PAKET 8

PELATIHAN ONLINE 2019

SMP
MATEMATIKA

po.alcindonesia.co.id

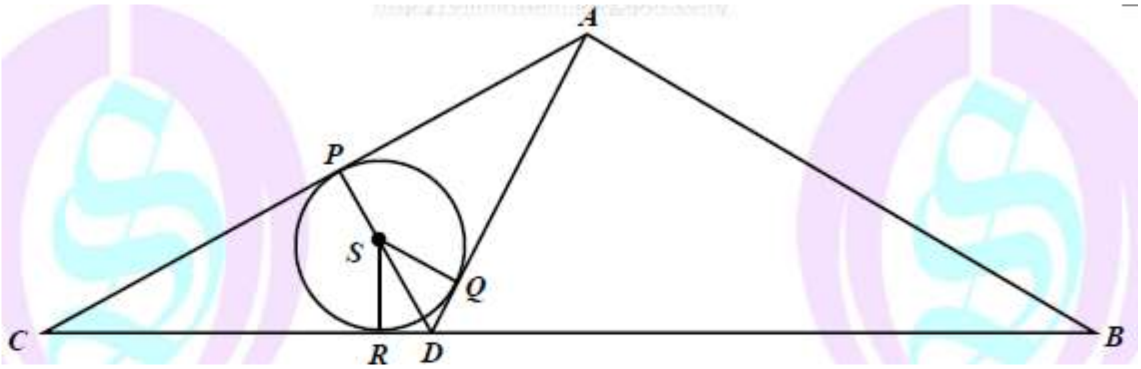
WWW.ALCINDONESIA.CO.ID

@ALCINDONESIA

085223273373

PEMBAHASAN PAKET 8

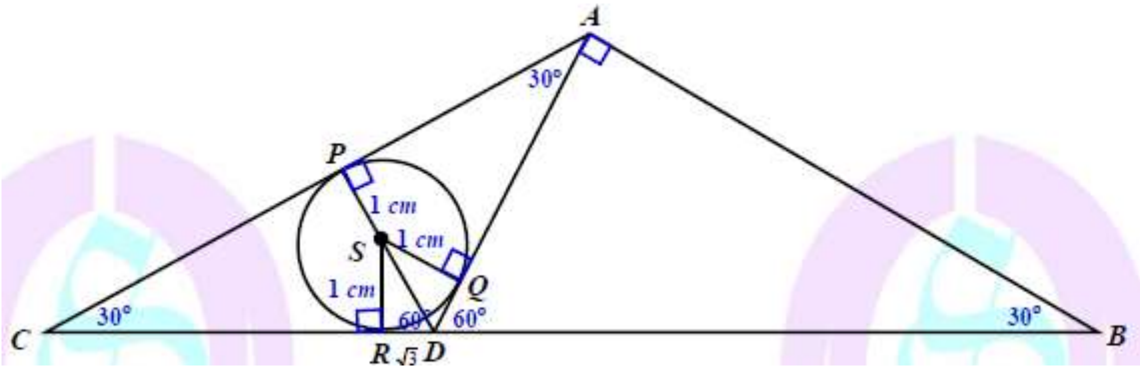
1. Perhatikan gambar berikut.



Titik P, Q, dan R masing-masing adalah titik singgung lingkaran pada sisi-sisi ΔACD. Diketahui $\angle SDR = 60°$, panjang SR = panjang SQ = 1 cm, dan panjang $RD = \frac{\sqrt{3}}{3}\ cm$. Jika ΔABC sama kaki, maka luas ΔABC adalah .... cm^2

a. $7 + 12\sqrt{3}$
b. $12 + 12\sqrt{3}$
c. $7 + 7\sqrt{3}$
d. $12 + 7\sqrt{3}$

Solusi:



Diketahui $\angle SDR = 60°$, sehingga $\angle PCD = 30°$

ΔABC sama kaki, sehingga $\angle ABC = 30°$ dan $\angle ADB = 60°$

panjang $RD = \frac{\sqrt{3}}{3}\ cm$, sehingga panjang $SD = \frac{2}{3}\sqrt{3}$ dan $PD = \frac{3+2\sqrt{3}}{3}$

Perhatikan ΔPCD. Dengan menggunakan konsep perbandingan sudut $30°$ dan $60°$ pada segitiga siku-siku, maka panjang $PC = 2 + \sqrt{3}$ dan panjang $DC = \frac{6+4\sqrt{3}}{3}$

