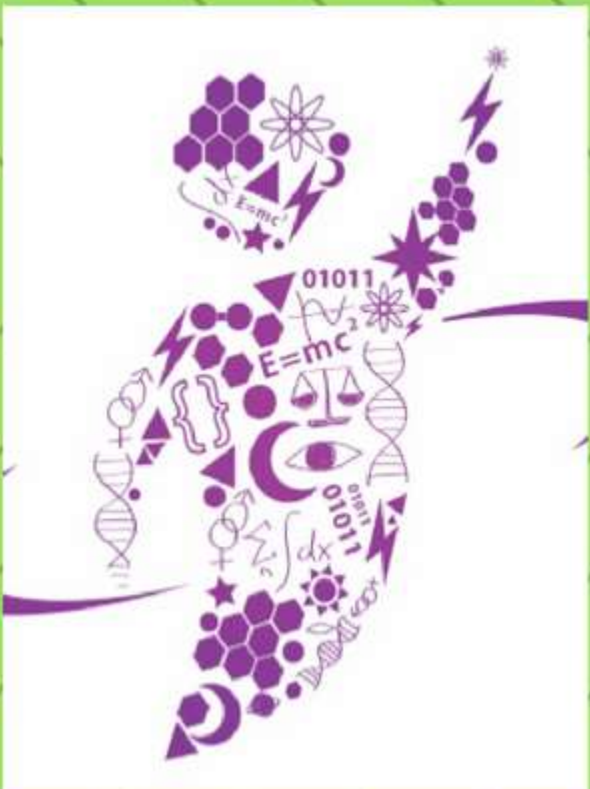
PAKET 10

PELATIHAN ONLINE

2019

SMA
MATEMATIKA

po.alcindonesia.co.id



WWW.ALCINDONESIA.CO.ID

@ALCINDONESIA

085223273373

PEMBAHASAN PAKET 10

1. Jika a, b, c, d, e merupakan bilangan asli dengan $a < 2b, b < 3c, c < 4d, d < 5e$ dan $e < 100$, maka nilai maksimum dari a adalah ...
   a. 11478
   b. 11487
   c. 11748
   d. 11847
   Solusi:
   $$e \leq 99 \Rightarrow d < 495$$
   $$d \leq 494 \Rightarrow c < 1976$$
   $$c \leq 1975 \Rightarrow b < 5925$$
   $$b \leq 5924 \Rightarrow a < 11848$$
   Jadi, nilai maksimum a adalah 11847

2. Banyaknya permutasi $(a_1, a_2 \dots, a_8)$ dari $(1,2,\dots,8)$ yang memenuhi
   $$|a_1 - 1| = |a_2 - 2| = \cdots = |a_8 - 8|$$
   adalah ....
   a. 1
   b. 2
   c. 3
   d. 4
   Solusi:
   Secara jelas diperoleh bahwa untuk $a_i = i$ benar, dengan $i = 1,2,\dots,8$
   Lemma : Nilai yang memenuhi $|a_i - i|$ adalah pembagi positif i terbesar yang lebih kecil dari i
   Banyaknya pembagi positif yang lebih kecil dari 8 ada 3 bilangan, yaitu 1, 2 dan 4. Maka banyak permutasi yang memenuhi ada $1 + 3 = 4$
   Dapat dituliskan :
   - Untuk $|a_i - i| = 0 \rightarrow (a_1, a_2, \dots, a_8) = (1,2,3,\dots,8)$
   - Untuk $|a_i - i| = 1 \rightarrow (a_1, a_2, \dots, a_8) = (2,1,4,3,\dots 7,8)$
   - Untuk $|a_i - i| = 2 \rightarrow (a_1, a_2, \dots, a_8) = (3,4,1,2,7,8,5,6)$
   - Untuk $|a_i - i| = 4 \rightarrow (a_1, a_2, \dots, a_8) = (5,6,7,8,1,2,3,4)$

3. Untuk setiap bilangan real a, didefinisikan $f(a)$ sebagai nilai maksimal dari
   $$\left|\sin x + \frac{2}{3 + \sin x} + a\right|$$
   Nilai minimum dari $f(a)$ adalah ....

a. $\frac{3}{4}$
b. $\frac{1}{4}$
c. $-\frac{3}{4}$
d. $-\frac{1}{4}$

Solusi:

$f(a)$ adalah nilai maksimum dari $\left|\sin x + \frac{2}{3+\sin x} + a\right|$ untuk $a \in R$

