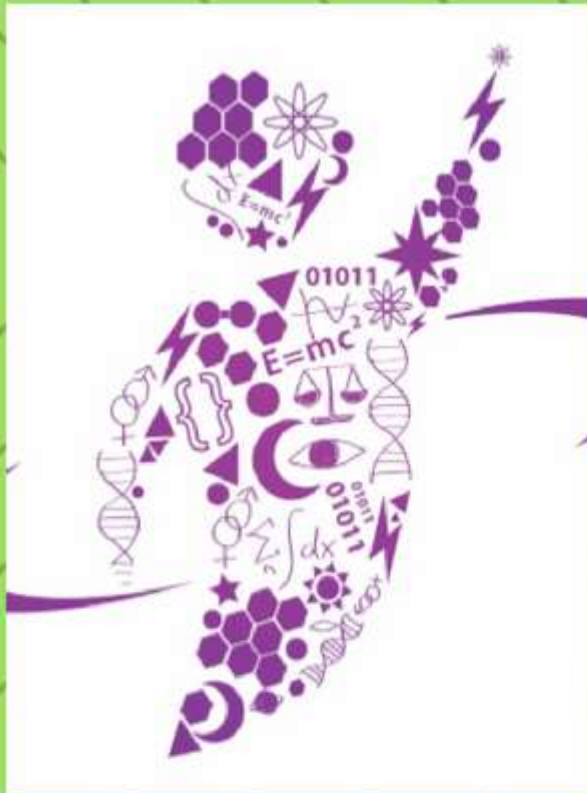


## 2019

po.alcindonesia.co.id



**085223273373**

## KOMBINATORIKA LANJUTAN DAN TEORI BILANGAN DASAR

Pada paket 4 ini, akan dibahas lebih lanjut materi mengenai kombinatorika dan juga akan ada pembahasan mengenai teori bilangan. Dua materi ini adalah materi wajib lain yang harus dikuasai oleh semua peserta yang mengikuti OSK dan OSP.

### ➤ **Kombinatorika Lanjutan**

Pada paket sebelumnya sudah dijelaskan materi mengenai dasar-dasar kombinatorika, kombinasi dan permutasi. Pada pembahasan kali ini, akan dijelaskan beberapa topik kelanjutan dari materi yang sudah dijelaskan tersebut.

- **Permutasi dengan Objek Identik**

Pada pembahasan sebelumnya, sudah dijelaskan materi permutasi dengan objek yang unik. Sekarang, bagaimana jika objek-objek tersebut tidak unik dan ada beberapa objek yang sama?

Tentunya banyak permutasi dengan objek identik tersebut tidak akan sebanyak saat objeknya berbeda. Secara umum, permutasi  $n$  objek dengan beberapa objek yang identik adalah

$$\frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot n_3! \dots n_k!}$$

Dengan  $n_1, n_2, n_3, \dots, n_k$  adalah banyak dari masing-masing objek yang identik.

Contoh :

Ada berapa banyak permutasi dari kata "BIOLOGI" ?

Jawab:

Karena terdapat 2 huruf O, 2 huruf I, dan sisanya adalah masing-masing 1 huruf dari B, L, dan G. Maka banyaknya permutasi adalah

$$\frac{7!}{2! \cdot 2! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1!} = 1260$$

- **Permutasi Siklis**

Jika ada  $n$  orang yang sedang duduk dalam meja/susunan melingkar, maka banyaknya cara  $n$  orang tersebut duduk adalah  $(n - 1)!$

- **Kombinasi  $n$  objek identik ke  $r$  Tempat.**

Misalkan terdapat  $n$  buah bola identik dan  $r$  buah kotak. Banyaknya cara menempatkan  $n$  buah bola ke dalam  $r$  kotak tersebut adalah sama dengan mencari banyaknya kemungkinan  $x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_r = n$ . Dimana nilai  $x_{1,2,\dots,r} \geq 0$

Solusinya ada sebanyak  $\binom{n+r-1}{r-1}$

Soal-soal dengan tipe seperti ini lumayan sering keluar di OSK dan OSP. Oleh karena itu, diwajibkan untuk menguasainya.

