线性代数第九次作业

2024年5月19日

综合练习(二) 一、填空题 二、选择题

本次作业

半期考试

《线性代数习题册 (第三版)》

- 63 ~ 70页: 线性方程组
- 71 ~ 76页: 综合练习(二)

2023-2024 学年 第2学期半期考 试试题

一、填空题

线性方程组

一、填空题

二、选择题

+Ξ

综合练习(二)

一、填空题 二、选择题

习题答案会上传至 github 中.



图: github 链接二维码

线性方程组

一、填空额 二、选择额

综合练习(二)

二、选择题

·<u>、</u>填空题

1.
$$\mathbf{\mathcal{U}} A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 9 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

 $,M_{ij}$ 为矩阵 A的第 i行第 j列元素的余子

式,i, j = 1, 2, 3, 4, 则 $8M_{13} - 27M_{23} - M_{33} + 8M_{43} = 240$.

注: 考察行列式按行(列)展开的逆运算,同 31 页第 4 题和 43 页第 三题.

线性方程组

二、选择额

综合练习(二)

一、洗择額

-、填空颢

1.
$$\mathfrak{P} A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 9 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

1. 设 $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 9 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$, M_{ij} 为矩阵 A的第 i行第 j列元素的余子

式,i, j = 1, 2, 3, 4, 则 $8M_{13} - 27M_{23} - M_{33} + 8M_{43} = 240$.

注: 考察行列式按行 (列) 展开的逆运算, 同 31 页第 4 题和 43 页第 一题

解: 若设 Aii 为矩阵 A的第 i行第 j列元素的代数余子式, 那么可得

$$A_{13}=M_{13},\;A_{23}=-M_{23},\;A_{33}=M_{33},\;A_{43}=-M_{43}$$

因此.

 $8M_{13} - 27M_{23} - M_{33} + 8M_{43} = 8A_{13} + 27A_{23} - A_{33} - 8A_{43}$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 8 & 4 \\ 1 & 3 & 27 & 9 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -8 & 4 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 4 & -8 \end{vmatrix}$$

范德蒙行列式 -[-2-(-1)](-2-3)(-2-2)(-1-3)(-1-2)(3-2)

= 240

线性代数第九次 作业

目录

2023-2024 学年 第 2 学期半期考 试试题

一、填空额

三四五、

五六七

线性方程组

一、填空题 二、选择题

三四

五六

六七八九

カ + +-+ニ

综合练习(二) 一、填空题

二、选择题

五六

一、填空题

2. 已知非零的 n维向量 $\alpha=(c,0,\cdots,0,c)^T$,I为 n阶单位矩阵. 矩阵 $A=I-\alpha\alpha^T$ 的逆矩阵为 $B=I+c^{-1}\alpha\alpha^T$,则 $c=\frac{1}{2}$ 或 -1.

注: $I - k\alpha\alpha^T$ 型的计算涉及矩阵乘法的结合律, 和系数前提的技巧, 同 131 页第 2 题.

2023-2024 学年 第 2 学期半期考 试试题

一、填空题

二三四五六

线性方程组

一、填空题 二、选择题

三 四 五 ÷

ハ七八九十十

综合练习(二)

一、填空題二、选择题三四

一、填空题

2. 已知非零的 n维向量 $\alpha=(c,0,\cdots,0,c)^T$,I为 n阶单位矩阵. 矩阵 $A=I-\alpha\alpha^T$ 的逆矩阵为 $B=I+c^{-1}\alpha\alpha^T$,则 $c=\frac{1}{2}$ 或 -1.

注: $I - k\alpha\alpha^T$ 型的计算涉及矩阵乘法的结合律, 和系数前提的技巧, 同 131 页第 2 题.

解: 由题意可知 AB = I, 即

$$I = AB = (I - \alpha \alpha^{T})(I - c^{-1}\alpha \alpha^{T})$$

$$= I - \left(\frac{1}{c} + 1\right)\alpha \alpha^{T} + \frac{1}{c}\alpha(\alpha^{T}\alpha)\alpha^{T}$$

$$= I + \left(\frac{\alpha^{T}\alpha}{c} - \frac{1}{c} - 1\right)\alpha \alpha^{T}$$

$$= I + \frac{2c^{2} - c - 1}{c}\alpha \alpha^{T}$$

由于 $\alpha \alpha^T \neq 0, c > 0$, 得到 $2c^2 - c - 1 = 0$ 解得

$$c = \frac{1}{2}, -1$$

即为所求.

2023-2024 学年 第2学期半期考 试试题

一、填空额

线性方程组

一、填空额 二、选择额

综合练习(二) 二、选择额

-、填空题

3. 已知
$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
, 三阶方阵 A 满足
$$(Q^T)^*AQ^2 = \begin{bmatrix} a - 2c & 0 & -c \\ 0 & b & 0 \\ 2c & 0 & c \end{bmatrix}, \, \text{则 } A = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}.$$

注: 考察初等矩阵的计算和意义, 即左 (右) 乘初等矩阵相当于作初 等行 (列) 变换.

2023-2024 学年

线性方程组

二、选择额

综合练习(二)

洗择题

一、填空颢

3. 已知
$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
, 三阶方阵 A 满足
$$(Q^T)^*AQ^2 = \begin{bmatrix} a - 2c & 0 & -c \\ 0 & b & 0 \\ 2c & 0 & c \end{bmatrix}, \, \text{则 } A = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}.$$

注: 考察初等矩阵的计算和意义, 即左 (右) 乘初等矩阵相当于作初 等行 (列) 变换.

解: 由题意可知 Q = E(3, 1(1)), 直接计算得到

 $Q^2 = E(3,1(2)), Q^T = E(1,3(1)),$ 进而得到

$$(Q^T)^* = |Q^T|(Q^T)^{-1} = 1 \times E(1, 3(-1)) = E(1, 3(-1)) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

所以 $[(Q^T)^*]^{-1} = E(1,3(1)), (Q^2)^{-1} = E(3,1(-2)),$ 故

$$A = [(Q^T)^*]^{-1} \begin{bmatrix} a - 2c & 0 & -c \\ 0 & b & 0 \\ 2c & 0 & c \end{bmatrix} (Q^2)^{-1} = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$$

2023-2024 学年 第2学期半期考 试试题

一、填空题

线性方程组

一、填空额

二、选择额

综合练习(二) 一、填空题

二、选择题

一、填空题

4. 已知 A为 $n(n \ge 2)$ 阶方阵 A满足 $|A| = k \ne 0$, 则 $|(|A^*|A^T)^{-1}|$ 的值 $= k^{n-1-n^2}$.

注: 考察行列式、转置、逆和伴随之间的运算, 同 119 页第 3 题.

2023-2024 学年 第2学期半期老 试试题

一、填空额

线性方程组

二、选择额

综合练习(二)

二、选择额

填空题

4. 已知 A为 $n(n \ge 2)$ 阶方阵 A满足 $|A| = k \ne 0$, 则 $|(|A^*|A^T)^{-1}|$ 的值 $=k^{n-1-n^2}$

注: 考察行列式、转置、逆和伴随之间的运算, 同 119 页第 3 题. 解: 计算得到

$$|(|A^*|A^T)^{-1}| = \frac{1}{||A^*|A^T|} = \frac{1}{|A^*|^n|A^T|}$$
$$= \frac{1}{(|A|^{n-1})^n|A|} = \frac{1}{k^{n^2 - n + 1}}$$
$$= k^{n - 1 - n^2}$$

其中分别使用了性质

 $|B^{-1}| = |B|^{-1}$, $|kB| = k^n |B|$, $|B^*| = |B|^{n-1}$, $|B^T| = |B|$, B为 n阶可逆方 阵.

2023-2024 学年 第2学期半期考 试试题

一、填空额

线性方程组

一、填空额 二、选择额

综合练习(二)

二、选择额

填空题

5. 设方阵
$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}, 则$$

$$|A^{2024}|B^{2024} = 2^{2024} \begin{bmatrix} \cos(2024\theta) & -\sin(2024\theta) \\ \sin(2024\theta) & \cos(2024\theta) \end{bmatrix}.$$

注: 考察方阵幂的计算 (13 页第 3 题) 和行列式的性质 ($|A^n| = |A|^n$).

2023-2024 学年 第2学期半期考 试试题

一、填空额

线性方程组

二、选择额

综合练习(二)

二、选择额

一、填空颢

5. 设方阵
$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$
, 则
$$|A^{2024}|B^{2024} = 2^{2024} \begin{bmatrix} \cos(2024\theta) & -\sin(2024\theta) \\ \sin(2024\theta) & \cos(2024\theta) \end{bmatrix}.$$

注: 考察方阵幂的计算 (13 页第 3 题) 和行列式的性质 ($|A^n| = |A|^n$). 解: 首先直接计算得到 |A|=2, 因此 $|A^{2024}|=|A|^{2024}=2^{2024}$; 另一 方面由归纳法 (先猜测后证明) 不难证明 (我们省略证明)

$$B^{n} = \begin{bmatrix} \cos(n\theta) & -\sin(n\theta) \\ \sin(n\theta) & \cos(n\theta) \end{bmatrix}$$

因此可得

$$|A^{2024}|B^{2024} = 2^{2024} \begin{bmatrix} \cos(2024\theta) & -\sin(2024\theta) \\ \sin(2024\theta) & \cos(2024\theta) \end{bmatrix}$$

2023-2024 学年 第2学期半期考 试试题

一、填空额

线性方程组

一、填空额 二、选择额

综合练习(二)

二、选择额

-、填空题

6. 已知向量组 $\alpha_1 = (-1, 1, 0), \alpha_2 = (a, -1, b), \alpha_3 = (-1, 2, -1)$ 生 成的子空间维数为 2, 则 a, b满足的关系为 a + b = 1.

注: 子空间维数即基的个数, 也即生成所用的向量组的秩,

2023-2024 学年 第2学期半期考 试试题

一、填空额

二、选择额

综合练习(二)

一、洗择額

<u>一、</u>填空题

6. 已知向量组 $\alpha_1 = (-1, 1, 0), \alpha_2 = (a, -1, b), \alpha_3 = (-1, 2, -1)$ 生 成的子空间维数为 2, 则 a, b满足的关系为 a + b = 1.

注: 子空间维数即基的个数. 也即生成所用的向量组的秩. 解: 由题意即 $r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 2$, 因此将其组成矩阵后矩阵的秩也为

$$A := [\alpha_1^T, \alpha_2^T, \alpha_3^T] = \begin{bmatrix} -1 & a & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & b & -1 \end{bmatrix}$$

注意到 A的第 1,3 行第 1,3 列的二阶子式 $\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, 因此 $r(A) \ge 2$, 因此满足题意只需 A不满秩, 即 |A| = 0, 计算可得

a + b - 1 = 0.

2023-2024 学年 第2学期半期考 试试题

一、填空额

二、选择额

综合练习(二) 二、选择额

二、设两个三阶矩阵 A, B按列分块表示为

 $A = [2\alpha_1, 3\alpha_2, \beta], B = [3\alpha_2, \alpha_1, 2\gamma],$ 且两个矩阵的行列式分别为 |A| = 2a, |B| = b.

1. 求行列式 $|[\alpha_1, \alpha_2, \beta]|$ 和 $|[\alpha_1, \alpha_2, \gamma]|$ 的值;

注: 考察行列式计算的性质.

2023-2024 学年 第 2 学期半期考 试试题

一、填空额

三四五六七

线性方程组

一、填空题 二、选择题 =

三四五六七八

八 九 + +— +二 +三

综合练习(二) 一、填空题 二、选择题 三 二、设两个三阶矩阵 A, B按列分块表示为

$$A=[2lpha_1,3lpha_2,eta],B=[3lpha_2,lpha_1,2\gamma]$$
,且两个矩阵的行列式分别为 $|A|=2a,|B|=b$.

1. 求行列式 $|[\alpha_1,\alpha_2,\beta]|$ 和 $|[\alpha_1,\alpha_2,\gamma]|$ 的值;

注: 考察行列式计算的性质.

解: 直接计算可得

$$|A| = |[2\alpha_1, 3\alpha_2, \beta]| = 6|[\alpha_1, \alpha_2, \beta]| = 2a$$

$$|B| = |[3\alpha_2, \alpha_1, 2\gamma]| = -6|[\alpha_1, \alpha_2, 2\gamma]| = b$$

所以可得

$$|[\alpha_1, \alpha_2, \beta]| = \frac{a}{3}, \quad |[\alpha_1, \alpha_2, \gamma]| = -\frac{b}{6}$$

```
线性代数第九次
  作业
```

2023-2024 学年 第2学期半期考 试试题

一、填空额

线性方程组

一、填空额 二、选择额

综合练习(二)

二、选择题

二、设两个三阶矩阵 A, B按列分块表示为

 $A = [2\alpha_1, 3\alpha_2, \beta], B = [3\alpha_2, \alpha_1, 2\gamma],$ 且两个矩阵的行列式分别为

|A| = 2a, |B| = b.

2. 求行列式 |2A - B|的值.

