线性代数第五次作业

2024 年 4 月 7 日

本次作业

《线性代数习题册 (第三版)》

- $31 \sim 38$页: 行列式的性质与计算 (一)
- $39 \sim 42$页: 行列式的性质与计算 (二)
- $43 \sim 46$页: 综合练习 (一)

目录

习题答案会上传至 github 中.

图: github 链接二维码

一、判断题.

1. 给定矩阵 A, B, 若 $AB=0$,则 $BA=0$.
2. 设 $\alpha=[a_1,a_2,\cdots,a_n]^T, \beta=[b_1,b_2,\cdots,b_n]$均为非零向量,$A=\alpha\beta$, 则 A的行最简形式仅包含一个非零行.
3. 已知 3×3矩阵 $A=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]$, 其中 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$均为列向量, 且 $\alpha_1+2\alpha_2-\alpha_3=0$, 则 A奇异.
4. 已知方阵 A为 n阶反对称矩阵,α为 n维列向量, 则 $\alpha^TA\alpha=0$.

二、计算题.

5. 给定 $A=\begin{bmatrix}2&1&3\\4&2&7\\1&3&5\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}2&1&3\\1&3&5\\4&2&7\end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix}0&1&3\\0&2&7\\-5&3&5\end{bmatrix}$,

   $a)$求初等矩阵 D使得 $DA=B$.

   $b)$求初等矩阵 F使得 $AF=C$.

6. 已知 $A=\begin{bmatrix}-1&0&1&0\\0&-1&0&1\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{bmatrix}$, 求 A^{2024}.

7. 利用广义初等变换, 求分块矩阵 $M=\begin{bmatrix} A^2 & A \\ A & 0 \end{bmatrix}$ 的逆矩阵, 其中 A为 n阶可逆矩阵.

8. 已知 $A^*=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$, 求 $\det A^*, \det A, A$.

9. 讨论含参数 a的线性方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=1 \\ 2x_1+3x_2+ax_3=5 \\ 4x_1+9x_2+a^2x_3=25 \end{cases}$$

解的情况. 当有唯一解时, 要求用克莱姆法则求解.

三、证明题.

10. 已知 $A_{n\times m}, B_{m\times n}$. 证明 I_n+AB可逆当且仅当 I_m+BA可逆.
11. 已知 A是元素均为整数, 行列式等于 1的 n阶方阵. 证明 A^{-1}也是元素均为整数, 行列式等于 1的 n阶方阵.[提示: 可以考虑利用 A^*].

10. 已知 $A_{n\times m}, B_{m\times n}$. 证明 $I_n + AB$可逆当且仅当 $I_m + BA$可逆.

10. 已知 $A_{n\times m}, B_{m\times n}$. 证明 $I_n + AB$可逆当且仅当 $I_m + BA$可逆.

证明: 我们只需证明 $|I_n + AB| = |I_m + BA|$, 这样矩阵可逆等价于行列式非零, 进而得证. 一方面作广义初等变换可得

$$|I_n + AB| = \begin{vmatrix} I_n + AB & O \\ O & I_m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} I_n + AB & -A \\ O & I_m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} I_n & -A \\ B & I_m \end{vmatrix}$$

另一方面, 同理

$$|I_m + BA| = \begin{vmatrix} I_n & O \\ O & I_m + BA \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} I_n & -A \\ O & I_m + BA \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} I_n & -A \\ B & I_m \end{vmatrix}$$

因此得证.

注: 此题最重要的是结论 $|I_n + AB| = |I_m + BA|$, 这在后面会经常用到, 如特征多项式求解经常用到的重要推论

$$|\lambda I_n - AB| = \lambda^{n-m}|\lambda I_m - BA|$$

1. 设 $A=\begin{bmatrix}0 & a & b\\ a & 0 & c\\ b & c & 0\end{bmatrix}(a,b\neq 0), B=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & k & 0\\ 0 & 0 & l\end{bmatrix}$, 当 k,l满足 $\underline{c^2lk\neq 1}$时,$AB+I$可逆.

1. 设 $A=\begin{bmatrix}0 & a & b\\ a & 0 & c\\ b & c & 0\end{bmatrix}(a,b\neq 0), B=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & k & 0\\ 0 & 0 & l\end{bmatrix}$, 当 k,l满足 $\underline{c^2lk\neq 1}$时,$AB+I$可逆.

解: 方阵可逆当且仅当其行列式不等于 0, 因此只需 $|AB+I|\neq 0$, 计算矩阵

$$I+AB=I+\begin{bmatrix}0 & ak & bl\\ 0 & 0 & cl\\ 0 & ck & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & ak & bl\\ 0 & 1 & cl\\ 0 & ck & 1\end{bmatrix}$$

因此

$$|I+AB|\xlongequal{\text{第一列展开}}1\times\begin{vmatrix}1 & cl\\ ck & 1\end{vmatrix}=1-c^2lk\neq 0$$

2. 设 $A=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}2 & 1 & 2\\ 2 & -2 & -1\\ 1 & 2 & -2\end{bmatrix}$, 则 $AA^T=\underline{I_3}$, $A^{-1}=\underline{A^T}$;已知 $|A|>0$, $|A|=\underline{1}$.

2. 设 $A=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}2 & 1 & 2\\ 2 & -2 & -1\\ 1 & 2 & -2\end{bmatrix}$, 则 $AA^T=\underline{I_3}$, $A^{-1}=\underline{A^T}$;已知 $|A|>0$, $|A|=\underline{1}$.

解一: 直接计算 AA^T, A^{-1}和 $|A|$即可.

解二: 首先计算 AA^T得到 I_3, 由等式 $AA^T=I_3$即可知道 $A^{-1}=A^T$, 同时两边取行列式得到 $|A||A^T|=|A|^2=|I_3|=1$, 结合 $|A|>0$可知 $|A|=1$.

3. 满足方程 $\begin{vmatrix} 1 & x & y & z \\ x & 1 & 0 & 0 \\ y & 0 & 1 & 0 \\ z & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$的实数 $x = \underline{0}, y = \underline{0}, z = \underline{0}$.

注: 只有第一列、第一行和对角线元素非零的行列式称为爪型行列式, 此类行列式的求解有比较通用的方法.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{n1} & & & a_{nn} \end{vmatrix}$$

首先我们假设 $a_{22}, a_{33}, \cdots, a_{nn}$非零, 若不然 $a_{ii} = 0$, 我们可以将其与 a_{1i}交换 (即第 1行和第 i行交换) 使其非零, 但若 a_{1i}也等于 0那么此行列式直接为 0(因为第 i列元素全为 0).

· $a_{22}a_{33}\cdots a_{nn}\neq 0$时:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{n1} & & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{22}\cdots a_{nn}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \frac{a_{21}}{a_{22}} & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ \frac{a_{n1}}{a_{nn}} & & & 1 \end{vmatrix}$$

$$=a_{22}\cdots a_{nn}\begin{vmatrix} a_{11}-\sum_{i=2}^{n}\frac{a_{i1}a_{1i}}{a_{ii}} & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{a_{21}}{a_{22}} & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ \frac{a_{n1}}{a_{nn}} & & & 1 \end{vmatrix}$$

$$= a_{22}\cdots a_{nn}\left(a_{11}-\sum_{i=2}^{n}\frac{a_{i1}a_{1i}}{a_{ii}}\right)$$

·不需要记住上述结果, 而是记忆运算过程, 大致上分为如下几步: 采用行交换使得 $a_{22},\cdots,a_{nn}$都非零 (如果不能做到则行列式为 0), 然后提出系数使得对角线上元素除左上角全为 1, 其余行加合适倍数到第一行让第一行除对角元全为 0, 从而变为下三角行列式.

