PAKET 6

PELATIHAN ONLINE 2019

SMA
MATEMATIKA

po.alcindonesia.co.id

WWW.ALCINDONESIA.CO.ID

@ALCINDONESIA

085223273373

PEMBAHASAN PAKET 6

1. Banyaknya pasangan terurut bilangan asli (a, b, c) dengan $a, b, c \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ sehingga
$$max\{a, b, c\} < 2\, min\{a, b, c\}$$
adalah ...
a. 23
b. 35
c. 17
d. 28
Solusi:
WLOG $a \leq b \leq c$, maka diperoleh $c < 2a$
(a) Jika $a = 1$ maka $c = 1$ dan $b = 1$, maka diperoleh pasangan (1, 1, 1).
(b) Jika $a = 2$ maka
• $c = 2$ dan $b = 2$, diperoleh pasangan (2, 2, 2)
• $c = 3$ dan $b = 2, 3$, diperoleh pasangan (2, 2, 3) dan (2, 3, 3) ada sebanyak $2 \times 3 = 6$ pasangan.
(c) Jika $a = 3$ maka
• $c = 3$ dan $b = 3$, diperoleh pasangan (3, 3, 3)
• $c = 4$ dan $b = 3, 4$, diperoleh pasangan (3, 3, 4) dan (3, 4, 4) ada sebanyak $2 \times 3 = 6$ pasangan.
• $c = 5$ dan $b = 3, 4, 5$, diperoleh pasangan (3, 3, 5),(3, 4, 5) dan (3, 5, 5) ada sebanyak $3 + 6 + 3 = 12$ pasangan.
(d) Jika $a = 4$ maka
• $c = 4$ dan $b = 4$, diperoleh pasangan (4, 4, 4)
• $c = 5$ dan $b = 4, 5$, diperoleh pasangan (4, 4, 5) dan (4, 5, 5) ada sebanyak $2 \times 3 = 6$ pasangan.
(e) Jika $a = 5$ maka $c = 5$ dan $b = 5$, maka diperoleh pasangan (5, 5, 5).
Jadi, total ada $1 + 7 + 19 + 7 + 1 = 35$ pasangan.

2. Diketahui a, b, c akar dari persamaan $x^3 - 5x^2 - 9x + 10 = 0$. Jika sukubanyak $P(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx - 2015$ memenuhi $P(a) = b + c, P(b) = a + c, P(c) = a + b$, maka nilai dari B adalah ....
a. 1010
b. 1817
c. 2625
d. 1456

Solusi:
$x^3 - 5x^2 - 9x + 10 = 0$ akar-akarnya a, b dan c
$a + b + c = 5$
$P(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx - 2015$
$P(a) = b + c = 5 - a$
$Aa^3 + Ba^2 + Ca - 2015 = 5 - a$
$Aa^3 + Ba^2 + (C + 1)a - 2020 = 0 \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$
$P(b) = a + c = 5 - b$
$Ab^3 + Bb^2 + Cb - 2015 = 5 - a$
$Ab^3 + Bb^2 + (C + 1)b - 2020 = 0 \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$
$P(c) = a + b = 5 - c$
$Ac^3 + Bc^2 + Cc - 2015 = 5 - a$
$Ac^3 + Bc^2 + (C + 1)c - 2020 = 0 \cdots\cdots\cdots\cdots (3)$
Berdasarkan (1), (2) dan (3) maka $Ax^3 + Bx^2 + (C + 1)x - 2020 = 0$ juga akan memiliki akar-akar a, b dan c
Dengan membandingkan persamaan di atas dengan persamaan
$x^3 - 5x^2 - 9x + 10 = 0$ didapat $A = -202$; $B = -202(-5) = 1010$ dan $C + 1 = -202(-9) = 1818$ sehingga $C = 1817$
∴ Jadi, nilai B adalah 1010

3. Kotak-kotak pada papan berukuran m□m akan diwarnai dengan warna biru atau merah. Suatu kuartet adalah kumpulan empat kotak yang berada pada perpotongan dua kolom dan dua baris pada papan. Bilangan asli terbesar m sehingga terdapat pewarnaan papan dimana tidak ada kuartet dengan keempat kotak berwarna sama adalah …
   a. 1
   b. 2
   c. 3
   d. 4

