

2019

SMA
MATEMATIKA



085223273373

PAKET 7

1.1 Kekongruenan

Definisi:

Jika $m|(a - b)$ maka $a \equiv b \pmod{m}$ untuk bilangan bulat a, b , dan m .

Sifat-sifat kekongruenan:

1. $a \equiv a \pmod{m}$
2. Jika $a \equiv b \pmod{m}$, maka $b \equiv a \pmod{m}$
3. Jika $a \equiv b \pmod{m}$ dan $b \equiv c \pmod{m}$ maka $a \equiv c \pmod{m}$
4. Jika $a \equiv b \pmod{m}$ dan $d|m$ maka $a \equiv b \pmod{d}$
5. Jika $a \equiv b \pmod{m}$ maka $a^k \equiv b^k \pmod{m}$ untuk semua k bilangan asli.
6. Jika $a \equiv b \pmod{m}$ dan $c \equiv d \pmod{m}$ maka $a + c \equiv b + d \pmod{m}$ dan $ac \equiv bd \pmod{m}$

1.2 Teorema Fermat Little dan Teorema Euler

Teorema Fermat Little:

Misal a bilangan bulat positif dan p bilangan prima, maka berlaku

$$a^p \equiv a \pmod{p}$$

Teorema Euler:

Misal a dan m bilangan bulat yang relatif prima, maka berlaku

$$a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$$

Dimana untuk setiap bilangan bulat m dinotasikan $\varphi(m)$ adalah banyak seluruh bilangan bulat positif n yang lebih kecil dari m dan relative prima terhadap m .

SOAL

1. Diberikan barisan $\{a_n\}$ dan $\{b_n\}$ dengan $a_n = \frac{1}{n\sqrt{n}}$ dan $b_n = \frac{1}{(1+\frac{1}{n}) + \sqrt{(1+\frac{1}{n})}}$ untuk setiap bilangan asli n . Misalkan $S_n = a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n$. Banyaknya bilangan asli n dengan $n \leq 2016$ sehingga S_n merupakan bilangan rasional adalah ...
 - a. 40
 - b. 41
 - c. 42
 - d. 43
2. Bilangan bulat x jika dikalikan 11 terletak diantara 1500 dan 2000. Jika x dikalikan 7 terletak antara 970 dan 1275. Jika x dikalikan 5 terletak antara 690 dan 900. Banyaknya bilangan x sedemikian yang habis dibagi 3 sekaligus habis dibagi 5 ada sebanyak
 - a. 0
 - b. 1
 - c. 2
 - d. 3
3. Misalkan a, b , dan c adalah bilangan real sehingga
$$\begin{cases} a + b + c = 2, \text{ dan} \\ a^2 + b^2 + c^2 = 12 \end{cases}$$
Selisih antara nilai maksimum dan minimum yang mungkin untuk c adalah ...
 - a. $\frac{14}{3}$
 - b. 5
 - c. $\frac{16}{3}$
 - d. $\frac{17}{3}$
4. Diberikan persegi $ABCD$ dengan panjang sisi 1. Titik K dan L berturut-turut terletak pada segmen garis BC dan DC sehingga keliling dari ΔKCL adalah 2. Luas minimum dari ΔAKL adalah ...
 - a. $1 - \sqrt{2}$
 - b. $\sqrt{2} - 1$
 - c. $\sqrt{2} - 2$
 - d. $2 - \sqrt{2}$

5. Suatu permutasi a_1, a_2, \dots, a_{10} dari $\{1, 2, \dots, 10\}$ dikatakan sebagai suatu permutasi yang hampir naik jika terdapat tepat satu indeks i sehingga $a_{i-1} > a_i$. Banyaknya permutasi hampir naik yang mungkin adalah
- 1013
 - 1031
 - 1310
 - 1130

6. Misalkan n, x, y , dan z adalah bilangan-bilangan asli yang memenuhi persamaan

$$n^x + n^{2y} = n^{3z}$$

Nilai terbesar yang mungkin dari $x \leq 2017$ adalah ...

- 2019
 - 2016
 - 2012
 - 2009
7. Suatu dadu ditos enam kali. Probabilitas jumlah mata yang muncul 9 adalah

- $\frac{56}{6^6}$
- $\frac{54}{6^6}$
- $\frac{52}{6^6}$
- $\frac{50}{6^6}$

8. Diberikan empat titik pada satu lingkaran Γ dalam urutan A, B, C, D. Sinar garis AB dan DC berpotongan di E, dan sinar garis AD dan BC berpotongan di F. Misalkan EP dan FQ menyinggung lingkaran Γ berturut-turut di P dan Q. Misalkan pula bahwa EP = 60 dan FQ = 63, maka panjang EF adalah ...

- 67
- 87
- 47
- 27

9. Pada segitiga ABC, garis tinggi AD, garis bagi BE dan garis berat CF berpotongan di satu titik. Jika panjang AB = 4 dan BC = 5, dan $CD = \frac{m^2}{n^2}$ dengan m dan n relatif prima, maka nilai dari $m + n$ adalah

- 5
- 6

- c. 7
- d. 8

10. Misalkan x, y, z bilangan real positif yang memenuhi

$$3 \log_x(3y) = 3 \log_{3x}(27z) = \log_{3x^4}(81yz) \neq 0$$

Nilai dari x^5y^4z adalah ...

- a. $\frac{1}{3^5}$
- b. $\frac{1}{3^6}$
- c. $\frac{1}{3^7}$
- d. $\frac{1}{3^8}$