PAKET 7

PELATIHAN ONLINE

2019

SMA

FISIKA

po.alcindonesia.co.id

WWW.ALCINDONESIA.CO.ID

@ALCINDONESIA

085223273373

MASSA BESERTA PENYUSUNNYA

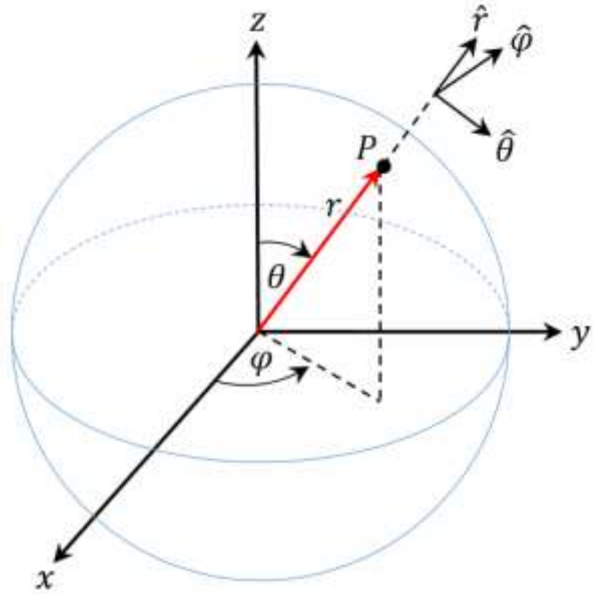
Massa pada mekanika klasik merupakan properti dari suatu objek atau bisa juga kumpulan dari partikel-partikel yang membentuk dari suatu objek. Dalam fisika Newton, massa juga bisa digeneralisasikan sebagai jumlah partikal pada objek. Massa jenis secara singkat didefinisikan sebagai massa persatuan ukur, entah itu persatuan panjang, persatuan luas maupun persatuan volume. Maka dari itu, terdapat 3 tipe massa jenis,

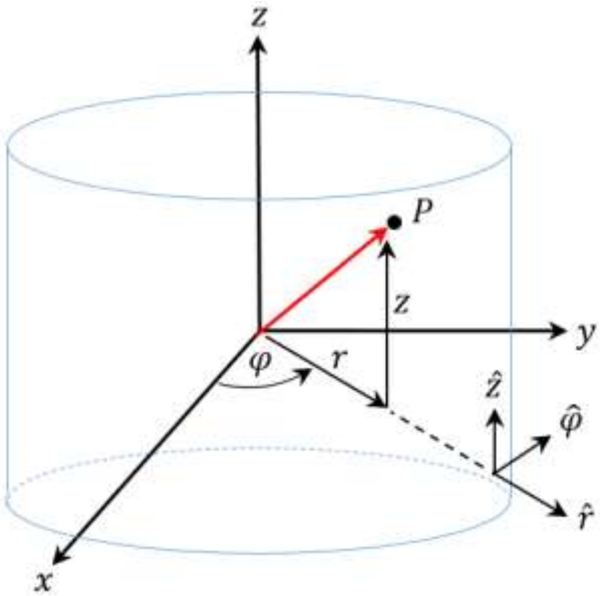
- ✓ Massa persatuan panjang λ (dibaca : lambda)
- ✓ Massa persatuan luas σ (dibaca : sigma)
- ✓ Massa persatuan volume ρ (dibaca : rho)

Mengenai massa jenis, ada juga definisi yang sempat saya kenalkan pada materi sebelumnya, yaitu penyusun homogen dan non-homogen. Massa dikatakan homogen jika massa jenisnya konstan untuk apapun parameternya (konstan di setiap bagian massa/terdistribusi merata). Dengan begitu, jelas sekali bahwa massa dikatakan non-homogen jika massa jenisnya berubah untuk suatu parameter tertentu.

