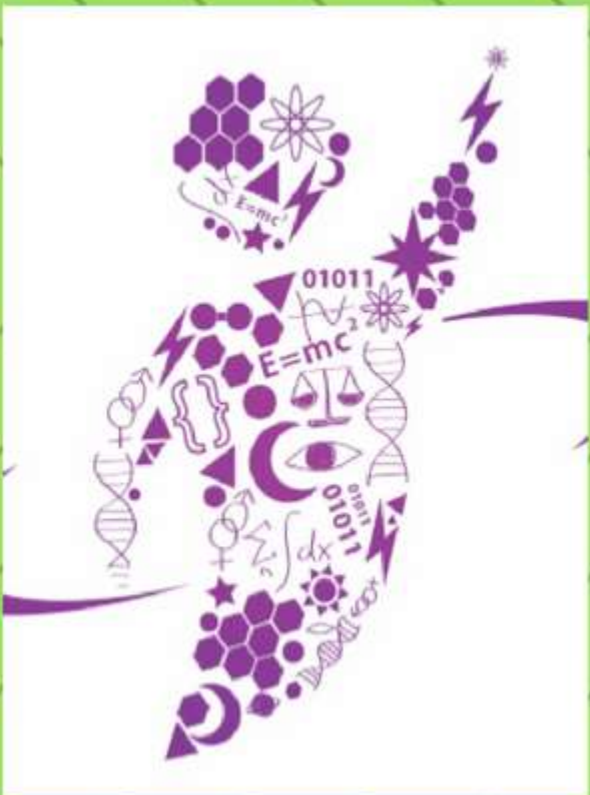
PAKET 3

PELATIHAN ONLINE

2019

SMA
MATEMATIKA

po.alcindonesia.co.id



WWW.ALCINDONESIA.CO.ID

@ALCINDONESIA

085223273373

PERSAMAAN LINGKARAN

1) Persamaan lingkaran berpusat di $(0,0)$ dan (a, b)

Lingkaran adalah kumpulan titik-titik yang memiliki jarak yang sama terhadap suatu titik tertentu, yaitu pusat lingkaran. Jadi ada dua hal yang sangat berkaitan dengan lingkaran yaitu jari-jari lingkaran, R, dan pusat lingkaran.

Dari pengertian lingkaran tersebut jika diturunkan akan didapat persamaan:

$x^2 + y^2 = r^2$ yang merupakan persamaan lingkaran berpusat di $(0,0)$ dan berjari-jari r.

$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ yang merupakan persamaan lingkaran berpusat di (a, b) dan berjari-jari r.

Jika persamaan $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ dijabarkan akan didapat persamaan umum lingkaran yang berbentuk :

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$$

Salah satu cara menentukan persamaan lingkaran jika diketahui pusat lingkaran dan persamaan garis yang menyinggung lingkaran tersebut adalah dengan memanfaatkan rumus jarak titik ke suatu garis lurus sebab jarak titik pusat ke garis singgung tersebut adalah merupakan jari-jari lingkaran. Misalkan suatu garis lurus memiliki persamaan $Ax + By + C = 0$. Maka rumus jarak titik (x_1, y_1) ke garis tersebut adalah

$$d = \left|\frac{Ax_1 + By_1 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}\right|$$

2) Hubungan antara titik dengan lingkaran

Misalkan terdapat lingkaran dengan persamaan $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ dan titik (p, q). Maka hubungan titik (p, q) dengan $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ akan memiliki tiga kemungkinan hubungan :

a) Jika $(p - a)^2 + (q - b)^2 < r^2$ maka titik (p, q) terletak di dalam lingkaran

b) Jika $(p - a)^2 + (q - b)^2 = r^2$ maka titik (p, q) terletak pada lingkaran

c) Jika $(p - a)^2 + (q - b)^2 > r^2$ maka titik (p, q) terletak di luar lingkaran

3) Hubungan antara garis lurus dengan lingkaran

Misalkan diketahui suatu garis lurus $y = mx + c$ dan lingkaran $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$. Bagaimana hubungan antara garis lurus dan lingkaran tersebut?

Subtitusikan persamaan $y = mx + c$ ke persamaan lingkaran $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ sehingga didapat suatu persamaan kuadrat dalam peubah x, yaitu $Ax^2 + Bx + C = 0$.

Dari persamaan tersebut dapat dihitung diskriminan $= B^2 - 4AC$.

(i) Jika $B^2 - 4AC < 0$ maka garis lurus tidak memotong lingkaran

(ii) Jika $B^2 - 4AC = 0$ maka garis lurus menyinggung lingkaran

(iii) Jika $B^2 - 4AC > 0$ maka garis lurus memotong lingkaran di dua titik

Prinsip nilai diskriminan di atas tidak hanya dapat digunakan untuk mencari hubungan antara garis lurus dengan lingkaran tetapi juga hubungan antara garis lurus dengan irisan kerucut yang lain seperti parabola, elips maupun hiperbola.

