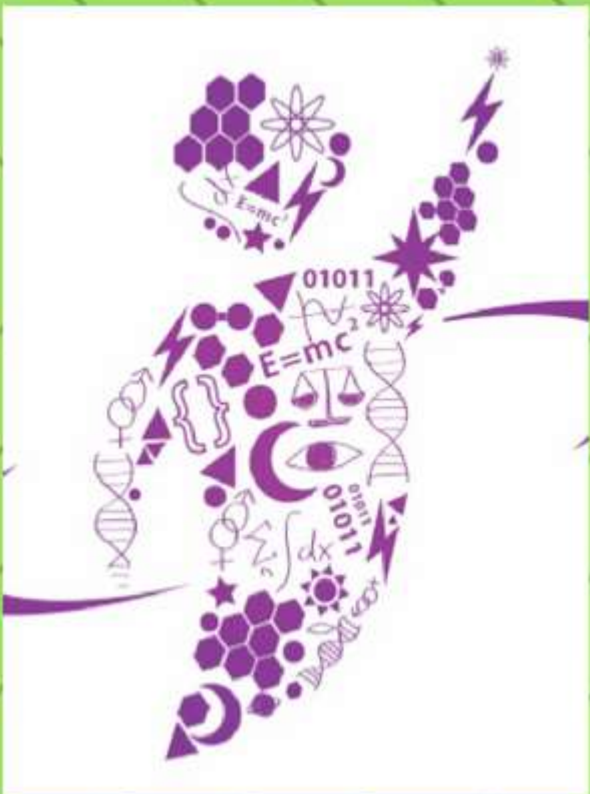
PAKET 12

PELATIHAN ONLINE

2019

SMA
MATEMATIKA

po.alcindonesia.co.id



WWW.ALCINDONESIA.CO.ID

@ALCINDONESIA

085223273373

PEMBAHASAN PAKET 12

1. Tentukan penjumlahan $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \cdots + (n-1) \cdot (n-1)! + n \cdot n!$ dinyatakan dalam n dengan $n! = n(n-1)(n-2) \cdots 2 \cdot 1$.
   a. $(n+1)! - 1$
   b. $(n-1)! - 1$
   c. $n! - 1$
   d. $(n-1)! + 1$
   Solusi:
   Misal $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \cdots + (n-1) \cdot (n-1)! + n \cdot n! = P$
   $P = (2-1) \cdot 1! + (3-1) \cdot 2! + (4-1) \cdot 3! + \cdots + (n-1) \cdot (n-1)! + (n+1-1) \cdot n!$
   $P = 2 \cdot 1! + 3 \cdot 2! + 4 \cdot 3! + \cdots + n \cdot (n-1)! + (n+1) \cdot n! - (1! + 2! + 3! + \cdots + n!)$
   $P = 2! + 3! + 4! + \cdots + (n+1)! - (1! + 2! + 3! + \cdots + n!)$
   $P = (n+1)! - 1!$
   $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \cdots + (n-1) \cdot (n-1)! + n \cdot n! = (n+1)! - 1$

2. Tentukan banyaknya semua tripel (x, y, z) yang memenuhi bahwa salah satu bilangan jika ditambahkan dengan hasil kali kedua bilangan yang lain hasilnya adalah 2.
   a. 1
   b. 2
   c. 3
   d. 4
   Solusi:
   $x + yz = 2$ ………………… (1)
   $y + xz = 2$ ………………… (2)
   $z + xy = 2$ ………………… (3)
   (1) – (2)→ $x - y + z(y - x) = 0 \rightarrow x - y - z(x - y) = 0$
   $(z - 1)(x - y) = 0 \rightarrow$ Maka $z = 1$ atau $x = y$
   · Untuk $z = 1$
   $x + y = 1$
   $1 + xy = 2$

$x\,(1 - x) = 1 \rightarrow x^2 - x + 1 = 0$ (tidak ada penyelesaian real sebab Diskriminan < 0)

