

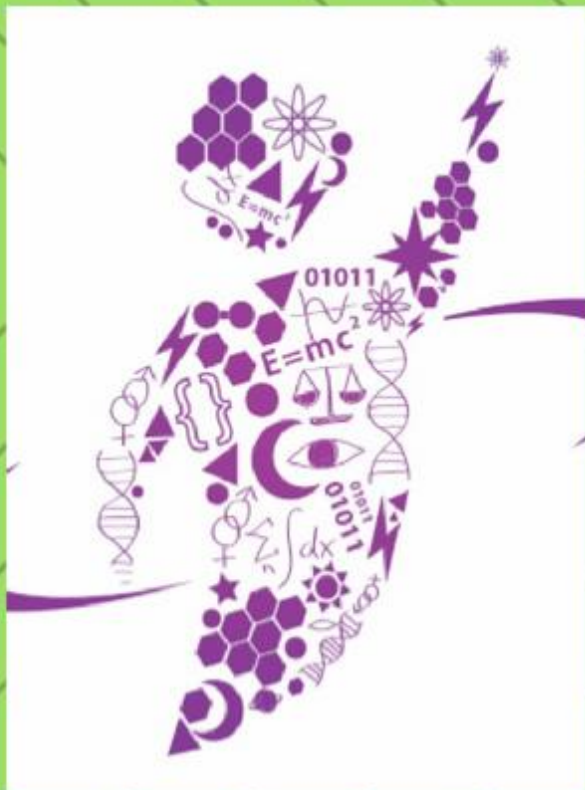
PAKET 13

PELATIHAN ONLINE

2019

**SMA
MATEMATIKA**

po.alcindonesia.co.id



WWW.ALCINDONESIA.CO.ID

@ALCINDONESIA

085223273373

PEMBAHASAN PAKET 13

1. JAWABAN: C

b harus habis dibagi 2 akibatnya b^3 habis dibagi 8 sehingga $2a^2$ juga habis dibagi 8. Maka 2 membagi a .

a harus habis dibagi 3 akibatnya a^2 habis dibagi 9 sehingga 9 membagi $3b^3$. Maka 3 membagi b yang berakibat 81 membagi $3b^3 \rightarrow 81$ membagi $2a^2 \rightarrow 9$ membagi a .

Karena 2 dan 9 membagi a serta 2 dan 9 relatif prima maka 18 membagi a . Misalkan $a = 18k$

Karena 2 dan 3 membagi b serta 2 dan 3 relatif prima maka 6 membagi b . Misalkan $b = 6m$

$$2(18k)^2 = 3(6m)^3 \rightarrow 648k^2 = 648m^3 \rightarrow k^2 = m^3$$

Maka k adalah bilangan kubik yang akan kita dapatkan $a = 18(n^3) = 18n^3$

m adalah bilangan kuadrat yang akan kita dapatkan $b = 6(n^2) = 6n^2$

Pasangan (a, b) yang memenuhi adalah $(18n^3, 6n^2)$ dengan n adalah bilangan asli.

Jadi, ada tak hingga banyaknya pasangan (a, b) yang memenuhi.

2. JAWABAN: D

$$(x + y + z)^2 = 5^2 = 25 \rightarrow x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + xz + yz) = 25 \rightarrow x^2 + y^2 = 19 - z^2$$

$$x + y = 5 - z$$

$$x^2 + y^2 + 2xy = 25 - 10z + z^2$$

$$19 - z^2 + 2xy = 25 - 10z + z^2$$

$$\text{Mengingat bahwa } 2xy \leq x^2 + y^2$$

$$19 - z^2 + 2xy \leq 19 - z^2 + x^2 + y^2$$

$$25 - 10z + z^2 \leq 19 - z^2 + 19 - z^2$$

$$3z^2 - 10z - 13 \leq 0$$

$$(3z - 13)(z + 1) \leq 0$$

$$-1 \leq z \leq \frac{13}{3}$$

$$z_{maks} = \frac{13}{3} \text{ yang didapat saat } x = y = \frac{1}{2} \left(5 - \frac{13}{3} \right) = \frac{1}{3}$$

3. JAWABAN: B

Karena w, x, y dan z bilangan asli maka jelas bahwa $w > x, y, z$. yang berakibat $w \geq 2$

