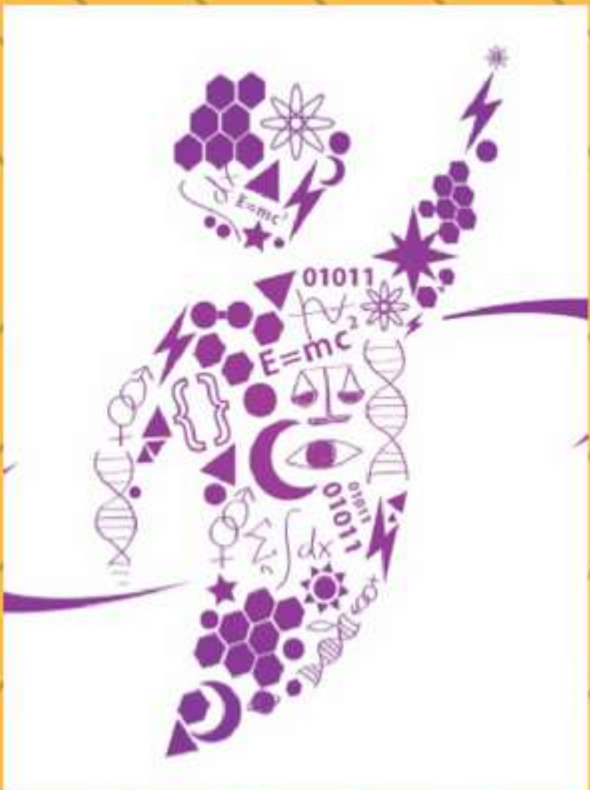
PAKET 12

PELATIHAN ONLINE

2019

po.alcindonesia.co.id

SMP
MATEMATIKA



WWW.ALCINDONESIA.CO.ID

@ALCINDONESIA

085223273373

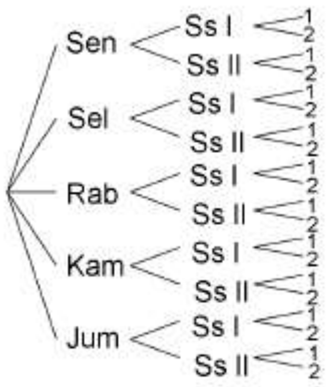
PEMBAHASAN PAKET 12

1. Diketahui bilangan x dan y, masing-masing tidak lebih dari 2018 dan $x^2 + y^2$ habis dibagi 121. Jika pasangan (x, y) dan (y, x) tidak dibedakan, maka banyak pasangan (x, y) yang memenuhi adalah ....
   a. 16.638
   b. 16.336
   c. 16.836
   d. 16.868
   Solusi:
   Diketahui nilai $x \leq 2018$ dan $y \leq 2018$, serta dan $x^2 + y^2 = 121a$, nilai a bilangan asli
   Dengan memperhatikan bahwa $x^2 + y^2$ habis dibagi 121, hal ini memiliki arti bahwa pasangan (x, y) terkecil adalah $(11, 11)$ dan pasangan terbesar adalah $11a \leq 2018$, yaitu $(2013, 2013)$.
   Sehingga banyaknya nilai x dan y yang memenuhi adalah $\frac{2013}{11} = 183$
   Dengan demikian banyaknya pasangan nilai x dan y yang memenuhi, didapat:
   11 berpasangan dengan 11, sampai 11 berpasangan dengan 2013 (ada 183)
   22 berpasangan dengan 22, sampai 22 berpasangan dengan 2013 (ada 182)
   . .
   . .
   . .
   2012 berpasangan dengan 2012, sampai 2012 berpasangan dengan 2013 (ada 2)
   2013 berpasangan dengan 2013 (ada 1)
   Dengan demikian, banyak pasangannya adalah $1 + 2 + \ldots + 182 + 183 = (184 \times 91) + 92 = 16.836$
   Jadi, banyak pasangan (x, y) yang memenuhi adalah ada 16.836