3. 满足方程 $\begin{vmatrix} 1 & x & y & z \\ x & 1 & 0 & 0 \\ y & 0 & 1 & 0 \\ z & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$的实数 $x = \underline{0}, y = \underline{0}, z = \underline{0}$.

解: 观察此爪型行列式除第一个的对角元已经全为 1, 因此直接消去第一行即可

$$\begin{vmatrix} 1 & x & y & z \\ x & 1 & 0 & 0 \\ y & 0 & 1 & 0 \\ z & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 - x^2 - y^2 - z^2 & 0 & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 & 0 \\ y & 0 & 1 & 0 \\ z & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 1 - x^2 - y^2 - z^2 = 1$$

即求解 $x^2 + y^2 + z^2 = 0$, 得到 $x = y = z = 0$.

4. 设 $D=\begin{vmatrix}5 & -4 & 3\\ 6 & 2 & 0\\ 3 & 4 & 2\end{vmatrix}$, A_{21}, A_{22}, A_{23}是 a_{21}, a_{22}, a_{23}的代数余子式, 试用一个三阶行列式表示 $3A_{21}-2A_{22}+4A_{23}=\underline{\begin{vmatrix}5 & -4 & 3\\ 3 & -2 & 4\\ 3 & 4 & 2\end{vmatrix}}$

4. 设 $D=\begin{vmatrix}5&-4&3\\6&2&0\\3&4&2\end{vmatrix}$, A_{21},A_{22},A_{23}是 a_{21},a_{22},a_{23}的代数余子式, 试用一个三阶行列式表示 $3A_{21}-2A_{22}+4A_{23}=$ $\underline{\begin{vmatrix}5&-4&3\\3&-2&4\\3&4&2\end{vmatrix}}$

解: 我们知道行列式按照一行展开后即为对应元乘以其代数余子式的和, 即若 $A=(a_{ij})$,A_{ij}为 a_{ij}的代数余子式, 那么按照第 i行展开为

$$|A|=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}$$

因此代数余子式的线性组合, 则相当于将原行列式中对应元换为线性组合的系数. 如此题即将 a_{21}换为 A_{21}前的系数 3, 其余同理, 最后得到结果.

5. 设 A,B是两个 n阶方阵, 且满足条件:$AB=I, |A|=-5$, 则 $|B|=\underline{-\frac{1}{5}}$.

5. 设 A, B是两个 n阶方阵, 且满足条件:$AB = I, |A| = -5$, 则 $|B| = \underline{-\frac{1}{5}}$.

解: 对 $AB = I$两边同时取行列式, 得到 $|AB| = |A||B| = |I| = 1$, 因此得到

$$|B| = \frac{1}{|A|} = \frac{1}{-5} = -\frac{1}{5}$$

1. 设 A是 $n(n>2)$阶方阵,k为常数. 若 $|A|=a$, 则 $|kAA^T|=(C)$.

A. ka^2　　B. k^2a^2

C. k^na^2　　D. 不能确定

1. 设 A是 $n(n>2)$阶方阵,k为常数. 若 $|A|=a$, 则 $|kAA^T|=(C)$.

A. ka^2　　B. k^2a^2

C. k^na^2　　D. 不能确定

解: 注意系数提出行列式要乘以阶数次方, 即

$$|kAA^T|=k^n|A||A^T|=k^n|A|^2=k^na^2$$

实际上系数 k可以认为是矩阵 kI_n, 即

$$|kAA^T|=|kI_nAA^T|=|kI_n||A|^2=k^na^2$$

2. 设 A, B是两个 $n(n > 1)$阶方阵, 则以下结论中不正确的是 (B).

A. $|A + B|$ 不一定等于 $|A| + |B|$

B. $|AB| = ||A|B|$

C. $|AB| = |BA|$

D. $|AB| = |B||A|$

2. 设 A, B是两个 $n(n>1)$阶方阵, 则以下结论中不正确的是 (B).

A. $|A+B|$ 不一定等于 $|A|+|B|$

B. $|AB| = ||A|B|$

C. $|AB| = |BA|$

D. $|AB| = |B||A|$

解:(B)项中左式 $|AB| = |A||B|$, 右式 $||A|B| = |A|^n|B|$不一定等于 $|A||B|$, 其余三项都是行列式的基本性质.

3. 方程 $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & x-1 \\ 1 & -1 & x+1 & -1 \\ 1 & x-1 & 1 & -1 \\ x+1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$的根为 (D).

A. $1, 0, 0, 0$　B. $-1, 0, 0, 0$

C. $-1, 1, 0, 0$　D. $0, 0, 0, 0$

3. 方程 $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & x-1 \\ 1 & -1 & x+1 & -1 \\ 1 & x-1 & 1 & -1 \\ x+1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$的根为 (D).

A. $1,0,0,0$ B. $-1,0,0,0$
C. $-1,1,0,0$ D. $0,0,0,0$

解一: 原行列式写为如下形式

$$\begin{vmatrix} 0+1 & 0-1 & 0+1 & x-1 \\ 0+1 & 0-1 & x+1 & 0-1 \\ 0+1 & x-1 & 0+1 & 0-1 \\ x+1 & 0-1 & 0+1 & 0-1 \end{vmatrix} = |\alpha_1+\beta_1 \quad \alpha_2+\beta_2 \quad \alpha_3+\beta_3 \quad \alpha_4+\beta_4|$$

即每一列都看做两个列向量之和. 将行列式四列按照列向量分别展开, 原行列式变为 16个行列式的和, 这些行列式的第 i列为 α_i或 β_i, 事实上, 展开为

附: 原行列式进行如下展开

$$\begin{vmatrix} 0+1 & 0-1 & 0+1 & x-1 \\ 0+1 & 0-1 & x+1 & 0-1 \\ 0+1 & x-1 & 0+1 & 0-1 \\ x+1 & 0-1 & 0+1 & 0-1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 0-1 & 0+1 & x-1 \\ 0 & 0-1 & x+1 & 0-1 \\ 0 & x-1 & 0+1 & 0-1 \\ x & 0-1 & 0+1 & 0-1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0-1 & 0+1 & x-1 \\ 1 & 0-1 & x+1 & 0-1 \\ 1 & x-1 & 0+1 & 0-1 \\ 1 & 0-1 & 0+1 & 0-1 \end{vmatrix}$$

$$= \left(\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0+1 & x-1 \\ 0 & 0 & x+1 & 0-1 \\ 0 & x & 0+1 & 0-1 \\ x & 0 & 0+1 & 0-1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0+1 & x-1 \\ 0 & -1 & x+1 & 0-1 \\ 0 & -1 & 0+1 & 0-1 \\ x & -1 & 0+1 & 0-1 \end{vmatrix} \right)$$

$$+ \left(\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0+1 & x-1 \\ 1 & 0 & x+1 & 0-1 \\ 1 & x & 0+1 & 0-1 \\ 1 & 0 & 0+1 & 0-1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0+1 & x-1 \\ 1 & -1 & x+1 & 0-1 \\ 1 & -1 & 0+1 & 0-1 \\ 1 & -1 & 0+1 & 0-1 \end{vmatrix} \right)$$

$= \cdots$继续展开得到 16 个行列式

3. 方程 $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & x-1 \\ 1 & -1 & x+1 & -1 \\ 1 & x-1 & 1 & -1 \\ x+1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$的根为 (D).

A. $1,0,0,0$ B. $-1,0,0,0$

C. $-1,1,0,0$ D. $0,0,0,0$

解一:(接上文) 在展开的 16 个行列式中, 同时含有至少两个 β_i的行列式必定为 0(因为有两列成比例), 因此展开后非零项只有如下五项:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & x \\ 1 & 0 & x & 0 \\ 1 & x & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & x \\ 0 & -1 & x & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ x & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & x & 1 & 0 \\ x & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & x & -1 \\ 0 & x & 0 & -1 \\ x & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & x & 0 \\ 0 & x & 0 & 0 \\ x & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = x^3 - x^3 + x^3 - x^3 + x^4$$

$=x^4 = 0 \quad \Rightarrow$ 因此解得四个根为$0,0,0,0$

3. 方程 $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & x-1 \\ 1 & -1 & x+1 & -1 \\ 1 & x-1 & 1 & -1 \\ x+1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$的根为 (D).

