

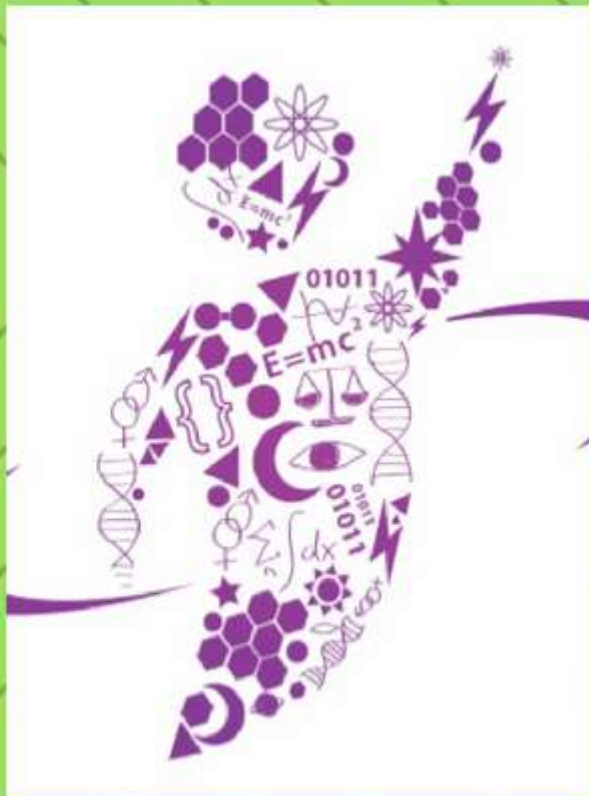
**PAKET 1**

# PELATIHAN ONLINE

**2019**

**SMA  
MATEMATIKA**

po.alcindonesia.co.id



**WWW.ALCINDONESIA.CO.ID**

**@ALCINDONESIA**

**085223273373**

PEMBAHASAN PAKET 1

1. Jawaban : D

Dari  $x + \frac{1}{x} = 5$ , kita peroleh

$$\begin{aligned} \bullet \quad x^2 + \frac{1}{x^2} &= (x + \frac{1}{x})^2 - 2 \cdot (x) \left(\frac{1}{x}\right) = 5^2 - 2 = 23 \\ \bullet \quad x^3 + \frac{1}{x^3} &= (x + \frac{1}{x})^3 - 3(x + \frac{1}{x}) = 5^3 - 3(5) = 110 \end{aligned}$$

Sehingga

$$x^5 + \frac{1}{x^5} = \left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - \left(x + \frac{1}{x}\right) = (110)(23) - 5 = 2525$$

2. Jawaban : B

Kurangkan persamaan ini  $a^2 = 11b + 2018$  dengan  $b^2 = 11a + 2018$ , menjadi

$$a^2 - b^2 = 11(b - a)$$

Karena a dan b berbeda, maka  $a + b = -11$

Setelah itu, tambahkan kedua persamaan di atas, maka

$$a^2 + b^2 = 11(b + a) + 4036$$

$$(a + b)^2 - 2ab = 11(-11) + 4036$$

$$(-11)^2 - 2ab = -121 + 4036$$

$$121 - 2ab = -121 + 4036$$

$$ab = -1897$$

3. Jawaban : E

Misalkan  $z + \frac{1}{x} = k$

$$x + \frac{1}{y} + y + \frac{1}{z} + z + \frac{1}{x} = 5 + k$$

$$\text{Karena } xyz = 1 \text{ maka } x + y + z + xy + xz + yz = 5 + k \quad \dots (1)$$

$$\text{Karena } x + \frac{1}{y} = 2, \text{ maka } xyz + z = 2yz$$

$$1 + z = 2yz \quad \dots (2)$$

Dengan cara yang sama didapat

$$1 + x = 3xz \quad \dots (3)$$

$$1 + y = kxy \quad \dots (4)$$

Dengan mengalikan persamaan (2), (3) dan (4) didapat

$$xyz + xy + xz + yz + x + y + z + 1 = 6k(xyz)^2$$

Substitusikan  $xyz = 1$  dan persamaan (1) didapat

$$1 + 5 + k + 1 = 6k$$

$$5k = 7$$

$$k = \frac{7}{5}$$

4. Jawaban : E

Misalkan p adalah akar yang sama maka  $p^2 + ap + 1 = 0$  dan  $p^2 + p + a = 0$

Dengan mengurangkan kedua persamaan kuadrat di atas, didapat:

$$(p^2 + ap + 1) - (p^2 + p + a) = 0$$

$$ap + 1 - p - a = 0$$

$$(a - 1)(p - 1) = 0 \text{ maka } a = 1 \text{ atau } p = 1$$

- Untuk  $a = 1$

Kedua persamaan kuadrat akan sama yaitu  $x^2 + x + 1$ . Namun nilai diskriminan dari persamaan kuadrat ini negatif, yang berarti tidak ada akar real.