Soal ini juga bisa dibuat variasi seperti soal berikut.

Contoh Soal:

Pak Ganesh memiliki 10 buah koin identik yang akan dibagikan kepada 5 orang cucunya. Ada berapa cara pembagian yang mungkin jika setiap cucunya dipastikan mendapatkan minimal 1 buah koin?

Jawab:

Soal ini sama dengan mencari banyaknya solusi dari :

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 10 \text{ dimana } x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 1.$$

Perhatikan bahwa, karena  $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 1$ , maka kita bisa menuliskan nilai:

$$x_1 = a_1 + 1$$

$$x_2 = a_2 + 1$$

$$x_3 = a_3 + 1$$

$$x_4 = a_4 + 1$$

$$x_5 = a_5 + 1$$

Disini sudah pasti bisa dipastikan bahwa  $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 1$  asalkan  $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 \geq 0$ . Oleh karena itu, banyaknya solusi dari

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 10 \text{ dimana } x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 1.$$

Akan ekuivalen dengan banyaknya solusi dari  $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 5$  dimana  $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 \geq 0$ .

$$\text{Banyaknya solusi : } \binom{5+5-1}{4} = \binom{9}{4} = 126 \text{ cara}$$

Variasi-variasi lain dapat dikerjakan dengan cara yang mirip seperti di atas.

Prinsip inklusi-eksklusi juga dapat digunakan untuk membantu menyelesaikan soal-soal variasi yang mirip contoh di atas.

- **Derangement**

*Derangement* adalah sebuah permutasi  $n$  buah objek sehingga tiap masing-masing objek tidak menempati posisi aslinya.

Misal terdapat sebuah himpunan  $A = \{1, 2, 3\}$

*Derangement* dari himpunan  $A$  tersebut adalah  $\{2, 3, 1\}, \{3, 1, 2\}$ .

Ket : Pada masing-masing permutasi tersebut jelas bahwa 1 tidak menempati urutan pertama, 2 tidak menempati urutan kedua, dan 3 tidak menempati urutan ketiga.

Rumus rekursi dari *derangement*

Misal  $d(n)$  menyatakan banyaknya derangement dengan  $n$  anggota, maka akan terdapat sebuah relasi yaitu :

$$d(n) = (n-1)(d(n-1)+d(n-2))$$

dimana  $d(1) = 0$ , dan  $d(2) = 1$ .

- **Peluang**

Peluang adalah materi lain yang seringkali muncul di soal-soal OSK dan OSP. Peluang/probabilitas adalah cara untuk mengungkapkan pengetahuan atau kepercayaan bahwa suatu kejadian akan berlaku atau telah terjadi.

Probabilitas dari suatu kejadian adalah angka yang menunjukkan kemungkinan terjadinya suatu kejadian. **Nilai dari peluang berkisar di antara 0 dan 1.**

Peluang dari suatu kejadian  $A$  didefinisikan sebagai

$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$  , dimana  $n(A)$  adalah banyak kemungkinan  $A$  bisa terjadi, sedangkan  $n(S)$  adalah banyak kemungkinan (kejadian  $A$  dan kejadian selain  $A$ ) yang bisa terjadi.

Contoh Soal:

Andi memiliki 6 buah bola yang terdiri dari 2 bola berwarna merah dan 4 bola berwarna biru. Jika Budi ingin mengambil 2 bola secara acak, berapa peluang budi mendapatkan bola dengan warna yang sama?

Jawaban:

Misalkan  $A$  adalah kejadian berupa Budi mendapatkan 2 buah bola dengan warna yang sama, maka:

$$\begin{aligned} \blacksquare \quad n(A) &= n(\text{Budi mendapat 2 bola merah}) + n(\text{Budi mendapat 2 bola biru}) \\ &= \end{aligned}$$

$$C_2^2 + C_2^4 = 1 + 6 = 7$$

$$\blacksquare \quad n(S) = C_2^6 = 15$$

Sehingga peluang dari Budi mendapatkan 2 buah bola sama adalah

$$= \frac{\text{kemungkinan 2 bola dengan warna sama}}{\text{semua kemungkinan pengambilan 2 bola}} = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{7}{15}$$

Prinsip inklusi-eksklusi yang sudah dipelajari di materi himpunan juga berlaku untuk peluang.

