

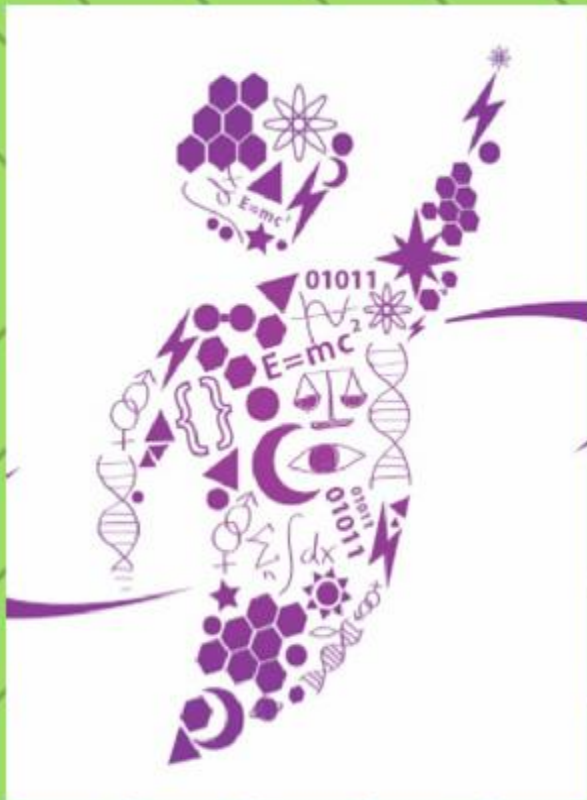
PAKET 15

PELATIHAN ONLINE

2019

SMA
MATEMATIKA

po.alcindonesia.co.id



WWW.ALCINDONESIA.CO.ID

@ALCINDONESIA

085223273373

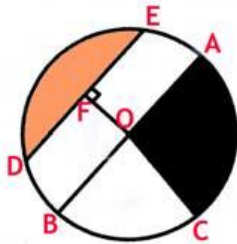
Paket 15

1. Lingkaran

Lingkaran adalah kumpulan titik-titik yang memiliki jarak yang sama terhadap suatu titik tertentu, yaitu pusat lingkaran.

Jadi ada dua hal yang sangat berkaitan dengan lingkaran yaitu jari-jari lingkaran, R , dan pusat lingkaran.

Unsur-unsur pada lingkaran dapat dilihat pada gambar berikut.



- Titik O disebut sebagai pusat lingkaran
- OA, OB, OC, OD, OE disebut sebagai jari-jari lingkaran
- Ruas garis lurus AB yang melalui pusat lingkaran disebut diameter lingkaran
- Ruas garis DE disebut tali busur
- Garis lengkung DE dan AC disebut busur lingkaran
- Daerah arsiran yang dibatasi dua jari-jari (pada gambar dibatasi OA dan OC serta berwarna hitam) disebut juring
- Daerah yang dibatasi talibusur DE dan busur DE disebut tembereng
- Garis OF yang tegak lurus DE disebut apotema

Misalkan r adalah jejari lingkaran dan d adalah diameter lingkaran dengan $d = 2r$

$$\text{Luas lingkaran} = \pi r^2 = \frac{1}{4} \pi d^2$$

$$\text{Keliling Lingkaran} = 2\pi r$$

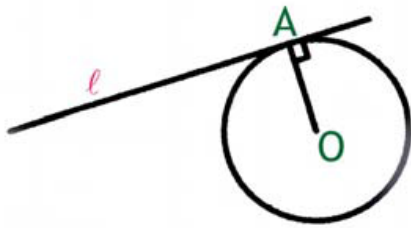
Luas Juring = $\frac{n}{360^\circ} \cdot \pi r^2$ dengan n adalah sudut pusat diukur dalam derajat.

Panjang Busur = $\frac{n}{360^\circ} \cdot 2\pi r$ dengan n adalah sudut pusat diukur dalam derajat.

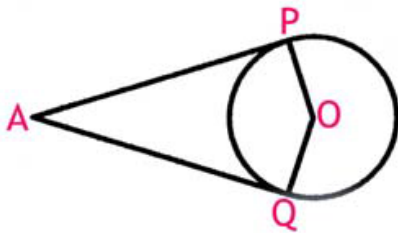
Luas tembereng DE = Luas Juring ODE – Luas $\triangle ODE$

Berikut adalah dalil-dalil yang berkaitan dengan lingkaran:

- (a) Misalkan garis l menyinggung lingkaran yang berpusat di O pada titik A maka OA akan tegak lurus garis l .

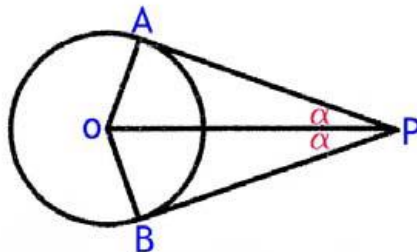


- (b) Misalkan titik A terletak di luar lingkaran L maka dari titik A dapat dibuat dua buah garis singgung yang jaraknya terhadap titik singgungnya sama panjang.