- Untuk  $p = 1$

$$x^2 + ax + 1 = (x - 1)(x - k) \text{ maka nilai } k = 1 \text{ yang mengakibatkan nilai } a = -2$$

$$x^2 + x + a = (x - 1)(x - q) \text{ maka nilai } q = -2 \text{ yang mengakibatkan nilai } a = -2$$

5. Jawaban : D

Misalkan  ${}^{2n}\log (2018\sqrt{2}) = {}^n\log (1009) = k$

Dari  ${}^{2n}\log (2018\sqrt{2}) = k$ , dapat ditulis  $(2n)^k = 2018\sqrt{2}$  . . . (1)

Dari  ${}^n\log (1009) = k$ , dapat ditulis  $(n)^k = 1009$  . . . (2)

$$\left(\frac{2n}{n}\right)^k = \frac{2018\sqrt{2}}{1009} = 2\sqrt{2}, \text{ maka } 2^k = 2\sqrt{2} = 2^{\frac{3}{2}}$$

Maka nilai  $k = \frac{3}{2}$

Dari persamaan (2),  $n^{\frac{3}{2}} = 1009$ , maka nilai  $n = (1009)^{\frac{2}{3}}$

6. Jawaban : D

Misalkan  $p = w + z$

Dengan mengkuadratkan  $w + z$ , maka

$$w^2 + 2wz + z^2 = p^2$$

$$wz = \frac{p^2 - 7}{2} \quad \dots (1)$$

Dengan mengpankattigakan  $w + z$ , maka

$$w^3 + 3w^2z + 3wz^2 + z^3 = p^3$$

$$w^3 + z^3 + 3wz(w + z) = p^3$$

$$wz = \frac{p^3 - 10}{3p} \quad \dots (2)$$

Dari persamaan (1) dan (2), diperoleh

$$\frac{p^2 - 7}{2} = \frac{p^3 - 10}{3p}$$

$$3p^3 - 21p = 2p^3 - 20$$

$$p^3 - 21p + 20 = 0$$

$$(p + 5)(p - 1)(p - 4) = 0$$

$$p = -5 \text{ atau } p = 1 \text{ atau } p = 4$$

Maka nilai terbesar  $w + z$  adalah 4.

7. Jawaban : D

$$x^4 - 4x = 1$$

$$x^4 + 2x^2 + 1 = 2x^2 + 4x + 1 + 1$$

$$(x^2 + 1)^2 = 2(x + 1)^2$$

$$(x^2 + \sqrt{2}x + \sqrt{2} + 1)(x^2 - \sqrt{2}x - \sqrt{2} + 1) = 0$$

$x^2 + \sqrt{2}x + \sqrt{2} + 1$  merupakan definit positif (selalu bernilai positif) karena memiliki nilai diskriminan  $D = (\sqrt{2})^2 - 4(1)(\sqrt{2} + 1) < 0$  dan koefisien  $x^2$  juga positif.

Karena  $x^2 + \sqrt{2}x + \sqrt{2} + 1$  definit positif, maka haruslah  $x^2 - \sqrt{2}x - \sqrt{2} + 1 = 0$

Karena  $a$  dan  $b$  akar-akarnya, maka  $a + b = \sqrt{2}$

8. Jawaban : C

▪ Jika  $c \geq 0$

$$ab + c = 97$$

$$|a + b| + 97 - ab = 19$$

$$ab - |a + b| - 78 = 0$$

• Jika  $a + b \geq 0$

$$ab - a - b - 78 = 0$$

$$(a - 1)(b - 1) = 79$$

Karena 79 bilangan prima maka pasangan  $(a, b)$  yang mungkin adalah  $(2, 80)$ ,  $(80, 2)$ ,  $(0, -78)$  dan  $(-78, 0)$ .

Pasangan  $(0, -78)$  dan  $(-78, 0)$  tidak memenuhi karena  $a + b < 0$ . Kontradiksi

Pasangan  $(2, 80)$  dan  $(80, 2)$  tidak memenuhi karena  $c = 97 - ab < 0$ . Kontradiksi.

