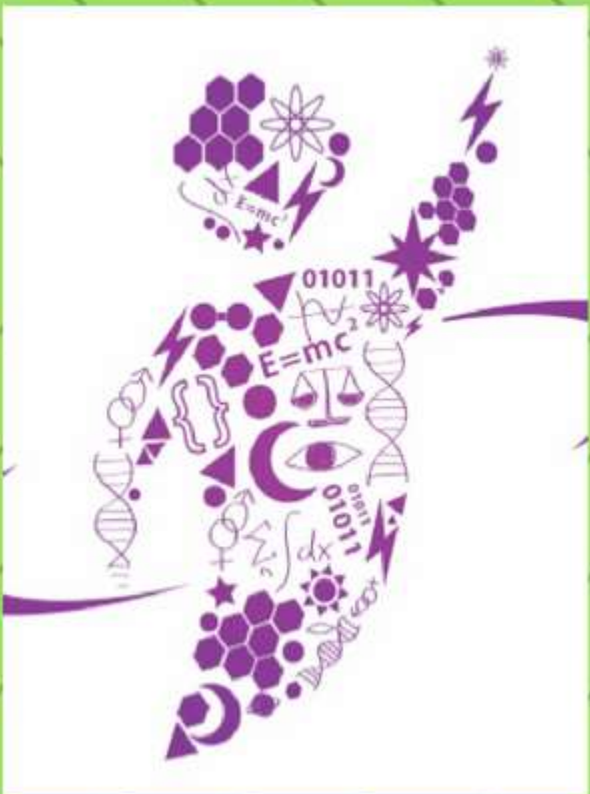
PAKET 3

PELATIHAN ONLINE

2019

SMA
MATEMATIKA

po.alcindonesia.co.id



WWW.ALCINDONESIA.CO.ID

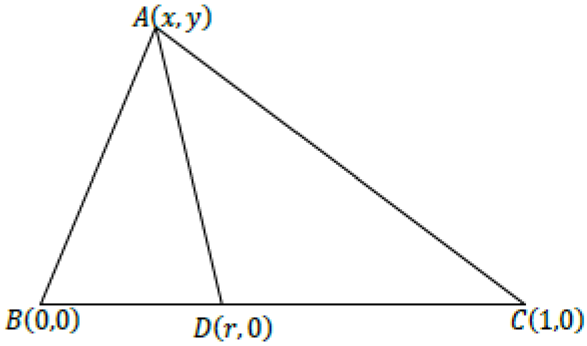
@ALCINDONESIA

085223273373

PEMBAHASAN PAKET 3

1. Misalkan a, b, dan c adalah tiga bilangan $berbeda$. Jika ketiga bilangan tersebut merupakan bilangan asli satu digit maka selisih terbesar akar-akar persamaan $(x-a)(x-b)+(x-b)(x-c)=0$ yang mungkin adalah ....
   a. 9
   b. 7,5
   c. 10
   d. 16,5
   e. 12,5
   Solusi:
   Perhatikan penjabaran bentuk aljabar tersebut.
   $(x-a)(x-b)+(x-b)(x-c)=0$
   $\Leftrightarrow (x-b)(2x-(a+c))=0$
   $\Leftrightarrow x_1=b$ atau $x_2=\frac{a+c}{2}$
   Sehingga, diperoleh selisih akar-akarnya adalah
   $$x_1-x_2=b-\frac{a+c}{2}$$
   Dengan mudah kita tahu bahwa $b-\frac{a+c}{2}$ akan maksimum apabila b merupakan bilangan terbesar yaitu 9. Dan, a dan c minimum yaitu 1 dan 2, begitu juga sebaliknya.
   Jadi,
   $$x_1-x_2=b-\frac{a+c}{2}=9-\frac{3}{2}=9-1{,}5=7{,}5$$

2. Pada segitiga ABC, panjang sisi BC adalah 1 satuan. Ada tepat satu titik D pada sisi BC yang memenuhi $|DA|^2=|DB|\cdot|DC|$. Jika k menyatakan keliling ABC, jumlah semua k yang mungkin adalah ....
   a. $1+\sqrt{3}$
   b. $1+\sqrt{2}$
   c. $2+\sqrt{3}$
   d. $3+\sqrt{2}$
   Solusi:



Perhatikan,

$|AC| = p = \sqrt{(x-1)^2 + y^2} = \sqrt{(x^2+y^2) - 2x + 1}$

$|AB| = q = \sqrt{x^2+y^2}$

$|BC| = 1$

$|DB| = r$

$|DC| = 1 - r$

$|DA| = \sqrt{(x-r)^2 + y^2}$

Sehingga, keliling ΔABC adalah

$$k = |BC| + |AC| + |AB| = 1 + p + q$$

Perhatikan juga bahwa pada ΔABC berlaku

$|DA|^2 = |DB| \cdot |DC|$

$\Leftrightarrow (x-r)^2 + y^2 = r(1-r)$

$\Leftrightarrow x^2 - 2xr + r^2 + y^2 = r - r^2$

$\Leftrightarrow 2r^2 - (2x+1)r + (x^2+y^2) = 0$

Ingat, bahwa agar tepat diperoleh satu titik $D(r,0)$ maka penyelesaian r real kembar $(D = 0)$

$D = 0$

$\Rightarrow b^2 - 4ac = 0$

$\Leftrightarrow \left(-(2x+1)\right)^2 - 4(2)(x^2+y^2) = 0$

$\Leftrightarrow (2x+1)^2 - 8(x^2+y^2) = 0$

$\Leftrightarrow \frac{(2x+1)^2}{8} = (x^2+y^2)$

Padahal, $0 < r < 1$, sehingga,

$0 < r < 1$

$\Rightarrow 0 < \frac{2x+1}{4} < 1$

$\Leftrightarrow 0 < 2x + 1 < 4$

$\Leftrightarrow -1 < 2x < 3$

$\Leftrightarrow -\frac{1}{2} < x < \frac{3}{2}$

Jadi, keliling ΔABC adalah

$k = 1 + p + q$

$k = 1 + \sqrt{(x^2 + y^2) - 2x + 1} + \sqrt{x^2 + y^2}$
$k = 1 + \sqrt{\frac{(2x+1)^2}{8} - 2x + 1} + \sqrt{\frac{(2x+1)^2}{8}}$
$k = 1 + \sqrt{\frac{(2x-3)^2}{8}} + \sqrt{\frac{(2x+1)^2}{8}}$
$k = 1 + (-\frac{2x-3}{2\sqrt{2}}) + \frac{2x+1}{2\sqrt{2}}$
$k = 1 + \sqrt{2}$

3. Diketahui $x - y = 10$ dan $xy = 10$. Nilai dari $x^4 + y^4$ adalah ....
   a. 11420
   b. 14200
   c. 12400
   d. 11400

   Solusi:
   $x^2 + y^2 = (x - y)^2 + 2xy$
   $x^2 + y^2 = 10^2 + 2(10)$
   $x^2 + y^2 = 100 + 20$
   $x^2 + y^2 = 120$

   $x^4 + y^4 = (x^2 + y^2)^2 - 2(xy)^2$
   $x^4 + y^4 = 120^2 - 2(10)^2$
   $x^4 + y^4 = 14400 - 200$
   $x^4 + y^4 = 14200$

4. Misalkan $S = \{x \in \mathbb{R} | 0 \leq x \leq 1\}$. Banyaknya pasangan bilangan asli (a, b) sehingga tepat ada 2018 anggota S yang dapat dinyatakan dalam bentuk $\frac{x}{a} + \frac{y}{b}$ untuk suatu bilangan bulat x dan y adalah ....
   a. 1
   b. 2
   c. 3
   d. 4

   Solusi:
   Perhatikan, dari $Bezout's\ Theorem$, yaitu "Jika a dan b dua bilangan bulat yang keduanya taknol maka terdapat bilangan bulat x dan y sedemikian sehingga $FPB(a, b) = ax + by$".
   Sehingga banyaknya anggota S yang dapat dinyatakan adalah banyaknya $0 \leq xb + ya \leq ab;\ xb + ya \in \mathbb{Z}$ yang memiliki solusi $x, y \in \mathbb{Z}$

