线性代数第八次作业

2024 年 4 月 28 日

本次作业

《线性代数习题册 (第三版)》

- $55 \sim 58$页: 基和维数
- $59 \sim 62$页: 矩阵的秩

目录

习题答案会上传至 github 中.

图: github 链接二维码

1. 若 $\alpha_1=(1,1,0)^T, \alpha_2=(0,1,1)^T, \alpha_3=(1,1,1)^T$是 $\mathbb{R}^3$的一个基，则 $\beta=(3,4,3)^T$在该基下的坐标为 $\underline{(1,1,2)}$.

1. 若 $\alpha_1=(1,1,0)^T,\alpha_2=(0,1,1)^T,\alpha_3=(1,1,1)^T$是 $\mathbb{R}^3$的一个基，则 $\beta=(3,4,3)^T$在该基下的坐标为 $\underline{(1,1,2)}$.

解: 由题意, 即解线性方程组

$$[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\beta$$

作初等行变换

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&1&3\\1&1&1&4\\0&1&1&3\end{array}\right]\to\cdots\to\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&0&1\\0&1&0&1\\0&0&1&2\end{array}\right]$$

因此得到坐标为 $(1,1,2)$

2. 从 $\mathbb{R}^2$的基 $\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$到基 $\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$的过渡矩阵为 $\underline{\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}}$

2. 从 $\mathbb{R}^2$的基 $\alpha_1=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},\alpha_2=\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$到基 $\alpha_1=\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix},\alpha_2=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$的过渡矩阵为 $\underline{\begin{bmatrix}0&3\\1&-2\end{bmatrix}}$

解: 即求矩阵方程

$$[\alpha_1,\alpha_2]P=[\beta_1,\beta_2]$$

对增广矩阵作初等行变换

$$\left[\begin{array}{cc:cc}1&1&1&1\\0&-1&-1&2\end{array}\right]\to\cdots\to\left[\begin{array}{cc:cc}1&0&0&3\\0&1&1&-2\end{array}\right]$$

因此得到

$$P=\begin{bmatrix}1&3\\1&-2\end{bmatrix}$$

3. 设 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$是 $\mathbb{R}^3$的一组基, 则这组基到基 $\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_1$的过渡矩阵为 $\underline{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}$

3. 设 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$是 $\mathbb{R}^3$的一组基, 则这组基到基 $\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_1$的过渡矩阵为 $\underline{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}$

解: 即求可逆矩阵 P使得

$$[\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3]P=[\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_1]$$

而 $[\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3]=I_3$, 因此直接得到

$$P=[\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_1]=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

4. 设向量组 $\alpha_1=(1,2,-1,0)^T,\alpha_2=(1,1,0,2)^T,\alpha_3=(2,1,1,k)^T$,若由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$生成的向量空间的维数为 2, 则 $k=\underline{6}$.

4. 设向量组 $\alpha_1=(1,2,-1,0)^T,\alpha_2=(1,1,0,2)^T,\alpha_3=(2,1,1,k)^T$,若由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$生成的向量空间的维数为 2, 则 $k=\underline{6}$.

解: 由题意可知 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$的秩为 2, 因此作初等行变换

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & k \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & k-6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

可知 $k-6=6$, 得到 $k=6$.

二、判别下列 $\mathbb{R}^4$ 的子集是否为 $\mathbb{R}^4$ 的子空间.

1.$H = \{(0, x_2, x_3, x_4)^T | x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}\}$.

二、判别下列 $\mathbb{R}^4$的子集是否为 $\mathbb{R}^4$的子空间.

1.$H=\{(0,x_2,x_3,x_4)^T|x_2,x_3,x_4\in\mathbb{R}\}$.

解: 验证子集是否为子空间, 只需要验证空间内加法和数乘是否封闭.

因为 $\forall \begin{bmatrix}0\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\y_2\\y_3\\y_4\end{bmatrix}\in H$和 $\forall k\in\mathbb{R}$, 显然有

$$k\begin{bmatrix}0\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\kx_2\\kx_3\\kx_4\end{bmatrix}\in H,\quad \begin{bmatrix}0\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\y_2\\y_3\\y_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\x_2+y_2\\x_3+y_3\\x_4+y_4\end{bmatrix}\in H$$

因此 H为子空间.

二、判别下列 $\mathbb{R}^4$ 的子集是否为 $\mathbb{R}^4$ 的子空间.

