PAKET 2

TRY OUT OSK ONLINE

2019

SMA
MATEMATIKA

po.alcindonesia.co.id

WWW.ALCINDONESIA.CO.ID

@ALCINDONESIA

085223273373

PEMBAHASAN PAKET 2

1. Banyaknya fungsi $f: R \to R$ sehingga $f(x + f(y)) = f(x) + \sin y$ untuk semua $x, y \in R$ adalah . . . .
   A. 0
   B. 1
   C. 2
   D. 3
   E. 4

   KUNCI: A

   Ambil sebarang $a \in R$. Substitusi $x = a$ diperoleh $f(a + f(y)) = f(a) + \sin y$.
   Mudah dilihat bahwa *f* surjektif. Tapi, substitusi $x = 0$, diperoleh $f(f(y)) = f(0) + \sin y$.
   Karena *f* surjektif, ambil $f(y) = t$, maka $f(t) = f(0) + \sin y$.
   Jadi *f* terbatas, kontradiksi.
   Maka tidak ada fungsi *f* yang memenuhi.

2. Misalkan $A = \sqrt{5} + \sqrt{22 + 2\sqrt{5}}$ dan $B = \sqrt{11 + 2\sqrt{29}} + \sqrt{16 - 2\sqrt{29} + 2\sqrt{55 - 10\sqrt{29}}}$.
   Selisih *A* dan *B* adalah . . . .
   A. 0
   B. 1
   C. $\sqrt{2}$
   D. $\sqrt{2} - 1$
   E. $\sqrt{2} + 1$

   KUNCI: A

   Misalkan $x = 11 + 2\sqrt{29}$ dan $y = 11 - 2\sqrt{29}$.
   Perhatikan bahwa,

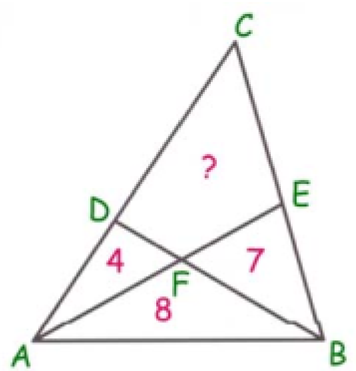
$$
\begin{aligned}
A &= \sqrt{5} + \sqrt{22 + 2\sqrt{5}} \\
&= \sqrt{\left(11 + 2\sqrt{29}\right)\left(11 - 2\sqrt{29}\right)} + \sqrt{\left(\sqrt{11 + 2\sqrt{29}} + \sqrt{11 - 2\sqrt{29}}\right)^2} \\
&= \sqrt{xy} + \sqrt{\left(\sqrt{x} + \sqrt{y}\right)^2} \\
&= \sqrt{xy} + \sqrt{x} + \sqrt{y}
\end{aligned}
$$

   Kemudian,

$$
\begin{aligned}
B &= \sqrt{11+2\sqrt{29}} + \sqrt{16-2\sqrt{29}+2\sqrt{55-10\sqrt{29}}} \\
&= \sqrt{11+2\sqrt{29}} + \sqrt{\left(\sqrt{\left(11+2\sqrt{29}\right)\left(11-2\sqrt{29}\right)}+\sqrt{11-2\sqrt{29}}\right)^2} \\
&= \sqrt{x} + \sqrt{\left(\sqrt{xy}+\sqrt{y}\right)^2} \\
&= \sqrt{x} + \sqrt{xy} + \sqrt{y}
\end{aligned}
$$

Diperoleh bahwa $A = B$. Jadi selisih A dan B adalah 0.

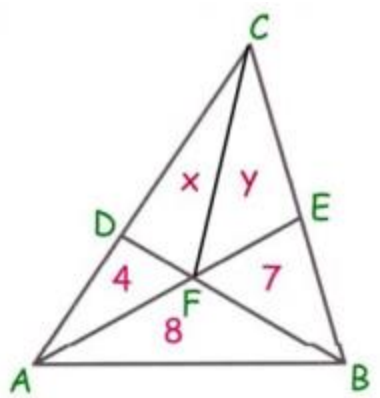
3. Dua garis lurus membagi sebuah segitiga menjadi empat bagian dengan luas tertulis seperti pada gambar. Tentukan luas keempat.



A. 19
B. 20
C. 21
D. 22
E. 23

KUNCI: C

Perhatikan gambar berikut.



Misalkan luas segitiga $CDF = x$ dan segitiga $CEF = y$.

Segitiga CDF dan DAF memiliki tinggi yang sama, maka:
$CD : DA = x : 4$ …………..(1)
Segitiga CDB dan BDA memiliki tinggi yang sama, maka:
$CD : DA = (x + y + 7) : (4 + 8)$ …………….(2)
Dari persamaan (1) dan (2) didapat:
$12x = 4x + 4y + 28$
$2x = y + 7$ ………………..(3)
Segitiga BEF dan CEF memiliki tinggi yang sama, maka:
$BE : EC = 7 : y$ ……………(4)
Segitiga BAE dan EAC memiliki tinggi yang sama, maka:
$BE : EC = (7 + 8) : (x + y + 4)$ …………(5)
Dari persamaan (4) dan (5) didapat:
$7x + 7y + 28 = 15y$
$8y = 7x + 28$ …………….(6)
Dari persamaan (3) dan (6) didapat $x = 28/3$ dan $y = 35/3$.
Luas bagian keempat = $x + y = 21$.