2. Sekolah A memiliki 3 kelas yang akan mengikuti ujian komputer pada sekolah B. Sekolah B menyediakan 2 pilihan waktu setiap harinya selama 5 hari berturut-turut. Setiap waktu yang disediakan dibuka dua kelas paralel. Jika setiap kelas sekolah A hanya mengikuti satu kali ujian, dan waktu ujian ditentukan secara acak, maka peluang bahwa tiga kelas tersebut mengikuti ujian pada hari yang berbeda adalah ...
   a. $\frac{3}{25}$

b. $\frac{6}{25}$
c. $\frac{9}{25}$
d. $\frac{12}{25}$

Solusi:
Misalkan sekolah A memiliki 3 kelas yaitu A1, A2, A3.
Macam pelaksanaan ujian di sekolah B dapat digambarkan dalam diagram panah berikut.



Keterangan:
Pemilihan hari hanya merupakan contoh saja.
Ss I = Sesi I, Ss II = Sesi II, 1 = Kelas Paralel 1, 2 = Kelas paralel 2.
Terdapat 20 pilihan pelaksanaan ujian.
Diketahui setiap kelas sekolah A hanya mengikuti satu kali ujian, dan waktu ujian
ditentukan secara acak, sehingga dapat ditulis sbb:

- Misalkan kelas A1 melakukan ujian pada hari Senin, sesi I, kelas paralel 1 atau ditulis (A1,Sen, Ss I,1). Pada kasus ini ada 20 pilihan.
- Karena diminta 3 kelas sekolah A melakukan ujian pada hari berbeda maka A2 tinggal bisa memilih hari selain hari Senin. Pada kasus ini ada 16 pilihan.
- Akibatnya A3 tinggal memiliki 12 pilihan.

Dengan demikian banyak kejadian tiga kelas tersebut mengikuti ujian pada hari yang berbeda adalah $20 \times 16 \times 12$ pilihan, sedangkan banyak anggota ruang sampel 3 kelas sekolah A mengikuti ujian adalah $20 \times\ 20 \times\ 20$ pilihan.
Jadi peluang bahwa tiga kelas tersebut mengikuti ujian pada hari yang berbeda adalah $\frac{20\times16\times12}{20\times 20\times 20} = \frac{12}{25}$

3. Fungsi g dari himpunan X dikatakan satu-satu jika untuk setiap dengan $x_1, x_2 \in X$ dengan $g(x_1) = g(x_2)$ berlaku $x_1 = x_2$. Jika $X =$

$\{9, 6, 3, 2, 1\}$ dan $Y = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, maka fungsi berbeda dari X ke Y yang merupakan satu-satu dan setiap bilangan anggota X tidak dikaitkan dengan faktornya di Y ada sebanyak ...

a. 560
b. 380
c. 720
d. 640

Solusi:

$Perhatikan\ tabel\ kemungkinan\ pemasangan\ anggota\ X\ ke\ anggota\ Y\ berikut:$

		Anggota Himpunan Y						Banyak cara pemasangan
		1	2	3	4	5	6	
Anggota Himpunan X	9		√		√	√	√	4
	6				√	√		2
	3		√		√	√	√	4
	2			√	√	√	√	4
	1		√	√	√	√	√	5
Banyak fungsi yang terbentuk								4 .2 .4 .4 .5 = 640

$Jadi\ banyak\ fungsi\ berbeda\ dari\ X\ ke\ Y\ yang\ merupakan\ satu\ satu\ dan\ setiap\ bilangan\ anggota\ X\ tidak\ dikaitkan\ dengan\ faktornya\ di\ Y\ ada\ sebanyak$ 640

4. Suatu tabung berada di dalam prisma tegak segitiga. Tabung tersebut tepat menyinggung prisma pada alas, tutup, dan semua sisi prisma. Alas prisma berbentuk segitiga sama sisi dengan panjang sisi 8 cm dan tinggi prisma 6 cm . Volume tabung tersebut adalah ....

a. 32π
b. $36\sqrt{2}\pi$
c. $24\sqrt{3}\pi$

d. 36π

Solusi:

Diketahui suatu tabung berada di dalam prisma tegak segitiga dengan alas prisma segitiga sama sisi, dimana panjang sisinya 8 cm dan tinggi prisma 6 cm

