线性代数第十一次作业

2024 年 6 月 2 日

本次作业

《线性代数习题册 (第三版)》

- $81 \sim 86$页: 矩阵的相似对角化
- $87 \sim 90$页: 实对称矩阵的相似对角化

目录

习题答案会上传至 github 中.

图: github 链接二维码

1. 设 $A=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$, $C=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$, 则 (C).

A. $A\sim B$　B. $A\sim C$

C. $C\sim B$　D. 以上结论均不成立

注 1: 相似不变量是指相似矩阵一定相同的属性, 如秩、迹、行列式、特征多项式、特征值等, 在排除不相似时可能可以使用这些不变量, 但他们只是相似的必要条件, 即便完全相同也不一定相似.

1. 设 $A=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$, 则 (C).

A. $A\sim B$ B. $A\sim C$

C. $C\sim B$ D. 以上结论均不成立

注 1: 相似不变量是指相似矩阵一定相同的属性, 如秩、迹、行列式、特征多项式、特征值等, 在排除不相似时可能可以使用这些不变量, 但他们只是相似的必要条件, 即便完全相同也不一定相似.

解: 首先 $r(A)=2, r(B)=r(C)=1$, 因此 A一定不与 B, C相似, 排除 $(A)(B)$项. 另一方面,B, C都是秩一矩阵且存在非零特征值 (上一部分结论), 因此都可相似对角化, 且都相似于

$$\begin{bmatrix}1&&\\&0&\\&&0\end{bmatrix}$$

由相似的传递性可知 $B\sim C$, 选择 (C)项.

目录

注 2: 线性代数中大部分求证两矩阵相似的情形都是它们均可相似对角化的情形, 对于不可对角化的相似一般较难, 可以通过比较他们的初等因子、行列式因子或不变因子得到, 有兴趣的同学可以自行了解.

注 3: 对角矩阵对角元任意置换前后一定相似, 即若 $i_1, i_2, \cdots, i_n$是 $1, 2, \cdots, n$的一个重排, 那么

$$\begin{bmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} a_{i_1} & & & \\ & a_{i_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{i_n} \end{bmatrix}$$

只需证明对角矩阵交换第 i, j个元前后矩阵相似即可, 而这由下式得到

$$E(i,j)^{-1} \begin{bmatrix} \ddots & & & & \\ & a_i & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & a_j & \\ & & & & \ddots \end{bmatrix} E(i,j) = \begin{bmatrix} \ddots & & & & \\ & a_j & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & a_i & \\ & & & & \ddots \end{bmatrix}$$

注 4:$aI + J$不可相似对角化,J如前定义 (只有次对角线为 1 的方阵).

2. 已知 $A=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&0&1\\0&1&a\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&b&0\\0&0&-1\end{bmatrix}$, $A\sim B$, 则 a,b分别为 (C).

A. $-1,1$ B. $1,0$ C. $0,1$ D. $1,-1$

2. 已知 $A=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&0&1\\0&1&a\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&b&0\\0&0&-1\end{bmatrix}, A\sim B$, 则 a,b分别为 (C).

A. $-1,1$　　B. $1,0$　　C. $0,1$　　D. $1,-1$

解: 因为 $\mathrm{tr}(A)=2+a=\mathrm{tr}(B)=1+b\Rightarrow b-a=1$, 故直接排除 $(A)(B)(D)$.
再由 $|A|=-2=|B|=-2b\Rightarrow a=0,b=1$, 因此选择 (C)项.

注: 注意到 A是分块对角矩阵, 其可相似对角化当且仅当每个对角块可对角化. 若每个块 $A_i=P_i^{-1}\Lambda_iP_i$, 其中 P_i为可逆矩阵,Λ_i为对角矩阵, 那么

$$\begin{bmatrix}P_1&&&\\&P_2&&\\&&\ddots&\\&&&P_n\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}A_1&&&\\&A_2&&\\&&\ddots&\\&&&A_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}P_1&&&\\&P_2&&\\&&\ddots&\\&&&P_n\end{bmatrix}$$

即为对角矩阵.