KOORDINAT BOLA DAN TABUNG

Koordinat bola merupakan bagian dari koordinat polar juga, bedanya koordinat ini akan diterapkan pada bentuk bola. Koordinat bola tersusun atas 3 parameter, yaitu r, θ, φ. Asumsikan terdapat suatu titik P. Komponen r merupakan jarak yang diukur dari titi asal atau origin (besar dari vektor posisi), komponen θ merupakan besar sudut yang diukur dari sumbu z dan dinamakan sebagai sudut polar, dan komponen φ merupakan sudut yang diukur dari sumbu x terhadap proyeksi vektor $\vec{r}$ pada bidang kartesian dan dinamakan sebagai sudut azimuth. Agar lebih mudah memahami koordinat bola, saya akan kombinasikan koordinat bola dengan kartesian.





Pada gambar diatas, kita dapat menemukan hubungan antara koordinta bola dengan koordinat kartesian (gunanya jika kalian tidak begitu menguasai koordinat bola, kalian dapat gunakan koordinat kartesian).

$$dV = r^2 \sin\theta \; d\theta \; dr \; d\varphi$$

Diatas merupakan partisi volume dari bola. Bila kita lihat, terdapat 3 operator differensial yang mengharuskan kita menggunakan integral lipat (integral yang lebih dari satu fungsi).

Begitu juga kita dapat mencari infinitesimal luasan bola. Ingat, pada volume, jangkauan untuk r disesuaikan dengan batasnya, sedangkan untuk mencari luas, r selalu bernilai konstan, yaitu R radius itu sendiri. Kenapa ? *locus point* (kumpulan titik) pada luasan hanya terletak pada kulit itu sendiri, buka pada ruang kosong didalamnya. Maka, r bernilai konstan.

$$dA = R^2 \sin\theta \; d\theta \; d\varphi$$

KOORDINAT TABUNG

Koordinat tabung terdiri dari 3 komponen yang sedikit berbeda dengan koordinat bola (ruang 3 dimensi pasti terdiri dari 3 komponen), yaitu r, φ, z. Asumsikan terdapat suatu titik sembarang P pada koordinat tabung. Komponen r merupakan jarak dari sumbu z ke titik P, komponen φ merupakan sudut azimuth (mempunyai makna yang sama dengan koordinat bola) dan komponen z mempunyai makna yang sama dengan koordinat kartesian, mungkin bisa dikatakan ketinggian yang diukur dari proyeksi vektor. Sama seperti sebelumnya, kita bisa mencari hubungan koordinat tabung dengan koordinat kartesian dengan mudah (gunakan proyeksi-proyeksi vektor)

$$dV = r\,dr\,d\varphi\,dz$$

Partisi volume tabung

Untuk luasan tabung perlu diperhatikan, tabung mempunyai alas dan tutup lingkaran serta selimut tabung yang berbentuk segiempat.

$$dA_{alas} = dA_{tutup} = r\,dr\,d\varphi$$
$$dA_{selimut} = R\,d\varphi\,dz$$

INTEGRAL LIPAT

Definisi dari integral lipat adalah integral yang lebih dari satu fungsi (parameter). Banyak hal yang harus diperhatikan dari integral lipat.

Contoh

1. Tentukan nilai F dari $dF = 2x\,dx\,dy$

Mungkin sebagian dari kalian mengatakan mudah untuk melakukan integrasi macam ini.

$$F = \int dF = \iint 2x\,dx\,dy = 2\int x\,dx \int dy = x^2 y + c$$

Apakah dapat dikerjakan dengan cara seperti itu ? Jawabannya bisa benar bahkan bisa salah. Mengapa ? Integral diatas dapat dikerjakan dengan cara seperti itu jika parameter x dan y tidak mempunyai keterkaitan apapun (*independent variable*). Namun, bagaimana jika y merupakan suatu fungsi ? Caranya adalah lakukan integrasi secara berurutan. Sebagai berikut. Asumsikan bahwa $y = 4x - 3$.

$$F = \int dF = \iint 2x\,dx\,dy = 2\int x\,dx \int dy = 2\int x^2 y\,dx$$
$$F = 2\int x^2(4x-3)\,dx = 2\left(4\int x^3\,dx - 3\int x^2\,dx\right) = 2(x^4 - x^3) + c$$

