计算得到 $Q^2 = E(3, 1(2))$, $Q^T = E(1, 3(1))$, 进而得到

$$(\mathcal{Q}^T)^* = |\mathcal{Q}^T|(\mathcal{Q}^T)^{-1} = 1 \times E(1, 3(-1)) = E(1, 3(-1)) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

所以 $[(Q^T)^*]^{-1} = E(1, 3(1)), (Q^2)^{-1} = E(3, 1(-2))$, 故

$$A = [(Q^T)^*]^{-1} \begin{bmatrix} a - 2c & 0 & -c \\ 0 & b & 0 \\ 2c & 0 & c \end{bmatrix} (Q^2)^{-1} = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$$

目录

2023-2024 学年
第 2 学期半期考
试试题

一、填空题

二
三
四
五
六
七

线性方程组

一、填空题
二、选择题

三
四
五
六
七
八
九
十
十一
十二
十三

综合练习 (二)

一、填空题
二、选择题

三
四
五
六
七

一、填空题

4. 已知 A 为 $n(n \geq 2)$ 阶方阵 A 满足 $|A| = k \neq 0$, 则 $|(|A^*|A^T)^{-1}|$ 的值
= k^{n-1-n^2} .

注: 考察行列式、转置、逆和伴随之间的运算, 同 119 页第 3 题.

一、填空题

4. 已知 A 为 $n(n \geq 2)$ 阶方阵 A 满足 $|A| = k \neq 0$, 则 $|(|A^*|A^T)^{-1}|$ 的值 $= k^{n-1-n^2}$.

注: 考察行列式、转置、逆和伴随之间的运算, 同 119 页第 3 题.
解: 计算得到

$$\begin{aligned} |(A^*|A^T)^{-1}| &= \frac{1}{||A^*|A^T|} = \frac{1}{|A^*|^n|A^T|} \\ &= \frac{1}{(|A|^{n-1})^n|A|} = \frac{1}{k^{n^2-n+1}} \\ &= k^{n-1-n^2} \end{aligned}$$

其中分别使用了性质

$|B^{-1}| = |B|^{-1}, |kB| = k^n |B|, |B^*| = |B|^{n-1}, |B^T| = |B|, B$ 为 n 阶可逆方阵.

目录

2023-2024 学年
第 2 学期半期考
试试题

一、填空题

二
三
四
五
六
七

线性方程组

一、填空题
二、选择题
三
四
五
六
七
八
九
十
十一
十二
十三

综合练习 (二)

一、填空题
二、选择题
三
四
五
六
七

一、填空题

5. 设方阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$, 则

$$|A^{2024}|B^{2024} = 2^{2024} \begin{bmatrix} \cos(2024\theta) & -\sin(2024\theta) \\ \sin(2024\theta) & \cos(2024\theta) \end{bmatrix}.$$

注: 考察方阵幂的计算 (13 页第 3 题) 和行列式的性质 ($|A^n| = |A|^n$).

一、填空题

5. 设方阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$, 则

$$|A^{2024}|B^{2024} = 2^{2024} \begin{bmatrix} \cos(2024\theta) & -\sin(2024\theta) \\ \sin(2024\theta) & \cos(2024\theta) \end{bmatrix}.$$

注: 考察方阵幂的计算 (13 页第 3 题) 和行列式的性质 ($|A^n| = |A|^n$).
解: 首先直接计算得到 $|A| = 2$, 因此 $|A^{2024}| = |A|^{2024} = 2^{2024}$; 另一方面由归纳法 (先猜测后证明) 不难证明 (我们省略证明)

$$B^n = \begin{bmatrix} \cos(n\theta) & -\sin(n\theta) \\ \sin(n\theta) & \cos(n\theta) \end{bmatrix}$$

因此可得

$$|A^{2024}|B^{2024} = 2^{2024} \begin{bmatrix} \cos(2024\theta) & -\sin(2024\theta) \\ \sin(2024\theta) & \cos(2024\theta) \end{bmatrix}$$

目录

2023-2024 学年
第 2 学期半期考
试试题

一、填空题

二
三
四
五
六
七

线性方程组

一、填空题
二、选择题

三
四
五
六
七
八
九
十
十一
十二
十三

综合练习 (二)

一、填空题
二、选择题

三
四
五
六
七

一、填空题

6. 已知向量组 $\alpha_1 = (-1, 1, 0)$, $\alpha_2 = (a, -1, b)$, $\alpha_3 = (-1, 2, -1)$ 生成的子空间维数为 2, 则 a, b 满足的关系为 $a + b = 1$.

注: 子空间维数即基的个数, 也即生成所用的向量组的秩.

一、填空题

6. 已知向量组 $\alpha_1 = (-1, 1, 0), \alpha_2 = (a, -1, b), \alpha_3 = (-1, 2, -1)$ 生成的子空间维数为 2, 则 a, b 满足的关系为 $a + b = 1$.

注: 子空间维数即基的个数, 也即生成所用的向量组的秩.

解: 由题意即 $r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 2$, 因此将其组成矩阵后矩阵的秩也为 2

$$A := [\alpha_1^T, \alpha_2^T, \alpha_3^T] = \begin{bmatrix} -1 & a & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & b & -1 \end{bmatrix}$$

注意到 A 的第 1, 3 行第 1, 3 列的二阶子式 $\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, 因此 $r(A) \geq 2$, 因此满足题意只需 A 不满秩, 即 $|A| = 0$, 计算可得 $a + b - 1 = 0$.

二、设两个三阶矩阵 A, B 按列分块表示为

$A = [2\alpha_1, 3\alpha_2, \beta], B = [3\alpha_2, \alpha_1, 2\gamma]$, 且两个矩阵的行列式分别为 $|A| = 2a, |B| = b$.

1. 求行列式 $|\alpha_1, \alpha_2, \beta|$ 和 $|\alpha_1, \alpha_2, \gamma|$ 的值;

注: 考察行列式计算的性质.

二、设两个三阶矩阵 A, B 按列分块表示为

$A = [2\alpha_1, 3\alpha_2, \beta], B = [3\alpha_2, \alpha_1, 2\gamma]$, 且两个矩阵的行列式分别为 $|A| = 2a, |B| = b$.

1. 求行列式 $|[\alpha_1, \alpha_2, \beta]|$ 和 $|[\alpha_1, \alpha_2, \gamma]|$ 的值;

注: 考察行列式计算的性质.

解: 直接计算可得

$$|A| = |[2\alpha_1, 3\alpha_2, \beta]| = 6|[\alpha_1, \alpha_2, \beta]| = 2a$$

$$|B| = |[3\alpha_2, \alpha_1, 2\gamma]| = -6|[\alpha_1, \alpha_2, 2\gamma]| = b$$

所以可得

$$|[\alpha_1, \alpha_2, \beta]| = \frac{a}{3}, \quad |[\alpha_1, \alpha_2, \gamma]| = -\frac{b}{6}$$

二、设两个三阶矩阵 A, B 按列分块表示为

$A = [2\alpha_1, 3\alpha_2, \beta], B = [3\alpha_2, \alpha_1, 2\gamma]$, 且两个矩阵的行列式分别为 $|A| = 2a, |B| = b$.

2. 求行列式 $|2A - B|$ 的值.

二、设两个三阶矩阵 A, B 按列分块表示为

$A = [2\alpha_1, 3\alpha_2, \beta], B = [3\alpha_2, \alpha_1, 2\gamma]$, 且两个矩阵的行列式分别为 $|A| = 2a, |B| = b$.

2. 求行列式 $|2A - B|$ 的值.

解：

$$\begin{aligned}
|2A - B| &= |2[2\alpha_1, 3\alpha_2, \beta] - [3\alpha_2, \alpha_1, 2\gamma]| \\
&= |[4\alpha_1 - 3\alpha_2, 6\alpha_2 - \alpha_1, 2\beta - 2\gamma]| \\
&= |[4\alpha_1 - 3\alpha_2, 6\alpha_2 - \alpha_1, 2\beta]| - |[4\alpha_1 - 3\alpha_2, 6\alpha_2 - \alpha_1, 2\gamma]| \\
&= \left| [\alpha_1, \alpha_2, \beta] \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -3 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \right| - \left| [\alpha_1, \alpha_2, \gamma] \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -3 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \right| \\
&= |[\alpha_1, \alpha_2, \beta]| \left| \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -3 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \right| - |[\alpha_1, \alpha_2, \gamma]| \left| \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -3 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \right| \\
&= \frac{a}{3} \times 42 - \left(-\frac{b}{6}\right) \times 42 \\
&= 14a + 7b
\end{aligned}$$

三、已知向量组 $\alpha_1 = (-1, 1, 0, 0)^T, \alpha_2 = (-1, 2, -1, 1)^T, \alpha_3 = (0, a, b, -1)^T, \alpha_4 = (1, -3, 2, 3)^T$.

1. 求向量组的秩和一个极大线性无关组;

解: 将列向量组成一个矩阵作初等行变换

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & -3 \\ 1 & 2 & a & 3 \\ 0 & -1 & b & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & a+1 & -5 \\ 0 & 0 & a+b & 0 \end{bmatrix}$$

①若 $a + b = 0$, 那么向量组的秩为 3, 一个极大线性无关组为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$;

②若 $a + b \neq 0$, 向量组的秩为 4, 一个极大线性无关组为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$.

目录

2023-2024 学年
第 2 学期半期考
试试题

一、填空题

二

三

四

五

六

七

线性方程组

一、填空题

二、选择题

三

四

五

六

七

八

九

十

十一

十二

十三

综合练习 (二)

一、填空题

二、选择题

三

四

五

六

七

三、已知向量组 $\alpha_1 = (-1, 1, 0, 0)^T, \alpha_2 = (-1, 2, -1, 1)^T, \alpha_3 = (0, a, b, -1)^T, \alpha_4 = (1, -3, 2, 3)^T$.

2. α_3 能否由其余向量线性表出? 若能, 请给出线性表出的表达式.

三、已知向量组 $\alpha_1 = (-1, 1, 0, 0)^T, \alpha_2 = (-1, 2, -1, 1)^T, \alpha_3 = (0, a, b, -1)^T, \alpha_4 = (1, -3, 2, 3)^T$.

2. α_3 能否由其余向量线性表出? 若能, 请给出线性表出的表达式.

