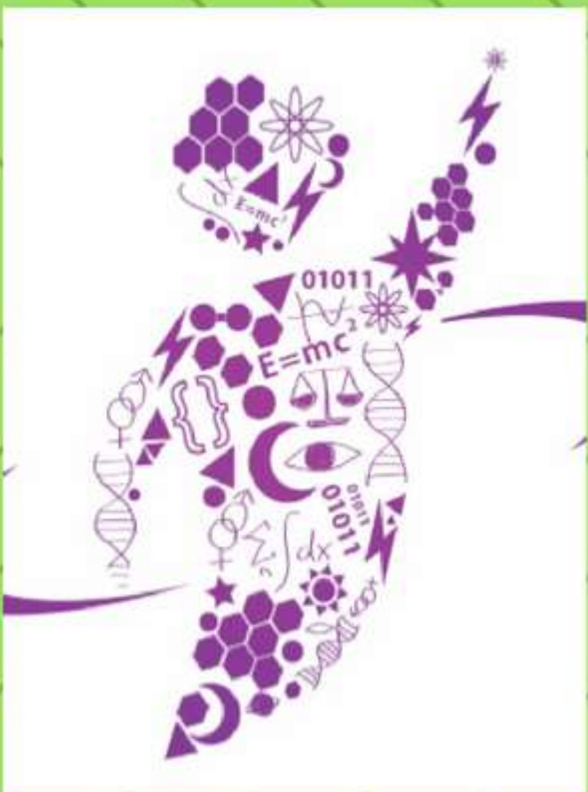
PAKET 11

PELATIHAN ONLINE

2019

SMA
FISIKA

po.alcindonesia.co.id



WWW.ALCINDONESIA.CO.ID

@ALCINDONESIA

085223273373

MEKANIKA BENDA LANGIT I

Gaya gravitasi merupakan gaya interaksi antar benda bermassa. Besar gaya gravitasi (gaya interakasi antar massa) yang dirasakan sama untuk antar benda. Terdapat perbedaan antara gravitasi (*gravitation*) dan gravitas (*gravity*). Perbedaan yang signifikan dari gravitasi dan gravitas adalah definisinya. Gravitasi merupakan gaya tarik menarik antara 2 massa secara general. Sedangkan gravitas, resultan gaya antara massa dengan Bumi. Diketahui bahwa massa Bumi M dan radius R serta massa m. Contohnya seperti ini. Gaya gravitasi merupakan gaya antar kita dengan Bumi. Namun, kita tahu bahwa Bumi juga berputar, pastinya ada gaya sentripetal, belum lagi gaya gravitasi dengan planet-planet selain Bumi. Maka, definisi gaya gravitas adalah gaya resultan dari semua gaya yang terjadi pada kita, yaitu gaya gravitasi dengan bumi, gaya sentripetal, dan lain lain.

GRAVITASI NEWTON

Hukum Universal Gravitasi Newton

"tiap massa partikel menari massa partikel lain dengan besar gaya yang berbending lurus dengan perkalian massa mereka dan berbanding terbalik dengan jarak kuadrat mereka"

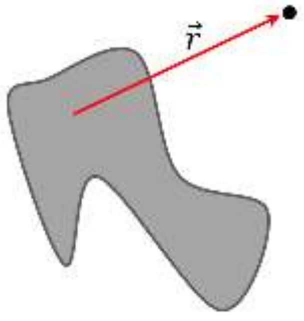
$$\vec{F} = -G\frac{Mm}{r^2}\hat{r}$$

Diatas merupakan formula untuk benda-benda yang diskret (tidak kontinu). Komponen G merupakan komponen yang disebut sebagai konstanta universal gravitasi dan konstan. Disamping gaya, terdapat juga medan gravitasi (percepatan gravitasi). Medan gravitasi dinotasikan dengan huruf g dan merupakan besaran vektor. Medan gravitasi didefinisikan sebagai gaya gravitasi per massa untuk suatu partikel m di kerangka massa M.

$$\vec{g} = -G\frac{M}{r^2}\hat{r}$$

Diatas merupakan kasus jika diskret. Tanda negatif pada gaya dan medan gravitasi menandakan bahwa arahnya menarik benda.