A. $1,0,0,0$ B. $-1,0,0,0$
C. $-1,1,0,0$ D. $0,0,0,0$

解二: 采用加边法, 观察到每一列大部分元素相同, 因此考虑将四阶行列式变为五阶, 然后消去相似项.

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & x-1 \\ 1 & -1 & x+1 & -1 \\ 1 & x-1 & 1 & -1 \\ x+1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & x-1 \\ 0 & 1 & -1 & x+1 & -1 \\ 0 & 1 & x-1 & 1 & -1 \\ 0 & x+1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & x \\ 1 & 0 & 0 & x & 0 \\ 1 & 0 & x & 0 & 0 \\ 1 & x & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & x & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & x & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & x & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & x \end{vmatrix} \text{(爪型行列式)}$$

3. 方程 $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & x-1 \\ 1 & -1 & x+1 & -1 \\ 1 & x-1 & 1 & -1 \\ x+1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$的根为 (D).

A. $1, 0, 0, 0$ B. $-1, 0, 0, 0$

C. $-1, 1, 0, 0$ D. $0, 0, 0, 0$

解二:(接上文)

$$= \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & x & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & x & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & x & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & x \end{vmatrix} \xlongequal{x\neq 0} x^4 \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ x^{-1} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ x^{-1} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ x^{-1} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ x^{-1} & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= x^4 \begin{vmatrix} 1 + x^{-1} - x^{-1} + x^{-1} - x^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x^{-1} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ x^{-1} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ x^{-1} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ x^{-1} & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = x^4$$

因为原行列式展开后为多项式 (连续), 且在 $x \neq 0$时等于 x^4, 那么在 $x = 0$时也必定为 0, 即原方程即为 $x^4 = 0$, 解得 $0, 0, 0, 0$.

三、利用行列式的性质计算

1. $\begin{vmatrix} x & y & z \\ z & x & y \\ y & z & x \end{vmatrix}$;

三、利用行列式的性质计算

1. $\begin{vmatrix} x & y & z \\ z & x & y \\ y & z & x \end{vmatrix}$;

解: 三阶行列式直接计算即可

$$x^3+y^3+z^3-3xyz$$

三、利用行列式的性质计算

2. $\begin{vmatrix} 118 & 18 & 28 \\ 111 & 11 & 21 \\ 94 & -6 & 4 \end{vmatrix}$;

三、利用行列式的性质计算

2. $\begin{vmatrix} 118 & 18 & 28 \\ 111 & 11 & 21 \\ 94 & -6 & 4 \end{vmatrix}$;

解: 对于直接算比较复杂的行列式, 可以先进行化简, 如初等行列变换, 按行 (列) 展开等技巧.

$$\begin{vmatrix} 118 & 18 & 28 \\ 111 & 11 & 21 \\ 94 & -6 & 4 \end{vmatrix} \xlongequal{\text{第二行 } -1 \text{ 倍加到第一行}} \begin{vmatrix} 7 & 7 & 7 \\ 111 & 11 & 21 \\ 94 & -6 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{第三行 } -1 \text{ 倍加到第二行}} \begin{vmatrix} 7 & 7 & 7 \\ 17 & 17 & 17 \\ 94 & -6 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

三、利用行列式的性质计算

3. $$\begin{vmatrix} x_1 & a & a & a \\ a & x_2 & 0 & 0 \\ a & 0 & x_3 & 0 \\ a & 0 & 0 & x_4 \end{vmatrix}$$

三、利用行列式的性质计算

3. $\begin{vmatrix} x_1 & a & a & a \\ a & x_2 & 0 & 0 \\ a & 0 & x_3 & 0 \\ a & 0 & 0 & x_4 \end{vmatrix}$

解一: 爪型行列式. 首先假设 $x_2x_3x_4 \neq 0$, 然后计算

$$\begin{vmatrix} x_1 & a & a & a \\ a & x_2 & 0 & 0 \\ a & 0 & x_3 & 0 \\ a & 0 & 0 & x_4 \end{vmatrix} = x_2x_3x_4 \begin{vmatrix} x_1 & a & a & a \\ a/x_2 & 1 & 0 & 0 \\ a/x_3 & 0 & 1 & 0 \\ a/x_4 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= x_2x_3x_4 \begin{vmatrix} x_1 - \frac{a^2}{x_2} - \frac{a^2}{x_3} - \frac{a^2}{x_4} & 0 & 0 & 0 \\ a/x_2 & 1 & 0 & 0 \\ a/x_3 & 0 & 1 & 0 \\ a/x_4 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = x_2x_3x_4 \left(x_1 - \frac{a^2}{x_2} - \frac{a^2}{x_3} - \frac{a^2}{x_4} \right)$$

$$= x_1x_2x_3x_4 - a^2x_3x_4 - a^2x_2x_4 - a^2x_2x_3$$

若 x_2, x_3, x_4 中有至少两个为 0, 那么原行列式为 0 与上式一致; 若 x_2, x_3, x_4 只有一个为 0(如 x_2), 那么将行列式按该列 (第二列) 展开, 和上式结果一致 ($-a^2x_3x_4$). 综上所述, 上式即为原行列式的结果.

三、利用行列式的性质计算

3. $\begin{vmatrix} x_1 & a & a & a \\ a & x_2 & 0 & 0 \\ a & 0 & x_3 & 0 \\ a & 0 & 0 & x_4 \end{vmatrix}$

解二: 按第一行展开

$$\begin{vmatrix} x_1 & a & a & a \\ a & x_2 & 0 & 0 \\ a & 0 & x_3 & 0 \\ a & 0 & 0 & x_4 \end{vmatrix} = x_1 \begin{vmatrix} x_2 & 0 & 0 \\ 0 & x_3 & 0 \\ 0 & 0 & x_4 \end{vmatrix} - a \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ a & x_3 & 0 \\ a & 0 & x_4 \end{bmatrix}$$

$$+ a \begin{vmatrix} a & x_2 & 0 \\ a & 0 & 0 \\ a & 0 & x_4 \end{vmatrix} - a \begin{vmatrix} a & x_2 & 0 \\ a & 0 & x_3 \\ a & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= x_1x_2x_3x_4 - a^2x_3x_4 - a^2x_2x_4 - a^2x_2x_3$$

四、证明 $\begin{vmatrix} a_1+b_1 & b_1+2c_1 & c_1+3a_1 \\ a_2+b_2 & b_2+2c_2 & c_2+3a_2 \\ a_3+b_3 & b_3+2c_3 & c_3+3a_3 \end{vmatrix} = 7\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

四、证明 $\begin{vmatrix} a_1+b_1 & b_1+2c_1 & c_1+3a_1 \\ a_2+b_2 & b_2+2c_2 & c_2+3a_2 \\ a_3+b_3 & b_3+2c_3 & c_3+3a_3 \end{vmatrix} = 7 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

证明: 记 $a=[a_1,a_2,a_3]^T, b=[b_1,b_2,b_3]^T, c=[c_1,c_2,c_3]^T$, 将行列式分别按照每列展开, 即可得到

$$\begin{aligned} \text{原式} = & \,|[a,b,c]| + |[a,b,3a]| + |[a,2c,c]| + |[a,2c,3a]| \\ & + |[b,b,c]| + |[b,b,3a]| + |[b,2c,c]| + |[b,2c,3a]| \\ = & |[a,b,c]| + 0+0+0+0+0+0+6|[a,b,c]| \\ = & 7|[a,b,c]| \end{aligned}$$

因此得证.