3. 下列说法错误的是 (ABC).
A.n阶矩阵 A可对角化的充要条件是 A有 n个互异的特征值
B.n阶矩阵 A可对角化的充要条件是 A^T有 n个互异的特征值
C.n阶矩阵 A可对角化的充要条件是 A有 n个互异的特征向量
D.n阶矩阵 A可对角化的充要条件是 A有 n个线性无关的特征向量

3. 下列说法错误的是 (ABC).
A.n阶矩阵 A可对角化的充要条件是 A有 n个互异的特征值
B.n阶矩阵 A可对角化的充要条件是 A^T有 n个互异的特征值
C.n阶矩阵 A可对角化的充要条件是 A有 n个互异的特征向量
D.n阶矩阵 A可对角化的充要条件是 A有 n个线性无关的特征向量

解:(A)项,I_n可对角化, 但特征值全为 1, 说法错误;
(B)项,I_n可对角化, 但 $I_n^T = I_n$特征值全为 1, 说法错误;
(C)项,J存在 n个互异的特征向量 $\varepsilon_1, 2\varepsilon_1, \cdots, n\varepsilon_1$, 但不可对角化, 说法错误;

注 1:A为 n阶矩阵, 那么 A可对角化当且仅当

- A有 n个线性无关的特征向量;
- A的所有特征值 λ的代数重数 (特征多项式中特征值的重数) 等于其几何重数 ($(\lambda I - A)x = 0$解空间的维数).

注 2:A为 n阶矩阵, 那么以下条件可以推出 A可对角化 (充分条件)

- A存在 n个不同的特征值.

4.A, B均为 n阶矩阵, 且 $A \sim B$, 则下列说法错误的是 (B).

A. $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(B)$

B. 存在对角阵 Λ, 使得 A, B 均相似于 Λ

C. $A^{2013} \sim B^{2013}$

D. 若 A 可逆, 则 B 可逆, 且 $A^{-1} \sim B^{-1}$

4.A,B均为 n阶矩阵, 且 $A\sim B$, 则下列说法错误的是 (B).

A. $\operatorname{rank}(A)=\operatorname{rank}(B)$

B. 存在对角阵 Λ, 使得 A,B 均相似于 Λ

C. $A^{2013}\sim B^{2013}$

D. 若 A 可逆, 则 B 可逆, 且 $A^{-1}\sim B^{-1}$

解:(A)项, 因为 $A=P^{-1}BP$, 那么 $r(A)=r(P^{-1}BP)=r(B)$.
(B)项,A,B相似但他们可能都不可对角化, 如 $A=B=J$的情况.
(C)项, 若 $A=P^{-1}BP$, 那么
$A^{2013}=(P^{-1}BP)(P^{-1}BP)\cdots(P^{-1}BP)=P^{-1}B^{2013}P$, 即表示
$A^{2013}\sim B^{2013}$.
(D)项, 若 $A=P^{-1}BP$且 A可逆, 那么 B显然可逆, 且令等式两边同时取逆,$A^{-1}=PB^{-1}P^{-1}$, 此即表示 $A^{-1}\sim B^{-1}$成立.

注: 若有 $A\sim B$,$f(x)$为多项式, 那么必有 $f(A)\sim f(B)$.

1. 已知 $A=\begin{bmatrix}0.4 & 5 & 6\\ 0 & 0.5 & 6\\ 0 & 0 & 0.6\end{bmatrix}$，则 $\lim_{n\to\infty} A^n = \underline{0}$.

1. 已知 $A=\begin{bmatrix}0.4 & 5 & 6\\ 0 & 0.5 & 6\\ 0 & 0 & 0.6\end{bmatrix}$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} A^n = \underline{0}$.

解: 显然 A的特征值为 $0.4, 0.5, 0.6$, 它们互不相同, 故可对角化, 且存在可逆矩阵 P使得

$$A = P^{-1}\begin{bmatrix}0.4 & 0 & 0\\ 0 & 0.5 & 0\\ 0 & 0 & 0.6\end{bmatrix}P \Rightarrow A^n = P^{-1}\begin{bmatrix}0.4^n & 0 & 0\\ 0 & 0.5^n & 0\\ 0 & 0 & 0.6^n\end{bmatrix}P$$

可知 A^n每个元都是 $0.4^n, 0.5^n, 0.6^n$的多项式, 因此令 $n\to\infty$可得 $A^n \to 0$.

