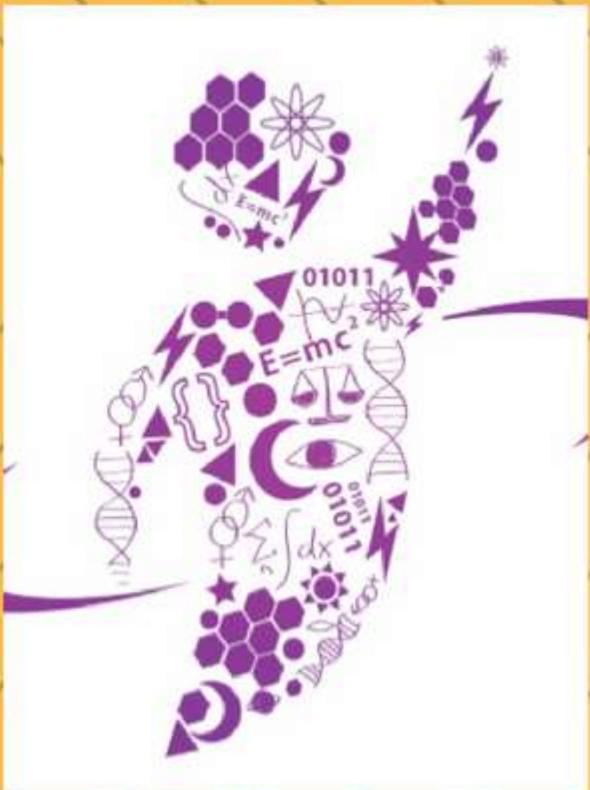
PAKET 6

PELATIHAN ONLINE

2019

SMP
MATEMATIKA

po.alcindonesia.co.id



WWW.ALCINDONESIA.CO.ID

@ALCINDONESIA

085223273373

PEMBAHASAN PAKET 6

1. Jika $p = 2010^2 + 2011^2$ dan $q = 2012^2 + 2013^2$, maka nilai sederhana dari $\sqrt{1 - 2(p+q) + 4pq}$ adalah ...
   a. 16184225
   b. 16184255
   c. 16185425
   d. 16184525

   Solusi:

   $\sqrt{1 - 2(p+q) + 4pq} = \sqrt{1 - 2p - 2q + 4pq} = \sqrt{(2p-1)(2q-1)}$

   Mencari nilai $2p - 1$:

   $p = 2010^2 + 2011^2$

   $p = 2010^2 + (2010+1)^2$

   $p = 2010^2 + 2010^2 + 2.2010 + 1$

   $p = 2.2010^2 + 2.2010 + 1$

   $2p - 1 = 2(2.2010^2 + 2.2010 + 1) - 1$

   $2p - 1 = 4.2010^2 + 4.2010 + 1$

   $2p - 1 = (2.2010 + 1)^2$

   $2p - 1 = 4021^2$

   Dengan cara yang sama diperoleh nilai $2q - 1 = 4025^2$

   Sehingga,

   $\sqrt{1 - 2(p+q) + 4pq} = \sqrt{(2p-1)(2q-1)} = \sqrt{4021^2.4025^2} = 4021.4025 = 16184525$

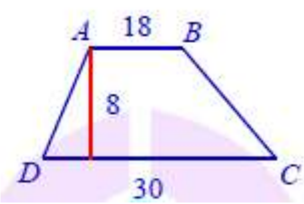
2. Misalkan ABCD adalah suatu daerah trapesium sedemikian sehingga perpanjangan sisi AD dan perpanjangan sisi BC berpotongan di titik E.

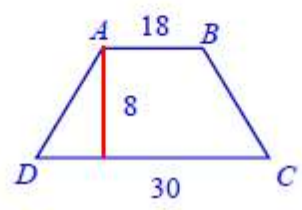
Diketahui panjang AB = 18, CD = 30, dan tinggi trapesium tersebut adalah 8. Jika F dan G masing-masing adalah titik tengah AD dan BC, maka luas segitiga EFG adalah ....

