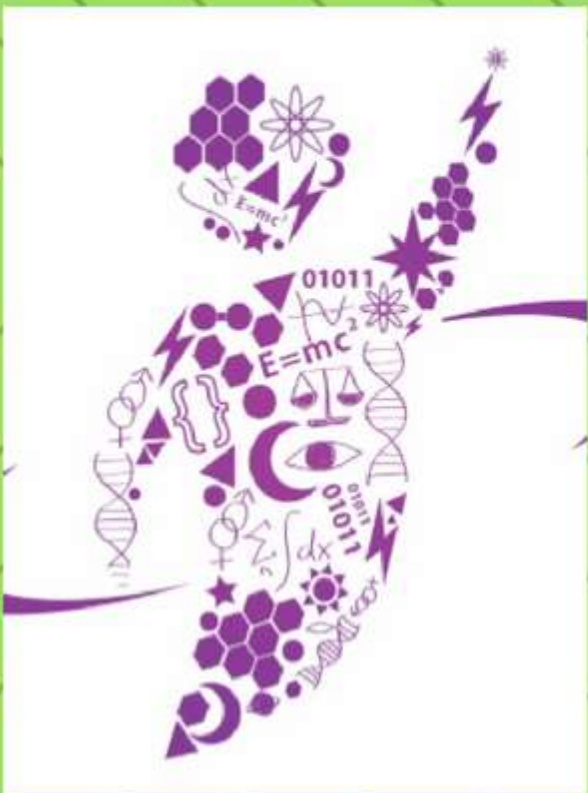
PAKET 4

PELATIHAN ONLINE

2019

SMA
FISIKA

po.alcindonesia.co.id



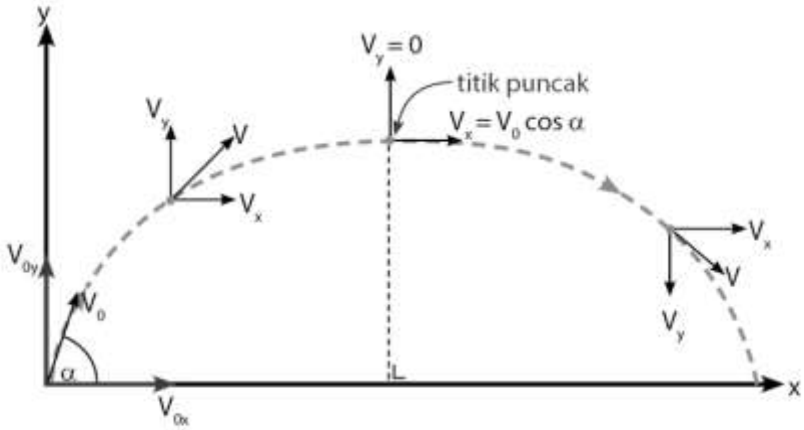
WWW.ALCINDONESIA.CO.ID

@ALCINDONESIA

085223273373

GERAK PARABOLA

Gerak parabola merupakan perpaduan gerak objek antara GLB pada sumbu x dan GLBB pada sumbu y. Singkatnya, lintasan yang dibentuk oleh objek ini berupa parabola. Karena terdapat percepatan gravitasi, maka kecepatan arah sumbu y merupakan GLBB dan arah sumbu x merupakan GLB, karena tidak ada percepatan arah x.



Asumsikan kecepatan awal objek v_0, maka

$$v_x = v_0 \cos\alpha$$
$$v_y = v_0 \sin\alpha - gt$$

Jika kondisi awal benda 0,0, maka persamaan posisi benda

$$x(t) = \int v_x \, dt = \int v_0 \cos\alpha \; dt = v_0 t \cos\alpha$$
$$y(t) = \int v_y \; dt = \int (v_0 \sin\alpha - gt) \; dt = v_0 t \sin\alpha - \frac{1}{2} g t^2$$

Untuk mencari waktu untuk mencapai titik tertinggi, jelas kita gunakan differensial bahwa y maksimum jika $\frac{dy}{dt} = 0$.