五、利用行列式的展开公式计算行列式

1. $\begin{vmatrix} a & & & b \\ b & a & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & b & a \end{vmatrix}_n$ (空格处为 0)

五、利用行列式的展开公式计算行列式

1. $\begin{vmatrix} a & & & b \\ b & a & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & b & a \end{vmatrix}_n$ (空格处为 0)

解: 按第一行展开

$$\begin{vmatrix} a & & & b \\ b & a & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & b & a \end{vmatrix}_n = a\begin{vmatrix} a & & & \\ b & a & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & b & a \end{vmatrix}_{n-1} + (-1)^{1+n} b \begin{vmatrix} b & a & & \\ & b & \ddots & \\ & & \ddots & a \\ & & & b \end{vmatrix}_{n-1}$$

$$= a^n + (-1)^{n+1} b^n$$

五、利用行列式的展开公式计算行列式

2. $$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

五、利用行列式的展开公式计算行列式

2. $\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$

解: 此矩阵为分块下三角矩阵, 因此行列式即为对角块行列式的乘积, 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}(a_{33}a_{44} - a_{34}a_{43})$$

六、先化简, 在利用展开公式计算行列式

1. $$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

六、先化简, 在利用展开公式计算行列式

1. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

解: 注意到第二列只有对角元非零, 因此按第二列展开

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -1(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -(0 + -6 + 2 + 0 - 6 - 2)$$

$$= 12$$

六、先化简, 在利用展开公式计算行列式

2. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & -2 & 4 \\ 2 & -1 & 3 & 6 \\ 2 & 0 & -4 & 7 \\ 5 & 6 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

六、先化简, 在利用展开公式计算行列式

2. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & -2 & 4 \\ 2 & -1 & 3 & 6 \\ 2 & 0 & -4 & 7 \\ 5 & 6 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

解: 注意到第二列对角元有 -1, 方便消去该列其它元, 然后再按第二列展开即可.

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & -2 & 4 \\ 2 & -1 & 3 & 6 \\ 2 & 0 & -4 & 7 \\ 5 & 6 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & 0 & 4 & 16 \\ 2 & -1 & 3 & 6 \\ 2 & 0 & -4 & 7 \\ 17 & 0 & 19 & 36 \end{vmatrix} = -1(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 7 & 4 & 16 \\ 2 & -4 & 7 \\ 17 & 19 & 36 \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} 7 & 4 & 16 \\ 2 & -4 & 7 \\ 3 & 11 & 4 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 16 & -5 \\ 2 & -4 & 7 \\ 1 & 15 & -3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 16 & -5 \\ 0 & -36 & 17 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} -36 & 17 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 36 & 17 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 36 \times 2 - 1 \times 17 = 55$$

六、先化简, 在利用展开公式计算行列式

3. $$\begin{vmatrix} -x_1 & x_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -x_2 & x_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x_n \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}_{n+1}$$

六、先化简, 在利用展开公式计算行列式

3. $\begin{vmatrix} -x_1 & x_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -x_2 & x_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x_n \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}_{n+1}$

解: 观察到除最后一行的每一行都有一正一负两项, 因此可以用第i列加到第 $i+1$列

$$\begin{vmatrix} -x_1 & x_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -x_2 & x_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x_n \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}_{n+1} = \begin{vmatrix} -x_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -x_2 & x_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x_n \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}_{n+1}$$

$$
=\begin{vmatrix} -x_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -x_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x_n \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & 1 \end{vmatrix}_{n+1} = \cdots = \begin{vmatrix} -x_1 & & & & \\ & -x_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & -x_n & \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n+1 \end{vmatrix}_{n+1}
$$

$$
=(-1)^n(n+1)x_1x_2\cdots x_n
$$

六、先化简, 在利用展开公式计算行列式

4. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d & x \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 & x^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 & x^3 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 & x^4 \end{vmatrix}$

若行列式某一行 (列) 为 1, 并且每一行 (列) 元素都组成一个等比数列, 那么称此行列式为范德蒙行列式.

六、先化简, 在利用展开公式计算行列式

4. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d & x \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 & x^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 & x^3 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 & x^4 \end{vmatrix}$

若行列式某一行 (列) 为 1, 并且每一行 (列) 元素都组成一个等比数列, 那么称此行列式为范德蒙行列式.

解: 此行列式以 x为自变量时即为一个四次多项式, 在复数域上存在 4 个根 (包括重根). 如果 a, b, c, d中存在两个数相等, 那么行列式即为 0(两列相等); 如果 a, b, c, d互不相等, 将 x代为 a, b, c, d后行列式为零, 这说明该行列式必定形如 $k(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)$, 且由最后一列展开后不难得到 x^4的系数即首项系数为

$$k = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix}$$

为求 k, 同样的将 d首先看做自变量, 行列式即为三阶多项式得到

$$
\begin{aligned}
k &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} (d-a)(d-b)(d-c) \\
&= \left[\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{vmatrix} (c-a)(c-b) \right] (d-a)(d-b)(d-c) \\
&= (b-a)(c-a)(c-b)(d-a)(d-b)(d-c)
\end{aligned}
$$

因此原行列式最后的结果为

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= k(x-a)(x-b)(x-c)(x-d) \\
&= \underline{(b-a)} \cdot \underline{(c-a)(c-b)} \\
&\quad \cdot \underline{(d-a)(d-b)(d-c)} \cdot \underline{(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)}
\end{aligned}
$$

因为 a, b, c, d相等时上式也为零, 因此上式即为行列式结果.

* 范德蒙行列式:

对于任意数 $a_i, i = 1, 2, 3, \cdots, n$, 有

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_{n-1}^2 & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_{n-1}^{n-1} & a_n^{n-1} \end{vmatrix}_{n\times n}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_{n-1} & a_{n-1}^2 & \cdots & a_{n-1}^{n-1} \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}_{n\times n} = \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n} (a_j - a_i)$$

除此之外还有一些与范德蒙行列式相似的行列式, 大致方法都是通过变换转换为范德蒙行列式求解, 如第 6 题.

六、先化简, 在利用展开公式计算行列式

5. $\begin{vmatrix} 5 & 3 & & \\ 2 & 5 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 3 \\ & & 2 & 5 \end{vmatrix}_n$ (空格处为零)

注: 在按行列展开后与原题形状类似的情形 (此时阶数小一阶), 可以尝试通过求解数列方程, 此时数列为待求的行列式 (变量只与 n有关).

六、先化简, 在利用展开公式计算行列式

5. $\begin{vmatrix} 5 & 3 & & \\ 2 & 5 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 3 \\ & & 2 & 5 \end{vmatrix}_n$ (空格处为零)

注: 在按行列展开后与原题形状类似的情形 (此时阶数小一阶), 可以尝试通过求解数列方程, 此时数列为待求的行列式 (变量只与 n有关).

解: 设待求行列式为 D_n, 将其按照第一行展开

$$D_n = 5\begin{vmatrix} 5 & 3 & & \\ 2 & 5 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 3 \\ & & 2 & 5 \end{vmatrix}_{n-1} - 3\begin{vmatrix} 2 & 3 & & & \\ & 5 & 3 & & \\ & 2 & 5 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 3 \\ & & & 2 & 5 \end{vmatrix}_{n-1}$$

$$= 5D_{n-1} - 6D_{n-2}$$

接下来就需要求解差分方程 $D_n = 5D_{n-1} - 6D_{n-2}$, 其中初始值 $D_1 = |5| = 5, D_2 = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 19$.

* 求解差分方程:

$D_n - 5D_{n-1} + 6D_{n-2} = 0$, 其中初始值 $D_1 = 5, D_2 = 19$.

