# 线性代数第六次作业

2024年4月14日

#### 行列式的性质与 计算(二)

二、选择额

#### 综合练习(一)

# 本次作业

## 《线性代数习题册 (第三版)》

- 39 ~ 42页: 行列式的性质与计算 (二)
- 43 ~ 46页: 综合练习(一)

#### 日录

#### 行列式的性质与 计算 (二)

一、填空题

二、选择题

\_\_、选择》 =

五

五六

七八

....

#### 综合练习(一)

\_ = =

四五六

七八

九

# 习题答案会上传至 github 中.



图: github 链接二维码

1. 设  $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ,则 A的伴随矩阵  $A^* = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ ,  $(A^*)^* = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 

1. 设 
$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$
,则  $A$ 的伴随矩阵  $A^* = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ ,  $(A^*)^* = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 

解: 伴随矩阵  $A^*$ 的 (i,j)元为原矩阵 A中 (j,i)元的<mark>代数</mark>余子式, 因此 得到

$$A^* = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

 $(A^*)^*$ 同理计算后即可.

注: 只有二阶矩阵伴随矩阵的伴随矩阵为自身, 更高阶则不一定, 如

$$B = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{bmatrix}, B^* = \begin{bmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & 1 \end{bmatrix}, (B^*)^* = 0$$

## 综合练习(一)

2. 设 
$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$
,则  $A$ 的伴随矩阵  $A^* = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$ 

2. 设 
$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$
,则  $A$ 的伴随矩阵  $A^* = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$ 

解: 按照伴随矩阵的定义进行计算即可.

行列式的性质与 计算(二)

一、填空器

二、选择题

四五六七

综合练习(一)

· 一二三四五六七:

设 A为 3阶方阵,A\*是 A的伴随矩阵, 常数  $k \neq 0, k \neq \pm 1$ , 则  $(kA)^* = (C)$ .

A.  $k^{-1}A^*$  B.  $kA^*$ C.  $k^2A^*$  D.  $k^3A^*$ 

注: 伴随矩阵基本性质 (重要性由高到低)

$$AA^* = A^*A = |A|I, \quad (AB)^* = B^*A^*$$
  $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}(A$ 可逆),  $(A^*)^T = (A^T)^*$   $(\underline{k}A)^* = \underline{k}^{n-1}\underline{A}^*, \quad |A^*| = |A|^{n-1}(n$ 为阶数)

设 A为 3阶方阵,A\*是 A的伴随矩阵, 常数  $k \neq 0, k \neq \pm 1$ , 则  $(kA)^* = (C).$ 

A.  $k^{-1}A^*$  B.  $kA^*$ 

C.  $k^2 A^*$  D.  $k^3 A^*$ 

注: 伴随矩阵基本性质 (重要性由高到低)

$$AA^* = A^*A = |A|I, \quad (AB)^* = B^*A^*$$
  $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}(A$ 可逆),  $(A^*)^T = (A^T)^*$   $(\underline{k}A)^* = \underline{k}^{n-1}\underline{A}^*, \quad |A^*| = |A|^{n-1}(n$ 为阶数)

解一: 直接由伴随矩阵性质 (划线公式) 得到.

解二: 由伴随矩阵乘法公式得到.

$$(kA)^* = [(kI)A]^*A^*(kI)^* = A^*l(k^{n-1}I) = k^{n-1}A^*$$

```
行列式的性质与
计算 (二)
```

一、填空題 二、选择題

四

## 八

#### 综合练习(一)

35 一二三四五六

## 三、

1. 设  $A^*$ 是 n阶矩阵 A的伴随矩阵, 若  $|A| \neq 0$ ,证明: $|A^*| \neq 0$ , $|A^*| = |A|^{n-1}$ ;

## 三、

1. 设  $A^*$ 是 n阶矩阵 A的伴随矩阵, 若  $|A| \neq 0$ ,证 明: $|A^*| \neq 0, |A^*| = |A|^{n-1}$ ;

证明: 由  $AA^* = |A|I$ , 两边同时作行列式, 即  $|A||A^*| = ||A|I| = |A|^n \Rightarrow |A^*| = |A|^{n-1}$ 

故得证.