$$\frac{dy}{dt} = 0 = v_0 \sin\alpha - g t_{1/2}$$
$$t_{1/2} = \frac{v_0 \sin\alpha}{g}$$

Waktu total merupakan dua kalinya dari $t_{1/2}$, karena lintasan berbentuk parabola. Kita akan buktikan dengan persamaan. Konsep kembali ke tanah lagi adalah saat $y = 0$.

$$y = v_0 t \sin\alpha - \frac{1}{2} g t^2 = 0$$
$$t\left(v_0 \sin\alpha - \frac{1}{2} g t\right) = 0$$
$$t_1 = 0 \; dan \; t_2 = \frac{2 v_0 \sin\alpha}{g}$$

$$t_{total} = 2t_{1/2} = \frac{2v_0 \sin\alpha}{g}$$

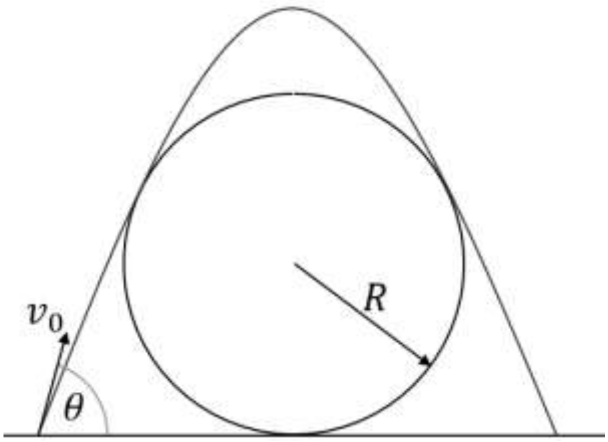
Ketinggian maksimum $y_{maks} = y\left(t = t_{1/2}\right)$.

$$y_{maks} = v_0 \sin\alpha \frac{v_0 \sin\alpha}{g} - \frac{1}{2} g \left(\frac{v_0 \sin\alpha}{g}\right)^2 = \frac{1}{2} \frac{{v_0}^2 sin^2\alpha}{g}$$

Jarak maksimum $x_{maks} = x(t = t_{total})$.

$$x_{maks} = v_0 \cos\alpha \frac{2v_0 \sin\alpha}{g} = \frac{{v_0}^2 \sin 2\alpha}{g}$$

GERAK PROYEKTIL PADA KONSEP PARABOLA



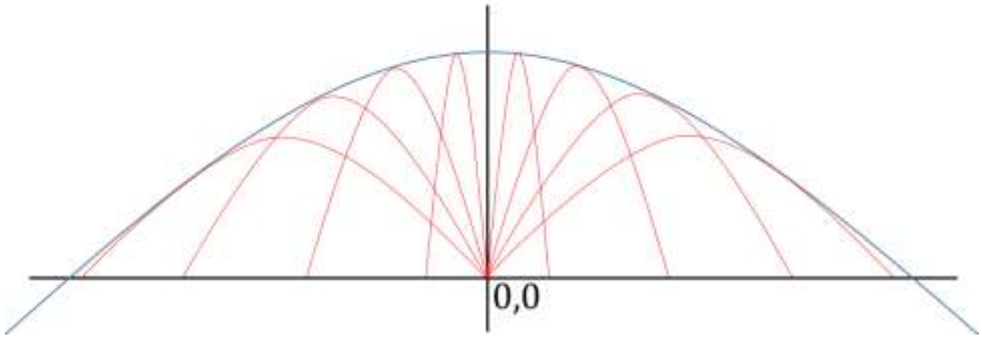
Terdapat kutu busuk ingin melompati gorong-gorong silinder radius R dengan kecepatan awal v_0. Tapi, kutu busuk ingin melompat dengan kecepatan minimum dengan sudut elevasi tertentu sehingga dapat menyinggung gorong-gorong di dua titik. Berapa besar kecepatan minimumnya ? Berapa besar sudutnya ?