- Jika  $a + b < 0$   
 $ab + a + b = 78$   
 $(a + 1)(b + 1) = 79$   
 Karena 79 merupakan bilangan prima maka pasangan  $(a, b)$  yang mungkin adalah  $(0, 78)$ ,  $(78, 0)$ ,  $(-2, -80)$  dan  $(-80, -2)$ .  
 Pasangan  $(0, 78)$  dan  $(78, 0)$  tidak memenuhi karena  $a + b > 0$ . Kontradiksi  
 Pasangan  $(-2, -80)$  dan  $(-80, -2)$  tidak memenuhi karena  $c = 97 - ab < 0$ . Kontradiksi.
- Jika  $c < 0$   
 $ab - c = 97$   
 Syarat yang harus dipenuhi adalah  $ab - 97 < 0$  atau  $ab < 97$   
 $|a + b| + ab - 97 = 19$   
 $ab + |a + b| = 116$ 
  - Jika  $a + b \geq 0$   
 $ab + a + b - 116 = 0$   
 $(a + 1)(b + 1) = 117 = 3^2 \cdot 13$   
 Pasangan  $(a, b)$  yang memenuhi adalah  $(0, 116)$ ,  $(116, 0)$ ,  $(2, 38)$ ,  $(38, 2)$ ,  $(8, 12)$ ,  $(12, 8)$
  - Jika  $a + b < 0$   
 $ab - a - b = 116$   
 $(a - 1)(b - 1) = 117 = 3^2 \cdot 13$   
 Pasangan  $(a, b)$  yang memenuhi adalah  $(0, -116)$ ,  $(-116, 0)$ ,  $(-2, -38)$ ,  $(-38, -2)$ ,  $(-8, -12)$ ,  $(-12, -8)$ .

Banyaknya pasangan tripel bilangan bulat  $(a, b, c)$  yang memenuhi ada 12.

9. Jawaban : A

- Untuk larutan A.  
 Banyaknya larutan =  $(4 + \frac{m}{n})$  liter  
 Banyaknya garam =  $(45\% \cdot 4 + k\% \cdot \frac{m}{n})$  liter =  $(\frac{180}{100} + \frac{km}{100n})$  liter  
 Agar komposisi larutan menjadi 50% maka  $\frac{1}{2}(4 + \frac{m}{n}) = \frac{180}{100} + \frac{km}{100n}$ .  
 $200n + 50m = 180n + km$   
 $km - 50m = 20n \quad \dots (1)$
  - Untuk larutan B.  
 Banyaknya larutan =  $(5 + 1 - \frac{m}{n})$  liter =  $(6 - \frac{m}{n})$  liter  
 Banyaknya garam =  $(48\% \cdot 5 + k\% \cdot (1 - \frac{m}{n}))$  liter =  $(\frac{240}{100} + \frac{k}{100} - \frac{km}{100n})$  liter  
 Agar komposisi larutan menjadi 50% maka  $\frac{1}{2}(6 - \frac{m}{n}) = \frac{240}{100} + \frac{k}{100} - \frac{km}{100n}$   
 $300n - 50m = 240n + kn - km$   
 $km - 50m = kn - 60n \quad \dots (2)$
- Substitusikan persamaan (1) ke (2) didapat  
 $20n = kn - 60n$   
 $80n = kn$   
 Karena  $n \neq 0$  maka  $k = 80$   
 Substitusikan  $k = 80$  ke persamaan (1) didapat  $3m = 2n$   
 Karena  $m$  dan  $n$  relatif prima maka  $m = 2$  dan  $n = 3$ .  
 Jadi,  $k + m + n = 80 + 2 + 3 = 85$ .

10. Jawaban : B

$$x = \sqrt{x - \frac{1}{x}} + \sqrt{1 - \frac{1}{x}} \quad \dots (1)$$

Akar dari suatu bilangan tidak mungkin negatif. Karena  $x \neq 0$ , maka  $x > 0$

Dengan mengkuadratkan persamaan (1):

$$\begin{aligned}x^2 &= x - \frac{1}{x} + 1 - \frac{1}{x} + 2\sqrt{x - 1 - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}} \\x^3 &= x^2 + x - 2 + 2\sqrt{x^3 - x^2 - x + 1} \\(x^3 - x^2 - x + 1) - 2\sqrt{x^3 - x^2 - x + 1} + 1 &= 0 \\(\sqrt{x^3 - x^2 - x + 1} - 1)^2 &= 0 \\x^3 - x^2 - x + 1 &= 1 \\x(x^2 - x - 1) &= 0\end{aligned}$$

Karena  $x \neq 0$ , maka  $x^2 - x - 1 = 0$ , maka  $x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

Karena  $x$  harus positif ( $x > 0$ ) maka  $x$  yang memenuhi  $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ .

Perlu dicek ke persamaan (1) untuk memastikan apakah  $x$  memenuhi atau tidak.