2. 设 $A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & 4 & -2\\ -3 & -3 & a\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & b\end{bmatrix}$, $A\sim B$,则 $a=\underline{5}$, $b=\underline{6}$.

2. 设 $A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & 4 & -2\\ -3 & -3 & a\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & b\end{bmatrix}$, $A\sim B$,则 $a=\underline{5}$, $b=\underline{6}$.

解: 由题意可知

$$\begin{cases}|A|=|B|\\ \operatorname{tr}(A)=\operatorname{tr}(B)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}5+a==4+b\\ 6a-6=4b\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=5\\ b=6\end{cases}$$

三、判断下列矩阵 A是否可以对角化, 若可以, 求出可逆矩阵 P, 使得 $P^{-1}AP$为对角阵.

1.$A=\begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$;

方法: 可对角化等价于代数重数等于几何重数, 因此判断顺序为: 使用特征多项式求出所有特征值 λ_i, 按照不同 $\lambda_i I - A$求出所有基础解系, 若一共有 n个, 那么将这些列向量拼在一起作为 P即可得到 $P^{-1}AP$为对角矩阵, 且对应对角元即为对应列向量所对应的特征值; 如果没有 n个, 那么不可对角化.

三、判断下列矩阵 A是否可以对角化, 若可以, 求出可逆矩阵 P, 使得 $P^{-1}AP$为对角阵.

1.$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$;

方法: 可对角化等价于代数重数等于几何重数, 因此判断顺序为: 使用特征多项式求出所有特征值 λ_i, 按照不同 $\lambda_i I - A$求出所有基础解系, 若一共有 n个, 那么将这些列向量拼在一起作为 P即可得到 $P^{-1}AP$为对角矩阵, 且对应对角元即为对应列向量所对应的特征值; 如果没有 n个, 那么不可对角化.

解: 因为 $|\lambda I - A| = (\lambda - 2)(\lambda - 4)(\lambda + 2)$得到特征值 $2, 4, -2$, 然后分别求方程 $(A - 2I)x = 0, (A - 4I)x = 0, (A + 2I)x = 0$求出特征向量拼在一起得到 P即可得到

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

三、判断下列矩阵 A是否可以对角化, 若可以, 求出可逆矩阵 P, 使得 $P^{-1}AP$为对角阵.

2.$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{bmatrix}$;

三、判断下列矩阵 A是否可以对角化, 若可以, 求出可逆矩阵 P, 使得 $P^{-1}AP$为对角阵.

2.$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{bmatrix}$;

解: 因为 $|\lambda I - A| = (\lambda+2)^2(\lambda-4)$得到特征值 $-2(2\text{重}), 4$, 然后分别求方程 $(A+2I)x = 0, (A-4I)x = 0$求出特征向量拼在一起得到 P即可得到

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

三、判断下列矩阵 A是否可以对角化, 若可以, 求出可逆矩阵 P, 使得 $P^{-1}AP$为对角阵.

3.$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 4 & -2 & -8 \\ -4 & 0 & -1 \end{bmatrix}$;

三、判断下列矩阵 A是否可以对角化, 若可以, 求出可逆矩阵 P, 使得 $P^{-1}AP$为对角阵.

3.$A=\begin{bmatrix}3 & 0 & 1\\ 4 & -2 & -8\\ -4 & 0 & -1\end{bmatrix}$;

解: 因为 $|\lambda I-A|=(\lambda-1)^2(\lambda+2)$得到特征值 $1(2\text{重}), -2$, 因为 1的代数重数为 2, 而几何重数为

$$3-r(A-I)=3-r\left(\begin{bmatrix}2 & 0 & 1\\ 20 & -3 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\right)=3-2=1$$

小于代数重数, 因此不可对角化.