Sehingga karena ΔADC adalah segitiga sama kaki (Perhatikan gambar ΔADC di atas dan besar sudut kaki-kaki), maka panjang $AD = \frac{6+4\sqrt{3}}{3}$ dan panjang $AC = 4 + 2\sqrt{3}$

Perhatikan ΔABD. Dengan menggunakan konsep perbandingan sudut $30°$ dan $60°$ pada segitiga siku-siku, maka panjang $AB = 4 + 2\sqrt{3}$

Kemudian mencari luas ΔABC dengan memperhatikan ΔACD dan ΔABD

$$L_{ABC} = L_{ACD} + L_{ABD}$$

$$L_{ABC} = \frac{1}{2} . AC . PD + \frac{1}{2} . AD . AB$$

$$L_{ABC} = \frac{1}{2}(AC . PD + AD . AB)$$

$$L_{ABC} = \frac{1}{2}\left[\left(4 + 2\sqrt{3}\right) . \left(\frac{3+2\sqrt{3}}{3}\right) + \left(\frac{6+4\sqrt{3}}{3}\right) . \left(4 + 2\sqrt{3}\right)\right]$$

$$L_{ABC} = \frac{1}{6}(12 + 8\sqrt{3} + 6\sqrt{3} + 12 + 24 + 12\sqrt{3} + 16\sqrt{3} + 24)$$

$$L_{ABC} = \frac{1}{6}\left(72 + 42\sqrt{3}\right)$$

$$L_{ABC} = 12 + 7\sqrt{3}$$

2. Jika f adalah fungsi sehingga $f(xy) = f(x - y)$ dan $f(6) = 1$ maka $f(-2) - f(4) = \cdots$
   a. -6
   b. 2
   c. 0
   d. 4

Solusi:

Faktor positif dari $6 = \{1,2,3,6\}$

$$f(xy) = f(x - y)$$

$f(6.1) = f(6-1)$

$f(6) = f(5)$

$1 = f(5) \quad \rightarrow \qquad f(5) = 1$

$f(xy) = f(x-y)$

$f(5.1) = f(5-1)$

$f(5) = f(4)$

$1 = f(4) \quad \rightarrow \qquad f(4) = 1$

$f(xy) = f(x-y)$

$f(2.3) = f(2-3)$

$f(6) = f(-1)$

$1 = f(-1) \quad \rightarrow \qquad f(-1) = 1$

$f(xy) = f(x-y)$

$f(-1.1) = f(-1-1)$

$f(-1) = f(-2)$

$1 = f(-2) \quad \rightarrow \qquad f(-2) = 1$

Jadi $f(-2) - f(4) = 1 - 1 = 0$

3. Jika x dan y merupakan bilangan real yang memenuhi $x^2 + y^2 = 1$, maka nilai terbesar perkalian x dan y adalah ....
    a. 1
    b. 2
    c. $\frac{1}{2}$
    d. $\frac{3}{2}$

    Solusi:

    Dari persamaan $x^2 + y^2 = 1$, maka dari persamaan ini untuk nilai x dan y syaratnya harus lebih kecil dari 1, karena apabila nilai x dan y bernilai 1 atau lebih akan mengakibatkan persamaan yang salah.

Sehingga, utnuk mengetahui nilai terbesar perkalian x dan y, sebagai berikut:

$x^2 + y^2 = 1$ dan kita ketahui bahwa $(x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy$

Sehingga dengan demikian didapat,

$(x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy$

$\rightarrow 2xy = (x + y)^2 - (x^2 + y^2)$ $\quad$ $(x^2 + y^2 = 1)$

$\rightarrow 2xy = (x + y)^2 - (1)$

$\rightarrow xy = \frac{x^2+y^2-1}{2}$

Dengan demikian, karena syarat dari nilai $x, y < 1$, maka dapat disimpulkan bahwa $xy = \frac{1}{2}$

Jadi, nilai terbesar perkalian x dan y adalah $\frac{1}{2}$

4. Jika $\frac{x^3+3x^2y}{x+3y} - \frac{27y^3+9xy^2}{3y+x} = x + 3y$, maka nilai $x = \ldots$
   a. 0
   b. 1
   c. $1 + 3y$
   d. $3 + y$

