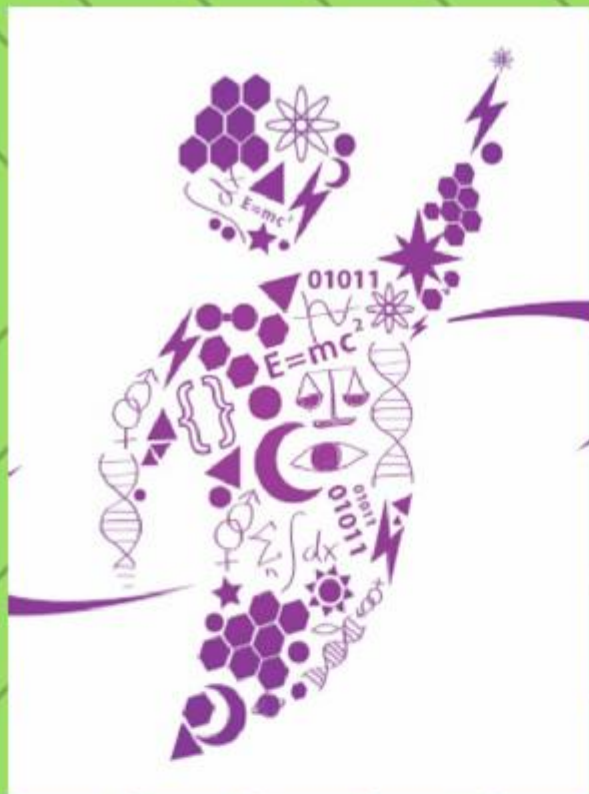


2019

SMA KOMPUTER



085223273373

ARITMATIKA

Materi Aritmatika ini adalah materi selanjutnya yang harus dikuasai oleh peserta OSN Komputer. Pada dasarnya di materi ini kita akan lebih banyak belajar mengenai berhitung. Beberapa materi di dalam aritmatika ini adalah pola bilangan, barisan bilangan dan juga deret bilangan.

➤ Barisan Bilangan

Barisan bilangan adalah sekumpulan bilangan-bilangan yang dibentuk menurut suatu aturan tertentu. Bilangan-bilangan yang tersusun disebut dengan suku.

Contoh :

- 1, 3, 5, 7, 9, ...
- 2, 5, 10, 17, ...
- 3, 7, 11, 15, ...

Di matematika ada dua buah barisan bilangan yang sering dijumpai yaitu barisan aritmatika dan barisan geometri.

- **Barisan Aritmatika**

Barisan aritmatika adalah sebuah barisan bilangan yang memiliki selisih yang tetap antara dua suku yang berurutan.

$$b = U_2 - U_1 = U_3 - U_2 = \dots = U_n - U_{n-1}$$

Contoh :

- 1, 3, 5, 7, 9, 11, ... (beda = 2)
- 3, 8, 13, 18, 23, ... (beda = 5)

Rumus barisan aritmatika yang harus diingat adalah :

$$U_n = U_1 + (n - 1) b$$

Dimana : U_n adalah suku ke- n , U_1 adalah suku pertama dan b adalah beda dari barisan tersebut

Contoh:

- Tentukan suku ke 100 dari barisan bilangan: 4, 10, 16, 22, ...

Jawab :

$$U_1 = 4, n = 100, b = 10 - 4 = 16 - 10 = 22 - 16 = 6$$

Sehingga :

$$U_{100} = U_1 + 99 \times b$$

$$U_{100} = 4 + 99 \times 6$$

$$U_{100} = 598$$

Jadi suku ke 100 nya adalah 598

- **Barisan Geometri**

Barisan geometri adalah barisan bilangan yang memiliki rasio yang konstan antara suatu suku dengan suku sebelumnya.

$$r = \frac{U_2}{U_1} = \frac{U_3}{U_2} = \frac{U_4}{U_3} = \dots = \frac{U_n}{U_{n-1}}$$

Rumus barisan geometri yang harus diingat adalah:

$$U_n = U_1 * r^{n-1}$$

Dimana : U_n adalah suku ke- n , U_1 adalah suku pertama dan r adalah rasio.

Contoh :

- Perhatikan barisan bilangan 4, 12, 36, ... Jika bilangan terakhirnya adalah 2916, ada berapa bilangan kah di barisan tersebut?