4. Misalkan $A_1, A_2, ..., A_n$ adalah himpunan bagian dari S = 1, 2, 3, ... , 14 yang memiliki 4 anggota dan memenuhi syarat $|A_i \cap A_j| \leq 1$ untuk semua $i, j = 1,2,3,....,n$ dan $i \neq j$. Nilai maksimum n adalah . . . .
A. 11
B. 12
C. 13
D. 14
E. 15

KUNCI: D

Perhatikan elemen 1. Ada berapa banyak subset yang boleh mengandung elemen 1? Misalkan ada k subset yang mengandung elemen 1. Karena semua subset ini mengandung 1, maka mereka tidak boleh memiliki elemen sekutu lain selain 1. Jadi dari 4 elemen yang ada, yang 3 haruslah disjoint. Karena ada 13 elemen yang tersisa, maka ada paling banyak $\left\lfloor \frac{13}{3} \right\rfloor = 4$ subset yang mengandung elemen 1.

Secara sama, untuk elemen 2 sampai 14, ada paling banyak 4 subset yang mengandung elemen tersebut.

Buatlah tabel yang terdiri dari 14 kolom dan n baris. Setiap kolom berkorespondensi dengan satu elemen, dan setiap baris korespondensi dengan satu subset. Jika $i \in A_j$, maka berilah tanda di sel di kolom ke-I dan baris ke-j. Kemudian, banyaknya sel yang diberi tanda adalah paling banyak 4×14, sebab setiap elemen hanya terdapat di paling banyak 4 subset saja. Namun, setiap baris memiliki tepat 4 sel yang diberi tanda, maka ada paling banyak 14 baris.

5. Apabila a, b, c adalah penyelesaian dari sistem persamaan

$$a+b+\left(c^2-8c+14\right)\sqrt{a+b-2}=1$$
$$2a+5b+\sqrt{ab+c}=3$$

Jumlah semua kemungkinan nilai abc adalah . . . .
A. –20
B. –21
C. –22
D. –23
E. –24

KUNCI: D

Karena $\sqrt{a+b-2}\geq 0$, maka $a+b\geq 2$. Dengan menggunakan AM-GM,

$$c^2+16\geq 8c \Leftrightarrow c^2-8c+14\geq -2$$

dan

$$(a+b-2)+1\geq 2\sqrt{a+b-2}.$$

Perhatikan bahwa,

$$\begin{aligned} a+b+\left(c^2-8c+14\right)\sqrt{a+b-2} &\geq a+b-2\sqrt{a+b-2} \\ &\geq a+b-2\frac{(a+b-2)+1}{2} \\ &=1 \end{aligned}$$

sehingga diperoleh $c = 4$, dan $a + b – 2 = 1$ atau $a = 3 – b$. Substitusikan a dan c ke dalam persamaan kedua, diperoleh persamaan kuadrat

$$10b^2+15b+5=0$$

dengan $b_1=-\frac{1}{2}$ dan $b_2=-1$. Dengan demikian abc memiliki dua jawab, yaitu –7 dan –16.
Jumlah semua kemungkinan nilai abc adalah –23.

6. Nilai $x + y - z$ jika x, y, z memenuhi persamaan berikut adalah . . . .

$$2x\left(1+y+y^2\right)=3\left(1+y^4\right)$$
$$2y\left(1+z+z^2\right)=3\left(1+z^4\right)$$
$$2z\left(1+x+x^2\right)=3\left(1+x^4\right)$$

A. 0
B. 1
C. 2
D. 3
E. 4

KUNCI: B

$$2x\left(1+y+y^2\right)=3\left(1+y^4\right)\Rightarrow 2x=\frac{3+3y^4}{1+y+y^2}$$
$$2y\left(1+z+z^2\right)=3\left(1+z^4\right)\Rightarrow 2y=\frac{3+3z^4}{1+z+z^2}$$
$$2z\left(1+x+x^2\right)=3\left(1+x^4\right)\Rightarrow 2z=\frac{3+3x^4}{1+x+x^2}$$

Perhatikan bahwa x, y, z adalah bilangan positif. Dengan menjumlahkan ketiga persamaan didapat:

$$2x+2y+2z=\frac{3+3y^4}{1+y+y^2}+\frac{3+3z^4}{1+z+z^2}+\frac{3+3x^4}{1+x+x^2}$$

Pindahkan ruas kiri ke ruas kanan, lalu samakan penyebut, didapat:

$$\frac{3+3y^4}{1+y+y^2}-2y+\frac{3+3z^4}{1+z+z^2}-2z+\frac{3+3x^4}{1+x+x^2}-2x=0$$
$$\frac{3y^4-2y^3-2y^2-2y+3}{1+y+y^2}+\frac{3z^4-2z^3-2z^2-2z+3}{1+z+z^2}+\frac{3x^4-2x^3-2x^2-2x+3}{1+x+x^2}=0$$
$$\frac{(y-1)^2\left(3y^2+4y+3\right)}{1+y+y^2}+\frac{(z-1)^2\left(3z^2+4z+3\right)}{1+z+z^2}+\frac{(x-1)^2\left(3x^2+4x+3\right)}{1+x+x^2}=0$$

Dimana ketiga suku adalah suku-suku positif, maka pastilah:

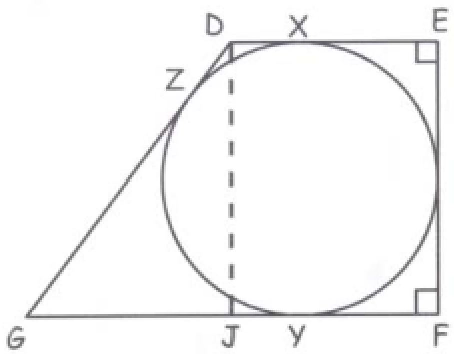
$$\frac{(y-1)^2\left(3y^2+4y+3\right)}{1+y+y^2}=0\Rightarrow y=1$$
$$\frac{(z-1)^2\left(3z^2+4z+3\right)}{1+z+z^2}=0\Rightarrow z=1$$
$$\frac{(x-1)^2\left(3x^2+4x+3\right)}{1+x+x^2}=0\Rightarrow x=1$$

Jadi $(x, y, z) = (1, 1, 1)$. Dengan demikian $x + y - z = 1$.

7. Sebuah trapesium *DEFG* dengan sebuah lingkaran dalam menyinggung keempat sisinya dan berjari-jari 2 serta berpusat di *C*. Sisi *DE* dan *GF* adalah sisi yang sejajar dengan $DE < GF$ dan $DE = 3$. Diketahui bahwa $\angle DEF = \angle EFG = 90^o$. Tentukan luas trapesium.
   A. 15
   B. 16
   C. 17
   D. 18
   E. 19

   KUNCI: D

   Perhatikan gambar berikut.



   Misalkan garis *DG* menyinggung lingkaran di titik *Z* dan garis *GF* menyinggung lingkaran di titik *Y* maka $GZ = GY$ dan $FY = 2$.
   Misalkan garis *DE* menyinggung lingkaran di titik *X* maka $DX = 3 - 2 = 1 \rightarrow DZ = DX = 1$.
   Tarik garis dari titik *D* tegak lurus *GF* memotong *GF* di titik *J* maka $DJ = 4$.
   Dengan menganggap $GZ = GY = k$ maka pada ΔDGJ berlaku :
   $(k + 1)^2 = (k - 1)^2 + 4^2 \rightarrow k = 4$
   $GF = GY + YF = 4 + 2 = 6$
   Luas trapesium = $(6 + 3)/2$ *x* $4 = 18$.

8. Ada 111 koin yang akan ditempatkan pada kotak-kotak di tabel $n \times n$. Selisih dari banyak koin pada dua kotak bersebelahan adalah 1. Berapa nilai maksimal *n* agar ini mungkin?
   A. 10
   B. 11
   C. 12
   D. 13
   E. 14

   KUNCI: D

Bukti bahwa $n < 15$: Kalau $n \geq 15$, ada 225 kotak, sedikitnya ada 112 kotak yang banyak koinnya ganjil, total koin minimum 112. Kontradiksi.
Bukti bahwa n tidak boleh genap: Kalau n genap, jumlah koinnya juga nanti genap.
Bukti bahwa n = 13 mungkin: Warnai kotak-kotaknya hitam-putih, ujung-ujungnya hitam. Jadi ada 85 kotak hitam, 84 kotak putih. 85 kotak hitam itu masing-masing diisi satu koin. Kita tinggal masukkan 111 – 85 = 26 koin lagi. Masukkan masing-masing 2 kedalam 13 kotak.
Jadi nilai n maksimal adalah 13.

9. Misalkan $f(x)$ adalah polinomial berderajat 8, dan $f(m) = \dfrac{1}{m}$ untuk m = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, dan 9. Nilai $10f(10)$ adalah . . . .
   A. 1
   B. 2
   C. 3
   D. 4
   E. 5

   KUNCI: B

   Misalkan $g(x) = xf(x) - 1$ maka g berderajat 9. Jelas bahwa $g(1) = g(2) = \ldots = g(9) = 0$. Jadi diperoleh $g(x) = c(x-1)(x-2)\ldots(x-9)$.

   Masukkan $x = 0$, diperoleh $g(0) = 0f(0) - 1 = -1$. Jadi $g(0) = c(0-1)(0-2)\ldots(0-9) = -1$, atau $-9!c = -1 \rightarrow c = \dfrac{1}{9!}$. Substitusikan, didapat $f(10) = \dfrac{2}{10} \rightarrow 10f(10) = 2$.

10. Pasangan tripel (x, y, z) yang memenuhi bahwa salah satu bilangan jika ditambahkan dengan hasil kali kedua bilangan yang lain hasilnya adalah 2 ada sebanyak . . . .
    A. 0
    B. 1
    C. 2
    D. 3
    E. 4

    KUNCI: C

    Dari informasi di soal dapat disusun tiga persamaan berikut:

$$x + yz = 2 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$
$$y + xz = 2 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$
$$z + xy = 2 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

Dari (1) − (2) → $x - y + z(y - x) = 0 \rightarrow x - y - z(x - y) = 0$
Ekivalen dengan $(z - 1)(x - y) = 0$ → Maka $z = 1$ atau $x = y$

- ✓ Untuk $z = 1$
  $x + y = 1$
  $1 + xy = 2$
  $x(1 - x) = 1 \rightarrow x^2 - x + 1 = 0$ (tidak ada penyelesaian real sebab Diskriminan < 0)
- ✓ Untuk $x = y$
  $x + xz = 2$
  $z + x^2 = 2$
  $x - z + x(z - x) = 0$
  $(x - 1)(x - z) = 0 \rightarrow x = 1$ atau $x = z$

