

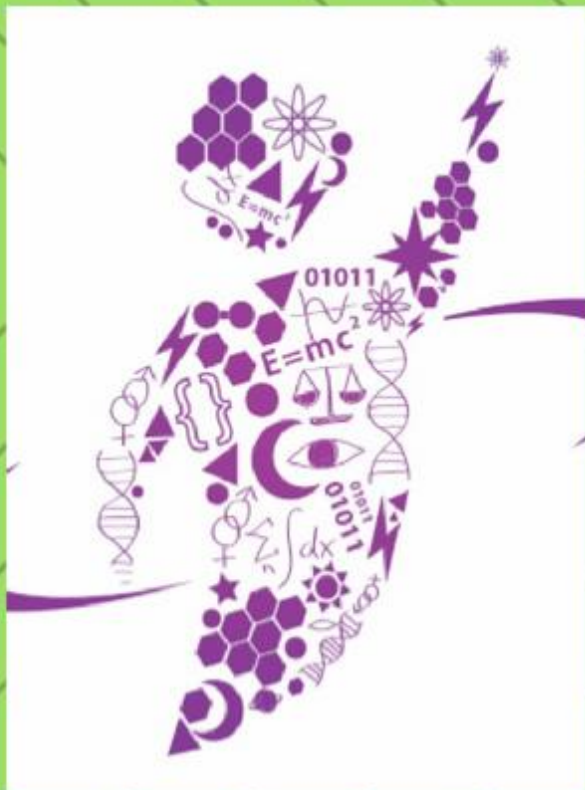
**PAKET 15**

# PELATIHAN ONLINE

**2019**

**SMA  
MATEMATIKA**

po.alcindonesia.co.id



**WWW.ALCINDONESIA.CO.ID**

**@ALCINDONESIA**

**085223273373**

PEMBAHASAN PAKET 15

1. Jawaban : C

$$\frac{14k+17}{k-9} = 14 + \frac{143}{k-9}$$

$$k - 9 = qd$$

Agar  $k$  minimal maka  $q$  dan  $d$  harus minimal dengan  $d$  adalah faktor dari 143.

Karena  $143 = 11 \cdot 13$  maka nilai  $d$  minimal dengan  $d \neq 1$  adalah 11.

Karena  $q$  harus relatif prima dengan 13 maka nilai minimal  $q$  adalah 2.

$$k_{\min} - 9 = 2 \cdot 11 \rightarrow k_{\min} = 31$$

2. Jawaban : B

Misalkan  $BP = PQ = QC = p$  dan panjang sisi ketiga  $\triangle ABC$  adalah  $a, b$  dan  $c \rightarrow a = 3p$

Pada  $\triangle ABP$  berlaku :  $3^2 = c^2 + p^2 - 2cp \cos \angle ABC$  dengan

$$\cos \angle ABC = \frac{c}{a} = \frac{c}{3p}$$

$$9 = \frac{1}{3}c^2 + p^2 \dots\dots\dots (1)$$

Pada  $\triangle ACQ$  berlaku :  $4^2 = b^2 + p^2 - 2bp \cos \angle ACB$  dengan

$$\cos \angle ACB = \frac{b}{a} = \frac{b}{3p}$$

$$16 = \frac{1}{3}b^2 + p^2 \dots\dots\dots (2)$$

$$(1) + (2) \rightarrow 25 = \frac{1}{3}(b^2 + c^2) + 2p^2$$

$$b^2 + c^2 = a^2 = 9p^2 \rightarrow 25 = 5p^2 \rightarrow p = \sqrt{5} \rightarrow BC = a = 3\sqrt{5}$$

Substitusikan hasil di atas ke persamaan (1) dan (2) didapat  $AB = c = 2\sqrt{3}$  dan  $AC = b = \sqrt{33}$

3. Jawaban : A

Kalau  $p = 0,01$  maka banyaknya faktor positif dari  $M = 10$

Karena  $10 = 1 \cdot 10 = 2 \cdot 5$  maka  $M$  harus berbentuk  $p_1^9$  atau  $p_1 \cdot p_2^4$  dengan  $p_1$  dan  $p_2$  adalah bilangan prima.