Jawab:

$$U_1 = 4, r = 3$$

$$\text{Sehingga: } U_n = 4 * 3^{n-1}$$

Jika 2916 adalah bilangan terakhirnya maka :

$$4 * 3^{n-1} = 2916$$

$$3^{n-1} = 729$$

$$n = 7$$

Sehingga di barisan tersebut ada **7** buah bilangan.

- **Barisan Aritmatika Bertingkat**

Barisan aritmatika bertingkat adalah sebuah barisan bilangan dimana beda dari suku-suku yang berurutan membentuk sebuah barisan aritmatika bertingkat pula.

Barisan aritmatika yang sudah kita bahas sebelumnya bisa disebut sebagai barisan aritmatika bertingkat 1.

Sehingga dapat diperumum bahwa barisan aritmatika bertingkat n adalah sebuah barisan bilangan dimana beda dari suku-suku yang berurutan membentuk barisan aritmatika bertingkat $n - 1$

Contoh :

$$1, 3, 7, 13, 21, 31, \dots$$

Barisan bilangan di atas adalah barisan aritmatika bertingkat 2.

Mengapa bertingkat 2?

Coba Perhatikan beda dari tiap suku yang berurutan:

$$b_1 = 3 - 1 = 2$$

$$b_2 = 7 - 3 = 4$$

$$b_3 = 13 - 7 = 6$$

$$b_4 = 21 - 13 = 8$$

Karena b_1, b_2, b_3, b_4 membentuk barisan aritmatika bertingkat 1 dengan beda +2, maka 1, 3, 7, 13, 21, 31, ... adalah barisan aritmatika bertingkat 2.

Rumus umum untuk barisan aritmatika bertingkat k adalah

$$U_n = a_1 n^k + a_2 n^{k-1} + a_3 n^{k-2} + \dots a_n n + a_{n+1}$$

Dimana :

U_n adalah suku ke- n dan $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n+1}$ adalah bilangan yang harus dicari nilainya.

Contoh Soal:

- Tentukan suku ke-25 dari barisan bilangan berikut ini:
3, 6, 12, 21, 33, 48, ...

Jawab:

Perhatikan beda dari setiap suku-suku yang berurutan.

$$b_1 = 6 - 3 = 3$$

$$b_2 = 12 - 6 = 6$$

$$b_3 = 21 - 12 = 9$$

$$b_4 = 33 - 21 = 12$$

...

Setelah diamati, suku-suku di atas adalah barisan aritmatika bertingkat 1.

Oleh karena itu, barisan di atas adalah barisan aritmatika bertingkat 2.

Untuk barisan aritmatika bertingkat 2, rumus suku ke- n nya adalah
 $a_1 n^2 + a_2 n + a_3$

Ambil 3 suku pertama dari barisan bilangan tersebut lalu substitusikan nilai $n = 1$, $n = 2$, dan $n = 3$ maka didapatkan

$$a_1 + a_2 + a_3 = 3 \dots (1)$$

$$4a_1 + 2a_2 + a_3 = 6 \dots (2)$$

$$9a_1 + 3a_2 + a_3 = 12 \dots (3)$$

Kurangi persamaan (2) dengan (1) didapatkan:

$$3a_1 + a_2 = 3 \dots (4)$$

Kurangi persamaan (3) dengan (2) didapatkan:

$$5a_1 + a_2 = 6 \dots (5)$$

Lalu kurangi persamaan (5) dengan (4) didapatkan:

$$2a_1 = 3$$

$$a_1 = \frac{3}{2}$$

Substitusikan nilai a_1 ke persamaan (4), maka didapatkan nilai a_2 yaitu

$$a_2 = 3 - 3 * \frac{3}{2} = -\frac{3}{2}$$

Substitusikan nilai a_1 dan a_2 ke persamaan (1), maka didapatkan nilai a_3 yaitu:

$$a_3 = 3 - \frac{3}{2} + \frac{3}{2} = 3$$

Sehingga didapatkan rumus suku ke-n nya adalah:

$$U_n = \frac{3}{2}n^2 - \frac{3}{2}n + 3$$

Maka suku ke-25 nya adalah : $U_{25} = \frac{3}{2}.25^2 - \frac{3}{2}.25 + 3 = \mathbf{903}$

➤ Deret Bilangan

Deret adalah jumlahan suku-suku dari suatu barisan bilangan, mulai dari suku ke-1 hingga suku ke-i

- **Deret Barisan Aritmatika**

Misalkan terdapat barisan aritmatika dengan suku pertama bernilai a dan beda b maka Jumlah n-suku pertama dari barisan aritmatika tersebut adalah

$$S_n = \frac{n}{2} (U_1 + U_n)$$

$$S_n = \frac{n}{2} (a + a + (n - 1)b)$$

$$S_n = \frac{n}{2} (2a + (n - 1)b)$$

Contoh :

Berapa jumlah 100 suku pertama dari barisan aritmatika 3, 7, 11, 15, ...