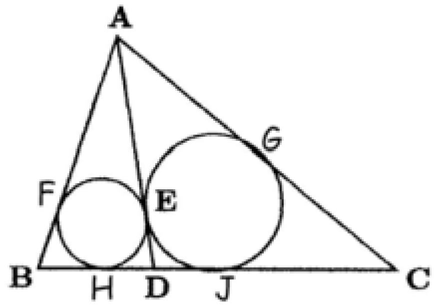
- ✓ Untuk $x = 1$
  $y = x = 1 \rightarrow z + 1 = 2 \rightarrow z = 1$. Tripel (x, y, z) yang memenuhi adalah (1, 1, 1)
- ✓ Untuk $x = z$
  $y = x = z \rightarrow x^2 + x = 2 \rightarrow (x - 1)(x + 2) = 0 \rightarrow x = 1$ atau $x = 2$
  Tripel yang memenuhi adalah (1, 1, 1) dan (−2, −2, −2)

Semua tripel (x, y, z) yang memenuhi adalah (1, 1, 1) dan (−2, −2, −2).
Jadi banyak tripel yang memenuhi sebanyak 2 pasang.

11. Segitiga ABC memiliki sisi AB = 137, AC = 241 dan BC = 200. Titik D terletak pada sisi BC sehingga lingkaran dalam ΔABD dan lingkaran dalam ΔACD menyinggung sisi AD di titik yang sama, yaitu E. Tentukan panjang CD.
    A. 150
    B. 151
    C. 152
    D. 153
    E. 154

    KUNCI: C

    Perhatikan gambar berikut.



Misalkan garis AB menyinggung lingkaran di F dan G. Garis BC menyingung lingkaran di H dan J.
Panjang $AF = x \rightarrow AE = AF = x$ dan $BF = 137 - x \rightarrow AG = AE = x \rightarrow BH = BF = 137 - x$
Panjang $GC = 241 - x \rightarrow CJ = CG = 241 - x$
Misalkan panjang $DE = y \rightarrow DH = DJ = DE = y$
$BC = BH + HD + DJ + CJ = 137 - x + y + y + 241 - x = 378 + 2y - 2x$
$200 = 378 + 2y - 2x \rightarrow x - y = 89$
$BD = 137 - x + y = 137 - 89 = 48$
$CD = CJ + DJ \rightarrow CD = 241 - x + y \rightarrow CD = 241 - (x - y)$
$CD = 241 - 89$
$CD = 152$

12. Untuk $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ dan setiap subhimpunan tak kosongnya, *jumlah bergantian* didefinisikan sebagai berikut: Susun bilangan-bilangan pada himpunan dalam urutan menurun dan kemudian, dimulai dari yang terbesar, secara bergantian tambah dan kurangi bilangan secara berurutan. (Contohnya jumlah bergantian untuk $\{1, 2, 4, 6, 9\}$ adalah $9 - 6 = 4 - 2 = 1 = 6$ dan untuk $\{5\}$ adalah 5.) Jumlah semua *jumlah bergantian* untuk $n = 7$ adalah . . . .
A. 445
B. 446
C. 447
D. 448
E. 449

KUNCI: D

Untuk setiap subhimpunan $A \mid 7 \notin A,$ kita pasangkan dengan subhimpunan $B \mid B = A \cup 7.$ Jumlah dari jumlah bergantian dari kedua himpunan ini adalah 7. Ada 2^7 subhimpunan, sehingga ada 2^6 pasangan subhimpunan. Jadi totalnya adalah $7 \times 2^6 = 448.$

13. Semua bilangan real a yang memenuhi bahwa dua polinomial $x^2 + ax + 1$ dan $x^2 + x + a$ memiliki sedikitnya satu akar yang sama ada sebanyak . . . .

A. 0
B. 1
C. 2
D. 3
E. 4

KUNCI: B

Misalkan p adalah akar yang sama maka $p^2 + ap + 1 = 0$ dan $p^2 + p + a = 0$.
Dengan mengurangkan kedua persamaan didapat:

$$ap + 1 - p - a = 0$$
$$(a - 1)(p - 1) = 0 \rightarrow a = 1 \text{ atau } p = 1$$

- ✓ Untuk $a = 1$
  Kedua polinomial akan sama yaitu $x^2 + x + 1$. Namun diskriminan polinomial kurang dari 0. Maka tidak ada akar real.
- ✓ Untuk $p = 1$
  $x^2 + ax + 1 = (x - 1)(x - k)$
  Nilai $k = 1$ maka $a = -2$
  $x^2 + x + a = (x - 1)(x - a) = x^2 - (a + 1)x + a$
  $1 = -(a + 1) \rightarrow a = -2$
  Nilai a yang memenuhi adalah $a = -2$.

Jadi banyaknya solusi sebanyak 1 solusi.

14. Misalkan n adalah bilangan lima digit dan m adalah bilangan empat digit yang didapat dengan menghapus digit yang ada di tengah dari bilangan n. Semua nilai n yang memenuhi bahwa $\frac{n}{m}$ adalah bilangan bulat ada sebanyak . . . .
    A. 60
    B. 70
    C. 80
    D. 90
    E. 100

KUNCI: D

Misalkan bilangan semula adalah $n = (abcde) = 10000a + 1000b + 100c + 10d + e$ maka $m = (abde) = 1000a + 100b + 10d + e$. Karena n/m bulat maka haruslah:
$10000a + 1000b + 100c + 10d + e = k(1000a + 100b + 10d + e)$ dengan $k \in$ bilangan asli.