$s = \frac{1}{2}(8 + 8 + 8) = 12$

Jari-jari lingkaran dalam segitiga (r)

$r = \frac{Luas\ \Delta}{s} = \frac{\left(\frac{8^2}{4}\sqrt{3}\right)}{12} = \frac{4}{3}\sqrt{3}$

$Volume\ Tabung = Luas\ alas \times tinggi$

$Volume\ Tabung = \pi\, r^2 \times t$

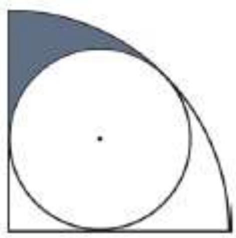
$Volume\ Tabung = \pi\left(\frac{4}{3}\sqrt{3}\right)^2 \times 6$

$Volume\ Tabung = \pi\frac{(16\times3)}{9} \times (3 \times 2)$

$Volume\ Tabung = 32\pi$

Jadi, volume tabung tersebut adalah 32π

5. Sebuah lingkaran berada dalam seperempat lingkaran besar, seperti pada gambar dibawah. Jika jari-jari lingkaran besar = 8 satuan, maka luas daerah yang diarsir adalah …



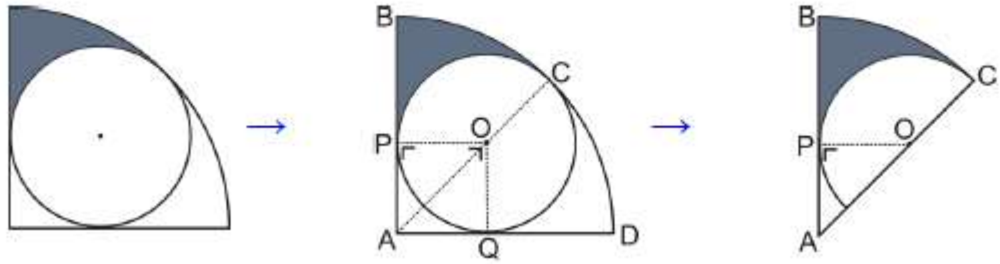
a. $(64\sqrt{2} - 96)\pi + 48\sqrt{2} - 64$ *satuan*

b. $(64\sqrt{2} - 64)\pi + 48\sqrt{2} - 96$ *satuan*

c. $(48\sqrt{2} - 96)\pi + 64\sqrt{2} - 64$ *satuan*

d. $(48\sqrt{2} - 64)\pi + 64\sqrt{2} - 96$ *satuan*

Solusi:



$Diketahui:$

$AB = AD = AC = R = 8$

$\angle BAC = \frac{90^o}{2} = 45^o$

$\angle APO = \angle POQ = 90^o$

$\angle COP = \angle COQ = \frac{360^o - \angle POQ}{2} = \frac{360^o - 90^o}{2} = \frac{270^o}{2} = 135^o$

$Misalkan:$

$OC = OP = OQ = AP = AQ = r$

$OA = AC - OC = 8 - r$

$Perhatikan\ segitiga\ siku-siku\ APO:$

$AP^2 + OP^2 = OA^2$

$r^2 + r^2 = (8 - r)^2$

$2r^2 = 64 - 16r + r^2$

$2r^2 - r^2 + 16r - 64 = 0$

$r^2 + 16r - 64 = 0$

$r_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$r_{1,2} = \frac{-16 \pm \sqrt{16^2 - 4\,.1\,.-64}}{2.1}$