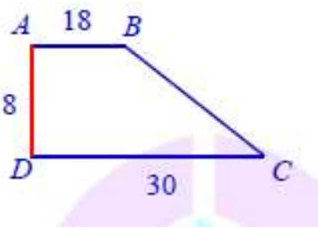
a. 212
b. 192
c. 154
d. 208

Solusi:

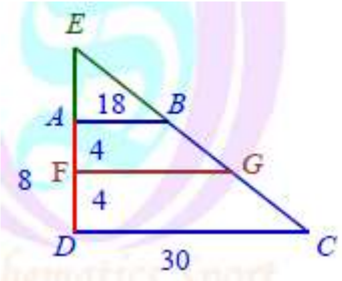
Menurut informasi dari soal: tidak dijelaskan bahwa bangun trapesiumnya termasuk trapezium sebarang, trapesium sama kaki atau trapesium siku-siku, ilustrasi gambarnya seperti berikut:







Karena yang menjadi kontek permasalahan adalah tentang luas, maka luas ketiga gambar di atas besarnya adalah sama, sehingga kita gunakan saja trapesium siku-siku, sebagai berikut ilustrasi permasalahannnya.



Karena titik F dan G masing-masing adalah titik tengah AD dan BC, maka panjang FG adalah,

$$FG = 2 \times (CD - AB)$$

$$FG = 2 \times (30 - 18)$$

$$FG = 24$$

Kemudian kita mencari panjang AE, dengan menggunakan prinsip kesebangunan, didapat:

$\frac{AE}{DE} = \frac{AB}{DC}$

$\rightarrow \frac{AE}{AE+AD} = \frac{AB}{DC}$

$\rightarrow \frac{AE}{AE+8} = \frac{18}{30}$

$\rightarrow \frac{AE}{AE+8} = \frac{3}{5}$

$\rightarrow 5AE = 3AE + 3(8)$

$\rightarrow 2AE = 24$

$\rightarrow AE = 12$

Dengan demikian,

$L_{EFG} = \frac{1}{2} \times FG \times FE$

$L_{EFG} = \frac{1}{2} \times 24 \times (FA + AE)$

$L_{EFG} = 12 \times (4 + 12)$

$L_{EFG} = 12 \times (16)$

$L_{EFG} = 192$

Jadi, luas segitiga EFG adalah 192 satuan luas

3. Parabola $y = ax^2 + bx + c$ melalui titik $(-2, 6)$ dan mempunyai sumbu simetri $x = -1$. Jika a, b, dan c merupakan bilangan genap positif berurutan, maka nilai $a + b + c$ adalah ....
   a. 48
   b. 12
   c. 24
   d. 36

   Solusi:

   Diketahui parabola $y = ax^2 + bx + c$ melalui titik $(-2, 6)$ dan mempunyai sumbu simetri $x = -1$

sumbu simetri dari parabola $y = ax^2 + bx + c$ adalah $x = -\frac{b}{2a}$

$$-1 = -\frac{b}{2a} \qquad (x = -1)$$

$$2a = b$$

Sehingga karena $b = 2a$, titik yang dilalui parabola tersebut adalah $(-2, 6)$, maka:

$y = ax^2 + bx + c$

$\rightarrow 6 = a(-2)^2 + (2a)(-2) + c$

$\rightarrow 6 = 4a - 4a + c$

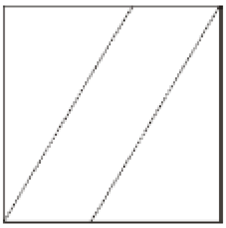
$\rightarrow c = 6$

Karena a, b, dan c merupakan bilangan genap positif berurutan, maka $b = 4$ dan $a = 2$

Dengan demikian $abc = 2 . 4 . 6 = 48$

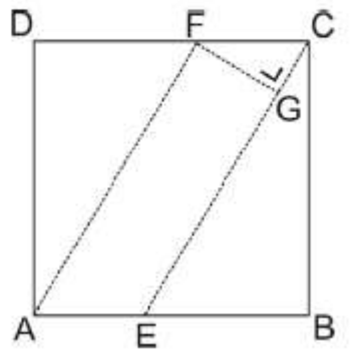
Jadi, nilai abc adalah 48

4. Pada gambar berikut, kedua ruas garis putus-putus yang sejajar membagi persegi menjadi tiga daerah yang luasnya sama. Jika jarak kedua ruas garis putus-putus tersebut 1 cm, maka panjang sisi persegi adalah … cm.