Tanpa mengurangi keumuman soal misalkan $x \geq y \geq z$

Maksimum $x! + y! + z! = 3(x!)$ atau jika ditulis dalam bentuk lain

$$3(x!) \geq x! + y! + z!$$

$$w! = w((w - 1)!) = x! + y! + z!$$

Karena $x \leq w - 1$ maka untuk $w > 3 \rightarrow w! > 3((w - 1)!) \geq 3(x!) \geq x! + y! + z!$

$w! > x! + y! + z!$ maka tidak ada nilai $w > 3$ yang memenuhi $\rightarrow w = 3$ atau 2

• Jika $w = 2$

Maka $x = 1 \rightarrow y = z = 1$

Tetapi $2! \neq 1! + 1! + 1!$ Yang berakibat $w = 2$ tidak memenuhi

• Jika $w = 3$

$x = 2 \rightarrow y = 2$ dan $z = 2$ yang memenuhi

$$3! = 2! + 2! + 2! = 6$$

Jadi hanya terdapat satu bilangan w, x, y dan z yang memenuhi $w! + x! + y! + z!$ yaitu $w = 3$ dan $x = y = z = 2$

4. JAWABAN: C

Misalkan $\angle ACB = x \rightarrow BC = AC \cos x$;

$$AB = AC \sin x = CD = \frac{BC}{AB} = \cot x \rightarrow BC = \cot x$$

$$\angle BCD = 180^\circ - x$$

$$\angle CDB = 180^\circ - 30^\circ - (180^\circ - x) = x - 30^\circ$$

Pada segitiga BCD berlaku :

$$\frac{BC}{\sin \angle CDB} = \frac{CD}{\sin 30^\circ} = 2$$

$$BC = 2 \sin (x - 30^\circ) = \cot x$$

$$2 \sin x \cos 30^\circ - 2 \sin 30^\circ \cos x = \cot x$$

$$\sin^2 x \sqrt{3} = \cos x + \cos x \sin x$$

$$3 \sin^4 x = (1 - \sin^2 x)(1 + \sin x)^2 = 1 + \sin^2 x + 2 \sin x - \sin^2 x - \sin^4 x - 2 \sin^3 x$$

$$4 \sin^4 x + 2 \sin^3 x - 2 \sin x - 1 = 0$$

$$(2 \sin^3 x - 1)(2 \sin x + 1) = 0$$

Karena x ada di antara 0° sampai 90° maka $\sin x = -\frac{1}{2}$ tidak

memenuhi. Maka $\sin x = \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$

$$AC \sin x = 1$$

$$AC = \sqrt[3]{2}$$

5. JAWABAN: B

Misalkan akar persekutuanannya adalah p maka berlaku :

$$1988p^2 + bp + 8891 = 0$$

$$8891p^2 + bp + 1988 = 0$$

$$-6903p^2 + 6903 = 0 \rightarrow p^2 = 1 \rightarrow p = 1 \text{ atau } p = -1$$

• untuk $p = 1$

Untuk persamaan (1):

$$1988(1)^2 + b(1) + 8891 = 0 \rightarrow b = -10879$$

$$1988x^2 - 10879x + 8891 = 0 \rightarrow (8891x - 1988)(x - 1) = 0$$

Untuk persamaan (2):

$$8891(1)^2 + b(1) + 1988 = 0 \rightarrow b = -10879$$

$$8891x^2 - 10879x + 1988 = 0 \rightarrow (1988x - 8891)(x - 1) = 0$$

memenuhi untuk $p = 1$

• untuk $p = -1$

Untuk persamaan (1):

$$1988(-1)^2 + b(-1) + 8891 = 0 \rightarrow b = 10879$$

$$1988x^2 + 10879x + 8891 = 0 \rightarrow (8891x + 1988)(x + 1) = 0$$

Untuk persamaan (2):

$$8891(-1)^2 + b(-1) + 1988 = 0 \rightarrow b = 10879$$

$$8891x^2 + 10879x + 1988 = 0 \rightarrow (1988x + 8891)(x + 1) = 0$$

memenuhi untuk $p = -1$

maka nilai b yang memenuhi ada sebanyak 2 yaitu -10879 atau 10879

6. JAWABAN: A

Misalkan segitiga dengan keliling P meter dan luas A adalah ABC.

Daerah taman beserta rumah akan terdiri dari :

• segitiga ABC.

• 3 persegi panjang yang memiliki luas masing-masing $s_i \cdot 5$ meter
persegi dengan s_i adalah panjang sisi-sisi segitiga ABC.