行列式的性质与 计算(二)

一、填空题

二、选择题

四 五

#### 综合练习(一)

# 三、

2. 如果 |A| = 5, 计算  $|2(A^*)^{-1}|$ .

行列式的性质与 计算(二)

一、填空题

二、选择题 四 五

### 综合练习(一)

## 三、

2. 如果 |A| = 5, 计算  $|2(A^*)^{-1}|$ .

解:

$$|2(A^*)^{-1}| = 2^n |(A^*)^{-1}| = 2^n |(A^{-1})^*|$$

$$= 2^n |A^{-1}|^{n-1}$$

$$= 2^n \left(\frac{1}{|A|}\right)^{n-1}$$

$$= \frac{2^n}{5^{n-1}}$$

#### 行列式的性质与 计算(二)

一、填空题

二、选择题

五

#### 综合练习(一)

## 四、求下列矩阵的逆矩阵

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \\ -1 & 2 & -4 \end{bmatrix}$$

## (设此矩阵为 A)

## 四、求下列矩阵的逆矩阵

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \\ -1 & 2 & -4 \end{bmatrix}$$

## (设此矩阵为 A)

解一: 使用初等行变换  $(A\ I) \rightarrow (I\ A^{-1})$ , 此处略.

解二: 利用伴随矩阵, 先求伴随矩阵 A\*, 按照定义得到

$$A^* = \begin{bmatrix} -4 & 2 & -1 \\ 4 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

再有  $AA^* = |A|I = I$ 得到  $A^{-1} = A^*$ , 即逆矩阵

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -4 & 2 & -1 \\ 4 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

行列式的性质与 计算(二)

一、填空题 二、选择额

五

六 t

Л

## 综合练习(一)

三四四

五、设
$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, A^T (BA^{-1} - I)^T X = B^T,$$
求 $X$ .

## 综合练习(一)

求 X.

$$C = BA^{-1}$$

解:A, B都是上三角矩阵且对角元非零, 因此可逆, 进而化简方程. 令

$$\Leftrightarrow (BA^{-1} - I)^T X = (A^T)^{-1} B^T = (A^{-1})^T B^T = (BA^{-1})^T$$

$$\Leftrightarrow X = [(BA^{-1} - I)^T]^{-1}(BA^{-1})^T = [(C - I)^T]^{-1}C^T$$

$$\Leftrightarrow X = [(C - I)^{-1}]^T C^T = [C(C - I)^{-1}]^T$$

$$\Leftrightarrow X = [(C - I)^{-1}]^{*}C^{*} = [C(C - I)^{-1}]^{*}$$

$$\Leftrightarrow X = [(C^{-1})^{-1}(C-I)^{-1}]^T = \{[(C-I)C^{-1}]^{-1}\}^T = [(I-C^{-1})^{-1}]^T$$

五、设 $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, A^T(BA^{-1} - I)^TX = B^T,$ 

至此我们只需要先计算  $C^{-1} = (BA^{-1})^{-1} = AB^{-1}$ , 即对  $\begin{bmatrix} B \\ A \end{bmatrix}$ 作初等 列变换.

## 解:(接上文) 计算 $C^{-1} = AB^{-1}$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ \frac{0}{1} & -\frac{0}{1} & -\frac{2}{0} \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \cdots \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{0}{1/2} & -\frac{0}{3/4} & -\frac{1}{3/8} \\ 0 & 1/2 & -3/4 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

因此

$$I - C^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 3/4 & 3/8 \\ 0 & 1/2 & 3/4 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

再求逆  $(I-C^{-1})^{-1}$ , 求其伴随矩阵即

$$(I - C^{-1})^{-1} = \frac{1}{|I - C^{-1}|} (I - C^{-1})^* = 8(I - C^{-1})^* = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 3 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow X = [(I - C^{-1})^{-1}]^T = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 0 \\ 3 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

行列式的性质与 计算(二)

一、填空题

二、选择题

## 综合练习(一)

六、设 n(n > 2)阶非零实数矩阵 A满足: $A^* = A^T$ , 试证:|A| = 1, 且 A是正交矩阵, 即  $A^TA = AA^T = I$ .