TEOREMA PUSAT MASSA DAN MATEMATIKA FISIKA

Jika sistem mempunyai bentuk yang diskret (terbatas) dan bentuk normal, kita dapat gunakan konsep nilai rataan pada statistik (ingat, pusat massa juga merupakan posisi rata-rata). Ambil contoh ingin mencari pusat massa pada sumbu x dan y.

$$x_{PM} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3 + \cdots + m_nx_n}{m_1 + m_2 + m_3 + \cdots + m_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$$

$$y_{PM} = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3 + \cdots + m_n y_n}{m_1 + m_2 + m_3 + \cdots + m_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$$

Jika sistem mempunyai bentuk yang kontinu (berkesinambungan), seperti bola, tabung, kerucut dan sebagainya, tidak dapat dikerjakan dengan persamaan statistika diskret (mau sampai berapa lama kalian menjumlahkan tiap bagiannya ?). Maka dari itu, notasi sigma akan diubah menjadi notasi integral.

$$x_{PM} = \langle x \rangle = \frac{\int x\, dm}{\int dm}$$

$$y_{PM} = \langle y \rangle = \frac{\int y\, dm}{\int dm}$$

Dimana lambang $\langle\ \ \rangle$ merupakan lambang yang menunjukan nilai rata-rata dan dm merupakan persamaan infinitesimal dari sebuah massa ($dm = \rho\, dV\ atau\ \sigma\, dA\ atau\ \lambda\, dl$, mengikuti parameter sistem).

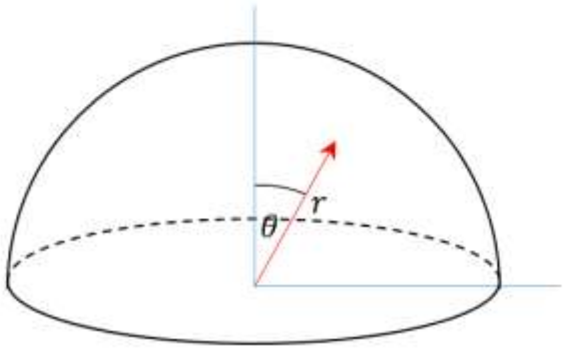
Contoh

1. Tentukan letak pusat massa dari setengah bola pejal yang homogen dan berjari-jari R

Untuk mendapatkan titik pusat massa pada sumbu x tidak perlu ditanya lagi, pasti terletak di tengah bola. Namun yan sulit adalah pusat massa pada sumbu y. Maka dari itu, integral lipat tidak bisa dihindari lagi.

$$y_{PM} = \langle y \rangle = \frac{\int y\, dm}{\int dm} = \frac{\int y\rho\, dV}{\int \rho\, dV}$$

Pada gambar dibawah ini, $y = r\cos\theta$ dan jangkauan sudut polar pada setengah bola pejal adalah $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ dan jangkauan dari sudut azimuth adalah $0 \leq \theta \leq 2\pi$



$$y_{PM} = \frac{\rho \int_{r=0}^{R} \int_{\theta=0}^{\pi/2} \int_{\varphi=0}^{2\pi} r\cos\theta\, r^2 \sin\theta\ \ d\theta\, dr\, d\varphi}{\rho \int_{r=0}^{R} \int_{\theta=0}^{\pi/2} \int_{\varphi=0}^{2\pi} r^2 \sin\theta\ \ d\theta\, dr\, d\varphi}$$

$$y_{PM} = \frac{\int_{r=0}^{R} r^3\, dr \int_{\theta=0}^{\pi/2} \cos\theta \sin\theta\, d\theta \int_{\varphi=0}^{2\pi} d\varphi}{\int_{r=0}^{R} r^2\, dr \int_{\theta=0}^{\pi/2} \sin\theta\, d\theta \int_{\varphi=0}^{2\pi} d\varphi}$$

Kerjakan integral satu per satu

$$\int_{r=0}^{R} r^3\,dr = \frac{1}{4}R^4;\ \int_{\theta=0}^{\pi/2} \cos\theta\sin\theta\,d\theta = \frac{1}{2}$$