解: 由 1 可知, 当 $a + b \neq 0$ 时 α_3 不能由其余向量线性表出; $a + b = 0$ 时 α_3 可以由其余向量线性表出, 此时由

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & a+1 & -5 \\ 0 & 0 & a+b & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1-4a}{5} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3a-2}{5} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{a+1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

即可得到表出表达式

$$\alpha_3 = \frac{1-4a}{5}\alpha_1 + \frac{3a-2}{5}\alpha_2 - \frac{a+1}{5}\alpha_4$$

目录

2023-2024 学年
第 2 学期半期考
试试题

一、填空题

三

四

五

六

七

线性方程组

一、填空题

二、选择题

三

四

五

六

七

八

九

+

+

+

+

综合练习 (二)

一、填空题

二、选择题

三

四

五

六

七

四、已知 n 阶方阵 $H = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$ 和

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1. 将矩阵 A 表示成 H 的多项式;

注: 考察 H (即前面介绍的 J) 的 n 次幂的计算.

四、已知 n 阶方阵 $H = \begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}$ 和

四、已知 n 阶方阵 $H = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$ 和

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1. 将矩阵 A 表示成 H 的多项式;

注: 考察 H (即前面介绍的 J) 的 n 次幂的计算.

解: 计算不难得到 $H^j(j=0, 1, \dots, n-1)$ 只有 $(i, i+j)$ 元为 1, 其余均为 0, 且 $j > n-1$ 时 $H^j = 0$, 因此立即得到

$$A = I + H + H^2 + \dots + H^{n-1}$$

目录

2023-2024 学年
第 2 学期半期考
试试题

- ### 一、填空题

三

四

五

六

七

线性方程组

- ### 一、填空题

- ## 二、选择题

三

四

五

六

七

八

九

+

+

+

+3

综合练习 (二)

- ### 一、填空题

- ## 二、选择题

三

四

五

六

七

四、已知 n 阶方阵 H 和 A .

2. 求矩阵方程 $AX = I + 2H + 3H^2 + \cdots + nH^{n-1}$ 中的 X .

四、已知 n 阶方阵 H 和 A .

2. 求矩阵方程 $AX = I + 2H + 3H^2 + \cdots + nH^{n-1}$ 中的 X .

解一: 首先可知 A 可逆 (因为是对角元非零的上三角矩阵), 故 X 有且仅有唯一解, 不难得到方程右端矩阵 B 为

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \\ 0 & 1 & \cdots & n-2 & n-1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

可知 B 可由 A 依次作如下初等列变换得到

$$A \xrightarrow{\text{第一列加到第二列}} A_1 \xrightarrow{\text{第二列加到第三列}} A_2 \rightarrow \cdots \xrightarrow{\text{第 } n-1 \text{ 列加到第 } n \text{ 列}} B$$

因此即

$$AE(1, 1(2))E(2, 1(3)) \cdots E(n-1, 1(n)) = B = I + 2H + 3H^2 + \cdots + nH^{m-1}$$

得到 X 的唯一解为

$$X = E(1, 1(2))E(2, 1(3)) \cdots E(n-1, 1(n)) = A$$

四、已知 n 阶方阵 H 和 A .

2. 求矩阵方程 $AX = I + 2H + 3H^2 + \cdots + nH^{m-1}$ 中的 X .

目录

2023-2024 学年
第 2 学期半期考
试试题

一、填空题

二

三

四

五

六

七

线性方程组

一、填空题

二、选择题

三

四

五

六

七

八

九

十

十一

十二

十三

综合练习 (二)

一、填空题

二、选择题

三

四

五

六

七

五、已知非齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + ax_4 = 1 \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2 \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + bx_4 = 4 \end{cases}$$

1. 当 a, b 取何值时, 方程组无解、有唯一解、无穷多解;

五、已知非齐次线性方程组

五、已知非齐次线性方程组
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + ax_4 = 1 \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2 \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + bx_4 = 4 \end{cases}$$

1. 当 a, b 取何值时, 方程组无解、有唯一解、无穷多解;

解: 对增广矩阵作初等行变换

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 5 & 4 & 3 & b & 4 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & b-2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a & 0 \end{array} \right]$$

①当 $b = 2$ 或 $b \neq 2, a \neq 0$ 时, 方程组无解;

②当 $b \neq 2, a = 0$ 时, 方程组有无穷多解;

③不存在 a, b 使得方程组有唯一解

目录

2023-2024 学年
第 2 学期半期考
试试题

一、填空题

二

三

四

五

六

七

线性方程组

一、填空题

二、选择题

三

四

五

六

七

八

九

十

十一

十二

十三

综合练习 (二)

一、填空题

二、选择题

三

四

五

六

七

五、已知非齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + ax_4 = 1 \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2 \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + bx_4 = 4 \end{cases}$$

2. 在方程组有解时求出其全部解.

◀ ◻ ▶ ◀ ▢ ▶ ◀ ≡ ▶ ◀ ≡ ▶ ≡ ↺ 🔍 ↻

目录

2023-2024 学年
第 2 学期半期考
试试题

一、填空题

三

四

五

六

七

线性方程组

一、填空题

二、选择题

三

四

五

六

七

八

九

+

+

+

+

综合练习 (二)

一、填空题

二、选择题

三

四

五

六

七

六、设向量组 $\alpha_1 = (1, 1, 4)^T, \alpha_2 = (1, 0, 4)^T, \alpha_3 = (1, 2, a)^T$ 是三维空间 R^3 的一组基. $\beta = (1, 1, 1)^T$ 在这组基下的坐标为 $(b, c, 1)^T$.

1. 求 a, b, c 的值;

六、设向量组 $\alpha_1 = (1, 1, 4)^T, \alpha_2 = (1, 0, 4)^T, \alpha_3 = (1, 2, a)^T$ 是三维空间 R^3 的一组基. $\beta = (1, 1, 1)^T$ 在这组基下的坐标为 $(b, c, 1)^T$.

1. 求 a, b, c 的值;

解: 由题意可知

$$[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] \begin{bmatrix} b \\ c \\ 1 \end{bmatrix} = \beta \Rightarrow \begin{cases} b + c + 1 = 1 \\ b + 2 = 1 \\ 4b + 4c + a = 1 \end{cases}$$

即可得到 a, b, c 的线性方程组, 对增广矩阵作初等行变换

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & 4 & 1 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right]$$

得到

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \\ c = 1 \end{cases}$$

六、设向量组 $\alpha_1 = (1, 1, 4)^T, \alpha_2 = (1, 0, 4)^T, \alpha_3 = (1, 2, a)^T$ 是三维空间 R^3 的一组基. $\beta = (1, 1, 1)^T$ 在这组基下的坐标为 $(b, c, 1)^T$.

2. 证明 $\alpha_2, \alpha_3, \beta$ 是 R^3 的一组基, 并求由基 $\alpha_2, \alpha_3, \beta$ 到基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的过渡矩阵 M .

六、设向量组 $\alpha_1 = (1, 1, 4)^T, \alpha_2 = (1, 0, 4)^T, \alpha_3 = (1, 2, a)^T$ 是三维空间 R^3 的一组基. $\beta = (1, 1, 1)^T$ 在这组基下的坐标为 $(b, c, 1)^T$.

2. 证明 $\alpha_2, \alpha_3, \beta$ 是 R^3 的一组基, 并求由基 $\alpha_2, \alpha_3, \beta$ 到基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的过渡矩阵 M .

解: 因为

$$|[\alpha_2, \alpha_3, \beta]| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$$

因此矩阵的列向量组即 $\alpha_2, \alpha_3, \beta$ 线性无关, 因此为 R^3 的一组基. 另一方面, 得到过渡矩阵只需求解方程

$$[\alpha_2, \alpha_3, \beta]M = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$$

由增广矩阵初等行变换可得

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 1 & 4 & 4 & 1 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

得到

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

七、证明题

1. 设 $n(n > 4)$ 维向量 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关, $\beta_i = \alpha_i + k\alpha_4, i = 1, 2, 3$. 证明对任意的数 $k, \beta_1, \beta_2, \beta_3$ 都线性无关;

目录

2023-2024 学年
第 2 学期半期考
试试题

一、填空题

三

四

五

六

线性方程组

一、填空题

二、选择题

三

四

五

六

七

八

九

+

+

+2

+3

综合练习 (二)

一、填空题

二、选择题

三

四

五

六

七、证明题

1. 设 $n(n > 4)$ 维向量 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关, $\beta_i = \alpha_i + k\alpha_4, i = 1, 2, 3$. 证明对任意的数 $k, \beta_1, \beta_2, \beta_3$ 都线性无关;

七、证明题

1. 设 $n(n > 4)$ 维向量 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关, $\beta_i = \alpha_i + k\alpha_4, i = 1, 2, 3$. 证明对任意的数 $k, \beta_1, \beta_2, \beta_3$ 都线性无关;

证明二: 由

$$r([\beta_1, \beta_2, \beta_3]) = r([\alpha_1 + k\alpha_4, \alpha_2 + k\alpha_4, \alpha_3 + k\alpha_4])$$

$$= r([\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ k & k & k \end{bmatrix})$$

$$= r \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ k & k & k \end{pmatrix}$$

$$= 3$$

因此得到 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性无关, 其中第三个等号由左乘列满秩矩阵秩不变得到, 因此得证.

七、证明题

2. 设 $n(n > 4)$ 维向量 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 满足 $\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + 4\alpha_4 = 0$ 且 $\beta_i = \alpha_i + i\lambda_i\xi, i = 1, 2, 3, 4$. 问当不全为零的数 $\lambda_i(i = 1, 2, 3, 4)$ 满足什么条件时, 对任意的 n 维向量 ξ , 向量组 $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ 总线性相关, 并证明.

◀ ◻ ▶ ◀ ◻ ▶ ◀ ≡ ▶ ◀ ≡ ▶ ≡ ↺ 🔍 ↻

七、证明题

2. 设 $n(n > 4)$ 维向量 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 满足

$\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + 4\alpha_4 = 0$ 且 $\beta_i = \alpha_i + i\lambda_i\xi, i = 1, 2, 3, 4$. 问当不全为零的数 $\lambda_i (i = 1, 2, 3, 4)$ 满足什么条件时, 对任意的 n 维向量 ξ , 向量组 $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ 总线性相关, 并证明.

七、证明题

2. 设 $n(n > 4)$ 维向量 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 满足

$\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + 4\alpha_4 = 0$ 且 $\beta_i = \alpha_i + i\lambda_i\xi, i = 1, 2, 3, 4$. 问当不全为零的数 $\lambda_i(i = 1, 2, 3, 4)$ 满足什么条件时, 对任意的 n 维向量 ξ , 向量组 $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ 总线性相关, 并证明.

