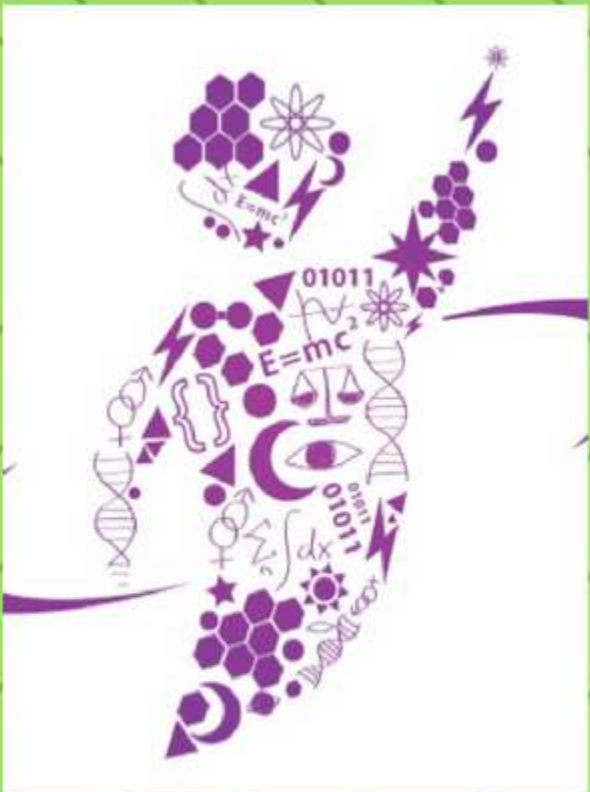
PAKET 2

PELATIHAN ONLINE 2019

SMA MATEMATIKA

po.alcindonesia.co.id



WWW.ALCINDONESIA.CO.ID

@ALCINDONESIA

085223273373

BARISAN DAN DERET

Barisan merupakan list bilangan-bilangan real atau kompleks terurut yang merupakan nilai dari fungsi f(n) dengan domain bilangan asli. 1, 2, 3, . . . dikatakan sebagai barisan karena mempunyai suatu pola tertentu dengan rumus suku ke-n adalah n.

Sedangkan deret merupakan penjumlahan elemen-elemen pada barisan. 1 + 2 + 3 + . . . disebut deret.

Barisan dan Deret Aritmatika

Barisan aritmatika adalah barisan yang memiliki selisih yang konstan untuk setiap dua suku berurutan. a, a + b, a + 2b, . . . adalah barisan aritmatika dengan suku pertama = a dan beda = b.

Suku ke-n, U_n dirumuskan dengan :

$$U_n = a + (n - 1)b$$

Jumlah n bilangan pertama (deret ke-n), S_n, dirumuskan dengan :

$$S_n = \frac{n}{2}(2a + (n-1)b) = \frac{n}{2}(a + U_n)$$

Bukti :

$S_n = U_1 + U_2 + U_3 + \ . \ . \ . + U_n = (a) + (a + b) + (a + 2b) + \ . \ . \ . + (a + (n-1)b)$ . . . (1)

$S_n = U_n + U_{n-1} + U_{n-2} + \ . \ . \ . + U_1 = (a + (n-1)b) + (a + (n - 2)b) + (a + (n - 3)b) + \ . \ . \ . + (a)$ . . . (2)

Jumlahkan kedua persamaan (1) dan (2):

$2S_n = n \ . \ (2a + (n - 1)b)$

$$S_n = \frac{n}{2}(2a + (n-1)b)$$

Barisan dan deret aritmatika bertingkat

Misalkan ada barisan $U_1, U_2, U_3, \ . \ . \ . \ , U_n$ yang bukan merupakan barisan aritmatika sebab $U_n - U_{n-1}$ tidak konstan. Tetapi apabila diambil $b_1(n) = U_n - U_{n-1}$ lalu $b_2(n) = b_1(n) - b_1(n - 1)$ dan seterusnya hingga suatu saat $b_k(n) - b_k(n - 1)$ bernilai konstan. Maka kita dapat mengambil kesimpulan bahwa rumus jumlah n suku pertama, S_n barisan tersebut merupaka polinomial pangkat k.

$$S_n = a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \ldots + a_1 n + a_0$$

Nilai-nilai a_i tersebut dapat ditentukan dengan menyubtitusikan nilai-nilai n untuk a_n yang sudah diketahui. Sedangkan untuk U_n dapat ditentukan dari persamaan :

$$U_n = S_n - S_{n-1}$$

Barisan dan Deret Geometri

Barisan geometri adalah barisan yang memiliki perbandingan yang sama untuk setiap dua suku berurutatan. Secara umum dituliskan a, ar, ar^2, . . . merupakan barisan geometri dengan suku pertama a dan rasio = r.