Dengan membagi kasus, yaitu

Kasus 1.
Apabila a dan b adalah relative prima, maka dari $Bezout's\ Theorem$, semua $k \in \mathbb{Z}$ dapat dinyatakan dalam $xb + ya$ sehingga haruslah $ab + 1 = 2018$, sehingga

$$ab + 1 = 2018 \quad \Rightarrow \quad ab = 2017$$

Sehingga, diperoleh penyelesaian $(a, b) = \{(1{,}2017), (2017{,}1)\}$

Kasus 2.
Apabila $FPB(a, b) = d > 1$, maka $a, b > 1$. Sehingga dari $Bezout's\ Theorem$, semua (dan hanya) $dk, k \in \mathbb{Z}$ dapat dinyatakan dalam $xb + ya$
Semua dk ada sebanyak $\left\lfloor \frac{ab}{d} \right\rfloor + 1 = a\left(\frac{b}{d}\right) + 1$, sehingga

$$a\left(\frac{b}{d}\right) + 1 = 2018 \quad \Rightarrow \quad a\left(\frac{b}{d}\right) = 2017 \quad \Rightarrow \quad a = 2017$$

Sehingga diperoleh penyelesaian $(a, b) = \{(2017{,}2017)\}$
Jadi, banyaknya pasangan bilangan asli (a, b) yang memenuhi adalah 3 buah.

5. Pada bidang terdapat empat garis yang berbeda. Titik potong terbanyak yang mungkin dihasilkan oleh keempat garis tersebut ada sebanyak ….
   a. 4
   b. 5
   c. 6
   d. 7

   Solusi:
   Titik potong terbanyak terjadi jika setiap dua garis berpotongan di titik yang berbeda. Sama saja dengan mencari banyaknya cara memilih 2 garis dari 4 garis, yaitu $= C_2^4 = 6$

6. Diberikan satu koin yang tidak seimbang. Bila koin tersebut ditos satu kali, peluang muncul angka adalah 14. Jika ditos n kali, peluang muncul tepat dua angka sama dengan peluang muncul tepat tiga angka. Nilai n adalah ….
   a. 10
   b. 11
   c. 12
   d. 13

   Solusi:

Perhatikan, dengan menggunakan konsep distribusi binomial, misal p= peluang kejadian muncul angka, maka $p = \frac{1}{4}$ dan $1 - p = \frac{3}{4}$.
Apabila satu koin ditos n kali, maka peluang muncul tepat dua angka sama dengan peluang muncul tepat tiga angka dapat dinyatakan sebagai
$P(X = 2) = P(X = 3)$
$\Leftrightarrow C_2^n \cdot p^2 \cdot (1 - p)^{n-2} = C_3^n \cdot p^3 \cdot (1 - p)^{n-3}$
$\Leftrightarrow \frac{n!}{(n-2)!2!} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{n-2} = \frac{n!}{(n-3)!3!} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^3 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{n-3}$
$\Leftrightarrow \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)!}{(n-2)!\cdot 2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)!}{(n-3)!\cdot 3!} \cdot \frac{1}{4}$
$\Leftrightarrow \frac{3}{2} = \frac{n-2}{6}$
$\Leftrightarrow 18 = 2n - 4$
$\Leftrightarrow 22 = 2n$
$\Leftrightarrow n = 11$
Jadi, nilai n yang memenuhi adalah 11.

7. Bilangan prima terkecil p sehingga dapat ditemukan bilangan prima q yang memenuhi

$$q^2 = 10p + 131$$

adalah …

a. 7
b. 11
c. 29
d. 23

Solusi:
Mudah dilihat karena koefisien p adalah 10, bisa kita pakai modulo 10 :
$q^2 \equiv 10p + 131 \ (mod\ 10)$
$q^2 \equiv 1 \ (mod\ 10)$
$q \equiv \pm 1 \ (mod\ 10)$
Jadi untuk q bilangan prima, maka $q = 11,19,29,31, \ldots$
Untuk $q = 11$, maka :
$11^2 = 10p + 131$
$121 = 10p + 131$
$10p = -10 \ (tidak\ memenuhi)$
Untuk $q = 19$, maka :
$19^2 = 10p + 131$
$361 = 10p + 131$
$10p = 230$
$p = 23 \ (memenuhi)$

