

SMA
MATEMATIKA

A decorative horizontal line with a repeating wavy pattern, colored in a light purple or lavender shade.



085223273373

PERSAMAAN ALJABAR

Pemfaktoran dan Penguraian

Pengetahuan dan keterampilan untuk memfaktorkan dan menguraikan beberapa bentuk khusus aljabar dapat memudahkan pemecahan masalah. Berikut beberapa bentuk pemfaktoran dan penguraian yang sering digunakan :

- a. $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$
- b. $(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$
- c. $(x + y)^3 = x^3 + y^3 + 3xy(x + y)$
- d. $(x - y)^3 = x^3 - y^3 - 3xy(x - y)$
- e. $(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2xz$
- f. $(x + 1)(y + 1)(z + 1) = xyz + xy + yz + xz + x + y + z + 1$
- g. $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$
- h. $x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$
- i. $x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$
- j. $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - xz)$
- k. $x^4 + 4y^4 = (x^2 + 2y^2 + 2xy)(x^2 + 2y^2 - 2xy)$
- l. $(x^n - y^n) = (x - y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + \dots + xy^{n-2} + y^{n-1})$ dengan $n \in \text{bilangan asli}$
- m. $(x^n + y^n) = (x + y)(x^{n-1} - x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 - \dots - xy^{n-2} + y^{n-1})$ dengan $n \in \text{bilangan bulat}$

Bentuk (l) dan (m) terkadang juga digunakan untuk menyelesaikan soal pada teori bilangan karena pada bentuk (l) didapat $(x - y)$ membagi $(x^n - y^n)$ untuk setiap n asli dan bentuk (m) didapat $(x + y)$ membagi $(x^n + y^n)$ untuk n bilangan ganjil

Persamaan Aljabar

a. Persamaan Kuadrat

Bentuk umum persamaan kuadrat adalah $ax^2 + bx + c = 0$.

1. Pengertian akar

Misalkan x_1 dan x_2 adalah nilai x yang memenuhi persamaan kuadrat tersebut. Nilai x_1 dan x_2 dikenal juga dengan akar-akar. Maka berlaku:

$$ax_1^2 + bx_1 + c = 0$$

$$ax_2^2 + bx_2 + c = 0$$

2. Tipe akar-akar persamaan

Dari persamaan kuadrat di atas, diperoleh solusinya dengan rumus abc:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Persamaan $b^2 - 4ac$ dikenal dengan nama diskriminan. Nilai diskriminan ini menentukan tipe-tipe akar. Ada 3 kemungkinan nilai diskriminan.

- Jika $D = b^2 - 4ac > 0$ maka x_1 dan x_2 keduanya real dan berbeda.
- Jika $D = b^2 - 4ac = 0$ maka $x_1 = x_2$ serta keduanya real
- Jika $D = b^2 - 4ac < 0$ maka x_1 dan x_2 keduanya tidak real.

3. Hubungan kedua akar

Dari rumus abc di atas bisa diperoleh hubungan keduanya, yaitu

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

$$x_1 x_2 = \frac{c}{a}$$

4. Menentukan nilai suatu bilangan yang berbentuk $\sqrt{a+b+2\sqrt{ab}}$ dan $\sqrt{a+b-2\sqrt{ab}}$

Jika $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ dan $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ keduanya dikuadratkan akan didapat

$$(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 = a + b + 2\sqrt{ab} \text{ dapat diubah menjadi } \sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{a+b+2\sqrt{ab}}$$

$$(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 = a + b - 2\sqrt{ab} \text{ dapat diubah menjadi } \sqrt{a} - \sqrt{b} = \sqrt{a+b-2\sqrt{ab}}$$

b. Persamaan Eksponen dan Logaritma

Dalam pembahasan ini hanya akan disinggung tentang sifat-sifat pada eksponen,

i. $a^0 = 1$ untuk $a \neq 0$

v. $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$ untuk $a \neq 0$

ii. $a^b a^c = a^{b+c}$

vi. $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$

iii. $\frac{a^b}{a^c} = a^{b-c}$

iv. $(a^b)^c = a^{bc}$

Pengertian logaritma : Jika $a^b = c$ maka $b = {}^a\log c$ dapat ditulis $b = \log_a c$

i. $\log_a b = \frac{\log b}{\log a} = \frac{\log_p b}{\log_p a}$ dengan syarat $a, p \neq 1$ dengan $a, b, p > 0$

ii. $\log_a a = 1$ dengan syarat $a > 0$ dan $a \neq 1$

iii. $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$ dengan $a, b \neq 1$ dan $a, b > 0$

iv. $\log_a b + \log_a c = \log_a bc$

v. $\log_a b - \log_a c = \log_a \frac{b}{c}$

vi. $\log_a b^n = n \cdot \log_a b$

vii. $\log_a b \cdot \log_b c = \log_a c$

c. Persamaan nilai mutlak

Nilai mutlak dari x ditulis dengan $|x|$ dan memiliki pengertian $|x| = x$ jika $x \geq 0$ dan $|x| = -x$ jika $x < 0$. Jika hanya memuat satu tanda mutlak maka penyelesaian persamaan dapat dengan menggunakan pengertian nilai mutlak atau dapat juga dengan mengkuadratkan tanda mutlak.