Jawab:

Dari barisan aritmatika tersebut kita bisa mendapatkan informasi bahwa:

$$U_1 = 3 \text{ dan } b = 4$$

Sehingga jumlah 100 suku pertama dari barisan aritmatika tersebut adalah

$$S_{100} = \frac{100}{2} (2 * 3 + (100 - 1) * 4)$$

$$S_{100} = 20100$$

- **Deret Barisan Geometri**

Misalkan terdapat barisan geometri dengan suku pertama a dan rasio r , maka jumlah n -suku pertama dari barisan geometri tersebut adalah

$$S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$$

- **Beberapa Deret Tambahan**

Disini penulis mencoba menuliskan beberapa rumus dari deret bilangan yang biasanya muncul di soal OSK dan OSP Komputer

- $\sum_{i=1}^n i = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$
- $\sum_{i=1}^n 2i = 2 + 4 + 6 + \dots + 2n = n(n + 1)$
- $\sum_{i=1}^n 2i - 1 = 1 + 3 + 5 + \dots + 2n - 1 = n^2$
- $\sum_{i=1}^n i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{6}n(n + 1)(2n + 1)$
- $\sum_{i=1}^n i^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

➤ **Materi Aritmatika Lain**

Selain barisan dan deret, masih ada topik-topik lain yang berkenaan dengan aritmatika. Namun, kebanyakan dari topik tersebut tidak memiliki materi yang benar benar khusus dan kebanyakan berkaitan dengan aljabar yang sudah dipelajari sejak SMP.

Tips untuk mengerjakan soal-soal bertipe aritmatika adalah pahami soal dengan baik lalu perbanyak latihan dan teliti dalam menghitung.

SOAL

1. Suku ke-2018 dari barisan bilangan 4, 11, 18, 25, 32, ..dst adalah ...
A. 14121
B. 14122
C. 14123
D. 14124
E. 14125
2. Ada berapa banyak bilangan pada barisan bilangan -2018, -2014, -2010, ..., 2046, 2050 ?
A. 1015
B. 1016
C. 1017
D. 1018
E. 1019
3. Jika barisan bilangan berikut adalah barisan bilangan bulat positif yang dihilangkan semua bilangan kelipatan 2 atau kelipatan 5 : 1, 3, 7, 9, 11, 13, 17, 19, ... maka bilangan ke 2019 nya adalah ...
A. 5043
B. 5047
C. 5049
D. 5051
E. 5053
4. Jika barisan bilangan berikut adalah barisan bilangan bulat positif yang merupakan gabungan dari bilangan kelipatan 2 atau kelipatan 3 : 2, 3, 4, 6, 8, 9, ... maka bilangan ke 2019 nya adalah ...
A. 3024
B. 3026
C. 3027
D. 3028
E. 3030

Perhatikan barisan bilangan berikut ini untuk soal nomor 5 dan 6

| | | | |
|----------|----|----|----|
| 1 | | | |
| 4 | | 7 | |
| 10 | 13 | 16 | |
| 19 | 22 | 25 | 28 |
| dst..... | | | |

5. Bilangan ke-43 dari kiri pada baris ke-100 adalah ...
A. 14971
B. 14973
C. 14975
D. 14977
E. 14979
6. Bilangan ke-417 dari kanan pada baris ke-1000 adalah ...
A. 1500244
B. 1500247
C. 1500250
D. 1500253
E. 1500256
7. Perhatikan barisan bilangan berikut ini

| |
|-----------|
| 1 |
| 2 3 4 |
| 5 6 7 8 9 |
| |
| |

Berapakah bilangan ke-100 dari kiri pada baris ke-100?