Inti untuk memecahkan kondisi ini adalah persamaan fungsi kuadrat dan syarat-syarat tertentu akar-akar yang berkaitan dengan diskriminan. Saya akan jelaskan melalui soal lain.

Contoh

1. Terdapat seorang penembak di suatu padang pasir. Kontur permukaan padang pasir datar. Penembak, yang juga fisikawan ingin mengetahui jangkauan yang dapat dicapai oleh peluru jika ditembak secara acak (dalam 2 dimensi x dan y). Ia menembak dengan kecepatan awal v_0. Tentukan persamaan garis yang membatasi daerah yang dapat dikenai peluru.

Singkatnya, jika lintasan acak 2 dimensi peluru di sketsakan, akan didapatkan diagram seperti ini



Titik 0,0 merupakan letak posisi penembak dimana dia akan menembak secara acak.

Lintasan acak peluru

Garis yang membatasi daerah peluru

Lintasan peluru merupakan gerak parabola. Kita akan dapatkan persamaan gerak untuk peluru.

$$y = v_0 \sin\theta\, t - \frac{1}{2} g t^2$$
$$x = v_0 \cos\theta\, t$$

Subtitusikan persamaan agar kita mendapatkan gerak y dalam fungsi x.

$$t = \frac{x}{v_0 \cos\theta}$$
$$y = v_0 \sin\theta \frac{x}{v_0 \cos\theta} - \frac{1}{2} g \left(\frac{x}{v_0 \cos\theta}\right)^2 = x \tan\theta - \frac{1}{2} g \frac{x^2}{{v_0}^2} sec^2\theta$$

Ingat dalam identitas trigonomteri bahwa $sec^2\theta = 1 + tan^2\theta$

$$y = x \tan\theta - \frac{1}{2} g \frac{x^2}{{v_0}^2}(1 + tan^2\theta)$$
$$0 = \frac{1}{2} g \frac{x^2}{{v_0}^2} tan^2\theta - x \tan\theta + \frac{1}{2} g \frac{x^2}{{v_0}^2} - y$$

Jika kita menyelesaikan persamaan ini, kita akan mendapatkan akar-akar $\tan\theta$ dalam 2 fungsi, yaitu x dan y. Namun, yang kita butuhkan bukanlah nilai sudut elevasi peluru, melainkan persamaan garis yang membatasi peluru. Maka, konsep yang kita miliki adalah untuk semua nilai $\tan\theta$, harus real dan mempunyai solusi. Mengapa ? Mudahnya persamaan garis yang membatasi daerah peluru berlaku untuk semua nilai $\tan\theta$. Maka dari itu, diskriminan $D = 0$.

$$D = 0$$
$$b^2 - 4ac = 0$$
$$x^2 - 4\left(\frac{1}{2} g \frac{x^2}{{v_0}^2}\right)\left(\frac{1}{2} g \frac{x^2}{{v_0}^2} - y\right) = 0$$

Jika kalian sederhanakan persamaan diatas, akan didapatkan

$$y = \frac{1}{2} g \frac{x^2}{{v_0}^2} - \frac{{v_0}^2}{2g}$$

Diatas merupak persamaan garis yang membatasi daerah yang dapat dijangkau peluru. Jika yang ditanyakan persamaan garis yang dapat dijangkau peluru berarti persamaan berubah menjadi

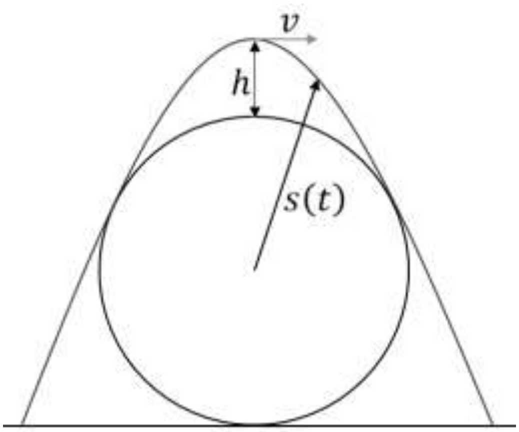
$$y \leq \frac{1}{2} g \frac{x^2}{{v_0}^2} - \frac{{v_0}^2}{2g}$$