- ✓ Untuk $k > 10$ maka $k_{min} = 11$
  $1000a(k - 10) + 100b(k - 10) + 10d(k - 1) + e(k - 1) = 100c$
  Nilai minimal ruas kiri = $1000(1)(1) + 100(1)(1) + 10(1)(1) + 1(1) > 1000$

Nilai maksimal ruas kanan = 100(9) = 900
Sehingga tidak ada nilai $k > 10$ yang memenuhi.

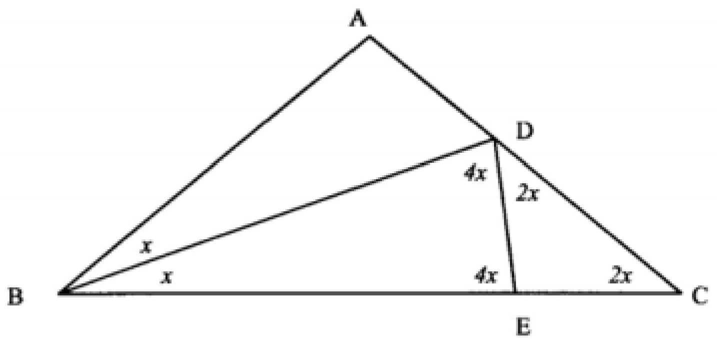
- ✓ Untuk $k < 10$ maka $k_{maks} = 9$
  $1000a(10 - k) + 100b(10 - k) + 100c = 10d(k - 1) + e(k - 1)$
  Nilai minimal ruas kiri = $1000(1)(1) + 100(1)(1) + 100(1) > 1000$
  Nilai maksimal ruas kanan = $10(9)(8) + 9(8) < 1000$
  Sehingga tidak ada nilai $k > 10$ yang memenuhi
- ✓ Untuk $k = 10$
  $10000a + 1000b + 100c + 10d + e = 10000a + 1000b + 100d + 10e$
  $100c = 9(10d + e)$
  Karena 9 tidak membagi 100 maka c harus habis dibagi 9 $\rightarrow c = 0$ atau $c = 9$
  Untuk $c = 9$ tidak mungkin sebab $9(10d + e) \leq 9(90 + 9) < 900 \rightarrow$ maka $c = 0$
  Karena $c = 0$ maka $10d + e = 0$ yang berakibat $d = 0$ dan $e = 0$
  Maka $n = 10000a + 1000b$
  Nilai-nilai n yang memenuhi adalah 10000, 11000, 12000, 13000, ⋯, 99000.

Maka ada sebanyak 90 solusi.

15. Segitiga ABC adalah segitiga sama kaki dengan $AB = AC$. Garis bagi dari titik B memotong AC di D dan diketahui bahwa $BC = BD + AD$. Tentukan besar $\angle A$.
    A. 80^o
    B. 90^o
    C. 100^o
    D. 110^o
    E. 120^o

KUNCI: C

Perhatikan gambar berikut.



Dibuat titik E yang terletak pada sisi BC sehingga $BE = BD$ maka $AD = EC$. Karena BD adalah garis bagi segitiga ABC maka $\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{CD} \rightarrow \frac{CE}{CD} = \frac{AD}{CD} = \frac{AB}{BC}$

Karena segitiga ABC sama kaki maka $\frac{CE}{CD} = \frac{AD}{CD} = \frac{AB}{BC} = \frac{CA}{BC}$

Pada segitiga CED dan CAB berlaku sudut DCE = sudut ACB dan $\frac{CE}{CD} = \frac{CA}{BC}$ yang membuat segitiga CED sebangun dengan CAB.

Maka $\angle DCE = \angle ACB$; $\angle CDE = \angle ABC$ dan $\angle CED = \angle CAB$
Misalkan $\angle ABC = 2x$ maka $\angle CDE = \angle DCE = 2x$ maka $\angle DEC = 180^o - 4x \rightarrow \angle DEB = 4x$
Karena $\angle BDE$ sama kaki maka $\angle BDE = \angle DEB = 4x$
Karena BD adalah garis bagi sudut B maka $\angle DBE = x$
Pada $\angle BDE$ berlaku: $x + 4x + 4x = 180^o \rightarrow x = 20^o$
$\angle A = 180^o - 4x$
$\angle A = 100^o$

16. Seorang siswa yang bosan berjalan di ruangan yang terdapat barisan loker tertutup, dinomori 1 sampai 1024. Ia membuka loker nomor 1, kemudian secara bergantian melewati dan membuka loker yang tertutup. Setelah mencapai ujung ruangan, ia berbalik dan mulai lagi. Ia membuka loker pertama yang tertutup, kemudian bergantian melewati atau membuka loker yang tertutup. Ia terus melakukan ini sampai semua loker terbuka. Berapa nomor loker yang terakhir dibuka?
A. 340
B. 341
C. 342
D. 343
E. 344

KUNCI: C

Misalkan dengan n loker maka loker yang terakhir dibuka adalah $f(n)$. Maka dengan $2n$ loker, loker yang pertama dibuka adalah $1, 3, 5, . . . , 2n - 1$. Sekarang loker yang tersisa adalah $2n, 2n - 2, . . . , 4, 2$ dan situasinya mirip dengan situasi n loker, hanya arahnya terbalik. Jadi dengan $2n$, loker yang terakhir dibuka adalah $2(n + 1 - f(n))$ (faktor 2 karena semua lokernya bilangan genap, dan $n + 1 - f(n)$ karena urutannya dibalik).
Dari sini tinggal mencari:

$$f(2) = 2$$
$$f(4) = 2$$
$$f(8) = 6$$
$$f(16) = 6$$
$$f(32) = 22$$
$$f(64) = 22$$
$$f(128) = 86$$
$$f(256) = 86$$
$$f(512) = 342$$
$$f(1024) = 342$$

Maka loker terakhir yang dibuka adalah 342.