- A. 9801
B. 9901
C. 10000
D. 10100
E. 10101

1, 1, 2, 1, 2, 2, 1, 2, 2, 2, 1, 2, 2, 2, 2,

Perhatikan barisan bilangan
berikut ini untuk menjawab soal
8 dan 9

8. Nilai dari suku ke-2019 adalah ...
A. 1
B. 2
C. 3

- D. 4
- E. 5

9. Jumlah dari 2019 suku pertama barisan di atas adalah ...
- A. 3970
 - B. 3971
 - C. 3972
 - D. 3973
 - E. 3974

10. Perhatikan barisan bilangan berikut ini

| |
|---|
| 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 1, 0, 1, 1, 1, 2, 1, 3, 1, 4, 1, 5, |
|---|

Barisan bilangan di atas adalah barisan bilangan yang terbentuk dari bilangan bulat positif berurutan mulai dari 1 yang ditulis digit per digit. Pada barisan tersebut, suku ke-11 adalah 0 dan suku ke-15 adalah 2.

Berapakah nilai dari suku ke-2019?

- A. 1
 - B. 3
 - C. 5
 - D. 7
 - E. 9
11. Pada sebuah barisan aritmatika, suku ke-25 nya adalah 91. Jumlah dari 49-suku pertama pada barisan aritmatika tersebut adalah ...
- A. 4451
 - B. 4453
 - C. 4455
 - D. 4457
 - E. 4459
12. Pada sebuah barisan geometri, suku ke-4 ditambah suku ke-2 menghasilkan nilai 260. Sedangkan jika suku ke-4 ditambah dengan suku ke-6 akan menghasilkan nilai 6500. Berapakah jumlahan barisan dari suku ke-2 sampai ke-6?
- A. 7800
 - B. 7810
 - C. 7820
 - D. 7830
 - E. 7840
13. Tiga bilangan bulat yang jika dikalikan menghasilkan 125, ternyata membentuk barisan geometri yang berurutan. Pada saat yang sama, ketiga

bilangan adalah suku pertama, kedua, dan ketujuh pada suatu deret aritmatika. Carilah suku ke-delapan dari barisan aritmatika yang dimaksud.

- A. 25
- B. 29
- C. 33
- D. 37
- E. 41

14. Diketahui terdapat 5 buah bilangan yang membentuk barisan aritmatika. Setelah diamati lebih lanjut, ternyata bilangan ke-2, ke-3, dan ke-5 membentuk barisan geometri. Jika jumlah dari 5 buah bilangan tersebut adalah 20190, maka bilangan ke-5 tersebut adalah ...

- A. 8072
- B. 8074
- C. 8076
- D. 8078
- E. 8080

15. Telah ditemukan satu spesies lebah yang aneh di tahun ke-0, di mana lebah betina

akan melahirkan satu lebah jantan dan tetap hidup. Lebah jantan akan melahirkan satu lebah betina dan satu lebah jantan dan kemudian mati. Jika di tahun ke-0 diketahui hanya ada satu lebah betina, berapa banyak lebah yang hidup setelah 16 tahun?

- A. 0
- B. 1
- C. 1024
- D. 32768
- E. 65536

16. Diketahui barisan bilangan 6, 15, 28, 45, 66, ...dst. Suku ke-50 dari barisan bilangan tersebut adalah ...

- A. 4950
- B. 5101
- C. 5151
- D. 5305
- E. 5355

Perhatikan barisan bilangan berikut ini untuk soal nomor 17-20

| |
|---------------------------------------|
| -106, -74, -48, -28, -14, ..., -6398, |
|---------------------------------------|

17. Jika rumus suku ke- n pada barisan di atas dapat dinyatakan dalam bentuk $an^2 + bn + c$, maka nilai dari $2a + 5b + c$ adalah ...

- A. 40
- B. 45
- C. 50

- D. 55
- E. 60

18. Suku ke-25 dari barisan bilangan di atas adalah ...

- A. -990
- B. -992
- C. -994
- D. -996
- E. -998

19. Pada barisan di atas, bilangan -2918 adalah bilangan yang menempati urutan ke ...

- A. 32
- B. 34
- C. 36
- D. 38
- E. 40

20. Ada berapa bilangan pada barisan bilangan di atas?

- A. 50
- B. 51
- C. 52
- D. 53
- E. 54

21. Terdapat sebuah barisan bilangan yaitu 3, 7, 13, 21, 31, ... dst. Jumlah dari 50 suku pertama barisan bilangan tersebut adalah ...