4) Persamaan Garis Singgung pada Lingkaran

a) Garis singgung lingkaran dengan gradien tertentu

Misalkan diketahui bahwa garis singgung tersebut memiliki gradien m. Maka persamaan garis singgung dapat dinyatakan dengan

(i) Untuk lingkaran $x^2 + y^2 = r^2$

$$y = mx \pm r\sqrt{m^2 + 1}$$

(ii) Untuk lingkaran $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$

$$y - b = m(x - a) \pm r\sqrt{m^2 + 1}$$

b) Garis Singgung melalui titik pada lingkaran

Misalkan titik (x_1, y_1) terletak pada lingkaran maka persamaan garis singgung yang melalui titik tersebut dapat ditentukan dengan

(i) Untuk lingkaran $x^2 + y^2 = r^2$

$$x_1x + y_1y = r^2$$

(ii) Untuk lingkaran $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$

$$(x_1 - a)(x - a) + (y_1 - b)(y - b) = r^2$$

c) Persamaan Garis Singgung melalui titik di luar lingkaran

Untuk menentukan persamaan garis singgung ini dapat dilakukan dengan beberapa cara :

(i) Dengan mencari rumus diskriminan lalu memanfaatkan pengertian hubungan antara garis lurus dengan lingkaran

(ii) Dengan menggunakan persamaan garis polar

(iii) Dengan memanfaatkan persamaan garis singgung dengan gradien m untuk mencari nilai m

Fungsi

a. Fungsi komposisi

Fungsi komposisi merupakan gabungan lebih dari satu fungsi.

Misalkan diketahui fungsi $f(x)$ dan $g(x)$. Jika ingin mencari pemetaan suatu nilai terhadap fungsi $f(x)$ yang hasilnya dilanjutkan terhadap fungsi $g(x)$, maka akan digunakan fungsi komposisi.

Pemetaan terhadap fungsi $f(x)$ yang dilanjutkan oleh fungsi $g(x)$ditulis sebagai $\left(g(x) \circ f(x)\right)$.

Didefinisikan $\left(g(x) \circ f(x)\right) = g(f(x))$.

b. Fungsi invers

Contoh soal:

Tentukan invers dari fungsi $y = f(x) = \frac{x+1}{3-2x}$

Solusi :

Dari $y = \frac{x+1}{3-2x}$ didapat $3y - 2yx = x + 1$ sehingga $x(2y + 1) = 3y - 1$

$x = \frac{3y-1}{2y+1}$

Didapat fungsi inversnya adalah $f^{-1}(x) = \frac{3x-1}{2x+1}$

c. Hubungan fungsi invers dengan fungsi komposisi

Misalkan $f^{-1}(x)$ dan $g^{-1}(x)$ berturut-turut menyatakan fungsi invers dari $f(x)$ dan $g(x)$. Maka

$(f\ o\ g)^{-1}(x)\ =\ (g^{-1}\ o\ f^{-1})(x)$

$(g\ o\ f)^{-1}(x)\ =\ (f^{-1}\ o\ g^{-1}\ )(x)$

SOAL

1. Misalkan a, b, dan c adalah tiga bilangan $berbeda$. Jika ketiga bilangan tersebut merupakan bilangan asli satu digit maka selisih terbesar akar-akar persamaan $(x-a)(x-b)+(x-b)(x-c)=0$ yang mungkin adalah ….
   a. 9
   b. 7,5
   c. 10
   d. 16,5
   e. 12,5

2. Pada segitiga ABC, panjang sisi BC adalah 1 satuan. Ada tepat satu titik D pada sisi BC yang memenuhi $|DA|^2 = |DB| \cdot |DC|$. Jika k menyatakan keliling ABC, jumlah semua k yang mungkin adalah ….
   a. $1+\sqrt{3}$
   b. $1+\sqrt{2}$
   c. $2+\sqrt{3}$
   d. $3+\sqrt{2}$

3. Diketahui $x-y=10$ dan $xy=10$. Nilai dari x^4+y^4 adalah ….
   a. 11420
   b. 14200
   c. 12400
   d. 11400

4. Misalkan $S=\{x \in \mathbb{R} | 0 \leq x \leq 1\}$. Banyaknya pasangan bilangan asli (a,b) sehingga tepat ada 2018 anggota S yang dapat dinyatakan dalam bentuk $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}$ untuk suatu bilangan bulat x dan y adalah ….
   a. 1
   b. 2
   c. 3
   d. 4

5. Pada bidang terdapat empat garis yang berbeda. Titik potong terbanyak yang mungkin dihasilkan oleh keempat garis tersebut ada sebanyak ….
   a. 4
   b. 5

c. 6
d. 7

6. Diberikan satu koin yang tidak seimbang. Bila koin tersebut ditos satu kali, peluang muncul angka adalah 14. Jika ditos n kali, peluang muncul tepat dua angka sama dengan peluang muncul tepat tiga angka. Nilai n adalah ….
   a. 10
   b. 11
   c. 12
   d. 13

7. Bilangan prima terkecil p sehingga dapat ditemukan bilangan prima q yang memenuhi
$$q^2 = 10p + 131$$
   adalah …
   a. 7
   b. 11
   c. 29
   d. 23

8. Setiap sel dari suatu tabel berukuran 2×2 dapat diisi dengan bilangan 1, 2, atau 3. Misalkan N adalah banyaknya tabel yang memenuhi kedua sifat berikut sekaligus:
   • untuk setiap baris, hasil penjumlahannya genap
   • untuk setiap kolom, hasil penjumlahannya genap
   Nilai N adalah ….
   a. 17
   b. 18
   c. 19
   d. 20

9. Diketahui x dan y bilangan prima dengan $x < y$, dan $x^3 + y^3 + 2018 = 30y^2 - 300y + 3018$. Nilai $x + y$ yang memenuhi adalah ….
   a. 3
   b. 7
   c. 9
   d. 10

10. Misalkan $\{x_n\}$ adalah barisan bilangan bulat yang memenuhi $x_1 = x_2 = \cdots = x_{12} = 0,\ x_{13} = 2$, dan untuk setiap bilangan asli n berlaku $x_{n+13} = x_{n+4} + 2x_n$. Nilai x_{143} adalah ….
    a. 2041
    b. 2401
    c. 2104
    d. 2014