PAKET 4

PELATIHAN ONLINE

2019

SMA
KOMPUTER

po.alcindonesia.co.id

WWW.ALCINDONESIA.CO.ID

@ALCINDONESIA

085223273373

PEMBAHASAN PAKET 4

1. Banyaknya cara untuk mempermutasikan kata "MISSISIPI" adalah
   $\frac{9!}{1!.4!.3!.1!} = 2520$
   Jawaban : **D**

2. Anggap N dan R sebagai satu objek yang tidak bisa dipisahkan, sehingga banyaknya cara mengubah kata "MINUMAIR" dengan huruf N dan R selalu berdampingan sama dengan banyaknya cara mengubah kata "XMIUMAI" lalu dikali 2.
   Banyaknya cara :
   $\frac{7!}{2!.2!\,1!.1!.1!}.2 = 1260.2 = 2520$
   Jawaban : **D**

   Ket :
   -Mengapa dikali 2? Karena posisi huruf N dan R dapat ditukar, sehingga harus dikalikan 2.
   -X hanya sebagai pemisalan elemen pengganti N dan R yang tidak bisa dipisahkan.

3. Banyaknya cara mereka duduk adalah = $(9-1)! = 8! = 40320$
   Jawaban : **C**

4. Mirip dengan soal nomor 2, hanya saja permutasi yang digunakan adalah permutasi siklis. Oleh karena itu banyaknya cara adalah $2.(6-1)! = 240$
   Jawaban : **E**

5. Banyak cara mereka duduk tanpa ada batasan adalah $(7-1)! = 6! = 720$
   Berdasarkan jawaban soal nomor 4, banyaknya cara mereka duduk dengan syarat Andi dan Budi selalu berdampingan adalah 240. Oleh karena itu, banyaknya cara mereka duduk dengan syarat Andi dan Budi tidak berdampingan adalah 720 – 240 = 480
   Jawaban : **B**

6. Pandang:
   $x_1 = a_1 + 1 \geq 1 \rightarrow a_1 \geq 0$
   $x_2 = a_2 \geq 0 \rightarrow a_2 \geq 0$
   $x_3 = a_3 + 2 \geq 2 \rightarrow a_3 \geq 0$
   $x_4 = a_4 + 4 \geq 4 \rightarrow a_4 \geq 0$

   Jumlahkan semua persamaan diatas, maka:
   $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = a_1 + 1 + a_2 + a_3 + 2 + a_4 + 4$
   $17 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + 7$
   $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 10 \ldots (1)$

Sekarang kita tinggal mencari berapa banyak solusi dari persamaan (1) dengan syarat $a_1, a_2, a_3, a_4 \geq 0$.

Banyaknya solusi ada :

$$\binom{10+4-1}{4-1} = \binom{13}{3} = \frac{13!}{10!.3!} = 286$$

Jawaban : **E**

7. Variasi ini adalah variasi lain dari soal bertema kombinasi dengan pengulangan. Untuk mengerjakan soal-soal bertipe ini, kita perlu mencari **banyak kemungkinan dari komplemen kasus**. Lalu setelah itu tinggal mengurangi banyak cara keseluruhan dikurangi banyak cara komplemennya tersebut.

   Permasalahan disini adalah nilai $x_1, x_2,$ dan x_3 memiliki batas atas. Sehingga untuk menyelesaikannya, tidak ada cara langsungnya. Akan tetapi, kita bisa menggunakan
   Teorema himpunan disini.

   Jika yang ditanya adalah banyaknya solusi jika $0 \leq x_1 \leq 3$, $0 \leq x_2 \leq 6, 0 \leq x_3 \leq 3$, maka kita bisa mencari komplemen kasusnya yaitu "banyaknya solusi dari persamaan $x_1 + x_2 + x_3 = 10$ dengan syarat $x_1 \geq 4$ atau $x_2 \geq 7$ atau $x_3 \geq 4$"

   Misalkan $n(A)$ adalah banyaknya solusi dengan $x_1 \geq 4$, $n(B)$ adalah banyaknya solusi dengan $x_2 \geq 7$ dan $n(C)$ adalah banyaknya solusi dengan $x_3 \geq 4$. Sehingga yang sekarang akan kita cari adalah nilai dari $n(A \cup B \cup C)$.