这样我们可得到  $|A|^{n-2} = 1, |A|$  必定为实数 (因为 A为实数矩阵), 但 可能为-1, 还需要证明:

> ②证明 |A| = 1. 因为  $AA^{T} = AA^{*} = |A|I$ , 其中  $AA^{T}$ 的对角元为  $a_{i1}^2 + a_{i2}^2 + \cdots + a_{in}^2 \ge 0$ , 因此 |A|I的对角元  $|A| \ge 0$ 成立, 即

 $|A| \neq 0$ .

 $|A|^{n-2} = 0$ 必定得到 |A| = 1.

②证明  $AA^T = I$ , 即由  $AA^T = AA^* = |A|I = I$ 即可得证, 这表示

A是正交矩阵, 即  $A^TA = AA^T = I$ .

时 |A|可能为 0, 需要进一步讨论:

 $A, A^T$ 互逆, 因此  $A^T A = I$ 也成立.

六、设 n(n > 2)阶非零实数矩阵 A满足: $A^* = A^T$ , 试证:|A| = 1, 且

证明: 对  $A^* = A^T$ 两边作行列式, 得到  $|A^*| = |A|^{n-1} = |A^T| = |A|$ , 此

①断言  $|A| \neq 0$ ,(反证法) 否则若 |A| = 0, 那么对等式左乘 A得到  $AA^* = AA^T$ , 另一方面也有  $AA^* = |A|I = 0 \Rightarrow AA^T = 0$ , 结合 A为实

数矩阵, 可得 A=0从而推出矛盾 (23 页第五题结论), 因此得到

计算(二) 一、填空题

二、选择题

六

## 综合练习(一)

七、利用 |AB| = |A||B|计算下列行列式.

 $|1 + x_1y_1 \quad 1 + x_1y_2 \quad \cdots \quad 1 + x_1y_n|$  $1 + x_2y_1$   $1 + x_2y_2$  ···  $1 + x_2y_n$ 

 $1+x_ny_1$   $1+x_ny_2$   $\cdots$   $1+x_ny_n$ 

线性代数第六次 作业

目录 行列式的性质!

计算 (二) 一、填空题 二、选择题 三 四

八

综合练习(一)

综合练习 — 二 三 三

七、利用 |AB| = |A||B|计算下列行列式.

1. 
$$\begin{vmatrix} 1 + x_1y_1 & 1 + x_1y_2 & \cdots & 1 + x_1y_n \\ 1 + x_2y_1 & 1 + x_2y_2 & \cdots & 1 + x_2y_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 + x_ny_1 & 1 + x_ny_2 & \cdots & 1 + x_ny_n \end{vmatrix}$$

解: 关键在于找到合适的 A, B相乘为要求的矩阵, 观察其中每个元哪 些和该行行标相同, 哪些和列标相同.

因为其中 (i,j)元为  $1 + x_i y_j = [1,x_i] \begin{bmatrix} 1 \\ y_j \end{bmatrix}$ , 因此可以得到

原式 = 
$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & x_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & x_3 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ y_1 & y_2 & y_3 & \cdots & y_n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

当 n > 2时,两个行列式都有一行或一列全为零,因此 |AB| = 0;

当 
$$n = 1$$
时, $|AB| = 1 + x_1y_1$ ;  $n = 2$ 时, $|AB| = \begin{vmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} = (x_2 - x_1)(y_2 - y_1)$ 

行列式的性质与

二、选择额

综合练习(一)

七、利用 |AB| = |A||B|计算下列行列式.