2023-2024 学年 第2学期半期考

一、填空额

线性方程组

二、选择额

综合练习(二) 洗择题

二、设两个三阶矩阵 A, B按列分块表示为

 $A = [2\alpha_1, 3\alpha_2, \beta], B = [3\alpha_2, \alpha_1, 2\gamma],$ 且两个矩阵的行列式分别为 |A| = 2a, |B| = b.

2. 求行列式 |2A - B|的值.

= 14a + 7b

解:

$$\begin{split} |2A-B| &= |2[2\alpha_1,3\alpha_2,\beta] - [3\alpha_2,\alpha_1,2\gamma]| \\ &= |[4\alpha_1 - 3\alpha_2,6\alpha_2 - \alpha_1,2\beta - 2\gamma]| \\ &= |[4\alpha_1 - 3\alpha_2,6\alpha_2 - \alpha_1,2\beta]| - |[4\alpha_1 - 3\alpha_2,6\alpha_2 - \alpha_1,2\gamma]| \\ &= \begin{vmatrix} [\alpha_1,\alpha_2,\beta] & 4 & -1 & 0 \\ -3 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} [\alpha_1,\alpha_2,\gamma] & 4 & -1 & 0 \\ -3 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} \\ &= |[\alpha_1,\alpha_2,\beta]| & \begin{vmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -3 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} - |[\alpha_1,\alpha_2,\gamma]| & \begin{vmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -3 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} \\ &= \frac{a}{3} \times 42 - \left(-\frac{b}{6}\right) \times 42 \end{split}$$

2023-2024 学年 第2学期半期考 试试题

一、填空题

线性方程组

一、填空额

二、选择额

综合练习(二)

二、选择题

三、已知向量组 $\alpha_1 = (-1,1,0,0)^T$, $\alpha_2 = (-1,2,-1,1)^T$, $\alpha_3 =$ $(0, a, b, -1)^T$, $\alpha_4 = (1, -3, 2, 3)^T$.

1. 求向量组的秩和一个极大线性无关组;

2023-2024 学年 第2学期半期考 试试题

一、填空额

二、选择额

综合练习(二) 一、洗择額

三、已知向量组 $\alpha_1 = (-1, 1, 0, 0)^T$, $\alpha_2 = (-1, 2, -1, 1)^T$, $\alpha_3 = (-1, 2, -1, 1)^T$ $(0, a, b, -1)^T$, $\alpha_4 = (1, -3, 2, 3)^T$.

1. 求向量组的秩和一个极大线性无关组:

解: 将列向量组成一个矩阵作初等行变换

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & -3 \\ 1 & 2 & a & 3 \\ 0 & -1 & b & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & a+1 & -5 \\ 0 & 0 & a+b & 0 \end{bmatrix}$$

- ①若 a + b = 0,那么向量组的秩为 3,一个极大线性无关组为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4;$
- ②若 $a+b\neq 0$, 向量组的秩为 4, 一个极大线性无关组为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$.

2023-2024 学年 第2学期半期考

一、填空额

线性方程组

二、选择题

一、填空额

二、选择额

综合练习(二)

三、已知向量组 $\alpha_1 = (-1,1,0,0)^T$, $\alpha_2 = (-1,2,-1,1)^T$, $\alpha_3 =$

2. α3能否由其余向量线性表出? 若能, 请给出线性表出的表达式.

 $(0, a, b, -1)^T$, $\alpha_4 = (1, -3, 2, 3)^T$.

2023-2024 学年 第2学期半期考

一、填空额

二、选择额

综合练习(二) 二、选择额

三、已知向量组 $\alpha_1 = (-1, 1, 0, 0)^T$, $\alpha_2 = (-1, 2, -1, 1)^T$, $\alpha_3 = (-1, 2, -1, 1)^T$ $(0, a, b, -1)^T$, $\alpha_4 = (1, -3, 2, 3)^T$.

2. α_3 能否由其余向量线性表出? 若能, 请给出线性表出的表达式.

解: 由 1 可知, 当 $a+b\neq 0$ 时 α_3 不能由其余向量线性表 出;a + b = 0时 α_3 可以由其余向量线性表出, 此时由

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & a+1 & -5 \\ 0 & 0 & a+b & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1-4a}{5} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3a-2}{5} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{a+1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

即可得到表出表达式

$$\alpha_3 = \frac{1 - 4a}{5}\alpha_1 + \frac{3a - 2}{5}\alpha_2 - \frac{a + 1}{5}\alpha_4$$

2023-2024 学年 第2学期半期考 试试题

一、填空额

五

六

线性方程组

一、填空额 二、选择额

综合练习(二) 二、选择题

四、已知
$$n$$
阶方阵 $H = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$ 和

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1. 将矩阵 A表示成 H的多项式;

注: 考察 H(即前面介绍的 J) 的 n次幂的计算.

2023-2024 学年 第2学期半期考

一、填空额

二、选择额

综合练习(二)

二、选择额

四、已知 n阶方阵 H=

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1. 将矩阵 A表示成 H的多项式:

注: 考察 H(即前面介绍的 J) 的 n次幂的计算. 解: 计算不难得到 $H^{j}(j=0,1,\cdots,n-1)$ 只有 (i,i+j) 元为 1, 其余均 为 0, 且 i > n - 1时 $H^{j} = 0$, 因此立即得到

$$A = I + H + H^2 + \dots + H^{n-1}$$

2023-2024 学年 第2学期半期考 试试题

一、填空额

六

线性方程组

一、填空额

二、选择额

+Ξ

综合练习(二)

一、填空题 二、选择题

四、已知 n阶方阵 H和 A.

2. 求矩阵方程 $AX = I + 2H + 3H^2 + \cdots + nH^{n-1}$ 中的 X.

2023-2024 学年 第2学期半期考 试试题

一、填空额

线性方程组

二、选择额

综合练习(二)

一、洗择額

四、已知 n阶方阵 H和 A.

2. 求矩阵方程 $AX = I + 2H + 3H^2 + \cdots + nH^{n-1}$ 中的 X.

解一: 首先可知 A可逆 (因为是对角元非零的上三角矩阵), 故 X有且 仅有唯一解. 不难得到方程右端矩阵 B为

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \\ 0 & 1 & \cdots & n-2 & n-1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

可知 B可由 A依次作如下初等列变换得到

$$A \xrightarrow{\text{\mathfrak{R}--}\text{\tiny{Mh}}\text{\tiny{Mh}}\text{\tiny{Mh}}\text{\tiny{SL}}\text{\tiny{Mh}}} A_1 \xrightarrow{\text{\mathfrak{R}--}\text{\tiny{Mh}}\text{\tiny{Mh}}\text{\tiny{Mh}}\text{\tiny{SL}}\text{\tiny{Mh}}} A_2 \to \cdots \xrightarrow{\text{\mathfrak{R} $n-1$ Mh}\text{\tiny{Mh}}\text{\tiny{Mh}}\text{\tiny{SL}}\text{\tiny{Nh}}} B$$

因此即

$$AE(1,1(2))E(2,1(3))\cdots E(n-1,1(n))=B=I+2H+3H^2+\cdots+nH^{n-1}$$

得到 X 的唯一解为

$$X = E(1, 1(2))E(2, 1(3)) \cdots E(n-1, 1(n)) = A$$

2023-2024 学年 第2学期半期考 试试题

一、填空题

五 六

线性方程组

一、填空额 二、选择额

+Ξ

综合练习(二) 一、填空题

二、选择题

四、已知 n阶方阵 H和 A.

2. 求矩阵方程 $AX = I + 2H + 3H^2 + \cdots + nH^{n-1}$ 中的 X.

2023-2024 学年 第 2 学期半期考 试试题

一、填空題 二

五六七

线性方程组

一、填空题 二、选择题

三四五六七八

カ + +-+=

综合练习(二) 一、填空題 二、选择題 三 四 四、已知 n阶方阵 H和 A.

2. 求矩阵方程 $AX = I + 2H + 3H^2 + \cdots + nH^{n-1}$ 中的 X.

解二: 由 $H^n = 0$, 因此 $I - H^n = I$, 进而

$$(I-H)(I+H+H^2+\cdots+H^{n-1})=(I-H)A=I$$

因此将原方程等号两边同时左乘 I-H, 得到

$$X = (I - H)(I + 2H + 3H^{2} + \dots + nH^{n-1}) = A$$

2023-2024 学年 第2学期半期考 试试题

一、填空额

六

线性方程组

一、填空额

二、选择额

综合练习(二)

二、选择额

五、已知非齐次线性方程组
$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=1\\ 3x_1+2x_2+x_3+ax_4=1\\ x_2+2x_3+3x_4=2\\ 5x_1+4x_2+3x_3+bx_4=4 \end{cases}$$

1. 当 a, b取何值时, 方程组无解、有唯一解、无穷多解;

2023-2024 学年 第2学期半期考

一、填空额

线性方程组

二、选择额

综合练习(二) - 、洗择額

五、已知非齐次线性方程组
$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=1\\ 3x_1+2x_2+x_3+ax_4=1\\ x_2+2x_3+3x_4=2\\ 5x_1+4x_2+3x_3+bx_4=4 \end{cases}$$

1. 当 a, b取何值时, 方程组无解、有唯一解、无穷多解;

解: 对增广矩阵作初等行变换

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 5 & 4 & 3 & b & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & b - 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a & 0 \end{bmatrix}$$

- ①当 b = 2或 $b \neq 2, a \neq 0$ 时, 方程组无解;
- ②当 $b \neq 2, a = 0$ 时, 方程组有无穷多解;
- ③不存在 a, b使得方程组有唯一解

一、填空题 二、选择额

线性方程组

一、填空额 二、选择额

综合练习(二)

五、已知非齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1\\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + ax_4 = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2\\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + bx_4 = 4 \end{cases}$

2. 在方程组有解时求出其全部解.

2023-2024 学年 第2学期半期考

一、填空额

线性方程组

二、选择额

综合练习(二) 一、洗择額

五、已知非齐次线性方程组
$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=1\\ 3x_1+2x_2+x_3+ax_4=1\\ x_2+2x_3+3x_4=2\\ 5x_1+4x_2+3x_3+bx_4=4 \end{cases}$$

2. 在方程组有解时求出其全部解.

解: 由 1 可知 $b \neq 2$, a = 0时, 继续作初等行变换

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & | & -2 \\ 0 & 0 & 0 & b - 2 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & | & \frac{4-b}{b-2} \\ 0 & 1 & 2 & 0 & | & \frac{2b-7}{b-2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & \frac{1}{b-2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$

可得其全部解为

$$\begin{bmatrix} \frac{4-b}{b-2} \\ \frac{2b-7}{b-2} \\ 0 \\ \frac{1}{b-2} \end{bmatrix} + k \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

其中 k为任意常数.

二、选择额

六、设向量组 $\alpha_1 = (1,1,4)^T, \alpha_2 = (1,0,4)^T, \alpha_3 = (1,2,a)^T$ 是三维 空间 R^3 的一组基 $\beta = (1,1,1)^T$ 在这组基下的坐标为 $(b,c,1)^T$. 1. 求 *a*, *b*, *c*的值;

2023-2024 学年 第 2 学期半期考 试试题 一、填空题 二

t

线性方程组

一、填空題 二、选择額

二、选择题

四五六

六七八九

++-+=

综合练习(二) 一、填空题 二、选择题

三四五六七

六、设向量组 $\alpha_1 = (1,1,4)^T$, $\alpha_2 = (1,0,4)^T$, $\alpha_3 = (1,2,a)^T$ 是三维空间 R^3 的一组基. $\beta = (1,1,1)^T$ 在这组基下的坐标为 $(b,c,1)^T$. 1. 求 a,b,c的值:

解: 由题意可知

$$\begin{bmatrix} \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b \\ c \\ 1 \end{bmatrix} = \beta \Rightarrow \begin{cases} b+c+1=1 \\ b+2=1 \\ 4b+4c+a=1 \end{cases}$$

即可得到 a,b,c的线性方程组,对增广矩阵作初等行变换

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & 4 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

得到

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \\ c = 1 \end{cases}$$

```
线性代数第九次
作业
```

2023-2024 学年 第 2 学期半期考 试试题

 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的过渡矩阵 M.

一、填空題

三 四 五

t

线性方程组 一、填空题

二、选择题

四

五六七

九 十 十

综合练习(二)

一、填空題 二、选择題 三

五六

六、设向量组 $\alpha_1 = (1,1,4)^T, \alpha_2 = (1,0,4)^T, \alpha_3 = (1,2,a)^T$ 是三维空间 R^3 的一组基. $\beta = (1,1,1)^T$ 在这组基下的坐标为 $(b,c,1)^T$. 2. 证明 α_2,α_3,β 是 R^3 的一组基,并求由基 α_2,α_3,β 到基

2023-2024 学年 第2学期半期考

一、填空额

线性方程组

二、选择额

综合练习(二) 一、洗择額

六、设向量组 $\alpha_1 = (1,1,4)^T$, $\alpha_2 = (1,0,4)^T$, $\alpha_3 = (1,2,a)^T$ 是三维 空间 R^3 的一组基. $\beta = (1,1,1)^T$ 在这组基下的坐标为 $(b,c,1)^T$. 2. 证明 $\alpha_2, \alpha_3, \beta \in \mathbb{R}^3$ 的一组基, 并求由基 $\alpha_2, \alpha_3, \beta$ 到基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的过渡矩阵 M.

