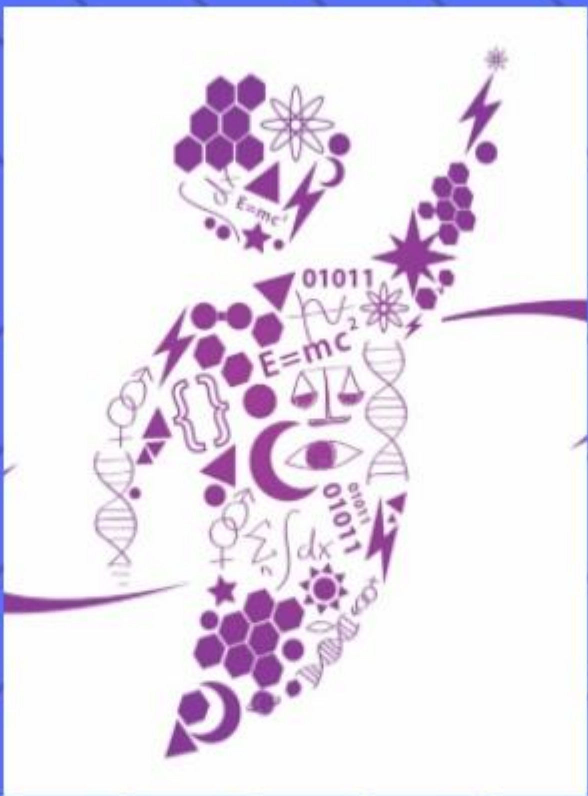
PAKET 1

TRY OUT OSK ONLINE 2019

SMA
MATEMATIKA

po.alcindonesia.co.id



WWW.ALCINDONESIA.CO.ID

@ALCINDONESIA

085223273373

PEMBAHASAN PAKET 1

1. Diketahui f adalah fungsi pada bilangan real sehingga $f\left(x+y^2\right)=f(x)+2\left(f(y)^2\right)$ dan $f(1)\neq 0.$ Tentukan nilai dari $f(2008)$.
   A. 1000
   B. 1001
   C. 1002
   D. 1003
   E. 1004

   KUNCI: E

   Set $x = y = 0$, diperoleh $f(0) = f(0) + 2\left(f(0)\right)^2$ atau $f(0) = 0$.

   Set $x = 0$ dan $y = 1$, diperoleh $f(1) = 2\left(f(1)\right)^2$ atau $f(1) = \frac{1}{2}$ karena $f(1) \neq 0$.

   Set $y = 1$, diperoleh $f(x+1) = f(x) + \frac{1}{2}$.

   Dengan mensubstitusikan $x = 0, 1, 2, \ldots, 2007$, diperoleh

$$\begin{aligned} f(1) &= f(0) + \frac{1}{2} \\ f(2) &= f(1) + \frac{1}{2} \\ f(3) &= f(2) + \frac{1}{2} \\ &\vdots \\ f(2007) &= f(2006) + \frac{1}{2} \\ f(2008) &= f(2007) + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

   Jumlahkan semua persamaan, diperoleh $f(2008) = f(0) + 1004 = 1004$.

2. Jika $f(x) = x^2 + x,$ maka $4f(a) = f(b)$ memiliki solusi bilangan asli sebanyak . . . .
   A. 0
   B. 1
   C. 2
   D. 3
   E. 4

KUNCI: A

Pandang sebagai persamaan kuadrat dalam b,

$$b^2 + b - 4a - 4a^2 = 0$$

Persamaan kuadrat diatas memiliki nilai diskriminan,

$$D = 1 + 16a + 16a^2$$

Andaikan persamaan tersebut memiliki solusi bilangan asli, maka haruslah,

$$D = 1 + 16a + 16a^2 = t^2$$

untuk suatu bilangan bulat t.

Perhatikan bahwa karena,

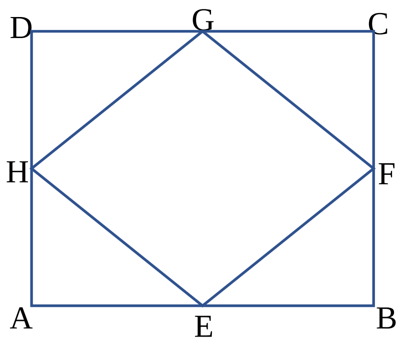
$$(4a)^2 < 1 + 16a + 16a^2 < (4a+2)^2$$

maka haruslah $t^2 = (4a+1)^2 \to a = 0$ yang tidak sesuai dengan syarat bahwa a bilangan asli.

Maka persamaan tersebut tidak memiliki solusi bilangan asli.

3. Dua persegi panjang memiliki ukuran berbeda tetapi perbandingan panjang dan lebarnya sama. Persegi panjang kecil diletakkan pada yang besar, sehingga pada tiap sisi persegi panjang terdapat titik sudut persegi panjang kecil. Tentukan rasio panjang dan lebar persegi panjang itu.
   A. 1 : 1
   B. 1 : 2
   C. 2 : 1
   D. 2 : 3
   E. 3 : 2

KUNCI: A



Diberikan persegi panjang *ABCD*. Misalkan *EFGH* adalah persegi panjang yang perbandingan lebar dan panjangnya sama dengan *ABCD* dengan *E* ada pada *AB*, *F* ada pada *BC*, *G* ada pada *CD*, *H* ada pada *DA*. Diperoleh sudut *AHE* + sudut *AEH* = sudut *AEH* + sudut *FEB* = sudut *FEB* + sudut *BFE* = sudut *BFE* + sudut *GFC* = sudut *GFC* + sudut *CGF* = sudut *CGF* + sudut *HDG* = sudut *HDG* + sudut *DHG* = sudut *DHG* + sudut *AHE* = 90°.