三、判断下列矩阵 A是否可以对角化, 若可以, 求出可逆矩阵 P, 使得 $P^{-1}AP$为对角阵.

4.$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}_{n\times n}$

解一: 常规方法, 此处略.

三、判断下列矩阵 A是否可以对角化, 若可以, 求出可逆矩阵 P, 使得 $P^{-1}AP$为对角阵.

4.$A=\begin{bmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 1 & \cdots & 1\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & 1 & \cdots & 1\end{bmatrix}_{n\times n}$

解一: 常规方法, 此处略.

解二: 令 $\alpha=[1,1,\cdots,1]^T\in\mathbb{R}^n$, 那么 $A=\alpha\alpha^T$, 其特征多项式

$$|\lambda I_n-A|=|\lambda I_n-\alpha\alpha^T|=\lambda^{n-1}(\lambda-\alpha^T\alpha)=\lambda^{n-1}(\lambda-n)$$

①$\lambda=0$时, 求 $Ax=\alpha\alpha^Tx=(\alpha^Tx)\alpha=0\Rightarrow\alpha^Tx=0$, 因此特征向量即为

$$\varepsilon_1-\varepsilon_2,\varepsilon_1-\varepsilon_3,\cdots,\varepsilon_1-\varepsilon_n$$

②$\lambda=n$时, 此时

$$(A-nI)x=\begin{bmatrix}1-n & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 1-n & \cdots & 1\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & 1 & \cdots & 1-n\end{bmatrix}x=0\Rightarrow x=\begin{bmatrix}1\\1\\ \vdots\\1\end{bmatrix}$$

三、判断下列矩阵 A是否可以对角化, 若可以, 求出可逆矩阵 P, 使得 $P^{-1}AP$为对角阵.

4.$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}_{n\times n}$

解二:(接上文) 因此得到

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & & & 1 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & -1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 0 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 0 & \\ & & & n \end{bmatrix}$$

四、设 $A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & 4 & -2\\ -3 & -3 & 5\end{bmatrix}$,求 A^{100}.

四、设 $A=\begin{bmatrix}1&-1&1\\2&4&-2\\-3&-3&5\end{bmatrix}$,求 A^{100}.

解: 求特征多项式 $|\lambda I-A|=(\lambda-2)^2(\lambda-6)$得到特征值为 $2,2,6$, 在计算特征向量后得到

$$P=\begin{bmatrix}1&1&1\\0&-1&-2\\1&0&3\end{bmatrix}\Rightarrow P^{-1}AP=\Lambda=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&6\end{bmatrix}$$

因此可得

$$\begin{aligned}A^{100}&=(P\Lambda P^{-1})^{100}=P\Lambda^{100}P^{-1}\\&=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}5\times2^{100}-6^{100}&2^{100}-6^{100}&-2^{100}+6^{100}\\-2^{101}+2\times6^{100}&2^{101}+2\times6^{100}&2^{101}-2\times6^{100}\\3(2^{100}-6^{100})&3(2^{100}-6^{100})&2^{100}+3\times6^{100}\end{bmatrix}\end{aligned}$$

五、设 3阶矩阵 A的 3个特征值为 $1, 1, 2$, 对应的特征向量为 $\gamma_1 = [1, 2, 1]^T, \gamma_2 = [1, 1, 0]^T, \gamma_3 = [2, 0, -1]^T$.
1. 求矩阵 A;

五、设 3阶矩阵 A的 3个特征值为 $1, 1, 2$, 对应的特征向量为 $\gamma_1 = [1, 2, 1]^T, \gamma_2 = [1, 1, 0]^T, \gamma_3 = [2, 0, -1]^T$.
1. 求矩阵 A;

解: 由题意

$$A[\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3] = [\gamma_1, \gamma_2, 2\gamma_3] = [\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

进而

$$A = [\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} [\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3]^{-1}$$
$$= \begin{bmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

五、设 3阶矩阵 A的 3个特征值为 $1, 1, 2$, 对应的特征向量为 $\gamma_1 = [1, 2, 1]^T, \gamma_2 = [1, 1, 0]^T, \gamma_3 = [2, 0, -1]^T$.