解: 因为

$$|[\alpha_2, \alpha_3, \beta]| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$$

因此矩阵的列向量组即 $\alpha_2, \alpha_3, \beta$ 线性无关, 因此为 R^3 的一组基. 另 一方面,得到过渡矩阵只需求解方程

$$[\alpha_2, \alpha_3, \beta] M = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$$

由增广矩阵初等行变换可得

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 1 & 4 & 4 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

得到

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

```
2023-2024 学年
第2学期半期考
试试题
```

一、填空额

线性方程组

```
一、填空额
```

二、选择额

综合练习(二)

二、选择题

七、证明题

1. 设 n(n > 4)维向量 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无

关, $\beta_i = \alpha_i + k\alpha_4$, i = 1, 2, 3. 证明对任意的数 $k, \beta_1, \beta_2, \beta_3$ 都线性无关;

2023-2024 学年 第2学期半期考 一、填空额

```
线性方程组
```

```
二、选择额
```

综合练习(二)

洗择题

七、证明题

1. 设 n(n > 4)维向量 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无 关, $\beta_i = \alpha_i + k\alpha_4$, i = 1, 2, 3. 证明对任意的数 $k, \beta_1, \beta_2, \beta_3$ 都线性无关;

证明一: 对于方程 $x_1\beta_1 + x_2\beta_2 + x_3\beta_3 = 0$, 整理后可得 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 + k(x_1 + x_2 + x_3)\alpha_4 = 0$

再由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关得到

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \\ k(x_1 + x_2 + x_3) = 0 \end{cases}$$

即得到 $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, 因此任意 k都有 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性无关.

2023-2024 学年 第 2 学期半期考 试试题

```
试试题
一、填空题
二
三
```

1

线性方程组

```
一、填空题
```

二、选择题 三

四五

五六七:

八 九 十

综合练习(二)

一、填空題 二、选择題 三 七、证明题

1. 设 n(n > 4)维向量 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无

关, $\beta_i = \alpha_i + k\alpha_4$, i = 1, 2, 3. 证明对任意的数 $k, \beta_1, \beta_2, \beta_3$ 都线性无关;

2023-2024 学年 第 2 学期半期考 试试题 一、填空题

一、填空题 二 三 四 五

线性方程组

```
线性方程组
```

一、填空題 二、选择題 三

四五六七八九十

综合练习(二)

一、填空題 二、选择題 三

七、证明题

1. 设 n(n > 4)维向量 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无

关,
$$\beta_i = \alpha_i + k\alpha_4$$
, $i = 1, 2, 3$. 证明对任意的数 $k,\beta_1,\beta_2,\beta_3$ 都线性无关;

证明二:由

$$r([\beta_1, \beta_2, \beta_3]) = r([\alpha_1 + k\alpha_4, \alpha_2 + k\alpha_4, \alpha_3 + k\alpha_4])$$

$$= r([\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ k & k & k \end{bmatrix})$$

$$= r(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ k & k & k \end{bmatrix})$$

$$= 3$$

因此得到 β_1 , β_2 , β_3 线性无关, 其中第三个等号由左乘列满秩矩阵秩不变得到, 因此得证.

2023-2024 学年 第 2 学期半期考 试试题

一、填空題

二、其空题

二四五六

٠

```
线性方程组
一、填空题
```

二、选择题

四

六七八九

+-+= +=

综合练习(二) 一、填空題 二、选择題 三

七、证明题

2. 设 n(n>4)维向量 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 满足 $\alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_3+4\alpha_4=0$ 且 $\beta_i=\alpha_i+i\lambda_i\xi,i=1,2,3,4$.问当不全为 零的数 $\lambda_i(i=1,2,3,4)$ 满足什么条件时, 对任意的 n维向量 ξ , 向量组 $\beta_1.\beta_2,\beta_3,\beta_4$ 总线性相关, 并证明.

2023-2024 学年 第 2 学期半期考 试试题

一、填空題

线性方程组

一、填空题 二、选择题 三

四五六七八九十十十二

综合练习(二) 一、填空题 二、选择题 三

七、证明题

2. 设 n(n>4)维向量 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 满足 $\alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_3+4\alpha_4=0$ 且 $\beta_i=\alpha_i+i\lambda_i\xi,i=1,2,3,4$.问当不全为 零的数 $\lambda_i(i=1,2,3,4)$ 满足什么条件时, 对任意的 n维向量 ξ , 向量组 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ 总线性相关, 并证明.

证明一: 由题意, 即 $x_1\beta_1 + x_2\beta_2 + x_3\beta_3 + x_4\beta_4 = 0$ 对任意 ξ 总有非零解, 整理得

 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3+x_4\alpha_4+(\lambda_1x_1+2\lambda_2x_2+3\lambda_3x_3+4\lambda_4x_4)\xi=0$ 不妨设 $x_1\neq 0$, 上式变为

 $(x_2-2x_1)\alpha_2+(x_3-3x_1)\alpha_3+(x_4-4x_1)\alpha_4+(\lambda_1+4\lambda_2+9\lambda_3+16\lambda_4)x_1\xi=0$ 因为 $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 可能线性无关, 此时取 ξ 使得 $\xi,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 也线性无关, 那么由上式可得到 $(\lambda_1+4\lambda_2+9\lambda_3+16\lambda_4)x_1=0$, 即 $\lambda_1+4\lambda_2+9\lambda_3+16\lambda_4=0$.

反之, 若满足 $\lambda_1 + 4\lambda_2 + 9\lambda_3 + 16\lambda_4 = 0$, 那么方程 $x_1\beta_1 + x_2\beta_2 + x_3\beta_3 + x_4\beta_4 = 0$ 总有非零解

 $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3, x_4 = 4.$

综上, 满足条件 $x_1\beta_1 + x_2\beta_2 + x_3\beta_3 + x_4\beta_4 = 0$ 时总有非零解.

2023-2024 学年 第 2 学期半期考 试试题

一、填空題 二 =

四五

τ

```
线性方程组
一、填空题
二、选择题
```

二、选择题三

五

六七八

カ + +-+=

综合练习(二) 一、填空题 一、选择题

二、选择题三

七、证明题

2. 设 n(n > 4)维向量 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 满足

 $\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + 4\alpha_4 = 0$ 且 $\beta_i = \alpha_i + i\lambda_i\xi$, i = 1, 2, 3, 4.问当不全为 零的数 $\lambda_i(i = 1, 2, 3, 4)$ 满足什么条件时, 对任意的 n维向量 ξ , 向量组 $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ 总线性相关, 并证明.

七、证明题

2. 设 n(n > 4)维向量 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 满足

 $lpha_1 + 2lpha_2 + 3lpha_3 + 4lpha_4 = 0$ 且 $eta_i = lpha_i + i\lambda_i\xi, i = 1, 2, 3, 4$.问当不全为 零的数 $\lambda_i(i = 1, 2, 3, 4)$ 满足什么条件时,对任意的 n维向量 ξ ,向量组 $\beta_1.\beta_2,\beta_3,\beta_4$ 总线性相关,并证明.

证明二: 首先由 $\alpha_1 = -2\alpha_2 - 3\alpha_3 - 4\alpha_4$

$$r([\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4]) = r([\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \xi] \underbrace{\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 1 \\ \lambda_1 & 2\lambda_2 & 3\lambda_3 & 4\lambda_4 \end{bmatrix}}_{P})$$

若 $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性相关, 那么

$$r([\beta_1.\beta_2,\beta_3,\beta_4]) \leqslant r([\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\xi]) < 4$$

此时已经线性无关,故 λ_i 可以满足任意条件;若 $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关,那么取 ξ 使得 $\xi,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 也线性无关,那么只需满足(下式用到了左乘列满秩秩不变的结论 $)r([\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4])=r(P)<4$,等价于|P|=0,即 $\lambda_1+4\lambda_2+9\lambda_3+16\lambda_4=0$;反之,如果满足 $\lambda_1+4\lambda_2+9\lambda_3+16\lambda_4=0$,那么 $|P|=0\Rightarrow r(P)<4$,进而得到 $r([\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4])\leqslant r(P)<4$,即线性相关.

2023-2024 学年 第2学期半期考 试试题

一、填空额

线性方程组

一、填空额

二、选择额

综合练习(二)

二、选择题

1. 设 ξ_1, ξ_2 都是线性方程组 $AX = b(b \neq 0)$ 的解, 则 $\xi_1 - \xi_2$ 是方程组 AX = 0的解, $\xi_2 + k(\xi_1 - \xi_2)$ 是方程组 AX = b的解.

2023-2024 学年 第 2 学期半期考 试试题

成 成 拠 一、填空题 二 三 三

线性方程组

一、填空題

二、选择题三

四五六七八九十

+ +-+= +=

综合练习(二) 一、填空题 二、选择题

二、选择题三四五

1. 设 ξ_1, ξ_2 都是线性方程组 $AX = b(b \neq 0)$ 的解, 则 $\xi_1 - \xi_2$ 是方程组 AX = 0的解. $\xi_2 + k(\xi_1 - \xi_2)$ 是方程组 AX = b的解.

解: 带入验证即可

$$A(\xi_1 - \xi_2) = A\xi_1 - A\xi_2 = b - b = 0$$

此即表示 $\xi_1 - \xi_2$ 是 AX = 0的一个解; 同理由

$$\chi / \chi = \chi /$$

$$A[\xi_2 + k(\xi_1 - \xi_2)] = A\xi_2 + kA\xi_1 - kA\xi_2 = b + kb - kb = b$$

因此 $\xi_2 + k(\xi_1 - \xi_2)$ 是 $AX = b$ 的解.

2023-2024 学年 第2学期半期考 试试题

一、填空额

线性方程组

一、填空额

```
二、选择额
```

综合练习(二)

二、选择题

2. 设 A是秩为 r的 $m \times n$ 矩阵, $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-r}$ 是 Ax = 0的一个基础解 系,n维列向量 ξ 不是 Ax = 0的解, 则 $r\{\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{n-r}, \xi\} = n - r + 1.$

2023-2024 学年 第2学期半期老 试试题

一、填空额

线性方程组

二、选择额

综合练习(二) 二、选择额

2. 设 A是秩为 r的 $m \times n$ 矩阵, $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-r}$ 是 Ax = 0的一个基础解 系,n维列向量 ξ 不是 Ax = 0的解, 则

 $r\{\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{n-r}, \xi\} = n - r + 1.$

解: 首先由基础解系可知 ξ_1, \dots, ξ_{n-r} 线性无关, 另外 ξ 不是 Ax = 0的解表示它不能被 ξ_1, \dots, ξ_{n-r} 线性表出 (否则一定是 Ax = 0的解), 因此 $\xi_1, \dots, \xi_{n-r}, \xi$ 也线性无关, 即秩为 n - r + 1.

2023-2024 学年 第2学期半期考 试试题

一、填空额

线性方程组

一、填空题

二、选择题

综合练习(二)

二、选择题

3. 设 A是 n阶方阵, 则 $AX = b(n \neq 0)$ 有无穷多解或无解的充分必要 条件是 r([A,b]) = r(A) < n, r([A,b] > r(A)).

2023-2024 学年 第 2 学期半期考 试试题

试试题 一、填空题 二 三 四

线性方程组

一、填空题 二、选择题

一三四五六七八九十十二二

综合练习(二) 一、填空題 二、选择題 三 3. 设 A是 n阶方阵, 则 $AX = b(n \neq 0)$ 有无穷多解或无解的充分必要条件是 r([A,b]) = r(A) < n, r([A,b] > r(A)).

解:AX = b有解等价于系数矩阵的主元数等于增广矩阵的主元数即 r([A,b]) = r(A),无穷多解等价于系数矩阵主元数小于未知数个数 n,即 r(A) < n,合并后即得到

$$r([A, b]) = r(A) < n$$

无解等价于系数矩阵的主元数小于增广矩阵的主元数,即

或者也可以写为 r([A,b]) = r(A) + 1.

2023-2024 学年 第2学期半期考 试试题

一、填空额

五 六

线性方程组

一、填空题

二、选择题

四

五

+= +Ξ

综合练习(二)

一、填空题

二、选择题

五

4. 已知方程组

 x_1 $\begin{vmatrix} 2 & 3 & a+2 \\ 1 & a & -2 \end{vmatrix}$ = |3| 无解, 则 a = -1. $|x_2|$ 0 $|x_3|$

2023-2024 学年 第 2 学期半期考 试试题

一、填空題

二三四五六

线性方程组

一、填空题 二、选择题 三 四 五

一四五六七八九十十十二

综合练习(二) 一、填空題

一、填空題 二、选择題 三 4. 已知方程组 $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & a+2 \\ 1 & a & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$ 无解, 则 $a = \underline{-1}$.