・Untuk $x = y$

$x + xz = 2$

$z + x2 = 2$

$x - z + x(z - x) = 0$

$(x - 1)(x - z) = 0 \rightarrow x = 1$ atau $x = z$

* Untuk $x = 1$

$y = x = 1 \rightarrow z + 1 = 2 \rightarrow z = 1$ tripel (x, y, z) yang memenuhi adalah $(1, 1, 1)$

* untuk $x = z$

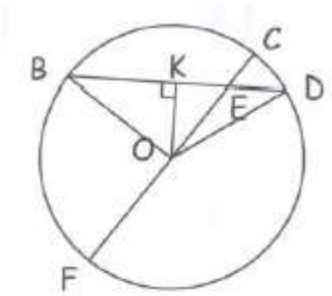
$y = x = z \rightarrow x^2 + x = 2 \rightarrow (x - 1)(x + 2) = 0 \rightarrow x = 1$ atau $x = 2$

tripel yang memenuhi adalah $(1, 1, 1)$ dan $(-2, -2, -2)$

Jadi terdapat 2 buah tripel (x, y, z) yang memenuhi yaitu $(1, 1, 1)$ dan $(-2, -2, -2)$

3. DEB adalah tali busur suatu lingkaran dengan DE = 3 dan EB = 5. Misalkan O adalah pusat lingkaran. Hubungkan OE dan perpanjangan OE memotong lingkaran di titik C. Diketahui EC = 1. Tentukan radius lingkaran tersebut.
   a. 3
   b. 5
   c. 8
   d. 10

   Solusi:



Misalkan radius lingkaran tersebut $= r$

Perpanjang OC sehingga memotong lingkaran di titik F. Maka CF adalah diameter lingkaran.

Segi empat CBFD adalah segiempat tali busur dengan E adalah perpotongan kedua diagonal maka berlaku :

$CE \cdot EF = DE \cdot EB$

$CE \cdot (2r - CE) = DE \cdot EB$

$1 \cdot (2r - 1) = 3 \cdot 5$
$r = 8$

4. Tentukan banyaknya semua bilangan real a yang memenuhi bahwa dua polinomial $x^2 + ax + 1$ dan $x^2 + x + a$ memiliki sedikitnya satu akar yang sama.
   a. 1
   b. 2
   c. 3
   d. 4
   Solusi:
   Misalkan p adalah akar yang sama maka $p^2 + ap + 1 = 0$ dan $p^2 + p + a = 0$
   Dengan mengurangkan kedua persamaan didapat :
   $ap + 1 - p - a = 0$
   $(a - 1)(p - 1) = 0 \rightarrow a = 1$ atau $p = 1$
   · Untuk $a = 1$
   Kedua polinomial akan sama yaitu $x^2 + x + 1$. Namun diskriminan polinomial kurang dari 0. Maka tidak ada akar real.
   · Untuk $p = 1$
   $x^2 + ax + 1 = (x - 1)(x - k)$
   Nilai $k = 1$ maka $a = -2$
   $x^2 + x + a = (x - 1)(x - a) = x^2 - (a + 1)x + a$
   $1 = -(a + 1) \rightarrow a = -2$
   Jadi, hanya ada 1 nilai a yang memenuhi yaitu $a = -2$

5. Misalkan n adalah bilangan lima angka dan m adalah bilangan empat angka yang didapat dengan menghapus angka yang ada di tengah dari bilangan n. Tentukan semua nilai n yang memenuhi bahwa $\frac{n}{m}$ adalah bilangan bulat.
   a. 20
   b. 50
   c. 75
   d. 90
   Solusi:
   Misalkan bilangan semula adalah $n = 10000a + 1000b + 100c + 10d + e$
   $m = 1000a + 100b + 10d + e$
   $10000a + 1000b + 100c + 10d + e = k(1000a + 100b + 10d + e)$ dengan $k \in$ bilangan asli