Jadi, sudut *AEH* = sudut *BFE* = sudut *CGF* = sudut *DHG*, sudut *AHE* = sudut *FEB* = sudut *GFC* = sudut *HDG*, dan sudut *HAE* = sudut *EBF* = sudut *FCG* = sudut *GDH* = 90°. Akibatnya, segitiga *HAE*, *EBF*, *FCG*, dan *GDH* saling sebangun. Karena *EF* = *GH* dan *FG* = *HE*, maka segitiga *EBF* kongruen dengan segitiga *GDH* dan segitiga *HAE* kongruen dengan segitiga *FCG*.

Selanjutnya, dimisalkan $AE = a$, $EB = b$, $BF = c$, $FC = d$. Diperoleh $CG = a$, $GD = b$, $DH = c$, $HA = d$ dan $\frac{c}{a} = \frac{d}{b}$.

Misalkan $\frac{c}{a} = \frac{d}{b} = n$ maka $AB = a + b$, $BC = n(a + b)$ dan $EF^2 = b^2 + n^2a^2, FG^2 = a^2 + n^2b^2$. Tanpa mengurangi keumuman, misalkan $a \geq b, n \geq 1$. Diperoleh $EF \geq FG, BC \geq AB$.

Akibatnya,

$$\frac{EF^2}{FG^2} = \frac{BC^2}{AB^2}$$
$$\frac{n^2a^2 + b^2}{a^2 + n^2b^2} = n^2$$
$$n^2a^2 + b^2 = n^2\left(a^2 + n^2b^2\right)$$
$$\left(n^4 - 1\right)b^2 = 0 \rightarrow n = 1$$

Jadi, rasionya adalah 1 : 1.

4. Berapa banyak tabel 4 × 4 berbeda yang elemennya semuanya adalah 1 dan –1 sehingga jumlah elemen setiap baris adalah 0 dan jumlah elemen setiap kolom adalah 0?
   A. 60
   B. 70
   C. 80
   D. 90
   E. 100

KUNCI: D

Pada setiap kolom dan setiap baris, terdapat masing-masing 2 angka –1 dan 1 sehingga banyaknya cara menyusun kolom pertama adalah $\frac{4!}{2!2!} = 6$. Pada kolom 2 ada 3 kasus yang harus diselesaikan.

a) Angka-angka pada kolom 1 dan 2, semua yang bersebelahan nilainya sama sudah jelas bahwa angka-angka pada kolom 3 dan 4 yang bersebelahan nilainya sama maka banyaknya kemungkinan jawab ada 1.
b) Angka-angka pada kolom 1 dan 2, 2 bilangan yang bersebelahan nilainya sama dan 2 lainnya berbeda. Pada kolom ke-2 terdapat 4 kemungkinan dan pada kolom ke-3 terdapat 2 kemungkinan maka banyaknya kemungkinan jawab adalah $4 \times 2 = 8$.
c) Angka-angka pada kolom 1 dan 2 semuanya berbeda. Pada kolom ke-3 ada $\frac{4!}{2!2!} = 6$ kemungkinan, maka banyaknya kemungkinan jawab adalah 6.

Maka total kemungkinan jawab adalah $(1 + 8 + 6) \times 6 = 15 \times 6 = 90$ kemungkinan.

5. Diberikan $f:(0,1) \to R$ dimana

$$f(x) = \frac{\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}\left((1+x)\sqrt{1+x}-(1-x)\sqrt{1-x}\right)}{x\left(2+\sqrt{1-x^2}\right)}$$

Tentukan nilai $f(2018)$.

A. 0
B. 1
C. $\sqrt{2}$
D. $\sqrt{3}$
E. 2

KUNCI: C

Perhatikan bahwa

$$\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}} = \sqrt{\frac{1+x+2\sqrt{1-x^2}-(1-x)}{2}} = \frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{2}}$$

Sehingga diperoleh

$$f(x)=\frac{\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}\left((1+x)\sqrt{1+x}-(1-x)\sqrt{1-x}\right)}{x\left(2+\sqrt{1-x^2}\right)}$$
$$=\frac{\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}\left(\left(\sqrt{1+x}\right)^3-\left(\sqrt{1-x}\right)^3\right)}{x\left(2+\sqrt{1-x^2}\right)}$$
$$=\frac{\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)\left(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}\right)\left(1+x+\sqrt{1-x^2}+1-x\right)}{x\sqrt{2}\left(2+\sqrt{1-x^2}\right)}$$
$$=\frac{(1+x-1+x)\left(2+\sqrt{1-x^2}\right)}{x\sqrt{2}\left(2+\sqrt{1-x^2}\right)}$$
$$=\sqrt{2}$$

Terbukti bahwa f konstan. Maka $f(2018)=\sqrt{2}$

6. Misalkan ada bilangan bulat x, y, z, p sehingga $0<x<y<z<p$ dan p bilangan prima. Jika x^3, y^3, z^3 dibagi p bersisa sama, maka sisa pembagian $x^2+y^2+z^2$ oleh $x+y+z$ adalah . . .
   A. 0
   B. 1
   C. 2
   D. 3
   E. 4

   KUNCI: A

   Perhatikan bahwa $x^3\equiv y^3\equiv z^3 \pmod{p}$ dan karena $0<x<y<z<p$ diperoleh

$$p\mid x^2+xy+y^2,\ p\mid x^2+xz+z^2,\ p\mid y^2+yz+z^2.$$

   Akibatnya, $p\mid (y-z)(x+y+z)$ sehingga $p\mid x+y+z$.
   Jika kita menjumlahkan semua,

$$p\mid 2\left(x^2+y^2+z^2\right)+xy+yz+zx$$

   Sehingga,

$$2p\mid 3\left(x^2+y^2+z^2\right)+(x+y+z)^2.$$

   Karena $p\mid x+y+z$ dan $0<x<y<z<p$ maka $x+y+z=p$ atau $x+y+z=2p$.