- **Pigeonhole Principle (PHP)**

Apabila terdapat  $n + 1$  ekor burung dan  $n$  buah sangkar lalu burung tersebut akan dibagikan ke  $n$  buah sangkar tersebut, maka dipastikan akan terdapat setidaknya 1 sangkar yang diisi oleh minimal 2 ekor burung.

Contoh Soal:

Pak Ganesh ingin berbagi coklat kepada cucu-cucunya. Apabila cucu Pak Ganesh berjumlah 20 orang, berapa coklat minimal yang dibutuhkan pak Ganesh sehingga dijamin setidaknya 1 orang cucunya mendapatkan 5 coklat?

Jawab :

Kemungkinan terburuk yang menggagalkan syarat yang diminta adalah ketika semua cucu pak Ganesh mendapatkan 4 buah coklat. (Total coklat semuanya  $= 20 * 4 = 80$ )

Ketika ditambah 1 coklat lagi, maka dipastikan akan ada minimal 1 orang cucunya yang mendapatkan 5 ( $4 + 1$ ) coklat.

Jadi coklat minimal yang dibutuhkan Pak Ganesh agar menjamin setidaknya 1 orang cucunya mendapatkan 5 coklat adalah **81 coklat**.

➤ **Teori Bilangan Dasar**

Teori bilangan adalah salah satu materi yang penting di dalam ilmu komputer. Banyak sekali persoalan-persoalan yang dapat diselesaikan dengan teori bilangan. Tidak hanya di OSK dan OSP, teori bilangan ini termasuk juga materi dalam silabus yang diujikan di OSN. Pada pembahasan kali ini, kita akan membahas dasar-dasar di teori bilangan.

- **Bilangan Bulat**

Pada dasarnya semua bilangan yang ada di dunia ini adalah bilangan riil dan bilangan imajiner. Di dalam bilangan real sendiri ada bilangan rasional dan irasional. Bilangan bulat adalah bagian dari bilangan rasional.

Teori bilangan yang dipakai disini umumnya akan membahas tentang bilangan bulat. Di dalam bilangan bulat sendiri ada bilangan cacah dan negatif. Dan di dalam bilangan cacah terdapat bilangan asli dan nol.

Secara singkat,

Bilangan bulat =  $\{ \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots \}$

Bilangan Negatif =  $\{ \dots, -3, -2, -1 \}$

Bilangan Cacah =  $\{ 0, 1, 2, 3, \dots \}$



Bilangan Asli =  $\{1, 2, 3, 4, \dots\}$

- **Keterbagian**

Suatu bilangan  $a$  dikatakan membagi bilangan  $b$ , jika terdapat bilangan  $k$  sehingga  $b = a * k$ .  $a$  membagi  $b$  biasa disimbolkan dengan  $a \mid b$

Contoh :

- 2 membagi 8
- 13 membagi 143

- **Faktor Bilangan**

Misalkan  $a$  adalah suatu bilangan yang membagi bilangan  $b$ , maka kita bisa katakan bahwa  $a$  adalah faktor dari  $b$

Contoh :

Faktor dari 14 adalah 1, 2, 7, dan 14

- **Bilangan Prima**

Bilangan prima adalah bilangan asli yang hanya memiliki 2 buah faktor, yaitu 1 dan dirinya sendiri.

Contoh bilangan prima adalah 2, 5, 97, 43, dll

- **Bilangan Komposit**

Bilangan komposit adalah bilangan asli selain bilangan prima.

Contoh bilangan komposit adalah 4, 20, 91, 189, dll

- **Faktorisasi Prima**

Semua bilangan asli dapat kita tulis menjadi hasil kali dari faktor prima penyusunnya.

Sebagai contoh :

- $6 = 2 \times 3$
- $84 = 2^2 \times 3 \times 7$
- $300 = 2^2 \times 3 \times 5^2$

- **Banyak Faktor**

Salah satu kegunaan dari faktorisasi prima adalah untuk mencari banyak faktor.