Persamaan Gravitasi untuk Massa Kontinu



Terlihat sekali bahwa objek merupakan massa kontinu. Persamaan Newton sebelumnya hanya berlaku untuk massa titik saja. Kita akan sedikit modifikasi persamaa medan gravitasinya.

$$d\vec{g} = -G\frac{dM}{r^2}\hat{r}$$

$$\vec{g} = -G\int\frac{\rho\, dV}{r^2}\hat{r}$$

Persamaan diatas sangat *co*

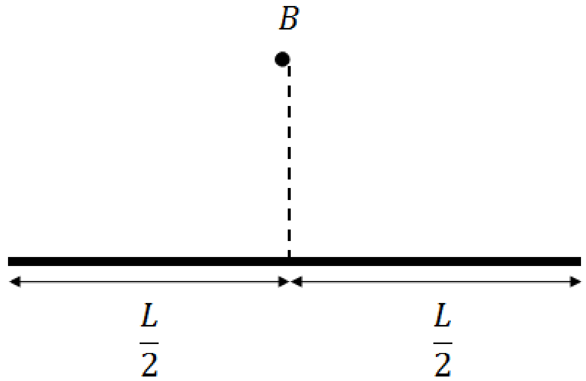
$$\vec{g} = -G\int \frac{\rho\, dV}{r^2}\hat{r}\ atau\ G\int \frac{\sigma\, dA}{r^2}\hat{r}\ atau\ G\int \frac{\lambda\, dl}{r^2}\hat{r}$$

Lalu, bagaimana dengan $\vec{F}$? Untuk mencari F tidak sesederhana yang dikira. Karena kita masih terkait dengan massa kontinu, maka persamaa F adalah

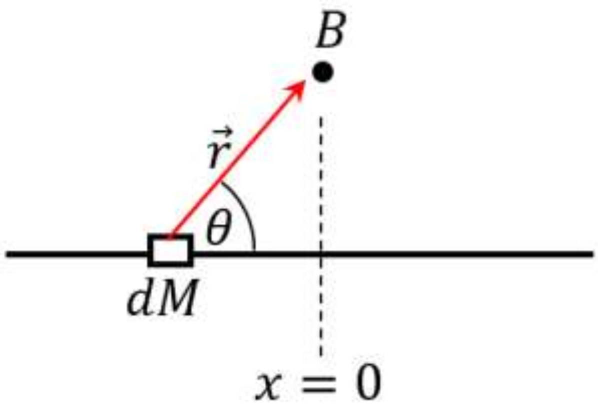
$$\vec{F} = \int \vec{g}\, dm = -G\int \left(\int \frac{\rho\, dV}{r^2}\hat{r}\right) dm$$

Karena dm merupakan infinitesimal massa, maka dm pun dapat terkait dengan jenis massanya, apakah massa volume, massa luasan bahkan massa panjang. Komponen $\vec{r}$ merupakan vektor dari dM (infinitesimal massa) menuju titik sembarang.

Sebuah kawat homogen dengan massa per satuan panjang sebesar λ mempunyai panjang sebesar L. Tentukan percepatan gravitasi di titik B akibat batang. Jarak titik tengah batang dengan titik B sebesar a. Nyatakan dalam vektor.



Dari kasus diatas, jelas kita tahu bahwa percepatan arah x bernilai 0 akibat simetris, berbeda dengan arah y.



$$\vec{g} = -G\int \frac{\lambda\, dl}{r^2}\hat{r}$$

$$\vec{g} = -G\int \frac{\lambda dx}{x^2+a^2}(\cos\theta\,\hat{x} + \sin\theta\,\hat{y})$$

$$\vec{g} = -G\lambda\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{3/2}}(x\hat{x} + L\hat{y})$$

$$\vec{g}_x = -G\lambda\int \frac{xdx}{(x^2+a^2)^{3/2}}\hat{x}$$

$$\vec{g}_y = -GL\lambda\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{3/2}}\hat{y}$$

$$\vec{g}_x = -G\lambda\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{}{(x^2+a^2)^{3/2}}$$

Gunakan subtitusi dimana $u = x^2 + L^2$. Maka akan didapatkan bahwa $\vec{g}_x = 0$

$$\vec{g}_y = -GL\lambda \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{dx}{(x^2+a^2)^{3/2}} \hat{y}$$

Gunakan subtitusi trigonometri dimana $x = L\tan\varphi$. Maka akan didapatkan bahwa

$$\vec{g}_y = -\frac{G\lambda}{a}\frac{L}{\sqrt{a^2+\frac{L^2}{4}}}\hat{y}$$

POTENSIAL GRAVITASI

Potensial gravitasi merupakan negatif dari medan gravitasi dikali posisi r. Pada konsepnya, kita tidak bisa mencari dengan tepat nilai dari potensial gravitasi (nanti juga akan berlaku pada magnet dan listrik), tapi kita bisa mencari perbedaan potensial gravitasi. Potensial gravitasi biasanya dilambangkan dengan notasi Φ (dibaca : phi).