解: 对增广矩阵作初等行变换, 得到

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & | & 1 \\ 2 & 3 & a+2 & | & 3 \\ 1 & a & -2 & | & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \cdots \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & | & 1 \\ 0 & -1 & a & | & 1 \\ 0 & 0 & (a-3)(a+1) & | & a-3 \end{bmatrix}$$

要使方程无解, 只需要 (a-3)(a+1) = 0且 $a-3 \neq 0$, 得到 a = -1.

2023-2024 学年 第2学期半期考 试试题

```
一、填空额
```

线性方程组

```
一、填空额
二、选择额
```

综合练习(二)

```
二、选择题
```

5. 若 ξ_1, ξ_2, ξ_3 是齐次线性方程组 Ax = 0的基础解系, 当 k满足条件 $k \neq 1, -2$ 时, 向量组 $k\xi_1 + \xi_2 + \xi_3, \xi_1 + k\xi_2 + \xi_3, \xi_1 + \xi_2 + k\xi_3$ 也是 Ax = 0的基础解系.

线性代数第九次 作业

目录

2023-2024 学年 第 2 学期半期考 试试题

一、填空題

线性方程组

一、填空题

三四五六七八九十十十二三

综合练习(二) 一、填空題 二、选择題 二 5. 若 ξ_1, ξ_2, ξ_3 是齐次线性方程组 Ax=0的基础解系, 当 k满足条件 $k \neq 1, -2$ 时, 向量组 $k\xi_1 + \xi_2 + \xi_3, \xi_1 + k\xi_2 + \xi_3, \xi_1 + \xi_2 + k\xi_3$ 也是 Ax=0的基础解系.

解: 首先 $k\xi_1 + \xi_2 + \xi_3$, $\xi_1 + k\xi_2 + \xi_3$, $\xi_1 + \xi_2 + k\xi_3$ 都是 ξ_1 , ξ_2 , ξ_3 的线性组合, 因此必定都是 Ax = 0的解, 因此只需要他们线性无关即可称为基础解系, 即需要

$$[k\xi_1 + \xi_2 + \xi_3, \xi_1 + k\xi_2 + \xi_3, \xi_1 + \xi_2 + k\xi_3] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$$

只有零解,该方程等价于

$$\begin{bmatrix} \xi_1, \xi_2, \xi_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$$

因为 ξ_1, ξ_2, ξ_3 线性无关, 此方程等价于

$$\begin{bmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$$

该方程只有零解等价于系数矩阵可逆, 行列式 $(k-1)^2(k+2) \neq 0$ 即 可, 等价于 $k \neq 1, -2$.

线性代数第九次 作业

目录

2023-2024 学年 第2学期半期考 试试题

一、填空题

线性方程组

一、填空额

二、选择题

综合练习(二)

二、选择题

1. 在非齐次线性方程组 Ax = b中, 方程个数少于未知量个数, 则 (*C*).

A. Ax = b 有无穷多解

B. Ax = b 有唯一解

C. Ax = 0 有无穷多解

D. Ax = 0 仅有零解

2023-2024 学年

一、填空额

线性方程组

一、填空额 二、洗择额

综合练习(二)

1. 在非齐次线性方程组 Ax = b中, 方程个数少于未知量个数, 则 (*C*).

A. Ax = b 有无穷多解

B. Ax = b 有唯一解

C. Ax = 0 有无穷多解

D. Ax = 0 仅有零解

解: 举例证伪即可. 方程

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

满足条件, 但显然无解, 因此 (A)(B)错误; 而方程

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

显然有无穷多解, 因此 (D)错误, 选择 (C)项.

若 A为 $m \times n$ 阶矩阵, 方程个数 m小于未知数个数 n, 因此

$$r([A, b]) \leq m < n$$

并且 Ax = 0一定有解, 故有无穷多解.

2023-2024 学年 第2学期半期考 试试题

一、填空额

线性方程组

一、填空题

二、选择题

综合练习(二)

一、填空题

2. 设 $A \neq s \times n$ 矩阵, 秩 A = s, 则线性方程组 Ax = b一定 (C).

A. 有唯一解 B. 有无穷多解 C. 有解 D. 无解

二、选择题

2023-2024 学年 第 2 学期半期考 试试题

一、填空额

线性方程组 一、填空额

二、选择题

综合练习(二)

一、洗择額

2. 设 $A = s \times n$ 矩阵, 秩 A = s, 则线性方程组 Ax = b一定 (C).

A. 有唯一解 B. 有无穷多解

C. 有解 D. 无解

解: 由题意可知 A行满秩, 其行向量线性无关, 而 [A,b]的行向量相当 于 4行向量的伸长组, 因此也线性无关, 因此得到

$$r([A,b]) = r(A) = s$$

这说明 Ax = b有解,(C)正确,(D)错误. 而解的数量是不确定的, 如

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

左边的方程有无穷解, 右边的只有唯一解,

2023-2024 学年 第2学期半期考 试试题

一、填空额

线性方程组

一、填空额

二、选择题

+Ξ

综合练习(二)

二、选择额

3. 已知 β_1, β_2 是非齐次线性方程组 Ax = b的两个不同的解, α_1, α_2 是 其导出组 Ax = 0的基础解系, k_1 , k_2 为任意常数, 则 Ax = b的通解为 (B).

A.
$$k_1\alpha_1 + k_2(\alpha_1 + \alpha_2) + \frac{\beta_1 - \beta_2}{2}$$

B. $k_1\alpha_1 + k_2(\alpha_1 - \alpha_2) + \frac{\beta_1 + \beta_2}{2}$
C. $k_1\alpha_1 + k_2(\beta_1 + \beta_2) + \frac{\beta_1 - \beta_2}{2}$
D. $k_1\alpha_1 + k_2(\beta_1 - \beta_2) + \frac{\beta_1 + \beta_2}{2}$

2023-2024 学年 第2学期半期考

一、填空额

步性方程组

二、选择额

综合练习(二)

3. 已知 β_1, β_2 是非齐次线性方程组 Ax = b的两个不同的解, α_1, α_2 是 其导出组 Ax = 0的基础解系, k_1 , k_2 为任意常数, 则 Ax = b的通解为 (B).

A.
$$k_1\alpha_1 + k_2(\alpha_1 + \alpha_2) + \frac{\beta_1 - \beta_2}{2}$$

B. $k_1\alpha_1 + k_2(\alpha_1 - \alpha_2) + \frac{\beta_1 + \beta_2}{2}$
C. $k_1\alpha_1 + k_2(\beta_1 + \beta_2) + \frac{\beta_1 - \beta_2}{2}$
D. $k_1\alpha_1 + k_2(\beta_1 - \beta_2) + \frac{\beta_1 + \beta_2}{2}$

解: 非齐次线性方程组的通解即为 Ax = b的一个特解加上其导出组 的基础解系的任意线性组合, 因此四个选项逐个验证即可.(B)项中

$$A\frac{\beta_1 + \beta_2}{2} = \frac{1}{2}A\beta_1 + \frac{1}{2}A\beta_2 = \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}b = b$$

$$A\alpha_1 = 0$$
, $A(\alpha_1 - \alpha_2) = A\alpha_1 - A\alpha_2 = 0$

并且 $\alpha_1, \alpha_1 - \alpha_2$ 线性无关, 因此满足所有条件, 即为 Ax = b的通解.

2023-2024 学年 第2学期半期考 试试题

一、填空额

线性方程组

一、填空额

二、选择题

综合练习(二)

二、选择题

4. 设 $A = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$ 是秩为 2的三阶矩阵, A^* 是 A的伴随矩阵,则齐 次线性方程组 $A^*x = 0$ 的解一定能表示为 (D), 其中 k, l, m是任意常 数.

A. $k\alpha_1 + l\alpha_2$ B. $l\alpha_2 + m\alpha_3$ C. $k\alpha_1 + m\alpha_3$ D. $k\alpha_1 - l\alpha_2 + m\alpha_3$

2023-2024 学年 第2学期半期考

一、填空额

线性方程组

二、选择题

综合练习(二) 一、洗择額

4. 设 $A = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$ 是秩为 2的三阶矩阵, A^* 是 A的伴随矩阵,则齐 次线性方程组 $A^*x = 0$ 的解一定能表示为 (D), 其中 k, l, m是任意常 数.

A. $k\alpha_1 + l\alpha_2$ B. $l\alpha_2 + m\alpha_3$ C. $k\alpha_1 + m\alpha_3$ D. $k\alpha_1 - l\alpha_2 + m\alpha_3$

解: 因为 A不满秩, 因此 $A^*A = 0$, 这表示 A的列向量都是 $A^*x = 0$ 的 解, 因此他们的线性组合也都是解; 另一方面, 可知 $r(A^*) = 1$, 故 $A^*x = 0$ 的解空间维数为 $3 - r(A^*) = 3 - 1 - 2$, 其中一个基础解系 为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 中的极大线性无关组.

但我们不知道 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 中极大线性无关组是哪两个, 因此 (A)(B)(C)都不一定正确,(D)项一定包含极大线性无关组,因此可以 表示所有解. 正确.

2023-2024 学年 第2学期半期考 试试题

一、填空额

线性方程组 一、填空额

二、选择额

四 Ŧī

综合练习(二) 一、填空题

二、选择额

三、求下列齐次线性方程组的一个基础解系及通解.

1.
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

2023-2024 学年 至2学期半期老

- 一、填空额

步性方程组

一、填空额

二、选择额

综合练习(二)

<u>三、求下列齐次线性方程组的一个基础解系及通解.</u>

1.
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

解: 作初等行变换

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \cdots \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

因此可得基础解系为
$$\begin{bmatrix} -5\\0\\3\\1 \end{bmatrix}$$
 , $\begin{bmatrix} -1\\1\\0\\0 \end{bmatrix}$, 通解为 $k_1\begin{bmatrix} -5\\0\\3\\1 \end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix} -1\\1\\0\\0 \end{bmatrix}$, 其

中 k_1, k_2 为任意常数.

注: 可以看到, 解空间维数 n - r(A)中的 n指的是列数, 而非行数.

四 五

+=

综合练习(二) 一、填空题

二、选择额

三、求下列齐次线性方程组的一个基础解系及通解.

2. 方程组 Ax = 0.其系数矩阵 A可经初等行变换化为

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & a & 0 \end{bmatrix}$$

2023-2024 学年 至2学期半期老

一、填空额

线性方程组

一、填空额

二、选择额

综合练习(二)

<u>三、求下列齐次线性方程组的一个基础解系及通解.</u>

2. 方程组 Ax = 0,其系数矩阵 A可经初等行变换化为

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & a & 0 \end{bmatrix}$$

解: 由题意. 根据 a是否为零导出不同的结果.

①a = 0时, 进行初等行变换

$$A \to B \to \cdots \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

此时基础解系为 $\begin{bmatrix}0\\0\\-1\\0\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1\\0\\-1\\2\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1\\1\\0\\0\\0\end{bmatrix}$,通解为

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + k_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, 其中 k_1, k_2, k_3为任意常数.$$

2023-2024 学年 第 2 学期半期考

一、填空额

线性方程组

一、填空额

二、选择额

四

综合练习(二)

洗择题

三、求下列齐次线性方程组的一个基础解系及通解.

2. 方程组 Ax = 0,其系数矩阵 A可经初等行变换化为

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & a & 0 \end{bmatrix}$$

解:(接上文)

② $a \neq 0$ 时, 进行如下初等行变换

$$A \to B \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \to \cdots \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

因此基础解系为 |

 k_1, k_2 为任意常数.

```
2023-2024 学年
第2学期半期考
试试题
```

一、填空额

线性方程组 一、填空额 二、选择额

五

综合练习(二)

一、填空题 二、选择额

```
四、解下列线性方程组.
```

```
1. \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 + 2x_5 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 2, \\ 3x_1 + 3x_2 + 3x_4 + x_5 = 3 \end{cases}
```

2023-2024 学年 至2学期半期老

一、填空额

二、选择额

五

综合练习(二)

洗择题

四、解下列线性方程组.

1.
$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 + 2x_5 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 2, \\ 3x_1 + 3x_2 + 3x_4 + x_5 = 3 \end{cases}$$

解: 对增广矩阵进行初等行变换.

因此得到特解

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, 进而得到通解为 \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ 0 \\ -\frac{1}{4} \\ 0 \\ \frac{3}{4} \end{bmatrix} + k_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, 其中 k_1, k_2 为任意常数$$

2023-2024 学年 第2学期半期考 试试题

一、填空额

六

线性方程组

一、填空额

二、选择额

五

+=

综合练习(二) 一、填空题

二、选择题

四、解下列线性方程组.

2. 方程组 $Ax = \beta$, 其增广矩阵 $\widetilde{A} = (A, \beta)$ 可经初等行变换化为

```
5]
0 \quad 0 \quad a-1
                b
    0
           0
                 0
```

2023-2024 学年 第2学期半期考

- 一、填空额

线性方程组

五

综合练习(二)

洗择题

四、解下列线性方程组.

2. 方程组 $Ax = \beta$, 其增广矩阵 $\tilde{A} = (A, \beta)$ 可经初等行变换化为

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

解: 按 a-1是否为零分类讨论.

