PAKET 9

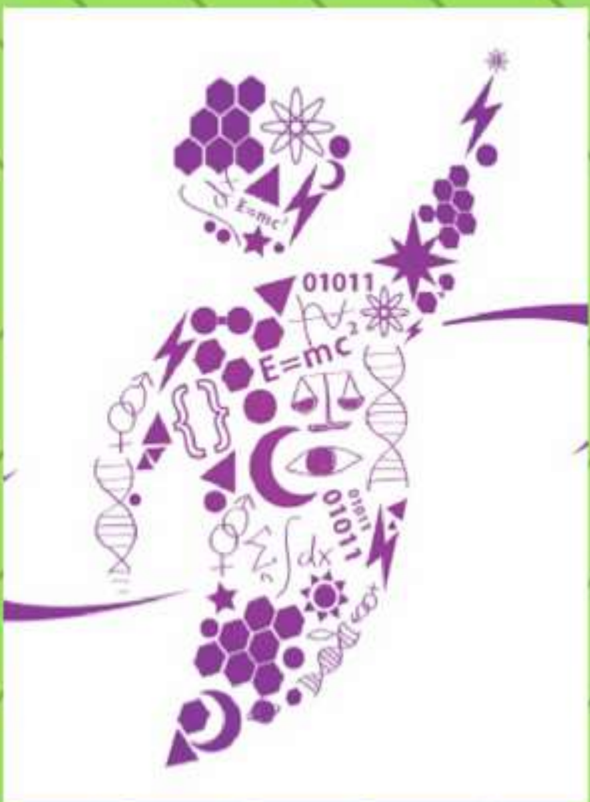
PELATIHAN ONLINE

2019

SMA

MATEMATIKA

po.alcindonesia.co.id



WWW.ALCINDONESIA.CO.ID

@ALCINDONESIA

085223273373

PAKET 9

3. Kombinatorik

3.1 Permutasi

a. Aturan pengisian tempat

Misalkan ada n tempat tersedia dengan k_1 adalah banyaknya cara mengisi tempat pertama, k_2 adalah banyaknya cara mengisi tempat kedua, dan seterusnya hingga k_n adalah banyaknya cara mengisi tempat ke$-n$. Maka banyaknya cara mengisi tempat adalah $k_1 \times k_2 \times \cdots \times k_n$.

Cara ini disebut sebagai aturan pengisian tempat dan sering disebut dengan kaidah perkalian.

b. Permutasi dari unsur-unsur yang berbeda

Permutasi r obyek yang diambil dari n obyek berbeda, dengan $r \leq n$ adalah P_r^n yang didefinisikan dengan :

$$P_r^n = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Perhatikan bahwa dalam permutasi urutan sangat diperhatikan.

c. Permutasi yang memuat beberpa unsur yang sama

Contoh soal:

Ada berapa banyak susunan yang dapat dibentuk dari huruf-huruf T, E, R, C, E, C, E, R?

Solusi :

Banyaknya unsur ada 8 dengan terdapat 3 huruf E yang sama, 2 huruf R yang sama dan 2 huruf C yang sama, maka banyaknya susunan $= \frac{8!}{3!.2!.2!} = 1680$ susunan.

d. Permutasi siklis

Permutasi siklis berkaitan dengan masalah apabila terdapat n benda yang mengitari sebuah benda bundar (siklis).

Misalkan tersedia n unsur yang berbeda.

Banyaknya permutasi siklis dari n unsur tersebut dirumuskan dengan :

$$P_{siklis} = (n-1)!$$

Kalau kita perhatikan formula tersebut, maka didapat langkah-langkah dalam membuat suatu susunan pada permutasi siklis adalah :

1. Tetapkan sebuah obyek (unsur) sebagai pedoman
2. Kemudian permutasikan unsur-unsur yang tersisa seperti pada persoalan sebelumnya.

3.2 Kombinasi

Definisi:

Suatu kombinasi r unsur yang diambil dari n unsur yang tersedia (tiap unsur tersebut berbeda) adalah suatu pilihan dari r unsur tadi tanpa memperhatikan urutannya.

Kata kunci yang membedakan antara kombinasi dan permutasi adalah memperhatikan atau tidak memperhatikan urutan.

Banyaknya kombinasi r unsur yang diambil dari n unsur yang tersedia dengan $r \leq n$ dirumuskan dengan:

$$C_r^n = \binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!\,r!}$$

a. Kombinasi dengan pengulangan

Misalkan ada n obyek yang akan diletakkan pada r tempat tanpa urutan dengan $r \leq n$. Jika disyaratkan bahwa satu tempat hanya bisa menampung paling banyak 1 obyek maka banyaknya cara adalah C_r^n yang telah dibahas sebelumnya.

Misalkan terdapat n obyek identik dan disyaratkan bahwa seluruh obyek akan dibagikan ke r buah tempat dengan masing-masing tempat dapat tidak ditempati maupun ditempati satu atau lebih obyek. Pertanyaannya adalah ada berapa banyak cara menyusunnya ?