   - Untuk mencari $n(A)$
     Kita berarti mencari banyaknya solusi dari persamaan $x_1 + x_2 + x_3 = 10$ dengan $x_1 \geq 4$.
     Banyaknya solusi adalah $\binom{6+3-1}{2} = 28$
   - Untuk mencari $n(B)$
     Kita berarti mencari banyaknya solusi dari persamaan $x_1 + x_2 + x_3 = 10$ dengan $x_2 \geq 7$
     Banyaknya solusi adalah $\binom{3+3-1}{2} = 10$
   - Untuk mencari $n(C)$
     Kita berarti mencari banyaknya solusi dari persamaan $x_1 + x_2 + x_3 = 10$ dengan $x_3 \geq 4$
     Banyaknya solusi adalah $\binom{6+3-1}{2} = 28$
   - Untuk mencari $n(A \cap B)$
     Kita berarti mencari banyaknya solusi dari persamaan $x_1 + x_2 + x_3 = 10$ dengan $x_1 \geq 4$ dan $x_2 \geq 7$
     Banyaknya solusi adalah 0

- Untuk mencari $n(A \cap C)$
  Kita berarti mencari banyaknya solusi dari persamaan $x_1 + x_2 + x_3 = 10$ dengan $x_1 \geq 4$ dan $x_3 \geq 4$
  Banyaknya solusi adalah $\binom{2+3-1}{2} = 6$
- Untuk mencari $n(B \cap C)$
  Kita berarti mencari banyaknya solusi dari persamaan $x_1 + x_2 + x_3 = 10$ dengan $x_3 \geq 4$ dan $x_2 \geq 7$
  Banyaknya solusi adalah 0
- Untuk mencari $n(A \cap B \cap C)$
  Kita berarti mencari banyaknya solusi dari persamaan $x_1 + x_2 + x_3 = 10$ dengan $x_1 \geq 4$, $x_2 \geq 7$ dan $x_3 \geq 4$
  Banyaknya solusi adalah 0

  Dengan teorema himpunan, kita juga tahu bahwa $n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$
  Sehingga $n(A \cup B \cup C) = 28 + 10 + 28 - 6 = 60$

Banyak solusi tanpa ada syarat apapun adalah $\binom{10+3-1}{2} = 66$

Sehingga banyak kemungkinan solusi dari persamaan $x_1 + x_2 + x_3 = 10$ dengan syarat $0 \leq x_1 \leq 3$, $0 \leq x_2 \leq 6, 0 \leq x_3 \leq 3$ adalah $66 - n(A \cup B \cup C) = 66 - 60 = 6$

Jawaban : **E**

8. Soal ini adalah aplikasi dari derangement. Karena banyaknya pasangan kaos kaki adalah 7, maka yang kita cari adalah nilai dari *derangement* 7.
   Kita tahu bahwa:
   $d(n) = (n-1)(d(n-1) + d(n-2))$, dengan $d(1) = \ 0\ d(2) = 1.$
   Sehingga:
   $d(3) = 2(1 + 0) = 2$
   $d(4) = 3(2 + 1) = 9$
   $d(5) = 4(9 + 2) = 44$
   $d(6) = 5(44 + 9) = 265$
   $d(7) = 6(265 + 44) = 1854$
   Jawaban : **C**