$$g = -\frac{d\Phi}{dr}$$

$$\Delta\Phi = -\int \vec{g}\cdot d\vec{r}$$

Untuk mencari potensial gravitasi di suatu titik d, kita dapat gunakan pembanding di jarak ∞, karena di jarak ini, nilai potensial gravitasi 0 (sesuai kondisi).

$$\Phi_d - \Phi_\infty = \int_\infty^d \frac{GM}{r^2}dr$$

$$\Phi_d - 0 = \frac{GM}{d} - 0$$

$$\Phi_d = -\frac{GM}{d}$$

Kita dapat mencari dengan tepat nilai potensial gravitasi jika kita punya pembanding dimana nilai potensialnya 0, yaitu di titik tak hingga. Namun juga ada kasus dimana tidak ada titik yang potensial gravitasinya 0. Maka, perlu nilai pembanding atau *reference point* untuk dijadikan titik asal potensial gravitasi.

Kita juga dapat mencari besar potensial dengan gravitasi Newton

$$\Phi = -G\int \frac{\rho dV}{r}$$

Ada juga energi potensial. Ini sudah kita bahas di materi sebelumnya, dimana kita mempunyai hubungan antara gaya dengan energi potensial

$$F = -\frac{dU}{dr}$$

GRAVITASI GAUSS

Bedanya dengan gravitasi Newton adalah

- ✓ Formula Gauss lebih mudah untuk digunakan
- ✓ Hanya berlaku pada benda kontinu yang simetris sederhana (tabung, bola, lempengan)

Teorema Gauss

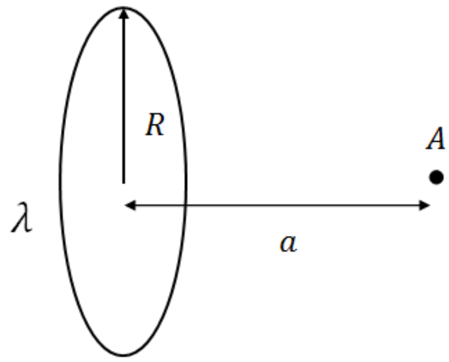
$$\oint g\, dA = 4\pi G M_{enc}$$

Integral tertutup memberi makna bahwa kita akan melakukan integral untuk suatu kurva yang tertutup/*loop* (tidak terbuka). Dalam formula ini, akan ada suatu luasan semu/fiktif untuk mengerjakkannya. Komponen M_{enc} (dibaca : M *enclosed*) merupakan massa total didalam luasan semu tersebut. Sedangkan komponen dA merupakan luasan semu tersebut, tepatnya luasan yang ditembus oleh garis-garis medan gravitasi.

SOAL

Untuk nomor 1 dan 2

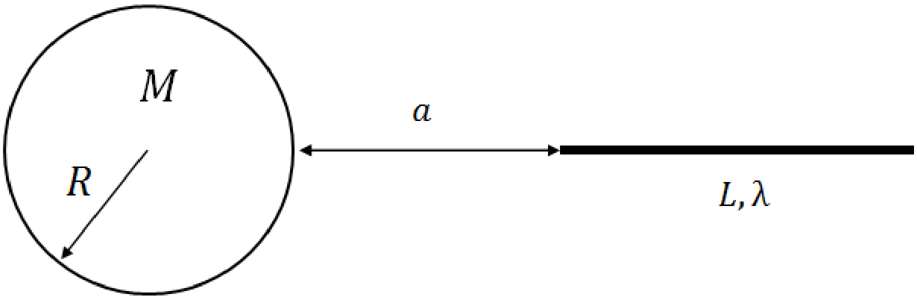
Terdapat sebuah kawat berbentuk lingkaran (cincin) dengan radius R yang homogen, dengan distribusi massa λ.



1. Tentukan medan gravitasi di titik A.
   a. $\frac{2\pi RG\lambda a}{(a^2+R^2)^{3/2}}$
   b. $\frac{3\pi RG\lambda a}{2(a^2+R^2)^{3/2}}$
   c. $\frac{G\lambda}{a+R}$
   d. $\frac{RG\lambda(a+R)}{(a^2+R^2)^{3/2}}$
   e. $\frac{\pi G\lambda a}{a^2+R^2}$