$-1 \leq sinx \leq 1$

Misalkan $t = 3 + sinx$ maka $2 \leq t \leq 4$

$\left|\sin x + \frac{2}{3+\sin x} + a\right| = \left|t + \frac{2}{t} + a - 3\right|$

Dengan $3 \leq t + \frac{2}{t} \leq \frac{9}{2}$ sehingga $0 \leq t + \frac{2}{t} - 3 \leq \frac{3}{2}$

Untuk $a \geq -\frac{3}{4}$ maka $f(a) = \left|a + \frac{3}{2}\right| = a + \frac{3}{2}$

Karena linier maka $a + \frac{3}{2}$ minimum ketika $a = -\frac{3}{4}$

Untuk $a \leq -\frac{3}{4}$ maka $f(a) = |a + 0| = -a$

Karena linier maka $-a$ minimum ketika $a = -\frac{3}{4}$

$\therefore$ Jadi, nilai minimum $f(a)$ adalah $-\frac{3}{4}$

4. Rudi membuat bilangan asli dua digit. Probabilitas bahwa kedua digit bilangan tersebut merupakan bilangan prima dan bilangan tersebut bersisa 3 jika dibagi 7 adalah ...

a. $\frac{2}{45}$
b. $\frac{1}{45}$
c. $\frac{4}{45}$
d. $\frac{3}{45}$

Solusi:

Misalkan bilangan yang dibuat Rudi adalah $10a + b$. Diketahui bahwa

$$10a + b \equiv 3 \, mod \, 7 \Leftrightarrow 3a + b \equiv 3 \, mod \, 7$$

karena $a, b \in \{2, 3, 5, 7\}$ maka tinggal dibagi kasus

• $a = 2$, diperoleh $6 + b \equiv 3 \, mod \, 7 \Leftrightarrow b \equiv 4 \, mod \, 7$. Tidak ada nilai b yang memenuhi.

• $a = 3$, diperoleh $9 + b \equiv 3 \, mod \, 7 \Leftrightarrow b \equiv 1 \, mod \, 7$. Tidak ada nilai b yang memenuhi.

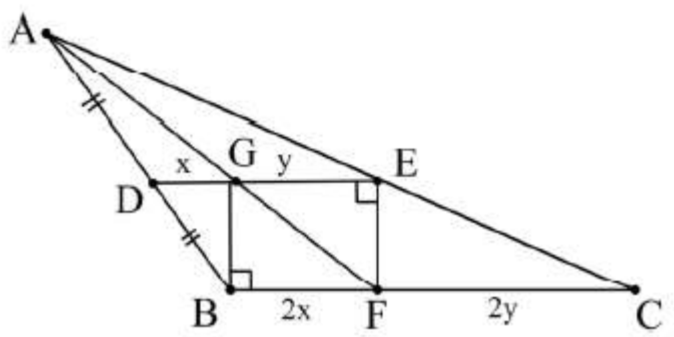
• $a = 5$, diperoleh $15 + b \equiv 3 \, mod \, 7 \Leftrightarrow b \equiv 2 \, mod \, 7$. Diperoleh $b = 2$.

• $a = 7$, diperoleh $21 + b \equiv 3 \, mod \, 7 \Leftrightarrow b \equiv 3 \, mod \, 7$. Diperoleh $b = 3$.

Jadi, ada dua bilangan yang memiliki sifat kedua digit penyusunnya berupa bilangan prima dan bilangan tersebut bersisa 3 jika dibagi 7 yaitu 52 dan 73. Sehingga peluangnya adalah $\frac{2}{90} = \frac{1}{45}$

5. Diberikan segitiga tumpul ABC di titik B. Misalkan D dan E berturut-turut pertengahan segmen AB dan AC. Misalkan pula bahwa F titik pada segmen BC sehingga$\angle BFE = 90°$, dan G titik pada segmen DE sehingga $\angle BGE = 90°$. Jika titik-titik A, G dan F terletak pada satu garis lurus, maka nilai dari $\frac{BF}{CF}$ adalah …
   a. $\frac{1}{2}$
   b. 1
   c. $\frac{1}{4}$
   d. $\frac{2}{3}$

   Solusi:



$$\frac{BF}{CF} = \frac{2x}{2y} = \frac{x}{y}$$

Karena $y = 2x$, maka:

$$\frac{BF}{CF} = \frac{x}{y} = \frac{x}{2x} = \frac{1}{2}$$

6. Banyaknya faktor bulat positif dari 2015 adalah ....
   a. 3
   b. 6
   c. 8
   d. 10

   Solusi:

   2015 = 5 · 13 · 31

Banyaknya faktor positif = 2 · 2 · 2 = 8
∴ Jadi, banyaknya faktor bulat positif dari 2015 adalah 8.