9. Soal ini ekivalen dengan mencari banyaknya solusi dari persamaan $x_1 + x_2 + x_3 = 12$ dimana $0 \leq x_1, x_2, x_3 \leq 7$.
   Mirip dengan solusi nomer 7, kita cari banyaknya solusi dari **kasus komplemennya.** Kasus komplemennya adalah mencari banyaknya solusi dari persamaan $x_1 + x_2 + x_3 = 12$ dengan $x_1 \geq 8$ atau $x_2 \geq 8$ atau $x_3 \geq 8$

   Misalkan A adalah banyaknya solusi yang memenuhi persamaan $x_1 + x_2 + x_3 = 12$ dengan $x_1 \geq 8$, B adalah banyaknya solusi yang memenuhi persamaan $x_1 + x_2 + x_3 = 12$ dengan $x_2 \geq 8$, dan C adalah banyaknya solusi yang memenuhi persamaan $x_1 + x_2 + x_3 = 12$ dengan $x_3 \geq 8$.

$n(A)$ ekivalen dengan mencari banyaknya solusi dari persamaan $a+b+c\ =4$, dengan $a,b,c \geq 0$. Sehingga $n(A) = \binom{4+3-1}{3-1} = 15$
$n(B)$ ekivalen dengan mencari banyaknya solusi dari persamaan $a+b+c\ =4$, dengan $a,b,c \geq 0$. Sehingga $n(B) = \binom{4+3-1}{3-1} = 15$
$n(C)$ ekivalen dengan mencari banyaknya solusi dari persamaan $a+b+c\ =4$, dengan $a,b,c \geq 0$. Sehingga $n(C) = \binom{4+3-1}{3-1} = 15$

Perhatikan bahwa kasus A, B, C tidak mungkin memiliki irisan karena penjumlahan dari minimal dua kasus ini adalah 16, sedangkan nilai $x_1+x_2+x_3$ saja hanya 12. Sehingga $n(A \cup B \cup C) = 15+15+15 = 45$

Banyak solusi tanpa syarat dari $x_1+x_2+x_3 = 12$ dengan $x_1, x_2, x_3 \geq 0$ adalah $\binom{12+3-1}{3-1} = 91$

Sehingga solusi dari persamaan $x_1+x_2+x_3 = 12$ dengan syarat $0 \leq x_1, x_2, x_3 \leq 7$ adalah $91 - 45 = 46$
Jawaban : **E**

10. Banyaknya susunan cantik ini sama saja dengan banyaknya cara kita memilih 5 posisi dari 9 posisi yang ada(1, 2, …, 9) untuk ditempati digit-digit 0, 1, 2, 3, 4. Sehingga banyak susunan cantik ini adalah $\binom{9}{5} =\ 126$
Jawaban : **D**

11. Misalkan banyak orang dari keahlian CTF yang diambil adalah a orang, dari cp b orang, dan dari data mining c orang. Sehingga persamaan yang dapat kita bentuk adalah
$a+b+c = 9$, dimana $4 \geq\ a,b,c \geq 1$.
Dari sini kita bisa bagi kasus:
    1. $a = 1, b =\ 4, c = 4$.
    Banyaknya kemungkinan adalah = $\binom{4}{1}.\binom{4}{4}.\binom{4}{4} = 4$
    2. $a = 2, b = 3, c =\ 4$
    Banyaknya kemungkinan adalah = $\binom{4}{2}.\binom{4}{3}.\binom{4}{4} = 24$
    3. $a = 2, b = 4, c = 3$
    Banyaknya kemungkinan adalah = $\binom{4}{2}.\binom{4}{3}.\binom{4}{4} = 24$
    4. $a = 3, b = 2, c = 4$
    Banyaknya kemungkinan adalah = $\binom{4}{2}.\binom{4}{3}.\binom{4}{4} = 24$
    5. $a = 3, b = 3, c = 3$
    Banyaknya kemungkinan adalah = $\binom{4}{3}.\binom{4}{3}.\binom{4}{3} = 64$
    6. $a = 3, b = 4, c = 2$
    Banyaknya kemungkinan adalah = $\binom{4}{2}.\binom{4}{3}.\binom{4}{4} = 24$
    7. $a = 4, b = 1, c = 4$
    Banyaknya kemungkinan adalah = $\binom{4}{1}.\binom{4}{4}.\binom{4}{4} = 4$
    8. $a = 4, b = 2, c = 3$