①
$$a=1,b\neq 0$$
时, 显然 $r(\widetilde{A})=2\neq r(A)=1$, 因此方程无解;

②
$$a=1,b=0$$
时,只有第一行非零,因此直接得到特解 $\begin{bmatrix} -5\\0\\0 \end{bmatrix}$,导出

组通解为
$$\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$
 , $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, 因此得到通解为

$$\begin{bmatrix} -5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + k_1 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + k_3 \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, k_1, k_2, k_3$$
为任意常数

2023-2024 学年 第 2 学期半期考 试试题

一、填空额

线性方程组

二、选择额

综合练习(二) 二、选择额

四、解下列线性方程组.

2. 方程组 $Ax = \beta$, 其增广矩阵 $A = (A, \beta)$ 可经初等行变换化为

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

解:(接上文)

 $\Im a - 1 \neq 0$ 时, 继续进行行变换

$$\rightarrow \cdots \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 5 - \frac{2b}{a-1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{b}{a-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

得到特解
$$\begin{bmatrix} 5-\frac{2b}{a-1}\\0\\0\\\frac{b}{a-1}\end{bmatrix},$$
 导出组通解为
$$\begin{bmatrix} -2\\1\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix} 1\\0\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix} -2\\1\\0\\0\end{bmatrix},$$
 因此得到

诵解为

連解为
$$\begin{bmatrix} 5 - \frac{2b}{a-1} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{b}{a-1} \end{bmatrix} + k_1 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + k_3 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, k_1, k_2, k_3$$
为任意常数

```
线性代数第九次
  作业
```

2023-2024 学年 第2学期半期考 试试题

一、填空额

六

线性方程组 一、填空额

二、选择额

四 五

六

+=

综合练习(二) 一、填空题

二、选择题

```
五、\lambda为何值时, 方程组 \begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = \lambda, \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = \lambda^2 \end{cases} 有解? 有解时, 求出
```

通解.

2023-2024 学年 第 2 学期半期考 试试题

一、填空題

二三四五六七

线性方程组

一、填空题 二、选择题

二、选择题三

六七八九十十十二二

综合练习(二)

二、选择题三

五、 λ 为何值时, 方程组 $\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = \lambda, \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = \lambda^2 \end{cases}$ 有解? 有解时, 求出

通解.

解: 作初等行变换

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & \lambda \\ 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \cdots \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \\ 0 & \lambda - 1 & 1 - \lambda & \lambda(1 - \lambda) \\ 0 & 0 & (1 - \lambda)(2 + \lambda) & (1 - \lambda)(\lambda + 1)^2 \end{bmatrix}$$

其中第二行虚线左边为零当且仅当 $\lambda=1$, 此时虚线右边也为零, 因此第二行无论如何不影响是否有解; 第三行虚线左边为零当且仅当 $\lambda=1$ 或 -2, 同样的 $\lambda=1$ 时虚线右边也为零即不影响有解, 故可知在 $\lambda\neq-2$ 时都有解.

① $\lambda = 1$ 时原矩阵只有第一行非零, 且为 [1,1,1,1], 通解为

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + k_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, k_1, k_2$$
为任意常数

2023-2024 学年 第2学期半期老 试试题

一、填空额

线性方程组

一、填空额 二、选择额

综合练习(二)

二、选择额

五、
$$\lambda$$
为何值时, 方程组
$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = \lambda, \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = \lambda^2 \end{cases}$$
 有解? 有解时, 求出

诵解.

解:(接上文)

② $\lambda \neq 1, -2$ 继续化简矩阵

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \\ 0 & -1 & 1 & \lambda \\ 0 & 0 & 2 + \lambda & (1 + \lambda)^2 \end{array} \right] \rightarrow \cdots \rightarrow \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{\lambda+1}{\lambda+2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{\lambda+2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{(\lambda+1)^2}{\lambda+2} \end{array} \right]$$

$$\rightarrow \cdots \rightarrow$$

$$0 \quad 0 \quad 1 \mid \frac{\lambda+2}{\lambda+2}$$

有唯一解

$$\begin{bmatrix} -\frac{\lambda+1}{\lambda+2} \\ \frac{1}{\lambda+2} \\ \frac{(\lambda+1)^2}{\lambda+2} \end{bmatrix}$$

2023-2024 学年 第2学期半期考 试试题

```
一、填空额
```

线性方程组

一、填空额 二、选择题

四 五

```
t
```

+= +Ξ

综合练习(二) 一、填空题

二、选择题

六、写出方程组

 $x_1 - x_2 = a_1, x_2 - x_3 = a_2, x_3 - x_4 = a_3, x_4 - x_1 = a_4$ 有解的充要条 件,并求解.

2023-2024 学年 至2学期半期老

一、填空额

六、写出方程组

 $x_1 - x_2 = a_1, x_2 - x_3 = a_2, x_3 - x_4 = a_3, x_4 - x_1 = a_4$ 有解的充要条 件. 并求解.

解: 方程组写为

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix}$$

对增广矩阵作初等行变换 (只需要将前三行加到第四行):

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & a_3 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & a_4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \end{bmatrix}$$

因此有解当且仅当 $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 0$, 此时特解为

 $[a_1 + a_2 + a_3, a_2 + a_3, a_3, 0]^T$, 导出组基础解系为 $[1, 1, 1, 1]^T$, 因此得 到诵解

$$[a_1 + a_2 + a_3, a_2 + a_3, a_3, 0]^T + k[1, 1, 1, 1]^T$$
, (k为任意常数)

2023-2024 学年 第2学期半期考 试试题

一、填空额

线性方程组

一、填空额

二、选择额

综合练习(二)

二、选择额

七、设 η_0 是非齐次线性方程组 $Ax = b(b \neq 0)$ 的一个 $\mathbf{M}, \xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{n-r}$ 是其导出组 Ax = 0的一个基础解系, 令 $\eta_j = \eta_0 + \xi_j, j = 1, 2, \dots, n - r$, 证明:

 $1.\eta_0, \xi_1, \dots, \xi_{n-r}$ 线性无关;

4□▶ 4□▶ 4□▶ 4□▶ □ 900

2023-2024 学年 第2学期半期老 试试题

一、填空额

二、选择额

综合练习(二) 一、洗择額

七、设 η_0 是非齐次线性方程组 $Ax = b(b \neq 0)$ 的一个 $\mathbf{M}, \xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{n-r}$ 是其导出组 Ax = 0的一个基础解系, 令 $1.\eta_0, \xi_1, \cdots, \xi_{n-r}$ 线性无关;

证明: 由题意可知 $A\eta_0 = b \neq 0$, 这表示 η_0 不是 Ax = 0的解, 那么必 然不在 Ax = 0的解空间中, 也就不可被其基础解系 ξ_1, \dots, ξ_{n-r} 线性 表出, 又由 ξ_1, \dots, ξ_{n-r} 线性无关, 那么 $\eta_0, \xi_1, \dots, \xi_{n-r}$ 也线性无关.

2023-2024 学年 第2学期半期考 试试题

一、填空额

线性方程组

一、填空额

二、选择题

综合练习(二)

二、选择额

七、设 η_0 是非齐次线性方程组 $Ax = b(b \neq 0)$ 的一个 $\mathbf{M}, \xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{n-r}$ 是其导出组 Ax = 0的一个基础解系, 令 $\eta_j = \eta_0 + \xi_j, j = 1, 2, \dots, n - r,$ 证明:

2023-2024 学年 第 2 学期半期考 试试题

线性方程组

一、填空题二、选择题三四

六七

八 九 十 十 十 二 十 三

综合练习(二)

二、填空超二、选择题三

七、设 η_0 是非齐次线性方程组 $Ax=b(b\neq 0)$ 的一个

 $\mathbf{m}, \xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{n-r}$ 是其导出组 Ax = 0的一个基础解系, 令

 $\eta_j = \eta_0 + \xi_j, j = 1, 2, \dots, n - r,$ 证明:

 $2.\eta_0, \eta_1, \cdots, \eta_{n-r}$ 线性无关, 且都是 Ax = b的解;

证明: 首先由 $A\eta_0 = b$, $A\eta_j = A(\eta_0 + \xi_j) = A\eta_0 + A\xi_j = b + 0 = b$ 可知它们都是 Ax = b的解, 下证它们线性无关, 由 1 已知 $\eta_0, \xi_1, \dots, \xi_{n-r}$ 线性无关, 因此对于方程组

$$[\eta_0, \eta_1, \cdots, \eta_{n-r}] \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{n-r} \end{bmatrix} = [\eta_0, \xi_1, \cdots, \xi_{n-r}] \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{n-r} \end{bmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{n-r} \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{n-r} \end{bmatrix} = 0$$

这表示只有零解, 即证.

2023-2024 学年 第2学期半期老 试试题

一、填空额

二、选择额

综合练习(二)

二、选择额

线性方程组

七、设 η_0 是非齐次线性方程组 $Ax = b(b \neq 0)$ 的一个 $\mathbf{M}, \xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{n-r}$ 是其导出组 Ax = 0的一个基础解系, 令 $\eta_i = \eta_0 + \xi_i, j = 1, 2, \dots, n - r$, 证明: 3. 方程组 Ax = b的任一解可表示为 $x = \lambda_0 \eta_0 + \lambda_1 \eta_1 + \dots + \lambda_{n-r} \eta_{n-r}$ 的形式, 其中常数

 $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-r}$ 满足 $\lambda_0 + \lambda_1 + \dots + \lambda_{n-r} = 1$.

2023-2024 学年 第 2 学期半期考 试试题

一、填空題

三四五六

线性方程组

一、填空题 二、选择题 三 四 五

六 七 八 九 十

+ +-+= +=

综合练习(二) 一、填空題 二、选择題 三 四 七、设 η_0 是非齐次线性方程组 $Ax = b(b \neq 0)$ 的一个解, $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{n-r}$ 是其导出组 Ax = 0的一个基础解系,令 $\eta_j = \eta_0 + \xi_j, j = 1, 2, \cdots, n-r$,证明:3. 方程组 Ax = b的任一解可表示为 $x = \lambda_0 \eta_0 + \lambda_1 \eta_1 + \cdots + \lambda_{n-r} \eta_{n-r}$ 的形式,其中常数 $\lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_{n-r}$ 满足 $\lambda_0 + \lambda_1 + \cdots + \lambda_{n-r} = 1$.

证明: 因为

$$\lambda_0 \eta_0 + \lambda_1 \eta_1 + \dots + \lambda_{n-r} \eta_{n-r}$$

$$= (\lambda_0 + \dots + \lambda_{n-r}) \eta_0 + \lambda_1 \xi_1 + \dots + \lambda_{n-r} \xi_{n-r}$$

$$= \eta_0 + \lambda_1 \xi_1 + \dots + \lambda_{n-r} \xi_{n-r}$$

其中 η_0 为 Ax = b的特解, ξ_1, \dots, ξ_{n-r} 为其导出组的基础解系, 所以上式确为 Ax = b的通解.

注: 虽然 $A_{m \times n} x = b(b \neq 0)$ 的解集不是一个子空间 (是仿射空间), 但可以知道其中一定有 n - r(A) + 1个线性无关的向量.

2023-2024 学年 第2学期半期考 试试题

一、填空额

线性方程组 一、填空额

二、选择额

综合练习(二)

二、选择题

八、设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是四元非齐次线性方程组 $Ax = \beta(\beta \neq 0)$ 的 3个线 性无关的解向量,r(A) = 3, 且 $\alpha_1 + \alpha_2 = (1, 1, 0, 2)^T$, $\alpha_2 + \alpha_3 = (1, 0, 1, 3)^T$, 求方程组 $Ax = \beta$ 的通 解.

2023-2024 学年 第 2 学期半期考 试试题

一、填空題

线性方程

一、填空题 二、选择题 三

三四五六

九 + +-+=

综合练习(二) 一、填空题

一、填空題二、选择题三四二

八、设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是四元非齐次线性方程组 $Ax=\beta(\beta\neq 0)$ 的 3个线性无关的解向量,r(A)=3,且

 $\alpha_1 + \alpha_2 = (1, 1, 0, 2)^T$, $\alpha_2 + \alpha_3 = (1, 0, 1, 3)^T$, 求方程组 $Ax = \beta$ 的通解.

解: 得到 $Ax = \beta$ 的通解需要得到一个特解和导出组的基础解系. 因为 $A(\alpha_1 + \alpha_2) = 2\beta$, 那么 $A^{\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}} = \beta$, 这表示 $\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 1\right)^T$ 即为 $Ax = \beta$ 的一个特解. 另一方面. 容易知道 $\alpha_1 + \alpha_2$ 和 $\alpha_2 + \alpha_3$ 都是 $Ax = 2\beta$ 的解. 那么

 $\alpha_1 - \alpha_3 = (\alpha_1 + \alpha_2) - (\alpha_2 + \alpha_3) = (0, 1, -1, -1)^T$ 即为 Ax = 0的解,同时可知 Ax = 0的解空间维数为 4 - r(A) = 1,因此 $Ax = \beta$ 的通解即为

$$\begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + k \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, k为任意常数$$

2023-2024 学年 第 2 学期半期考 试试题

```
武 武 拠 一、填空題 二 三 三
```

五六七

^七 线性方程组

一、填空题 二、选择题

四五

六七

九十

+三 综合练习(二)

- 、填空題 - 、选择題

二、选择题三

五

六

九、已知四阶方阵 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4), \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 均为 4维列向量, 其中 $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关, $\alpha_1 = 2\alpha_2 - \alpha_3$. 如果 $\beta = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4$, 求方程组 $Ax = \beta$ 的通解.