   Solusi:
   Untuk $m = 4$, dapat digambarkan sebagai berikut :
   M = Merah
   B = Biru

B	M	B	M
B	B	M	M
M	M	B	B
M	B	B	M

Untuk $m = 5$, tidak memenuhi dan dapat digambarkan sebagai berikut :

B	M	B	M	B
B	B	M	M	M
M	M	B	B	M
M	B	B	M	B

Jadi, bilangan asli terbesar m sehingga terdapat pewarnaan papan dimana tidak ada kuartet dengan keempat kotak berwarna sama adalah 4

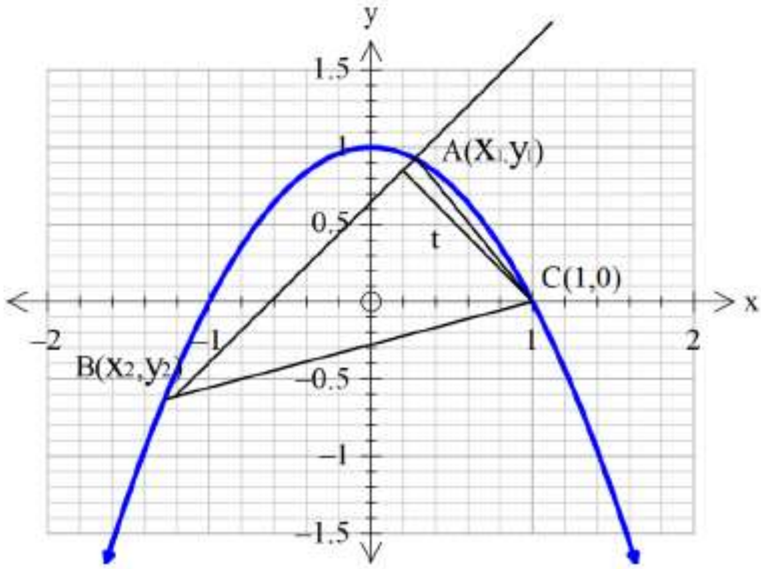
4. Banyaknya bilangan asli $n \in \{1, 2, 3, \cdots, 1000\}$ sehingga terdapat bilangan real positif x yang memenuhi $x^2 + \lfloor x^2 \rfloor = n$ adalah ...
   a. 516
   b. 526
   c. 536
   d. 546
   Solusi:
   Perhatikan bahwa $x^2 = n - \lfloor x^2 \rfloor$ sehingga x^2 adalah bilangan bulat positif. Oleh karena itu, $x = \sqrt{a}$ untuk suatu bilangan a bulat positif. Misalkan $a = k^2 + m$ dengan $0 \leq m \leq 2k$, maka diperoleh
   $$n = k^2 + m + k^2 = 2k^2 + m$$
   Untuk $k = 1, 2, 3, \cdots, 21$ maka nilai n yang mungkin ada sebanyak
   $$\sum_{k=1}^{21} (2k + 1) = 483$$
   Sedangkan untuk $k = 22$ perlu diperhatikan bahwa nilai m yang mungkin hanya $m = 0, 1, 2, 3, \cdots, 32$. Jadi ada 33 nilai n yang mungkin.
   Untuk $k \geq 23$ akan berakibat $n > 1000$.
   Jadi, total banyaknya kemungkinan nilai n adalah $483 + 33 = 516$

5. Bilangan x adalah bilangan bulat positif terkecil yang membuat
   $$31^n + x \,.\, 96^n$$
   merupakan kelipatan 2015 untuk setiap bilangan asli n. Nilai x adalah ....
   a. 1436
   b. 1643
   c. 1364
   d. 1463
   Solusi:
   $31^n + x \,.\, 96^n$ habis dibagi $2015 = 5 \cdot 13 \cdot 31$ maka
   $31^n + x \,.\, 96^n \equiv 1^n + x \cdot 1^n \ (mod\ 5) \equiv 1 + x \ (mod\ 5)$