• Jika  $M = p_1^9$

$$p_1^9 < 1000 \text{ maka } p_{1 \text{ maks}} = 2$$

$$M_{\text{maks}} = 2^9 = 512$$

• Jika  $M = p_1 \cdot p_2^4$

$$\text{Karena } p_1 \geq 2 \text{ maka } p_2^4 \leq 500 \rightarrow p_2 = 2 \text{ atau } 3$$

\* Jika  $p_2 = 2$

$$M = 16p_1 \leq 1000 \rightarrow M_{\text{maks}} = 976 \text{ didapat jika } p_1 = 61$$

\* Jika  $p_2 = 3$

$$M = 81p_1 \leq 1000 \rightarrow M_{maks} = 891 \text{ didapat jika } p_1 = 11$$

Maka nilai maksimum dari M adalah 976

4. Jawaban : A

Dari persamaan di atas didapat  $ac + 1 = ap \rightarrow apc + p = ap^2$   
..... (1)

$$bc + 1 = cp \text{ ..... (2)}$$

Substitusikan persamaan (2) ke (1) :

$$a(bc + 1) + p = ap^2$$

$$a(p^2 - 1) = abc + p \text{ ..... (3)}$$

Dengan cara yang sama didapat :

$$b(p^2 - 1) = abc + p \text{ ..... (4)}$$

$$c(p^2 - 1) = abc + p \text{ ..... (5)}$$

$$(3) - (4) \rightarrow (a - b)(p^2 - 1) = 0$$

Karena  $a \neq b$  maka  $p = \pm 1$

Jadi, nilai  $p$  yang memenuhi adalah 1 dan -1

5. Jawaban : C

Syarat persamaan tersebut adalah  $c \geq 0$

$$a^2 + b^2 + 2c + 2(a + b)\sqrt{c} = 60 + 20\sqrt{c}$$

$$a^2 + b^2 + 2c = 60 \text{ ..... (1) dan } a + b = 10$$

$$\text{..... (2)}$$

$$\text{Dari persamaan (1) didapat } a^2 \leq 60 \text{ dan } b^2 \leq 60 \rightarrow -7 \leq a \leq 7$$

$$\text{dan } -7 \leq b \leq 7$$

Karena  $a + b = 10$  maka pasangan  $(a, b)$  yang memenuhi

adalah  $(3, 7), (4, 6), (5, 5), (6, 4)$  dan  $(7, 3)$

Dari persamaan (1) dapat dihitung nilai  $c$

• Jika  $a = 3$  dan  $b = 7$  maka  $c = 1$

• Jika  $a = 4$  dan  $b = 6$  maka  $c = 4$

• Jika  $a = 5$  dan  $b = 5$  maka  $c = 5$

• Jika  $a = 6$  dan  $b = 4$  maka  $c = 4$

• Jika  $a = 7$  dan  $b = 3$  maka  $c = 1$

Jadi terdapat 5 tripel penyelesaian  $(a, b, c)$  yang memenuhi yaitu

$(3, 7, 1), (4, 6, 4), (5, 5, 5), (6, 4, 4)$  dan  $(7, 3, 1)$

6. Jawaban : D

Karena hanya ada tiga digit yang tidak masuk ke dalam digit-digit dari  $n$  maka sesuai dengan Pigeon Hole Principle maka sedikitnya satu dari 2, 4, 6 atau 8 adalah digit dari  $n$ . Akibatnya  $n$  genap.

Karena 0 tidak membagi bilangan manapun maka 0 tidak termasuk digit dari  $n$ .

Andaikan 5 adalah digit dari  $n$  maka angka satuan dari  $n$  harus 0 atau 5.

Karena 0 tidak termasuk digit dari  $n$  maka angka satuan  $n$  adalah 5.

Kontradiksi dengan kenyataan bahwa  $n$  genap. Maka 5 tidak termasuk digit dari  $n$ .

Andaikan 9 tidak termasuk digit dari  $n$  maka penjumlahan digit  $n = 1 + 2 + 3 + 4 + 6 + 7 + 8 = 31$ .

Karena 3 termasuk digit dari  $n$  maka penjumlahan digit  $n$  harus habis dibagi 3. Tetapi 31 tidak habis dibagi 3. Maka 9 termasuk digit dari  $n$ .

$1 + 2 + 3 + 4 + 6 + 7 + 8 + 9 \equiv 4 \pmod{9}$ . Maka 4 harus dibuang dari digit-digit  $n$ .

Maka ketiga digit yang tidak termasuk ke dalam digit dari  $n$  adalah 0, 4 dan 5.

