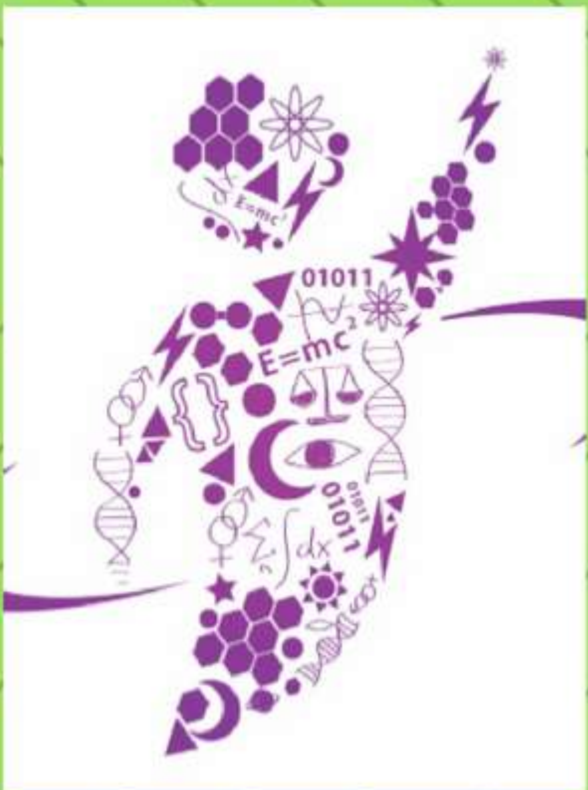
PAKET 11

PELATIHAN ONLINE 2019

SMA
MATEMATIKA

po.alcindonesia.co.id



WWW.ALCINDONESIA.CO.ID

@ALCINDONESIA

085223273373

PEMBAHASAN PAKET 11

1. Solusi: D

Misalkan tiga angka pertama n adalah a, maka $n = 1000a + a + 1 = m^2$

$m^2 - 1 = 1001a = 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot a$

$100000 \leq m^2 \leq 999999$

$316 < m < 1000$

$(m + 1)(m - 1) = 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot a$

• Jika $m + 1 = 143b$ dan $m - 1 = 7c$ dengan $bc = a$

Karena $317 < m + 1 < 1001$ maka $2 < b < 7$.

Karena $m - 1 = 7c$ maka $m - 1 \equiv 0 \ (mod\ 7) \quad \rightarrow \quad m \equiv 1 \ (mod\ 7)$

$m + 1 \equiv 2 \ (mod\ 7) \quad \rightarrow \quad 143b \equiv 2 \ (mod\ 7)$

$143b = 7 \cdot 20b + 3b$

$3b \equiv 2 \ (mod\ 7)$

Karena $2 < b < 7$ maka nilai b yang memenuhi hanya $b = 3$

Jika $b = 3$ maka $m = 143 \cdot 3 - 1 = 428 \rightarrow 428 - 1 = 7c \rightarrow c = 61$

$a = bc = 183 \quad \rightarrow \quad n = 183184 = 428^2$

• Jika $m - 1 = 143b$ dan $m + 1 = 7c$ dengan $bc = a$

Karena $315 < m - 1 < 999$ maka $2 < b < 7$.

Karena $m + 1 = 7c$ maka $m + 1 \equiv 0 \ (mod\ 7) \rightarrow \quad m \equiv -1 \ (mod\ 7)$

$m - 1 \equiv -2 \ (mod\ 7) \quad \rightarrow \quad 143b \equiv -2 \ (mod\ 7)$

$143b = 7 \cdot 20b + 3b$

$3b \equiv -2 \ (mod\ 7) \quad \rightarrow \quad 3b \equiv 5 \ (mod\ 7)$

Karena $2 < b < 7$ maka nilai b yang memenuhi hanya $b = 4$

Jika $b = 4$ maka $m = 143 \cdot 4 + 1 = 573 \quad \rightarrow 573 + 1 = 7c \rightarrow c = 82$

$a = bc = 328 \quad \rightarrow n = 328329 = 573^2$

• Jika $m + 1 = 91b$ dan $m - 1 = 11c$ dengan $bc = a$

Karena $315 < m + 1 < 999$ maka $3 < b < 11$. Nilai b yang mungkin adalah $b = 4, 5, 6, 7, 8, 9 \ atau \ 10$.