17. Pasangan bilangan asli x dan y yang memenuhi persamaan $x^3 + 113 = y^3$ ada sebanyak . . . .
    - A. 0
    - B. 1
    - C. 2
    - D. 3
    - E. 4

    KUNCI: A

    Karena $x^3 + 113 = y^3$ maka $x^3 \equiv y^3 \pmod{11}$
    Tetapi 03, 13, 23, ⋯, 103 ≡ 0, 10, 3, 6, 2, 7, 4, 9, 5, 8, 1 (mod 11) yang berarti semua sisanya berbeda.
    Maka harus dipenuhi bahwa $x \equiv y \pmod{11}$ yang berati harus dipenuhi $y = x + 11k$.
    $y^3 - x^3 = (x + 11k)^3 - x^3 = 3 \cdot 11k \cdot x^2 + 3\,(11k)^2x + 11k^3 > 11k^3 \geq 113.$
    Maka persamaan $x^3 + 113 = y^3$ tidak memiliki solusi bilangan asli x dan y.

18. Dua orang siswa kelas tujuh mengikuti suatu kompetisi catur dengan seluruh peserta selain mereka adalah siswa kelas delapan. Masing-masing peserta akan bertemu tepat satu kali dengan masing–masing lawan dengan ketentuan penilaian: 1 jika menang, setengah jika remis sedangkan jika kalah 0. Total nilai yang diperoleh kedua siswa kelas tujuh adalah 8 sedangkan semua siswa kelas delapan memperoleh nilai yang sama. Berapa jumlah semua kemungkinan banyak siswa kelas delapan yang mengikuti kompetisi?
    - A. 20
    - B. 21
    - C. 22
    - D. 23
    - E. 24

    KUNCI: B

Misalkan jumlah siswa kelas delapan = n.

Maka banyaknya pertandingan = $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$ = nilai total.

Misalkan masing-masing nilai siswa kelas delapan = k, maka:

$$8+nk=\frac{1}{2}(n+1)(n+2)\rightarrow n^2-(2k-3)n-14=0$$

Karena k adalah bilangan asli maka penjumlahan kedua nilai n merupakan bilangan bulat.
Karena hasil kali kedua nilai $n = -14$ maka kedua nilai n pasti bulat.
Maka kemungkinan kedua nilai n adalah $(1, -14)$, $(2, -7)$, $(7, -2)$ dan $(14, -1)$ yang masing-masing jika dijumlahkan secara berurutan akan diperoleh -13, -5, 5, 13.

- ✓ Untuk $2k - 3 = -13 \rightarrow k = -5$ (tidak memenuhi)
- ✓ Untuk $2k - 3 = -5 \rightarrow k = -1$ (tidak memenuhi)
- ✓ Untuk $2k - 3 = 5 \rightarrow k = 4$
- ✓ Untuk $2k - 3 = 13 \rightarrow k = 8$

Akan dicek kedua kemungkinan nilai k tersebut.

- ✓ Jika $k = 4$
  Nilai n positif yang memenuhi adalah 7. Nilai total = $\frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 9 = 36$. Maka nilai total ketujuh siswa kelas delapan = $36 - 8 = 28$ yang berarti masing-masing siswa kelas delapan memperoleh nilai 4.
- ✓ Jika $k = 8$
  Nilai n positif yang memenuhi adalah 14. Nilai total = $\frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 16 = 120$. Maka nilai total keempat belas siswa kelas delapan = $120 - 8 = 112$ yang berarti masing-masing siswa kelas delapan memperoleh nilai 8.

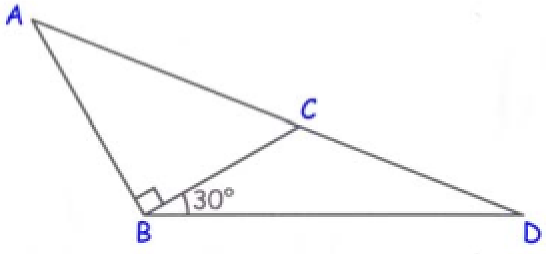
Maka ada 2 kemungkinan banyak siswa kelas 8 yang mengikuti kompetisi yaitu 7 dan 14 sehingga jumlahnya 21.

19. Sebuah segitiga ABC dengan $\angle B = 90^o$. Titik D terletak pada perpanjangan AC sedemikian sehingga $\angle CBD = 30^o$. Panjang $AB = CD = 1$. Tentukan panjang AC.