Suku ke-n, U_n dirumuskan dengan :

$$U_n = a \cdot r^{n-1}$$

Sedangkan jumlah n bilangan pertama, S_n dirumuskan dengan :

$$S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$$

Bukti :

$S_n = (a) + (ar) + (ar^2) + \ . \ . \ . + (ar^{n-1})$ . . . (1)

Kalikan persamaan (1) dengan r, maka $(r)(S_n) = (ar) + (ar^2) + (ar^3) + \ . \ . \ . + (ar^n)$ . . . (2)

Kurangkan persamaan (2) ke persamaan (1), sehingga di peroleh : $r \cdot S_n - S_n = ar^n - a$

Maka, $S_n = \frac{a(r^n-1)}{r-1}$

Deret geometri tak hingga

Deret geometri tak hingga dibedakan menjadi dua, yaitu deret yang divergen dan konvergen. Deret geometri yang divergen merupakan deret yang memiliki nilai tak hingga (ataupun negatif tak hingga) alias tidak dapat dihitung. Sedangkan Deret geometri yang konvergen memiliki jumlah deret yang dapat dihitung. Syarat dari deret geometri yang konvergen yaitu $-1 < r < 1$ dengan r menyatakan rasio barisan geometri tersebut. Jumlah deret geometri tak hingga yang konvergen ini yaitu :

$$S_\infty = \frac{a}{1 - r}$$

Prinsip Teleskopik

Prinsip teleskopik sering digunakan untuk menyederhanakan suatu deret. Ada dua bentuk umum yang dikenal, yaitu dengan penjumlahan dan perkalian sebagai berikut.

a. $\sum_{i=1}^{n}(a_{i+1} - a_i) = (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \ . \ . \ . + (a_{n+1} - a_n) = a_{n+1} - a_1$
b. $\prod_{i=1}^{n} \frac{a_{i+1}}{a_i} = \frac{a_2}{a_1} \cdot \frac{a_3}{a_2} \cdot \frac{a_4}{a_3} \ . \ . \ . \ \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_{n+1}}{a_1}$

SOAL

1. Misalkan U_n adalah suku ke-n dari suatu barisan aritmatika. Jika U_k = t dan U_t = k, maka nilai dari suku ke-(k + t) adalah . . .
   a. 0
   b. k
   c. 2k
   d. k + t
   e. 2(k + t)
2. Tiga buah bilangan merupakan barisan aritmatika. Bila suku tengahnya dikurangi 5, maka terbentuk suatu barisan geometri dengan rasio sama dengan 2. Jumlah barisan aritmatika tersebut adalah . . .
   a. 10
   b. 50
   c. 75
   d. 80
   e. 100
3. Sebuah barisan $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ memenuhi $a_1 = 1$ dan $5^{(a_{n+1}-a_n)} = 1 + \frac{1}{n+\frac{2}{3}}$ untuk $n \geq 1$. Misalkan k adalah bilangan bulat terkecil lebih dari 1 yang memenuhi a_k adalah bilangan bulat. Nilai k adalah . . .
   a. 1
   b. 11
   c. 21
   d. 41
   e. 51
4. Barisan $x_1, x_2, x_3, \cdots$ memenuhi $x_k = \frac{1}{k2+k}$. Jika terdapat bilangan berurutan sehingga
   $$x_m + x_{m+1} + \cdots + x_n = \frac{1}{29}$$
   maka pasangan (m, n) yang memenuhi sebanyak . . .
   a. 0
   b. 1
   c. 2
   d. 3
   e. 4
5. $a_1, a_2, a_3, \ldots$ adalah barisan geometri dengan a_1 = a dan rasio = r di mana a dan r adalah bilangan bulat positif. Diberikan ${}^{9}\log a_1 + {}^{9}\log a_2 + \cdots + {}^{9}\log a_{12} = 2019$. Banyaknya pasangan (a, r) yang memenuhi adalah . . .
   a. 0
   b. 1
   c. 31
   d. 60
   e. 61
6. Diberikan bahwa k adalah bilangan bulat positif yang memenuhi 36 + k, 300 + k, 596 + k adalah kuadrat dari tiga bilangan yang membentuk barisan aritmatika. Tentukan nilai k.
   a. 125
   b. 144
   c. 225
   d. 744
   e. 925
7. Nilai dari

$$\frac{1}{2}-\frac{3}{1!+2!+3!}-\frac{4}{2!+3!+4!}-\frac{5}{3!+4!+5!}-\ .\ .\ .-\frac{2018}{2016!+2017!+2018!}$$

adalah . . .

a. $\frac{1}{2018!}$
b. $\frac{2017}{2018!}$
c. $\frac{1}{2}-\frac{1}{2018!}$
d. $\frac{1}{2017!}-\frac{1}{2018!}$
e. $1-\frac{2016}{2017!}$

8. Barisan bilangan bulat a_1, a_2, a_3, . . . memenuhi $a_{n+2} = a_{n+1} - a_n$ untuk $n > 0$. Jumlah 1945 bilangan pertama adalah 2018 dan jumlah 2018 bilangan pertama adalah 1945. Tentukan jumlah 2001 bilangan pertama.
a. -146
b. -76
c. 45
d. 76
e. 146

9. Diketahui $0 < a < b < c < d$ adalah bilangan bulat yang memenuhi a, b, c membentuk barisan aritmatika sedangkan b, c, d membentuk barisan geometri.
Jika $d - a = 30$ maka tentukan nilai dari $a + b + c + d$
a. 89
b. 109
c. 129
d. 149
e. 169

10. Barisan 1000, n, 1000 – n, n – (1000 – n), (1000 – n) – (n – (1000 – n)), ⋯ dengan n bilangan bulat berakhir ketika bilangan negatif pertama muncul. Sebagai contoh untuk n = 100 maka barisan tersebut adalah 1000, 100, 900, –800. Suku ke-4 barisan tersebut negatif. Jadi, untuk n = 100 maka barisan tersebut memiliki panjang 3. Tentukan n sehingga panjang barisan tersebut maksimal dan panjang barisan yang terbentuk.
a. n = 500 dan panjang barisan = 13
b. n = 525 dan panjang barisan = 11
c. n = 600 dan panjang barisan = 10
d. n = 608 dan panjang barisan = 11
e. n = 618 dan panjang barisan = 13