Mudah di cek bahwa $p \neq 3$ sehingga dalam kedua kasus kita punya $x+y+z \mid 2p$ dan $2p \mid 3\left(x^2+y^2+z^2\right)+(x+y+z)^2$.

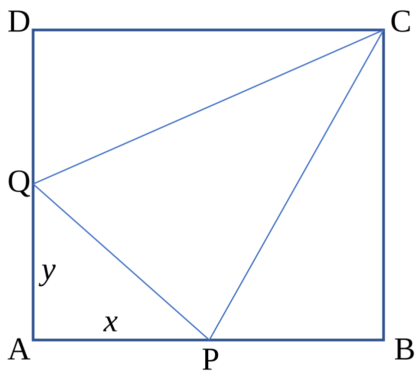
Jadi, $x+y+z \mid 3\left(x^2+y^2+z^2\right)$ dan karena $p \neq 3$ maka (p, 3) = (2p, 3) = 1.

Jadi, $x+y+z \mid x^2+y^2+z^2$.

Sisa pembagian = 0.

7. Diberikan persegi *ABCD* dengan panjang sisi 1. Titik *P* dan *Q* pada sisi *AB* dan *AD*. Jika keliling *APQ* adalah 2, tentukan besar $\angle PCQ$.
   A. 30^o
   B. 45^o
   C. 60^o
   D. 75^o
   E. 90^o

KUNCI: B



Misalkan *AP* = *x*, *AQ* = *y*. Diperoleh

$$x+y+\sqrt{x^2+y^2}=2$$
$$x^2+y^2=4-4(x+y)+x^2+y^2+2xy$$
$$x+y=\frac{xy+2}{2}$$

Berdasarkan rumus Phytagoras diperoleh

$$PQ=\sqrt{x^2+y^2}$$
$$PC=\sqrt{1+(1-x)^2}=\sqrt{2-2x+x^2}$$
$$QC=\sqrt{1+(1-y)^2}=\sqrt{2-2y+y^2}$$

Berdasarkan aturan Cosinus pada segitiga *PCQ* diperoleh

$$PQ^2 = QC^2 + PC^2 - 2QC \cdot PC \cos\angle PCQ$$
$$x^2 + y^2 = 2 - 2y + y^2 + 2 - 2x + x^2 - 2QC \cdot PC \cos\angle PCQ$$
$$QC \cdot PC \cos\angle PCQ = 2 - x - y = 2 - \frac{xy+2}{2} = \frac{2-xy}{2}$$
$$\cos\angle PCQ = \frac{2-xy}{2QC \cdot PC}$$

Kemudian,

$$\begin{aligned} QC \cdot PC &= \sqrt{2-2y+y^2}\sqrt{2-2x+x^2} \\ &= \sqrt{4-4(x+y)+2(x+y)^2-2xy(x+y)+x^2y^2} \\ &= \sqrt{4-2(xy+2)+\frac{(xy+2)^2}{2}-xy(xy+2)+x^2y^2} \\ &= \sqrt{4-2xy-4+\frac{(xy+2)^2}{2}-x^2y^2-2xy+x^2y^2} \\ &= \sqrt{-4xy+\frac{(xy+2)^2}{2}} \\ &= \sqrt{\frac{(2-xy)^2}{2}} \\ &= \frac{2-xy}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Jadi, $QC \cdot PC = \dfrac{2-xy}{\sqrt{2}}$. Akibatnya diperoleh

$$\cos\angle PCQ = \frac{(2-xy)\sqrt{2}}{2(2-xy)} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Jadi, $\angle PCQ = 45°$.

8. Satu keluarga terdiri dari Ayah, Ibu, dan n anak hendak menyeberangi sungai. Di tepi sungai tertambat rakit. Rakit ini hanya dapat ditumpangi 1 orang dewasa atau 2 orang anak. Misalkan posisi awal keluarga tersebut adalah A dan tujuannya adalah B, maka kita sebut $A \to B \to C$ sebagai satu proses. Berapa proses yang diperlukan agar keluarga tersebut dapat menyeberang?
   A. $n-2$
   B. $n-1$
   C. n
   D. $n+1$

E. $n + 2$

KUNCI: E

Misalkan orang dewasa kita beri nilai $2X$ dan anak-anak kita beri nilai X, maka rakit tersebut hanya dapat menampung total nilai $2X$ (1 dewasa saja atau 2 anak-anak saja).

Perhatikan untuk satu proses, banyak maksimum "nilai" yang bisa ditransfer dari A ke B adalah $2X$, sedangkan untuk rakit tersebut supaya bisa kembali, perlu minimum 1 orang yang mengemudikan (yakni minimum X nilai).

Jadi dalam satu proses, kita bisa mentransfer paling banyak $2X - X = X$ nilai dari A ke B. Namun, hati-hati karena untuk penyeberangan terakhir, tidak perlu kembali lagi, jadi penyeberangan terakhir bisa mentransfer $2X$ nilai.