Banyaknya kemungkinan adalah = $\binom{4}{2}.\binom{4}{3}.\binom{4}{4} = 24$

9. $a = 4, b = 3, c = 2$
   Banyaknya kemungkinan adalah = $\binom{4}{2}.\binom{4}{3}.\binom{4}{4} = 24$
10. $a = 4, b = 4, c = 1$
   Banyaknya kemungkinan adalah = $\binom{4}{1}.\binom{4}{4}.\binom{4}{4} = 4$

Total banyaknya kemungkinan adalah = $24 * 6 + 4 * 3 + 64 = 220$
Jawaban : **D**

12. Banyak cara Badur mengambil 4 buah jeruk adalah $\binom{15}{4} = 1365$
   Banyak cara Badur mendapatkan 2 buah jeruk busuk dan 2 buah jeruk segar adalah $\binom{6}{2}.\binom{9}{2} = 540$
   Sehingga peluang Badur mendapatkan tepat 2 buah jeruk busuk adalah $\frac{540}{1365} = \frac{36}{91}$
   Jawaban : **D**

13. Peluang terpilihnya minimal 1 perempuan dari 5 orang tersebut = 1-(peluang terpilihnya kelima orang tersebut adalah laki-laki) = $1 - \frac{\binom{7}{5}}{\binom{16}{5}} = 1 - \frac{21}{4368} = 1 - \frac{1}{208} = \frac{207}{208}$
   Jawaban : **E**

14. Kelompokkan bilangan dari 1 hingga 2008 berdasarkan sisanya ketika dibagi 8. Sehingga kelompok yang terbentuk dapat kita misalkan menjadi seperti berikut:
   $a_0 = \{8, 16, 24, \dots 2008\} \rightarrow 251\ bilangan$
   $a_1 = \{1, 9, 17, \dots 2001\} \rightarrow 251\ bilangan$
   $a_2 = \{2, 10, 18, \dots 2002\} \rightarrow 251\ bilangan$
   $a_3 = \{3, 11, 19, \dots 2003\} \rightarrow 251\ bilangan$
   $a_4 = \{4, 12, 20, \dots 2004\} \rightarrow 251\ bilangan$
   $a_5 = \{5, 13, 21, \dots 2005\} \rightarrow 251\ bilangan$
   $a_6 = \{6, 14, 22, \dots 2006\} \rightarrow 251\ bilangan$
   $a_7 = \{7, 15, 23, \dots 2007\} \rightarrow 251\ bilangan$
   Kemungkinan terburuk yang mungkin sehingga tidak ada jumlah dua bilangan yang habis dibagi 8 adalah ketika kita mengambil semua bilangan di kelompok a_1, a_2, a_3 lalu mengambil masing-masing 1 bilangan dari a_0 dan a_4. (total bilangan yang diambil = 251*3 + 2 = 755)
   Ketika kita mengambil 1 bilangan lagi, pasti dia merupakan anggota dari $a_0, a_4, a_5, a_6, atau\ a_7$. Dan pasti dari 755 bilangan sebelumnya akan ditemukan bilangan sehingga jumlah bilangan tersebut dengan bilangan yang baru ditambahkan akan habis dibagi 8.

   Jadi n minimal sehingga pasti akan didapat dua bilangan asli berbeda yang jumlahnya habis dibagi 8 adalah $755 + 1 = 756$.