$$|x|^2 = x^2$$

Sistem Persamaan

Sistem persamaan melibatkan beberapa persamaan aljabar dengan keterkaitan variabel-variabel pada tiap persamaan. Sistem persamaan dapat dibedakan atas sistem persamaan linear dan sistem persamaan nonlinear. Sistem persamaan linear dapat diselesaikan dengan metode substitusi maupun eliminasi, sedangkan sistem persamaan nonlinear dapat diselesaikan dengan berbagai cara yang menuntut kita untuk melakukan beberapa manipulasi aljabar dahulu sebelumnya.

SOAL

1. Jika $x + \frac{1}{x} = 5$, maka nilai dari $x^5 + \frac{1}{x^5}$ adalah ...
 - a. 2420
 - b. 2425
 - c. 2520
 - d. 2525
 - e. 2530
2. Jika $a^2 = 11b + 2018$ dan $b^2 = 11a + 2018$ dengan a dan b adalah bilangan real berbeda, maka nilai dari ab adalah ...
 - a. -3794
 - b. -1897
 - c. 1894
 - d. 1897
 - e. 3794
3. Diketahui x, y, z adalah bilangan real positif dan memenuhi $xyz = 1$, $x + \frac{1}{y} = 2$ dan $y + \frac{1}{z} = 3$.
Nilai dari $z + \frac{1}{x}$ sama dengan ...
 - a. $\frac{17}{4}$
 - b. 4
 - c. $\frac{5}{9}$
 - d. 2
 - e. $\frac{7}{5}$
4. Tentukan semua bilangan real a yang memenuhi bahwa dua persamaan kuadrat $x^2 + ax + 1$ dan $x^2 + x + a$ memiliki sedikitnya satu akar yang sama.
 - a. -2 dan 1
 - b. -1 dan 2
 - c. 0
 - d. 1 dan 2
 - e. -2
5. Nilai n yang memenuhi persamaan ${}^{2n}\log(2018\sqrt{2}) = {}^n\log(1009)$ adalah ...
 - a. $2018^{\frac{3}{2}}$
 - b. $1009^{\frac{3}{2}}$
 - c. 1009
 - d. $1009^{\frac{2}{3}}$
 - e. $2018^{\frac{2}{3}}$
6. w dan z adalah bilangan kompleks yang memenuhi $w^2 + z^2 = 7$ dan $w^3 + z^3 = 10$, apakah nilai terbesar yang mungkin dari $w + z$?
 - a. -5
 - b. -4
 - c. 1
 - d. 4
 - e. 5
7. Jika a dan b adalah akar real persamaan $x^4 - 4x = 1$ maka nilai $a + b$ sama dengan ...
 - a. -4
 - b. $-\sqrt{2}$

- c. 0
d. $\sqrt{2}$
e. 4
8. Banyaknya pasangan tripel bilangan bulat (a, b, c) yang memenuhi
 $|a + b| + c = 19$ dan $ab + |c| = 97$
adalah . . .
a. 0
b. 4
c. 12
d. 16
e. 20
9. Botol A berisi 4 liter larutan garam dengan komposisi 45% garam. Botol B berisi 5 liter larutan garam dengan komposisi 48% garam. Botol C berisi 1 liter larutan garam dengan komposisi $k\%$ garam. Dari botol C diambil $\frac{m}{n}$ liter larutan garam lalu ditambahkan ke botol A dan sisanya ditambahkan ke botol B. Pada akhirnya, masing-masing botol A dan B berisi larutan garam dengan komposisi 50% garam. Jika m dan n adalah dua bilangan asli yang saling relatif prima maka nilai dari $k + m + n$ adalah . . .
a. 85
b. 95
c. 105
d. 115
e. 125
10. Tentukan semua nilai x bilangan real yang memenuhi persamaan berikut
- $$x = \sqrt{x - \frac{1}{x}} + \sqrt{1 - \frac{1}{x}}$$
- a. $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ dan $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$
b. $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$
c. $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$
d. -1
e. 2