$$2. \begin{vmatrix} \frac{1-a_{1}^{n}b_{1}^{n}}{1-a_{1}b_{1}} & \frac{1-a_{1}^{n}b_{2}^{n}}{1-a_{1}b_{2}} & \cdots & \frac{1-a_{1}^{n}b_{n}^{n}}{1-a_{1}b_{n}} \\ \frac{1-a_{1}^{n}b_{1}^{n}}{1-a_{2}b_{1}} & \frac{1-a_{2}^{n}b_{2}^{n}}{1-a_{2}b_{2}} & \cdots & \frac{1-a_{2}^{n}b_{n}^{n}}{1-a_{2}b_{n}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1-a_{n}^{n}b_{1}^{n}}{1-a_{n}b_{1}} & \frac{1-a_{n}^{n}b_{2}^{n}}{1-a_{n}b_{2}} & \cdots & \frac{1-a_{n}^{n}b_{n}^{n}}{1-a_{n}b_{n}} \end{aligned}$$

注: 和第一题一样, 我们也希望将每个元化为行列的交叉乘积之和, 由公式

$$(1 - x^n) = (1 - x)(1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1})$$

即可得到

$$\frac{1 - a_i^n b_j^n}{1 - a_i b_i} = 1 + a_i b_j + a_i^2 b_j^2 + \dots + a_i^{n-1} b_j^{n-1}$$

每个元变为向量的乘积  $[1, a_i, a_i^2, \cdots, a_i^{n-1}]$   $[1, b_i, b_i^2, \cdots, b_i^{n-1}]^T$ .

行列式的性质与 计算(二)

二、选择额

#### 综合练习(一)

解: 因为

原式 = 
$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ 1 & a_3 & a_3^2 & \cdots & a_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ b_1 & b_2 & b_3 & \cdots & b_n \\ b_1^2 & b_2^2 & b_3^2 & \cdots & b_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_1^{n-1} & b_2^{n-1} & b_3^{n-1} & \cdots & b_n^{n-1} \end{vmatrix}$$
$$= \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (a_j - a_i)(b_j - b_i)$$

其中用到了范德蒙行列式的结论.

行列式的性质与 计算(二) 一、填空题

二、选择题

六

### 综合练习(一)

 $|\lambda - 4| -5$  2 八、求行列式  $2 \lambda + 2 -1$  的值. 1  $\lambda - 1$ 

八、求行列式 
$$\begin{vmatrix} \lambda-4 & -5 & 2 \\ 2 & \lambda+2 & -1 \\ 1 & 1 & \lambda-1 \end{vmatrix}$$
的值.

## 解: 直接计算即可 (当然可以使用变换化简计算)

$$\begin{vmatrix} \lambda - 4 & -5 & 2 \\ 2 & \lambda + 2 & -1 \\ 1 & 1 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 4)(\lambda + 2)(\lambda - 1) + 5 + 4$$
$$-2(\lambda + 2) + (\lambda - 4) + 10(\lambda - 1)$$
$$= \lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1$$
$$= (\lambda - 1)^3$$

行列式的性质与 计算 (二)

一、填空題二、选择題三

四五六

七八

#### 综合练习(一)

二三四五六七八

# 一、设 A为 3阶方阵, $A^*$ 是 A的伴随矩阵, $|A| = \frac{1}{8}$ , 求 $\left| \left( \frac{1}{3}A \right)^{-1} - 8A^* \right|$ .

注: 行列式没有和差公式, 即一般情况下  $|A \pm B| \neq |A| \pm |B|$ .