Sedangkan persamaan garis yang tidak dapat dijangkau peluru adalah

$$y > \frac{1}{2} g \frac{x^2}{{v_0}^2} - \frac{{v_0}^2}{2g}$$

2. Terdapat kutu busuk ingin melompati gorong-gorong silinder radius R dengan kecepatan awal v_0. Tapi, kutu busuk ingin melompat dengan kecepatan minimum dengan sudut elevasi tertentu sehingga dapat menyinggung gorong-gorong di dua titik (seperti pada sebelumnya)
   i. Tentukan kecepatan minimum untuk menyinggung di 2 titik tersebut.
   ii. Tentukan sudut elevasi kecepatan minimum.
   iii. Tentukan tinggi maksimum peluru terhadap tanah

i. Pertama, kita gunakan titik acuan 0,0 di pusat silinder, agar lebih mudah dikerjakan. Asumsikan peluru sudah ada dipuncak dengan kecepatan v dan akan menyinggung di titik kedua.



Persamaan gerak peluru

$$x = vt$$

$$y = R + h - \frac{1}{2} g t^2$$

Maka,

$$s^2 = x^2 + y^2$$

$$s^2 = v^2t^2 + \left(R + h - \frac{1}{2}gt^2\right)^2 = v^2t^2 + (R+h)^2 - (R+h)gt^2 + \frac{1}{4}g^2t^4$$

Namun, untuk menyinggung silinder, maka $s(t) = R$

$$R^2 = v^2t^2 + (R+h)^2 - (R+h)gt^2 + \frac{1}{4}g^2t^4$$

$$0 = \frac{1}{4}g^2t^4 + t^2\big(v^2 - g(R+h)\big) + (R+h)^2 - R^2$$

Seperti pada pembahasan sebelumnya, dengan fungsi kuadrat, kita ingin kutu busuk menyinggung 2 kali, berarti terdapat 2 solusi waktu dari persamaan kuadrat diatas. Maka, diskriminan $D \geq 0$

$$D \geq 0$$

$$b^2 - 4ac \geq 0$$

$$\big(v^2 - g(R+h)\big)^2 \geq 4\left(\frac{1}{4}g^2\right)\left((R+h)^2 - R^2\right)$$

$$v^2 \geq g\left(R + h - \sqrt{(R+h)^2 - R^2}\right)$$

Berarti, kecepatan awal bernilai minimum jika $v^2 = g\left(R + h - \sqrt{(R+h)^2 - R^2}\right)$. Jika kalian sadar dengan persamaan kinematika pada materi sebelumnya, kalian akan dapatkan hubungan baru untuk kecepatan.

$${v_t}^2 = {v_0}^2 + 2al$$

Dimana v_t merupakan kecepatan akhir, v_0 merupakan kecepatan awal, a merupakan percepatan dan l merupakan jarak tempuh. Karena percepatan yang dialami kutu busuk merupakan percepatan gravitasi, sehingga nilainya bersifat negatif.

$${v_0}^2 = v^2 + 2g(2R + h)$$

Ingat konsep differensial, v_0 minimum jika $\frac{dv_0}{dh} = 0$.

$${v_0}^2 = g\left(R + h - \sqrt{(R+h)^2 - R^2}\right) + 2g(2R + h)$$

$${v_0}^2 = g(5R + 3h) - g\sqrt{(R+h)^2 - R^2}$$

Asas *chain rule*

$$\frac{d{v_0}^2}{dh} = \frac{d{v_0}^2}{dh}\frac{dv_0}{dv_0} = 2v_0\frac{dv_0}{dh} = 0$$