Ingat, gunakan metode subtitusi aljabar pada integral trigonometri diatas

$$y_{PM} = \frac{\frac{\pi}{8}R^4}{\frac{2}{3}\pi R^3} = \frac{3}{8}R$$

Maka, dapat diketahui bahwa letak pusat massa pada sumbu y adalah $y_{PM} = \frac{3}{8}R$

MOMEN INERSIA

Momen inersia merupakan kecenderungan benda untuk berotasi yang ditentukan dari berbagai aspek pada bahan objeknya. Nantinya, jika kalian sudah mempelajari dinamika rotasi, momen inersia yang biasanya dilambangkan dengan I merupakan analog dengan massa pada dinamika translasi (mempunyai peran yang sama dengan massa). Besar dari suatu momen inersia (massa rotasi) ditentukan dari distribusi massanya dan sumbu rotasinya.

FORMULA DISKRET UNTUK MOMEN INERSIA

Sebelumnya, saya hanya ingin mengulang sedikit definisi mengenai diskret. Diskret mempunyai definisi sebagai terputus-putus, terbatas, tidak kontinu, titik tentu. Mungkin beberapa kata tersebut dapat membangkitkan lagi ingatan kalian pada materi sebelumnya, dimana diskret identik dengan notasi sigma dan kontinu identik dengan integral.

$$I = m_1 s_1^2 + m_2 s_2^2 + m_3 s_3^2 + \cdots + m_n s_n^2 = \sum_{i=1}^{n} m_i s_i^2$$

Dimana s merupakan jarak terdekat suatu objek dengan sumbu rotasi (jarak terdekat akan membentuk sudut siku-siku pada masing-masing titik

FORMULA KONTINU UNTUK MOMEN INERSIA

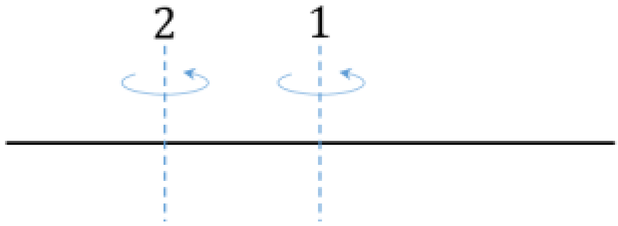
Untuk formula kontinu mudah saja untuk didapatkan, hanya mengganti notasi sigma pada persamaan diskret menjadi notasi integral.

$$I = \int s^2\,dm$$

Dimana dm merupakan infinitesimal dari massa (differensial massa) dan s merupakan jarak terdekat titik sembarang pada objek dengan sumbu rotasi (*vector perpendicular to the axis of rotation and extending from a point on the rotation axis to a point in the solid*). Saya akan berikan sedikit contoh bagaimana cara menggunakan persamaan diatas (ingat, aka nada integral lipat lagi).

Contoh :

Terdapat sebuah kawat (abaikan luas penampangnya) dengan panjang L. Ada 2 kasus sumbu rotasi yang akan kita cari momen inersianya. Diketahui, massa total kawat M.



Sumbu rotasi 1 membagi kawat menjadi 2 bagian yang sama panjang, sedangkan sumbu rotasi 2 membagi kawat menjadi 2 bagian, yaitu $\frac{1}{4}L$ dan $\frac{3}{4}L$.

Sumbu Rotasi 1
Komponen s merupakan jarak terdekat, asumsikan saja x

$$I = \int s^2\,dm = \lambda \int_{x=-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} x^2\,dx = \frac{1}{12}ML^2$$

Sumbu Rotasi 2

$$I = \int s^2\,dm = \lambda \int_{x=-\frac{L}{4}}^{\frac{3L}{4}} x^2\,dx = \frac{7}{48}ML^2$$

TEOREMA SUMBU SEJAJAR
Berikut merupakan persamaan teorema sumbu sejajar.

$$I = I_{PM} + Md^2$$

Dimana I_{PM} merupakan momen inersia pada pusat massa (untuk apapun sumbu rotasi dan nilai momen inersianya mengikuti sumbu rotasinya), sedangkan d merupakan jarak sumbu rotasi yang diinginkan, diukur dari sumbu rotasi pusat massa serta M yang merupakan massa sistem.