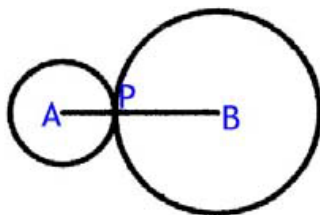
Titik A terletak di luar lingkaran. Dari A dibuat dua garis yang menyinggung lingkaran di titik P dan Q maka panjang $AP = AQ$.

- (c) Misalkan titik P terletak di luar lingkaran L yang berpusat di O dan garis yang ditarik dari titik P menyinggung lingkaran di titik A dan B. Maka $\angle APO = \angle BPO$.



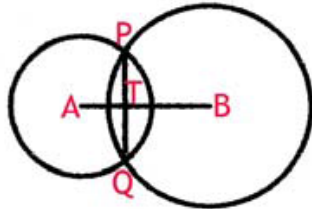
Berdasarkan kesimetrian akan didapat $\angle APO = \angle BPO$.

- (d) Sebuah lingkaran berpusat di A menyinggung di luar sebuah lingkaran berpusat di B pada titik P. Maka A, P dan B berada pada satu garis lurus.



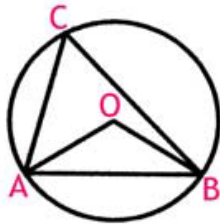
Buat garis singgung melalui titik P. Maka garis singgung tersebut akan tegak lurus AP dan PB berakibat AP dan PB akan sejajar. Jadi, A, P dan B berada pada satu garis lurus.

- (e) Garis yang menghubungkan pusat dua lingkaran akan memotong tegak lurus pertengahan talibusur persekutuan.



Misalkan lingkaran yang berpusat di A berpotongan di titik P dan Q dengan lingkaran yang berpusat di B. Maka AB akan berpotongan tegak lurus dengan PQ di titik T yang merupakan pertengahan PQ.

- (f) Besar sudut pusat sama dengan dua kali sudut keliling.



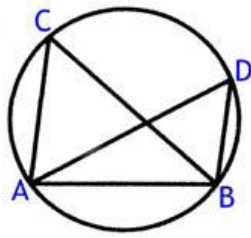
Misalkan AB adalah talibusur dan O pusat lingkaran. Maka $\angle AOB$ disebut sebagai sudut pusat. Misalkan juga titik C terletak pada lingkaran tersebut, maka $\angle ACB$ disebut sudut keliling.

Hubungan antara sudut pusat dan sudut keliling tersebut adalah

$$\angle AOB = 2\angle ACB$$

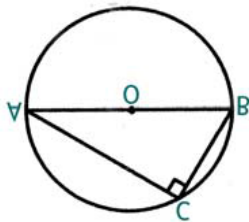
Berlaku juga bahwa jika $\angle AOB = 2\angle ACB$ maka dapat dibuat sebuah lingkaran melalui A, B dan C serta berpusat di O.

- (g) Besar sudut keliling yang menghadap talibusur yang sama akan sama besar.

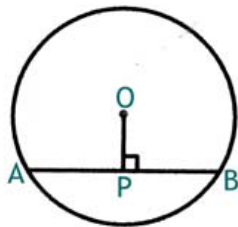


Misalkan AB adalah talibusur dan titik C dan D terletak pada lingkaran. Maka $\angle ACB = \angle ADB$

- (h) Misalkan AB adalah diameter suatu lingkaran dan C terletak pada lingkaran tersebut, maka berlaku $\angle ACB = 90^\circ$

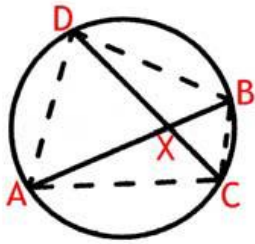


- (i) Misalkan AB adalah talibusur suatu lingkaran yang berpusat di O dan titik P adalah pertengahan AB maka OP akan tegak lurus AB



Karena O adalah pusat lingkaran maka $OA = OB =$ jari-jari lingkaran. Jadi $\triangle AOB$ adalah segitiga sama kaki. Karena $\triangle AOB$ segitiga sama kaki maka garis dari O akan memotong tegak lurus pertengahan sisi AB.

- (j) Misalkan dua talibusur AB dan CD pada satu lingkaran saling berpotongan di titik X maka berlaku $AX \cdot XB = CX \cdot XD$. Berlaku sebaliknya, jika dua buah garis AB dan CD berpotongan di titik X dan memenuhi $AX \cdot XB = CX \cdot XD$ maka keempat titik A, B, C dan D terletak pada satu lingkaran. Perhatikan gambar.



Dari hubungan garis didapat bahwa $\angle AXD = \angle CXB$

Perhatikan bahwa ruas AC juga merupakan talibusur sehingga dari dalil sebelumnya maka $\angle ADC = \angle ABC$.

Dengan cara yang sama akan didapat bahwa $\angle BAD = \angle BCD$.

Karena ketiga sudut $\triangle ADX$ dan $\triangle BCX$ sama maka kedua

segitiga tersebut sebangun. Akibatnya berlaku $\frac{AX}{XD} = \frac{CX}{XB}$

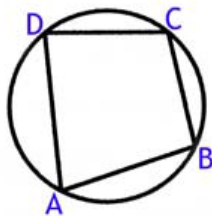
sehingga

$$AX \cdot XB = CX \cdot XD$$

Berlaku kebalikannya.