Misalkan  $x$  dapat dinyatakan menjadi  $p_1^{a_1} p_2^{a_2} p_3^{a_3} \dots p_n^{a_n}$  dimana  $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$  adalah bilangan prima dan  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n \geq 0$ . Maka banyak faktor dari  $x$  adalah

$$(a_1 + 1)(a_2 + 1)(a_3 + 1) \dots (a_n + 1)$$

Contoh:

$$12 = 2^2 \times 3$$

Maka, banyak faktor dari 12 adalah  $(2 + 1)(1 + 1) = 6$

- **Jumlah Faktor**

Kegunaan lain dari faktorisasi prima adalah untuk mencari jumlah faktor.

Misalkan  $x$  dapat dinyatakan menjadi  $p_1^{a_1} p_2^{a_2} p_3^{a_3} \dots p_n^{a_n}$  dimana  $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$  adalah bilangan prima dan  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n \geq 0$ . Maka jumlah faktor dari  $x$  adalah

$$(1 + p_1 + p_1^2 + \dots + p_1^{a_1})(1 + p_2 + p_2^2 + \dots + p_2^{a_2}) \dots (1 + p_n + p_n^2 + \dots + p_n^{a_n})$$

Contoh :

$$12 = 2^2 \times 3$$

Jumlah faktor dari 12 adalah  $(1 + 2 + 2^2)(1 + 3) = 28$

Sesuai karena jumlah dari  $1 + 2 + 3 + 4 + 6 + 12 = 28$

- **Faktor Persekutuan Terbesar (FPB)**

Faktor persekutuan terbesar dari dua buah bilangan bulat  $a$  dan  $b$  adalah bilangan bulat terbesar yang sama-sama membagi habis  $a$  dan  $b$ .

Contoh :

$FPB(28, 24) = 4$ , karena  $4 \mid 28$ ,  $4 \mid 24$  dan tidak ada bilangan yang lebih besar dari 4 yang membagi 28 dan 24 sekaligus.

Dua buah bilangan bulat  $a$  dan  $b$  dikatakan **relatif prima** jika  $FPB(a, b) = 1$

- **Kelipatan Persekutuan Terkecil**

Kelipatan persekutuan terkecil dari dua buah bilangan  $a$  dan  $b$  adalah bilangan terkecil yang merupakan kelipatan dari  $a$  dan juga kelipatan dari  $b$

Contoh

- $kpk(24, 20) = 120$

- $kpk(13, 11) = 143$

- **Hubungan FPB dengan KPK**

Bila terdapat 2 buah bilangan  $a$  dan  $b$ , maka bilangan-bilangan tersebut akan memenuhi persamaan:

$$kpk(a, b) = \frac{a \cdot b}{fpb(a, b)}$$

## **SOAL**

1. Berapa banyaknya cara mempermutasikan kata “MISSISIPI” ?
  - A. 2400
  - B. 2420
  - C. 2500
  - D. 2520
  - E. 3000
  
2. Berapa banyaknya cara mengubah susunan kata “MINUMAIR”, jika huruf N dan R harus saling berdampingan?
  - A. 1000
  - B. 1260
  - C. 2000
  - D. 2520
  - E. 3000
  
3. Pak Ganesh beserta 8 orang temannya sedang duduk dalam meja bundar. Banyaknya cara mereka duduk adalah ...
  - A. 720
  - B. 5040
  - C. 40320
  - D. 362880
  - E. 3628800
  
4. Andi, Budi, dan 5 orang temannya sedang duduk dalam meja Bundar. Banyaknya cara mereka bertujuh duduk dengan syarat Andi dan Budi berdampingan adalah ...
  - A. 60
  - B. 100
  - C. 120
  - D. 200
  - E. 240
  
5. Andi, Budi, dan 5 orang temannya sedang duduk dalam meja Bundar. Banyaknya cara mereka bertujuh duduk dengan syarat Andi dan Budi tidak boleh duduk berdampingan adalah ...
  - A. 120
  - B. 240
  - C. 480
  - D. 960
  - E. 1920
  
6. Berapa banyak kemungkinan solusi



$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 17$$

Dengan syarat  $x_1 \geq 1, x_2 \geq 0, x_3 \geq 2, x_4 \geq 4$  ?