$r_{1,2} = \frac{-16 \pm \sqrt{256 + 256}}{2}$

$r_{1,2} = \frac{-16 \pm \sqrt{256.2}}{2}$

$r_{1,2} = \frac{-16 \pm 16\sqrt{2}}{2}$

$r_{1,2} = -8 \pm 8\sqrt{2}$

$\rightarrow r = -8 - 8\sqrt{2}\ \ (tidak\ memenuhi\ karena\ bernilai\ negatif)$

$atau$

$\rightarrow r = -8 + 8\sqrt{2}\ \ (memenuhi)$

$Perhatikan\ segitiga\ siku-siku\ APO:$

$L_{segitiga\ APO} = \frac{1}{2}.AP\,.OP$

$L_{segitiga\ APO} = \frac{1}{2}.r\,.r$

$L_{segitiga\ APO} = \frac{1}{2}.(-8 + 8\sqrt{2}).(-8 + 8\sqrt{2})$

$L_{segitiga\ APO} = \frac{1}{2}.(64 - 128\sqrt{2} + 128)$

$L_{segitiga\ APO} = \frac{1}{2}.\left(192 - 128\sqrt{2}\right)$
$L_{segitiga\ APO} = 96 - 64\sqrt{2}$
$Perhatikan\ juring\ lingkaran\ kecil\ COP:$
$L_{juring\ COP} = \frac{135^o}{360^o}.\pi.r^2$
$L_{juring\ COP} = \frac{3}{8}.\pi.\left(-8 + 8\sqrt{2}\right)^2$
$L_{juring\ COP} = \frac{3}{8}.\pi.(64 - 128\sqrt{2} + 128)$
$L_{juring\ COP} = \frac{3}{8}.\pi.\left(192 - 128\sqrt{2}\right)$
$L_{juring\ COP} = 72\pi - 48\sqrt{2}\,\pi$
$Perhatikan\ juring\ lingkaran\ besar\ BAC:$
$L_{juring\ BAC} = \frac{45^o}{360^o}.\pi.R^2$
$L_{juring\ BAC} = \frac{1}{8}.\pi.8^2$
$L_{juring\ BAC} = \frac{1}{8}.\pi.64$
$L_{juring\ BAC} = 8\pi$
$L_{arsiran} = L_{juring\ BAC} - L_{segitiga\ APO} - L_{juring\ COP}$
$L_{arsiran} = 8\pi - \left(96 - 64\sqrt{2}\right) - \left(72\pi - 48\sqrt{2}\,\pi\right)$
$L_{arsiran} = 8\pi - 96 + 64\sqrt{2} - 72\pi + 48\sqrt{2}\,\pi$
$L_{arsiran} = 48\sqrt{2}\,\pi - 64\pi + 64\sqrt{2} - 96$
$L_{arsiran} = (48\sqrt{2} - 64)\,\pi + 64\sqrt{2} - 96$
$Jadi\ luas\ daerah\ yang\ diarsir\ adalah\ \left(48\sqrt{2} - 64\right)\pi + 64\sqrt{2} - 96\ satuan$

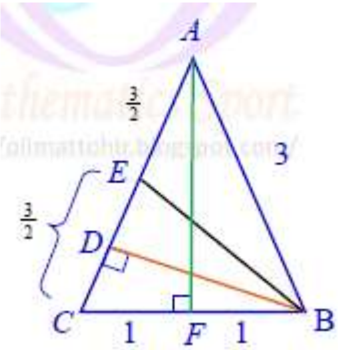
6. Jika $ab + ab + ab = cbb$ dan setiap huruf yang berbeda menyatakan angka yang berdeda juga, maka nilai $a + b + c$ adalah ....
   a. 15
   b. 18
   c. 20
   d. 24

   Solusi:
   Diketahui $ab + ab + ab = cbb$
   $\rightarrow ab + ab + ab = cbb$
   $\rightarrow 3 \times ab = cbb$
   $\rightarrow 30a + 3b = c100 + 10b + b$
   $\rightarrow 30a + 3b = c100 + 11b$
   $\rightarrow 30a = c100 + 8b$
   Dengan demikian, nilai b yang memenuhi adalah 5

Sehingga didapat $a = 8$ dan $c = 2$
Jadi, nilai $a + b + c = 8 + 5 + 2 = 15$

7. Diketahui ΔABC mempunyai panjang sisi $AB = AC = 3\ cm$ dan $BC = 2\ cm$. Titik D dan E terletak pada AC sehingga BD adalah garis tinggi dan BE adalah garis berat ΔABC. Luas ΔBDE adalah ... cm^2.
   a. $\frac{5}{9}\sqrt{3}$
   b. $\frac{5}{9}\sqrt{2}$
   c. $\frac{5}{6}$
   d. $\frac{5}{6}\sqrt{2}$