Jadi misalnya banyaknya proses yang terjadi adalah k proses + 1 penyeberangan terakhir, banyaknya nilai yang bisa ditransfer adalah $kX + 2X$.

Mula-mula, banyaknya nilai yang ada adalah $(n + 4)X$ (n anak dan 2 orang dewasa).
Maka $kX + 2X = (n + 4)X$ sehingga nilai $k = n + 2$.

9. Pasangan solusi bilangan real yang memenuhi persamaan berikut ada sebanyak . . . . pasang.

$$(x-1)(y^2+6) = y(x^2+1)$$
$$(y-1)(x^2+6) = x(y^2+1)$$

A. 0
B. 1
C. 2
D. 3
E. 4

KUNCI: E

Kurangkan kedua persamaan pada soal, diperoleh

$$(x - y)(2xy - 7 - (x + y)) = 0$$

Kemungkinan pertama, $x - y = 0$, maka mengakibatkan

$$(x-1)(x^2+6) = x(x^2+1) \Rightarrow x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow (x-2)(x-3) = 0$$

Maka penyelesaiannya adalah $(x, y) = (2, 2), (3, 3)$.

Kemungkinan kedua, $2xy - 7 - (x + y) = 0$, difaktorkan menjadi $(2x - 1)(2y - 1) = 15$. Misalkan $a = 2x - 1$, maka $2y - 1 = \frac{15}{a}$. Jumlahkan kedua persamaan pada soal, lalu dengan manipulasi aljabar, diperoleh $(2x-5)^2 + (2y-5)^2 = 2$. Kemudian,

$$\begin{aligned}
(2x-5)^2 + (2y-5)^2 &= 2 \\
(a-4)^2 + \left(\frac{15}{a} - 4\right)^2 &= 2 \\
(a-3)^2 - 2(a-3) + 1 + \left(\frac{15}{a} - 5\right)^2 + 2\left(\frac{15}{a} - 5\right) + 1 &= 2 \\
(a-3)^2 - 2(a-3) + \left(\frac{15}{a} - 5\right)^2 + 2\left(\frac{15}{a} - 5\right) &= 0 \\
(a-3)(a-5) + \left(\frac{15}{a} - 5\right)\left(\frac{15}{a} - 3\right) &= 0 \\
(a-3)(a-5)\left(1 + \frac{15}{a^2}\right) &= 0
\end{aligned}$$

Jika $a = 3$, maka $x = 2$ dan $y = 3$. Jika $a = 5$, maka $x = 3$ dan $y = 2$. Maka penyelesaiannya adalah $(x, y) = (2, 3), (3, 2)$.

Seluruh solusi yang memenuhi adalah $(x, y) = (2, 2), (2, 3), (3, 2), (3, 3)$.
Jadi solusinya ada 4 pasang.

10. Banyaknya pasangan bilangan bulat (x, y) yang memenuhi persamaan berikut adalah . . . .

$$x^3 + (x+1)^3 + (x+2)^3 + \ldots + (x+7)^3 = y^3.$$

A. 0
B. 1
C. 2
D. 3
E. 4

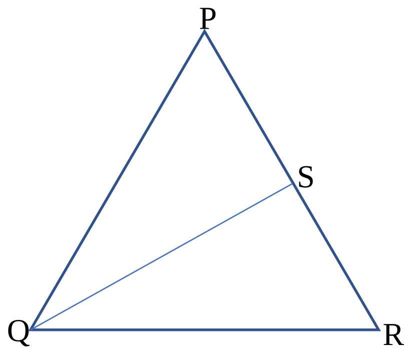
KUNCI: E

Misalkan ruas kiri pada soal itu $f(x)$. Pertama, anggap $x \geq 0$. Perhatikan bahwa:
$(2x+7)^3 < f(x) < (2x+10)^3$.
Jika $f(x) = (2x+8)^3$ maka $f(x) - (2x+8)^3 = -12x^2 + 36x + 272 = 0$, yang tidak memiliki solusi bulat.

Jika $f(x) = (2x+9)^3$ maka $f(x) - (2x+9)^3 = -24x^2 + 66x + 55 = 0,$ juga tidak memiliki solusi bulat.
Jadi $x \leq 0.$ Perhatikan bahwa $f(-x-7) = -f(x),$ sehingga tidak mungkin $x \leq 7.$
Maka $-6 \leq x \leq 1.$ Setelah dicoba satu per satu, didapat solusi $(-2,6), (-3,4), (-4,-4), (-5,-6).$
Ada 4 pasang solusi bulat.

11. Segitiga *PQR* adalah sama kaki dengan *PQ* = *PR*. Garis bagi dari titik *Q* memotong *PR* di *S* dan diketahui bahwa *QR* = *QS* + *PS*. Tentukanlah besar sudut *P*.
    A. 30°
    B. 45°
    C. 60°
    D. 75°
    E. 90°

KUNCI: C



Misalkan *PQ* = *PR* = *x*, *PS* = *y*, dan *QR* = *z*, maka *QS* = *QR* – *PS* = *z* – *y* dan *SR* = *PR* – *PS* = *x* – *y*.

Dengan menggunakan Teorema Garis Bagi: $QS^2 = QP \cdot QR - SP \cdot SR$ diperoleh $(z-y)^2 = x(z-y) - y(x-y)$ yang ekuivalen dengan $(z - x)(z - 2y) = 0$.

Ada dua kasus yang mungkin.

Kemungkinan pertama, $x = z$. Berarti segitiga *PQR* sama sisi, sehingga diperoleh besar sudut $P = 60°$.