证明二: 首先由 $\alpha_1 = -2\alpha_2 - 3\alpha_3 - 4\alpha_4$

$$r([\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4]) = r([\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \xi] \underbrace{\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 1 \\ \lambda_1 & 2\lambda_2 & 3\lambda_3 & 4\lambda_4 \end{bmatrix}}_P)$$

若 $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性相关, 那么

$$r([\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4]) \leq r([\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \xi]) < 4$$

此时已经线性无关, 故 λ_i 可以满足任意条件; 若 $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关, 那么取 ξ 使得 $\xi, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 也线性无关, 那么只需满足 (下式用到了左乘列满秩秩不变的结论) $r([\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4]) = r(P) < 4$, 等价于 $|P| = 0$, 即 $\lambda_1 + 4\lambda_2 + 9\lambda_3 + 16\lambda_4 = 0$; 反之, 如果满足 $\lambda_1 + 4\lambda_2 + 9\lambda_3 + 16\lambda_4 = 0$, 那么 $|P| = 0 \Rightarrow r(P) < 4$, 进而得到 $r([\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4]) \leq r(P) < 4$, 即线性相关.

目录

2023-2024 学年
第 2 学期半期考
试试题

一、填空题

三

四

五

六

七

线性方程组

一、填空题

二、选择题

三

四

五

六

七

八

九

+

+

+

+3

综合练习 (二)

一、填空题

二、选择题

三

四

五

六

七

1. 设 ξ_1, ξ_2 都是线性方程组 $AX = b (b \neq 0)$ 的解, 则 $\xi_1 - \xi_2$ 是方程组 $AX = 0$ 的解, $\xi_2 + k(\xi_1 - \xi_2)$ 是方程组 $AX = b$ 的解.

目录

2023-2024 学年
第 2 学期半期考
试试题

一、填空题

二
三
四
五
六
七

线性方程组

一、填空题

二、选择题

三
四
五
六
七
八
九
十
十一
十二
十三

综合练习 (二)

一、填空题

二、选择题

三
四
五
六
七

1. 设 ξ_1, ξ_2 都是线性方程组 $AX = b (b \neq 0)$ 的解, 则 $\xi_1 - \xi_2$ 是方程组 $AX = 0$ 的解, $\xi_2 + k(\xi_1 - \xi_2)$ 是方程组 $AX = b$ 的解.

解: 带入验证即可

$$A(\xi_1 - \xi_2) = A\xi_1 - A\xi_2 = b - b = 0$$

此即表示 $\xi_1 - \xi_2$ 是 $AX = 0$ 的一个解; 同理由

$$A[\xi_2 + k(\xi_1 - \xi_2)] = A\xi_2 + kA\xi_1 - kA\xi_2 = b + kb - kb = b$$

因此 $\xi_2 + k(\xi_1 - \xi_2)$ 是 $AX = b$ 的解.

目录

2023-2024 学年
第 2 学期半期考
试试题

一、填空题

—
—
—

四

五

六

七

线性方程组

一、填空题

二、选择题

三

四

五

六

七

八

力

+

+-

 $+-$ $+=$

综合练习 (二)

一、填空题

二、选择题

三

四

五

六

七

2. 设 A 是秩为 r 的 $m \times n$ 矩阵, $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-r}$ 是 $Ax = 0$ 的一个基础解系, n 维列向量 ξ 不是 $Ax = 0$ 的解, 则 $r\{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-r}, \xi\} = n - r + 1$.

目录

2023-2024 学年
第 2 学期半期考
试试题

一、填空题

二
三
四
五
六
七

线性方程组

一、填空题

二、选择题

三
四
五
六
七
八
九
十
十一
十二
十三

综合练习(二)

一、填空题

二、选择题

三
四
五
六
七

3. 设 A 是 n 阶方阵, 则 $AX = b (n \neq 0)$ 有无穷多解或无解的充分必要条件是 $\underline{r([A, b]) = r(A) < n}, \underline{r([A, b]) > r(A)}$.

解: $AX = b$ 有解等价于系数矩阵的主元数等于增广矩阵的主元数即 $r([A, b]) = r(A)$, 无穷多解等价于系数矩阵主元数小于未知数个数 n , 即 $r(A) < n$, 合并后即得到

$$r([A, b]) = r(A) < n$$

无解等价于系数矩阵的主元数小于增广矩阵的主元数, 即

$$r([A, b]) > r(A)$$

或者也可以写为 $r([A, b]) = r(A) + 1$.

目录

2023-2024 学年
第 2 学期半期考
试试题

- 一、填空题
- 二
- 三
- 四
- 五
- 六
- 七

线性方程组

- 一、填空题
- 二、选择题
- 三
- 四
- 五
- 六
- 七
- 八
- 九
- 十
- 十一
- 十二
- 十三

综合练习 (二)

- 一、填空题
- 二、选择题
- 三
- 四
- 五
- 六
- 七

4. 已知方程组 $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & a+2 \\ 1 & a & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$ 无解, 则 $a = \underline{-1}$.

目录

2023-2024 学年
第 2 学期半期考
试试题

- 一、填空题
二
三
四
五
六
七

线性方程组

- 一、填空题
二、选择题
三
四
五
六
七
八
九
十
十一
十二
十三

综合练习 (二)

- 一、填空题
二、选择题
三
四
五
六
七

5. 若 ξ_1, ξ_2, ξ_3 是齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的基础解系, 当 k 满足条件 $k \neq 1, -2$ 时, 向量组 $k\xi_1 + \xi_2 + \xi_3, \xi_1 + k\xi_2 + \xi_3, \xi_1 + \xi_2 + k\xi_3$ 也是 $Ax = 0$ 的基础解系.

5. 若 ξ_1, ξ_2, ξ_3 是齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的基础解系, 当 k 满足条件 $k \neq 1, -2$ 时, 向量组 $k\xi_1 + \xi_2 + \xi_3, \xi_1 + k\xi_2 + \xi_3, \xi_1 + \xi_2 + k\xi_3$ 也是 $Ax = 0$ 的基础解系.

解: 首先 $k\xi_1 + \xi_2 + \xi_3, \xi_1 + k\xi_2 + \xi_3, \xi_1 + \xi_2 + k\xi_3$ 都是 ξ_1, ξ_2, ξ_3 的线性组合, 因此必定都是 $Ax = 0$ 的解, 因此只需要他们线性无关即可称为基础解系, 即需要

$$[k\xi_1 + \xi_2 + \xi_3, \xi_1 + k\xi_2 + \xi_3, \xi_1 + \xi_2 + k\xi_3] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$$

只有零解, 该方程等价于

$$[\xi_1, \xi_2, \xi_3] \begin{bmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$$

因为 ξ_1, ξ_2, ξ_3 线性无关, 此方程等价于

$$\begin{bmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$$

该方程只有零解等价于系数矩阵可逆, 行列式 $(k-1)^2(k+2) \neq 0$ 即可, 等价于 $k \neq 1, -2$.

目录

2023-2024 学年
第 2 学期半期考
试试题

一、填空题

二
三
四
五
六
七

线性方程组

一、填空题

二、选择题

三
四
五
六
七
八
九
十
十一
十二
十三

综合练习(二)

一、填空题

二、选择题

三
四
五
六
七

1. 在非齐次线性方程组 $Ax = b$ 中, 方程个数少于未知量个数, 则
(C).

A. $Ax = b$ 有无穷多解

B. $Ax = b$ 有唯一解

C. $Ax = 0$ 有无穷多解

D. $Ax = 0$ 仅有零解

1. 在非齐次线性方程组 $Ax = b$ 中, 方程个数少于未知量个数, 则 (C).

- A. $Ax = b$ 有无穷多解
B. $Ax = b$ 有唯一解
C. $Ax = 0$ 有无穷多解
D. $Ax = 0$ 仅有零解

解: 举例证伪即可. 方程

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

满足条件, 但显然无解, 因此 $(A)(B)$ 错误; 而方程

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

显然有无穷多解, 因此 (D) 错误, 选择 (C) 项.

若 A 为 $m \times n$ 阶矩阵, 方程个数 m 小于未知数个数 n , 因此

$$r([A, b]) \leq m < n$$

并且 $Ax = 0$ 一定有解, 故有无穷多解.

目录

2023-2024 学年
第 2 学期半期考
试试题

一、填空题

二

三

四

五

六

七

线性方程组

一、填空题

二、选择题

三

四

五

六

七

八

九

十

十一

十二

十三

综合练习(二)

一、填空题

二、选择题

三

四

五

六

七

2. 设 A 是 $s \times n$ 矩阵, 秩 $A = s$, 则线性方程组 $Ax = b$ 一定 (C).

A. 有唯一解 B. 有无穷多解

C. 有解 D. 无解

2. 设 A 是 $s \times n$ 矩阵, 秩 $A = s$, 则线性方程组 $Ax = b$ 一定 (C).

A. 有唯一解 B. 有无穷多解

C. 有解 D. 无解

解: 由题意可知 A 行满秩, 其行向量线性无关, 而 $[A, b]$ 的行向量相当于 A 行向量的伸长组, 因此也线性无关, 因此得到

$$r([A, b]) = r(A) = s$$

这说明 $Ax = b$ 有解, (C) 正确, (D) 错误. 而解的数量是不确定的, 如

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

左边的方程有无穷解, 右边的只有唯一解.

3. 已知 β_1, β_2 是非齐次线性方程组 $Ax = b$ 的两个不同的解, α_1, α_2 是其导出组 $Ax = 0$ 的基础解系, k_1, k_2 为任意常数, 则 $Ax = b$ 的通解为 (B).

A. $k_1\alpha_1 + k_2(\alpha_1 + \alpha_2) + \frac{\beta_1 - \beta_2}{2}$
 B. $k_1\alpha_1 + k_2(\alpha_1 - \alpha_2) + \frac{\beta_1 + \beta_2}{2}$
 C. $k_1\alpha_1 + k_2(\beta_1 + \beta_2) + \frac{\beta_1 - \beta_2}{2}$
 D. $k_1\alpha_1 + k_2(\beta_1 - \beta_2) + \frac{\beta_1 + \beta_2}{2}$

3. 已知 β_1, β_2 是非齐次线性方程组 $Ax = b$ 的两个不同的解, α_1, α_2 是其导出组 $Ax = 0$ 的基础解系, k_1, k_2 为任意常数, 则 $Ax = b$ 的通解为 (B).

$$\text{A. } k_1\alpha_1 + k_2(\alpha_1 + \alpha_2) + \frac{\beta_1 - \beta_2}{2}$$

$$\text{B. } k_1\alpha_1 + k_2(\alpha_1 - \alpha_2) + \frac{\beta_1 + \beta_2}{2}$$

$$\text{C. } k_1\alpha_1 + k_2(\beta_1 + \beta_2) + \frac{\beta_1 - \beta_2}{2}$$

$$\text{D. } k_1\alpha_1 + k_2(\beta_1 - \beta_2) + \frac{\beta_1 + \beta_2}{2}$$

解: 非齐次线性方程组的通解即为 $Ax = b$ 的一个特解加上其导出组的基础解系的任意线性组合, 因此四个选项逐个验证即可. (B) 项中

$$A \frac{\beta_1 + \beta_2}{2} = \frac{1}{2}A\beta_1 + \frac{1}{2}A\beta_2 = \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}b = b$$

$$A\alpha_1 = 0, \quad A(\alpha_1 - \alpha_2) = A\alpha_1 - A\alpha_2 = 0$$

并且 $\alpha_1, \alpha_1 - \alpha_2$ 线性无关, 因此满足所有条件, 即为 $Ax = b$ 的通解.