* 求解差分方程:

$D_n - 5D_{n-1} + 6D_{n-2} = 0$, 其中初始值 $D_1 = 5, D_2 = 19$.

解一: 特征方程法. 此方程为二阶常系数差分方程, 其特征方程为 $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$, 解得 $\lambda = 2, 3$为两个不同的根, 因此通解为 $D_n = C_1 2^n + C_2 3^n$, 其中 C_1, C_2为常数, 需要通过初值求解, 带入 $n = 1, 2$后得到

$$\begin{cases} 5 = 2C_1 + 3C_2 \\ 19 = 4C_1 + 9C_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = -2 \\ C_2 = 3 \end{cases} \Rightarrow D_n = 3^{n+1} - 2^{n+1}$$

* 求解差分方程:

$D_n - 5D_{n-1} + 6D_{n-2} = 0$, 其中初始值 $D_1 = 5, D_2 = 19$.

解二: 凑项. 观察该方程, 我们期望原差分方程可以凑成 $D_n - aD_{n-1} = b(D_{n-1} - aD_{n-2})$的形式, 这样数列 $\{D_n - aD_{n-1}\}$即为等比数列, 便可求出通项. 展开得到

$$D_n - (a+b)D_{n-1} + abD_{n-2} = 0 \Rightarrow \begin{cases} a+b=5 \\ ab=3 \end{cases}$$

解得 $a=3, b=2$或 $a=2, b=3$. 第一种情况可得 $D_n - 3D_{n-1} = 2(D_{n-1} - 3D_{n-2})$, 可知 $D_n - 3D_{n-1}$公比为 2, 带入初值可得 $D_n - 3D_{n-1} = 2^n$; 第二种情况同理可知 $D_n - 3D_{n-1}$公比为 3, 通项公式为 3^n, 因此联立两式

$$\begin{cases} D_n - 3D_{n-1} = 2^n \\ D_n - 2D_{n-1} = 3^n \end{cases} \Rightarrow D_n = 3^{n+1} - 2^{n+1}$$

* 求解差分方程:

$D_n - 5D_{n-1} + 6D_{n-2} = 0$, 其中初始值 $D_1 = 5, D_2 = 19$.

解三: 矩阵法. 对于常系数差分方程, 我们可以用矩阵表示这个问题, 转换为矩阵 n次幂的求解.

$$\begin{cases} D_{n-1} = D_{n-1} \\ D_n = 5D_{n-1} - 6D_{n-2} \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} D_{n-1} \\ D_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_{n-2} \\ D_{n-1} \end{bmatrix}$$

可得

$$\begin{bmatrix} D_{n-1} \\ D_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & 5 \end{bmatrix}^{n-1} \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & 5 \end{bmatrix}^{n-1} \begin{bmatrix} 5 \\ 19 \end{bmatrix}$$

因此求出矩阵的 n次幂后即可得到 D_n的通项表达式.
在后面学习了对角化后, 可以得到

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}^{-1}}_{P^{-1}} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & 5 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}}_{P} = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}}_{\Lambda}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow A^{n-1} &= (P\Lambda P^{-1})^{n-1} = (P\Lambda P^{-1})(P\Lambda P^{-1})\cdots(P\Lambda P^{-1}) \\ &= P\Lambda^{n-1}P^{-1} \end{aligned}$$

最后计算也可以得到 $D_n = 3^{n+1} - 2^{n+1}$.

六、先化简, 在利用展开公式计算行列式

6.$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \end{vmatrix}$(提示: 将第 4 题的行列式按第 5 列展开, 然后比较两端 x^3的系数)

六、先化简, 在利用展开公式计算行列式

6.$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \end{vmatrix}$(提示: 将第 4 题的行列式按第 5 列展开, 然后比较两端 x^3的系数)

解: 我们在第 4 题已经求出范德蒙行列式的值

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d & x \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 & x^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 & x^3 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 & x^4 \end{vmatrix} = \begin{array}{r} (x-a)(x-b)(x-c)(x-d) \\ (d-a)(d-b)(d-c) \\ (c-a)(c-b) \\ (b-a) \end{array}$$

同时也知道他是一个四阶多项式. 另一方面, 将这个行列式按最后一列展开后 x^3的代数余子式即为待求行列式乘上 -1, 也是 x^3项的系数, 所以待求行列式即为上述多项式 x^3项系数的相反数, 等号右边即可得到为

$$(a+b+c+d)(b-a)(c-a)(c-b)(d-a)(d-b)(d-c)$$

六、先化简, 在利用展开公式计算行列式

7.$D = \begin{vmatrix} x_1 & a & a & a \\ a & x_2 & a & a \\ a & a & x_3 & a \\ a & a & a & x_4 \end{vmatrix} \quad (x_i \neq a, i = 1, 2, 3, 4)$

六、先化简, 在利用展开公式计算行列式

$$7.D=\begin{vmatrix} x_1 & a & a & a \\ a & x_2 & a & a \\ a & a & x_3 & a \\ a & a & a & x_4 \end{vmatrix} \quad (x_i \neq a, i=1,2,3,4)$$

解: 观察到其中大部分元都是 a, 因此考虑加边法.

$$D=\begin{vmatrix} 1 & -a & -a & -a & -a \\ 0 & x_1 & a & a & a \\ 0 & a & x_2 & a & a \\ 0 & a & a & x_3 & a \\ 0 & a & a & a & x_4 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & -a & -a & -a & -a \\ 1 & x_1-a & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & x_2-a & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & x_3-a & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & x_4-a \end{vmatrix}$$

$$=(x_1-a)(x_2-a)(x_3-a)(x_4-a)\begin{vmatrix} 1 & -a & -a & -a & -a \\ (x_1-a)^{-1} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ (x_2-a)^{-1} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ (x_3-a)^{-1} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ (x_4-a)^{-1} & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

(接上文)

$$
= (x_1-a)(x_2-a)(x_3-a)(x_4-a)\begin{vmatrix} 1 & -a & -a & -a & -a \\ (x_1-a)^{-1} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ (x_2-a)^{-1} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ (x_3-a)^{-1} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ (x_4-a)^{-1} & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}
$$

$$
= (x_1-a)(x_2-a)(x_3-a)(x_4-a)\begin{vmatrix} 1+\sum_{i=1}^4 \frac{a}{x_i-a} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ (x_1-a)^{-1} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ (x_2-a)^{-1} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ (x_3-a)^{-1} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ (x_4-a)^{-1} & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}
$$

$$
= (x_1-a)(x_2-a)(x_3-a)(x_4-a)\left(1+\sum_{i=1}^{4}\frac{a}{x_i-a}\right)
$$

$$
\begin{aligned}
&= (x_1-a)(x_2-a)(x_3-a)(x_4-a) \\
&\quad + a(x_2-a)(x_3-a)(x_4-a) + a(x_1-a)(x_3-a)(x_4-a) \\
&\quad + a(x_1-a)(x_2-a)(x_4-a) + a(x_1-a)(x_2-a)(x_3-a)
\end{aligned}
$$

六、先化简, 在利用展开公式计算行列式

8. $\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix}$

六、先化简, 在利用展开公式计算行列式

8. $\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix}$

解: 由二项式展开可知

$(a+1)^2 = a^2+2a+1,\ (a+2)^2 = a^2+4a+4,\ (a+3)^2 = a^2+6a+9$

令 $\alpha_0 = [1,1,1,1]^T, \alpha_1 = [a,b,c,d]^T, \alpha_2 = [a^2,b^2,c^2,d^2]$, 故次行列式每一列都可以分为若干列向量之和, 即

$$|[\alpha_2, \alpha_2+2\alpha_1+\alpha_0, \alpha_2+4\alpha_1+4\alpha_0, \alpha_2+6\alpha_1+9\alpha_0]|$$

我们按这些列向量展开行列式, 共有 $1\times3\times3\times3 = 27$个行列式, 并且其中每一列只能在 $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$中选择, 这表示 27个四阶行列式必定存在两个列向量成比例, 即全部为零, 所以该待求行列式为零.