Jadi, $x \equiv -1 \ (mod\ 5)$
$31^n + x \,.\, 96^n \equiv 5^n + x \cdot 5^n \ (mod\ 13)$
Jadi, $x \equiv -1 \ (mod\ 13)$
$31^n + x \,.\, 96^n \equiv x \cdot 3^n \ (mod\ 31)$
$FPB\ (3, 31) = 1$ maka $x \equiv 0 \ (mod\ 31)$
Maka $x = 31a$ dengan $a \in N$
$31a \equiv -1 \ (mod\ 13)$
$5a \equiv -1 \ (mod\ 13)$
$a = 13b + 5$ dengan $b \in N$
$x = 31(13b + 5) = 403b + 155$
$403b + 155 \equiv -1 \ (mod\ 5)$
$403b \equiv -1 \ (mod\ 5)$
$3b \equiv -1 \ (mod\ 5)$
Maka $b = 5c + 3$
$x = 403b + 65 = 403(5c + 3) + 155 = 2015c + 1364$ dengan $c \in N$
∴ Jadi, nilai terkecil x yang memenuhi adalah 1364

6. Misalkan k suatu bilangan real sehingga $-1 < k < 1$. Garis $y = x + k$ memotong kurva $y = 1 - x^2$ di A dan B. Jika C menyatakan titik (1,0), maka luas terbesar yang mungkin dimiliki oleh segitiga ABC adalah ….
   a. $\frac{4}{3}\sqrt{3}$
   b. $\frac{3}{4}\sqrt{3}$
   c. $\sqrt{3}$
   d. $\frac{2}{3}\sqrt{3}$

   Solusi:



Tentukan titik potong kedua kurva :

$y_1 = y_2$

$x + k = 1 - x^2$

$x^2 + x + k - 1 = 0$

$(x_1 - x_2) = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2} = \sqrt{5 - 4k}$

$y_1 = x_1 + k$

$y_2 = x_2 + k$

Diperoleh, $(y_1 - y_2) = (x_1 - x_2)$

Cari tinggi segitiga ABC menggunakan jarak titik ke garis didapat :

$t = \frac{k+1}{\sqrt{2}}$

Cari alas segitiga ABC menggunakan jarak 2 titik didapat :

$a = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$

$a = \sqrt{2(x_1 - x_2)^2}$

$a = \sqrt{2(5 - 4k)}$

Maka Luas segitiga ABC didapat :

$L = \frac{1}{2}.a.t$

$L = \frac{1}{2}\left(\sqrt{2(5-4k)}\right)\left(\frac{k+1}{\sqrt{2}}\right)$

Agar luas segitiga maksimum $\rightarrow$ $L' = 0$

Didapat $k = \frac{1}{2}$

Sehingga Luas maksimum $= \frac{3}{4}\sqrt{3}$

7. Diketahui susunan 4 × 5 titik yang jarak ke kanan sama dan jarak ke bawah sama. Ada berapa segitiga (dengan luas positif) yang titik-titik sudutnya adalah ketiga titik pada susunan tersebut?

a. 1140
b. 1056
c. 1232
d. 1450

Solusi:
Segitiga dibentuk dari 3 titik. Maka banyaknya segitiga $= C_3^{20} = 1140$
Agar luas segitiga positif maka ketiga titik tidak boleh berada pada satu garis lurus. Maka akan dicari banyaknya 3 titik yang berada pada satu garis lurus.
• Pada arah horisontal
Ada 4 buah 5 titik berada pada satu garis lurus.
Banyaknya 3 titik yang berada pada satu garis lurus $= 4 \cdot C_3^5 = 40$
• Pada arah vertikal
Ada 5 buah 4 titik berada pada satu garis lurus.
Banyaknya 3 titik yang berada pada satu garis lurus $= 5 \cdot C_3^4 = 20$
• Pada arah diagonal
* 4 titik berada pada satu garis lurus
Ada 2 buah dengan gradien 1 dan ada 2 buah dengan gradien −1.
Maka banyaknya 3 titik yang berada pada satu garis lurus $= 4 \cdot C_3^4 = 16$
* 3 titik berada pada satu garis lurus
Ada 2 buah dengan gradien 1, ada 2 buah dengan gradien −1, ada 2 buah dengan gradien 1/2 dan ada 2 buah dengan gradien −1/2
Maka banyaknya 3 titik yang berada pada satu garis lurus $= 8 \cdot C_3^3 = 8$
Maka banyaknya segitiga dengan luas positif $= 1140 - 40 - 20 - 16 - 8 = 1056$
∴ Jadi, banyaknya segitiga dengan luas positif adalah 1056