Kemungkinan kedua, $z = 2y$. Berdasarkan Teorema Garis Bagi berlaku: $\frac{x}{y} = \frac{2y}{x-y}$ yang ekuivalen dengan $(x - 2y)(x + y) = 0$. Diperoleh $x = 2y$, sehingga didapat $PQ = x = 2y = PS + QS$. Suatu kontradiksi sebab *PQS* segitiga.

Jadi, besar sudut P adalah 60°.

12. Di suatu pesta, setiap orang yang hadir mengenal tepat 22 orang lain dalam pesta. Bila X dan Y saling mengenal, maka mereka tidak mengenal satupun orang lain yang sama, dan bila X dan Y tidak saling mengenal, maka mereka mengenali tepat 6 orang yang sama. Tentukan berapa banyaknya orang yang hadir dalam pesta tersebut.
    A. 90
    B. 100
    C. 110
    D. 120
    E. 130

    KUNCI: B

    Ambil sembarang orang di pesta, misalkan si X, maka ada 22 orang yang kenal dengan X. Jika banyaknya orang di pesta adalah N, maka ada N – 23 orang lainnya tidak kenal dengan X. Ditambah lagi, pada 22 orang yang kenal dengan X, tidak boleh saling kenal, karena jika mereka saling kenal, X akan menjadi *common friend*.

    Setiap kenalan si X punya 21 orang kenalan lain di N – 23 orang yang tidak mengenal X. Ditambah lagi, tiap orang pada N – 23 orang tersebut mempunyai 6 orang kenalan pada 22 orang kenalan X.

    Jadi masalah ini berubah menjadi: Bagaimana mendistribusikan N – 23 objek pada 22 blok, dimana setiap blok memuat 21 objek dan tiap objek muncul sebanyak 6 kali diantara 22 blok tersebut. Hal ini hanya bisa terjadi jika $22 \times 21 = 6(N - 23)$ sehingga diperoleh $N = 100$.

13. Sebuah polinomial $p(x)$ jika dibagi $x - a$, $x - b$, dan $x - c$ akan bersisa masing-masing a, b, c. Berapa sisa pembagian $p(x)$ oleh $(x-a)(x-b)(x-c)$?
    A. x
    B. $a + b + c$
    C. $a + b + c + x$
    D. $ab + bc + ca$
    E. $abc + x$

    KUNCI: A

    Bentuk pada soal dapat dituliskan
    $$p(x) = (x-a)(x-b)(x-c)q(x) + A(x-a)(x-b) + B(x-a) + a$$

Dengan mengambil $p(b) = B(b-a)+a$ sehingga b = 1, dan diperoleh sisanya adalah x.

14. Perhatikan deret bilangan $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, . . . sehingga

$$f(n) = 2^n + 3^n + 6^n - 1$$

untuk n bilangan asli. Banyaknya bilangan asli yang relatif prima dengan setiap suku deret tersebut adalah . . . .

A. 0
B. 1
C. 2
D. 3
E. 4

KUNCI: B

Perhatikan bahwa p = 2 dan p = 3 habis membagi $p(2)$ = 48.
Sekarang untuk $p \geq 5$, kita tahu dengan Fermat Little Theorem (FLT),

$$2 \cdot 3^{p-1} + 3 \cdot 2^{p-1} + 6^{p-1} - 6 \equiv 0 \bmod(p)$$
$$6\left(3^{p-2} + 2^{p-2} + 6^{p-2} - 1\right) \equiv 0 \bmod(p)$$

Sehingga p habis membagi $6f(p-2)$. Karena $(6, p) = 1$, maka p membagi $f(n-2)$.
Sehingga, karena semua bilangan prima tidak relatif prima dengan setiap suku di barisan tersebut, maka setiap bilangan komposit yang dapat dibentuk dari kombinasi semua bilangan prima juga tidak relatif prima dengan setiap suku di barisan tersebut. Hal ini tidak berlaku pada bilangan asli 1, dimana 1 tidak dibentuk dari kombinasi bilangan-bilangan prima.
Jadi, hanya 1 yang relatif prima dengan setiap suku di barisan tersebut.

15. Kawat sepanjang 45 cm dipotong menjadi dua bagian, kemudian masing-masing bagian dibentuk menjadi segitiga sama sisi dan jumlah luas lingkaran luar kedua segitiga itu adalah 39π cm^2. Hitunglah panjang sisi masing-masing segitiga itu.

A. 14 cm
B. 15 cm
C. 16 cm
D. 17 cm
E. 18 cm

KUNCI: B

Misalkan satu segitiga memiliki sisi a cm. Diperoleh segitiga lainnya memiliki sisi $15 - a$ cm. Radius lingkaran luarnya masing-masing adalah $\frac{1}{\sqrt{3}}a$ dan $\frac{1}{\sqrt{3}}(15-a)$. Luas masing-masing lingkaran luar kedua segitiga tersebut adalah:

$$\pi\left(\frac{1}{\sqrt{3}}a\right)^2 = \frac{a^2\pi}{3} \text{ dan } \pi\left(\frac{1}{\sqrt{3}}(15-a)\right)^2 = \frac{(a^2-30a+225)\pi}{3}$$

Diperoleh:

$$\begin{aligned}\frac{a^2\pi}{3}+\frac{(a^2-30a+225)\pi}{3} &= 39\pi \\ 2a^2-30a+225 &= 117 \\ 2a^2-30a+108 &= 0 \\ 2(a-6)(a-9) &= 0\end{aligned}$$

Didapat $a = 6$ atau $a = 9$. Jadi panjang sisinya adalah 6 cm dan 9 cm. Jumlahnya = 15 cm.