   Jawaban : **B**

15. Banyak bilangan prima yang kurang dari 100 adalah 25
   Jawaban : **B**

16. $13230 = 2.3^3.5.7^2$
Banyaknya faktor positif adalah $(1+1)(3+1)(1+1)(2+1) = 48$
Jawaban : **D**

17. $360360 = 2^3.3^2.5.7.11.13$
Banyaknya faktor positif dari 360360 yang merupakan kelipatan 10 sama dengan banyaknya faktor positif dari $\frac{360360}{10} = 36036 = 2^2.3^2.7.11.13$
Banyaknya $(2+1)(2+1)(1+1)(1+1)(1+1) = 72$
Jawaban : **E**

18. Nilai P adalah 2003 dan Q adalah 2. Sehingga nilai dari $P - Q$ adalah 2003-2 = 2001
Jawaban : **A**

19. Hasil kali semua bilangan bulat positif yang habis membagi 100 adalah 1.100.2.50.4.25.5.20.10= $100^4.10 = 10^9 = 1000000000$
Jawaban : **D**

20. Perhatikan bahwa $44^{44} = 4^{44}.11^{44} = 2^{88}.11^{44}$
Sehingga nilai n terbesar dimana 8^n membagi 44^{44} adalah $\left\lfloor \frac{88}{3} \right\rfloor = 29$
Jawaban : **E**

21. $360360 = 2^3.3^2.5.7.11.13$
Jumlah faktor positif dari 360360 adalah
$(1+2+4+8)(1+3+9)(1+5)(1+7)(1+11)(1+13) = 1572480$
Jawaban : **A**

22. Kita harus mencari bilangan terbesar x sehingga 3^x membagi $2019!$ untuk mencari nilai k.
Bilangan terbesar x yang membagi 2019! adalah
$$\left\lfloor \frac{2019}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2019}{9} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2019}{27} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2019}{81} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2019}{243} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2019}{729} \right\rfloor = 1005$$
Karena bilangan terbesar x yang membagi 2019! adalah 1005, maka nilai k terbesar sehingga 9^k membagi $2019!$ adalah $\left\lfloor \frac{1005}{2} \right\rfloor = 502$
Jawaban : **C**

23. Perhatikan bahwa kpk dari dua bilangan asli tersebut adalah 168. Dari sini kita bisa mengambil kesimpulan bahwa kedua bilangan asli tersebut merupakan faktor dari dari 168.
Faktor dari 168 = {1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 12, 14, 21, 24, 28, 42, 56, 84, 168}.
Dari sini kita tinggal cari dua bilangan dari faktor 168 tersebut yang jumlahnya 52 dan kpk dari kedua bilangan tersebut benar 168. Setelah melakukan pengecekan, didapatkan bilangannya adalah 28 dan 24. Selisih dari kedua bilangan ini adalah 4

Jawaban : **D**

24. Untuk menyelesaikan soal ini, kita perlu mengamati pola yang terjadi untuk setiap lampu. Perhatikan bahwa setiap lampu akan menyala jika dan hanya jika lampu tersebut ditekan sebanyak ganjil kali. Dari persoalan ini juga kita tahu bahwa setiap lampu bernomor i akan dipengaruhi oleh saklar yang bernomor suatu bilangan yang mana bilangan itu adalah faktor dari i. Berdasarkan dua hal yang sudah disebutkan tadi, maka suatu lampu ke-i akan menyala jika dan hanya jika i memiliki banyak faktor ganjil. Dengan teori bilangan, kita tahu bahwa suatu bilangan memiliki banyak faktor ganjil jika bilangan tersebut adalah bilangan kuadrat. Jadi banyak lampu yang menyala adalah banyaknya bilangan kuadrat yang tidak lebih dari 2018, yaitu ada sebanyak $\lfloor\sqrt{2018}\rfloor$ = 44
    Jawaban : **C**