2. 若 $\beta = [1, 1, 1]^T$,求 $A^{10}\beta$.

五、设 3阶矩阵 A的 3个特征值为 $1,1,2$, 对应的特征向量为 $\gamma_1=[1,2,1]^T,\gamma_2=[1,1,0]^T,\gamma_3=[2,0,-1]^T$.
2. 若 $\beta=[1,1,1]^T$,求 $A^{10}\beta$.

解: 由 1 结论

$$
\begin{aligned}
A^{10}\beta &= [\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3]\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}^{10}[\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3]^{-1}\beta\\
&= [\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3]\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1024\end{bmatrix}[\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3]^{-1}\beta\\
&= \begin{bmatrix}2047\\1\\-1022\end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

六、设 $A = \begin{bmatrix} -4 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -3 \\ 1 & -3 & 1 \end{bmatrix}$, 求可逆矩阵 P和对角阵 Λ, 使得 $P^{-1}AP = \Lambda$.

六、设 $A=\begin{bmatrix}-4 & 2 & 1\\ 2 & 0 & -3\\ 1 & -3 & 1\end{bmatrix}$, 求可逆矩阵 P和对角阵 Λ, 使得 $P^{-1}AP=\Lambda$.

解: 求特征多项式 $|\lambda I-A|=(\lambda+1)(\lambda+1+\sqrt{21})(\lambda+1-\sqrt{21})$, 得到特征值为 -1和 $-1\pm\sqrt{21}$, 下一步计算特征向量.

①$\lambda=-1$时, 对 $A+I$作初等行变换

$$\begin{bmatrix}-3 & 2 & 1\\ 2 & 1 & -3\\ 1 & -3 & 2\end{bmatrix}\to\cdots\to\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\Rightarrow\xi_1=\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 1\end{bmatrix}$$

②$\lambda=-1-\sqrt{21}$时, 对 $A+(1+\sqrt{21})I$作初等行变换

$$\begin{bmatrix}-3+\sqrt{21} & 2 & 1\\ 2 & 1+\sqrt{21} & -3\\ 1 & -3 & 2+\sqrt{21}\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 0 & \frac{\sqrt{21}+5}{4}\\ 0 & 1 & -\frac{\sqrt{21}+1}{4}\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\Rightarrow\xi_2=\begin{bmatrix}-\frac{\sqrt{21}+5}{4}\\ \frac{\sqrt{21}+1}{4}\\ 1\end{bmatrix}$$

六、设 $A=\begin{bmatrix}-4 & 2 & 1\\ 2 & 0 & -3\\ 1 & -3 & 1\end{bmatrix}$, 求可逆矩阵 P和对角阵 Λ, 使得 $P^{-1}AP=\Lambda$.

解:(接上文)

③$\lambda=-1+\sqrt{21}$时, 对 $A-(-1+\sqrt{21})I$作初等行变换

$$\begin{bmatrix}-3-\sqrt{21} & 2 & 1\\ 2 & 1-\sqrt{21} & -3\\ 1 & -3 & 2-\sqrt{21}\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 0 & \frac{5-\sqrt{21}}{4}\\ 0 & 1 & -\frac{\sqrt{21}-1}{4}\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\Rightarrow\xi_3=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{21}-5}{4}\\ \frac{1-\sqrt{21}}{4}\\ 1\end{bmatrix}$$

因此令 $P=[\xi_1,\xi_2,\xi_3]$,那么可得

$$\Lambda=P^{-1}AP=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -1-\sqrt{21} & 0\\ 0 & 0 & -1+\sqrt{21}\end{bmatrix}$$

七、设 $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -k & -1 & k \\ 4 & 2 & -3 \end{bmatrix}$,求:

1.A为何值时,A相似于对角阵?

七、设 $A=\begin{bmatrix}3 & 2 & -2\\ -k & -1 & k\\ 4 & 2 & -3\end{bmatrix}$,求:

1.A为何值时,A相似于对角阵?