2.$H=\{(1,x_2,x_3,x_4)^T|x_2,x_3,x_4\in\mathbb{R}\}$;

二、判别下列 $\mathbb{R}^4$的子集是否为 $\mathbb{R}^4$的子空间.
2.$H = \{(1, x_2, x_3, x_4)^T | x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}\}$;

解: 取 $[1, 2, 3, 4] \in H$, 有

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \notin H$$

因此 H不是子空间.

二、判别下列 $\mathbb{R}^4$ 的子集是否为 $\mathbb{R}^4$ 的子空间.

3.$H=\{(a,b,c,d)^T|a-2b+5c=d,c-a=b\}$;

二、判别下列 $\mathbb{R}^4$的子集是否为 $\mathbb{R}^4$的子空间.

3.$H=\{(a,b,c,d)^T|a-2b+5c=d,c-a=b\}$;

解: 由 H说明, 即为线性方程组

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}=0$$

的解空间.$\forall\alpha,\beta\in H,\forall k\in\mathbb{R}$, 必定有 $A\alpha=A\beta=0$, 而由

$$A(k\alpha)=k(A\alpha)=0,\quad A(\alpha+\beta)=A\alpha+A\beta=0$$

得到 $k\alpha,\alpha+\beta\in H$成立, 这表示 H为子空间.

二、判别下列 $\mathbb{R}^4$的子集是否为 $\mathbb{R}^4$的子空间.
3.$H=\{(a,b,c,d)^T|a-2b+5c=d, c-a=b\}$;

解: 由 H说明, 即为线性方程组

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = 0$$

的解空间.$\forall \alpha, \beta \in H, \forall k \in \mathbb{R}$, 必定有 $A\alpha = A\beta = 0$, 而由

$$A(k\alpha) = k(A\alpha) = 0, \quad A(\alpha+\beta) = A\alpha + A\beta = 0$$

得到 $k\alpha, \alpha+\beta \in H$成立, 这表示 H为子空间.

注: 齐次线性方程组 $Ax=0$的解空间总是子空间, 但非齐次情形 $Ax=b(b\neq 0)$的解空间必定不是子空间, 而是一个子空间加一个向量的偏移 (称为仿射空间).

三、求 $\mathbb{R}^4$的子空间 $\mathrm{span}\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$的维数和一组基, 其中

$$\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 9 \\ -6 \\ 12 \end{bmatrix}, \alpha_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}, \alpha_4 = \begin{bmatrix} -4 \\ 5 \\ -3 \\ 7 \end{bmatrix}$$

三、求 $\mathbb{R}^4$的子空间 $\text{span}\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$的维数和一组基, 其中

$$\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 9 \\ -6 \\ 12 \end{bmatrix}, \alpha_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}, \alpha_4 = \begin{bmatrix} -4 \\ 5 \\ -3 \\ 7 \end{bmatrix}$$

解: 由有限个向量张成空间的维数即为这些向量组的秩, 其中的基即为极大线性无关组, 因此只需作初等行变换.

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & -4 \\ -3 & 9 & -1 & 5 \\ 2 & -6 & 4 & -3 \\ 4 & 12 & 2 & 7 \end{bmatrix} \to \cdots \to \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & -4 \\ 0 & 24 & -6 & 23 \\ 0 & 0 & 5 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

由此可知维数为 4, 基即为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$.

四、令 $A=\begin{bmatrix}4 & 5 & 9 & -2\\ 6 & 5 & 1 & 12\\ 3 & 4 & 8 & -3\end{bmatrix}$, 求 $\mathrm{Col}(A)$和 $\mathrm{Null}(A)$的基.

四、令 $A=\begin{bmatrix}4&5&9&-2\\6&5&1&12\\3&4&8&-3\end{bmatrix}$, 求 $\mathrm{Col}(A)$和 $\mathrm{Null}(A)$的基.

解: 列空间即列向量张成的空间, 即

$\mathrm{span}\left\{\begin{bmatrix}4\\6\\3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}5\\5\\4\end{bmatrix},\begin{bmatrix}9\\1\\8\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-2\\12\\-3\end{bmatrix}\right\}$, 因此作初等行变换即可.

$$\begin{bmatrix}4&5&9&-2\\6&5&1&12\\3&4&8&-3\end{bmatrix}\to\cdots\to\begin{bmatrix}1&0&-4&7\\0&1&5&-6\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

由此可知列空间 $\mathrm{Col}(A)$的一组基为 $\begin{bmatrix}4\\6\\3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}5\\5\\4\end{bmatrix}$.