A. 1
B. $\sqrt[3]{2}$
C. $\sqrt[3]{3}$
D. $\sqrt[3]{2}-1$
E. $\sqrt[3]{2}+1$

KUNCI: B

Perhatikan gambar berikut:



Misalkan $\angle ACB = x$ maka $BC = AC \cos x$.
$AB = AC \sin x = CD = BC/AB = \cot x$, maka $BC = \cot x$.
$\angle BCD = 180^o - x$
$\angle CDB = 180^o - 30^o - (180^o - x) = x - 30^o$

Pada segitiga BCD berlaku:

$$\frac{BC}{\sin \angle CDB} = \frac{CD}{\sin 30^o} = 2$$

$$BC = 2\sin(x - 30^o) = \cot x$$

$$2\sin x \cos 30^o - 2\sin 30^o \cos x = \cot x$$

$$\sin^2 x\sqrt{3} = \cos x + \cos x \sin x$$

$$3\sin^4 x = (1-\sin 2x)(1+\sin x)^2 = 1+\sin^2 x + 2\sin x - \sin^2 x - \sin^4 x - 2\sin^3 x$$

$$4\sin^4 x + 2\sin^3 x - 2\sin x - 1 = 0$$

$$(2\sin^3 x - 1)(2\sin x + 1) = 0$$

Karena x ada diantara 0^o sampai 90^o maka $\sin x = -½$ tidak memenuhi.

Maka $\sin x = \sqrt[3]{\frac{1}{2}} \rightarrow AC \sin x = 1 \rightarrow AC = \sqrt[3]{2}$

20. Ada sebuah kode kunci yang terdiri dari 5 digit *abcde*, dengan *a*, *b*, *c*, *d*, *e* tidak sama. Kode kunci *abcde* merupakan bilangan asli. Digit *e* merupakan anggota prima terbesar. Kode kunci itu terurut naik. Berapa banyak kode kunci yang dapat terbentuk?
    A. 12
    B. 14
    C. 16
    D. 18
    E. 20

    KUNCI: C

    i. Untuk $e = 7$, bilangan tersisa 1, 2, 3, 4, 5, 6. Banyaknya kemungkinan adalah $C(6, 4) = 15$.
    ii. Untuk $e = 5$, bilangan tersisa 1, 2, 3, 4. Banyaknya kemungkinan adalah $C(4, 4) = 1$.
    iii. Untuk $e = 2$ atau 3 tidak ada bilangan tersisa, maka kasus ini trivial.

Jadi, total kemungkinan = 15 + 1 = 16.

21. Misalkan $f(x) = x^2 + x$, maka banyaknya solusi bilangan asli a dan b yang memenuhi persamaan $4f(a) = f(b)$ adalah . . . .
    A. 0
    B. 1
    C. 2
    D. 3
    E. 4

    KUNCI: A

    Persoalan di atas sama dengan mencari solusi a dan b bilangan asli yang memenuhi $4a^2 + 4a = b^2 + b$. Akan dibuktikan bahwa tidak ada bilangan asli yang memenuhi persamaan tersebut.

    Anggap bahwa terdapat bilangan asli a dan b yang memenuhi $4a^2 + 4a = b^2 + b$.
    - ✓ Jika $b > 2a$
      Karena a dan b bilangan asli maka $b + 1 \geq 2a + 2$
      $b(b + 1) > 2a(2a + 2)$
      $b2 + b > 4a^2 + 4a$ yang berarti tidak ada bilangan asli a dan b yang memenuhi $4a^2 + 4a = b^2 + b$.
    - ✓ Jika $b < 2a$
      Karena a dan b bilangan asli maka $b + 1 \leq 2a$
      $b(b + 1) < 2a \cdot 2a \rightarrow b(b + 1) < 4a^2$
      $b(b + 1) < 4a^2 + 4a$ yang berarti tidak ada bilangan asli a dan b yang memenuhi $4a^2 + 4a = b^2 + b$
    - ✓ Jika $b = 2a$
      $b(b + 1) = 2a(2a + 1) = 4a^2 + 2a$ yang tidak sama dengan $4a^2 + 4a$ untuk a bilangan asli.

    Terbukti bahwa tidak ada bilangan asli a dan b yang memenuhi $4a^2 + 4a = b^2 + b$. Maka banyak solusi asli untuk fungsi tersebut adalah nol.

22. Tentukan nilai terbesar z yang memenuhi $x + y + z = 5$ dan $xy + yz + xz = 3$.
    A. $\frac{1}{3}$
    B. $\frac{2}{3}$
    C. $\frac{1}{2}$
    D. 1

E. $1\frac{1}{3}$

KUNCI: A

Perhatikan bahwa:

$$(x+y+z)^2 = 5^2 = 25$$
$$\rightarrow x^2+y^2+z^2+2(xy+y+zx) = 25 \rightarrow x^2+y^2 = 19-z^2$$
$$x+y = 5-z$$
$$x^2+y^2+2xy = 25-10z+z^2$$
$$19-z^2+2xy = 25-10z+z^2$$

Mengingat bahwa: $2xy \le x^2+y^2$ maka:

$$19-z^2+2xy \le 19-z^2+x^2+y^2$$
$$25-10z+z^2 \le 19-z^2+19-z^2$$
$$3z^2-10z-13 \le 0$$
$$(3z-13)(z+1) \le 0$$
$$-1 \le z \le \frac{13}{3}$$

Maka nilai maksimal *z* adalah $\frac{13}{3}$.

23. Diberikan sebuah lingkaran berjari-jari *r* dan sebuah garis *l* yang menyinggung lingkaran di titik *P*. Dari sebuah titik *R* yang terletak pada lingkaran dibuat garis *RQ* tegak lurus garis *l* dengan titik *Q* terletak pada garis *l*. Tentukan luas maksimum dari segitiga *PQR*.