解:A要相似于对角阵, 只需代数重数等于几何重数, 先求特征多项式

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-3 & -2 & 2\\ k & \lambda+1 & -k\\ -4 & -2 & \lambda+3\end{vmatrix}=(\lambda+1)^2(\lambda-1)$$

可知特征值为 $-1,-1,1$, 即 -1的代数重数为 2, 因此需要其几何重数为 2, 即 $(A+I)x=0$的解空间维数 $3-r(A+I)=2\Rightarrow r(A+I)=1$

$$A+I=\begin{bmatrix}4 & 2 & -2\\ -k & 0 & k\\ 4 & 2 & -2\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}2 & 1 & -1\\ -k & 0 & k\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

可知 $k=0$.

七、设 $A=\begin{bmatrix}3 & 2 & -2\\ -k & -1 & k\\ 4 & 2 & -3\end{bmatrix}$,求:

2. 可逆阵 P, 使得 $P^{-1}AP$为对角阵.

七、设 $A=\begin{bmatrix}3 & 2 & -2\\ -k & -1 & k\\ 4 & 2 & -3\end{bmatrix}$,求:

2. 可逆阵 P, 使得 $P^{-1}AP$为对角阵.

解: 由 1 可知 $k=0$, 因此求解 $-1,1$的特征向量即可

$$P=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 2 & 0\\ 2 & 0 & 1\end{bmatrix}\Rightarrow P^{-1}AP=\Lambda=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

一、用施密特正交规范化把下列向量组正交规范化

1.$[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & 8 \end{bmatrix}$;

一、用施密特正交规范化把下列向量组正交规范化

1.$[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & 8 \end{bmatrix}$;

解: 首先正交化向量

$$\beta_1 = \alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \beta_2 = \alpha_2 - \frac{(\alpha_2, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)}\beta_1 = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -2 \\ -5 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$\beta_3 = \alpha_3 - \frac{(\alpha_3, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)}\beta_1 - \frac{(\alpha_3, 3\beta_2)}{(3\beta_2, 3\beta_2)}(3\beta_2) = \frac{5}{13}\begin{bmatrix} -4 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

然后进行单位化, 即

$$\gamma_1 = \frac{\beta_1}{\sqrt{(\beta_1, \beta_1)}} = \frac{\sqrt{3}}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \gamma_2 = \frac{\sqrt{78}}{78}\begin{bmatrix} -2 \\ -5 \\ 7 \end{bmatrix}, \gamma_3 = \frac{\sqrt{26}}{26}\begin{bmatrix} -4 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

故 $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$即为所求.

一、用施密特正交规范化把下列向量组正交规范化

2.$[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4]=\begin{bmatrix}1&0&1&1\\0&2&1&0\\1&2&0&0\\1&0&2&2\end{bmatrix}$

一、用施密特正交规范化把下列向量组正交规范化

2.$[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4]=\begin{bmatrix}1&0&1&1\\0&2&1&0\\1&2&0&0\\1&0&2&2\end{bmatrix}$

解: 首先正交化

$$\beta_1=\begin{bmatrix}1\\0\\1\\1\end{bmatrix},\beta_2=\begin{bmatrix}-1\\3\\2\\-1\end{bmatrix},\beta_3=\begin{bmatrix}0\\1\\-1\\1\end{bmatrix},\beta_4=\frac{1}{15}\begin{bmatrix}-3\\-1\\1\\2\end{bmatrix}$$

最后单位化得到

$$\gamma_1=\frac{\sqrt{3}}{3}\begin{bmatrix}1\\0\\1\\1\end{bmatrix},\gamma_2=\frac{\sqrt{15}}{15}\begin{bmatrix}-1\\3\\2\\-1\end{bmatrix},\gamma_3=\frac{\sqrt{3}}{3}\begin{bmatrix}0\\1\\-1\\1\end{bmatrix},\gamma_4=\frac{\sqrt{15}}{15}\begin{bmatrix}-3\\-1\\1\\2\end{bmatrix}$$

二、对下列矩阵 A, 求正交矩阵 Q和对角矩阵 Λ, 使得 $Q^{-1}AQ=\Lambda$.