- A. 282
- B. 283
- C. 284
- D. 285
- E. 286

7. Banyaknya kemungkinan solusi dari persamaan

$$x_1 + x_2 + x_3 = 10$$

Dengan  $0 \leq x_1 \leq 3, 0 \leq x_2 \leq 6, 0 \leq x_3 \leq 3$  adalah ....

- A. 2
- B. 3
- C. 4
- D. 5
- E. 6

8. Irfan memiliki 7 pasang kaos kaki yang diberi nomor 1 hingga 7. Ada berapa cara Irfan memasang kaos kaki nya tersebut sehingga kaos kaki sebelah kiri dan kanannya tidak memiliki nomor yang sama?

- A. 265
- B. 720
- C. 1854
- D. 2024
- E. 5040

9. Pak Dengklek memiliki 12 permen identik di kantung celananya. Jika Pak Dengklek akan membagikan permen-permen tersebut kepada 3 orang anaknya dan jumlah permen yang diterima masing-masing anaknya tidak boleh lebih dari 7 permen, banyaknya cara membagikan permen tersebut ada

...

- A. 42
- B. 43
- C. 44
- D. 45
- E. 46

10. Suatu susunan 10-angka 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 dikatakan susunan cantik jika memenuhi tiga aturan sebagai berikut:

- Jika yang dibaca dari kiri ke kanan hanya angka 0, 1, 2, 3, 4 membentuk barisan naik
- Jika yang dibaca dari kiri ke kanan hanya angka 5, 6, 7, 8, 9 membentuk barisan turun, dan
- Angka 0 bukan pada posisi pertama.

Sebagai contoh, 9807123654 adalah susunan cantik. Berapa banyak-kah susunan cantik tersebut?

- A. 120
- B. 122
- C. 124
- D. 126
- E. 128

11. Di kampus Arkavidia terdapat 4 orang yang ahli dalam CTF, 4 orang dalam CP dan 4 orang dalam data mining. Jika rektor ingin mengirim tim berisi 9 orang dimana di dalam tim tersebut harus terdapat minimal satu orang dari masing-masing keahlian yang disebutkan tadi. Ada berapa kombinasi tim yang dapat dibentuk?

- A. 200
- B. 210
- C. 215
- D. 220
- E. 225

12. Di suatu tas terdapat 15 buah jeruk bali. 6 diantaranya sudah busuk sedangkan yang lainnya masih segar. Apabila Badur mengambil 4 buah jeruk secara acak, maka peluang Badur tepat mendapatkan 2 buah jeruk busuk adalah ...

- A.  $\frac{36}{89}$
- B.  $\frac{36}{90}$
- C.  $\frac{24}{90}$
- D.  $\frac{36}{91}$
- E.  $\frac{24}{91}$

13. Di suatu kelas terdapat 7 orang siswa laki-laki dan 9 orang siswa perempuan. Wali kelas dari kelas tersebut ingin memilih 5 orang di kelas tersebut untuk mengikuti lomba cerdas cermat antar kelas. Peluang terpilihnya minimal 1 perempuan dari 5 orang tersebut adalah ...

- A.  $\frac{203}{208}$
- B.  $\frac{204}{208}$
- C.  $\frac{205}{208}$
- D.  $\frac{206}{208}$
- E.  $\frac{207}{208}$

14. Diambil  $n$  buah bilangan dari himpunan 2008 bilangan  $\{1, 2, 3, \dots, 2008\}$ . Nilai  $n$  minimal sehingga pasti akan didapat dua bilangan asli berbeda di antaranya

yang memenuhi penjumlahan kedua bilangan tersebut habis dibagi 8 adalah

...