2023-2024 学年 第 2 学期半期考 试试题

一、填空题 二 三

三四五六十

线性方程组

一、填空題 二、选择題 三

四五六七八

十三 综合练习

综合练习 (二) 一、填空題 二、选择題 三 四 五 六 七 九、已知四阶方阵 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4), \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 均为 4维列向量, 其中 $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关, $\alpha_1 = 2\alpha_2 - \alpha_3$,如果

量, 其中 α_2 , α_3 , α_4 线性无关, $\alpha_1 = 2\alpha_2 - \alpha_3$. 如果 $\beta = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4$, 求方程组 $Ax = \beta$ 的通解.

解: 求通解需要找到一个特解和导出组的基础解系. 由 β 定义可知

$$\beta = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = \begin{bmatrix} \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1\\1\\1\\1 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} 1\\1\\1\\1 \end{bmatrix}$$

因此 $[1,1,1,1]^T$ 即为 $Ax = \beta$ 的一个特解; 另一方面, 由

$$\alpha_1 - 2\alpha_2 + \alpha_3 = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4] \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

这表示 $[1, -2, 1, 0]^T$ 为 Ax = 0的一个解, 因为 Ax = 0解空间维数为 4 - r(A) = 1, 因此通解为

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + k \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, k$$
为任意常数

2023-2024 学年 第2学期半期考 试试题

一、填空题

线性方程组

一、填空题

二、选择题

+Ξ 综合练习(二)

一、填空题

二、选择题

十、设 A是秩为 n的 $s \times n$ 矩阵,AB = AC, 证明:B = C.

2023-2024 学年 第2学期半期老

一、填空额

二、选择额

综合练习(二) 二、选择额

十、设 A是秩为 n的 $s \times n$ 矩阵,AB = AC, 证明:B = C.

证明:AB = AC即 A(B - C) = 0, 这表示 B - C的每一个列向量都是 Ax = 0的解. 因为 A列满秩. 因此基础解系的维数为 n-r(A)=n-n=0, 这表示解空间为 $\{0\}$ 即只有零解, 即 B-C的 列向量全为零. 得到 $B-C=0 \Rightarrow B=C$.

```
2023-2024 学年
第2学期半期考
试试题
```

一、填空额

线性方程组

```
一、填空题
```

二、选择题

+-

综合练习(二)

一、填空题 二、选择题

十一、设 n阶矩阵 A满足: $A^2 - 3A + 10I = O$, I为 n阶单位矩阵, 证明: rank(A - 5I) + rank(A + 2I) = n.

2023-2024 学年 第2学期半期考 试试题

一、填空额

线性方程组

二、选择额

综合练习(二) 二、选择题

十一、设 n阶矩阵 A满足: $A^2 - 3A + 10I = O$, I为 n阶单位矩阵, 证明: rank(A - 5I) + rank(A + 2I) = n.

证明: 由 $A^2 - 3A + 10I = (A - 5I)(A + 2I) = O$, 可知 A - 2I的列向量 都是 (A-5I)x=0的解, 而其解空间维数为 n-r(A-5I), 因此可知 $r(A+2I) \leqslant n - r(A-5I) \Rightarrow r(A+2I) + r(A-5I) \leqslant n$

另一方面. 因为

$$n = r(7I) = r((A+2I) - (A-5I)) \leqslant r(A+2I) + r(A-5I)$$

因此得到

$$r(A+2I) + r(A-5I) = n$$

```
目录
2023-2024 学年
第2学期半期考
试试题
一、填空额
线性方程组
一、填空额
二、选择额
综合练习(二)
一、填空题
二、选择题
```

十二、设 A为 n(n > 1)阶矩阵,A*是 A的伴随矩阵, 证明:

$$r(A^*) = \begin{cases} n, r(A) = n \\ 1, r(A) = n - 1, \\ 0, r(A) \leqslant n - 2 \end{cases}$$

2023-2024 学年 第 2 学期半期考 试试题

试试题 一、填空题 二 三

一三四五六七

线性方程组 一、填空题 二、选择题 三 四 五 六 七

十二 十三

综合练习(二) 一、填空题 二、选择题 三 四 五 十二、设 A为 n(n > 1)阶矩阵, A^* 是 A的伴随矩阵,证明:

$$r(A^*) = \begin{cases} n, r(A) = n \\ 1, r(A) = n - 1, \\ 0, r(A) \le n - 2 \end{cases}$$

证明:①r(A) = n时,A可逆, 即 $|A| \neq 0$, 因此 $AA^* = |A|I$ 可知 A^* 也可逆, 即得到 $r(A^*) = n$;

2r(A) = n - 1时, 由 $AA^* = |A|I = 0$ 可知, A^* 的列向量都是 Ax = 0的解. 因此有

$$r(A^*) \leqslant n - r(A) = n - (n - 1) = 1$$

而 r(A) = n - 1表示至少存在 A的一个 n - 1阶子式不为零, 因此 $A^* \neq 0$, 即 $r(A^*) \geq 1$, 得到 $r(A^*) = 1$;

 $3r(A) \le n - 2$ 时, 表示任意 A的 n - 1子式都为零, 即 $A^* = 0$, 因此 $r(A^*) = 0$.

```
线性代数第九次
  作业
```

2023-2024 学年 第2学期半期考 试试题

一、填空额

线性方程组

一、填空额 二、选择额

综合练习(二)

一、填空题 二、选择题

十三、若任意一个 n维向量都是 n元齐次线性方程组 Ax = 0解, 证 明:A = O.

综合练习(二) 一、填空题 二、选择题 三 十三、若任意一个 n维向量都是 n元齐次线性方程组 Ax = 0解, 证明 : A = O.

证明: 设 A为 $m \times n$ 维矩阵, 由题意可知 Ax = 0的解空间为 \mathbb{R}^n , 即解空间维数为 n, 那么有

$$n - r(A) = n \Rightarrow r(A) = 0 \Rightarrow A = 0$$

成立.

2023-2024 学年 第2学期半期考 试试题

一、填空额

线性方程组

一、填空额

二、选择额

综合练习(二)

```
一、填空题
二、选择题
```

1. 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 向量组 $p\alpha_1 - \alpha_2, s\alpha_2 - \alpha_3, t\alpha_3 - \alpha_1$ 线性相关,则 p, s, t满足条件 pst = 1.

2023-2024 学年 第 2 学期半期考 试试题

一、填空题

线性方程组

一、填空题

二、选择题 三 四

综合练习(二)

二、选择题三

1. 设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关, 向量组

 $p\alpha_1 - \alpha_2, s\alpha_2 - \alpha_3, t\alpha_3 - \alpha_1$ 线性相关,则 p, s, t满足条件 pst = 1.

解: 由题意即以下方程组存在非零解

$$[p\alpha_1 - \alpha_2, s\alpha_2 - \alpha_3, t\alpha_3 - \alpha_1] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$$

方程组变换为

$$\begin{bmatrix} \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p & 0 & -1 \\ -1 & s & 0 \\ 0 & -1 & t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$$

由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 无关可知上述方程等价于

$$\begin{bmatrix} p & 0 & -1 \\ -1 & s & 0 \\ 0 & -1 & t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$$

要使此方程存在零解,即行列式为零即可,得到

$$pst - 1 = 0$$

2023-2024 学年 第2学期半期考 试试题

一、填空额

线性方程组

一、填空额 二、选择额

综合练习(二)

二、选择额

2. 设 $\alpha_i = (1, \lambda_i, \lambda_i^2, \dots, \lambda_i^{n-1})^T, i = 1, 2, \dots, r,$ 其中 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_r$ 是互不相同的 r个数, 则对于向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$, 当 r > n时, 线性相关; 当 r = n时, 线性无关; 当 r < n时, 线性无关.

2023-2024 学年 第2学期半期表

一、填空额

综合练习(二)

2. 设 $\alpha_i = (1, \lambda_i, \lambda_i^2, \dots, \lambda_i^{n-1})^T, i = 1, 2, \dots, r$, 其中 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_r$ 是互不相同的 r个数, 则对于向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$, 当 r > n时, 线性相关; 当 r = n时, 线性无关; 当 r < n时, 线性无关.

解: 将这些 α_i 作为列向量组成一个 $n \times r$ 矩阵

$$[\alpha_1, \cdots, \alpha_r] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_r \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \cdots & \lambda_r^{n-1} \end{bmatrix}$$

当 r > n时, 此矩阵的秩小于等于 min(r,n) = n, 这表示列向量的极 大线性无关组数量必定小于 r, 因此线性相关;

当 r = n时, 此矩阵的行列式即范德蒙行列式, 非零, 进而可知满秩, 即列向量线性无关:

当 r < n时, 取前 r行的 r阶子式, 它也是范德蒙行列式, 因此非零. 这 样子式的列向量线性无关, α ,作为其伸长组也线性无关.

线性代数第九次 作业

目录

2023-2024 学年 第 2 学期半期考 试试题

一、填空題

= = m

四五六七

线性方程组

一、填空题 二、选择题

= · ~

五

六七

九

+-+-

综合练习(二)

```
一、填空题二、选择题三四
```

3. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是 \mathbb{R}^3 的一组基, 则由基 $\alpha_1,\frac{1}{2}\alpha_2,\frac{1}{3}\alpha_3$ 到

 $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1$ 的过渡矩阵为 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \end{bmatrix}.$

作业

目录

一、填空额

二、选择额

二、选择题

综合练习(二)

$$\alpha_1 + \alpha_2$$

$$[\alpha]$$

3. 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是 \mathbb{R}^3 的一组基, 则由基 $\alpha_1, \frac{1}{2}\alpha_2, \frac{1}{3}\alpha_3$ 到 $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1$ 的过渡矩阵为 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \end{bmatrix}$.

解: 首先不难得到

$$[\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1] = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{P_1}$$

$$\left[\alpha_{1}, \frac{1}{2}\alpha_{2}, \frac{1}{3}\alpha_{3}\right] = \left[\alpha_{1}, \alpha_{2}, \alpha_{3}\right] \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}}_{P_{2}}$$

若设待求过渡矩阵为 P. 那么

$$\left[\alpha_1, \frac{1}{2}\alpha_2, \frac{1}{3}\alpha_3\right] P = \left[\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1\right]$$

$$\Leftrightarrow [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] P_2 P = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] P_1$$
$$\Leftrightarrow P = P_2^{-1} P_1$$

2023-2024 学年 第2学期半期考 试试题

一、填空题

线性方程组

一、填空题

二、选择题

综合练习(二)

```
一、填空题
```

二、选择题

4. 设 α 为 3维列向量, $\alpha^T\alpha=1$,I为 3阶单位矩阵,则矩阵 $I-\alpha\alpha^T$ 的 秩为 2.

2023-2024 学年 第 2 学期半期考 试试题

以以起 一、填空题 二 三 四

线性方程组

r(A)只能为 2.

一、填空题 二、选择题

二四五六七八九十十

综合练习(二)

一、填空題 二、选择題 三 四 五 六 ナ 4. 设 α 为 3维列向量, $\alpha^T\alpha=1$,I为 3阶单位矩阵,则矩阵 $I-\alpha\alpha^T$ 的 秩为 2.

解: 记 $A = I - \alpha \alpha^T$, 首先由秩不等式可知 $2 = |3 - 1| = |r(I) - r(\alpha \alpha^T)| \le r(I - \alpha \alpha^T) \le 3$ 因此 r(A)只可能为 2或 3. 由 25页第九题 2 结论,A不可逆, 因此

注: 此题可以借助很多推论完成, 以下提出三个.

- 不难计算得到 $A^2 = A(25$ 页第九题 1), 即 A(I-A) = 0, 和 69 页十一题类似结论可得 r(A) + r(I-A) = 3, 如果 r(A) = 3, 那么 $r(I-A) = 0 \Rightarrow I-A = 0 \Rightarrow A = I \Rightarrow \alpha\alpha^T = 0 \Rightarrow \alpha = 0 \Rightarrow \alpha^T\alpha = 0$ 矛盾, 因此 r(A)只能为 2;
- 推论: 若 A为 $m \times n$ 阶矩阵,B为 $n \times m$ 阶矩阵,那么 $|I_m AB| = |I_n BA|$. 使用此结论,我们对 A求行列式,即 $|I \alpha \alpha^T| = |1 \alpha^T \alpha| = |1 1| = 0$,即 r(A) < 3,进而得到 r(A) = 2.