7. Pada segitiga ABC, titik M terletak pada BC sehingga AB = 7, AM = 3, BM = 5 dan MC = 6. Panjang AC adalah ...
   a. $3\sqrt{3}$
   b. $2\sqrt{3}$
   c. 1
   d. 2

   Solusi:
   Dengan dalil Stewart diperoleh
   $AB^2 \times MC + AC^2 \times BM = AM^2 \times BC + BC \times BM \times MC$
   $\Leftrightarrow 49 \times 6 + AC^2 \times 5 = 9 \times 11 + 11 \times 5 \times 6$
   $\Leftrightarrow 5AC^2 = 135$
   $\Leftrightarrow AC = 3\sqrt{3}$

8. Diketahui bilangan real positif a dan b memenuhi persamaan
   $a^4 + a^2b^2 + b^4 = 6$ dan $a^2 + ab + b^2 = 4$
   Nilai dari $a - b$ adalah ....
   a. $\frac{\sqrt{21}}{2}$
   b. $\frac{\sqrt{2}}{2}$
   c. $\frac{1}{2}$
   d. $\frac{\sqrt{2}}{4}$

   Solusi:
   $a^4 + a^2b^2 + b^4 = 6$
   $a^2 + ab + b^2 = 4$
   $a^4 + b^4 + a^2b^2 + 2a^2b^2 + 2ab(a^2 + b^2) = 4^2$
   $2a^2b^2 + 2ab(4 - ab) = 10$
   $8ab = 10$
   Misalkan $y = ab > 0$
   $ab = \frac{5}{4}$
   $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + ab + ab = 4 + \frac{5}{4} = \frac{21}{4}$
   $a - b = \sqrt{(a + b)^2 - 4ab} = \sqrt{\frac{21}{4} - 4\left(\frac{5}{4}\right)} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$
   ∴ Jadi, nilai $a - b$ adalah $\frac{\sqrt{2}}{2}$

9. Diberikan a dan b bilangan real dengan $\sqrt{a} - \sqrt{b} = 20$. Nilai maksimum dari $a - 5b$ dicapai ketika a bernilai …
   a. 500
   b. 25
   c. 625
   d. 125
   Solusi:
   $\sqrt{a} - \sqrt{b} = 20 \Rightarrow a = b + 40\sqrt{b} + 400$, sehingga
   $a - 5b = b + 40\sqrt{b} + 400 - 5b = -4\left(\sqrt{b} - 5\right)^2 + 500$
   Oleh karena itu, nilai maksimum dari $a - 5b$ adalah 500, dicapai ketika $a = 625$ dan $b = 25$

10. Masing-masing kotak pada papan catur berukuran 3 × 3 dilabeli dengan satu angka, yaitu 1, 2, atau 3. Banyaknya penomoran yang mungkin sehingga jumlah angka pada masing-masing baris dan masing-masing kolom habis dibagi oleh 3 adalah ….
   a. 27
   b. 45
   c. 81
   d. 63
   Solusi:
   Misalkan bilangan-bilangan pada baris pertama adalah a, b dan c. Pada baris kedua adalah d, e, f dan baris ketiga g, h, i.
   Jika a = b maka agar memenuhi a + b + c habis dibagi 3 maka a = b = c.
   Jika a ≠ b maka agar memenuhi a + b + c habis dibagi 3 maka a, b, c semuanya berbeda dengan a, b, c ∈ {1, 2, 3}.
   Maka masing-masing ada 3 kemungkinan untuk nilai a dan b. Nilai c menyesuaikan sehingga hanya ada 1 kemungkinan.
   Maka masing-masing ada 3 kemungkinan untuk nilai d dan e. Nilai f menyesuaikan sehingga hanya ada 1 kemungkinan.
   Jelas nilai g, h, i hanya menyesuaikan dengan bilangan-bilangan di atasnya. Jadi, masing-masing hanya ada 1 kemungkinan.
   Cukup membuktikan bahwa jika a + b + c, d + e + f, a + d + g, b + e + h dan c + f + i masing-masing habis dibagi 3 maka g + h + i juga habis dibagi 3.
   g = 3k − a − d, h = 3m − b − e dan i = 3n − c − f
   g + h + i = 3(k + m + n) − (a + b + c) − (d + e + f) yang habis dibagi 3.
   Jadi, banyaknya kemungkinan yang memenuhi ada 3 x 3 x 3 x 3 = 81.
   ∴ Jadi, banyaknya penomoran yang memenuhi adalah 81.