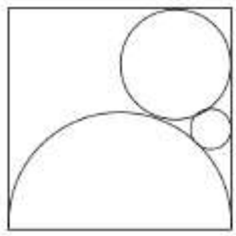
   Solusi:



   Perhatikan ΔAFB, dengan rumus pithagoras didapat panjang $AF = 2\sqrt{2}$
   Kemudian perhatikan Luas ΔABC dengan alas BC dan alas AC, didapat
   $BD \times AC = BC \times AF$
   $BD = \frac{BC \times AF}{AC} = \frac{2 \times 2\sqrt{2}}{3} = \frac{4}{3}\sqrt{2}$
   Selanjutnya perhatikan ΔAFC dengan ΔBDC, keduanya sebangun sehingga didapat
   $DC \times BD = CF \times AF$
   $DC = \frac{CF \times AF}{BD} = \frac{1 \times 2\sqrt{2}}{\frac{4}{3}\sqrt{2}} = \frac{2}{3}$ → didapat $DE = CE - DC = \frac{3}{2} - \frac{2}{3} = \frac{5}{6}$
   Dengan demikian,
   $Luas\ \Delta BDE = 1/2 \times DE \times BD$
   $Luas\ \Delta BDE = \frac{1}{2} \times \frac{5}{6} \times \frac{4}{3}\sqrt{2}$
   $Luas\ \Delta BDE = \frac{5}{9}\sqrt{2}$
   Jadi, Luas ΔBDE adalah $\frac{5}{9}\sqrt{2}\ cm^2$

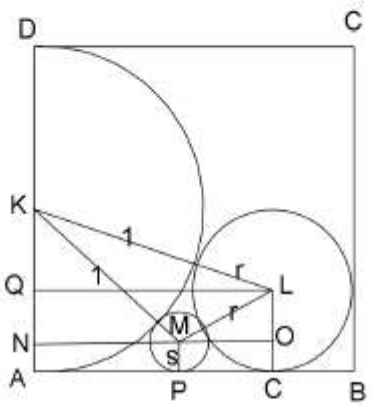
8. Diberikan persegi dengan setengah lingkaran L_1, yang berpusat pada titik tengah alasnya. Lingkaran L_2, dengan radius r menyinggung sisi atas dan sisi

tegak persegi, serta L_1. Sedangkan lingkaran L_3 dengan radius s menyinggung L_1, L_2, dan sisi tegak persegi. Nilai dari $\frac{s}{r}$ adalah ...



a. 3
b. $\frac{2}{3}$
c. $\frac{1}{3}$
d. $\frac{1}{4}$

Solusi:



$LC = r$, dan $MP = s$

Perhatikan bahwa yang dicari $r : s$, maka tanpa mengurangi keumuman kita pilih $KA = 1$

Pada segitiga KLQ berlaku,

$QL^2 = KL^2 - KQ^2$

$QL^2 = (1 + r)^2 - (1 - r)^2$

$QL^2 = (1 + r + 1 - r)(1 + r - 1 + r)$

$QL^2 = 4r$

$QL = 2\sqrt{r}$

Selanjutnya

$AB = 2$

$AC + CB = 2$

$2\sqrt{r} + r = 2$

$2\sqrt{r} = 2 - r$

$4r = 4 - 4r + r^2$

$r^2 - 8r + 4 = 0$

$r_{1,2} = \frac{8\pm\sqrt{48}}{2} = \frac{8\pm 4\sqrt{3}}{2} = 4 \pm 2\sqrt{3}$

Jelas bahwa $r < 2$ maka yang memenuhi $r = 4 - 2\sqrt{3}$ atau

$\sqrt{r} = \sqrt{4 - 2\sqrt{3}} = \sqrt{(3+1) - 2\sqrt{3 \times 1}} = \sqrt{3} - \sqrt{1} = \sqrt{3} - 1$