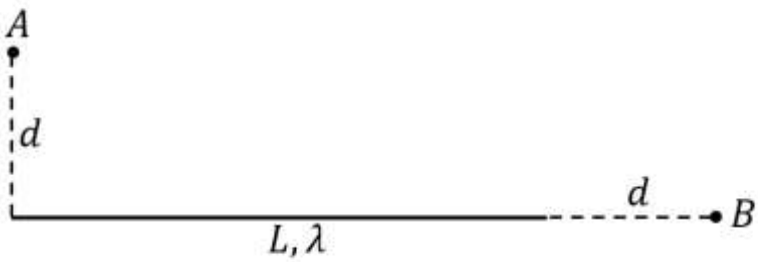
2. Jika terdapat sebuah partikel bermassa m di titik A, namun terdapat kondisi dimana $a \ll R$. Maka benda akan berosislasi di sekitar pusat massa cincin. Tentukan periode osilasinya.
   a. $T = \pi R\sqrt{\frac{R+a}{\pi GR\lambda}}$
   b. $T = 2\pi R\sqrt{\frac{1}{2\pi G\lambda}}$
   c. $T = 2\pi R\sqrt{\frac{(R+a)}{2G\lambda a}}$
   d. $T = \pi R\sqrt{\frac{3R}{aG\lambda}}$
   e. $T = 2\pi R\sqrt{\frac{2}{G\lambda}}$

3. Terdapat sebuah planet yang homogen dengan massa M dan radius R. Di sisi lain, terdapat batang raksasa homogen dengan panjang L dan massa per satuan panjang λ. Batang ini terpisah dengan planet dengan suatu jarak tertentu dan segera menumbuk sisi planet. Tentukan kecepatan saat batang menumbuk sisi planet.



a. $v = \frac{2GM}{L} \ln\left(\frac{(a+R)(R+L)}{R(a+R+L)}\right)$
b. $v = \frac{3GM}{L+a} \ln\left(\frac{(a+L)(2R+L)}{(a+L)(a+2R+L)}\right)$
c. $v = \frac{GML}{(a+L+R)^2}$
d. $v = \frac{2\pi GM}{R} \ln\left(\frac{(2R+L)}{(a+2R+L)}\right)$
e. $v = \frac{3GM}{2L} \ln\left(\frac{a+R}{R}\right)$

Untuk nomor 4 dan 5
Terdapat sebuah batang homogen dengan panjang L dan massa per satuan panjang λ.



4. Tentukan medan gravitasi yang dirasakan pada titik A sumbu x
   a. $\vec{g} = -G\lambda\left[\left(\frac{1}{d} - \frac{1}{\sqrt{d^2+\frac{1}{4}L^2}}\right)\hat{x} - \left(\frac{1}{d+L}\right)\hat{y}\right]$
   b. $g = G\lambda \frac{L}{d}\frac{1}{\sqrt{d^2+L^2}}$
   c. $g = G\lambda\left(\frac{1}{d} - \frac{1}{d+L}\right)$
   d. $\vec{g} = G\lambda\left[\left(\frac{1}{\sqrt{d^2+L^2}}\right)\hat{x} + \left(\frac{L}{d}\frac{1}{\sqrt{d^2+L^2}}\right)\hat{y}\right]$
   e. $\vec{g} = \frac{G\lambda L}{d}\frac{1}{\sqrt{d^2+\frac{1}{4}L^2}}\hat{y}$

5. Tentukan besar medan gravitasi yang dirasakan pada titik A sumbu y

a. $\vec{g} = -G\lambda\left[\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{\sqrt{a^2+\frac{1}{4}L^2}}\right)\hat{x} - \left(\frac{1}{a+L}\right)\hat{y}\right]$
b. $g = G\lambda\frac{L}{a}\frac{1}{\sqrt{a^2+L^2}}$
c. $g = -G\lambda\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a+L}\right)$
d. $\vec{g} = G\lambda\left[\left(\frac{1}{\sqrt{a^2+L^2}}\right)\hat{x} + \left(\frac{L}{a}\frac{1}{\sqrt{a^2+L^2}}\right)\hat{y}\right]$
e. $\vec{g} = \frac{G\lambda L}{a}\frac{1}{\sqrt{a^2+\frac{1}{4}L^2}}\hat{y}$

6. Tentukan besar medan gravitasi yang dirasakan pada titik B.
   a. $\vec{g} = -G\lambda\left[\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{\sqrt{a^2+\frac{1}{4}L^2}}\right)\hat{x} - \left(\frac{1}{a+L}\right)\hat{y}\right]$
   b. $\vec{g} = G\lambda\left[\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{\sqrt{a^2+L^2}}\right)\hat{x} - \left(\frac{L}{a}\frac{1}{\sqrt{a^2+L^2}}\right)\hat{y}\right]$
   c. $\vec{g} = -G\lambda\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a+L}\right)\hat{x}$
   d. $\vec{g} = G\lambda\left[\left(\frac{1}{\sqrt{a^2+L^2}}\right)\hat{x} + \left(\frac{L}{a}\frac{1}{\sqrt{a^2+L^2}}\right)\hat{y}\right]$
   e. $\vec{g} = \frac{G\lambda L}{a}\frac{1}{\sqrt{a^2+\frac{1}{4}L^2}}\hat{y}$