4. 设 $A = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$ 是秩为 2 的三阶矩阵, A^* 是 A 的伴随矩阵, 则齐次线性方程组 $A^*x = 0$ 的解一定能表示为 (D) , 其中 k, l, m 是任意常数.

A. $k\alpha_1 + l\alpha_2$ B. $l\alpha_2 + m\alpha_3$

C. $k\alpha_1 + m\alpha_3$ D. $k\alpha_1 - l\alpha_2 + m\alpha_3$

4. 设 $A = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$ 是秩为 2 的三阶矩阵, A^* 是 A 的伴随矩阵, 则齐次线性方程组 $A^*x = 0$ 的解一定能表示为 (D) , 其中 k, l, m 是任意常数.

A. $k\alpha_1 + l\alpha_2$ B. $l\alpha_2 + m\alpha_3$

C. $k\alpha_1 + m\alpha_3$ D. $k\alpha_1 - l\alpha_2 + m\alpha_3$

解: 因为 A 不满秩, 因此 $A^*A = 0$, 这表示 A 的列向量都是 $A^*x = 0$ 的解, 因此他们的线性组合也都是解; 另一方面, 可知 $r(A^*) = 1$, 故 $A^*x = 0$ 的解空间维数为 $3 - r(A^*) = 3 - 1 = 2$, 其中一个基础解系为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 中的极大线性无关组.

但我们不知道 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 中极大线性无关组是哪两个, 因此 $(A)(B)(C)$ 都不一定正确, (D) 项一定包含极大线性无关组, 因此可以表示所有解, 正确.

目录

2023-2024 学年
第 2 学期半期考
试试题

一、填空题

二

三

四

五

六

七

线性方程组

一、填空题

二、选择题

三

四

五

六

七

八

九

十

十一

十二

十三

综合练习 (二)

一、填空题

二、选择题

三

四

五

六

七

三、求下列齐次线性方程组的一个基础解系及通解.

$$1. \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

三、求下列齐次线性方程组的一个基础解系及通解.

$$1. \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

解: 作初等行变换

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \cdots \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

因此可得基础解系为 $\begin{bmatrix} -5 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, 通解为 $k_1 \begin{bmatrix} -5 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, 其

中 k_1, k_2 为任意常数.

注: 可以看到, 解空间维数 $n - r(A)$ 中的 n 指的是列数, 而非行数.

2. 方程组 $Ax = 0$, 其系数矩阵 A 可经初等行变换化为

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & a & 0 \end{bmatrix}$$

三、求下列齐次线性方程组的一个基础解系及通解.

2. 方程组 $Ax = 0$, 其系数矩阵 A 可经初等行变换化为

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & a & 0 \end{bmatrix}$$

解: 由题意, 根据 a 是否为零导出不同的结果.

① $a = 0$ 时, 进行初等行变换

$$A \rightarrow B \rightarrow \cdots \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

此时基础解系为 $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, 通解为

$$k_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + k_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ 其中 } k_1, k_2, k_3 \text{ 为任意常数.}$$

目录

2023-2024 学年
第 2 学期半期考
试试题

- 一、填空题
- 二
- 三
- 四
- 五
- 六
- 七

线性方程组

- 一、填空题
- 二、选择题
- 三
- 四
- 五
- 六
- 七
- 八
- 九
- 十
- 十一
- 十二
- 十三

综合练习 (二)

- 一、填空题
- 二、选择题
- 三
- 四
- 五
- 六
- 七

四、解下列线性方程组.

1.
$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 + 2x_5 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 2, \\ 3x_1 + 3x_2 + 3x_4 + x_5 = 3 \end{cases}$$

四、解下列线性方程组.

$$1. \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 + 2x_5 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 2, \\ 3x_1 + 3x_2 + 3x_4 + x_5 = 3 \end{cases}$$

解: 对增广矩阵进行初等行变换.

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 0 & 3 & 1 & 3 \end{array} \right] \rightarrow \cdots \rightarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} 4 & 4 & 0 & 4 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 3 \end{array} \right]$$

因此得到特解 $\begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ 0 \\ -\frac{1}{4} \\ 0 \\ \frac{3}{4} \end{bmatrix}$, 同样可以得到导出组的基础解系为

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{进而得到通解为 } \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ 0 \\ -\frac{1}{4} \\ 0 \\ \frac{3}{4} \end{bmatrix} + k_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{其中}$$

k_1, k_2 为任意常数

目录

2023-2024 学年
第 2 学期半期考
试试题

- 一、填空题
- 二
- 三
- 四
- 五
- 六
- 七

线性方程组

- 一、填空题
- 二、选择题
- 三
- 四
- 五
- 六
- 七
- 八
- 九
- 十
- 十一
- 十二
- 十三

综合练习 (二)

- 一、填空题
- 二、选择题
- 三
- 四
- 五
- 六
- 七

四、解下列线性方程组.

2. 方程组 $Ax = \beta$, 其增广矩阵 $\tilde{A} = (A, \beta)$ 可经初等行变换化为

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

四、解下列线性方程组.

2. 方程组 $Ax = \beta$, 其增广矩阵 $\tilde{A} = (A, \beta)$ 可经初等行变换化为

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

解: 按 $a - 1$ 是否为零分类讨论.

① $a = 1, b \neq 0$ 时, 显然 $r(\tilde{A}) = 2 \neq r(A) = 1$, 因此方程无解;

② $a = 1, b = 0$ 时, 只有第一行非零, 因此直接得到特解 $\begin{bmatrix} -5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, 导出

组通解为 $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, 因此得到通解为

$$\begin{bmatrix} -5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + k_1 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + k_3 \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, k_1, k_2, k_3 \text{ 为任意常数}$$

四、解下列线性方程组.

2. 方程组 $Ax = \beta$, 其增广矩阵 $\tilde{A} = (A, \beta)$ 可经初等行变换化为

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

解:(接上文)

③ $a - 1 \neq 0$ 时, 继续进行行变换

$$\rightarrow \dots \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 5 - \frac{2b}{a-1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{b}{a-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

得到特解 $\begin{bmatrix} 5 - \frac{2b}{a-1} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{b}{a-1} \end{bmatrix}$, 导出组通解为 $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, 因此得到

通解为

$$\begin{bmatrix} 5 - \frac{2b}{a-1} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{b}{a-1} \end{bmatrix} + k_1 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + k_3 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, k_1, k_2, k_3 \text{ 为任意常数}$$

五、 λ 为何值时, 方程组

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = \lambda, \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = \lambda^2 \end{cases}$$

有解? 有解时, 求出
通解.

五、 λ 为何值时, 方程组
$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = \lambda, \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = \lambda^2 \end{cases}$$
 有解? 有解时, 求出

通解.

解: 作初等行变换

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 1 & | & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & | & \lambda \\ 1 & 1 & \lambda & | & \lambda^2 \end{bmatrix} \rightarrow \cdots \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & \lambda & | & \lambda^2 \\ 0 & \lambda - 1 & 1 - \lambda & | & \lambda(1 - \lambda) \\ 0 & 0 & (1 - \lambda)(2 + \lambda) & | & (1 - \lambda)(\lambda + 1)^2 \end{bmatrix}$$

其中第二行虚线左边为零当且仅当 $\lambda = 1$, 此时虚线右边也为零, 因此第二行无论如何不影响是否有解; 第三行虚线左边为零当且仅当 $\lambda = 1$ 或 -2 , 同样的 $\lambda = 1$ 时虚线右边也为零即不影响有解, 故可知在 $\lambda \neq -2$ 时都有解.

① $\lambda = 1$ 时原矩阵只有第一行非零, 且为 $[1, 1, 1, 1]$, 通解为

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + k_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, k_1, k_2 \text{ 为任意常数}$$

五、 λ 为何值时, 方程组
$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = \lambda, \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = \lambda^2 \end{cases}$$
 有解? 有解时, 求出通解.

解:(接上文)

② $\lambda \neq 1, -2$ 继续化简矩阵

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \\ 0 & -1 & 1 & \lambda \\ 0 & 0 & 2+\lambda & (1+\lambda)^2 \end{array} \right] \rightarrow \dots \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{\lambda+1}{\lambda+2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{\lambda+2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{(\lambda+1)^2}{\lambda+2} \end{array} \right]$$

有唯一解

$$\begin{bmatrix} -\frac{\lambda+1}{\lambda+2} \\ 1 \\ \frac{\lambda+2}{(\lambda+1)^2} \\ \frac{(\lambda+1)^2}{\lambda+2} \end{bmatrix}$$

目录

2023-2024 学年
第 2 学期半期考
试试题

一、填空题

三

四

五

六

七

线性方程组

一、填空题

二、选择题

三

四

五

七

八

九

+

+—

十二

十三

综合练习 (二)

一、填空题

二、选择题

三

四

五

六

七

六、写出方程组

$x_1 - x_2 = a_1, x_2 - x_3 = a_2, x_3 - x_4 = a_3, x_4 - x_1 = a_4$ 有解的充要条件, 并求解.

六、写出方程组

$x_1 - x_2 = a_1, x_2 - x_3 = a_2, x_3 - x_4 = a_3, x_4 - x_1 = a_4$ 有解的充要条件, 并求解.

解: 方程组写为

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix}$$

对增广矩阵作初等行变换 (只需要将前三行加到第四行):

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & a_3 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & a_4 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \end{array} \right]$$

因此有解当且仅当 $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 0$, 此时特解为

$[a_1 + a_2 + a_3, a_2 + a_3, a_3, 0]^T$, 导出组基础解系为 $[1, 1, 1, 1]^T$, 因此得到通解

$$[a_1 + a_2 + a_3, a_2 + a_3, a_3, 0]^T + k[1, 1, 1, 1]^T, \quad (k \text{ 为任意常数})$$

目录

2023-2024 学年
第 2 学期半期考
试试题

- 一、填空题
- 二
- 三
- 四
- 五
- 六
- 七

线性方程组

- 一、填空题
- 二、选择题
- 三
- 四
- 五
- 六
- 七
- 八
- 九
- 十
- 十一
- 十二
- 十三

综合练习 (二)

- 一、填空题
- 二、选择题
- 三
- 四
- 五
- 六
- 七

七、设 η_0 是非齐次线性方程组 $Ax = b(b \neq 0)$ 的一个解, $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{n-r}$ 是其导出组 $Ax = 0$ 的一个基础解系, 令 $\eta_j = \eta_0 + \xi_j, j = 1, 2, \cdots, n - r$, 证明:

1. $\eta_0, \xi_1, \cdots, \xi_{n-r}$ 线性无关;

七、设 η_0 是非齐次线性方程组 $Ax = b (b \neq 0)$ 的一个解, $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-r}$ 是其导出组 $Ax = 0$ 的一个基础解系, 令 $\eta_j = \eta_0 + \xi_j, j = 1, 2, \dots, n-r$, 证明:
1. $\eta_0, \xi_1, \dots, \xi_{n-r}$ 线性无关;

证明: 由题意可知 $A\eta_0 = b \neq 0$, 这表示 η_0 不是 $Ax = 0$ 的解, 那么必然不在 $Ax = 0$ 的解空间中, 也就不可被其基础解系 ξ_1, \cdots, ξ_{n-r} 线性表出, 又由 ξ_1, \cdots, ξ_{n-r} 线性无关, 那么 $\eta_0, \xi_1, \cdots, \xi_{n-r}$ 也线性无关.