8. Diberikan fungsi real f dengan $f(x) = \frac{cx}{2x-3}, x \neq \frac{3}{2}$ dan $f\big(f(x)\big) = x$ untuk semua $x \neq \frac{3}{2}$. Nilai $f(2013)$ adalah ...

a. $\frac{6039}{4023}$
b. $\frac{6390}{4023}$

c. $\frac{6093}{4023}$
d. $\frac{6930}{4023}$

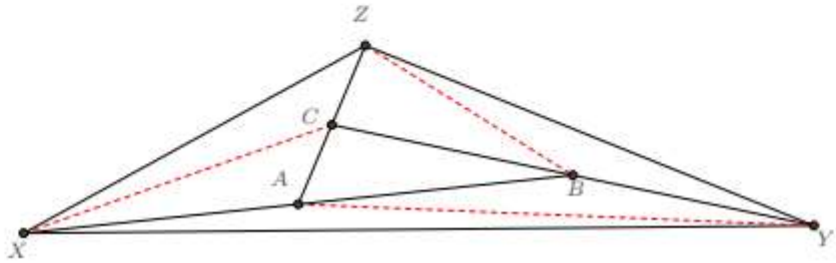
Solusi:
Dari keterangan bahwa $f\big(f(x)\big) = x$ dapat disimpulkan bahwa f adalah invers dari dirinya sendiri. Padahal $f^{-1}(x) = \frac{3x}{2x-c}$. Oleh karena itu, karena $f(x) = f^{-1}(x)$ diperoleh $c = 3$. Sehingga diperoleh $f(x) = \frac{3x}{2x-3}$ dan karenanya $f(2013) = \frac{6039}{4023}$

9. Suatu sekolah mempunyai lima kelompok belajar siswa kelas 11. Kelompok-kelompok belajar itu berturut-turut mengirimkan 2, 2, 2, 3, dan 3 siswa untuk suatu pertemuan. Mereka akan duduk melingkar sehingga setiap siswa memiliki paling sedikit satu teman dari kelompok belajar yang sama yang duduk disampingnya. Banyaknya cara melakukan hal tersebut adalah ....
a. 6912
b. 6812
c. 6219
d. 6128

Solusi:
Karena setiap siswa memiliki paling sedikit satu teman dari kelompok belajar yang sama yang duduk disampingnya maka setiap siswa dalam kelompok belajar yang sama akan duduk berdekatan. Jika setiap kelompok dinyatakan sebagai obyek maka akan ada 5 obyek yang duduk membentuk lingkaran serta ada permutasi susunan duduk siswa pada masing-masing obyek.
Banyaknya cara melakukan $= (5-1)! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 3! \cdot 3! = 6912$
∴ Jadi, banyaknya cara melakukan hal tersebut adalah 6912

10. Pada segitiga ABC, titik X, Y dan Z berturut-turut terletak pada sinar BA, CB dan AC sehingga BX = 2BA, CY = 2CB dan AZ = 2AC. Jika luas ΔABC adalah 1, maka luas ΔXYZ adalah ...
a. 5
b. 6
c. 7
d. 8

Solusi:
Perhatikan gambar berikut!



Kita punya

$$[ABC] = [ABY] = [AXY]$$
$$[ABC] = [BCZ] = [BZY]$$
$$[ABC] = [ACX] = [CZX]$$

Sehingga $[XYZ] = 7[ABC] = 7$