   a. 3
   b. $\sqrt{10}$
   c. $2\sqrt{3}$
   d. $\sqrt{13}$

Solusi:



Diketahui:

$L_{ADF} = L_{AECF} = L_{CBE} = \frac{1}{3}.L_{ABCD}$

$FG = 1\ cm$

Misal:

$AD = AB = x$

$DF = y$

Perhatikan segitiga siku-siku ADF:

$AF = \sqrt{AD^2 + DF^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$

Hubungan antara segitiga ADF dan segiempat AECF:

$\frac{1}{2}.AD.DF = FG.AF$

$\frac{1}{2}.x.y = 1.\sqrt{x^2 + y^2}$

$\left(\frac{1}{2}.x.y\right)^2 = \left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)^2$

$\frac{1}{4}.x^2.y^2 = x^2 + y^2 \qquad (1)$

Hubungan antara segitiga ADF dan persegi ABCD:

$L_{ADF} = \frac{1}{3}.L_{ABCD}$

$\frac{1}{2}.AD.DF = \frac{1}{3}.AD.DC$

$\frac{1}{2}.x.y = \frac{1}{3}.x.x$

$y = \frac{2x}{3}$

Substitusikan $y = \frac{2x}{3}$ ke persamaan (1):

$\frac{1}{4}.x^2.y^2 = x^2 + y^2$

$\frac{1}{4}.x^2.\left(\frac{2x}{3}\right)^2 \quad = x^2 + \left(\frac{2x}{3}\right)^2$

$x^2 = 13$

$x = \sqrt{13}$

Jadi, $sisi = x = \sqrt{13}\ cm$

5. Jumlah 1007 buah bilangan bulat positif berbeda adalah 1023076. Tidak ada satupun dari bilangan-bilangan tersebut yang lebih besar dari 2014. Minimal banyaknya bilangan ganjil pada deret bilangan tersebut adalah ....
   a. 3
   b. 4
   c. 5
   d. 6

   Solusi:

   Menurut informasi dari soal di dapat, bahwa untuk mencari minimal banyaknya bilangan ganjil pada deret tersebut, kita cari terlebih dulu jumlah deret bilangan genap < 2014, yaitu sebanyak
   $1006: 2\ +\ 4\ +\ 6 + \ldots\ldots\ldots + 2012$

   $S_n \ = \frac{n}{2}[2a + (n-1)b]$

   $S_{1006} \ = \frac{1006}{2}[2.2 + (1005)2]$

$S_{1006} = 1006(1007)$

$S_{1006} = 1013042$

Kemudian kita cari selisih dari jumlah ke 1007 bilangan dengan hasil jumlah bilangan genap < 2014, yakni $= 1023076 - 1013042 = 10034$

Selanjutnya kita cari jumlah bilangan ganjil berbeda < 2014 dan < 10034, yaitu: $2013 + 2011 + 2009 + 2007 = 8040$

Kalau 4 bilangan dijumlahkan juga dengan 2005, maka hasilnya > 10034, yaitu 10045. Dengan demikian minimal banyaknya bilangan ganjil yang dimaksud sebanyak 4 bilangan.

Jadi, minimal banyaknya bilangan ganjil pada deret bilangan tersebut adalah 4 bilangan

6. Sebuah drum berbentuk tabung yang berjari-jari 70 cm dan berisi air setinggi 40 cm (gunakan $\pi = \frac{22}{7}$). Seorang tukang pasang ubin memasukkan 110 buah ubin keramik ke dalam drum sehingga tinggi permukaan air bertambah 8 cm. Jika permukaan setiap ubin keramik berukuran 40 cm x 40 cm , berapakah tebal ubin keramik tersebut?
    a. 7 cm
    b. 8 cm
    c. 7 mm
    d. 8 mm

Solusi:

Misalkan:

Jari-jari tabung = $r = 70\ cm$

Ketinggian air = $t_a = 40\ cm$

Penambahan tinggi air = $t_t = 8\ cm$

Tebal ubin keramik = t_u

Volume 110 ubin = Volume ketinggian air

$110\,(40 \times 40 \times t_u) = \pi \times r^2 \times t_t$

$110 \times\ (40\ \times\ 40\ \times\ t_u) = \frac{22}{7} \times\ 70^2\ \times\ 8$

$11 \times 10 \times (40\ \times\ 40\ \times\ t_u) = \frac{22}{7} \times\ 7 \times 7\ \times\ 100 \times 8$

$11 \times 10 \times (4\ \times\ 4\ \times\ t_u) = 22\ \times\ 7\ \times 8$

$t_u = \frac{7}{10} = 0{,}7\ cm = 7\ mm$

Jadi, tebal ubin keramik tersebut adalah 7 mm

7. Dua botol yang berukuran sama berisi penuh dengan larutan gula. Rasio kandungan gula dan air pada botol pertama adalah 2 : 11 dan pada botol kedua adalah 3 : 5. Jika isi kedua botol tersebut dicampurkan, maka rasio kendungan gula dan air hasil campurannya adalah ....
   a. 55 : 153
   b. 53 : 155
   c. 153 : 55
   d. 155 : 53

   Solusi:

   Misalkan:

   kandungan gula pada botol pertama = g_1

   kandungan air pada botol pertama = a_1

   kandungan gula pada botol kedua = g_2

   kandungan air pada botol kedua = a_2

   kandungan gula hasil campuran = g

   kandungan air hasil campuran = a

   sehingga,

$$g_1 : a_1 = 2 : 11 \quad \rightarrow \quad g_1 = \frac{2}{13}\ dan\ a_1 = \frac{11}{13}$$

$$g_2 : a_2 = 3 : 5 \quad \rightarrow \quad g_2 = \frac{3}{5}\ dan\ a_2 = \frac{5}{8}$$

Dengan demikian hasil campurannya,

$$g = g_1 + g_2 = \frac{2}{13} + \frac{3}{5} = \frac{55}{104}$$

$$a = a_1 + a_2 = \frac{11}{13} + \frac{5}{8} = \frac{153}{104}$$

$$g : a = \frac{55}{104} : \frac{153}{104} = 55 : 153$$

Jadi, rasio kendungan gula dan air hasil campurannya adalah $55 : 153$

8. Diketahui $1 + k$ habis dibagi 3, $1 + 2k$ habis dibagi 5, $1 + 8k$ habis dibagi 7. Jika k adalah bilangan bulat positif, maka nilai terkecil untuk k adalah …
   a. 167
   b. 105
   c. 62
   d. 54

Solusi:

$$1 + k = 3a \quad \rightarrow \quad k = 3a - 1 \quad \rightarrow \quad k = 3a' + 2 \qquad (1)$$

$$1 + 2k = 5b \quad \rightarrow \quad 2k = 5b - 1 \quad \rightarrow \quad 2k = 5b' + 4 \qquad (2)$$

$$1 + 8k = 7c \quad \rightarrow \quad 8k = 7c - 1 \quad \rightarrow \quad 8k = 7c' + 6 \qquad (3)$$

Dimana: a, a', b, b', c, c' merupakan bilangan bulat

KPK dari 3, 5, 7 = 3.5.7 = 105, agar k bisa dibagi oleh 3, 5, dan 7 maka harus k habis dibagi oleh KPK dari 3, 5, 7, sehingga:

$$(1) \rightarrow \quad k = 3a' + 2$$

$$5.7.k = 5.7.(3a' + 2)$$

$$35k = 105a' + 70 \qquad (4)$$

$$(2) \rightarrow \quad 2k = 5b' + 4$$

$$3.7.2k = 3.7.(5b' + 4)$$

$$42k = 105b' + 84 \qquad (5)$$

$$(3) \rightarrow \quad 8k = 7c' + 6$$

$3.5.8k = 3.5.(7c' + 6)$

$120k = 105c' + 90 \qquad (6)$

Eliminasikan persamaan (6) dan (4), diperoleh:

$85k = 105(c' - a') + 20 \qquad (7)$

Eliminasikan persamaan (7) dan (5), diperoleh:

$k = 105(c' - a' - 2b') - 148$

$k = 105(c' - a' - 2b' - 2) + 210 - 148$

$k = 105(c' - a' - 2b' - 2) + 62$

$k = 105n + 62$, dimana n merupakan bilangan bulat

Jadi nilai terkecil untuk k adalah $k = 105(0) + 62 = 62$

9. Sebuah silinder memiliki tinggi 5 cm dan volume 20 cm^3. Luas permukaan bola terbesar yang mungkin diletakkan ke dalam silinder tersebut adalah ...
   a. 12
   b. 14
   c. 16
   d. 18

   Solusi:

   Mencari jari-jari silinder :

   $V_{silinder} = \pi r^2 t = 20$

   $\pi . r^2 . 5 = 20$

   $r^2 = \frac{20}{5\pi}$

   $r^2 = \frac{4}{\pi}$

   $r = \sqrt{\frac{4}{\pi}}$

$r = \frac{2}{\sqrt{\pi}}$

Karena silinder memiliki $t = 5\ cm$ dan $r = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\ cm$ dimana $\left(r = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\right) < \left(\frac{t}{2} = 2{,}5\right)$, maka bola akan bisa masuk ke silinder jika $r_{bola} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\ cm$, sehingga :

$L_{permukaan\ bola} = 4\pi r^2$

$L_{permukaan\ bola} = 4.\pi.\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)^2$

$L_{permukaan\ bola} = 4.\pi.\frac{4}{\pi}$

$L_{permukaan\ bola} = 16$

Jadi luas permukaan bola terbesar yang mungkin adalah $16\ cm^2$.

10. Fungsi g dari himpunan X ke himpunan Y dikatakan satu-satu, jika untuk semua $x_1, x_2 \in X$ dengan $g(x_1) = g(x_2)$ berlaku $x_1 = x_2$. Jika $X = \{9, 6, 3, 2, 1\}$ dan $Y = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, maka fungsi berbeda dari X ke Y yang merupakan fungsi satu-satu dan setiap bilangan anggota X tidak dikaitkan dengan faktornya di Y ada sebanyak ....
    a. 22
    b. 23
    c. 25
    d. 27

    Solusi:

    Diketahui $X = \{9, 6, 3, 2, 1\}$ ada 5 anggota dan $Y = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ada 6 anggota.

    Menurut informasi dari soal, jika dimisalkan $g(x) = y$, maka y tidak membagi x, sehingga range g yang mungkin terpenuhi adalah $\{2, 3, 4, 5, 6\}$. Artinya 1 tidak termasuk range g, karena 1 membagi semua bilangan bulat.

    Dengan demikian,

    range $g(9)$ yang mungkin adalah $\{2, 4, 5, 6\}$

    range $g(6)$ yang mungkin adalah $\{4, 5\}$

range $g(3)$ yang mungkin adalah $\{2, 4, 5, 6\}$

range $g(2)$ yang mungkin adalah $\{3, 4, 5, 6\}$

range $g(1)$ yang mungkin adalah $\{2, 3, 4, 5, 6\}$

Sehingga ada 4 kasus yang mungkin terjadi, yaitu:

1. Untuk $g(9) = 6$, $g(6) = 5$, dan $g(6) = 4$ (ada 6)

2. Untuk $g(9) = 5$ dan $g(6) = 4$ (ada 3)

3. Untuk $g(9) = 4$ dan $g(6) = 5$ (ada 3)

4. Untuk $g(9) = 2, g(6) = 5$ dan $g(6) = 4$ (ada 8)

Oleh karena itu jumlah total kemungkinan adalah $6 + 3 + 3 + 8 = 20$ fungsi

Jadi, fungsi berbeda dari X ke Y yang merupakan fungsi satu-satu dan setiap bilangan anggota X tidak dikaitkan dengan faktornya di Y ada sebanyak 20 fungsi