• Untuk $k > 10$ maka $k_{\min} = 11$
$1000a(k-10) + 100b(k-10) + 10d(k-1) + e(k-1) = 100c$
Nilai minimal ruas kiri $= 1000(1)(1) + 100(1)(1) + 10(1)(1) + 1(1) > 1000$
Nilai maksimal ruas kanan $= 100\ (9) = 900$
Sehingga tidak ada nilai $k > 10$ yang memenuhi
• Untuk $k < 10$ maka $k_{mak} = 9$
$1000a(10-k) + 100b(10-k) + 100c = 10d(k-1) + e(k-1)$
Nilai minimal ruas kiri $= 1000\ (1)\ (1) + 100\ (1)\ (1) + 100\ (1) > 1000$
Nilai maksimal ruas kanan $= 10\ (9)\ (8) + 9(8) < 1000$
Sehingga tidak ada nilai $k > 10$ yang memenuhi
Untuk $k = 10$
$10000a + 1000b + 100c + 10d + e = 10000a + 1000b + 100d + 10e$
$100c = 9(10d + e)$
Karena 9 tidak membagi 100 maka c harus habis dibagi 9 → $c = 0$ atau $c = 9$
Untuk $c = 9$ tidak mungkin sebab $9(10d + e) \leq 9(90 + 9) < 900 \rightarrow$ maka $c = 0$
Karena $c = 0$ maka $10d + e = 0$ yang berakibat $d = 0$ dan $e = 0$
Maka $n = 10000a + 1000b$
Nilai-nilai n yang memenuhi adalah $10000, 11000, 12000, 13000, \cdots, 99000$
Jadi, terdapat 90 nilai n yang memenuhi

6. Diketahui bahwa masing-masing n orang mengetahui tepat 1 buah informasi yang saling berbeda. Jika salah seorang katakan A menelepon B maka A akan memberitahukan semua informasi yang dimilikinya kepada B sedangkan B tidak memberitahukan satu pun informasi yang diketahuinya kepada A. Berapakah panggilan telepon minimum yang diperlukan sehingga setiap orang tersebut akan mengetahui n informasi tersebut ?
   a. 2n
   b. 2n-1
   c. 2n-2
   d. 2n-3

   Solusi:
   Orang ke-k akan menerima telepon setelah sedikitnya terjadi k − 2 telepon. Maka orang terakhir akan menerima panggilan yang pertama sedikitnya setelah terjadi n − 2 telepon. Setelah orang ke-n menerima telepon berarti sedikitnya telah terjadi n − 1 telepon. Semua informasi yang didapat oleh

orang ke-n akan disebar kepada seluruh orang selain dirinya. Sedikitnya dibutuhkan n − 1 telepon.
Maka panggilan telepon minimum yang diperlukan sehingga setiap orang akan mengetahui n informasi adalah 2(n − 1) atau 2n-2.

7. Barisan $a_1, a_2, a_3, \cdots$ memenuhi $a_1 = \frac{1}{2}$ dan $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = n^2 a_n$ untuk $n \geq 1$. Tentukan nilai a_n.
   a. $\frac{1}{n(n-1)}$
   b. $\frac{1}{(n-1)(n+1)}$
   c. $\frac{1}{2(n+1)}$
   d. $\frac{1}{n(n+1)}$

   Solusi:
   $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = n^2 a_n \quad \rightarrow \quad a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} = n^2 a_n - a_n$
   $(n-1)^2 a_{n-1} = (n^2 - 1) a_n = (n-1)(n+1) a_n$
   $\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{n-1}{n+1} \quad \rightarrow \quad \frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdot \frac{a_{n-2}}{a_{n-3}} \cdots \cdot \frac{a_2}{a_1} = \frac{n-1}{n+1} \cdot \frac{n-2}{n} \cdot \frac{n-3}{n-1} \cdots \frac{1}{3}$
   $\frac{a_n}{a_1} = \frac{2.1}{(n+1).n}$
   $a_n = \frac{1}{n(n+1)}$

8. Pada sebuah bilangan positif 3,27, angka 3 merujuk pada bagian bulat dari bilangan dan ,27 merujuk pada bagian desimal. Tentukan bilangan positif yang memenuhi bagian desimal, bagian bulat dan bilangan itu sendiri membentuk barisan geometri.
   a. $\frac{1-\sqrt{5}}{3}$
   b. $\frac{1+\sqrt{5}}{4}$
   c. $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$
   d. $\frac{2+\sqrt{5}}{3}$