而对于零空间, 即 $Ax=0$的解空间, 同理由上初等行变换可得

$\mathrm{Null}(A)$的一组基为 $\begin{bmatrix}-7\\6\\0\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}4\\-5\\1\\0\end{bmatrix}$.

五、证明: 向量组 $\alpha_1=(1,2,-1,-2)^T, \alpha_2=(2,3,0,1)^T, \alpha_3=(1,3,-1,1)^T, \alpha_4=(1,2,1,3)^T$是 $\mathbb{R}^4$的一组基, 并求向量 $\alpha=(7,14,-1,-2)^T$在该基下的坐标.

五、证明: 向量组 $\alpha_1=(1,2,-1,-2)^T,\alpha_2=(2,3,0,1)^T,\alpha_3=(1,3,-1,1)^T,\alpha_4=(1,2,1,3)^T$是 $\mathbb{R}^4$的一组基, 并求向量 $\alpha=(7,14,-1,-2)^T$在该基下的坐标.

证明: 因为 $\dim(\mathbb{R}^4=4)$, 因此只需证明 $\operatorname{span}(\alpha_1,\cdots,\alpha_4)=4$即可, 即证明他们线性无关, 需要作初等行变换; 另一方面, 求 α的坐标需要求解线性方程组 $[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4][x_1,x_2,x_3,x_4]^T=\alpha$, 也需要作初等行变换 (只不过是对增广矩阵). 由

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 7 \\ 2 & 3 & 3 & 2 & 14 \\ -1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 1 & 3 & -2 \end{array}\right] \to \cdots \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right]$$

可以看到存在四个主元, 即得到 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性无关, 这就证明了它们是 $\mathbb{R}^4$的一组基; 同样由如上变换得到 α在这组基的坐标为 $(6,-1,-1,4)^T$.

六、设 $\mathbb{R}^3$中由基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$到基 η_1, η_2, η_3的过渡矩阵为

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

若 $\eta_1 = (1, -1, 1)^T, \eta_2 = (2, -2, 0)^T, \eta_3 = (3, -1, -1)^T$, 求 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$.

六、设 $\mathbb{R}^3$中由基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$到基 η_1,η_2,η_3的过渡矩阵为
$A=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}$. 若
$\eta_1=(1,-1,1)^T,\eta_2=(2,-2,0)^T,\eta_3=(3,-1,-1)^T$, 求 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$.

解: 由题意可知 $[\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3]A=[\eta_1,\eta_2,\eta_3]$, 因此

$$[\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3]=[\eta_1,\eta_2,\eta_3]A^{-1}$$

因此对 $\begin{bmatrix}A\\ \eta_1,\eta_2,\eta_3\end{bmatrix}$作初等列变换即可.

$$\left[\begin{array}{ccc}0&0&1\\0&1&1\\1&1&1\\\hdashline 1&2&3\\-1&-2&-1\\1&0&-1\end{array}\right]\to\cdots\to\left[\begin{array}{ccc}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\\\hdashline 1&1&1\\1&-1&-1\\-1&-1&1\end{array}\right]$$

最后得到 $\varepsilon_1=\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix},\varepsilon_2=\begin{bmatrix}1\\-1\\-1\end{bmatrix},\varepsilon_3=\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}$

七、在 $\mathbb{R}^3$中, 设有两组基:$(I)\varepsilon_1=(1,2,1)^T,\varepsilon_2=(2,3,3)^T,\varepsilon_3=(3,7,1)^T$;$(II)\eta_1=(9,24,-1)^T,\eta_2=(8,22,-2)^T,\eta_3=(12,28,4)^T$.