行列式的性质与

一、填空題 二、选择題 三 四 五

综合练习(一)

二三四五六七八九

# 一、设 A为 3阶方阵, $A^*$ 是 A的伴随矩阵, $|A|=\frac{1}{8}$ , 求 $\left|\left(\frac{1}{3}A\right)^{-1}-8A^*\right|$ .

注: 行列式没有和差公式, 即一般情况下  $|A\pm B|\neq |A|\pm |B|$ . 解:

$$\left| \left( \frac{1}{3}A \right)^{-1} - 8A^* \right| = \frac{|A|}{|A|} \left| \left( \frac{1}{3}A \right)^{-1} - 8A^* \right|$$

$$= \frac{1}{|A|} \left| A \left( \frac{1}{3}A \right)^{-1} - 8AA^* \right|$$

$$= 8 \left| A \left( 3A^{-1} \right) - 8A^* \right|$$

$$= 8 \left| 3I - 8|A|I|$$

$$= 8|2I|$$

$$= 8 \times 2^3$$

$$= 64$$

```
行列式的性质与
计算(二)
```

二、选择题

#### 综合练习(一)

二、设 A是 n阶矩阵, 满足  $AA^T = I(I \in n)$  单位阵, A为正交 阵),|A| < 0, 求 |A + I|.

行列式的性质与 计算 (二)

一、填空題二、选择題三

一三四五六七

综合练习(一)

一二三四五六七八九

二、设 A是 n阶矩阵, 满足  $AA^T = I(I \in n$ 阶单位阵,A为正交阵),|A| < 0, 求 |A + I|.

解: 因为 
$$AA^T = I$$
, 那么也有  $A^TA = I$ . 另外由 
$$|A + I| = \frac{|A^T|}{|A|}|A + I|$$
 
$$= \frac{1}{|A|}|A^TA + A^T| = \frac{1}{|A|}|I + A^T|$$
 
$$= \frac{1}{|A|}|(I + A^T)^T| = \frac{1}{|A|}|A + I|$$

即可得到

$$\left(1 - \frac{1}{|A|}\right)|A + I| = 0$$

其中 1-1/|A| > 0, 因此得到 |A+I| = 0.

```
行列式的性质与
计算 (二)
```

一、填空題 二、选择題 一

二、选择超三

五六七

## 八 综合练习(**一**)

```
_
=
=
```

四五六

七八九

	0	0	 0	1	0
	0	0	 $\frac{1}{2}$	0	0
三、设 $n$ 阶行列式 $ A =$	:	:	:	:	: , 求  A 中所有元
	$\begin{bmatrix} \frac{1}{n-1} \\ 0 \end{bmatrix}$	0	 0	0	0
	0	0	 0	0	$\frac{1}{n}$
主ル粉人フサンエ					

素代数余子式之和.

行列式的性质与

一、填空题 二、选择题 =

三四五、

Л (\*\* ^ (\* = )

综合练习(一)

三三四四

四五六七八

三、设 n阶行列式  $|A|=\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{n-1} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \frac{1}{n} \end{vmatrix}$ ,求 |A|中所有元

素代数余子式之和.

解: 由之前的习题可知, 某一行的代数余子式之和  $A_{i1} + \cdots + A_{in}$ 即 将原行列式第 i行全部换为 1的行列式. 即

注意到除第 k行外其余行都只有一个非零元, 由行列式的定义可知

$$\sum_{j=1}^{m} A_{ij} = (-1)^{\tau(n-1,n-2,\cdots,1,n)} \frac{k}{n!}$$

行列式的性质与 计算 (二)

(一)一、填空題二、选择題

四五六

七八

#### 综合练习(一)

Ξ

五六

七八九

## 解:(接上文)

$$\sum_{j=1}^{m} A_{ij} = (-1)^{\tau(n-1,n-2,\dots,1,n)} \frac{k}{n!}$$
$$= (-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} \frac{k}{n!}$$

即得

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} A_{ij} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} \frac{k}{n!}$$

$$= (-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} \frac{1}{n!} \cdot \frac{n(n+1)}{2}$$

$$= (-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} \frac{n+1}{2(n-1)!}$$

```
行列式的性质与
```

计算(二)

一、填空题

二、选择题

## 综合练习(一)

四

五

四、设A,B是正交矩阵,且 $\frac{|A|}{|B|}=-1$ ,证明:|A+B|=0.