目录

2023-2024 学年
第 2 学期半期考
试试题

一、填空题

二

三

四

五

六

七

线性方程组

一、填空题

二、选择题

三

四

五

六

七

八

九

十

十一

十二

十三

综合练习(二)

一、填空题

二、选择题

三

四

五

六

七

七、设 η_0 是非齐次线性方程组 $Ax = b (b \neq 0)$ 的一个解, $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-r}$ 是其导出组 $Ax = 0$ 的一个基础解系, 令 $\eta_j = \eta_0 + \xi_j, j = 1, 2, \dots, n - r$, 证明:
2. $\eta_0, \eta_1, \dots, \eta_{n-r}$ 线性无关, 且都是 $Ax = b$ 的解;

七、设 η_0 是非齐次线性方程组 $Ax = b (b \neq 0)$ 的一个解, $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-r}$ 是其导出组 $Ax = 0$ 的一个基础解系, 令 $\eta_j = \eta_0 + \xi_j, j = 1, 2, \dots, n-r$, 证明:
2. $\eta_0, \eta_1, \dots, \eta_{n-r}$ 线性无关, 且都是 $Ax = b$ 的解;

证明: 首先由 $A\eta_0 = b, A\eta_j = A(\eta_0 + \xi_j) = A\eta_0 + A\xi_j = b + 0 = b$ 可知它们都是 $Ax = b$ 的解, 下证它们线性无关, 由 1 已知 $\eta_0, \xi_1, \dots, \xi_{n-r}$ 线性无关, 因此对于方程组

$$\begin{aligned}
[\eta_0, \eta_1, \dots, \eta_{n-r}] \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{n-r} \end{bmatrix} &= [\eta_0, \xi_1, \dots, \xi_{n-r}] \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{n-r} \end{bmatrix} = 0 \\
\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{n-r} \end{bmatrix} &= 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{n-r} \end{bmatrix} = 0
\end{aligned}$$

这表示只有零解, 即证.

目录

2023-2024 学年
第 2 学期半期考
试试题

一、填空题

二

三

四

五

六

七

线性方程组

一、填空题

二、选择题

三

四

五

六

七

八

九

十

十一

十二

十三

综合练习 (二)

一、填空题

二、选择题

三

四

五

六

七

七、设 η_0 是非齐次线性方程组 $Ax = b (b \neq 0)$ 的一个解, $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-r}$ 是其导出组 $Ax = 0$ 的一个基础解系, 令

$\eta_j = \eta_0 + \xi_j, j = 1, 2, \dots, n - r$, 证明:

3. 方程组 $Ax = b$ 的任一解可表示为

$x = \lambda_0 \eta_0 + \lambda_1 \eta_1 + \dots + \lambda_{n-r} \eta_{n-r}$ 的形式, 其中常数

$\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-r}$ 满足 $\lambda_0 + \lambda_1 + \dots + \lambda_{n-r} = 1$.

七、设 η_0 是非齐次线性方程组 $Ax = b (b \neq 0)$ 的一个解, $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-r}$ 是其导出组 $Ax = 0$ 的一个基础解系, 令

$$\eta_j = \eta_0 + \xi_j, j = 1, 2, \cdots, n-r, \text{ 证明:}$$

3. 方程组 $Ax = b$ 的任一解可表示为

$x = \lambda_0 \eta_0 + \lambda_1 \eta_1 + \cdots + \lambda_{n-r} \eta_{n-r}$ 的形式, 其中常数

$\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-r}$ 满足 $\lambda_0 + \lambda_1 + \dots + \lambda_{n-r} = 1$.

证明: 因为

$$\begin{aligned} & \lambda_0 \eta_0 + \lambda_1 \eta_1 + \cdots + \lambda_{n-r} \eta_{n-r} \\ = & (\lambda_0 + \cdots + \lambda_{n-r}) \eta_0 + \lambda_1 \xi_1 + \cdots + \lambda_{n-r} \xi_{n-r} \\ = & \eta_0 + \lambda_1 \xi_1 + \cdots + \lambda_{n-r} \xi_{n-r} \end{aligned}$$

其中 η_0 为 $Ax = b$ 的特解, ξ_1, \cdots, ξ_{n-r} 为其导出组的基础解系, 所以上式确为 $Ax = b$ 的通解.

注: 虽然 $A_{m \times n}x = b (b \neq 0)$ 的解集不是一个子空间 (是仿射空间), 但可以知道其中一定有 $n - r(A) + 1$ 个线性无关的向量.

目录

2023-2024 学年
第 2 学期半期考
试试题

一、填空题

三

四

五

六

七

线性方程组

一、填空题

二、选择题

三

四

五

六

7

八

九

+

+-

十二

十三

综合练习 (二)

一、填空题

二、选择题

三

四

五

六

七

八、设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是四元非齐次线性方程组 $Ax = \beta (\beta \neq 0)$ 的 3 个线性无关的解向量, $r(A) = 3$, 且

$\alpha_1 + \alpha_2 = (1, 1, 0, 2)^T, \alpha_2 + \alpha_3 = (1, 0, 1, 3)^T$, 求方程组 $Ax = \beta$ 的通解.

八、设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是四元非齐次线性方程组 $Ax = \beta (\beta \neq 0)$ 的 3 个线性无关的解向量, $r(A) = 3$, 且

$\alpha_1 + \alpha_2 = (1, 1, 0, 2)^T, \alpha_2 + \alpha_3 = (1, 0, 1, 3)^T$, 求方程组 $Ax = \beta$ 的通解.

解: 得到 $Ax = \beta$ 的通解需要得到一个特解和导出组的基础解系. 因为 $A(\alpha_1 + \alpha_2) = 2\beta$, 那么 $A\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} = \beta$, 这表示

$\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 1)^T$ 即为 $Ax = \beta$ 的一个特解.

另一方面, 容易知道 $\alpha_1 + \alpha_2$ 和 $\alpha_2 + \alpha_3$ 都是 $Ax = 2\beta$ 的解, 那么 $\alpha_1 - \alpha_3 = (\alpha_1 + \alpha_2) - (\alpha_2 + \alpha_3) = (0, 1, -1, -1)^T$ 即为 $Ax = 0$ 的解, 同时可知 $Ax = 0$ 的解空间维数为 $4 - r(A) = 1$, 因此 $Ax = \beta$ 的通解即为

$$\begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + k \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, k \text{ 为任意常数}$$

九、已知四阶方阵 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 均为 4 维列向量, 其中 $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关, $\alpha_1 = 2\alpha_2 - \alpha_3$. 如果 $\beta = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4$, 求方程组 $Ax = \beta$ 的通解.

九、已知四阶方阵 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 均为 4 维列向量, 其中 $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关, $\alpha_1 = 2\alpha_2 - \alpha_3$. 如果 $\beta = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4$, 求方程组 $Ax = \beta$ 的通解.

解: 求通解需要找到一个特解和导出组的基础解系. 由 β 定义可知

$$\beta = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4] \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

因此 $[1, 1, 1, 1]^T$ 即为 $Ax = \beta$ 的一个特解; 另一方面, 由

$$\alpha_1 - 2\alpha_2 + \alpha_3 = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4] \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

这表示 $[1, -2, 1, 0]^T$ 为 $Ax = 0$ 的一个解, 因为 $Ax = 0$ 解空间维数为 $4 - r(A) = 1$, 因此通解为

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + k \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, k \text{ 为任意常数}$$

目录

2023-2024 学年
第 2 学期半期考
试试题

- 一、填空题
二
三
四
五
六
七

线性方程组

- 一、填空题
二、选择题
三
四
五
六
七
八
九
十
十一
十二
十三

综合练习 (二)

- 一、填空题
二、选择题
三
四
五
六
七

十、设 A 是秩为 n 的 $s \times n$ 矩阵, $AB = AC$, 证明: $B = C$.

目录

2023-2024 学年
第 2 学期半期考
试试题

一、填空题

二

三

四

五

六

七

线性方程组

一、填空题

二、选择题

三

四

五

六

七

八

九

十

十一

十二

十三

综合练习(二)

一、填空题

二、选择题

三

四

五

六

七

十、设 A 是秩为 n 的 $s \times n$ 矩阵, $AB = AC$, 证明: $B = C$.

证明: $AB = AC$ 即 $A(B - C) = 0$, 这表示 $B - C$ 的每一个列向量都是 $Ax = 0$ 的解, 因为 A 列满秩, 因此基础解系的维数为 $n - r(A) = n - n = 0$, 这表示解空间为 $\{0\}$ 即只有零解, 即 $B - C$ 的列向量全为零, 得到 $B - C = 0 \Rightarrow B = C$.

十一、设 n 阶矩阵 A 满足: $A^2 - 3A + 10I = O$, I 为 n 阶单位矩阵, 证明:
 $\text{rank}(A - 5I) + \text{rank}(A + 2I) = n$.