1.$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 2 & -1 & 2\\ 0 & 2 & 1\end{bmatrix}$

二、对下列矩阵 A, 求正交矩阵 Q和对角矩阵 Λ, 使得 $Q^{-1}AQ=\Lambda$.

1.$A=\begin{bmatrix}1&2&0\\2&-1&2\\0&2&1\end{bmatrix}$

解: 正交相似对角化和一般相似对角化的区别仅仅在于需要对特征向量进行施密特正交化, 且只需要单位正交化各自特征值下的特征向量, 因为不同特征值对应的特征向量已经正交.
首先 $|\lambda I-A|=(\lambda+3)(\lambda-1)(\lambda-3)$, 得到特征值为 $-3,1,3$, 求得特征向量

$$\alpha_1=\begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix},\alpha_2=\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix},\alpha_3=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{只需要单位化}}\gamma_1=\frac{\sqrt{6}}{6}\begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix},\gamma_2=\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix},\gamma_3=\frac{\sqrt{3}}{3}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$$

因此 $Q=[\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3]=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{6}}{6}&\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{\sqrt{3}}{3}\\-\frac{\sqrt{6}}{3}&0&\frac{\sqrt{3}}{3}\\\frac{\sqrt{6}}{6}&-\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{\sqrt{3}}{3}\end{bmatrix}$, 得 $\Lambda=\begin{bmatrix}-3&0&0\\0&1&0\\0&0&3\end{bmatrix}$

二、对下列矩阵 A, 求正交矩阵 Q和对角矩阵 Λ, 使得 $Q^{-1}AQ=\Lambda$.

2.$A=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 6 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

二、对下列矩阵 A, 求正交矩阵 Q和对角矩阵 Λ, 使得 $Q^{-1}AQ=\Lambda$.

2.$A=\begin{bmatrix}2&0&4\\0&6&0\\4&0&2\end{bmatrix}$

解: 求特征多项式 $|\lambda I-A|=(\lambda-6)^2(\lambda+2)$, 得到特征值 $6,6,-2$, 求特征向量得到

$$\alpha_1=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix},\alpha_2=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},\alpha_3=\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}$$

已经正交, 因此只需单位化

$$\gamma_1=\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix},\gamma_2=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},\gamma_3=\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}$$

因此 $Q=[\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3]$, 进而得到

$$\Lambda=\begin{bmatrix}6&0&0\\0&6&0\\0&0&-2\end{bmatrix}$$

三、已知 3阶实对称矩阵 A的三个特征值为 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3$, 且对应于 λ_1, λ_2的特征向量为 $\xi_1 = [-1, -1, 1]^T, \xi_2 = [1, -2, -1]^T$, 求矩阵 A与 λ_3对应的一个特征向量及矩阵 A.

注 1: 一般矩阵的不同特征值的特征向量之间线性无关, 而实对称矩阵的不同特征值的特征向量之间正交, 因此可以通过正交性来从已知特征向量求出其它特征向量.

三、已知 3阶实对称矩阵 A的三个特征值为 $\lambda_1=1,\lambda_2=2,\lambda_3=3$, 且对应于 λ_1,λ_2的特征向量为 $\xi_1=[-1,-1,1]^T,\xi_2=[1,-2,-1]^T$, 求矩阵 A与 λ_3对应的一个特征向量及矩阵 A.

注 1: 一般矩阵的不同特征值的特征向量之间线性无关, 而实对称矩阵的不同特征值的特征向量之间正交, 因此可以通过正交性来从已知特征向量求出其它特征向量.