Karena $m - 1 = 11c$ maka $m - 1 \equiv 0 \ (mod\ 11) \rightarrow \quad m \equiv 1 \ (mod\ 11)$

$m + 1 \equiv 2 \ (mod\ 11) \rightarrow 91b \equiv 2 \ (mod\ 11)$

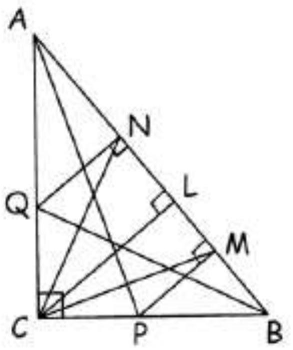
$91b = 11 \cdot 8b + 3b$

$3b \equiv 2 \ (mod\ 11)$

Karena $3 < b < 11$ maka nilai b yang memenuhi hanya $b = 4$

Jika $b = 8$ maka $m = 91 \cdot 8 - 1 = 727 \rightarrow 727 - 1 = 11c \rightarrow c = 66$
$a = bc = 528 \rightarrow n = 528529 = 727^2$
• Jika $m - 1 = 91b$ dan $m + 1 = 11c$ dengan $bc = a$
Karena $315 < m - 1 < 999$ maka $3 < b < 11$. Nilai b yang memenuhi adalah $b = 4, 5, 6, 7, 8, 9\ atau\ 10$.
Karena $m + 1 = 11c$ maka $m + 1 \equiv 0\ (mod\ 11) \rightarrow m \equiv -1\ (mod\ 11)$
$m - 1 \equiv -2\ (mod\ 11) \rightarrow 91b \equiv -2\ (mod\ 11)$
$91b = 11 \cdot 8b + 3b$
$3b \equiv -2\ (mod\ 11) \rightarrow 3b \equiv 9\ (mod\ 11)$
Karena $3 < b < 11$ maka tidak ada nilai b yang memenuhi.
• Jika $m + 1 = 77b$ dan $m - 1 = 13c$ dengan $bc = a$
Karena $315 < m + 1 < 999$ maka $4 < b < 13$. Nilai b yang memenuhi adalah $b = 5, 6, 7, 8, 9\ atau\ 10, 11, 12$
Karena $m - 1 = 13c$ maka $m - 1 \equiv 0\ (mod\ 13) \rightarrow m \equiv 1\ (mod\ 13)$
$m + 1 \equiv 2\ (mod\ 13) \rightarrow 77b \equiv 2\ (mod\ 13)$
$77b = 13 \cdot 5b + 12b$
$12b \equiv 2\ (mod\ 13)$
Karena $4 < b < 13$ maka nilai b yang memenuhi hanya $b = 11$
Jika $b = 11$ maka $m = 77 \cdot 11 - 1 = 846 \rightarrow 846 - 1 = 13c \rightarrow c = 65$
$a = bc = 715 \rightarrow n = 715716 = 846^2$
• Jika $m - 1 = 77b$ dan $m + 1 = 13c$ dengan $bc = a$
Karena $315 < m - 1 < 999$ maka $4 < b < 13$. Nilai b yang memenuhi adalah $b = 5, 6, 7, 8, 9\ atau\ 10, 11, 12$
Karena $m + 1 = 13c$ maka $m + 1 \equiv 0\ (mod\ 13) \rightarrow m \equiv -1\ (mod\ 13)$
$m - 1 \equiv -2\ (mod\ 13) \rightarrow 77b \equiv -2\ (mod\ 13)$
$77b = 13 \cdot 5b + 12b$
$12b \equiv -2\ (mod\ 13) \rightarrow 12b \equiv 11\ (mod\ 13)$
Karena $4 < b < 13$ maka tidak ada nilai b yang memenuhi.
Maka terdapat 4 bilangan yang memenuhi dan bilangan-bilangan tersebut adalah $183184 = 428^2, 328329 = 573^2, 528529 = 727^2\ dan\ 715716 = 846^2$