(Catatan : Contoh bilangan tersebut adalah 9231768)

7. Jawaban : A

Misalkan luas  $\triangle CDF = x$  dan luas  $\triangle CEF = y$

$\triangle CDF$  dan  $\triangle DAF$  memiliki tinggi yang sama, maka :

$$\frac{CD}{DA} = \frac{x}{4} \dots\dots\dots (1)$$

$\triangle CDB$  dan  $\triangle BDA$  memiliki tinggi yang sama, maka :

$$\frac{CD}{DA} = \frac{x+y+7}{4+8} \dots\dots\dots (2)$$

Dari persamaan (1) dan (2) didapat :

$$12x = 4x + 4y + 28$$

$$2x = y + 7 \dots\dots\dots (3)$$

$\triangle BEF$  dan  $\triangle CEF$  memiliki tinggi yang sama, maka :

$$\frac{BE}{EC} = \frac{7}{y} \dots\dots\dots (4)$$

$\triangle BAE$  dan  $\triangle EAC$  memiliki tinggi yang sama, maka :

$$\frac{BE}{EC} = \frac{7+8}{x+y+4} \dots\dots\dots (5)$$

Dari persamaan (4) dan (5) didapat :

$$7x + 7y + 28 = 15y$$

$$8y = 7x + 28 \dots\dots\dots (6)$$

Dari persamaan (3) dan (6) didapat :  $x = \frac{28}{3}$  dan  $y = \frac{35}{3}$

Luas bagian keempat =  $x + y$

Luas bagian keempat = 21

8. Jawaban : D

$$a^2 - b^2 = 7(b - a) \rightarrow (a - b)(a + b) = 7(b - a)$$

Karena  $a \neq b$  maka  $a + b = -7$

$$a^2 + b^2 = 7(a + b) + 102 \rightarrow (a + b)^2 - 2ab = 7(a + b) + 102$$

$$(-7)^2 - 2ab = 7(-7) + 102$$

$$ab = -2$$

9. Jawaban : D

$$(xy - 7)^2 = x^2 + y^2 \rightarrow (xy)^2 - 14xy + 49 = x^2 + y^2 \rightarrow$$

$$(xy)^2 - 12xy + 36 + 13 = x^2 + y^2 + 2xy$$

$$(xy - 6)^2 + 13 = (x + y)^2 \rightarrow 13 = (x + y + xy - 6)(x + y - xy + 6)$$

Karena 13 prima maka ada dua kasus yang mungkin :

$$\bullet x + y + xy - 6 = 1 \text{ dan } x + y - xy + 6 = 13$$

$$2(x + y) = 14 \rightarrow x + y = 7$$

$$xy = 0 \rightarrow x = 0 \text{ atau } y = 0$$

Jika  $x = 0$  maka  $y = 7$

Jika  $y = 0$  maka  $x = 7$

$$\bullet x + y + xy - 6 = 13 \text{ dan } x + y - xy + 6 = 1$$

$$2(x + y) = 14 \rightarrow x + y = 7$$

$$7 + xy - 6 = 13 \rightarrow xy = 12$$

$$x + \frac{12}{x} = 7 \rightarrow x^2 - 7x + 12 = 0$$

$$(x - 3)(x - 4) = 0$$

Jika  $x = 3$  maka  $y = 4$

Jika  $x = 4$  maka  $y = 3$

Jadi terdapat 4 buah pasangan  $(x, y)$  yang memenuhi  
adalah  $(0, 7), (3, 4), (4, 3), (7, 0)$

10. Jawaban : C

(a) setiap anggota tergabung ke dalam tepat dua komisi

(b) setiap dua komisi memiliki tepat satu anggota bersama

Misal keempat komisi tersebut adalah A, B, C dan D dengan jumlah  
anggota masing-masing  $k$ , maka berdasarkan (a) didapat  $\rightarrow 2n = 4k$

$$n(A \cup B \cup C \cup D) = n(A) + n(B) + n(C) + n(D) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(A \cap D) - n(B \cap C) - n(B \cap D) - n(C \cap D) + n(A \cap B \cap C) + n(A \cap B \cap D) + n(A \cap C \cap D) + n(B \cap C \cap D) - n(A \cap B \cap C \cap D)$$

Berdasarkan (a) dan (b) maka :

$$n(A \cup B \cup C \cup D) = n$$

$$n(A) = n(B) = n(C) = n(D) = k$$

$$n(A \cap B) = n(A \cap C) = n(A \cap D) = n(B \cap C) = n(B \cap D) = n(C \cap D) = 1$$

$$n(A \cap B \cap C) = n(A \cap B \cap D) = n(A \cap C \cap D) = n(B \cap C \cap D) = 0$$

$$n(A \cap B \cap C \cap D) = 0$$

maka

$$n = k + k + k + k - 1 - 1 - 1 - 1 - 1 - 1 + 0 + 0 + 0 + 0 - 0$$

$$n = 4k - 6$$

$$n = 2n - 6$$

$$n = 6$$

Banyaknya pengurus agar memenuhi syarat tersebut adalah 6