16. Pada basement dari gedung 5 lantai, Adam (pria), Bob (pria), Cindy (wanita), Diana (wanita), dan Ernest (pria) masuk ke elevator. Elevator hanya naik dan tidak turun kembali, dan setiap orang keluar dari elevator pada satu dari lima lantai itu. Berapa cara yang mungkin untuk mereka meninggalkan elevator sehingga tidak ada waktu dimana satu pria dan satu wanita ditinggalkan berdua di elevator?

A. 1970
B. 1971
C. 1972
D. 1973
E. 1974

KUNCI: D

Tanpa batas ketentuan apapun ada $5^5 = 3125$ cara untuk keluar dari elevator, karena setiap dari lima orang itu bisa turun pada lima lantai.

Misalkan N adalah banyaknya cara sehingga ada satu wanita dan satu pria ditinggal berdua di elevator. Ada $3 \times 2 = 6$ pasang pria-wanita. Jadi kita mencari banyaknya cara agar Adam dan Cindy ditinggal berdua di elevator, yaitu $N/6$. Bob, Diana, Ernest keluar di lantai k atau sebelumnya. Tanpa ketentuan, mereka bisa keluar sebanyak k^3 cara. Tetapi satu dari mereka harus keluar di lantai ke-k. Banyaknya cara agar tidak ada yang keluar di lantai k adalah $(k-1)^3$. Jadi banyaknya cara agar mereka keluar di atau sebelum k, dan ada satu yang keluar di lantai k adalah $k^3-(k-1)^3$. Setelah itu, Adam dan Cindy bisa keluar dengan pilihan $5-k$ lantai. Karena k bisa memiliki nilai 1 sampai 4, maka kita dapat:

$$\frac{N}{6}=\sum_{k=1}^{4}\left(k^3-(k-1)^3\right)(5-k)^2=192.$$

Jadi $N = 6 \times 192 = 1152$. Maka nilai yang dicari adalah $5^5 - N = 1973$.

17. Tripel bilangan asli (x, y, z) yang memenuhi persamaan berikut ada sebanyak . . . .

$$x+y-z=x^2+y^2-z^2=12.$$

A. 1
B. 3
C. 5
D. 7
E. 9

KUNCI: D

Perhatikan bahwa $x+y=12+z$ dan $x^2+y^2=12+z^2$.
Kemudian,

$$144+24z+z^2=(12+z)^2=(x+y)^2=x^2+2xy+y^2=2xy+z^2+12$$

Diperoleh,

$$xy = 66 + 12z$$

Substitusi $z=x+y-12$, sehingga $xy=66+12x+12y-144$. Susun ulang hingga menjadi $xy-12x-12y-144=66$ atau,

$$(x-12)(y-12)=66.$$

Diperoleh $(x-12) = -1,-2,-3,-6,-11,-22,-33,-66, 1, 2, 3, 6, 11, 22, 33, 66$.
Karena x dan y bilangan asli maka yang memenuhi hanyalah:

$$x = 1, 6, 13, 14, 15, 18, 23, 34, 45, 72$$
$$y = 6, 1, 72, 45, 34, 23, 18, 15, 14, 13$$

Tapi karena $x + y = z + 12$ dan z bilangan asli maka yang memenuhi hanyalah triplet (13, 72, 73), (14, 45, 47), (15, 34, 37), (18, 23, 29), (23, 18, 29), (34, 15, 37), (72, 13, 73). Ada sebanyak 7 solusi.

18. Banyaknya pasangan bilangan asli x dan y sehingga $x^2 + 3y$ dan $y^2 + 3x$ adalah bilangan kuadrat ada sebanyak . . . .
    A. 0
    B. 1
    C. 2
    D. 3
    E. 4

    KUNCI: D

    Misalkan a dan b bilangan asli sehingga $x^2 + 3y = (x + a)^2$ dan $y^2 + 3x = (y + b)^2$.
    Jadi $3y = 2ax + a^2$ dan $3x = 2by + b^2$. Dengan menyelesaikan persamaan linear ini, didapat

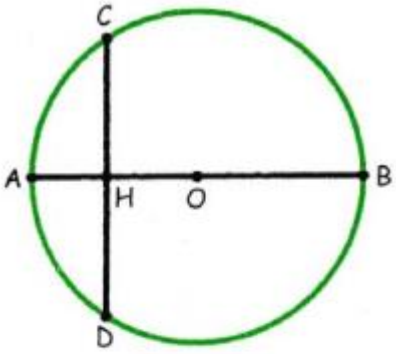
$$x = \frac{2a^2b + 3b^2}{9 - 4ab}$$
$$y = \frac{2b^2a + 3a^2}{9 - 4ab}$$

    Karena x dan y bilangan positif, maka $9 - 4ab$ haruslah bilangan positif. Nilai $ab > 2$ akan menyebabkan $9 - 4ab$ negatif. Maka $ab = 1$ atau $ab = 2$. Jadi $(a, b) = (1, 1), (1, 2), (2, 1)$. Setelah memasukkan nilai-nilai ini, didapat $(x, y) = (1, 1), (11, 16), (16, 11)$. Jadi ada 3 pasang solusi.