Contoh
Kita akan tes teorema sumbu sejajar pada contoh sebelumnya, yaitu kawat pada sumbu rotasi 2. Kita melihat bahwa, sumbu rotasi 1 merupakan sumbu rotasi pusat massa dan $\frac{1}{12}ML^2$ merupakan momen inersia pusat massa I_{PM}. Komponen d merupakan jarak sumbu rotasi pusat massa menuju sumbu rotasi yang diinginkan, yaitu sumbu rotasi 2. Maka $d = \frac{1}{4}L$.

$$I = I_{PM} + Md^2 = \frac{1}{12}ML^2 + M\left(\frac{L}{4}\right)^2 = \frac{7}{48}ML^2$$

Terdapat suatu persamaan yang menunjuka relasi antara I_x, I_y dan $I_z$tersebut, yaitu

$$I_x + I_y = I_z$$

Contoh :
Kita tahu bahwa momen inersia piringan adalah $\frac{1}{2}MR^2$ jika sumbu rotasi melalui pusat piringan. Kita juga sudah menurunkan bahwa jika sumbu rotasi vertikal (sumbu y), momen

inersia menjadi $\frac{1}{4}MR^2$. Coba kita perhatikan lebih baik lagi. Piringan massa merupakan lingkaran yang selalu simetri, maka kesimpulannya, jika sumbu rotasinya horizontal (sumbu x), momen inersianya juga sama dengan sumbu rotasi vertikal, yaitu $\frac{1}{4}MR^2$.

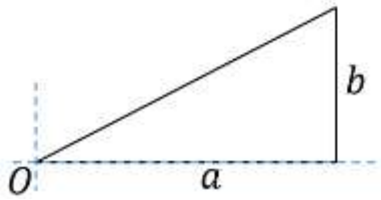
$$I_x = \frac{1}{4}MR^2;\ I_y = \frac{1}{4}MR^2;\ I_z = \frac{1}{2}MR^2$$
$$I_x + I_y = I_z$$

Sudah jelas terbukti bahwa persamaan $I_x + I_y = I_z$ benar adanya. Saya juga sudah memberikan sedikit contoh (walaupun hanya satu) mengenai persamaan diatas.

SOAL

Untuk nomor 1 dan 2

Terdapat sebuah bidang datar yang homogen berbentuk segitiga siku-siku. Diketahui, titik origin berada di bagian paling kiri segitiga.



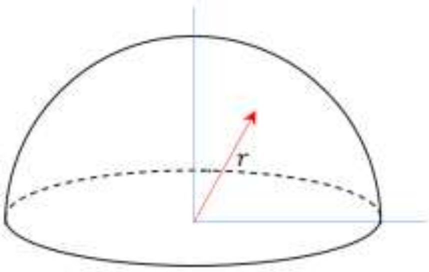
1. Tentukan posisi pusat massa pada sumbu x.
   a. $\frac{1}{3}a$
   b. $\frac{1}{2}a$
   c. $\frac{2}{3}a$
   d. $\frac{3}{4}a$
   e. a

2. Tentukan posisi pusat massa pada sumbu y.
   a. $\frac{1}{3}b$
   b. $\frac{1}{2}b$
   c. $\frac{2}{3}b$
   d. $\frac{3}{4}b$
   e. b

Untuk nomor 3 dan 4

Terdapat setengah bola pejal yang memilik keunikan pada distribusi massanya (non-homogen). Ditribusi massanya memenuhi persemaan dibawah ini.

$$\rho(r,\theta) = \frac{k}{r^2}\sin\theta$$



Diketahui, radius setengah bola pejal sebesar R dimana titik origin berada pada pusat setengah bola pejal.