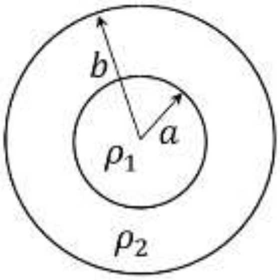
Untuk nomor 6 dan 7
Terdapat sebuah piringan (disk) berbentuk lingkarang homogen dengan radius R dan massa per satuan luas σ. Terdapat titik sembarang yang berjarak a tegak lurus terhadap pusat massa disk.

7. Tentukan besar medan gravitasi di titik tersebut.
   a. $g = 2\pi aG\sigma\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{\sqrt{a^2+R^2}}\right)$
   b. $g = \frac{1}{2}\pi G\sigma$
   c. $g = \pi aG\sigma\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{\sqrt{a^2+4R^2}}\right)$
   d. $g = 4\pi aG\sigma\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{\sqrt{a^2+4R^2}}\right)$
   e. $g = 2\pi G\sigma a\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{R}\right)$

8. Terdapat suatu cincin dengan radius R dan distribusi massa λ terletak pada bidang horizontal. Terdapat suatu titik sembarang A yang terletak L dari pusat massa cincin dan sebidang dengan horizontal. Tentukan besar potensial gravitasi di titik tersebut. Aproksimasi variabel $\frac{R^3}{L^3} \approx 0$ dan orde diatasnya.
   a. $\Phi = -\frac{2\pi G\lambda R}{L}\left(1 + \frac{R^2}{L^2}\right)$

b. $\Phi = \frac{2\pi G\lambda R}{L}\left(1 - \frac{2R}{L}\right)$
c. $\Phi = -2\pi G\lambda\left(1 - \frac{1}{4}\frac{R^2}{L^2}\right)$
d. $\Phi = \frac{G\lambda R}{L+R}\left(1 + \frac{R}{L}\right)$
e. $\Phi = -\frac{\pi G\lambda R}{L}\left(2 + \frac{1}{4}\frac{R^2}{L^2}\right)$

Untuk nomor 9, 10 dan 11
Terdapat sebuah planet bola unik yang tersusun atas dua massa jenis yang berbeda, tapi homogen. Untuk $0 < r < a$ memiliki massa jenis ρ_1 dan $a < r < b$ memiliki massa jenis ρ_2.



9. Tentukan besar medan gravitasi untuk $r > b$.
   a. $g = \frac{4}{3}\pi G\rho_1 r$
   b. $g = \frac{4\pi G}{3r^2}\left(a^3(\rho_1 - \rho_2) + \rho_2 r^3\right)$
   c. $g = \frac{4\pi G}{3r^2}\left(a^3(\rho_1 - \rho_2) + \rho_2 b^3\right)$
   d. $g = \frac{\pi G}{a^2}\left(b^3(\rho_1 + \rho_2) - \rho_2 r^3\right)$
   e. $g = \frac{4\pi G}{3r^2}a^3(\rho_1 - \rho_2)$

10. Tentukan besar medan gravitasi untuk $a < r < b$.
   a. $g = \frac{4}{3}\pi G\rho_1 r$
   b. $g = \frac{4\pi G}{3r^2}\left(a^3(\rho_1 - \rho_2) + \rho_2 r^3\right)$
   c. $g = \frac{4\pi G}{3r^2}\left(a^3(\rho_1 - \rho_2) + \rho_2 b^3\right)$
   d. $g = \frac{\pi G}{a^2}\left(b^3(\rho_1 + \rho_2) - \rho_2 r^3\right)$
   e. $g = \frac{4\pi G}{3r^2}a^3(\rho_1 - \rho_2)$

11. Tentukan besar medan gravitasi untuk $r < a$.
   a. $g = \frac{4}{3}\pi G\rho_1 r$
   b. $g = \frac{4\pi G}{3r^2}\left(a^3(\rho_1 - \rho_2) + \rho_2 r^3\right)$
   c. $g = \frac{4\pi G}{3r^2}\left(a^3(\rho_1 - \rho_2) + \rho_2 b^3\right)$
   d. $g = \frac{\pi G}{a^2}\left(b^3(\rho_1 + \rho_2) - \rho_2 r^3\right)$
   e. $g = \frac{4\pi G}{3r^2}a^3(\rho_1 - \rho_2)$