Solusi:

$$\frac{x^3 + 3x^2y}{x + 3y} - \frac{27y^3 + 9xy^2}{3y + x} = x + 3y$$

$$\frac{x^2(x + 3xy)}{x + 3y} - \frac{9y^2(3y + x)}{3y + x} = x + 3y$$

$$x^2 - 9y^2 = x + 3y$$

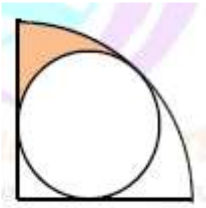
$$(x - 3y)(x + 3y) = x + 3y$$

$$x - 3y = 1$$

$$x = 1 + 3y$$

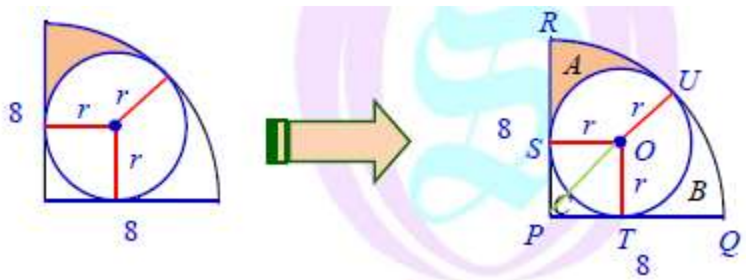
Jadi, nilai $x = 1 + 3y$

5. Sebuah lingkaran berada dalam seperempat lingkaran besar, seperti pada gambar di bawah, jika jari-jari lingkaran besar = 8 satuan, maka luas daerah yang diarsir adalah ....



a. $(48\sqrt{2} - 64)\pi + 32(2\sqrt{2} - 3)$
b. $\left(32(2\sqrt{2} - 3)\right)\pi + (48\sqrt{2} - 64)$
c. $\left(48\,(2\sqrt{2} - 3)\right)\pi + 32(2\sqrt{3} - 3)$
d. $(48\sqrt{3} - 64)\pi + 32(2\sqrt{3} - 3)$

Solusi:



Menurut informasi dari soal, maka luas A dan B adalah sama.

Diberikan garis bantu SO, TO, dan UO.

Sehingga didapat panjang jari-jari lingkaran besar $PQ = PR = 8$, sehingga panjang jari-jari lingkaran kecil $TO = SO = UO = r$

Sehingga,

$$PQ = PO + OU$$

$$PQ = r\sqrt{2} + r$$

$8 = r(\sqrt{2} + 1)$

$r = 8(\sqrt{2} - 1)$

Sedangkan untuk mengetahui luas A, kita cari terlebih dulu luas persegi PTOS, luas juring TOS atau luas seperempat lingkaran kecil yang berpusat di titik O, dan luas C, yakni sebagai berikut:

$L_{PTOS} = PT \times TO$

$L_{PTOS} = r \times r$

$L_{PTOS} = r^2$

$L_{PTOS} = \left[8\left(\sqrt{2} - 1\right)\right]^2$

$L_{PTOS} = 64(2 - 2\sqrt{2} + 1)$

$L_{PTOS} = 64(3 - 2\sqrt{2})$

$L_{PTOS} = 192 - 128\sqrt{2}$

$L_{juring\ TOS} = \frac{1}{4}\pi \times TO^2$

$L_{juring\ TOS} = \frac{1}{4}\pi \times r^2$

$L_{juring\ TOS} = \frac{1}{4}\pi \times \left(192 - 128\sqrt{2}\right)$

$L_{juring\ TOS} = \left(48 - 32\sqrt{2}\right)\pi$

$Luas\ C = Luas\ persegi\ PTOS - Luas\ juring\ TOS$

$Luas\ C = 192 - 128\sqrt{2} - \left(48 - 32\sqrt{2}\right)\pi$

$Luas\ C = 192 - 128\sqrt{2} - 48\pi + 32\sqrt{2}\,\pi$

Dengan demikian,

$Luas\ A + B = \ Luas\ \frac{1}{4}\ lingkaran\ besar - \ luas\ lingkaran\ kecil - \ luas\ C$

$Luas\ A + B = \frac{1}{4}\pi\ \times\ PQ^2 - (\pi\ \times\ TO^2) - (192 - 128\sqrt{2} - 48\pi\ + 32\sqrt{2}\,\pi)$

$Luas\ A + B = \frac{1}{4}\pi\ \times\ 8^2 - \pi\ \times\ r^2 - 192\ +\ 128\sqrt{2}\ +\ 48\pi - 32\sqrt{2}\,\pi$

$Luas\ A + B = \frac{1}{4}\pi\ \times\ 64 - \pi\ \times\ (192 - 128\sqrt{2}\,) - 192\ +\ 128\sqrt{2}\ + 48\pi - 32\sqrt{2}\,\pi$

$Luas\ A + B = 16\pi - 192\pi\ +\ 128\sqrt{2}\,\pi - 192\ +\ 128\sqrt{2}\ +\ 48\pi - 32\sqrt{2}\,\pi$