2023-2024 学年 第 2 学期半期考 试试题

一、填空題

二三四五六

线性方程

线性力性到

二、选择题

四五

五六七二

九九十

综合练习(二)

·直接对 $A = I - \alpha \alpha^T$ 求行列式: 设 $\alpha = (x_1, x_2, x_3)^T$,可知 $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$,那么 (加边法)

$$|I - \alpha \alpha^{T}| = \begin{vmatrix} 1 - x_{1}^{2} & -x_{1}x_{2} & -x_{1}x_{3} \\ -x_{2}x_{1} & 1 - x_{2}^{2} & -x_{2}x_{3} \\ -x_{3}x_{1} & -x_{3}x_{2} & 1 - x_{3}^{2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x_{1} & x_{2} & x_{3} \\ 0 & 1 - x_{1}^{2} & -x_{1}x_{2} & -x_{1}x_{3} \\ 0 & -x_{2}x_{1} & 1 - x_{2}^{2} & -x_{2}x_{3} \\ 0 & -x_{3}x_{1} & -x_{3}x_{2} & 1 - x_{3}^{2} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1 & 1 & 0 & 0 \\ x_2 & 0 & 1 & 0 \\ x_3 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{\text{MHFFMS}}{\text{MHFFMS}} \begin{vmatrix} 1 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 & 0 & 0 & 0 \\ x_1 & 1 & 0 & 0 \\ x_2 & 0 & 1 & 0 \\ x_3 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

=0

因此也得到 r(A) < 3, 进而 r(A) = 2.

注: 如果将此题改为 n阶矩阵, 可得 $r(I - \alpha \alpha^T) = n - 1$, 方法是类似的.

2023-2024 学年 第2学期半期考 试试题

一、填空题

线性方程组

一、填空额

二、选择额

十三

综合练习(二)

一、填空题 二、选择题

5. 设 A, B均为 n阶矩阵, 齐次线性方程组 Ax = 0的解都是 Bx = 0的 解, 则 $r(A) \geqslant r(B)$.

一、填空题

综合练习(二)

二、选择题

2023-2024 学年 第2学期半期考 试试题 5. 设 A, B均为 n阶矩阵, 齐次线性方程组 Ax = 0的解都是 Bx = 0的

解,则 $r(A) \geqslant r(B)$.

解: 设 Ax = 0, Bx = 0的解空间分别为 W_A , W_B , 由题意可知 $W_A \subset W_B$, 那么就有

 $\dim W_A \leq \dim W_B$

此即

$$n - r(A) \leqslant n - r(B)$$

得到

$$r(A) \geqslant r(B)$$

综合练习(二)

一、填空题 二、选择题

 $\alpha_3 = -\alpha_1 + 2\alpha_2$, 则线性方程组 Ax = 0的通解为 $k \mid -2 \mid$.

6. 设 $A = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$ 为 3阶矩阵, 若 α_1, α_2 线性无关, 且

2023-2024 学年 第2学期半期考 试试题

一、填空额

线性方程组

二、选择额

综合练习(二)

二、选择额

6. 设 $A = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$ 为 3阶矩阵, 若 α_1, α_2 线性无关, 且

$$\alpha_3 = -\alpha_1 + 2\alpha_2$$
, 则线性方程组 $Ax = 0$ 的通解为 $k \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

解: 首先由题意可知

$$\alpha_1 - 2\alpha_2 + \alpha_3 = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

这表示 $[1, -2, 1]^T$ 是 Ax = 0的一个解; 而 Ax = 0的解空间维数为 3 - r(A) = 3 - 2 = 1, 因此通解即为

$$k \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

k为任意常数.

2023-2024 学年 第2学期半期考 试试题

- 一、填空额

线性方程组

一、填空额 二、选择额

综合练习(二)

一、填空题

二、选择题

- 1. 设 A, B满足 AB = O的任意两个非零矩阵, 则必有 (A).
 - A.A 的列向量组线性相关,B 的行向量组线性相关
 - B. A 的列向量组线性相关,B 的列向量组线性相关
 - C.A 的行向量组线性相关,B 的行向量组线性相关
 - D.A 的行向量组线性相关,B 的列向量组线性相关

2023-2024 学年

一、填空额

二、选择额

综合练习(二)

- 1. 设 A, B满足 AB = O的任意两个非零矩阵, 则必有 (A).
 - A.A 的列向量组线性相关,B 的行向量组线性相关
 - B.A 的列向量组线性相关,B 的列向量组线性相关
 - C.A 的行向量组线性相关,B 的行向量组线性相关
 - D.A 的行向量组线性相关,B 的列向量组线性相关

解: 首先设 $A = [\alpha_1, \dots, \alpha_n]$, 其中 α_i 为列向量, 如果 A的列向量组线 性无关,那么

$$\begin{bmatrix} \alpha_1, \cdots, \alpha_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = 0$$

必然只有零解, 此即表示 B的列向量只能为零, 得到 B=0与非零矛 盾. 因此 A的列向量必然线性相关:

另一方面, 对 AB = O转置可得 $B^T A^T = O$, 由上结论可知 B^T 的列向 量线性相关, 即 B的行向量线性相关, 因此 (A)项正确.

2023-2024 学年 第2学期半期考 试试题

一、填空额

线性方程组

二、选择额

综合练习(二)

一、填空题

二、选择题

2. 设 A为 4×3 矩阵, η_1, η_2, η_3 是非齐次线性方程组 Ax = b的 3个线 性无关的解, k_1 , k_2 , k_3 是任意常数,则 $Ax = \beta$ 的通解为 (C).

A. $k_1\eta_1 + k_2\eta_2 + k_3\eta_3$

B. $k_1(\eta_2 - \eta_1) + k_2(\eta_3 - \eta_1)$

C. $\frac{\eta_2 + \eta_3}{2} + k_1(\eta_2 - \eta_1) + k_2(\eta_3 - \eta_1)$
D. $\frac{\eta_2 - \eta_3}{2} + k_1(\eta_2 - \eta_1) + k_2(\eta_3 - \eta_1)$

2023-2024 学年 第2学期半期考

一、填空额

线性方程组

二、选择额

综合练习(二)

二、选择题

2. 设 A为 4×3 矩阵, η_1, η_2, η_3 是非齐次线性方程组 Ax = b的 3个线 性无关的解, k_1 , k_2 , k_3 是任意常数,则 $Ax = \beta$ 的通解为 (C).

A. $k_1\eta_1 + k_2\eta_2 + k_3\eta_3$

B.
$$k_1(\eta_2 - \eta_1) + k_2(\eta_3 - \eta_1)$$

C.
$$\frac{\eta_2 + \eta_3}{2} + k_1(\eta_2 - \eta_1) + k_2(\eta_3 - \eta_1)$$

D.
$$\frac{\eta_2 - \eta_3}{2} + k_1(\eta_2 - \eta_1) + k_2(\eta_3 - \eta_1)$$

解: 取特殊值排除即可.

- (A)项, 取 $k_1 = k_2 = k_3 = 0$ 得到 0, 而 Ax = b不一定有零解, 故错误;
- (B)项, 取 $k_1 = k_2 = 0$ 同上可知错误;
- (D)项, 取 $k_1 = k_2 = 0$, 因为 $A^{\frac{\eta_2 \eta_3}{2}} = \frac{\beta \beta}{2} = 0$ 也不一定等于 b, 因 业错误
- (C)项, 易知 $\frac{\eta_2 + \eta_3}{2}$ 为 $Ax = \beta$ 的解, $\eta_2 \eta_1$, $\eta_3 \eta_1$ 为 Ax = 0的解且他 们线性无关,因此 (C)项即为通解.

2023-2024 学年 第2学期半期考

一、填空额

线性方程组

二、选择额

综合练习(二)

一、填空题

二、选择题

- 3. 设 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ 是 4阶矩阵, A^* 是 A的伴随矩阵. 若 $(1,0,1,0)^T$ 是线性方程组 Ax = 0的一个基础解系,则 $A^*x = 0$ 的基础 解系为 (C).
 - A. α_1, α_3
 - B. $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$
 - $C. \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$
 - D. $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$

2023-2024 学年 第 2 学期半期考 试试题

武 武 挺 一、填空題 二

四五六七

线性方程

一、填空题 二、选择题

二、选择题三

五六七八九十十二

综合练习(二)

二、选择题

三四五六十

- 3. 设 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$ 是 4阶矩阵, A^* 是 A的伴随矩阵. 若 $(1,0,1,0)^T$ 是线性方程组 Ax=0的一个基础解系,则 $A^*x=0$ 的基础解系为 (C).
 - A. α_1, α_3
 - B. $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$
 - C. $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$
 - D. $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$
- 解: 首先可知 Ax = 0的解空间维数为 1, 即
- $4 r(A) = 1 \Rightarrow r(A) = 3 \Rightarrow r(A^*) = 1$, 因此 $A^*x = 0$ 的解空间维数即为 $4 r(A^*) = 4 1 = 3$, 故 (A)(D)项排除.
- 另一方面, 因为 $A(1,0,1,0)^T = \alpha_1 + \alpha_3 = 0$, 这表示 (B)项中 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 必定线性相关, 也排除, 最后选择 (C)项.

2023-2024 学年 第2学期半期考 试试题

一、填空额

线性方程组

一、填空额 二、选择额

综合练习(二) 一、填空题

二、选择题

三、设向量组 $\alpha_1 = (1,1,1,3)^T$, $\alpha_2 = (-1,-3,5,1)^T$, $\alpha_3 = (-1,-3,5,1)^T$ $(3,2,-1,p+2)^T$, $\alpha_4 = (-2,-6,10,p)^T$. 1.p取何值时, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关? 此时将 $\beta = (4, 1, 6, 10)^T$ 用 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性表出;

2023-2024 学年 第2学期半期考 试试题

一、填空额

线性方程组

综合练习(二)

二、选择题

二、选择额

三、设向量组 $\alpha_1 = (1,1,1,3)^T$, $\alpha_2 = (-1,-3,5,1)^T$, $\alpha_3 = (-1,-3,5,1)^T$ $(3, 2, -1, p + 2)^T$, $\alpha_4 = (-2, -6, 10, p)^T$. 1.p取何值时, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关? 此时将 $\beta = (4, 1, 6, 10)^T$ 用 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性表出;

解: 直接对 $[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \beta]$ 进行初等行变换,

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & -2 & | & 4 \\ 1 & -3 & 2 & -6 & | & 1 \\ 1 & 5 & -1 & 10 & | & 6 \\ 3 & 1 & p+2 & p & | & 10 \end{bmatrix} \rightarrow \cdots \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & -2 & | & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 4 & | & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & p-2 & | & 1-p \end{bmatrix}$$

可以看到当 $p-2 \neq 0$ 时 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_3$ 线性无关, 此时继续对上式进 行初等行变换

$$\rightarrow \cdots \rightarrow \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{3p-4}{p-2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1-p}{p-2} \end{array} \right]$$

进而得到

$$\beta = 2\alpha_1 + \frac{3p - 4}{p - 2}\alpha_2 + \alpha_3 + \frac{1 - p}{p - 2}\alpha_4$$

2023-2024 学年 第2学期半期考 试试题

一、填空额

线性方程组

一、填空额 二、选择额

综合练习(二)

二、选择题

三、设向量组 $\alpha_1 = (1,1,1,3)^T, \alpha_2 = (-1,-3,5,1)^T, \alpha_3 =$ $(3, 2, -1, p + 2)^T$, $\alpha_4 = (-2, -6, 10, p)^T$. 2.p取何值时, $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性相关? 此时求 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的秩及一 个极大线性无关组.

2023-2024 学年 第 2 学期半期考 试试题

山 山 起 一、填空題 二 三

四五六七线性方程

线性方程組 一、填定題 三、选择題 三 四 五 六 七 ハ

七 八 九 + + + + = + =

综合练习(二) 一、填空題 二、选择題

三 四

五六

三、设向量组 $\alpha_1=(1,1,1,3)^T, \alpha_2=(-1,-3,5,1)^T, \alpha_3=(3,2,-1,p+2)^T, \alpha_4=(-2,-6,10,p)^T.$ 2.p取何值时, $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性相关? 此时求 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的秩及一个极大线性无关组.

解:由1结果

$$\begin{bmatrix}
1 & -1 & 3 & -2 & | & 4 \\
0 & 2 & 1 & 4 & | & 3 \\
0 & 0 & 1 & 0 & | & 1 \\
0 & 0 & 0 & p-2 & | 1-p
\end{bmatrix}$$

可知 p = 2时 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性相关, 此时 $r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = 3$, 极大线性无关组为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$.

2023-2024 学年 第2学期半期考 试试题

一、填空额

线性方程组 一、填空额

二、选择额

+=

综合练习(二) 一、填空题 二、选择题

四、设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r (r \geq 2)$ 线性无关, 任取 $k_1, k_2, \dots, k_{r-1} \in \mathbb{R}$, 证 明: 向量组

 $\beta_1 = \alpha_1 + k_1 \alpha_r, \beta_2 = \alpha_2 + k_2 \alpha_r, \cdots, \beta_{r-1} = \alpha_{r-1} + k_{r-1} \alpha_r, \beta_r = \alpha_r$ § 性无关.