Dapat disimpulkan bahwa

$$\frac{d{v_0}^2}{dh} = \frac{dv_0}{dh} = 0$$

$$\frac{d}{dh}\left(g(5R + 3h) - g\sqrt{(R+h)^2 - R^2}\right) = 0$$

$$h = \frac{R}{4}\left(3 - 2\sqrt{2}\right)\sqrt{2}$$

Jika h sudah ketemu, maka pertanyaan iii sudah ditemukan, yaitu $h_{total} = 2R + \frac{R}{4}\left(3-2\sqrt{2}\right)\sqrt{2}$

Untuk mendapatkan v_0 minimum, lakukan subtitusi pada persamaan diatas

$$v_0{}^2 = v^2 + 2g(2R+h)$$

$$v_0{}^2 = g(5R+3h) - g\sqrt{(R+h)^2 - R^2}$$

$$v_0{}^2 = g\left(5R + 3\frac{R}{4}\left(3-2\sqrt{2}\right)\sqrt{2}\right) - g\sqrt{\left(R + \frac{R}{4}\left(3-2\sqrt{2}\right)\sqrt{2}\right)^2 - R^2}$$

$$v_0{}^2 = 2gR\left(1+\sqrt{2}\right)$$

$$v_0 minimum = \sqrt{2gR\left(1+\sqrt{2}\right)}$$

ii. Mencari sudut elevasi θ hanya menggunakan persamaan parabola sederhana. Waktu yang ditempuh kutu busuk untuk mencapai titik tertinggi $t_{1/2}$.

$$t_{1/2} = \frac{v_0 \sin\theta}{g}$$

Maka, persamaan arah sumbu y

$$2R + h = v_0 \sin\theta\, t_{1/2} - \frac{1}{2} g t_{1/2}{}^2$$

$$2R + h = v_0 \sin\theta \frac{v_0 \sin\theta}{g} - \frac{1}{2} g \left(\frac{v_0 \sin\theta}{g}\right)^2 = \frac{1}{2}\frac{v_0{}^2 sin^2\theta}{g}$$

$$\sin\theta = \sqrt{\frac{2g(2R+h)}{v_0{}^2}}$$

Ingat, $v_0{}^2 = 2gR\left(1+\sqrt{2}\right)$ dan $h = \frac{R}{4}\left(3-2\sqrt{2}\right)\sqrt{2}$

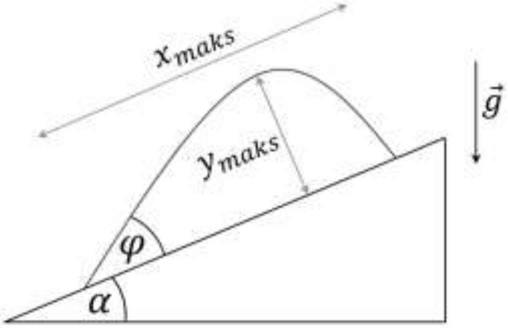
Maka jika persamaan disederhanakan, diperoleh

$$\sin\theta = \frac{4+3\sqrt{2}}{4\left(1+\sqrt{2}\right)}$$

$$\theta = \arcsin\left(\frac{4+3\sqrt{2}}{4\left(1+\sqrt{2}\right)}\right) \approx 58{,}6°$$

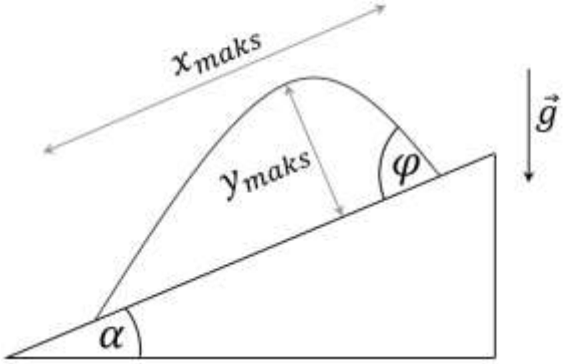
SOAL

1. Terdapat sebuah bidang miring dengan kemiringan α terhadap horizontal. Peluru akan ditembakkan dengan kecepatan awal v_0 dengan sudut tembak φ. Tentukan sudut tembak φ agar jarak peluru pada bidang miring maksimum.