十一、设 n 阶矩阵 A 满足: $A^2 - 3A + 10I = O$, I 为 n 阶单位矩阵, 证明:
$$\text{rank}(A - 5I) + \text{rank}(A + 2I) = n.$$

证明: 由 $A^2 - 3A + 10I = (A - 5I)(A + 2I) = O$, 可知 $A - 5I$ 的列向量都是 $(A - 5I)x = 0$ 的解, 而其解空间维数为 $n - r(A - 5I)$, 因此可知

$$r(A + 2I) \leq n - r(A - 5I) \Rightarrow r(A + 2I) + r(A - 5I) \leq n$$

另一方面, 因为

$$n = r(7I) = r((A + 2I) - (A - 5I)) \leq r(A + 2I) + r(A - 5I)$$

因此得到

$$r(A + 2I) + r(A - 5I) = n$$

目录

2023-2024 学年
第 2 学期半期考
试试题

一、填空题

二

三

四

五

六

七

线性方程组

一、填空题

二、选择题

三

四

五

六

七

八

九

十

十一

十二

十三

综合练习 (二)

一、填空题

二、选择题

三

四

五

六

七

十二、设 A 为 $n(n > 1)$ 阶矩阵, A^* 是 A 的伴随矩阵, 证明:

$$r(A^*) = \begin{cases} n, r(A) = n \\ 1, r(A) = n - 1, \\ 0, r(A) \leq n - 2 \end{cases}$$

十二、设 A 为 $n(n > 1)$ 阶矩阵, A^* 是 A 的伴随矩阵, 证明:

$$r(A^*) = \begin{cases} n, r(A) = n \\ 1, r(A) = n - 1, \\ 0, r(A) \leq n - 2 \end{cases}$$

证明:① $r(A) = n$ 时, A 可逆, 即 $|A| \neq 0$, 因此 $AA^* = |A|I$ 可知 A^* 也可逆, 即得到 $r(A^*) = n$;

② $r(A) = n - 1$ 时, 由 $AA^* = |A|I = 0$ 可知, A^* 的列向量都是 $Ax = 0$ 的解, 因此有

$$r(A^*) \leq n - r(A) = n - (n - 1) = 1$$

而 $r(A) = n - 1$ 表示至少存在 A 的一个 $n - 1$ 阶子式不为零, 因此 $A^* \neq 0$, 即 $r(A^*) \geq 1$, 得到 $r(A^*) = 1$;

③ $r(A) \leq n-2$ 时, 表示任意 A 的 $n-1$ 子式都为零, 即 $A^* = 0$, 因此 $r(A^*) = 0$.

目录

2023-2024 学年
第 2 学期半期考
试试题

一、填空题

二

三

四

五

六

7

线性方程组

一、填空题

二、选择题

三

四

五

六

七

八

九

+

+

+

+3

综合练习 (二)

一、填空题

二、选择题

三

四

五

六

七

十三、若任意一个 n 维向量都是 n 元齐次线性方程组 $Ax = 0$ 解, 证明: $A = O$.

十三、若任意一个 n 维向量都是 n 元齐次线性方程组 $Ax = 0$ 解, 证明: $A = O$.

证明: 设 A 为 $m \times n$ 维矩阵, 由题意可知 $Ax = 0$ 的解空间为 \mathbb{R}^n , 即解空间维数为 n , 那么有

$$n - r(A) = n \Rightarrow r(A) = 0 \Rightarrow A = 0$$

成立.

目录

2023-2024 学年
第 2 学期半期考
试试题

- 一、填空题
二
三
四
五
六
七

线性方程组

- 一、填空题
- 二、选择题
- 三
- 四
- 五
- 六
- 七
- 八
- 九
- 十
- 十一
- 十二
- 十三

综合练习 (二)

- 一、填空题
二、选择题
三
四
五
六
七

1. 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 向量组 $p\alpha_1 - \alpha_2, s\alpha_2 - \alpha_3, t\alpha_3 - \alpha_1$ 线性相关, 则 p, s, t 满足条件 $pst = 1$.

1. 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 向量组

$p\alpha_1 - \alpha_2, s\alpha_2 - \alpha_3, t\alpha_3 - \alpha_1$ 线性相关, 则 p, s, t 满足条件 $pst = 1$.

解: 由题意即以下方程组存在非零解

$$[p\alpha_1 - \alpha_2, s\alpha_2 - \alpha_3, t\alpha_3 - \alpha_1] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$$

方程组变换为

$$[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] \begin{bmatrix} p & 0 & -1 \\ -1 & s & 0 \\ 0 & -1 & t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$$

由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 无关可知上述方程等价于

$$\begin{bmatrix} p & 0 & -1 \\ -1 & s & 0 \\ 0 & -1 & t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$$

要使此方程存在零解, 即行列式为零即可, 得到

$$pst - 1 = 0$$

目录

2023-2024 学年
第 2 学期半期考
试试题

一、填空题

三

四

五

六

七

线性方程组

一、填空题

二、选择题

三

四

五

六

七

八

九

+

+

+

+

综合练习 (二)

一、填空题

二、选择题

三

四

五

六

七

2. 设 $\alpha_i = (1, \lambda_i, \lambda_i^2, \dots, \lambda_i^{n-1})^T, i = 1, 2, \dots, r$, 其中 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ 是互不相同的 r 个数, 则对于向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$, 当 $r > n$ 时, 线性相关; 当 $r = n$ 时, 线性无关; 当 $r < n$ 时, 线性无关.

2. 设 $\alpha_i = (1, \lambda_i, \lambda_i^2, \dots, \lambda_i^{n-1})^T, i = 1, 2, \dots, r$, 其中 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ 是互不相同的 r 个数, 则对于向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$, 当 $r > n$ 时, 线性相关; 当 $r = n$ 时, 线性无关; 当 $r < n$ 时, 线性无关.

解: 将这些 α_i 作为列向量组成一个 $n \times r$ 矩阵

$$[\alpha_1, \dots, \alpha_r] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_r \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \dots & \lambda_r^{n-1} \end{bmatrix}$$

当 $r > n$ 时, 此矩阵的秩小于等于 $\min(r, n) = n$, 这表示列向量的极大线性无关组数量必定小于 r , 因此线性相关;

当 $r = n$ 时, 此矩阵的行列式即范德蒙行列式, 非零, 进而可知满秩, 即列向量线性无关;

当 $r < n$ 时, 取前 r 行的 r 阶子式, 它也是范德蒙行列式, 因此非零, 这样子式的列向量线性无关, α_i 作为其伸长组也线性无关.

3. 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是 \mathbb{R}^3 的一组基, 则由基 $\alpha_1, \frac{1}{2}\alpha_2, \frac{1}{3}\alpha_3$ 到

$\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1$ 的过渡矩阵为 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \end{bmatrix}$.

目录

2023-2024 学年
第 2 学期半期考
试试题

一、填空题

三

四

五

六

七

线性方程组

一、填空题

二、选择题

三

四

五

六

七

八

九

+

+

+2

+3

综合练习 (二)

一、填空题

二、选择题

三

四

五

六

七

3. 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是 \mathbb{R}^3 的一组基, 则由基 $\alpha_1, \frac{1}{2}\alpha_2, \frac{1}{3}\alpha_3$ 到

$\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1$ 的过渡矩阵为 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \end{bmatrix}$.

解: 首先不难得到

$$[\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1] = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{P_1}$$

$$\left[\alpha_1, \frac{1}{2}\alpha_2, \frac{1}{3}\alpha_3 \right] = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}}_{P_2}$$

若设待求过渡矩阵为 P , 那么

$$\left[\alpha_1, \frac{1}{2}\alpha_2, \frac{1}{3}\alpha_3 \right] P = [\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1]$$

$$\Leftrightarrow [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] P_2 P = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] P_1$$

$$\Leftrightarrow P = P_2^{-1} P_1$$

目录

2023-2024 学年
第 2 学期半期考
试试题

- 一、填空题
- 二
- 三
- 四
- 五
- 六
- 七

线性方程组

- 一、填空题
- 二、选择题
- 三
- 四
- 五
- 六
- 七
- 八
- 九
- 十
- 十一
- 十二
- 十三

综合练习 (二)

- 一、填空题
- 二、选择题
- 三
- 四
- 五
- 六
- 七

4. 设 α 为 3 维列向量, $\alpha^T \alpha = 1$, I 为 3 阶单位矩阵, 则矩阵 $I - \alpha \alpha^T$ 的秩为 2.

4. 设 α 为 3 维列向量, $\alpha^T \alpha = 1$, I 为 3 阶单位矩阵, 则矩阵 $I - \alpha \alpha^T$ 的秩为 2.

解: 记 $A = I - \alpha\alpha^T$, 首先由秩不等式可知

$$2 = |3 - 1| = |r(I) - r(\alpha\alpha^T)| \leq r(I - \alpha\alpha^T) \leq 3$$

因此 $r(A)$ 只可能为 2 或 3. 由 25 页第九题 2 结论, A 不可逆, 因此 $r(A)$ 只能为 2.

注: 此题可以借助很多推论完成, 以下提出三个.

- 不难计算得到 $A^2 = A$ (25页第九题 1), 即 $A(I - A) = 0$, 和 69 页十一题类似结论可得 $r(A) + r(I - A) = 3$, 如果 $r(A) = 3$, 那么 $r(I - A) = 0 \Rightarrow I - A = 0 \Rightarrow A = I \Rightarrow \alpha\alpha^T = 0 \Rightarrow \alpha = 0 \Rightarrow \alpha^T\alpha = 0$ 矛盾, 因此 $r(A)$ 只能为 2;
- 推论: 若 A 为 $m \times n$ 阶矩阵, B 为 $n \times m$ 阶矩阵, 那么 $|I_m - AB| = |I_n - BA|$. 使用此结论, 我们对 A 求行列式, 即 $|I - \alpha\alpha^T| = |1 - \alpha^T\alpha| = |1 - 1| = 0$, 即 $r(A) < 3$, 进而得到 $r(A) = 2$.

目录

2023-2024 学年
第 2 学期半期考
试试题

- 一、填空题
- 二
- 三
- 四
- 五
- 六
- 七

线性方程组

- 一、填空题
- 二、选择题
- 三
- 四
- 五
- 六
- 七
- 八
- 九
- 十
- 十一
- 十二
- 十三

综合练习 (二)

- 一、填空题
- 二、选择题
- 三
- 四
- 五
- 六
- 七

·直接对 $A = I - \alpha\alpha^T$ 求行列式: 设 $\alpha = (x_1, x_2, x_3)^T$, 可知 $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$, 那么 (加边法)

$$\begin{aligned} |I - \alpha\alpha^T| &= \begin{vmatrix} 1 - x_1^2 & -x_1x_2 & -x_1x_3 \\ -x_2x_1 & 1 - x_2^2 & -x_2x_3 \\ -x_3x_1 & -x_3x_2 & 1 - x_3^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_2 & x_3 \\ 0 & 1 - x_1^2 & -x_1x_2 & -x_1x_3 \\ 0 & -x_2x_1 & 1 - x_2^2 & -x_2x_3 \\ 0 & -x_3x_1 & -x_3x_2 & 1 - x_3^2 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1 & 1 & 0 & 0 \\ x_2 & 0 & 1 & 0 \\ x_3 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{爪形行列式}} \begin{vmatrix} 1 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 & 0 & 0 & 0 \\ x_1 & 1 & 0 & 0 \\ x_2 & 0 & 1 & 0 \\ x_3 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 0 \end{aligned}$$

因此也得到 $r(A) < 3$, 进而 $r(A) = 2$.