线性代数第九次 作业

目录

2023-2024 学年 第 2 学期半期考 试试题

试试题 一、填空题

二三四五六

五六七

线性方程组

一、填空题

二、选择题

四五六七八九十

+三 综合练习(二)

一、填空題 二、选择題

五六七

四、设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r(r\geqslant 2)$ 线性无关, 任取 $k_1,k_2,\cdots,k_{r-1}\in\mathbb{R}$, 证明: 向量组

 $\beta_1=\alpha_1+k_1\alpha_r, \beta_2=\alpha_2+k_2\alpha_r, \cdots, \beta_{r-1}=\alpha_{r-1}+k_{r-1}\alpha_r, \beta_r=\alpha_r$ 线性无关.

证明: 对于方程组

$$[\beta_1, \cdots, \beta_r] \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \end{bmatrix} = [\alpha_1 + k_1 \alpha_r, \cdots, \alpha_{r-1} + k_{r-1} \alpha_r, \alpha_r] \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \end{bmatrix} = 0$$

等价于下列线性方程组

$$[\alpha_1, \cdots, \alpha_r] \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ k_1 & k_2 & \cdots & k_{r-1} & 1 \end{bmatrix}}_{R} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \end{bmatrix} = 0$$

因为 $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ 线性无关, 故该方程组等价于 $P[x_1, \dots, x_r]^T = 0$, 进而由 $|P| = 1 \neq 0$ 可知 P可逆, 等价于 $[x_1, \dots, x_r]^T = 0$, 即只有零解, 因此得到线性无关.

```
目录
2023-2024 学年
第2学期半期考
试试题
一、填空额
线性方程组
一、填空额
二、选择额
```

```
综合练习(二)
二、选择题
```

五、设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是 \mathbb{R}^3 的一个 1. 证明: 向量组 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 是 \mathbb{R}^3 的一个基.

2023-2024 学年 第2学期半期考

一、填空额

二、选择额

综合练习(二) 一、洗择額

五、设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是 \mathbb{R}^3 的一个

 $\mathbf{\underline{4}}, \beta_1 = 2\alpha_1 + 2k\alpha_3, \beta_2 = 2\alpha_2, \beta_3 = \alpha_1 + (k+1)\alpha_3.$ 1. 证明: 向量组 β_1 , β_2 , β_3 是 \mathbb{R}^3 的一个基.

证明: 对于方程组

$$\begin{bmatrix} \beta_1, \beta_2, \beta_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2k & 0 & k+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$$

由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关可得原方程组等价于

$$\begin{bmatrix}
 2 & 0 & 1 \\
 0 & 2 & 0 \\
 2k & 0 & k+1
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 x_1 \\
 x_2 \\
 x_3
 \end{bmatrix} = 0$$

因为 $|P| = 4(k+1) - 4k = 4 \neq 0$, 因此 P可逆, 方程组只有零解, 因 此三维向量组 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性无关, 即为一组 \mathbb{R}^3 的基.

2023-2024 学年 第 2 学期半期考 试试题

一、填空題

二

三四五六

线性方程组

一、填空题 二、选择题

Ξ Ξ

四五

五六七八

カ + +-

综合练习(二) 一、填空题 二、选择题

二、选择题三

五、设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是 \mathbb{R}^3 的一个 基 $\beta_1 = 2\alpha_1 + 2k\alpha_2$ $\beta_2 = 2\alpha_2$ $\beta_3 = 4\alpha_3$

基, $\beta_1 = 2\alpha_1 + 2k\alpha_3$, $\beta_2 = 2\alpha_2$, $\beta_3 = \alpha_1 + (k+1)\alpha_3$.

2. 当 k为何值时, 存在非零向量 ξ 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 与基 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 下的 坐标相同, 并求出所有的 ξ .

2023-2024 学年 第2学期半期考 试试题

一、填空额

线性方程组

二、选择额

+Ξ

综合练习(二) 一、洗择額

五、设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是 \mathbb{R}^3 的一个

 $\mathbf{\underline{A}}, \beta_1 = 2\alpha_1 + 2k\alpha_3, \beta_2 = 2\alpha_2, \beta_3 = \alpha_1 + (k+1)\alpha_3.$

2. 当 k为何值时, 存在非零向量 ξ 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 与基 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 下的 坐标相同, 并求出所有的 ε .

解: 由题意, 即存在 $\xi \neq 0$ 和坐标列向量 η 使得

$$\xi = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] \eta = [\beta_1, \beta_1, \beta_2] \eta = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] P \eta$$

(P在 1 中定义) 我们可以知道坐标 η 也非零, 否则得到 $\xi = 0$ 而矛盾, 因此从上式得到 $[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3](P-I)\eta = 0$ 有非零解, 结合 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关等价于 $(P-I)\eta = 0$ 有非零解, 即 P-I不可逆, 即 $|P - I| = -k = 0 \Rightarrow k = 0$. 此时求解

$$(P-I)\eta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \eta = 0 \Rightarrow \eta = k \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, k$$
为常数

因此得到所有可能的 ξ 为

$$\xi = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] \begin{bmatrix} -k \\ 0 \\ k \end{bmatrix} = -k\alpha_1 + k\alpha_3$$

注意还要求 $\xi \neq 0$, 因此 $k \neq 0$.

2023-2024 学年 第2学期半期考 试试题

一、填空题

线性方程组

一、填空题

二、选择题

综合练习(二)

一、填空题

二、选择题

五

六、设 A是秩为 n的 $s \times n$ 矩阵, 证明:r(AB) = r(B).

2023-2024 学年 第2学期半期考

一、填空额

综合练习(二)

六、设 A是秩为 n的 $s \times n$ 矩阵, 证明:r(AB) = r(B).

证明: 设 B为 $n \times m$ 阶矩阵, 我们只需证明 ABx = 0和 Bx = 0的解空 间相同, 这样他们维数也相同, 得到 m - r(B) = m - r(AB)进而得到 r(AB) = r(B).

首先若 x_0 满足 $Bx_0 = 0$, 左乘 A即得到 $ABx_0 = 0$, 这说明 x_0 也是 ABx = 0的解:

反之若 x_0 满足 $ABx_0 = A(Bx_0) = 0$, 因为 A列满秩, 故列向量线性无 关, 因此 $Bx_0 = 0$, 即 x_0 也是 Bx = 0的解, 因此得证.

注: 此题告诉我们一个矩阵左乘列满秩矩阵秩也不变, 用转置不难 证明右乘行满秩矩阵秩也不变.

一、填空额 二、选择额

四

五

+= 综合练习(二)

一、填空题 二、选择题

五

2个不同的解.

1. 求 λ , a;

七、设 $A = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 0 & \lambda - 1 & 0 \\ 1 & 1 & \lambda \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} a \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$,已知线性方程组 Ax = b存在

2023-2024 学年 第 2 学期半期考 试试题

一、填空额

线性方程组

一、填空额 二、选择额

综合练习(二)

一、洗择額

七、设 $A = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 0 & \lambda - 1 & 0 \\ 1 & 1 & \lambda \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} a \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$,已知线性方程组 Ax = b存在

2个不同的解.

 $1. 求 \lambda, a;$

解: 由题意可知 Ax = b有解且有无穷解. 对增广矩阵作初等行变换.

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 1 & a \\ 0 & \lambda - 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda & 1 \end{bmatrix} \to \cdots \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & \lambda & 1 \\ 0 & \lambda - 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 - \lambda^2 & a - \lambda + 1 \end{bmatrix}$$

首先有解要求 $\lambda - 1 \neq 0$, 否则第二行虚线左边全 0 而右边非零, 那 么第三行需要全为零(这样才有无穷解),即

$$\begin{cases} \lambda - 1 \neq 0 \\ 1 - \lambda^2 = 0 \\ a - \lambda + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = -1 \\ a = -2 \end{cases}$$

+=

综合练习(二) 一、填空题

二、选择额

五

七、设
$$A=\begin{bmatrix}\lambda&1&1\\0&\lambda-1&0\\1&1&\lambda\end{bmatrix}$$
 , $b=\begin{bmatrix}a\\1\\1\end{bmatrix}$,已知线性方程组 $Ax=b$ 存在 2个不同的解.

2. 求方程组 Ax = b的通解.

2023-2024 学年 第 2 学期半期考 试试题

试试题
一、填空题
二
三
四

线性方程组

- *ス (土 刀 作生) - ・ ・ 填空題 - ニ、 选择題

二、选择

五六七八九十十十二

综合练习(二)

一、填空題 二、选择題 三 四

七、设 $A=\begin{bmatrix}\lambda&1&1\\0&\lambda-1&0\\1&1&\lambda\end{bmatrix}, b=\begin{bmatrix}a\\1\\1\end{bmatrix}$,已知线性方程组 Ax=b存在

2个不同的解.

2. 求方程组 Ax = b的通解.

解: 由 1 结论 $\lambda = -1$, a = -2, 对增广矩阵 $[A \ b]$ 进行初等行变换

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \cdots \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

即可得到通解为

$$\begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix} + k \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, k$$
为任意常数

```
2023-2024 学年
第2学期半期考
试试题
```

一、填空题

线性方程组 一、填空额

二、选择题

综合练习(二)

二、选择题

八、设线性方程组 $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + ax_3 = 0 \end{cases}$ 与方程 $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + ax_3 = 0 \end{cases}$ $x_1 + 2x_2 + x_3 = a - 1$ 有公共解, 求 a的值和所有公共解.

2023-2024 学年 至2学期半期老

一、填空额

步性方程组

二、选择额

综合练习(二)

八、设线性方程组
$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=0\\ x_1+2x_2+ax_3=0\\ x_1+4x_2+a^2x_3=0 \end{cases}$$
与方程

 $x_1 + 2x_2 + x_3 = a - 1$ 有公共解, 求 a的值和所有公共解.

解: 两个方程组的公共解即同时满足两个方程的解, 因此由题意可知

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + ax_3 = 0 \\ x_1 + 4x_2 + a^2x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = a - 1 \end{cases}$$

有解. 故对增广矩阵作初等行变换

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 0 \\ 1 & 2 & a & | & 0 \\ 1 & 4 & a^2 & | & 0 \\ 1 & 2 & 1 & | & a-1 \end{bmatrix} \rightarrow \cdots \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & a-1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1-a & | & a-1 \\ 0 & 0 & 0 & | & (a-1)(a-2) \end{bmatrix}$$

因此需要 a = 1或 a = 2.

2023-2024 学年 第 2 学期半期考 试试题

一、填空额

线性方程组

一、填空额

二、选择额

рц

二、选择额

综合练习(二)

八、设线性方程组
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + ax_3 = 0 \end{cases}$$
 与方程
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + ax_3 = 0 \end{cases}$$

 $x_1 + 2x_2 + x_3 = a - 1$ 有公共解, 求 a的值和所有公共解.

解:(接上文)

①a=1时. 由

②a = 2时, 由

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow 公共解k \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, k为任意常数$$

2023-2024 学年 第2学期半期考 试试题

一、填空题

线性方程组

一、填空额 二、选择额

四

+=

综合练习(二) 一、填空题

二、选择题

九、设 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -3 \end{bmatrix}$, I为 3阶单位矩阵.

- 1. 求 Ax = 0的一个基础解系;
- 2. 求满足 AB = I的所有矩阵 B.

2023-2024 学年 第 2 学期半期考 试试题

- 一、填空额

二、选择额

综合练习(二)

- 、洗择額

九、设 $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -3 \end{bmatrix}$,I为 3阶单位矩阵.

- 1. 求 Ax = 0的一个基础解系:
- 2. 求满足 AB = I的所有矩阵 B.

注: 第二问需要对增广矩阵作初等行变换, 其系数矩阵部分则是第 一部分需要的,可以一并计算.

解:1. 对 [A]]作初等行变换

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 6 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -1 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

即可得到基础解系为 $[-1,2,3,1]^T$.

2023-2024 学年 第2学期半期考 试试题

一、填空额

六

线性方程组

一、填空额

二、选择额

四

五

十三

综合练习(二) 一、填空题

二、选择题

九、设 $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -3 \end{bmatrix}$ 2. 求满足 AB = I的所有矩阵 B.

, I为 3阶单位矩阵.

线性代数第九次 作业

目录

2023-2024 学年 第 2 学期半期考 试试题

以以逃 一、填空题 -

二 三 四

线性方程组

线性力性组

一、填空題 二、选择題

三四五六

ハ七 八 九 十 十 十

+三 综合练习(二) -、填空題

二、选择题三四五六

九、设 $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -3 \end{bmatrix}$,I为 3阶单位矩阵.

2. 求满足 AB = I的所有矩阵 B.

解:2. 由 1 矩阵

可得方程 $Ax = \varepsilon_1, Ax = \varepsilon_2, Ax = \varepsilon_3$ 的特解分别为

$$\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 6 \\ -3 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

结合 1 的导出组通解可得 B

$$B = \begin{bmatrix} 2 - k_1 & 6 - k_2 & -1 - k_3 \\ -1 + 2k_1 & -3 + 2k_2 & 1 + 2k_3 \\ -1 + 3k_1 & 4 + 3k_2 & 1 + 3k_3 \\ k_1 & k_2 & k_3 \end{bmatrix}$$

其中 k_1, k_2, k_3 为任意常数.