2. Solusi: B



Dibuat CL dengan L terletak pada AB sehingga CL tegak lurus AB.
Segitiga-segitiga ΔACB, ΔANQ, ΔALC, ΔCLB dan ΔPMB semuanya sebangun.
Misalkan $\angle MCL = x$
Karena PM sejajar CL maka $\angle MCL = \angle PMC = x$
Pada ΔAPC dan APM, ketiga sudut segitiga tersebut sama serta AP merupakan hipotenusa kedua segitiga sehingga ΔAPM dan ΔAPC kongruen (sama dan sebangun). → PC = PM
Karena PC = PM maka ΔCPM sama kaki. → $\angle PCM = \angle PMC = \angle MCL = x$
Misalkan $\angle NCL = y$
Karena QN sejajar CL maka $\angle NCL = \angle QNC = y$
Pada ΔBQC dan BQN, ketiga sudut segitiga tersebut sama serta BQ merupakan hipotenusa kedua segitiga sehingga ΔBQN dan ΔBQC kongruen (sama dan sebangun). → QC = QN
Karena QC = QN maka ΔCQN sama kaki. → $\angle QCN = \angle QNC = \angle NCL = y$
$\angle MCN = \angle MCL + \angle NCL$
$\angle MCN = \frac{1}{2}(\angle BCL + \angle ACL)$
$\angle MCN = \frac{1}{2}\angle ACB$
$\angle MCN = 45^o$

3. Solusi: C
Misalkan $m = 1000a + 100b + 10c + d$ maka $n = 1000a + 100b + 10c + d + 10^p + 10^q$ dengan p dan q adalah bilangan bulat berbeda, $p > q$ dan $0 \leq p, q \leq 3$.
Misalkan $m = x^2$ dan $n = y^2$

$n - m = (y + x)(y - x) = 10^p + 10^q$
Jika x genap dan y ganjil atau x ganjil dan y genap maka $y + x$ dan $y - x$ keduanya ganjil $\rightarrow$ $n - m$ ganjil.
Jika x dan y keduanya genap atau keduanya ganjil maka $y + x$ dan $y - x$ keduanya genap $\rightarrow$ $n - m$ adalah bilangan genap habis dibagi 4.
Ada 6 kasus yang akan ditinjau :
• $p = 3$ dan $q = 2$
$n - m = (y + x)(y - x) = 1100$
Pasangan $(y + x, y - x)$ yang memenuhi adalah $(550, 2), (50, 22), (110, 10)$
* Jika $y + x = 550$ dan $y - x = 2$ didapat $y = 276$ dan $x = 274 \rightarrow$ $n = 76176$ (tidak 4 angka)
* Jika $y + x = 50$ dan $y - x = 22$ didapat $y = 36$ dan $x = 14 \rightarrow$ $m = 196$ (tidak 4 angka)
* Jika $y + x = 110$ dan $y - x = 10$ didapat $y = 60$ dan $x = 50 \rightarrow$ $n = 3600$ dan $m = 2500$
• $p = 3$ dan $q = 1$
$n - m = (y + x)(y - x) = 1010$
Tidak ada nilai x dan y yang memenuhi sebab 1010 tidak habis dibagi 4.
• $p = 3$ dan $q = 0$
$n - m = (y + x)(y - x) = 1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$
Pasangan $(y + x, y - x)$ yang memenuhi adalah $(1001, 1), (143, 7), (91, 11), (77, 13)$
* Jika $y + x = 1001$ dan $y - x = 1$ didapat $y = 501$ dan $x = 500 \rightarrow$ $m = 250000$ (tidak 4 angka)
* Jika $y + x = 143$ dan $y - x = 7$ didapat $y = 75$ dan $x = 68 \rightarrow$ $n = 5625$ dan $m = 4624$
* Jika $y + x = 91$ dan $y - x = 11$ didapat $y = 51$ dan $x = 40 \rightarrow$ $n = 2601$ dan $m = 1600$
* Jika $y + x = 77$ dan $y - x = 13$ didapat $y = 45$ dan $x = 32 \rightarrow$ $n = 2025$ dan $m = 1024$
• $p = 2$ dan $q = 1$
$n - m = (y + x)(y - x) = 110$
Tidak ada nilai x dan y yang memenuhi sebab 110 tidak habis dibagi 4.
• $p = 2$ dan $q = 0$
$n - m = (y + x)(y - x) = 101$
Pasangan $(y + x, y - x)$ yang memenuhi adalah $(101, 1)$