注: 如果将此题改为 n 阶矩阵, 可得 $r(I - \alpha\alpha^T) = n - 1$, 方法是类似的.

目录

2023-2024 学年
第 2 学期半期考
试试题

一、填空题

二
三
四
五
六
七

线性方程组

一、填空题

二、选择题

三
四
五
六
七
八
九
十
十一
十二
十三

综合练习 (二)

一、填空题

二、选择题

三
四
五
六
七

5. 设 A, B 均为 n 阶矩阵, 齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的解都是 $Bx = 0$ 的解, 则 $r(A) \geq r(B)$.

目录

2023-2024 学年
第 2 学期半期考
试试题

一、填空题

二
三
四
五
六
七

线性方程组

一、填空题
二、选择题

三
四
五
六
七
八
九
十
十一
十二
十三

综合练习(二)

一、填空题

二、选择题

三
四
五
六
七

5. 设 A, B 均为 n 阶矩阵, 齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的解都是 $Bx = 0$ 的解, 则 $r(A) \geq r(B)$.

解: 设 $Ax = 0, Bx = 0$ 的解空间分别为 W_A, W_B , 由题意可知 $W_A \subseteq W_B$, 那么就有

$$\dim W_A \leq \dim W_B$$

此即

$$n - r(A) \leq n - r(B)$$

得到

$$r(A) \geq r(B)$$

目录

2023-2024 学年
第 2 学期半期考
试试题

- 一、填空题
- 二
- 三
- 四
- 五
- 六
- 七

线性方程组

- 一、填空题
- 二、选择题
- 三
- 四
- 五
- 六
- 七
- 八
- 九
- 十
- 十一
- 十二
- 十三

综合练习 (二)

- 一、填空题
- 二、选择题
- 三
- 四
- 五
- 六
- 七

6. 设 $A = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$ 为 3 阶矩阵, 若 α_1, α_2 线性无关, 且 $\alpha_3 = -\alpha_1 + 2\alpha_2$, 则线性方程组 $Ax = 0$ 的通解为 $k \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

6. 设 $A = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$ 为 3 阶矩阵, 若 α_1, α_2 线性无关, 且

$\alpha_3 = -\alpha_1 + 2\alpha_2$, 则线性方程组 $Ax = 0$ 的通解为 $k \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

解: 首先由题意可知

$$\alpha_1 - 2\alpha_2 + \alpha_3 = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

这表示 $[1, -2, 1]^T$ 是 $Ax = 0$ 的一个解; 而 $Ax = 0$ 的解空间维数为 $3 - r(A) = 3 - 2 = 1$, 因此通解即为

$$k \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

k 为任意常数.

目录

2023-2024 学年
第 2 学期半期考
试试题

- 一、填空题
二
三
四
五
六
七

线性方程组

- 一、填空题
二、选择题
三
四
五
六
七
八
九
十
十一
十二
十三

综合练习 (二)

- 一、填空题
二、选择题
三
四
五
六
七

1. 设 A, B 满足 $AB = O$ 的任意两个非零矩阵, 则必有 (A).

- A. A 的列向量组线性相关, B 的行向量组线性相关
B. A 的列向量组线性相关, B 的列向量组线性相关
C. A 的行向量组线性相关, B 的行向量组线性相关
D. A 的行向量组线性相关, B 的列向量组线性相关

1. 设 A, B 满足 $AB = O$ 的任意两个非零矩阵, 则必有 (A).

- A. A 的列向量组线性相关, B 的行向量组线性相关
B. A 的列向量组线性相关, B 的列向量组线性相关
C. A 的行向量组线性相关, B 的行向量组线性相关
D. A 的行向量组线性相关, B 的列向量组线性相关

解: 首先设 $A = [\alpha_1, \cdots, \alpha_n]$, 其中 α_i 为列向量, 如果 A 的列向量组线性无关, 那么

$$[\alpha_1, \dots, \alpha_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = 0$$

必然只有零解, 此即表示 B 的列向量只能为零, 得到 $B = 0$ 与非零矛盾, 因此 A 的列向量必然线性相关;

另一方面, 对 $AB = O$ 转置可得 $B^T A^T = O$, 由上结论可知 B^T 的列向量线性相关, 即 B 的行向量线性相关, 因此 (A) 项正确.

目录

2023-2024 学年
第 2 学期半期考
试试题

一、填空题

三

四

五

六

7

线性方程组

一、填空题

二、选择题

三

四

五

六

七

八

九

+

+

+

+3

综合练习 (二)

一、填空题

二、选择题

—

四

五

六

七

2. 设 A 为 4×3 矩阵, η_1, η_2, η_3 是非齐次线性方程组 $Ax = b$ 的 3 个线性无关的解, k_1, k_2, k_3 是任意常数, 则 $Ax = b$ 的通解为 (C).

A. $k_1\eta_1 + k_2\eta_2 + k_3\eta_3$

B. $k_1(\eta_2 - \eta_1) + k_2(\eta_3 - \eta_1)$

$$\text{C. } \frac{\eta_2 + \eta_3}{2} + k_1(\eta_2 - \eta_1) + k_2(\eta_3 - \eta_1)$$

$$\text{D. } \frac{\eta_2 - \eta_3}{2} + k_1(\eta_2 - \eta_1) + k_2(\eta_3 - \eta_1)$$

2. 设 A 为 4×3 矩阵, η_1, η_2, η_3 是非齐次线性方程组 $Ax = b$ 的 3 个线性无关的解, k_1, k_2, k_3 是任意常数, 则 $Ax = b$ 的通解为 (C).

A. $k_1\eta_1 + k_2\eta_2 + k_3\eta_3$

B. $k_1(\eta_2 - \eta_1) + k_2(\eta_3 - \eta_1)$

$$\text{C. } \frac{\eta_2 + \eta_3}{2} + k_1(\eta_2 - \eta_1) + k_2(\eta_3 - \eta_1)$$

$$\text{D. } \frac{\eta_2 - \eta_3}{2} + k_1(\eta_2 - \eta_1) + k_2(\eta_3 - \eta_1)$$

解: 取特殊值排除即可.

(A)项, 取 $k_1 = k_2 = k_3 = 0$ 得到 0, 而 $Ax = b$ 不一定有零解, 故错误;

(B)项, 取 $k_1 = k_2 = 0$ 同上可知错误;

(D)项, 取 $k_1 = k_2 = 0$, 因为 $A \frac{\eta_2 - \eta_3}{2} = \frac{\beta - \beta}{2} = 0$ 也不一定等于 b , 因此错误.

(C)项, 易知 $\frac{\eta_2 + \eta_3}{2}$ 为 $Ax = \beta$ 的解, $\eta_2 - \eta_1, \eta_3 - \eta_1$ 为 $Ax = 0$ 的解且它们线性无关, 因此 (C) 项即为通解.

3. 设 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ 是 4 阶矩阵, A^* 是 A 的伴随矩阵. 若 $(1, 0, 1, 0)^T$ 是线性方程组 $Ax = 0$ 的一个基础解系, 则 $A^*x = 0$ 的基础解系为 (C).

A. α_1, α_3

B. $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$

C. $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$

D. $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$

3. 设 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ 是 4 阶矩阵, A^* 是 A 的伴随矩阵. 若 $(1, 0, 1, 0)^T$ 是线性方程组 $Ax = 0$ 的一个基础解系, 则 $A^*x = 0$ 的基础解系为 (C).

A. α_1, α_3

B. $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$

C. $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$

D. $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$

解: 首先可知 $Ax = 0$ 的解空间维数为 1, 即

$4 - r(A) = 1 \Rightarrow r(A) = 3 \Rightarrow r(A^*) = 1$, 因此 $A^*x = 0$ 的解空间维数即为 $4 - r(A^*) = 4 - 1 = 3$, 故 (A)(D) 项排除.

另一方面, 因为 $A(1, 0, 1, 0)^T = \alpha_1 + \alpha_3 = 0$, 这表示 (B) 项中 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 必定线性相关, 也排除, 最后选择 (C) 项.

三、设向量组 $\alpha_1 = (1, 1, 1, 3)^T, \alpha_2 = (-1, -3, 5, 1)^T, \alpha_3 = (3, 2, -1, p+2)^T, \alpha_4 = (-2, -6, 10, p)^T$.

1. p 取何值时, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关? 此时将 $\beta = (4, 1, 6, 10)^T$ 用 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性表出;

◀ ◻ ▶ ◀ ◻ ▶ ◀ ≡ ▶ ◀ ≡ ▶ ≡ ≡ ↺ 🔍 ↻

三、设向量组 $\alpha_1 = (1, 1, 1, 3)^T, \alpha_2 = (-1, -3, 5, 1)^T, \alpha_3 = (3, 2, -1, p+2)^T, \alpha_4 = (-2, -6, 10, p)^T$.

2. p 取何值时, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性相关? 此时求 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 的秩及一个极大线性无关组.

解: 由 1 结果

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & p-2 & 1-p \end{array} \right]$$

可知 $p = 2$ 时 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性相关, 此时 $r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = 3$, 极大线性无关组为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$.

目录

2023-2024 学年
第 2 学期半期考
试试题

- 一、填空题
- 二
- 三
- 四
- 五
- 六
- 七

线性方程组

- 一、填空题
- 二、选择题
- 三
- 四
- 五
- 六
- 七
- 八
- 九
- 十
- 十一
- 十二
- 十三

综合练习 (二)

- 一、填空题
- 二、选择题
- 三
- 四
- 五
- 六
- 七

四、设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r (r \geq 2)$ 线性无关, 任取 $k_1, k_2, \cdots, k_{r-1} \in \mathbb{R}$, 证明: 向量组

$\beta_1 = \alpha_1 + k_1 \alpha_r, \beta_2 = \alpha_2 + k_2 \alpha_r, \cdots, \beta_{r-1} = \alpha_{r-1} + k_{r-1} \alpha_r, \beta_r = \alpha_r$ 线性无关.

四、设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r (r \geq 2)$ 线性无关, 任取 $k_1, k_2, \dots, k_{r-1} \in \mathbb{R}$, 证明: 向量组

$\beta_1 = \alpha_1 + k_1 \alpha_r, \beta_2 = \alpha_2 + k_2 \alpha_r, \dots, \beta_{r-1} = \alpha_{r-1} + k_{r-1} \alpha_r, \beta_r = \alpha_r$ 线性无关.