$Luas\ A + B = 16\pi - 192\pi\ +\ 48\pi\ +\ 128\sqrt{2}\,\pi - 32\sqrt{2}\,\pi\ +\ 128\sqrt{2} - 192$

$Luas\ A + B = \left(96\sqrt{2} - 128\right)\pi\ +\ 128\sqrt{2} - 192$

Sehingga,

$Luas\ A\ = \frac{(96\sqrt{2} - 128)\pi + 128\sqrt{2} - 192}{2}$

$Luas\ A\ = \left(48\sqrt{2} - 64\right)\pi\ +\ 64\sqrt{2} - 96$

$Luas\ A\ = \left(48\sqrt{2} - 64\right)\pi\ +\ 32(2\sqrt{2} - 3)$

Jadi, luas daerah yang diarsir adalah $\left(48\sqrt{2} - 64\right)\pi\ +\ 32(2\sqrt{2} - 3)$ satuan luas

6. Diberikan dua persamaan berikut.

$\frac{2}{x+y} + \frac{6}{x-y} = 2$ dan $\frac{4}{x+y} - \frac{9}{x-y} = -1$

Nilai $\frac{x}{y}$ yang memenuhi kedua persamaan tersebut adalah ....

a. -10

b. -11
c. -9
d. -8

Solusi:

Misalkan $\frac{1}{x+y} = a$ dan $\frac{1}{x-y} = b$, maka persamaannya menjadi sebagai berikut:

$2a + 6b = 2$ dan $4a - 9b = -1$

$2a + 6b = 2 \mid \times 2 \rightarrow 4a + 12b = 4 \quad (1)$

$4a - 9b = -1 \mid \times 1 \rightarrow 4a - 9b = -1 \quad (2)$

Eliminasikan persamaan (1) dan (2), diperoleh: $b = \frac{5}{21}$

Nilai disubstitusikan ke salah satu persamaan awal, misalkan $2a + 6b = 2$, yakni:

$2a + 6b = 2$

$\rightarrow 2a + 6\left(\frac{5}{21}\right) = 2$

$\rightarrow a + 3\left(\frac{5}{21}\right) = 1$

$\rightarrow a + \frac{5}{7} = 1$

$\rightarrow 7a + 5 = 7$

$\rightarrow a = \frac{2}{7}$

Dengan demikian $\frac{1}{x+y} = \frac{2}{7} \rightarrow x + y = \frac{7}{2}$ dan $\frac{1}{x-y} = \frac{5}{21} \rightarrow x - y = \frac{21}{5}$

Eliminasikan kedua persamaan di atas, diperoleh:

$x = \frac{77}{20}$ dan $y = -\frac{7}{20}$

Jadi, $\frac{x}{y} = -11$

7. Banyak bilangan 3 digit (angka) yang terdiri dari angka-angka 0,2,3,5,7,8 yang lebih dari 243 dan kurang dari 780 adalah …
   a. 125
   b. 120
   c. 115
   d. 110

   Solusi:

Pola I : ($dari\ 244-299$)	Ratusan	Puluhan	Satuan
Angka yang memenuhi	2	5, 7, 8	0, 2, 3, 5, 7, 8
Banyak angka	1	3	6

   Banyak cara penyusunan dengan pola ini adalah $1.3.6 = 18$

Pola II : ($dari\ 300-699$)	Ratusan	Puluhan	Satuan
Angka yang memenuhi	3, 5	0, 2, 3, 5, 7, 8	0, 2, 3, 5, 7, 8
Banyak angka	2	6	6

   Banyak cara penyusunan dengan pola ini adalah $2.6.6 = 72$

Pola III : ($dari\ 700-779$)	Ratusan	Puluhan	Satuan
Angka yang memenuhi	7	0, 2, 3, 5, 7	0, 2, 3, 5, 7, 8
Banyak angka	1	5	6

   Banyak cara penyusunan dengan pola ini adalah $1.5.6 = 30$

   Jadi, banyak bilangan yang bisa disusun adalah $18 + 72 + 30 = 120$

8. Jika bilangan bulat x dan y dibagi 4, maka bersisa 3. Jika bilangan $x - 3y$ dibagi 4, maka bersisa …
   a. 0
   b. 1
   c. 2
   d. 3

   Solusi:

   $x = 4a + 3$, untuk $a \in$ bilangan bulat

$y = 4b + 3$, untuk $b \in$ bilangan bulat

$3y = 3.(4b + 3) = 4.(3b) + 9 = 4b' + 1$, untuk $b' \in$ bilangan bulat

Sehingga,

$$x - 3y = (4a + 3) - (4b' + 1) = 4a + 3 - 4b' - 1 = 4.(a - b') + 2$$

Jadi $x - 3y$ dibagi 4 bersisa 2

9. Jika jumlah 4 suku pertama suatu barisan aritmatika adalah 70 dan jumlah 12 suku berikutnya adalah 690, maka suku ke-2015 barisan tersebut adalah ....
   a. 10050
   b. 10060
   c. 10070
   d. 10080

Solusi:

Diketahui Jika jumlah 4 suku pertama suatu barisan aritmatika adalah 70 dan jumlah 12 suku berikutnya adalah 690, maka dapat di uraikan seperti permisalan berikut:

1. Deret ke-4 suku pertama: $a, a + b, a + 2b, a + 3b,$

Sehingga jumlahnya $a + (a + b) + (a + 2b) + (a + 3b) = 70$

$4a + 6b = 70$

$2a + 3b = 35 \ldots.(1)$

2. Deret ke-12 suku berikutnya: $a + 4b, a + 5b, a + 6b, \ldots., a + 14b, a + 15b$

Sehingga jumlahnya $(a + 4b) + (a + 5b) + (a + 6b) + \ldots.(a + 14b) + (a + 15b) = 690$

$12a + 114b = 690$

$2a + 19b = 115 \ldots.(2)$

Eliminasikan persamaan (1) dan (2), didapat

$-16b = -80$

$b = 5$, sehingga $a = 10$

Dengan demikian,

$U_{2015} = a + (n - 1)b$

$U_{2015} = 10 + (2015 - 1)5$

$U_{2015} = 10 + (2014)5$

$U_{2015} = 10 + 10070$

$U_{2015} = 10080$

Jadi, suku ke-2015 barisan tersebut adalah 10080

10. Mulai tahun ini materi OSN SMP bidang Fisika dan Biologi digabung menjadi satu, yaitu IPA, sehingga wakil dari setiap sekolah tahun ini maksimum 3 orang. Diketahui bahwa di Sekolah Teladan terdapat 6 calon siswa yang siap dikirim untuk mengikuti lomba OSN SMP dengan kemampuan sebagai berikut.

    Siswa A : Siap mewakili bidang lomba Matematika, IPA, atau IPS

    Siswa B dan C : Siap mewakili bidang lomba Matematika atau IPA

    Siswa D : Siap mewakili bidang lomba Matematika atau IPS

    Siswa E : Siap mewakili bidang lomba IPA atau IPS

    Siswa F : Siap mewakili bidang lomba IPS

    Siswa A dan B merupakan saudara kandung, sehingga sekolah mengambil kebijakan yakni tidak mengijinkan dua orang yang bersaudara untuk mewakili sekolah (artinya jika A terpilih maka B tidak terpilih, begitu pula sebaliknya). Jika Sekolah Teladan memutuskan untuk mengirimkan 3 siswa untuk mengikuti semua bidang lomba, maka cara yang mungkin untuk memilih wakil sekolah tersebut ke OSN SMP tahun ini ada sebanyak ....

    a. 30
    b. 28
    c. 26
    d. 24

    Solusi:

Misalkan:

Siswa A = A

Siswa B = B

Siswa C = C

Siswa D = D

Siswa E = E

Siswa F = F

Diketahui Siswa A dan B merupakan saudara kandung, sehingga sekolah mengambil kebijakan yakni tidak mengijinkan dua orang yang bersaudara untuk mewakili sekolah, dengan demikian perhatikan tabel berikut:

No.	Bidang Lomba			Keterangan
	Matematika	IPA	IPS	
	A, B, C, D	A, B, C, E	A, D, E, F	
1	A	C	D	ada 3 cara
2	A	C	E	ada 3 cara
3	A	C	F	ada 2 cara
4	A	E	D	ada 3 cara
5	A	E	F	ada 1 cara
6	B	C	D	ada 2 cara
7	B	C	E	ada 2 cara
8	B	C	F	ada 2 cara
9	B	E	D	ada 2 cara
10	B	E	F	ada 1 cara
11	C	E	D	ada 2 cara
12	C	E	F	ada 1 cara
13	D	A	F	ada 1 cara
14	D	B	F	ada 1 cara
15	D	C	F	ada 1 cara
16	D	E	F	ada 1 cara
Total				**ada 28 cara**

Jadi, cara yang mungkin untuk memilih wakil sekolah tersebut ke OSN SMP tahun ini ada sebanyak 28 cara