Jika $y + x = 101$ dan $y - x = 1$ didapat $y = 51$ dan $x = 50 \rightarrow n = 2601$ dan $m = 2500$

• $p = 1$ dan $q = 0$

$n - m = (y + x)(y - x) = 11$

Pasangan $(y + x, y - x)$ yang memenuhi adalah $(11, 1)$.

Jika $y + x = 11$ dan $y - x = 1$ didapat $y = 6$ dan $x = 5 \rightarrow y = 36$ (bukan bilangan 4 angka)

Jadi terdapat 5 buah pasangan (m, n) yang memenuhi yaitu $(2500, 3600), (4624, 5625), (1600, 2601), (1024, 2025)$, dan $(2500, 2601)$

4. Solusi: B

$f(1) + f(2) + \cdots + f(n - 1) = (n - 1)^2 f(n - 1)$

$f(1) + f(2) + \cdots + f(n) = n^2 f(n)$

$(n - 1)^2 f(n - 1) + f(n) = n^2 f(n)$

$(n - 1)^2 f(n - 1) = (n^2 - 1)\, f(n)$

Karena $n \neq 1$ maka :

$\frac{f(n)}{f(n-1)} = \frac{n-1}{n+1}$

$\frac{f(1996)}{f(1995)} \cdot \frac{f(1995)}{f(1994)} \cdot \ldots \cdot \frac{f(3)}{f(2)} \cdot \frac{f(2)}{f(1)} = \frac{1995}{1997} \cdot \frac{1994}{1996} \ldots \ldots \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3}$

$\frac{f(1996)}{f(1)} = \frac{2.1}{1997.1996}$

$f(1996) = \frac{2}{1997}$

5. Solusi: C

$\lfloor \sqrt{n} \rfloor$ akan bertambah 1 nilainya jika n bergerak dari satu bilangan kuadrat ke bilangan kuadrat berikutnya.

Jika $m^2 \leq n < (m + 1)^2$ untuk suatu bilangan asli m maka $\lfloor \sqrt{n} \rfloor$ akan bernilai tetap yaitu $= m$.

Interval di atas akan dibagi menjadi beberapa interval

• Untuk $m^2 \leq n \leq m^2 + m$

$$q(n) = \left\lfloor \frac{n}{\lfloor \sqrt{n} \rfloor} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n}{m} \right\rfloor = m$$

• Untuk $m^2 + m \leq n < m^2 + 2m$

$$q(n) = \left\lfloor \frac{n}{\lfloor \sqrt{n} \rfloor} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n}{m} \right\rfloor = m + 1$$

• Untuk $n = m^2 + 2m$

$$q(n) = \left\lfloor \frac{n}{\lfloor \sqrt{n} \rfloor} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n}{m} \right\rfloor = m + 2$$