证明: 对于方程组

$$[\beta_1, \dots, \beta_r] \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \end{bmatrix} = [\alpha_1 + k_1 \alpha_r, \dots, \alpha_{r-1} + k_{r-1} \alpha_r, \alpha_r] \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \end{bmatrix} = 0$$

等价于下列线性方程组

$$[\alpha_1, \dots, \alpha_r] \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ k_1 & k_2 & \cdots & k_{r-1} & 1 \end{bmatrix}}_P \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \end{bmatrix} = 0$$

因为 $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ 线性无关, 故该方程组等价于 $P[x_1, \dots, x_r]^T = 0$, 进而由 $|P| = 1 \neq 0$ 可知 P 可逆, 等价于 $[x_1, \dots, x_r]^T = 0$, 即只有零解, 因此得到线性无关.

目录

2023-2024 学年
第 2 学期半期考
试试题

一、填空题

三

四

五

六

七

线性方程组

一、填空题

二、选择题

三

四

五

六

七

八

九

+

+

+2

+3

综合练习 (二)

一、填空题

二、选择题

三

四

六

七

五、设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是 \mathbb{R}^3 的一个

基, $\beta_1 = 2\alpha_1 + 2k\alpha_3, \beta_2 = 2\alpha_2, \beta_3 = \alpha_1 + (k+1)\alpha_3$.

1. 证明: 向量组 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 是 \mathbb{R}^3 的一个基.

五、设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是 \mathbb{R}^3 的一个

基, $\beta_1 = 2\alpha_1 + 2k\alpha_3, \beta_2 = 2\alpha_2, \beta_3 = \alpha_1 + (k+1)\alpha_3$.

1. 证明: 向量组 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 是 \mathbb{R}^3 的一个基.

证明: 对于方程组

$$[\beta_1, \beta_2, \beta_3] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2k & 0 & k+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$$

由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关可得原方程组等价于

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2k & 0 & k+1 \end{bmatrix}}_P \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$$

因为 $|P| = 4(k+1) - 4k = 4 \neq 0$, 因此 P 可逆, 方程组只有零解, 因此三维向量组 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性无关, 即为一组 \mathbb{R}^3 的基.

目录

2023-2024 学年
第 2 学期半期考
试试题

一、填空题

三

四

五

六

七

线性方程组

一、填空题

二、选择题

三

四

五

六

七

八

九、

+

 $+-$

+-

 $+=$

综合练习 (二)

一、填空题

二、选择题

三

四

六

七

五、设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是 \mathbb{R}^3 的一个

基, $\beta_1 = 2\alpha_1 + 2k\alpha_3, \beta_2 = 2\alpha_2, \beta_3 = \alpha_1 + (k+1)\alpha_3$.

2. 当 k 为何值时, 存在非零向量 ξ 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 与基 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 下的坐标相同, 并求出所有的 ξ .

五、设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是 \mathbb{R}^3 的一个

基, $\beta_1 = 2\alpha_1 + 2k\alpha_3, \beta_2 = 2\alpha_2, \beta_3 = \alpha_1 + (k+1)\alpha_3$.

2. 当 k 为何值时, 存在非零向量 ξ 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 与基 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 下的坐标相同, 并求出所有的 ξ .

解: 由题意, 即存在 $\xi \neq 0$ 和坐标列向量 η 使得

$$\xi = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]\eta = [\beta_1, \beta_1, \beta_2]\eta = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]P\eta$$

(P 在 1 中定义) 我们可以知道坐标 η 也非零, 否则得到 $\xi = 0$ 而矛盾,

因此从上式得到 $[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3](P - I)\eta = 0$ 有非零解, 结合

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关等价于 $(P - I)\eta = 0$ 有非零解, 即 $P - I$ 不可逆, 即 $|P - I| = -k = 0 \Rightarrow k = 0$. 此时求解

$$(P - I)\eta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \eta = 0 \Rightarrow \eta = k \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, k \text{ 为常数}$$

因此得到所有可能的 ξ 为

$$\xi = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] \begin{bmatrix} -k \\ 0 \\ k \end{bmatrix} = -k\alpha_1 + k\alpha_3$$

注意还要求 $\xi \neq 0$, 因此 $k \neq 0$.

目录

2023-2024 学年
第 2 学期半期考
试试题

一、填空题

三

四

五

六

七

线性方程组

一、填空题

二、选择题

三

四

五

六

七

八

九

+

+

+

+3

综合练习 (二)

一、填空题

二、选择题

三

四

五

六

七

六、设 A 是秩为 n 的 $s \times n$ 矩阵, 证明: $r(AB) = r(B)$.

六、设 A 是秩为 n 的 $s \times n$ 矩阵, 证明: $r(AB) = r(B)$.

证明: 设 B 为 $n \times m$ 阶矩阵, 我们只需证明 $ABx = 0$ 和 $Bx = 0$ 的解空间相同, 这样他们维数也相同, 得到 $m - r(B) = m - r(AB)$ 进而得到 $r(AB) = r(B)$.

首先若 x_0 满足 $Bx_0 = 0$, 左乘 A 即得到 $ABx_0 = 0$, 这说明 x_0 也是 $ABx = 0$ 的解;

反之若 x_0 满足 $ABx_0 = A(Bx_0) = 0$, 因为 A 列满秩, 故列向量线性无关, 因此 $Bx_0 = 0$, 即 x_0 也是 $Bx = 0$ 的解, 因此得证.

注: 此题告诉我们一个矩阵左乘列满秩矩阵秩也不变, 用转置不难证明右乘行满秩矩阵秩也不变.

目录

2023-2024 学年
第 2 学期半期考
试试题

一、填空题

三

四

五

六

七

线性方程组

一、填空题

二、选择题

三

四

五

六

七

八

九

+

+

+2

+3

综合练习 (二)

一、填空题

二、选择题

三

四

五

六

七、设 $A = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 0 & \lambda - 1 & 0 \\ 1 & 1 & \lambda \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} a \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, 已知线性方程组 $Ax = b$ 存在

2个不同的解.

1. 求 λ, a ;

七、设 $A = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 0 & \lambda - 1 & 0 \\ 1 & 1 & \lambda \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} a \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, 已知线性方程组 $Ax = b$ 存在

2个不同的解.

1. 求 λ, a ;

解: 由题意可知 $Ax = b$ 有解且有无穷解, 对增广矩阵作初等行变换.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \lambda & 1 & 1 & a \\ 0 & \lambda - 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda & 1 \end{array} \right] \rightarrow \cdots \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \lambda & 1 \\ 0 & \lambda - 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 - \lambda^2 & a - \lambda + 1 \end{array} \right]$$

首先有解要求 $\lambda - 1 \neq 0$, 否则第二行虚线左边全 0 而右边非零, 那么第三行需要全为零 (这样才有无穷解), 即

$$\begin{cases} \lambda - 1 \neq 0 \\ 1 - \lambda^2 = 0 \\ a - \lambda + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = -1 \\ a = -2 \end{cases}$$

目录

2023-2024 学年
第 2 学期半期考
试试题

一、填空题

二
三
四
五
六
七

线性方程组

一、填空题

二、选择题

三
四
五
六
七
八
九
十
十一
十二
十三

综合练习 (二)

一、填空题

二、选择题

三
四
五
六
七

七、设 $A = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 0 & \lambda - 1 & 0 \\ 1 & 1 & \lambda \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} a \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, 已知线性方程组 $Ax = b$ 存在
2个不同的解.
2. 求方程组 $Ax = b$ 的通解.

七、设 $A = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 0 & \lambda - 1 & 0 \\ 1 & 1 & \lambda \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} a \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, 已知线性方程组 $Ax = b$ 存在 2 个不同的解.

2. 求方程组 $Ax = b$ 的通解.

解: 由 1 结论 $\lambda = -1, a = -2$, 对增广矩阵 $[A \ b]$ 进行初等行变换

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \rightarrow \cdots \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

即可得到通解为

$$\begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix} + k \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, k \text{ 为任意常数}$$

目录

2023-2024 学年
第 2 学期半期考
试试题

- 一、填空题
- 二
- 三
- 四
- 五
- 六
- 七

线性方程组

- 一、填空题
- 二、选择题
- 三
- 四
- 五
- 六
- 七
- 八
- 九
- 十
- 十一
- 十二
- 十三

综合练习 (二)

- 一、填空题
- 二、选择题
- 三
- 四
- 五
- 六
- 七

八、设线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + ax_3 = 0 \\ x_1 + 4x_2 + a^2x_3 = 0 \end{cases}$$

与方程

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = a - 1$$

有公共解, 求 a 的值和所有公共解.

目录

2023-2024 学年
第 2 学期半期考
试试题

一、填空题

二

三

四

五

六

七

线性方程组

一、填空题

二、选择题

三

四

五

六

七

八

九

十

十一

十二

十三

综合练习 (二)

一、填空题

二、选择题

三

四

五

六

七

九、设 $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -3 \end{bmatrix}$, I 为 3 阶单位矩阵.

1. 求 $Ax = 0$ 的一个基础解系;
2. 求满足 $AB = I$ 的所有矩阵 B .

九、设 $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -3 \end{bmatrix}$, I 为 3 阶单位矩阵.

1. 求 $Ax = 0$ 的一个基础解系;
2. 求满足 $AB = I$ 的所有矩阵 B .

注: 第二问需要对增广矩阵作初等行变换, 其系数矩阵部分则是第一部分需要的, 可以一并计算.

解:1. 对 $[A \ I]$ 作初等行变换

$$\rightarrow \left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & -2 & 3 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

即可得到基础解系为 $[-1, 2, 3, 1]^T$.

目录

2023-2024 学年
第 2 学期半期考
试试题

- 一、填空题
- 二
- 三
- 四
- 五
- 六
- 七

线性方程组

- 一、填空题
- 二、选择题
- 三
- 四
- 五
- 六
- 七
- 八
- 九
- 十
- 十一
- 十二
- 十三

综合练习 (二)

- 一、填空题
- 二、选择题
- 三
- 四
- 五
- 六
- 七

九、设 $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -3 \end{bmatrix}$, I 为 3 阶单位矩阵.

2. 求满足 $AB = I$ 的所有矩阵 B .

九、设 $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -3 \end{bmatrix}$, I 为 3 阶单位矩阵.

2. 求满足 $AB = I$ 的所有矩阵 B .

解:2. 由 1 矩阵

$$\left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 6 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -1 & 4 & 1 \end{array} \right]$$

可得方程 $Ax = \varepsilon_1, Ax = \varepsilon_2, Ax = \varepsilon_3$ 的特解分别为

$$\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 6 \\ -3 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

结合 1 的导出组通解可得 B

$$B = \begin{bmatrix} 2 - k_1 & 6 - k_2 & -1 - k_3 \\ -1 + 2k_1 & -3 + 2k_2 & 1 + 2k_3 \\ -1 + 3k_1 & 4 + 3k_2 & 1 + 3k_3 \\ k_1 & k_2 & k_3 \end{bmatrix}$$

其中 k_1, k_2, k_3 为任意常数.