Karena identik maka urutan dalam persoalan ini tidak diperhatikan. Taruh n obyek tersebut dalam satu baris. Tambakan $r-1$ batas di antara bola-bola tersebut sehingga kini seolah-olah ada $n+r-1$ 'tempat'. Akibat penambahan $r-1$ batas tersebut maka n bola tersebut akan terbagi dalam r bagian, yaitu di sebelah kiri batas ke-1, di antara batas ke-1 dan ke-2 sampai dengan di sebelah kanan batas ke$-(r-1)$. Masing-masing bagian tersebut melambangkan banyaknya bola pada masing-masing tempat. Sehingga persoalannya sekarang adalah memilih $(r-1)$ tempat dari $n+r-1$ tempat yang tersedia. Banyaknya cara adalah

$$\binom{n+r-1}{r-1} = \binom{n+r-1}{n}$$

Kombinasi dengan pengulangan juga dapat menyelesaikan persoalan mengenai perhitungan banyaknya penyelesaian persamaan linier. Misalkan saja terdapat persamaan $x_1 + x_2 + \cdots + x_r = n$. Jika x_i merupakan bilangan bulat tak negatif, maka ada berapa banyak penyelesaian yang memenuhi. Persoalan ini sama saja dengan membagi n obyek identik ke dalam r buah tempat. Banyaknya penyelesaian adalah $\binom{n+r-1}{n}$.

3.3 Binomial Newton

Bentuk umum dari binomial newton adalah:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = 2^n$$

Binomial newton biasa digunakan untuk menentukan koefisien dari penjabaran bentuk $(a+b)^n$, seperti berikut:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$$

SOAL

1. Banyaknya bilangan asli n yang memenuhi sifat hasil jumlah n dan suatu pembagi positif n yang kurang dari n sama dengan 2016 adalah ...
   a. 36
   b. 35
   c. 34
   d. 33

2. Jika (a, b) adalah solusi dari persamaan: $\min\{x + y, xy\} = maks\{x^2, y^2\}$ Maka selisih nilai terbesar dan terkecil dari $a + b$ adalah ….
   a. 1
   b. 2
   c. 3
   d. 4

3. Banyaknya bilangan asli $n \leq 2015$ yang dapat dinyatakan dalam bentuk $n = a + b$ dengan a, b bilangan asli yang memenuhi $a - b$ bilangan prima dan ab bilangan kuadrat sempurna adalah ….
   a. 15
   b. 17
   c. 19
   d. 21

4. Misalkan a adalah bilangan real sehingga polinomial $p(x) = x^4 + 4x + a$ habis dibagi oleh $(x - c)^2$ untuk suatu bilangan real c. Nilai a yang memenuhi adalah ...
   a. 0
   b. 1
   c. 2
   d. 3

5. Ani, Budi dan Cokro bermain tenis meja. Ketika dua orang bermain, satu orang sisanya menonton. Pada suatu permainan, ada pemenang dan ada yang kalah. Yang menang pada permainan tersebut akan melawan yang menonton pada pertandingan berikutnya, sedangkan yang kalah akan menjadi penonton pada pertandingan berikutnya. Diketahui bahwa Ani dan Budi telah bermain sebanyak 20 dan 17 kali. Jumlah permainan yang dimainkan Cokro minimal sebanyak …
   a. 11
   b. 12

c. 13
d. 14

6. Diberikan segitiga ABC dengan sudut ABC $= 90°$. Lingkaran L_1 dengan AB sebagai diameter sedangkan lingkaran L_2 dengan BC sebagai diameternya. Kedua lingkaran L_1 dan L_2 berpotongan di B dan P. Jika AB = 5, BC = 12 dan BP $= x$, maka nilai dari x adalah ….
a. $\frac{30}{13}$
b. $\frac{40}{13}$
c. $\frac{50}{13}$
d. $\frac{60}{13}$

7. Anak laki-laki dan anak perempuan yang berjumlah 48 orang duduk melingkar secara acak. Banyaknya minimum anak perempuan sehingga pasti ada enam anak perempuan yang duduk berdekatan tanpa diselingi anak laki-laki adalah ...
a. 35
b. 41
c. 47
d. 52

8. Diberikan trapesium ABCD, dengan AB sejajar DC dan AB = 84 serta DC = 25. Jika trapezium ABCD memiliki lingkaran dalam yang menyinggung keempat sisinya, keliling trapesium ABCD adalah ....
a. 200
b. 218
c. 234
d. 256

9. Misalkan (a, b, c, d, e, f) adalah sebarang pengurutan dari $(1, 2, 3, 4, 5, 6)$. Banyaknya pengurutan sehingga $a + c + e > b + d + f$ adalah ...
a. 6^6
b. 256
c. 360
d. 900

10. Tiga titik berbeda B, C, dan D terletak segaris dengan C diantara B dan D. Titik A adalah suatu titik yang tidak terletak digaris BD dan memenuhi $|AB| = |AC| = |CD|$. Jika diketahui

$$\frac{1}{|CD|}-\frac{1}{|BD|}=\frac{1}{|CD|+|BD|}$$

maka besar sudut $\angle BAC$ adalah ….

a. $36°$
b. $45°$
c. $30°$
d. $60°$