• Untuk $n = m^2 + 2m + 1 = (m+1)^2$

$$q(n) = \left\lfloor \frac{n}{\lfloor \sqrt{n} \rfloor} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{(m+1)^2}{m} \right\rfloor = m+1$$

Jika $m = 1$ maka $q(n) = m + 3$ sedangkan jika $n > 1$ maka
Dari persamaan diatas didapat bahwa untuk $n = m^2 + 2m = (m+1)^2 - 1$ dengan m bilangan asli akan membuat $q(n) > q(n+1)$

6. Solusi: B
Misalkan $N = 1000a + 100b + 10c + d$ maka $R(N) = 1000d + 100c + 10b + a$
$4N < 10000 \rightarrow N < 2500 \rightarrow a = 1\, atau\, 2$
• Jika $a = 2$
Karena angka satuan $R(N) = 2$ maka angka satuan $4N = 9$ (4N adalah bilangan ganjil)
Padahal 4N adalah bilangan genap (kontradiksi)
• Jika $a = 1$
Maka $d = 4, 5, 6\, atau\, 7$.
Karena angka satuan $R(N) = 1$ maka angka satuan $4N = 8$.
Nilai d yang memenuhi hanya $d = 7 \rightarrow N$ adalah bilangan ganjil.
$7000 + 100c + 10b + 1 = 4000 + 400b + 40c + 28 + 3$
$2970 = 300b + 30c$
$99 = 10b + c$
Hanya dipenuhi jika $b = 9$ dan $c = 9$
Jadi hanya terdapat 1 nilai N yang memenuhi yaitu $N = 1997$

7. Solusi: D
$12n + 48m = mn$
$(m - 12)(n - 48) = 576 = 3^2 \cdot 2^6$
Karena n ganjil maka $n - 48$ juga ganjil.
Faktor ganjil dari 576 adalah 1, 3 dan 3^2.
• Jika $n - 48 = 1$ maka $n = 49$
$m - 12 = 576 \rightarrow m = 588$
• Jika $n - 48 = 3$ maka $n = 51$
$m - 12 = 192 \rightarrow m = 204$
• Jika $n - 48 = 9$ maka $n = 57$
$m - 12 = 64 \rightarrow m = 76$
Jadi, terdapat 3 buah pasangan (m, n) yang memenuhi adalah $(49, 588), (51, 204), (57, 76)$

8. Solusi: A

$34! = k \cdot 10m$ dengan k, m bilangan asli dan k tidak habis dibagi 10.

$m = \left\lfloor\frac{34}{5}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{34}{5^2}\right\rfloor$

$m = 7$

didapat $b = 0$

$k = \frac{34!}{10^6}$

$k = 34 \cdot 33 \cdot 32 \cdot 31 \cdot 3 \cdot 29 \cdot 28 \cdot 27 \cdot 26 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 11 \cdot 21 \cdot 2 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 3 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 3$

Angka satuan k = satuan dari $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 3$

Angka satuan $k = 2$

$a = 2$

Penjumlahan digit $34! = 2 + 9 + 5 + 2 + 3 + 2 + 7 + 9 + 9 + c + d + 9 + 6 + 0 + 4 + 1 + 4 + 0 + 8 + 4 + 7 + 6 + 1 + 8 + 6 + 0 + 9 + 6 + 4 + 3 + 5 + 2$

Penjumlahan digit $34! = 141 + c + d$

$141 \leq 141 + c + d \leq 159$

Karena 9 membagi 34! maka 9 membagi $141 + c + d \rightarrow 141 + c + d = 144$ atau $141 + c + d = 153$

Karena 11 membagi 34! maka $2 - 9 + 5 - 2 + 3 - 2 + 7 - 9 + 9 - c + d - 9 + 6 - 0 + 4 - 1 + 4 - 0 + 8 - 4 + 7 - 6 + 1 - 8 + 6 - 0 + 9 - 6 + 4 - 3 + 5 - 2$ habis dibagi 11.

$19 - c + d$ habis dibagi 11.