19. Tali busur CD tegak lurus diameter AB dan berpotongan di titik H. Panjang AB dan CD adalah bilangan bulat. Panjang AB merupakan bilangan bulat 2 angka dan panjang CD juga merupakan bilangan 2 angka dengan menukar posisi kedua angka AB. Sedangkan panjang OH merupakan bilangan rasional. Tentukan panjang AB.
    A. 50
    B. 55
    C. 60
    D. 65
    E. 70

    KUNCI: D

    Perhatikan gambar berikut.



Misalkan panjang AB = $ab = 10a + b$ maka OC = ½ AB = ½ $(10a + b)$
Panjang CD = $ba = 10b + a$ maka CH = ½ $(10b + a)$
Dengan a dan b adalah bilangan bulat positif dan $0 < a \leq 9, 0 < b \leq 9$

$$OH = \sqrt{OC^2 - CH^2}$$

$$OH = \frac{1}{2}\sqrt{(10a+b)^2 - (10b+a)^2}$$

$$OH = \frac{3}{2}\sqrt{11(a+b)(a-b)}$$

Karena OH adalah bilangan rasional dan $a + b > a - b$ maka $a + b = 11k$ dan $a - b = k$ dengan k bilangan rasional. Didapat $2a = 12k$ sehingga $a = 6k$ dan $2b = 10k$ sehingga $b = 5k$. Maka $a : b = 6k : 5k = 6 : 5$. Karena a dan b bilangan bulat dan $0 < a \leq 9, 0 < b \leq 9$ maka $a = 6$ dan $b = 5$. Jadi panjang AB = 65.

20. Sebuah bilangan dipilih secara acak dari bilangan-bilangan 1, 2, 3, 4, 5, 6, ⋯, 999, 1000. Peluang bilangan yang terpilih merupakan pembagi M dengan M adalah bilangan asli kurang dari atau sama dengan 1000 adalah 0,01. Tentukan nilai maksimum dari M.
    A. 576
    B. 676
    C. 776
    D. 876
    E. 976

    KUNCI: E

    Kalau $p = 0{,}01$ maka banyaknya faktor positif dari $M = 10$
    Karena $10 = 1 \cdot 10 = 2 \cdot 5$ maka M harus berbentuk p_1^9 atau $p_1 \cdot p_2^4$ dengan p_1 dan p_2 adalah bilangan prima.

    - ✓ Jika $M = p_1^9$
      $p_1^9 < 1000$ maka p_1 maks = 2
      $M_{maks} = 29 = 512$
    - ✓ Jika $M = p_1 \cdot p_2^4$
      Karena $p_1 \geq 2$ maka $p_2^4 \leq 500 \rightarrow p_2 = 2$ atau 3

- Jika $p_2 = 2$
  $M = 16\,p_1 \leq 1000 \rightarrow M_{\text{maks}} = 976$ didapat jika $p_1 = 61$
- Jika $p_2 = 3$
  $M = 81\,p_1 \leq 1000 \rightarrow M_{\text{maks}} = 891$ didapat jika $p_1 = 11$

Maka nilai maksimum dari M adalah 976

21. Banyaknya pasangan bilangan bulat positif m, n dengan n bilangan ganjil yang memenuhi $\frac{1}{m}+\frac{4}{n}=\frac{1}{12}$ adalah . . . .
    A. 1
    B. 2
    C. 3
    D. 4
    E. 5

    KUNCI: C

    Perhatikan bahwa persamaan tersebut dapat diubah menjadi:

$$12n + 48m = mn$$
$$(m - 12)\,(n - 48) = 576 = 36 \times 16$$

Karena n ganjil maka $n - 48$ juga ganjil.
Faktor ganjil dari 576 adalah 1, 3 dan 9.

- ✓ Jika $n - 48 = 1 \rightarrow n = 49$ dan $m - 12 = 576 \rightarrow m = 588$
- ✓ Jika $n - 48 = 3 \rightarrow n = 51$ dan $m - 12 = 192 \rightarrow m = 204$
- ✓ Jika $n - 48 = 9 \rightarrow n = 57$ dan $m - 12 = 64 \rightarrow m = 76$

Pasangan (m, n) yang memenuhi adalah (49, 588); (51, 204); (57, 76) yaitu sebanyak 3 pasang solusi.

22. Bilangan real a, b, c, dan d memenuhi $ab + c + d = 3$, $bc + d + a = 5$, $cd + a + b = 2$, $da + b + c = 6$. Nilai $a + b + c + d$ adalah . . . .
    A. 4
    B. 5
    C. 6
    D. 7
    E. 8

    KUNCI: B

    Dari soal diketahui:

$$ab + c + d = 3 \cdots\cdots (1)$$
$$bc + d + a = 5 \cdots\cdots (2)$$
$$cd + a + b = 2 \cdots\cdots (3)$$
$$da + b + c = 6 \cdots\cdots (4)$$

Perhatikan bahwa:

Persamaan (1) + (2) = Persamaan (3) + (4)

$$ab + c + d + bc + a + d = cd + a + b + da + b + c$$

$$b(a + c) + 2d = d(a + c) + 2b$$
$$(b - d)(a + c) = 2(b - d)$$
$$(b - d)(a + c - 2) = 0$$

Maka haruslah $b = d$ atau $a + c = 2$.

- ✓ Jika $b = d$
  Persamaan (2) $\rightarrow bc + a + b = 5$
  Persamaan (3) $\rightarrow bc + a + b = 2$
  Kontradiksi, maka tidak ada nilai a, b, c dan d yang memenuhi.