1. 设 $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$,则 A的伴随矩阵 $A^*=$ $\underline{\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}}$, $(A^*)^*=$ $\underline{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}}$

1. 设 $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$,则 A的伴随矩阵 $A^*=\underline{\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}}$, $(A^*)^*=\underline{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}}$

解: 伴随矩阵 A^*的 (i,j)元为原矩阵 A中 (j,i)元的代数余子式, 因此得到

$$A^*=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

$(A^*)^*$同理计算后即可.

注: 只有二阶矩阵伴随矩阵的伴随矩阵为自身, 更高阶则不一定, 如

$$B=\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{bmatrix},\ B^*=\begin{bmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & 1 \end{bmatrix},\ (B^*)^*=0$$

2. 设 $A=\begin{bmatrix}-1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 2\\ -1 & 1 & 1\end{bmatrix}$,则 A的伴随矩阵 $A^*=\underline{\begin{bmatrix}-1 & 1 & 1\\ -2 & 2 & 2\\ 1 & -1 & -1\end{bmatrix}}$

2. 设 $A=\begin{bmatrix}-1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 2\\ -1 & 1 & 1\end{bmatrix}$,则 A的伴随矩阵 $A^*=\underline{\begin{bmatrix}-1 & 1 & 1\\ -2 & 2 & 2\\ 1 & -1 & -1\end{bmatrix}}$

解: 按照伴随矩阵的定义进行计算即可.

设 A为 3阶方阵,A^*是 A的伴随矩阵, 常数 $k \neq 0, k \neq \pm 1$, 则 $(kA)^* = (C)$.

A. $k^{-1}A^*$　B. kA^*
C. k^2A^*　D. k^3A^*

注: 伴随矩阵基本性质 (重要性由高到低)

$$AA^* = A^*A = |A|I, \quad (AB)^* = B^*A^*$$

$$(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}(A\text{可逆}), \quad (A^*)^T = (A^T)^*$$

$$\underline{(kA)^* = k^{n-1}A^*}, \quad |A^*| = |A|^{n-1}(n\text{为阶数})$$

设 A为 3阶方阵,A^*是 A的伴随矩阵, 常数 $k \neq 0, k \neq \pm 1$, 则 $(kA)^* = (C)$.

A. $k^{-1}A^*$ B. kA^*

C. k^2A^* D. k^3A^*

注: 伴随矩阵基本性质 (重要性由高到低)

$$AA^* = A^*A = |A|I, \quad (AB)^* = B^*A^*$$

$$(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}(A\text{可逆}), \quad (A^*)^T = (A^T)^*$$

$$\underline{(kA)^* = k^{n-1}A^*}, \quad |A^*| = |A|^{n-1}(n\text{为阶数})$$

解一: 直接由伴随矩阵性质 (划线公式) 得到.

解二: 由伴随矩阵乘法公式得到,

$$(kA)^* = [(kI)A]^*A^*(kI)^* = A^*I(k^{n-1}I) = k^{n-1}A^*$$

三、

1. 设 A^*是 n阶矩阵 A的伴随矩阵, 若 $|A| \neq 0$,证明:$|A^*| \neq 0, |A^*| = |A|^{n-1}$;

三、

1. 设 A^*是 n阶矩阵 A的伴随矩阵, 若 $|A| \neq 0$,证明:$|A^*| \neq 0, |A^*| = |A|^{n-1}$;

证明: 由 $AA^* = |A|I$, 两边同时作行列式, 即

$$|A||A^*| = ||A|I| = |A|^n \Rightarrow |A^*| = |A|^{n-1}$$

故得证.

三、

2. 如果 $|A| = 5$, 计算 $|2(A^*)^{-1}|$.

三、

2. 如果 $|A| = 5$, 计算 $|2(A^*)^{-1}|$.

解:

$$
\begin{aligned}
|2(A^*)^{-1}| &= 2^n|(A^*)^{-1}| = 2^n|(A^{-1})^*| \\
&= 2^n|A^{-1}|^{n-1} \\
&= 2^n\left(\frac{1}{|A|}\right)^{n-1} \\
&= \frac{2^n}{5^{n-1}}
\end{aligned}
$$

四、求下列矩阵的逆矩阵

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \\ -1 & 2 & -4 \end{bmatrix}$$

(设此矩阵为 A)

四、求下列矩阵的逆矩阵

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \\ -1 & 2 & -4 \end{bmatrix}$$

(设此矩阵为 A)
解一: 使用初等行变换 $(A \quad I) \to (I \quad A^{-1})$, 此处略.
解二: 利用伴随矩阵, 先求伴随矩阵 A^*, 按照定义得到

$$A^* = \begin{bmatrix} -4 & 2 & -1 \\ 4 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

再有 $AA^* = |A|I = I$得到 $A^{-1} = A^*$, 即逆矩阵

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -4 & 2 & -1 \\ 4 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

五、设 $A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}2 & 1 & 3\\ 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$, $A^T(BA^{-1}-I)^TX=B^T$, 求 X.

五、设 $A=\begin{bmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}2&1&3\\0&2&1\\0&0&2\end{bmatrix}, A^T(BA^{-1}-I)^TX=B^T,$ 求 X.

解:A,B都是上三角矩阵且对角元非零, 因此可逆, 进而化简方程. 令 $C=BA^{-1}$

$$\Leftrightarrow (BA^{-1}-I)^TX=(A^T)^{-1}B^T=(A^{-1})^TB^T=(BA^{-1})^T$$

$$\Leftrightarrow X=[(BA^{-1}-I)^T]^{-1}(BA^{-1})^T=[(C-I)^T]^{-1}C^T$$

$$\Leftrightarrow X=[(C-I)^{-1}]^TC^T=[C(C-I)^{-1}]^T$$

$$\Leftrightarrow X=[(C^{-1})^{-1}(C-I)^{-1}]^T=\{[(C-I)C^{-1}]^{-1}\}^T=[(I-C^{-1})^{-1}]^T$$

至此我们只需要先计算 $C^{-1}=(BA^{-1})^{-1}=AB^{-1}$, 即对 $\begin{bmatrix}B\\A\end{bmatrix}$ 作初等列变换.

解:(接上文) 计算 $C^{-1}=AB^{-1}$

$$\left[\begin{array}{ccc} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ \hdashline 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \cdots \to \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hdashline 1/2 & -3/4 & -3/8 \\ 0 & 1/2 & -3/4 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{array}\right]$$

因此

$$I-C^{-1}=\begin{bmatrix} 1/2 & 3/4 & 3/8 \\ 0 & 1/2 & 3/4 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

再求逆 $(I-C^{-1})^{-1}$, 求其伴随矩阵即

$$(I-C^{-1})^{-1}=\frac{1}{|I-C^{-1}|}(I-C^{-1})^{*}=8(I-C^{-1})^{*}=\begin{bmatrix} 2 & -3 & 3 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow X=[(I-C^{-1})^{-1}]^{T}=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 0 \\ 3 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

六、设 $n(n>2)$阶非零实数矩阵 A满足:$A^*=A^T$, 试证:$|A|=1$, 且 A是正交矩阵, 即 $A^TA=AA^T=I$.

六、设 $n(n>2)$阶非零实数矩阵 A满足:$A^*=A^T$, 试证:$|A|=1$, 且 A是正交矩阵, 即 $A^TA=AA^T=I$.