行列式的性质与 计算 (二)

一、填空题 二、选择题 三 四

综合练习(一)

\_

三三四四

五六七八九

四、设 A, B是正交矩阵, 且  $\frac{|A|}{|B|} = -1$ ,证明:|A + B| = 0.

证明:由

$$|A + B| = \frac{|A|}{|B|} |A + B| \frac{|B|}{|A|}$$

$$= \frac{|A^T|}{|B|} |A + B| \frac{|B^T|}{|A|}$$

$$= \frac{1}{|A||B|} |A^T (A + B) B^T|$$

$$= \frac{1}{|A||B|} |B^T + A^T|$$

$$= \frac{1}{|A||B|} |A + B|$$

即得到

$$\left(1 - \frac{1}{|A||B|}\right)|A + B| = 0$$

因为 |A|/|B| = -1, 可知 |A|, |B|异号, 进而 1 - 1/(|A||B|) > 0, 得到 |A + B| = 0.

```
行列式的性质与
计算(二)
一、填空题
二、选择题
```

### 综合练习(一)

三四四

六

五、设矩阵 
$$A$$
的伴随矩阵  $A^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 8 \end{bmatrix}$ ,且  $ABA^{-1} = BA^{-1} + 3I$ , $I$ 为  $4$ 阶单位阵,求矩阵  $B$ .

行列式的性质与 计算(二)

二、选择额

# 综合练习(一)

五、设矩阵 
$$A$$
的伴随矩阵  $A^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 8 \end{bmatrix}$ ,且  $ABA^{-1} = BA^{-1} + 3I$ ,  $I$ 为  $4$ 阶单位阵,求矩阵  $B$ .

解: 先化简方程, $(A-I)BA^{-1}=3I\Rightarrow (A-I)B=3A$ , 对等式两端左 乘  $A^*$ , 得到  $(A^*A - A^*)B = 3A^*A$ , 即

$$(|A|I - A^*)B = 3|A|I \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -6 \end{bmatrix} B = 9I$$

注意此时  $8I - A^*$ 不可逆, 需要使用初等行变换求解, 即

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -6 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

行列式的性质与 计算(二)

二、选择额

## 综合练习(一)

六

五、设矩阵 
$$A$$
的伴随矩阵  $A^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 8 \end{bmatrix}$ ,且  $ABA^{-1} = BA^{-1} + 3I$ , $B$  4阶单位阵,求矩阵  $B$ .

解:(接上文)

因此可知

$$B = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

```
行列式的性质与
计算(二)
```

二、选择题

综合练习(一)

六、设 n阶矩阵 A可逆  $(n \ge 2)$ ,  $A^*$ 是 A的伴随矩阵, 求  $(A^*)^*$ 与 A的 关系.

行列式的性质与 计算(二)

二、选择额

综合练习(一)

七

六、设 n阶矩阵 A可逆  $(n \ge 2)$ ,  $A^*$ 是 A的伴随矩阵, 求  $(A^*)^*$ 与 A的 关系.

解: 由 
$$A^*(A^*)^* = |A^*|I = |A|^{n-1}I$$
和  $AA^* = |A|I$ 得到 
$$(A^*)^* = |A|^{n-1}(A^*)^{-1} = |A|^{n-1}(|A|A^{-1})^{-1}$$
 
$$= |A|^{n-1}(A^{-1})^{-1}(|A|I)^{-1}$$
 
$$= |A|^{n-1}A\left(\frac{1}{|A|}I\right) = |A|^{n-2}A$$

注: 若 A不可逆时. 需要根据 n的阶数来看. 即

$$(A^*)^* = \begin{cases} 0, n > 2\\ A, n = 2 \end{cases}$$

即 n=2时可逆与否都不影响  $(A^*)^*=A$ .

```
行列式的性质与
计算 (二)
一、填空题
二、选择题
=
```

一、填空 二、选择 三 四 五

七 八

#### 综合练习(一)

二 三 四

四五六

九

七、A是 n阶方阵, 满足  $A^m = I(m$ 为正整数), I为 n阶单位阵, 现将 A中  $n^2$ 个元素  $a_{ij}$ 用其代数余子式  $A_{ij}$ 代替, 得到的矩阵记为 B, 证 明: $B^m = I$ .