A. $\frac{1}{8}r^2\sqrt{3}$

B. $\frac{3}{8}r^2\sqrt{3}$

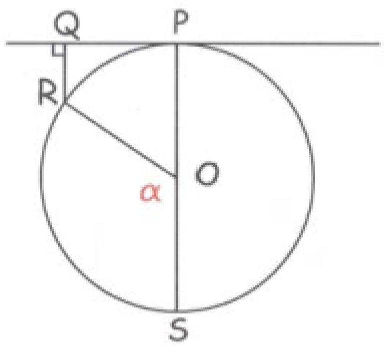
C. $\frac{5}{8}r^2\sqrt{3}$

D. $\frac{7}{8}r^2\sqrt{3}$

E. $\frac{5}{9}r^2\sqrt{3}$

KUNCI: B

Perhatikan gambar berikut.



Anggap O adalah pusat lingkaran. Dibuat garis PS melalui O sehingga PS adalah diameter lingkaran. Maka garis PS akan tegak lurus l dan akan membuat PS sejajar RQ.
Misalkan $\angle SOR = \alpha$. Baik untuk $RQ \geq r$ maupun $RQ \leq r$ pasti berlaku $PQ = r \sin \alpha$.

$RQ = r + r \cos \alpha$ dengan $RQ \leq r$ jika $90^o \leq \alpha < 180^o$ dan $RQ \geq r$ jika $0^o < \alpha \leq 90^o$

Luas $\Delta PQR = \frac{1}{2}(r \sin \alpha)(r + r \cos \alpha)$
Luas ΔPQR akan maksimum bila turunan pertama $\frac{1}{2}(r \sin \alpha)(r + r \cos \alpha) = 0$
$\frac{1}{2} r \cos \alpha (r + r \cos \alpha) + \frac{1}{2}(r \sin \alpha)(-r \sin \alpha) = 0$
$\cos \alpha + \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 0$
$2\cos^2\alpha + \cos \alpha - 1 = 0$
$(2\cos \alpha - 1)(\cos \alpha + 1) = 0$
$\cos \alpha = -1 \rightarrow \alpha = 180^o$ (tidak memenuhi)
$\cos \alpha = \frac{1}{2} \rightarrow \alpha = 60^o$ (memenuhi)
Maka luas $\Delta PQR_{maks} = \frac{1}{2}(r \sin 60^o)(r + r\cos 60^o) = \frac{3}{8} r^2\sqrt{3}$

24. Tentukan banyak anggota terbesar dari himpunan bagian $H \subset \{1,2,...,n\}$ sehingga untuk setiap dua anggota berbeda $x, y \in H$ berlaku $(x - y)$ tidak habis membagi $(x + y)$.

A. $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$

B. $\left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil$

C. $\left\lceil \frac{n}{4} \right\rceil$

D. $\left\lceil \frac{n}{5} \right\rceil$

E. $\left\lceil \frac{n}{5} \right\rceil$

KUNCI: B

Tinjau sebarang tiga bilangan berurutan $m-1$, m, $m+1$. Perhatikan bahwa:

$$((m+1)-(m-1)) \mid ((m+1)+(m-1))$$
$$((m+1)-m) \mid ((m+1)+m)$$
$$(m-(m-1)) \mid (m+(m-1))$$

Maka dari sebarang tiga bilangan berurutan, kita hanya bisa pilih satu diantaranya sebagai anggota H. Partisi $\{1, 2, \ldots, n\}$ menjadi $\{1, 2, 3\}$, $\{4, 5, 6\}$, ... Ada $\left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil$ himpunan, dari setiap himpunan hanya bisa dipilih satu sebagai anggota H. Jadi $|H| \le \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil$.

Untuk membuktikan ini maksimum, pilih $H = \{1, 4, 7, \ldots, 3\left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil - 2\}$. Semuanya berbentuk 1 mod 3, maka untuk setiap $x, y \in H$ berlaku $3 \mid (x-y)$ tetapi 3 tidak membagi $x+y$ sehingga $(x-y)$ tidak membagi $(x+y)$.

25. Diketahui bahwa masing-masing n orang mengetahui tepat 1 buah informasi yang saling berbeda. Jika salah seorang katakan A menelepon B maka A akan memberitahukan semua informasi yang dimilikinya kepada B sedangkan B tidak memberitahukan satu pun informasi yang diketahuinya kepada A. Berapakah panggilan telepon minimum yang diperlukan sehingga setiap orang tersebut akan mengetahui n informasi tersebut?
    A. $2(n-2)$
    B. $2(n-1)$
    C. $2n$
    D. $2(n+1)$
    E. $2(n+2)$

    KUNCI: A

    Orang ke-k akan menerima telepon setelah sedikitnya terjadi $k-2$ telepon. Maka orang terakhir akan menerima panggilan yang pertama sedikitnya setelah terjadi $n-2$ telepon. Setelah orang ke-n menerima telepon berarti sedikitnya telah terjadi $n-1$ telepon. Semua informasi yang didapat oleh orang ke-n akan disebar kepada seluruh orang selain dirinya. Sedikitnya dibutuhkan $n-1$ telepon. Maka panggilan telepon minimum yang diperlukan sehingga setiap orang akan mengetahui n informasi adalah $2(n-2)$.