Jadi, bilangan prima terkecil p adalah 23

8. Setiap sel dari suatu tabel berukuran 2×2 dapat diisi dengan bilangan 1, 2, atau 3. Misalkan N adalah banyaknya tabel yang memenuhi kedua sifat berikut sekaligus:
   • untuk setiap baris, hasil penjumlahannya genap
   • untuk setiap kolom, hasil penjumlahannya genap
   Nilai N adalah ….
   a. 17
   b. 18
   c. 19
   d. 20
   Solusi:
   Banyak tabel yang memenuhi dapat ditentukan dengan membagi kasus:
   • Kasus pertama: a, b, c, d adalah bilangan ganjil.
   Banyak kejadian adalah $C_0^4 + C_1^4 + C_2^4 + C_3^4 + C_4^4 = 2^4 = 16$
   • Kasus kedua: a, b, c, d adalah bilangan genap.
   Hanya ada satu kemungkinan, yaitu a, b, c, d adalah bilangan 2.
   Jadi, total banyak tabel yang memenuhi adalah sebanyak $16 + 1 = 17$

9. Diketahui x dan y bilangan prima dengan $x < y$, dan $x^3 + y^3 + 2018 = 30y^2 - 300y + 3018$. Nilai $x + y$ yang memenuhi adalah ….
   a. 3
   b. 7
   c. 9
   d. 10
   Solusi:
   Perhatikan,
   $x^3 + y^3 + 2018 = 30y^2 - 300y + 3018$
   $\Leftrightarrow x^3 + y^3 - 30y^2 + 300y - 1000 = 0$
   $\Leftrightarrow x^3 + (y - 10)^3 = 0$
   Sehingga, diperoleh
   $$x = -(y - 10) \quad \Leftrightarrow \quad x + y = 10$$
   Karena, x, adalah bilangan prima, maka dua buah bilangan prima yang jumlahnya 10 adalah 3 dan 7. Mengingat $x < y$, sehingga dapat diperoleh $x = 3$ dan $y = 7$.
   Jadi, $x + y$ yang memenuhi adalah 10

10. Misalkan $\{x_n\}$ adalah barisan bilangan bulat yang memenuhi $x_1 = x_2 = \cdots = x_{12} = 0,\ x_{13} = 2$, dan untuk setiap bilangan asli n berlaku $x_{n+13} = x_{n+4} + 2x_n$. Nilai x_{143} adalah ….
    a. 2041
    b. 2401
    c. 2104
    d. 2014

    Solusi:
    Perhatikan, kita akan mencoba menguraikan kombinasi linear dari bilangan 143 terhadap bilangan 9 dan 13, sehingga diperoleh
    $9p + 13q = 143$
    $\Rightarrow 9p = 143 - 13q$
    $\Leftrightarrow 9 \cdot p = 13 \cdot (11 - q)$
    Sehingga, terdapat dua penyelesaian bulat untuk $9p + 13q = 143$, dengan p, bilangan cacah.
    • $p = 13$, sehingga $11 - q = 9\ \Rightarrow\ q = 2$, sehingga $(p_1, q_1) = (13,2)$
    • $p = 0$, sehingga $11 - q = 0\ \Rightarrow\ q = 11$, sehingga $(p_2, q_2) = (0,11)$
    Padahal, untuk $x_{n+13} = x_{n+4} + 2x_n$, rumus umumnya untuk $n = 9p + 13q$ adalah

$$x_n = \sum_{i=1}^{k} 2^{q_i} . \binom{p_i + q_i - 1}{p_i}$$

    Sehingga,
    $x_n = 2^2 \cdot C_{13}^{14} + 2^{11} \cdot C_0^{10}$
    $x_n = 4 \cdot 14 + 2048 \cdot 1$
    $x_n = 56 + 2048$
    $x_n = 2104$