   a. $\varphi = \frac{1}{2}\arctan(-\cot\alpha)$
   b. $\varphi = \frac{3}{4}\arccos(-\tan\alpha)$
   c. $\varphi = \frac{1}{4}\text{arccot}(\tan\alpha)$
   d. $\varphi = \frac{1}{2}\arctan(\cot\alpha)$
   e. $\varphi = \frac{3}{4}\arccos(\tan\alpha)$

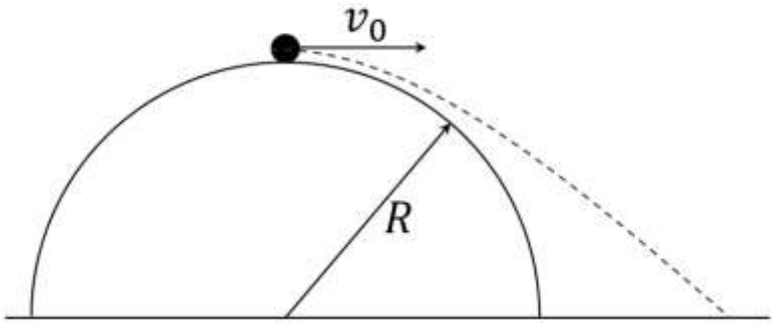
2. Terdapat sebuah bidang miring dengan kemiringan α terhadap horizontal. Peluru akan ditembakkan dengan kecepatan awal v_0 dengan sudut tembak φ. Tentukan sudut tembak φ agar jarak peluru pada bidang miring maksimum.



   a. $\varphi = \frac{1}{2}\arctan(-\cot\alpha)$
   b. $\varphi = \frac{1}{2}\arccos(-\tan\alpha)$
   c. $\varphi = \frac{1}{4}\text{arccot}(\tan\alpha)$
   d. $\varphi = \frac{1}{2}\arctan(\cot\alpha)$
   e. $\varphi = \frac{3}{4}\arctan(\tan\alpha)$

Untuk nomor 3 dan 4

Seorang pemain bola menendang sebuah bola dari atas batu setengah lingkaran dengan radius R dengan kecepatan awal v_0



3. Tentukan v_0 minimum bola agar bola bisa keluar dari batu tersebut tanpa pernah menyentuhnya lagi (bola tidak bertumbukan dengan batu).
   a. $\sqrt{3gR}$
   b. $\sqrt{2gR}$
   c. $\sqrt{gR}$
   d. $\sqrt{\frac{1}{2}gR}$
   e. $\frac{3}{4}\sqrt{gR}$

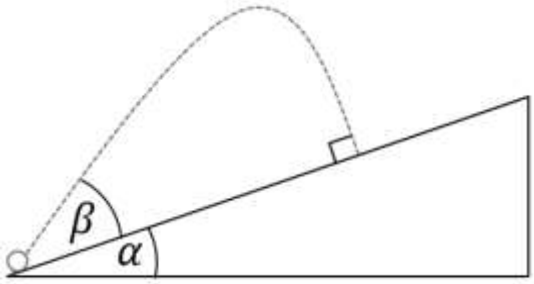
4. Apabila kasus kelajuan minimum terpenuhi, tentukan jarak horizontal antara penendang dengan bola ketika bola menyentuh tanah.
   a. $R\sqrt{6}$
   b. $2R$
   c. $R\sqrt{2}$
   d. R
   e. $\frac{3}{4}R\sqrt{2}$

Untuk nomor 5 dan 6
Peluru ditembakan dari puncak gedung yang tingginya h_0 dengan kecepatan awal v_0 dan sudut elevasinya α terhadap horizontal