1. 求基 (I)到基 (II)的过渡矩阵;

七、在 $\mathbb{R}^3$中, 设有两组基:$(I)\varepsilon_1=(1,2,1)^T,\varepsilon_2=(2,3,3)^T,\varepsilon_3=(3,7,1)^T$;$(II)\eta_1=(9,24,-1)^T,\eta_2=(8,22,-2)^T,\eta_3=(12,28,4)^T$.
1. 求基 (I)到基 (II)的过渡矩阵;

解: 即求可逆矩阵 P使得

$$[\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3]P=[\eta_1,\eta_2,\eta_3]\Rightarrow P=[\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3]^{-1}[\eta_1,\eta_2,\eta_3]$$

作初等行变换:

$$\left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 2 & 3 & 9 & 8 & 12 \\ 2 & 3 & 7 & 24 & 22 & 28 \\ 1 & 3 & 1 & -1 & -2 & 4 \end{array}\right]\to\cdots\to\left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 4 & 4 \end{array}\right]$$

因此过渡矩阵为

$$P=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \\ 4 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

七、在 $\mathbb{R}^3$中, 设有两组基:$(I)\varepsilon_1=(1,2,1)^T,\varepsilon_2=(2,3,3)^T,\varepsilon_3=(3,7,1)^T$;$(II)\eta_1=(9,24,-1)^T,\eta_2=(8,22,-2)^T,\eta_3=(12,28,4)^T$.

2. 若向量 α在基 (I)下的坐标为 $x=(0,1,-1)^T$,求 α在基 (II)下的坐标.

七、在 $\mathbb{R}^3$中, 设有两组基:$(I)\varepsilon_1=(1,2,1)^T,\varepsilon_2=(2,3,3)^T,\varepsilon_3=(3,7,1)^T$;$(II)\eta_1=(9,24,-1)^T,\eta_2=(8,22,-2)^T,\eta_3=(12,28,4)^T$.
2. 若向量 α在基 (I)下的坐标为 $x=(0,1,-1)^T$,求 α在基 (II)下的坐标.

解: 设在基 (II)下的坐标为 $(x_1,x_2,x_3)^T$, 那么由题意可知

$$[\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3]\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}=\alpha,\quad [\eta_1,\eta_2,\eta_3]\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\alpha$$

又由 1 得到

$$[\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3]P=[\eta_1,\eta_2,\eta_3]$$

进而

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}&=[\eta_1,\eta_2,\eta_3]^{-1}\alpha=[\eta_1,\eta_2,\eta_3]^{-1}[\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3]\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}\\&=\left([\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3]^{-1}[\eta_1,\eta_2,\eta_3]\right)^{-1}\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}=P^{-1}\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}\end{aligned}$$

七、在 $\mathbb{R}^3$中, 设有两组基:$(I)\varepsilon_1=(1,2,1)^T,\varepsilon_2=(2,3,3)^T,\varepsilon_3=(3,7,1)^T$;$(II)\eta_1=(9,24,-1)^T,\eta_2=(8,22,-2)^T,\eta_3=(12,28,4)^T$.
2. 若向量 α在基 (I)下的坐标为 $x=(0,1,-1)^T$,求 α在基 (II)下的坐标.

解:(接上文) 故作初等行变换即可,

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & 4 & -1 \end{array}\right] \to \cdots \to \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} \end{array}\right]$$

因此在基 (II)下的坐标为 $(0,-1/2,1/4)^T$.

1. 写出一个秩为 2的三阶矩阵 $A = \underline{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}$，其伴随矩阵 A^* 的秩 $= \underline{1}$.

1. 写出一个秩为 2的三阶矩阵 $A = \underline{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}$, 其伴随矩阵 A^*的秩 $= \underline{1}$.

解: 直接计算即可.

伴随矩阵的秩与原矩阵的秩的关系如下: 对于 n阶矩阵 A, 有

$$r(A^*) = \begin{cases} n, r(A) = n \\ 1, r(A) = n-1 \\ 0, r(A) < n-1 \end{cases}$$

简单证明:$r(A) = n$说明 A可逆, 进而 A^*也可逆;
$r(A) = n-1$时由 $AA^* = 0$可知 A^*的列向量都是 $Ax = 0$的解, 即都在 $Ax = 0$的解空间中, 因此 A^*列向量组的秩不会高于解空间的维数, 即 $n - r(A) = n - (n-1) = 1$, 而 $r(A) = n-1$表示至少存在一个非零的 $n-1$阶余子式, 故 $A^* \neq 0$, 即 $r(A^*) \geqslant 1$, 得到 $r(A^*) = 1$;
$r(A) < n-1$, 这表示任意 $n-1$阶余子式必定为零, 因此由伴随矩阵定义可知 $A^* = 0$.

2. 设 A是 3×4矩阵, 则 AA^T是 $\underline{3}$阶对称矩阵,$|A^TA| = \underline{0}$.