证明: 对 $A^*=A^T$两边作行列式, 得到 $|A^*|=|A|^{n-1}=|A^T|=|A|$, 此时 $|A|$可能为 0, 需要进一步讨论:

①断言 $|A|\neq 0$,(反证法) 否则若 $|A|=0$, 那么对等式左乘 A得到 $AA^*=AA^T$, 另一方面也有 $AA^*=|A|I=0\Rightarrow AA^T=0$, 结合 A为实数矩阵, 可得 $A=0$从而推出矛盾 (23 页第五题结论), 因此得到 $|A|\neq 0$.

这样我们可得到 $|A|^{n-2}=1$,$|A|$必定为实数 (因为 A为实数矩阵), 但可能为 -1, 还需要证明:

②证明 $|A|=1$. 因为 $AA^T=AA^*=|A|I$, 其中 AA^T的对角元为 $a_{i1}^2+a_{i2}^2+\cdots+a_{in}^2\geqslant 0$, 因此 $|A|I$的对角元 $|A|\geqslant 0$成立, 即 $|A|^{n-2}=0$必定得到 $|A|=1$.

②证明 $AA^T=I$, 即由 $AA^T=AA^*=|A|I=I$即可得证, 这表示 A,A^T互逆, 因此 $A^TA=I$也成立.

七、利用 $|AB|=|A||B|$计算下列行列式.

1. $$\begin{vmatrix} 1+x_1y_1 & 1+x_1y_2 & \cdots & 1+x_1y_n \\ 1+x_2y_1 & 1+x_2y_2 & \cdots & 1+x_2y_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1+x_ny_1 & 1+x_ny_2 & \cdots & 1+x_ny_n \end{vmatrix}$$

七、利用 $|AB| = |A||B|$计算下列行列式.

1. $\begin{vmatrix} 1+x_1y_1 & 1+x_1y_2 & \cdots & 1+x_1y_n \\ 1+x_2y_1 & 1+x_2y_2 & \cdots & 1+x_2y_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1+x_ny_1 & 1+x_ny_2 & \cdots & 1+x_ny_n \end{vmatrix}$

解: 关键在于找到合适的 A, B相乘为要求的矩阵, 观察其中每个元哪些和该行行标相同, 哪些和列标相同.

因为其中 (i,j)元为 $1+x_iy_j = [1, x_i]\begin{bmatrix} 1 \\ y_j \end{bmatrix}$, 因此可以得到

$$\text{原式} = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & x_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & x_3 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ y_1 & y_2 & y_3 & \cdots & y_n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

当 $n > 2$时, 两个行列式都有 0行, 因此 $|AB| = 0$;

当 $n = 1$时,$|AB| = 1 + x_1y_1$; $n = 2$时,$|AB| = \begin{vmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} =$ $(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)$

七、利用 $|AB| = |A||B|$ 计算下列行列式.

2. $$\begin{vmatrix} \dfrac{1-a_1^n b_1^n}{1-a_1 b_1} & \dfrac{1-a_1^n b_2^n}{1-a_1 b_2} & \cdots & \dfrac{1-a_1^n b_n^n}{1-a_1 b_n} \\ \dfrac{1-a_2^n b_1^n}{1-a_2 b_1} & \dfrac{1-a_2^n b_2^n}{1-a_2 b_2} & \cdots & \dfrac{1-a_2^n b_n^n}{1-a_2 b_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \dfrac{1-a_n^n b_1^n}{1-a_n b_1} & \dfrac{1-a_n^n b_2^n}{1-a_n b_2} & \cdots & \dfrac{1-a_n^n b_n^n}{1-a_n b_n} \end{vmatrix}$$

注: 和第一题一样, 我们也希望将每个元化为行列的交叉乘积之和, 由公式

$$(1-x^n) = (1-x)(1+x+x^2+\cdots+x^{n-1})$$

即可得到

$$\frac{1-a_i^n b_j^n}{1-a_i b_j} = 1 + a_i b_j + a_i^2 b_j^2 + \cdots + a_i^{n-1} b_j^{n-1}$$

每个元变为向量的乘积 $\left[1, a_i, a_i^2, \cdots, a_i^{n-1}\right]\left[1, b_j, b_j^2, \cdots, b_j^{n-1}\right]^T$.

解: 因为

$$\text{原式} = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ 1 & a_3 & a_3^2 & \cdots & a_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ b_1 & b_2 & b_3 & \cdots & b_n \\ b_1^2 & b_2^2 & b_3^2 & \cdots & b_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_1^{n-1} & b_2^{n-1} & b_3^{n-1} & \cdots & b_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

$$= \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n} (a_j - a_i)(b_j - b_i)$$

其中用到了范德蒙行列式的结论.

八、求行列式 $\begin{vmatrix} \lambda-4 & -5 & 2 \\ 2 & \lambda+2 & -1 \\ 1 & 1 & \lambda-1 \end{vmatrix}$ 的值.

八、求行列式 $\begin{vmatrix} \lambda-4 & -5 & 2 \\ 2 & \lambda+2 & -1 \\ 1 & 1 & \lambda-1 \end{vmatrix}$ 的值.

解: 直接计算即可 (当然可以使用变换化简计算)

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} \lambda-4 & -5 & 2 \\ 2 & \lambda+2 & -1 \\ 1 & 1 & \lambda-1 \end{vmatrix} &= (\lambda-4)(\lambda+2)(\lambda-1)+5+4 \\ &\quad -2(\lambda+2)+(\lambda-4)+10(\lambda-1) \\ &= \lambda^3-3\lambda^2+3\lambda-1 \\ &= (\lambda-1)^3 \end{aligned}$$

一、设 A为 3阶方阵, A^*是 A的伴随矩阵,$|A| = \frac{1}{8}$, 求 $\left|\left(\frac{1}{3}A\right)^{-1} - 8A^*\right|$.

注: 行列式没有和差公式, 即一般情况下 $|A \pm B| \neq |A| \pm |B|$.

一、设 A为 3阶方阵, A^*是 A的伴随矩阵,$|A|=\frac{1}{8}$, 求 $\left|\left(\frac{1}{3}A\right)^{-1}-8A^*\right|$.

注: 行列式没有和差公式, 即一般情况下 $|A\pm B|\neq|A|\pm|B|$. 解:

$$
\begin{aligned}
\left|\left(\frac{1}{3}A\right)^{-1}-8A^*\right| &= \frac{|A|}{|A|}\left|\left(\frac{1}{3}A\right)^{-1}-8A^*\right| \\
&= \frac{1}{|A|}\left|A\left(\frac{1}{3}A\right)^{-1}-8AA^*\right| \\
&= 8\left|A\left(3A^{-1}\right)-8A^*\right| \\
&= 8\left|3I-8|A|I\right| \\
&= 8|2I| \\
&= 8\times 2^3 \\
&= 64
\end{aligned}
$$

二、设 A是 n阶矩阵, 满足 $AA^T = I$(I是 n阶单位阵,A为正交阵),$|A| < 0$, 求 $|A+I|$.

二、设 A是 n阶矩阵, 满足 $AA^T=I$(I是 n阶单位阵,A为正交阵),$|A|<0$, 求 $|A+I|$.

解: 因为 $AA^T=I$, 那么也有 $A^TA=I$. 另外由

$$
\begin{aligned}
|A+I| &= \frac{|A^T|}{|A|}|A+I| \\
&= \frac{1}{|A|}|A^TA+A^T| = \frac{1}{|A|}|I+A^T| \\
&= \frac{1}{|A|}|(I+A^T)^T| = \frac{1}{|A|}|A+I|
\end{aligned}
$$

即可得到

$$\left(1-\frac{1}{|A|}\right)|A+I|=0$$

其中 $1-1/|A|>0$, 因此得到 $|A+I|=0$.

三、设 n阶行列式 $|A| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{n-1} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \frac{1}{n} \end{vmatrix}$, 求 $|A|$中所有元素代数余子式之和.

三、设 n阶行列式 $|A| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{n-1} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \frac{1}{n} \end{vmatrix}$, 求 $|A|$中所有元素代数余子式之和.