   Solusi:
   Misalkan bilangan tersebut adalah x, bagian bulat = $\lfloor x \rfloor = n$ dan desimal $= y$
   n tidak mungkin 0 maka $x \geq 1$
   Karena y, n dan x merupakan barisan geometri maka $n^2 = xy$
   $x = n + y \quad \rightarrow \quad n^2 = (n + y)y = ny + y^2$
   $\left(n - \frac{1}{2}y\right)^2 = \frac{5}{4}y^2$

· Untuk $n \geq 2$

Karena $0 \leq y < 1$ maka nilai minimal ruas kiri $= \left(2 - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$

Nilai maksimal ruas kanan $= \frac{5}{4}$

Maka tidak ada nilai $n \geq 2$ yang memenuhi

· Untuk $n = 1$

$1^2 = y + y^2$

$y^2 + y - 1 = 0$

Ambil akar positif maka $y = \frac{-1+\sqrt{1+4}}{2} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

$x = n + y = 1 + \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

Bilangan positif tersebut adalah $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

9. Dua orang siswa kelas tujuh mengikuti suatu kompetisi catur dengan seluruh peserta selain mereka adalah siswa kelas delapan. Masing-masing peserta akan bertemu tepat satu kali dengan masing-masing lawan dengan ketentuan penilaian : 1 jika menang, setengah jika remis sedangkan jika kalah 0. Total nilai yang diperoleh kedua siswa kelas tujuh adalah 8 sedangkan semua siswa kelas delapan memperoleh nilai yang sama. Berapa banyak siswa kelas delapan yang mengikuti kompetisi ?
   a. 10
   b. 12
   c. 14
   d. 16

   Solusi:

   Misalkan jumlah siswa kelas delapan $= n$ maka banyaknya pertandingan $= \frac{1}{2}(n+1)(n+2) =$ nilai total.

   Misalkan masing-masing nilai siswa kelas delapan $= k$ maka

   $8 + nk = \frac{1}{2}(n+1)(n+2) \rightarrow n^2 - (2k - 3)n - 14 = 0$

   Karena k adalah bilangan asli maka penjumlahan kedua nilai n merupakan bilangan bulat.

   Karena hasil kali kedua nilai $n = -14$ maka kedua nilai n pasti bulat.

   Maka kemungkinan kedua nilai n adalah $(1, -14), (2, -7), (7, -2)$ dan $(14, -1)$ yang masing-masing jika dijumlahkan secara berurutan akan diperoleh $-13, -5, 5, 13$.

   * Untuk $2k - 3 = -13 \rightarrow k = -5$ (tidak memenuhi)
   * Untuk $2k - 3 = -5 \rightarrow k = -1$ (tidak memenuhi)
   * Untuk $2k - 3 = 5 \rightarrow k = 4$

* Untuk $2k - 3 = 13 \quad \rightarrow \quad k = 8$

Akan dicek kedua kemungkinan nilai k tersebut.

· Jika $k = 4$

nilai n positif yang memenuhi adalah 7. Nilai total $= \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 9 = 36$. Maka nilai total ketujuh siswa kelas delapan $= 36 - 8 = 28$ yang berarti masing-masing siswa kelas delapan memperoleh nilai 4.

· Jika $k = 8$

nilai n positif yang memenuhi adalah 14. Nilai total $= \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 16 = 120$. Maka nilai total keempat belas siswa kelas delapan $= 120 - 8 = 112$ yang berarti masing-masing siswa kelas delapan memperoleh nilai 8.

10. n adalah bilangan bulat. Jika angka puluhan n^2 adalah tujuh, apakah angka satuan dari n^2 ?

a. 8
b. 6
c. 4
d. 2

Solusi:

Angka satuan dari bilangan kuadrat adalah $0, 1, 4, 5, 6, 9$.

Tetapi 70 dan 74 jika dibagi 4 bersisa 2 yang membuat bilangan dengan dua angka terakhir 70 dan 74 tidak mungkin bilangan kuadrat.

Karena 71, 75 dan 79 jika dibagi 4 bersisa 3 maka bilangan dengan dua angka terakhir 71, 75 dan 79 tidak mungkin bilangan kuadrat.

Karena 576 merupakan bilangan kuadrat maka angka satuan dari n adalah 6.