2. 设 A是 3×4矩阵, 则 AA^T是 $\underline{3}$阶对称矩阵,$|A^TA|=\underline{0}$.

解:AA^T显然是 3×3的对称矩阵,A^TA为 4×4的对称矩阵, 而由

$$r(A^TA)\leqslant r(A)\leqslant \min(3,4)=3$$

不满秩, 因此行列式为零 $|A^TA|=0$.

3. 设矩阵 $A=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$,则 $r(A^3)=\underline{1}$.

3. 设矩阵 $A=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$,则 $r(A^3)=\underline{1}$.

解: 由前面的结论,A每自乘一次 1所在次对角线都会向上移动一格,即

$$A^2=\begin{bmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix},\quad A^3=\begin{bmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

即可得到 $r(A^3)=1$.

4. 设矩阵 $A=\begin{bmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k \end{bmatrix}$ 与 $B=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 相抵, 则 $k=\underline{-2}$.

4. 设矩阵 $A=\begin{bmatrix}k & 1 & 1\\ 1 & k & 1\\ 1 & 1 & k\end{bmatrix}$ 与 $B=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}$ 相抵, 则 $k=\underline{-2}$.

解: 相抵即等价, 两个大小相等的矩阵等价当且仅当他们的秩相等, 先求 B的秩.

首先由 $|B|=0$可知 $r(B)<3$, 又取子式 $\begin{vmatrix}1 & 1\\ 0 & -1\end{vmatrix}=-1\neq 0$可知 $r(B)\geqslant 2$, 即得到 $r(B)=2$, 因此 $r(A)$也应该等于 2;

A的行列式需要为 0, 即

$|A|=k^3-3k+2=(k-1)^2(k+2)=0\Rightarrow k=1,-2$, 而 $k=1$时不难看出 $r(A)=1$(列成比例), 因此舍去, 最后得到 $k=-2$.

4. 设矩阵 $A=\begin{bmatrix}k&1&1\\1&k&1\\1&1&k\end{bmatrix}$ 与 $B=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&-1&1\\1&0&1\end{bmatrix}$ 相抵, 则 $k=\underline{-2}$.

解: 相抵即等价, 两个大小相等的矩阵等价当且仅当他们的秩相等, 先求 B的秩.
首先由 $|B|=0$可知 $r(B)<3$, 又取子式 $\begin{vmatrix}1&1\\0&-1\end{vmatrix}=-1\neq 0$可知 $r(B)\geqslant 2$, 即得到 $r(B)=2$, 因此 $r(A)$也应该等于 2;
A的行列式需要为 0, 即
$|A|=k^3-3k+2=(k-1)^2(k+2)=0\Rightarrow k=1,-2$, 而 $k=1$时不难看出 $r(A)=1$(列成比例), 因此舍去, 最后得到 $k=-2$.

注: 秩与子式的关系, 对于 n阶矩阵 A, 其秩 $r(A)$即为最大非零子式的阶数, 此结论常常进行如下使用:
①若 A存在一个 k阶子式 (任取 k行 k列后交叉的 k^2个元按原来顺序排列的 k阶行列式的值) 非零, 那么 $r(A)\geqslant k$;
②若 A的所有 k阶子式为 0, 那么 $r(A)<k$.

1. 设 A, B是两个 3阶可逆矩阵, 则下列结论不正确的是 (B).

A. A, B 必定等价　　B. A, B 不一定等价

C. A, B 的行向量组等价　　D. A, B 的列向量组等价

1. 设 A, B是两个 3阶可逆矩阵, 则下列结论不正确的是 (B).

A. A, B 必定等价　　B. A, B 不一定等价

C. A, B 的行向量组等价　　D. A, B 的列向量组等价

解: 由题意,A, B都可逆, 那么他们显然等价; 另外 A, B各自的列 (行) 向量组都都是 $\mathbb{R}^3$中线性无关的三个向量, 因此他们各自都是 $\mathbb{R}^3$中的一组基, 当然也是等价的.

1. 设 A, B是两个 3阶可逆矩阵, 则下列结论不正确的是 (B).
A. A, B 必定等价　B. A, B 不一定等价
C. A, B 的行向量组等价　D. A, B 的列向量组等价

解: 由题意,A, B都可逆, 那么他们显然等价; 另外 A, B各自的列 (行) 向量组都都是 $\mathbb{R}^3$中线性无关的三个向量, 因此他们各自都是 $\mathbb{R}^3$中的一组基, 当然也是等价的.