• 3 buah juring dengan pusat masing-masing pada titik A, B dan C yang
kalau digabung akan membentuk lingkaran berjari-jari 5 sebab
jumlah sudut $= (360^\circ - 180^\circ - A) + (360^\circ - 180^\circ - B) + (360^\circ - 180^\circ - C) = 540^\circ - (A + B + C) = 540^\circ - 180^\circ = 360^\circ$

$$\text{Luas rumah dan taman} = A + (5s_1 + 5s_2 + 5s_3) + \pi(5)^2 = A + 5(s_1 + s_2 + s_3) + 25\pi$$

$$\text{Luas rumah dan taman} = A + 5P + 25\pi$$

7. JAWABAN: C

Tanpa mengurangi keumuman soal misalkan ABC siku-siku di B.

A' didapat dengan mencerminkan A terhadap BC. Karena $BC \perp AB$ maka ABA' adalah garis lurus.

C' didapat dengan mencerminkan C terhadap AB. Karena $BC \perp AB$ maka CBC' adalah garis lurus.

Titik B adalah pertengahan garis ABA' dan CBC' \rightarrow A'C' sejajar dengan AC.

Garis tinggi dari B ke A'C' akan sama panjang dengan garis tinggi dari B ke AC. Karena B dicerminkan terhadap sisi AC maka garis tinggi dari B ke AC akan sama panjang dengan garis tinggi dari B' ke AC.

Akibatnya adalah garis tinggi dari B' ke sisi A'C' adalah tiga kali garis tinggi dari B ke AC. Maka luas $\Delta A'B'C'$ akan tiga kali luas ΔABC

Luas $\Delta A'B'C' = 3$

8. JAWABAN: C

Misalkan p_n adalah peluang $M_1 < M_2 < M_3 < \dots < M_n$ terjadi.

Jelas bahwa nilai terbesar dari $\frac{1}{2}n(n+1)$ bilangan tersebut harus

berada di bawah. Peluang ini terjadi adalah $\frac{n}{\frac{1}{2}n(n+1)} = \frac{2}{n+1}$

Pada baris 1 sampai baris ke- $(n-1)$ terdapat bilangan sebanyak $\frac{1}{2}(n-1)(n)$. Bilangan terbesar di antara bilangan-bilangan ini harus

berada di baris ke- $(n-1)$. Peluang ini terjadi adalah $\frac{n-1}{\frac{1}{2}(n-1)(n)} = \frac{2}{n}$

Demikian seterusnya.

$$p_n = \frac{2}{n+1} p_{n-1}$$

$$p_1 = 1 = \frac{2}{2} \rightarrow p_2 = \frac{2}{3} p_1 = \frac{2}{3} \rightarrow p_3 = \frac{3}{1+2+3} p_2 = \frac{2}{4} p_3 \text{ dan seterusnya}$$

$$p_n = \frac{2}{n+1} \cdot \frac{2}{n} \cdot \frac{2}{n-1} \cdots \frac{2}{2} = \frac{2^n}{(n+1)!}$$

9. JAWABAN: A

Dapat dihitung bahwa $10^2 + 3^5 = 7^3$

Karena $KPK(2, 3, 5) = 30$ maka

$$10^{2n^{30}} + 3^{5n^{30}} = 7^{3n^{30}}$$

$(10n^{15})^2 + (3n^6)^5 = (7n^{10})^3$ yang berlaku untuk semua nilai n .

Jadi, persamaan $x^2 + y^5 = z^3$ mempunyai tak hingga penyelesaian untuk bilangan bulat x, y, z dengan $xyz \neq 0$

10. JAWABAN: B

$$x^2(x+1)^2 + x^2 = 3(x+1)^2$$

$$x^4 + 2x^3 + x^2 + x^2 = 3x^2 + 6x + 3$$

$$x^4 + 2x^3 - x^2 - 6x - 3 = 0$$

$$(x^2 - x - 1)(x^2 + 3x + 3) = 0$$

$$x^2 + 3x + 3 = 0 \text{ atau } x^2 - x - 1 = 0$$

- Untuk $x^2 + 3x + 3 = 0$

$$\text{Disk} = 3^2 - 4(1)(3) = -3 < 0$$

Tidak ada akar real yang memenuhi

- Untuk $x^2 - x - 1 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1^2 - 4(1)(-1)}}{2}$$

$$x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5} \text{ atau } x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}$$

Maka nilai x yang memenuhi persamaan adalah $x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$ atau

$$x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}$$