解: 由题意, 设 λ_3的特征向量为 ξ_3, 那么必定有
$(\xi_1,\xi_3)=(\xi_1,\xi_2)=0$, 即

$$\begin{bmatrix}\xi_1^T\\ \xi_2^T\end{bmatrix}\xi_3=\begin{bmatrix}-1&-1&1\\1&-2&-1\end{bmatrix}\xi_3=0$$

即可求得 $\xi_3=[1,0,1]^T$(当然为无穷解, 我们任取一个即可), 因此得到

$$P=[\xi_1,\xi_2,\xi_3]=\begin{bmatrix}-1&1&1\\-1&-2&0\\1&-1&1\end{bmatrix}\Rightarrow P^{-1}AP=\Lambda=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{bmatrix}$$

进而得到

$$A=P\Lambda P^{-1}=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}13&-2&5\\-2&10&2\\5&2&13\end{bmatrix}$$

三、已知 3阶实对称矩阵 A的三个特征值为 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3$, 且对应于 λ_1, λ_2的特征向量为 $\xi_1 = [-1, -1, 1]^T, \xi_2 = [1, -2, -1]^T$, 求矩阵 A与 λ_3对应的一个特征向量及矩阵 A.

注 2: 什么时候可以使用特征向量的正交性来求解其他特征值的特征向量.

①矩阵为实对称矩阵时不同特征值的特征向量才是正交的, 普通矩阵的特征值一般没有此性质;

②当未知的特征向量都属于同一个特征值时可以使用, 如果属于不同特征值时不能使用. 如

$$A = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 3 \end{bmatrix}$$

已知 1的特征向量为 $\xi_1 = [1, 0, 0]^T$, 这是若用 $\xi_1^T \xi = 0$求出的可能不是特征向量, 如 $\xi = [0, 1, 2]^T$满足 $\xi_1^T \xi = 0$, 但是

$$A\xi = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix}$$

四、设 3阶实对称矩阵 A的特征值为 $6,3,3$, 且特征值 6对应的特征向量为 $\xi_1=[1,1,1]^T$, 求矩阵 A.

四、设 3阶实对称矩阵 A的特征值为 $6, 3, 3$, 且特征值 6对应的特征向量为 $\xi_1 = [1, 1, 1]^T$, 求矩阵 A.

解: 由题意特征值 3 对应的特征向量 ξ必定与 ξ_1正交, 即

$$\xi_1^T \xi = [1, 1, 1]\xi = 0 \Rightarrow \xi_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \xi_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

因此有

$$P = [\xi_1, \xi_2, \xi_3] \Rightarrow P^{-1}AP = \Lambda = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

进而得到

$$A = P\Lambda P^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

五、设 3阶实对称矩阵 A的特征值 $\lambda_1=-1,\lambda_2=\lambda_3=1$, 属于 λ_1的特征向量为 $\eta=[0,1,1]^T$,求矩阵 A.

五、设 3阶实对称矩阵 A的特征值 $\lambda_1=-1, \lambda_2=\lambda_3=1$, 属于 λ_1的特征向量为 $\eta=[0,1,1]^T$,求矩阵 A.

解: 由题意特征值 1对应的特征向量 ξ必定与 η正交, 即

$$\eta^T\xi=[0,1,1]\xi=0 \Rightarrow \xi_2=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \xi_3=\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}$$

因此有

$$P=[\eta,\xi_2,\xi_3] \Rightarrow P^{-1}AP=\Lambda=\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

进而得到

$$A=P\Lambda P^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&-1\\0&-1&0\end{bmatrix}$$

六、设矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{bmatrix}$, $B=(2I+A)^{10}$,求对角阵 Λ, 使得 B相似于 Λ.

六、设矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{bmatrix}$, $B=(2I+A)^{10}$,求对角阵 Λ, 使得 B相似于 Λ.

注:$B=f(A)$即为 A的多项式, 因此只需求出 A的相似对角矩阵 Λ', 然后 $\Lambda=f(\Lambda')$.

解: 首先 $|\lambda I-A|=\lambda(\lambda-2)^2$,2的几何重数 $3-r(A-2I)=2$等于代数重数, 因此可对角化, 即

$$A\sim\Lambda'=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{bmatrix}\Rightarrow(2I+A)^{10}\sim(2I+\Lambda')^{10}=\begin{bmatrix}2^{10}&0&0\\0&4^{10}&0\\0&0&4^{10}\end{bmatrix}$$

此即表示 B相似于

$$\Lambda=\begin{bmatrix}2^{10}&0&0\\0&4^{10}&0\\0&0&4^{10}\end{bmatrix}$$