注: 矩阵的等价 (相抵) 和向量组等价是不一样的, 前者只需要大小相等秩相等, 后者不仅需要秩相等, 还需要能够互相表出 (当然只需要互相表出也可以, 秩自然相等), 如

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

不难验证 A, B等价, 但是他们的列向量组不等价 (只有秩相等).

2. 设 A为 $m \times n$矩阵,B为 $n \times m$矩阵,I为 m阶单位矩阵. 若 $AB = I$, 则 (A).

A. 秩 $r(A) = m$, 秩 $r(B) = m$　　B. 秩 $r(A) = m$, 秩 $r(B) = n$

C. 秩 $r(A) = n$, 秩 $r(B) = m$　　D. 秩 $r(A) = n$, 秩 $r(B) = n$

2. 设 A为 $m\times n$矩阵,B为 $n\times m$矩阵,I为 m阶单位矩阵. 若 $AB=I$, 则 (A).

A. 秩 $r(A)=m$, 秩 $r(B)=m$　　B. 秩 $r(A)=m$, 秩 $r(B)=n$

C. 秩 $r(A)=n$, 秩 $r(B)=m$　　D. 秩 $r(A)=n$, 秩 $r(B)=n$

解: 由

$$m=r(I)=r(AB)\leqslant r(A),r(B)\leqslant \min\{n,m\}\leqslant m$$

得到 $r(A)=r(B)=m$, 故选择 (A)项.

注: 还可以得到 $m\leqslant n$, 即 A行满秩,B列满秩.

三、计算下列矩阵的秩.

1. $$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & -1 & -3 \\ 1 & 4 & -1 & 0 & -3 \\ 1 & 4 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 8 & 1 & 1 & -3 \end{bmatrix}.$$

行列初等变换都不会改变矩阵的秩, 这比求线性方程组限制要少.

三、计算下列矩阵的秩.

1. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & -1 & -3 \\ 1 & 4 & -1 & 0 & -3 \\ 1 & 4 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 8 & 1 & 1 & -3 \end{bmatrix}$.

行列初等变换都不会改变矩阵的秩, 这比求线性方程组限制要少.
解: 作初等变换

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & -1 & -3 \\ 1 & 4 & -1 & 0 & -3 \\ 1 & 4 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 8 & 1 & 1 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{第 1 列消去第 2,3,5 列}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & -1 & -3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 3 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{第 4 列消去第 5 列}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{同理}} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

因为非零列只有 3 个, 故 $r \leqslant 3$, 又前 3 行前 3 列的子式不为零,$r \geqslant 3$, 综上秩为 3.

三、计算下列矩阵的秩.

2. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & a & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

三、计算下列矩阵的秩.

2. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & a & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

解: 首先取第 1,3 行, 第 1,3 列的二阶子式 $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = -4 \neq 0$, 因此 $r \geqslant 2$; 另一方面, 求行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & a & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 9 - 4a$$

因此可知 $a = \frac{9}{4}$时秩为 2;$a \neq \frac{9}{4}$时秩为 3.

四、设 A,B 都是 $s\times n$ 矩阵. 证明:$\operatorname{rank}(A+B)\leqslant\operatorname{rank}(A)+\operatorname{rank}(B)$.

四、设 A,B都是 $s\times n$矩阵. 证明:$\operatorname{rank}(A+B)\leqslant\operatorname{rank}(A)+\operatorname{rank}(B)$.

证明: 设 $A=[\alpha_1,\cdots,\alpha_n],B=[\beta_1,\cdots,\beta_n]$, 进而 $A+B=[\alpha_1+\beta_1,\cdots,\alpha_n+\beta_n]$, 因为 $\alpha_1+\beta_1,\cdots,\alpha_n+\beta_n$, 可以被 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n,\beta_1,\cdots,\beta_n$线性表出, 那么

$$
\begin{aligned}
r(A+B)&=r(\alpha_1+\beta_1,\cdots,\alpha_n+\beta_n)\\
&\leqslant r(\alpha_1,\cdots,\alpha_n,\beta_1,\cdots,\beta_n)\\
&\leqslant r(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)+r(\beta_1,\cdots,\beta_n)\\
&=r(A)+r(B)
\end{aligned}
$$

因此得证.