$10 \leq 19 - c + d \leq 28 \rightarrow 19 - c + d = 11$ atau $19 - c + d = 22$

• Jika $141 + c + d = 144$

$c + d = 3$ .... (1)

* Jika $19 - c + d = 11$

$d - c = -8$ .... (2)

Dari persamaan (1) dan (2) didapat $d = -\frac{5}{3}$(tidak memenuhi bahwa d bulat)

* Jika $19 - c + d = 22$

$d - c = 3$ .... (3)

Dari persamaan (1) dan (3) didapat $c = 0$ dan $d = 3$

• Jika $141 + c + d = 153$

$c + d = 12$ .... (4)

* Jika $19 - c + d = 11$

$d - c = -8$ .... (5)

Dari persamaan (4) dan (5) didapat $c = 10$ (tidak memenuhi bahwa $0 \leq c \leq 9$)

* Jika $19 - c + d = 22$

$d - c = 3$ .... (6)

Dari persamaan (4) dan (6) didapat $d = \frac{15}{2}$ (tidak memenuhi bahwa d bulat)

Maka dapat disimpulkan bahwa $a = 2$; $b = 0$; $c = 0$; $d = 3$

9. Solusi: D

$ab + c + d = 3$ .... (1)

$bc + a + d = 5$ .... (2)

$cd + a + b = 2$ .... (3)

$da + b + c = 6$ .... (4)

$(1) + (2) = (3) + (4) \rightarrow ab + c + d + bc + a + d = cd + a + b + da + b + c$

$b(a + c) + 2d = d(a + c) + 2b$

$(b - d)(a + c) = 2(b - d)$

$(b - d)(a + c - 2) = 0$

$b = d$ atau $a + c = 2$

• Jika $b = d$

Persamaan (2) $\rightarrow$ $bc + a + b = 5$

Persamaan (3) $\rightarrow$ $bc + a + b = 2$

Kontradiksi maka tidak ada nilai a, b, c dan d yang memenuhi.

• Jika $a + c = 2$

(1) + (2) $\rightarrow$ $ab + bc + a + c + 2d = 8$

$b(a + c) + a + c + 2d = 8$

$b + d = 3$

(2) + (3) $\rightarrow$ $bc + cd + 2a + b + d = 7$

$c(b + d) + 2a + b + d = 7$

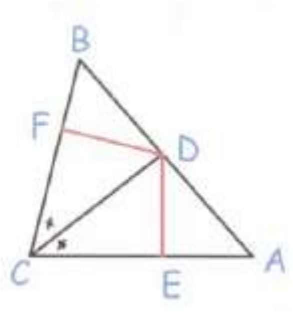
$3c + 2a = 4$

$3c + 2(2 - c) = 4 \rightarrow c = 0 \rightarrow a = 2$

Persamaan (2) $\rightarrow$ $b(0) + (2) + d = 5 \rightarrow d = 3 \rightarrow b = 3 - (3) = 0$

(a, d) yang memenuhi adalah $(2, 3)$

10. Solusi: B



Buat garis DE tegak lurus AC dengan E terletak pada sisi AC sehingga $DE = CD \sin\left(\frac{C}{2}\right)$

Buat garis DF tegak lurus BC dengan F terletak pada sisi BC sehingga $DF = CD \sin\left(\frac{C}{2}\right)$

$Luas\ \Delta ABC = Luas\ \Delta ACD + Luas\ \Delta BCD$

$\frac{1}{2}\, ab\ sin\ C = \frac{1}{2} \cdot b \cdot DE + \frac{1}{2} \cdot a \cdot DF = \frac{1}{2}\,(a + b) CD \sin\left(\frac{C}{2}\right)$

Dengan mengingat bahwa $sin\ C = 2 \sin\left(\frac{C}{2}\right) \cos\left(\frac{C}{2}\right)$,maka :

$CD = \frac{2ab \cos\left(\frac{C}{2}\right)}{a+b}$