5. Tentukan waktu peluru untuk mencapai titik tertinggi.
   a. $t = \frac{1}{g}\left(v_0 \sin\alpha + \sqrt{{v_0}^2 sin^2\alpha - 2gh_0}\right)$
   b. $t = \frac{1}{g}\left(\sqrt{{v_0}^2 sin^2\alpha + 2gh_0}\right)$
   c. $t = \frac{1}{g}\left(v_0 \sin\alpha - \sqrt{{v_0}^2 sin^2\alpha - gh_0}\right)$
   d. $t = \frac{1}{g} v_0 \sin\alpha$
   e. $t = \frac{2}{g}\left(2v_0 \sin\alpha - \sqrt{{v_0}^2 sin^2\alpha + 4gh_0}\right)$

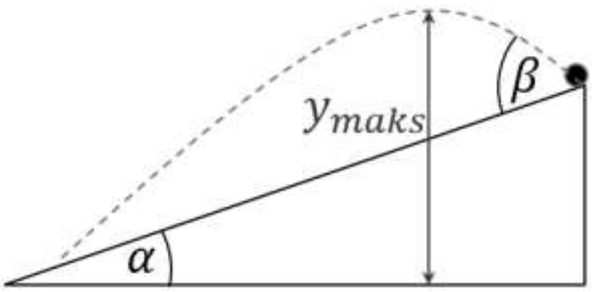
6. Tentukan jarak mendatar ketika peluru menyentuh tanah.
   a. $x = \frac{1}{g} v_0 \cos\alpha \left(v_0 \sin\alpha + \sqrt{{v_0}^2 sin^2\alpha + 2gh_0}\right)$
   b. $x = \frac{2}{g} v_0 \cos\alpha \left(v_0 \sin\alpha - \sqrt{{v_0}^2 sin^2\alpha + 2gh_0}\right)$
   c. $x = \frac{1}{g} v_0 \sin\alpha \left(v_0 \sin\alpha - \sqrt{{v_0}^2 sin^2\alpha + gh_0}\right)$
   d. $x = \frac{1}{2g} v_0 \cos\alpha \left(\sqrt{{v_0}^2 sin^2\alpha - 2gh_0}\right)$
   e. $x = \frac{1}{g} {v_0}^2 \sin 2\alpha$

7. Dari kaki sebuah bidang miring yang memiliki sudut kemiringan α ditembakkan peluru dengan kecepatan awal v_0 dan dengan sudut tembak β. Bila peluru jatuh membentur bidang miring secara tegak lurus, tentukan besar β.



   a. $\beta = \arctan\left(\frac{1}{2}\tan\alpha\right)$
   b. $\beta = \frac{1}{2}\arctan(\tan\alpha)$
   c. $\beta = \arctan\left(\frac{1}{2}\cot\alpha\right)$
   d. $\beta = \frac{1}{2}\arctan(\cos\alpha)$
   e. $\beta = \arctan\left(\frac{1}{2}\sin\alpha\right)$

8. Dari puncak sebuah bidang miring yang memiliki sudut kemiringan α ditembakkam peluru dengan kecepatan awal v_0 dan dengan sudut tembak β.



Tentukan waktu yang diperlukan untuk mencapai y_{maks}.
   a. $t = \frac{v_0}{g}\sin(\beta - \alpha)$
   b. $t = \frac{v_0}{g}\sin(\beta + \alpha)$

c. $t = \frac{v_0}{g}\cos(\beta - \alpha)$
d. $t = \frac{v_0}{g}\cos(\beta + \alpha)$
e. $t = \frac{1}{2}\frac{v_0}{g}\sin(\beta + \alpha)$

Untuk nomor 9-13
Seekor lintah berjalan dimana kecepatannya berubah-ubah terhadap waktu.

$$v(t) = 3t^2 - 12t + 9$$

Mula-mula, lintah berada pada posisi 3.