25. Perhatikan bahwa nilai dari $FPB(i, 6)$ hanya memiliki 4 kemungkinan nilai yaitu 1, 2, 3, dan 6.
    1. Suatu bilangan $i,$ memiliki nilai $FPB(i, 6) = 2$, jika i adalah bilangan genap dan i tidak habis dibagi oleh 3.
       Banyak bilangan = $\left\lfloor\frac{2018}{2}\right\rfloor - \left\lfloor\frac{2018}{6}\right\rfloor = 673$
    2. Suatu bilangan $i,$ memiliki nilai $FPB(i, 6) = 3,$ jika i adalah bilangan yang habis dibagi 3 tetapi tidak habis dibagi oleh 2.
       Banyak bilangan = $\left\lfloor\frac{2018}{3}\right\rfloor - \left\lfloor\frac{2018}{6}\right\rfloor = 336$
    3. Suatu bilangan $i,$ memiliki nilai $FPB(i, 6) = 6,$ jika i adalah bilangan yang habis dibagi 6.
       Banyak bilangan = $\left\lfloor\frac{2018}{6}\right\rfloor = 336$
    4. Suatu bilangan $i,$ memiliki nilai $FPB(i, 6) = 1$, jika tidak memenuhi kriteria yang disebutkan di atas.
       Banyak bilangan = 2018 – 673 – 336 - 336 = 673

Sehingga hasil dari sigma di soal adalah = 2*673 + 3*336 + 6*336 + 1*673 = 5043
Jawaban : **D**

26. Diketahui bahwa $kpk(a, b) = \frac{ab}{fpb(a,b)}$
    Sehingga berdasarkan soal, $84 = \frac{xy}{3} \rightarrow xy = 252$
    Dari sini kita tinggal bruteforce x dan y yang merupakan faktor dari 252. Lalu nanti dicek apakah fpb nya bernilai 3.
    Setelah di cek akan ditemukan 4 pasang yaitu (3, 84), (84, 3), (12, 21), dan (21, 12).
    Jawaban : **D**

27. Soal ini dapat diselesaikan dengan bruteforce nilai a dan b yang mungkin.
    1. Jika a = 1, maka nilai b yang memenuhi ada sebanyak 10 bilangan
    2. Jika a = 2, maka nilai b yang memenuhi ada sebanyak 5 bilangan
    3. Jika a = 3, maka nilai b yang memenuhi ada sebanyak 7 bilangan

4. Jika a = 4, maka nilai b yang memenuhi ada sebanyak 5 bilangan
5. Jika a = 5, maka nilai b yang memenuhi ada sebanyak 8 bilangan
6. Jika a = 6, maka nilai b yang memenuhi ada sebanyak 3 bilangan
7. Jika a = 7, maka nilai b yang memenuhi ada sebanyak 9 bilangan
8. Jika a = 8, maka nilai b yang memenuhi ada sebanyak 5 bilangan
9. Jika a = 9, maka nilai b yang memenuhi ada sebanyak 7 bilangan
10. Jika a = 10, maka nilai b yang memenuhi ada sebanyak 4 bilangan

Total banyaknya pasangan adalah = 63 pasang
Jawaban : **C**

28. $1200 = 2^4.3.5^2$
Banyaknya faktor positif dari 1200 yang merupakan kelipatan 6 adalah = 12
Banyaknya faktor positif dari 1200 yang merupakan kelipatan 5 adalah = 20
Banyaknya faktor positif dari 1200 yang merupakan kelipatan 30 adalah = 8
Sehingga banyak faktor positif dari 1200 yang merupakan kelipatan 5 atau 6 adalah 12 + 20 – 8 = 24
Jawaban : **D**

29. Banyak faktor dari 19800 yang juga merupakan faktor dari 11340 adalah banyak faktor dari fpb(19800, 11340) = 180 = $2^2.3^2.5$
Banyak faktor dari 180 adalah $3.3.2 = 18$
Jawaban : **C**

30. Banyak angka 0 berurutan di akhir bilangan $1000!$ Adalah:
$$\left\lfloor\frac{1000}{5}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{1000}{25}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{1000}{125}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{1000}{625}\right\rfloor = 200 + 40 + 8 + 1 = 249$$
Jawaban : **B**