- (k) Misalkan titik A, B, C dan D semuanya terletak pada satu lingkaran dengan AC dan BD adalah kedua diagonal. Maka berlaku :

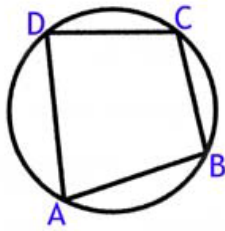
$$AB \cdot DC + AD \cdot BC = AC \cdot BD$$



Persamaan di atas dikenal dengan dalil Ptolemus.

- (l) Pada segiempat talibusur, jumlah sudut sehadapan sama dengan 180° berlaku juga bahwa jika jumlah sudut sehadapan sama dengan 180° maka segiempat tersebut merupakan segiempat talibusur.

Perlu dijelaskan bahwa segiempat talibusur adalah segiempat yang keempat titik sudutnya terletak pada satu lingkaran.



Karena titik-titik A, B, C dan D semuanya terletak pada satu lingkaran maka ABCD adalah segiempat tali busur. Maka berlaku

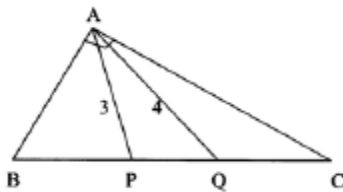
$$\angle ABC + \angle ADC = 180^\circ$$

$$\angle BAD + \angle BCD = 180^\circ$$

SOAL

1. Tentukan bilangan asli terkecil k sehingga pecahan $\frac{14k+17}{k-9}$ dapat disederhanakan menjadi $\frac{pd}{qd}$ dengan p, q, d adalah bilangan asli, p dan q relatif prima serta tidak ada satu pun di antara q atau d bernilai 1.
- 15
 - 27
 - 31
 - 42

2. Segitiga ABC siku-siku di A. Titik P dan Q keduanya terletak pada sisi BC sehingga $BP = PQ = QC$. Jika diketahui $AP = 3$ dan $AQ = 4$, tentukan panjang AB.



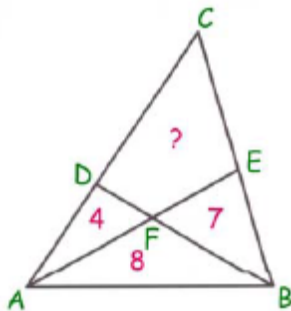
- $\sqrt{3}$
 - $2\sqrt{3}$
 - $3\sqrt{3}$
 - $4\sqrt{3}$
3. Sebuah bilangan dipilih secara acak dari bilangan-bilangan 1, 2, 3, 4, 5, 6, ..., 999, 1000. Peluang bilangan yang terpilih merupakan pembagi M dengan M adalah bilangan asli kurang dari atau sama dengan 1000 adalah 0,01. Tentukan nilai maksimum dari M ?
- 976
 - 891
 - 997
 - 789
4. Misalkan a, b, c dan p adalah bilangan real dengan a, b dan c semuanya berbeda dan memenuhi

$$a + \frac{1}{b} = b + \frac{1}{c} = c + \frac{1}{a} = p$$

Tentukan semua kemungkinan nilai p .

- 1 dan -1
- 1 dan 0
- 0 dan -1

- d. 1 dan -2
5. Tentukan banyaknya semua penyelesaian (a, b, c) yang memenuhi persamaan $(a + \sqrt{c})^2 + (b + \sqrt{c})^2 = 60 + 20\sqrt{c}$ dengan a, b adalah bilangan bulat dan $c \leq 94$.
- a. 1
b. 3
c. 5
d. 7
6. Sebuah bilangan asli n terdiri dari 7 digit berbeda dan habis dibagi oleh masing-masing digitnya. Tentukan ketiga digit yang tidak termasuk ke dalam digit dari n .
- a. 1, 4 dan 9
b. 0, 2 dan 5
c. 1, 3 dan 5
d. 0, 4 dan 5
7. Dua garis lurus membagi sebuah segitiga menjadi empat bagian dengan luas tertulis seperti pada gambar. Tentukan luas keempat.



- a. 21
b. 15
c. 13
d. 8
8. Jika $a^2 = 7b + 51$ dan $b^2 = 7a + 51$ dengan a dan b bilangan real berbeda, tentukan hasil kali ab .
- a. 1
b. -1
c. 2
d. -2
9. Tentukan banyaknya semua pasangan bilangan bulat tak negatif (x, y) yang memenuhi $(xy - 7)^2 = x^2 + y^2$

- a. 1
 - b. 2
 - c. 3
 - d. 4
10. Sebanyak n orang pengurus sebuah organisasi akan dibagi ke dalam empat komisi mengikuti ketentuan berikut :
- (i) setiap anggota tergabung kedalam tepat dua komisi
 - (ii) setiap dua komisi memiliki tepat satu anggota bersama
- Berapakah n ?
- a. 2
 - b. 4
 - c. 6
 - d. 8