- ✓ Jika $a + c = 2$
  Jumlahkan persamaan (1) + (2) $\rightarrow ab + bc + a + c + 2d = 8$
  $b(a + c) + a + c + 2d = 8$
  $b + d = 3$
  Jumlahkan persamaan (2) + (3) $\rightarrow bc + cd + 2a + b + d = 7$
  $c(b + d) + 2a + b + d = 7$
  $3c + 2a = 4$
  $3c + 2(2 - c) = 4 \rightarrow c = 0$ dan $a = 2$
  Persamaan (2) $\rightarrow b(0) + 2 + d = 5 \rightarrow d = 3$ dan $\mathrm{b} = 3 - 3 = 0$
  Maka (a, b, c, d) yang memenuhi adalah (2, 0, 0, 3)

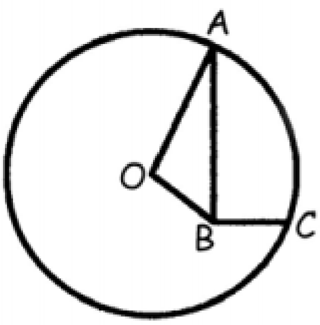
  Maka $a + b + c + d = 5$.

23. A dan C terletak pada sebuah lingkaran berpusat di O dengan radius $\sqrt{50}$. Titik B terletak di dalam lingkaran sehingga $\angle ABC = 90^o$, AB = 6 dan BC = 2. Tentukan OB.
    A. $\sqrt{22}$
    B. $\sqrt{24}$
    C. $\sqrt{26}$
    D. $\sqrt{28}$

E. $\sqrt{30}$

KUNCI: C

Perhatikan gambar berikut.



$$\tan \angle BAC = \frac{BC}{AB} = \frac{1}{3}$$
$$AC^2 = AB^2 + BC^2 = 6^2 + 2^2 = 40 \to AC = 2\sqrt{10}$$
AOC adalah segitiga samakaki dengan sudut OAC = sudut OCA.
Buat garis dari O tegak lurus AC. Misalkan garis ini memotong AC di titik D maka:
$$OD^2 = OA^2 - \left(\tfrac{1}{2}AC\right)^2 = 50 - 10 = 40 \to OD = 2\sqrt{10}$$
$$\tan \angle AOC = \frac{OD}{AD} = 2$$
Karena ∠OAC = ∠OAB + ∠BAC maka:
$$\tan\left(\angle OAB + \angle BAC\right) = \frac{\tan \angle OAB + \tan \angle BAC}{1 - \tan \angle OAB . \tan \angle BAC} = 2$$
$$\tan \angle OAB + \frac{1}{3} = 2\left(1 - \tan \angle OAB . \frac{1}{3}\right) \to \tan \angle OAB = 1 \to \cos \angle OAB = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}$$
$$OB^2 = OA^2 + AB^2 - 2.OA.AB \cos \angle OAB$$
$$OB^2 = 50 + 36 - 60 = 26$$
$$OB = \sqrt{26}$$

24. Dua dadu dengan sisinya dicat merah atau biru. Dadu pertama terdiri dari 5 sisi merah dan 1 sisi biru. Ketika kedua dadu tersebut dilempar, peluang munculnya sisi dadu berwarna sama adalah ½. Ada berapa banyak sisi dadu kedua yang berwarna merah?
    A. 0
    B. 1
    C. 2
    D. 3
    E. 4

KUNCI: D

Misalkan banyaknya sisi dadu kedua yang berwarna merah = x maka sisi dadu birunya = 6 – x. Peluang munculnya sisi dadu berwarna sama = $\frac{5}{6}.\frac{x}{6}+\frac{1}{6}.\frac{6-x}{6}$

Maka:

$$\frac{5}{6}.\frac{x}{6}+\frac{1}{6}.\frac{6-x}{6}=\frac{1}{2}\rightarrow 5x+6-x=18\rightarrow x=3$$

Maka banyaknya sisi dadu kedua yang berwarna merah adalah 3.

25. Triple bilangan bulat a, b dan c yang memenuhi $a^2+b^2-8c=6$ ada sebanyak . . . .

A. 0
B. 1
C. 2
D. 3
E. 4

KUNCI: A

Semua bilangan bulat pasti termasuk ke dalam satu satu dari bentuk $4k$, $4k + 1$, $4k + 2$ atau $4k + 3$ dengan k bilangan bulat.

- ✓ Untuk $N = 4k$
  $N^2 = 16k^2$ (habis dibagi 8)
- ✓ Untuk $N = 4k + 1$
  $N^2 = (4k + 1)^2 = 16k^2 + 8k + 1 = 8(2k^2 + k) + 1$ (jika dibagi 8 bersisa 1)
- ✓ Untuk $N = 4k + 2$
  $N^2 = (4k + 2)^2 = 16k^2 + 16k + 4 = 16(k^2 + k) + 4$ (jika dibagi 8 bersisa 4)
- ✓ Untuk $N = 4k + 3$
  $N^2 = (4k + 3)^2 = 16k^2 + 24k + 9 = 8(2k^2 + 3k + 1) + 1$ (jika dibagi 8 bersisa 1)

Dari hal di atas didapat bahwa bilangan kuadrat jika dibagi 8 akan bersisa 0, 1 atau 4. Sehingga $a^2 + b^2$ jika dibagi 8 akan bersisa 0, 1, 2, 4 atau 5. $a^2 + b^2 - 8c$ jika dibagi 8 akan bersisa 0, 1, 2, 4 atau 5. Sedangkan ruas kanan jika dibagi 8 akan bersisa 6. Hal yang tidak mungkin terjadi.

Maka banyak solusi untuk persamaan tersebut adalah nol.