Pada segitiga KMN berlaku,

$NM^2 = KM^2 - KN^2$

$NM^2 = (1 + s)^2 - \left(1 - s\right)^2$

$NM^2 = (1 + s + 1 - s)(1 + s - 1 + s)$

$NM^2 = 4s$

$NM = 2\sqrt{s}$

Pada segitiga LMO berlaku,

$MO^2 = LM^2 - LO^2$

$MO^2 = (r + s)^2 - \left(r - s\right)^2$

$MO^2 = (r + s + r - s)(r + s - r + s)$

$MO^2 = 4rs$

$MO = 2\sqrt{rs}$

Perhatikan bahwa $NM + MO = QL$, sehingga

$2\sqrt{s} + 2\sqrt{rs} = 2\sqrt{r}$

$\sqrt{s} + \sqrt{r}\sqrt{s} = \sqrt{r}$

$\left(1 + \sqrt{r}\right)\sqrt{s} = \sqrt{r}$

$\left(1 + \sqrt{3} - 1\right)\sqrt{s} = \sqrt{3} - 1$

$\sqrt{s} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}$

Dengan demikian

$\frac{\sqrt{s}}{\sqrt{r}} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}} : \sqrt{3} - 1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\frac{s}{r} = \frac{1}{3}$

9. Diketahui barisan himpunan beranggotakan beberapa bilangan asli berurutan sedemikian rupa sehingga banyak anggota himpunan-himpunan tersebut membentuk barisan aritmetika. Empat suku pertama barisan himpunan tersebut adalah {1}, {2,3,4}, {5,6,7,8,9}, {10,11,12,13,14,15,16}.
   Bilangan 2018 berada pada suku/himpunan ke ….
   a. 44
   b. 45
   c. 46
   d. 47

Solusi:
{1}, {2,3,4}, {5,6,7,8,9}, {10,11,12,13,14,15,16}, {dst....}
Perhatikan bahwa anggota-anggota himpunan dari setiap suku secara berurutan merupakan bilangan asli berurutan.
Terlihat pola bilangannya sbb:

Suku ke	1	2	3	4	5	6	...	n
Anggota terakhir dari himpunan	1	4	9	16	25	36		n^2

Selanjutnya perhatikan,
$n^2 = 2018$
$n = \sqrt{2018}$
$\sqrt{1936} < n < \sqrt{2025}$
$44 < n < 45$
Ini berarti suku ke-44 adalah {...........,1936}, dan suku ke-45 adalah {1937, 1938, … ,2025}
Jadi 2018 berada pada suku ke 45

10. Diberikan persamaan $(x - 3y)^2 + 203(x - 3)(y - 1) - 191xy = 9$. Jika x dan y adalah bilangan asli, maka jumlah dari semua nilai x yang mungkin adalah ....
a. 6667
b. 6567
c. 6765
d. 6756
Solusi:
Diketahui, persamaan $(x - 3y)^2 + 203(x - 3)(y - 1) - 191xy = 9$
$(x - 3y)^2 + 203(x - 3)(y - 1) - 191xy = 9$
$x^2 - 6xy + 9y^2 + 203(xy - x - 3y + 3) - 191xy = 9$
$x^2 - 6xy + 9y^2 + 203xy - 191xy - 203(x + 3y - 3) = 9$
$x^2 + 6xy + 9y^2 - 203(x + 3y - 3) = 9$
$(x + 3y)^2 - 203(x + 3y - 3) = 9$
$(x + 3y)^2 - 9 = 203(x + 3y - 3)$
$(x + 3y)^2 - 32 = 203(x + 3y - 3)$
$(x + 3y + 3)(x + 3y - 3) = 203(x + 3y - 3)$
$(x + 3y + 3) = 203$
$x + 3y = 200$
Dengan demikian, nilai $y_{maksimal} = 66$ yang mengakibatkan nilai $x_{minimal} = 2$

dan nilai $y_{minimal} = 1$ yang mengakibatkan nilai $x_{maksimal} = 197$
sehingga barisan nilai x nya adalah $2 + 5 + 8 + \ldots. + 191 + 194 + 197 = S_{66}$
$S_{66} = \frac{66}{2}\,[2 \times 2 + (65)3]$
$S_{66} = 33(4 + 195)$
$S_{66} = 33(199)$
$S_{66} = 6567$
Jadi, jumlah dari semua nilai x yang mungkin adalah 6567