#### 日录

#### 行列式的性质与 计算 (二)

一、填空题二、选择题三

#### ハ 综合练习(一)

# - 年

一二三四五六

七八九

七、A是 n阶方阵, 满足  $A^m = I(m$ 为正整数), I为 n阶单位阵, 现将 A中  $n^2$ 个元素  $a_{ij}$ 用其代数余子式  $A_{ij}$ 代替, 得到的矩阵记为 B, 证 明: $B^m = I$ .

解: 由题意不难知道  $B = (A^*)^T$ . 另一方面, 对 A''' = I两段作伴随得到

$$(A^m)^* = I^* \Rightarrow (A^*)^m = I$$

再对等式两边作转置得到

$$[(A^*)^m]^T = I^T \Rightarrow [(A^*)^T]^m = I$$

此即  $B^m = I$ , 即得证.

```
行列式的性质与
计算 (二)
一、填空题
二、选择题
三
```

八

#### 综合练习(一)

\_ = =

三四五

六七

九

八、证明: 奇数阶反对称阵的行列式等于零.

行列式的性质与 计算(二) 二、选择额

#### 综合练习(一)

# 八、证明: 奇数阶反对称阵的行列式等于零.

证明: 设 A为 2n+1阶矩阵, 满足  $A^T=-A$ , 两端作行列式, 得到

$$|A|^T = |-A| \Rightarrow |A| = (-1)^{2n+1}|A| = -|A| \Rightarrow |A| = 0$$

因此得证.

### 综合练习(一)

九、设  $f(x) = \begin{vmatrix} 3-x & 5-3x^2 & 3x^2-1 \\ 2x^2-1 & 3x^5-1 & 7x^8-1 \end{vmatrix}$ , 证明: 存在一个小于 1的 正数  $\xi$ , 使得  $f'(\xi) = 0$ .

行列式的性质与 计算(二)

二、选择额

## 综合练习(一)

九、设  $f(x) = \begin{vmatrix} 3-x & 5-3x^2 & 3x^2-1 \\ 2x^2-1 & 3x^5-1 & 7x^8-1 \end{vmatrix}$ , 证明: 存在一个小于 1的

证明: 因为 f(x)为多项式, 故可导, 且有

正数  $\xi$ , 使得  $f'(\xi) = 0$ .

$$f(1) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \end{vmatrix}, \ f(0) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

因此由罗尔定理存在  $\xi \in (0,1)$  使得  $f'(\xi) = 0$ , 即得证.

```
行列式的性质与
计算(二)
```

```
二、选择题
```

# 综合练习(一)

# 十、计算元素为 $a_{ij} = |i - j|$ 的 n阶行列式.

注: 类似与平移的行列式可以采用相邻行 (列) 相减的方法.

行列式的性质与

一、填空題二、选择題三

三四五六七八

综合练习(一)

\_ \_ \_

二三四五六七八九

# 十、计算元素为 $a_{ii} = |i - j|$ 的 n阶行列式.

注: 类似与平移的行列式可以采用相邻行 (列) 相减的方法. 解: 将此行列式表示出来

 $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & n-2 \\ 2 & 1 & 0 & & n-3 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n-1 & n-2 & n-3 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$ 

将第 2行 -1倍加到第 1行, 然后将第 3行 -1倍加到第 2行, 不断重复直至将第 n行 -1倍加到第 n-1行得到

再重复上述行变换, 只是不需要第 n行的 -1倍加到第 n-1行,

# 综合练习(一)

得到

此时再按照行列式的定义, 此时前 n-2行只能取 2, 最后一列只能 取 1. 进而第一列只能取 n-1. 因此此行列式的值为

$$(-1)^{\tau(n,1,2,\cdots,n-1)}(n-1)2^{n-2} = (-1)^{n-1}(n-1)2^{n-2}$$