3. Tentukan massa total setengah bola pejal.
   a. $\pi^2 kR$

b. $\frac{1}{2}\pi kR(\pi^2 + 1)$
c. $2\pi kR(\pi - 1)$
d. πkR
e. $\frac{1}{2}\pi^2 kR$

4. Tentukan letak pusat massa pada sumbu y.
   a. $\frac{1}{3}\frac{R}{\pi}$
   b. $\frac{2}{3}\frac{R}{\pi+1}$
   c. $\frac{1}{6}\frac{R}{\pi}$
   d. $\frac{R}{\pi^2}$
   e. $\frac{R}{2}$

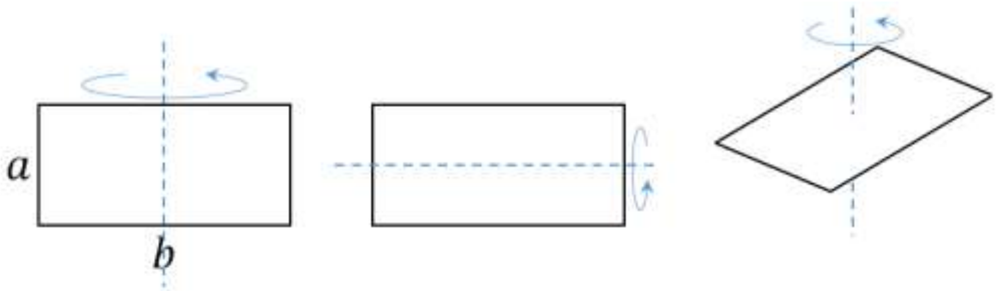
Untuk nomor 5 dan 6
Sebuah mobil roda empat membelok pada suatu tikungan berbentuk lingkaran. Lintasan tengah poros roda belakang membentuk lingkaran terhadap pusat tikungan tersebut dengan jari-jari R. Panjang poros atau jarak antara kedua roda belakang adalah H. Massa masing-masing roda belakang adalah m. Roda belakang dapat diasumsikan sebagai suatu cakram dengan jari-jari b.

5. Tentukan momen inersia roda terhadap sumbu rotasi z (sumbu z merupakan sumbu yang tegak lurus dengan bidang/menembus pusat massa roda).
   a. $2mR^2$
   b. $m(R + H)^2$
   c. mL^2
   d. $\frac{1}{2}mR^2$
   e. $\frac{3}{4}m\left(R^2 + \left(\frac{H}{2}\right)^2\right)$

6. Tentukan momen inersia roda terhadap pusat tikungan yang berbentuk lingkaran.
   a. $m\left(R + \frac{1}{2}H\right)^2 + \frac{1}{4}mR^2$
   b. $m(R + H)^2 + \frac{1}{2}mR^2$
   c. $m(R + 2H)^2 + mR^2$
   d. $m(R + 2H)^2$
   e. $m(2R - H)^2 - 2mR^2$

Untuk nomor 7, 8 dan 9

Terdapat sebuah lempengan besi tipis berbentuk persegi panjang yang massanya terdistribusi secara merata dan mempunyai sisi a dan b. Terdapat 3 model sumbu rotasi pada lempengan ini yang akan kita cari momen inersianya. Massa totalnya sebesar M



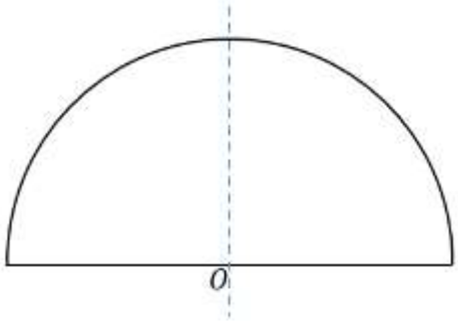
7. Tentukan momen inersia untuk model yang kiri.
   a. $\frac{1}{3}Mb^2$
   b. $\frac{1}{36}M(b+a)^2$
   c. $\frac{1}{8}Ma^2$
   d. $\frac{1}{12}Mb^2$
   e. $M(a^2+b^2)$

8. Tentukan momen inersia untuk model yang tengah.
   a. $\frac{1}{8}Mb^2$
   b. $\frac{1}{12}M(b+a)^2$
   c. $\frac{1}{12}Ma^2$
   d. $\frac{1}{24}Ma^2$
   e. $M(a^2-b^2)$

9. Tentukan momen inersia untuk model yang kanan.
   a. $\frac{1}{3}Mb^2$
   b. $\frac{1}{24}M(b+a)^2$
   c. $\frac{1}{6}Ma^2$
   d. $\frac{1}{2}Mb^2$
   e. $\frac{1}{12}M(a^2+b^2)$

Untuk nomor 10, 11 dan 12

Terdapat sebuah luasan setengah lingkaran yang mempunyai radius sebesar R. Diketahui titik origin berada pada titik tengah setengah lingkaran.