四、设 A, B 都是 $s \times n$ 矩阵. 证明:$\text{rank}(A+B) \leqslant \text{rank}(A) + \text{rank}(B)$.

证明: 设 $A = [\alpha_1, \cdots, \alpha_n], B = [\beta_1, \cdots, \beta_n]$, 进而 $A + B = [\alpha_1 + \beta_1, \cdots, \alpha_n + \beta_n]$, 因为 $\alpha_1 + \beta_1, \cdots, \alpha_n + \beta_n$, 可以被 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n, \beta_1, \cdots, \beta_n$ 线性表出, 那么

$$\begin{aligned} r(A+B) &= r(\alpha_1 + \beta_1, \cdots, \alpha_n + \beta_n) \\ &\leqslant r(\alpha_1, \cdots, \alpha_n, \beta_1, \cdots, \beta_n) \\ &\leqslant r(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) + r(\beta_1, \cdots, \beta_n) \\ &= r(A) + r(B) \end{aligned}$$

因此得证.

①: 常见的秩不等式,A为 $m \times n$阶矩阵,B为 $n \times s$阶矩阵,

$$r(A) \leqslant \min(m, n), \quad r(AB) \leqslant \min\{r(A), r(B)\}$$

$$|r(A) - r(B)| \leqslant r(A \pm B) \leqslant r([A, B]) \leqslant r(A) + r(B)$$

②: 常见的秩等式: 同上记号,P为 m阶方阵,Q为 n阶方阵,

$$r(A) = r(PA) = r(AQ) = r(PAQ)$$

$$*\text{若}A\text{为实数矩阵, 那么}r(A) = r(A^T) = r(AA^T) = r(A^TA)$$

$$r(A^*), r(A)\text{的关系见上文}$$

③更强的结论: 任意矩阵左乘列满秩矩阵或右乘行满秩矩阵后秩不变 (74 页第六题)

五、设 $A=\alpha\alpha^T+\beta\beta^T$, 其中 α,β是 3维列向量. 证明:

1.$r(A)\leqslant 2$;

五、设 $A=\alpha\alpha^T+\beta\beta^T$, 其中 α,β是 3维列向量. 证明:
1.$r(A)\leqslant 2$;

证明: 由

$$\begin{aligned} r(A) &= r(\alpha\alpha^T+\beta\beta^T) \\ &\leqslant r(\alpha\alpha^T)+r(\beta\beta^T) \\ &\leqslant r(\alpha)+r(\beta) \\ &\leqslant 1+1=2 \end{aligned}$$

因此得证.

五、设 $A=\alpha\alpha^T+\beta\beta^T$, 其中 α,β是 3维列向量. 证明:
2. 若 α,β线性相关, 则 $r(A)<2$.

五、设 $A=\alpha\alpha^T+\beta\beta^T$, 其中 α,β是 3维列向量. 证明:
2. 若 α,β线性相关, 则 $r(A)<2$.

证明: 由题意有 $x\alpha+y\beta=0$, 其中 α,β不全为零, 不妨设 $x\neq 0$, 此即存在 k使得 $\alpha=k\beta$, 因此

$$A=(k\beta)(k\beta)^T+\beta\beta^T=(1=k^2)\beta\beta^T$$

进而得到

$$r(A)=r((1+k^2)\beta\beta^T)\leqslant r(\beta\beta^T)\leqslant r(\beta)\leqslant 1<2$$

因此得证.

六、设 A为 3阶矩阵,$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$为 3维列向量组, 若 $A\alpha_1, A\alpha_2, A\alpha_3$线性无关, 证明:$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性无关, 且 A为可逆矩阵.

六、设 A为 3阶矩阵,$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$为 3维列向量组, 若 $A\alpha_1,A\alpha_2,A\alpha_3$线性无关, 证明:$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关, 且 A为可逆矩阵.

证明: 由

$$\begin{aligned}3 = r([A\alpha_1,A\alpha_2,A\alpha_3]) &= r(A[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]) \\ &\leqslant r([\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]) \leqslant 3\end{aligned}$$

此即表示 $r([\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]) = r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3) = 3$, 因此即 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关. 另一方面, 由上还可以得到

$$3 = r([A\alpha_1,A\alpha_2,A\alpha_3]) = r(A[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]) \leqslant r(A) \leqslant 3$$

因此也得到了 $r(A) = 3$, 即 A可逆.