解: 由之前的习题可知, 某一行的代数余子式之和 $A_{i1}+\cdots+A_{in}$即将原行列式第 i行全部换为 1的行列式, 即

$$\sum_{j=1}^{m} A_{ij} = \begin{vmatrix} & & & & 1 & 0 \\ & & & \iddots & & \\ 1 & \cdots & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ & \iddots & & & & \\ \frac{1}{n-1} & & & & & \\ & & & & & \frac{1}{n} \end{vmatrix} k\text{行}$$

注意到除第 k行外其余行都只有一个非零元, 由行列式的定义可知

$$\sum_{j=1}^{m} A_{ij} = (-1)^{\tau(n-1,n-2,\cdots,1,n)} \frac{1}{n!}$$

解:(接上文)

$$\sum_{j=1}^{m} A_{ij} = (-1)^{\tau(n-1,n-2,\cdots,1,n)} \frac{1}{n!} = (-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} \frac{k}{n!}$$

即得

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A_{ij} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} \frac{k}{n!} = (-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} \frac{1}{n!} \cdot \frac{n(n+1)}{2} = (-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} \frac{n+1}{2(n-1)!}$$

四、设 A, B是正交矩阵, 且 $\frac{|A|}{|B|} = -1$,证明:$|A + B| = 0$.

四、设 A, B是正交矩阵, 且 $\frac{|A|}{|B|} = -1$,证明:$|A+B| = 0$.

证明: 由

$$\begin{aligned}
|A+B| &= \frac{|A|}{|B|}|A+B|\frac{|B|}{|A|} \\
&= \frac{|A^T|}{|B|}|A+B|\frac{|B^T|}{|A|} \\
&= \frac{1}{|A||B|}|A^T(A+B)B^T| \\
&= \frac{1}{|A||B|}|B^T + A^T| \\
&= \frac{1}{|A||B|}|A+B|
\end{aligned}$$

即得到

$$\left(1 - \frac{1}{|A||B|}\right)|A+B| = 0$$

因为 $|A|/|B| = -1$, 可知 $|A|, |B|$异号, 进而 $1 - 1/(|A||B|) > 0$, 得到 $|A+B| = 0$.

五、设矩阵 A的伴随矩阵 $A^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 8 \end{bmatrix}$, 且 $ABA^{-1} = BA^{-1} + 3I$, I为 4阶单位阵, 求矩阵 B.

五、设矩阵 A的伴随矩阵 $A^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 8 \end{bmatrix}$, 且 $ABA^{-1} = BA^{-1} + 3I, I$为 4阶单位阵, 求矩阵 B.

解: 先化简方程,$(A - I)BA^{-1} = 3I \Rightarrow (A - I)B = 3A$, 对等式两端左乘 A^*, 得到 $(A^*A - A^*)B = 3A^*A$, 即

$$(|A|I - A^*)B = 3|A|I \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -6 \end{bmatrix} B = 9I$$

注意此时 $8I - A^*$不可逆, 需要使用初等行变换求解, 即

$$\left[\begin{array}{cccc:cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -6 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{array}\right]$$

五、设矩阵 A的伴随矩阵 $A^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 8 \end{bmatrix}$, 且 $ABA^{-1} = BA^{-1} + 3I, I$为 4阶单位阵, 求矩阵 B.

解:(接上文)

$$\to \cdots \to \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 6 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 0 & -1 \end{array}\right]$$

因此可知

$$B = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

六、设 n阶矩阵 A可逆 $(n \geqslant 2)$, A^*是 A的伴随矩阵, 求 $(A^*)^*$与 A的关系.

六、设 n阶矩阵 A可逆 $(n \geqslant 2)$, A^*是 A的伴随矩阵, 求 $(A^*)^*$与 A的关系.

解: 由 $A^*(A^*)^* = |A^*|I = |A|^{n-1}I$和 $AA^* = |A|I$得到

$$\begin{aligned}(A^*)^* &= |A|^{n-1}(A^*)^{-1} = |A|^{n-1}(|A|A^{-1})^{-1} \\ &= |A|^{n-1}(A^{-1})^{-1}(|A|I)^{-1} \\ &= |A|^{n-1}A\left(\frac{1}{|A|}I\right) = |A|^{n-2}A\end{aligned}$$

注: 若 A不可逆时, 需要根据 n的阶数来看, 即

$$(A^*)^* = \begin{cases} 0, n > 2 \\ A, n = 2 \end{cases}$$

即 $n = 2$时可逆与否都不影响 $(A^*)^* = A$.

七、A是 n阶方阵, 满足 $A^m = I$(m为正整数), I为 n阶单位阵, 现将 A中 n^2个元素 a_{ij}用其代数余子式 A_{ij}代替, 得到的矩阵记为 B, 证明:$B^m = I$.

七、A是 n阶方阵, 满足 $A^m = I$(m为正整数), I为 n阶单位阵, 现将 A中 n^2个元素 a_{ij}用其代数余子式 A_{ij}代替, 得到的矩阵记为 B, 证明:$B^m = I$.

解: 由题意不难知道 $B = (A^*)^T$. 另一方面, 对 $A^m = I$两段作伴随得到

$$(A^m)^* = I^* \Rightarrow (A^*)^m = I$$

再对等式两边作转置得到

$$[(A^*)^m]^T = I^T \Rightarrow [(A^*)^T]^m = I$$

此即 $B^m = I$, 即得证.

八、证明: 奇数阶反对称阵的行列式等于零.

八、证明: 奇数阶反对称阵的行列式等于零.

证明: 设 A为 $2n+1$阶矩阵, 满足 $A^T=-A$, 两端作行列式, 得到

$$|A|^T=|-A| \Rightarrow |A|=(-1)^{2n+1}|A|=-|A| \Rightarrow |A|=0$$

因此得证.

九、设 $f(x) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3-x & 5-3x^2 & 3x^2-1 \\ 2x^2-1 & 3x^5-1 & 7x^8-1 \end{vmatrix}$, 证明: 存在一个小于 1的正数 ξ, 使得 $f'(\xi) = 0$.

九、设 $f(x)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3-x & 5-3x^2 & 3x^2-1 \\ 2x^2-1 & 3x^5-1 & 7x^8-1 \end{vmatrix}$, 证明: 存在一个小于 1的正数 ξ, 使得 $f'(\xi)=0$.

证明: 因为 $f(x)$为多项式, 故可导, 且有

$$f(1)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \end{vmatrix},\quad f(0)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix}=0$$

因此由罗尔定理存在 $\xi\in(0,1)$使得 $f'(\xi)=0$, 即得证.

十、计算元素为 $a_{ij} = |i - j|$的 n阶行列式.

注: 类似与平移的行列式可以采用相邻行 (列) 相减的方法.

十、计算元素为 $a_{ij} = |i-j|$的 n阶行列式.

注: 类似与平移的行列式可以采用相邻行 (列) 相减的方法.
解: 将此行列式表示出来

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & n-2 \\ 2 & 1 & 0 & & n-3 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ n-1 & n-2 & n-3 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

将第 2行 -1倍加到第 1行, 然后将第 3行 -1倍加到第 2行, 不断重复直至将第 n行 -1倍加到第 $n-1$行得到

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & 1 \\ n-1 & n-2 & n-3 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

再重复上述行变换, 只是不需要第 n行的 -1倍加到第 $n-1$行,

得到

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & & & & \\ & & 2 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & 2 & \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & 1 \\ n-1 & n-2 & n-3 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

此时再按照行列式的定义, 此时前 $n-2$行只能取 2, 最后一列只能取 1, 进而第一列只能取 $n-1$, 因此此行列式的值为

$$(-1)^{\tau(n,1,2,\cdots,n-1)}(n-1)2^{n-2}=(-1)^{n-1}(n-1)2^{n-2}$$