10. Tentukan letak pusat massa pada sumbu y jika distribusi massa homogen.
    a. $\frac{4}{3}\frac{R}{\pi}$
    b. $\frac{2}{3}\frac{R}{\pi+1}$
    c. $\frac{R}{\pi}$
    d. $\frac{2R}{\pi^2}$
    e. $\frac{1}{2}\pi R$

Asumsikan saat ini, distribusi massa mengikuti persamaan dibawah ini.

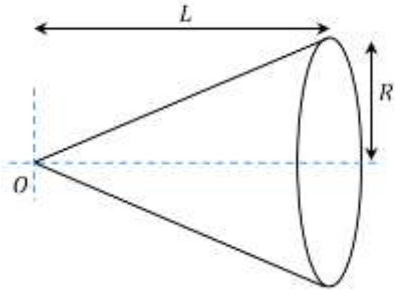
$$\sigma(r) = \frac{k}{r}$$

11. Tentukan massa total luasan setengah lingkaran tersebut.
    a. $\pi^2 kR$
    b. $\frac{1}{2}\pi kR(\pi^2 + 1)$
    c. $2\pi kR(\pi - 1)$
    d. πkR
    e. $\frac{1}{2}\pi^2 kR$

12. Tentukan letak pusat massa pada sumbu y.
    a. $\frac{4}{3}\frac{R}{\pi}$
    b. $\frac{2}{3}\frac{R}{\pi+1}$
    c. $\frac{R}{\pi}$
    d. $\frac{2R}{\pi^2}$
    e. $\frac{1}{2}\pi R$

Untuk nomor 13-16

Terdapat sebuah kerucut dengan tinggi L dan radius lingkaran sebesar R dimana titik origin berada pada bagian paling kiri kerucut. Terdapat 2 kasus pada masalah kerucut ini.



Kasus 1

Kerucut merupakan massa pejal (volume) dengan distribusi massa ρ homogeny

13. Tentukan besar volume kerucut.
    a. $\frac{1}{3}\pi R^3$
    b. $\frac{1}{3}\pi R^2 L$
    c. $\frac{4}{3}\pi R^3$
    d. $\frac{4}{3}\pi R^2 L$
    e. $\frac{1}{2}\pi R^2 L$

14. Tentukan letak pusat massa kerucut pada sumbu x.
    a. $\frac{3}{4}\frac{L^2}{\pi R}$
    b. $\frac{2}{3}L$
    c. $\frac{3}{4}L$
    d. $\frac{1}{3}(L-R)$
    e. $\frac{3}{4}R$

Kasus 2

Kerucut merupakan massa luasan (hanya permukaan saja) dengan distribusi massa σ homogen

15. Tentukan letak pusat massa kerucut pada sumbu x jika kerucut tidak mempunyai alas lingkaran.
    a. $\frac{3}{4}\frac{L^2}{\pi R}$
    b. $\frac{2}{3}L$
    c. $\frac{3}{4}L$
    d. $\frac{1}{3}(L-R)$

e. $\frac{3}{4}R$

16. Tentukan letak pusat massa kerucut pada sumbu x jika kerucut mempunyai alas lingkaran.
    a. $\frac{3}{4}\frac{L^2}{\pi R}$
    b. $\frac{5}{3}\frac{LR}{L+R}$
    c. $\frac{1}{6}\frac{L^2}{(L-R)}$
    d. $\frac{L}{3}\frac{(2L+3R)}{L+R}$
    e. $\left(\frac{2}{3}+\pi\right)R$