- A. 44240
- B. 44245
- C. 44250
- D. 44255
- E. 44260

22. Pak Dengklek kini memiliki 100 orang cucu. Ia berniat untuk memberikan uang jajan untuk mereka. Aturannya adalah, mereka akan berbaris. Lalu anak pertama hanya akan mendapatkan 1 dollar, sedangkan anak selanjutnya akan mendapatkan uang 3 dollar lebih banyak dari anak sebelumnya. Setelah setengah cucu-cucunya diberikan uang jajan, ia kemudian menyadari uangnya hampir habis. Untuk itu, selanjutnya ia akan memberikan uang jajan pada cucunya 2 dollar lebih banyak dari anak sebelumnya. Berapakah dollar total uang yang dikeluarkan Pak Dengklek?

- A. 13675
- B. 13685
- C. 13695
- D. 13700
- E. 13735

23. Iwang dan Bimo sedang bermain sebut bilangan. Pada permainan ini, pemain akan bergantian menyebutkan barisan bilangan yang banyak bilangannya adalah lebih satu dari dari banyak bilangan yang disebutkan sebelumnya. Mereka sepakat bahwa Iwang akan bermain pertama dan selalu menyebutkan bilangan ganjil, sementara bimo akan selalu menyebutkan bilangan genap. Sehingga permainan awalnya adalah iwang akan menyebutkan 1, kemudian bimo 2, 4. Lalu iwang menyebutkan 3, 5, 7. Bimo melanjutkan dengan menyebut 6, 8, 10, 12. Begitu seterusnya. Bilangan ke-2019 yang disebutkan adalah ...
- A. 1984
 - B. 1986
 - C. 1988
 - D. 1990
 - E. 1992
24. Jumlah 10 suku pertama dari barisan 3, 12, 48, 192, ...dst adalah
- A. 1048573
 - B. 1048574
 - C. 1048575
 - D. 1048576
 - E. 1048577
25. Hasil dari $1x30 + 3x28 + 5x26 + \dots + 29x2$ adalah
- A. 2480
 - B. 2470
 - C. 2460
 - D. 2450
 - E. 2440
26. Hasil dari $1x2x3 + 2x3x4 + 3x4x5 + \dots + 25x26x27$ adalah ...
- A. 122550
 - B. 122650
 - C. 122750
 - D. 122850
 - E. 122950
27. Diketahui hasil kali umur Ani dan Budi 2 tahun yang lalu adalah 30, dan hasil kali umur Ani dan Budi 2 tahun yang akan datang adalah 58. Berapakah jumlah umur mereka 3 tahun yang akan datang?
- A. 7
 - B. 10
 - C. 13
 - D. 16

E. 18

28. Andi setiap hari pergi ke sekolah menggunakan sepeda dengan kecepatan a km/jam. Namun, di daerah tersebut terdapat angin yang berhembus terus menerus dari arah rumah ke sekolah dengan kecepatan b km/jam. Angin ini mempengaruhi kecepatan sepeda yang dikayuh oleh Andi dengan aturan

- Bila berjalan searah angin maka kecepatan menjadi $a+b$ km/jam
- Bila berjalan berlawanan dengan angin maka kecepatan menjadi $a-b$ km/jam.

Ia membutuhkan waktu 3 jam untuk berangkat dari rumah ke sekolah, sedangkan dalam perjalanan pulang ia membutuhkan waktu 4 jam. Apabila tidak ada angin yang berhembus, maka berapa jam yang dibutuhkan untuk menempuh perjalanan dari rumah ke sekolah?

- A. $21/7$
- B. $22/7$
- C. $23/7$
- D. $24/7$
- E. $25/7$

29. Jika hasil dari $\frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{60} + \frac{1}{120} + \dots + \frac{1}{50 \cdot 51 \cdot 52}$ bisa dinyatakan dalam bentuk $\frac{a}{b}$ dimana $\text{fpb}(a, b) = 1$, maka nilai dari $b - a$ adalah ...

- A. 3975
- B. 3977
- C. 3979
- D. 3941
- E. 3943

30. Diberikan beberapa persamaan berikut ini:

$$xy + x + y = 335$$

$$xz + x + z = 419$$

$$yz + z + y = 719$$

Nilai dari $2x - y + z$ adalah ...

- A. 30
- B. 31
- C. 32
- D. 33
- E. 34