- A. 755
- B. 756
- C. 757
- D. 758
- E. 759

15. Banyaknya bilangan prima yang kurang dari 100 adalah ..

- A. 24
- B. 25
- C. 26
- D. 27
- E. 28

16. Banyaknya faktor positif dari bilangan 13230 adalah ...

- A. 12
- B. 24
- C. 36
- D. 48
- E. 60

17. Banyaknya faktor positif dari bilangan 360360 yang merupakan kelipatan 10 adalah ...

- A. 12
- B. 24
- C. 48
- D. 60
- E. 72

18.  $P$  dan  $Q$  adalah bilangan prima dan  $P > Q$ . Jika  $P + Q = 2005$ , maka nilai dari

$P - Q$  adalah ...

- A. 2001
- B. 2002
- C. 2003
- D. 2004
- E. 2005

19. Berapakah hasil perkalian dari semua bilangan bulat positif yang habis membagi 100 ?

- A. 10.000
- B. 100.000
- C. 100.000.000
- D. 1.000.000.000
- E. 10.000.000.000

20. Bilangan  $n$  terbesar sehingga  $8^n$  membagi  $44^{44}$  adalah ...

- A. 25
  - B. 26
  - C. 27
  - D. 28
  - E. 29
21. Jumlah faktor positif dari 360360 adalah ...
- A. 1572480
  - B. 1572386
  - C. 1572384
  - D. 1572382
  - E. 1572380
22. Nilai  $k$  terbesar sehingga  $9^k$  membagi  $2019!$  adalah ...
- A. 500
  - B. 501
  - C. 502
  - D. 503
  - E. 504
23. Jumlah dua bilangan asli sama dengan 52 sedangkan kelipatan persekutuan terkecilnya sama dengan 168. Selisih dari dua bilangan asli tersebut adalah ...
- A. 1
  - B. 2
  - C. 3
  - D. 4
  - E. 5
24. Pak Ganesh memiliki 2018 buah lampu dan 2018 tombol. Setiap saklar dan lampu tersebut diberi nomor secara terurut dari nomor 1 hingga 2018. Diketahui bahwa saklar dengan nomor  $X$  terhubung dengan lampu dengan nomor kelipatan  $X$  (Contoh : saklar nomor 4 terhubung dengan lampu nomor 4, 8, 12, ..., 2016). Apabila lampu dalam keadaan mati dan tombol ditekan, maka lampu tersebut akan menyala. Begitu pula apabila lampu dalam keadaan nyala dan tombol ditekan, maka lampu tersebut akan mati. Diketahui bahwa semua lampu masih dalam keadaan mati kemudian Pak Ganesh menekan semua saklar yang ada. Berapa banyak lampu yang menyala pada akhirnya?
- A. 0
  - B. 1
  - C. 44
  - D. 45
  - E. 2017
25. Nilai dari  $\sum_{i=1}^{2018} FPB(i, 6)$  adalah ...
- A. 5040
  - B. 5041

- C. 5042  
D. 5043  
E. 5044
26. Diketahui bahwa  $KPK(X, Y) = 84$  dan  $FPB(x, y) = 3$ . Banyaknya kemungkinan pasangan  $(x, y)$  ada ...  
A. 1  
B. 2  
C. 3  
D. 4  
E. 5
27. Dua buah bilangan  $(a, b)$  dikatakan relatif prima jika  $FPB(a, b) = 1$ . Jika  $a$  dan  $b$  adalah bilangan bulat positif kurang dari sama dengan 10, ada berapa banyak kemungkinan pasangan  $(a, b)$  yang relatif prima?  
A. 61  
B. 62  
C. 63  
D. 64  
E. 65
28. Banyak faktor positif dari 1200 yang merupakan kelipatan 6 atau kelipatan 5 adalah ...  
A. 21  
B. 22  
C. 23  
D. 24  
E. 25
29. Berapakah banyak faktor dari 19800 yang juga merupakan faktor dari 11340?  
A. 14  
B. 16  
C. 18  
D. 20  
E. 22
30. Berapa banyak angka 0 berurutan di akhir bilangan 1000! (10500, terdapat 2 angka 0 di akhir bilangan) ?  
A. 248  
B. 249  
C. 250  
D. 251  
E. 252