9. Tentukan persamaan posisi lintah.
   a. $r(t) = t^3 + 6t^2 - 9t - 12$
   b. $r(t) = t^3 - 6t^2 + 9t + 3$
   c. $r(t) = t^3 - 6t^2 - 9t + 6$
   d. $r(t) = t^3 + 6t^2 + 9t - 2$
   e. $r(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$

10. Tentukan posisi lintah saat $t = 3$.
    a. $6\ m$
    b. $3\ m$
    c. $-12\ m$
    d. $66\ m$
    e. $36\ m$

11. Tentukan percepatan lintah saat $t = 1$.
    a. $-6\ ms^{-2}$
    b. $3\ ms^{-2}$
    c. $-12\ ms^{-2}$
    d. $66\ ms^{-2}$
    e. $36\ ms^{-2}$

12. Tentukan kecepatan rata-rata lintah dari $t = 0$ sampai $t = 5$.
    a. $4\ ms^{-1}$
    b. $12\ ms^{-1}$
    c. $24\ ms^{-1}$
    d. $28\ ms^{-1}$
    e. $36\ ms^{-1}$

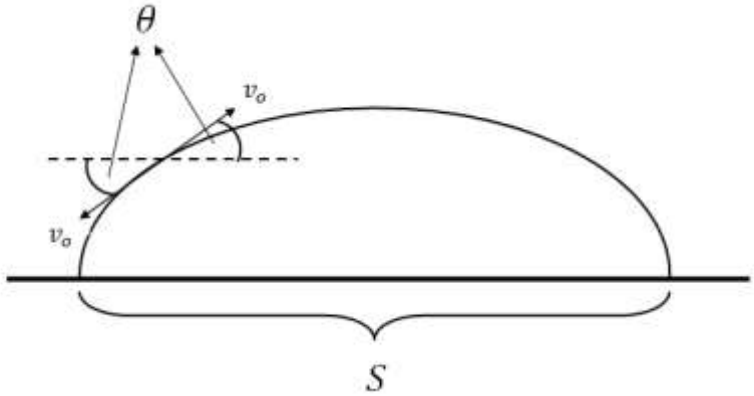
13. Tentukan jarak tempuh lintah dari $t = 0$ sampai $t = 5$.
    a. $4\ m$
    b. $12\ m$

c. $24\ m$
d. $28\ m$
e. $36\ m$

14. Terdapat dua partikel yaitu A dan B yang mempunyai kecepatan konstan, berturut-turut v_A dan v_B. Uniknya, partikel B selalu mengarah vertikal ke atas dan partikel A selalu mengikuti partikel B. Tentukan waktu agar partikel A menabrak partikel B.

a. $t = \frac{Lv_A}{v_A^2 - v_B^2}$
b. $t = \frac{Lv_B}{v_A^2 - v_B^2}$
c. $t = \frac{Lv_A}{v_A^2 + v_B^2}$
d. $t = \frac{Lv_B}{v_A^2 + v_B^2}$
e. $t = \frac{L(v_A - v_B)}{v_A^2 + v_B^2}$

Ada 2 partikel dilempar berlawanan dengan sudut elevasi yang sama terhadap bidang horizontal. 2 partikel dilempar dengan kecepatan yang sama di suatu ketinggian h.



15. Tentukan besar θ agar S maksimum dimana $\theta \neq 0°$.
a. $2\arctan\left(\frac{gh}{{v_0}^2}\right)$
b. $\arcsin\left(\frac{2gh}{{v_0}^2}\right)$
c. $\frac{1}{2}\arccos\left(\frac{2gh}{{v_0}^2}\right)$
d. $\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{2gh}{{v_0}^2}\right)$

e. $\frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{gh}{{v_0}^2}\right)$

16. Tentukan besar S.

a. $\frac{1}{g}v_0\cos\theta\sqrt{2gh}$
b. $\frac{2}{g}v_0\cos\theta\sqrt{{v_0}^2\sin\theta-2gh}$
c. $\frac{1}{g}v_0\cos\theta\sqrt{{v_0}^2sin^2\theta-gh}$
d. $\frac{2}{g}v_0\cos\theta\sqrt{3{v_0}^2sin^2\theta+2gh}$
e. $\frac{2}{g}v_0\cos\theta\sqrt{{v_0}^2sin^2\theta+2gh}$