

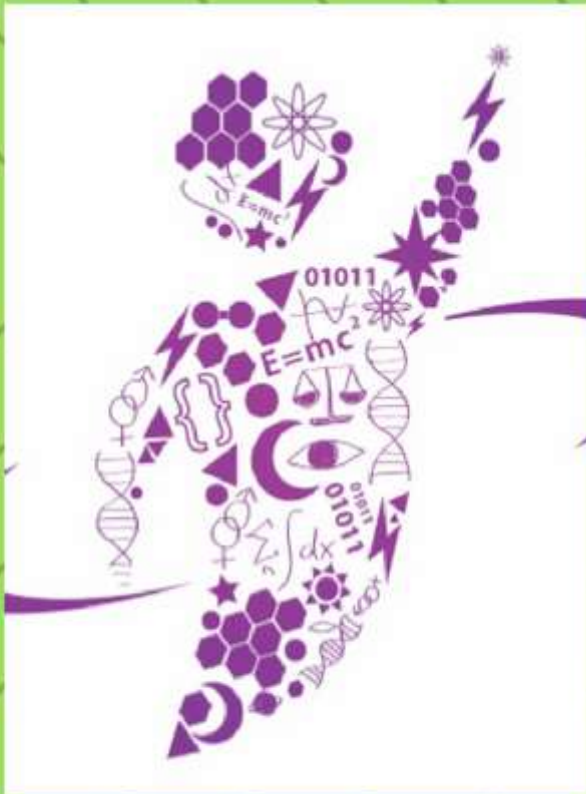
PAKET 7

PELATIHAN ONLINE

2019

**SMA
MATEMATIKA**

po.alcindonesia.co.id



WWW.ALCINDONESIA.CO.ID

@ALCINDONESIA

085223273373

PEMBAHASAN PAKET 7

1. Jawaban : D

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}a_k b_k &= \frac{1}{k\sqrt{k}} x \left(\frac{1}{\left(1 + \frac{1}{k}\right) + \sqrt{1 + \frac{1}{k}}} \right) \\&= \frac{1}{\sqrt{k}(k+1) + k\sqrt{k+1}} \\&= \frac{1}{\sqrt{k(k+1)}} \frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}} \\&= \frac{1}{\sqrt{k(k+1)}} (\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) \\&= \frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}}\end{aligned}$$

Sehingga

$$S_n = \left(\frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) + \dots + \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right) = 1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

Agar S_n bernilai rasional maka $n + 1$ harus berupa bilangan kuadrat.

Mengingat $2 \leq n + 1 \leq 2017$, dan $44^2 < 2017 < 45^2$, maka nilai n yang mungkin ada sebanyak 43.

2. Jawaban : C

$$1500 < 11x < 2000 \text{ sehingga } 136 < x < 182$$

$$970 < 7x < 1275 \text{ sehingga } 138 < x < 183$$

$$690 < 5x < 900 \text{ sehingga } 138 < x < 180$$

$$\text{Maka } 138 < x < 180$$

Bilangan yang habis dibagi 3 dan 5 maka bilangan tersebut habis dibagi 15

Bilangan yang habis dibagi 15 ada 2 yaitu 150 dan 165

\therefore Jadi, banyaknya bilangan yang memenuhi ada 2

3. Jawaban : C

$$a + b + c = 2$$

$$a + b = 2 - c$$

$$a^2 + b^2 + c^2 = 12$$

$$a^2 + b^2 = 12 - c^2$$

Dengan Cauchy Schwarz:

$$(a^2 + b^2) \geq \frac{(a+b)^2}{2}$$

$$12 - c^2 \geq \frac{(2-c)^2}{2}$$

$$24 - 2c^2 \geq 4 - 4c + c^2$$

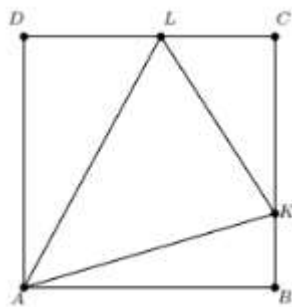
$$3c^2 - 4c - 20 \leq 0$$

$$(c + 2)(3c - 10) \leq 0$$

$$-2 \leq c \leq \frac{10}{3}$$

Maka selisih c terbesar dengan c terkecil $= \frac{10}{3} - (-2) = \frac{16}{3}$

4. Jawaban : B



Misalkan $CK = a$ dan $CL = b$ dengan $0 < a, b < 1$. Karena keliling $\Delta KCL = 2$ diperoleh

$$a + b + \sqrt{a^2 + b^2} = 2 \Leftrightarrow a + b + \sqrt{(a+b)^2 - 2ab} = 2$$

misalkan $a + b = x$ dan $ab = y$ dengan $0 < x < 2$ dan $0 < y < 1$ diperoleh

$$x + \sqrt{x^2 - 2y} = 2 \Leftrightarrow x^2 - 2y = 4 - 4x + x^2 \Leftrightarrow y = 2x - 2$$

Selain itu berdasarkan AM – GM diperoleh pula $a + b \geq 2\sqrt{ab} \Leftrightarrow x \geq 2\sqrt{y}$. Yang berakibat

$$x \geq 2\sqrt{2x - 2} \Leftrightarrow x^2 - 8x + 8 \geq 0$$

sehingga $x \leq 4 - 2\sqrt{2}$ atau $x \geq 4 + 2\sqrt{2}$. Akan tetapi, karena $x < 2$ maka diperoleh $x \leq 4 - 2\sqrt{2}$.

Di lain pihak

$$\begin{aligned} [AKL] &= 1 - [ABK] - [KCL] - [ADL] \\ &= 1 - \frac{1}{2}(1 - a) - \frac{1}{2}ab - \frac{1}{2}(1 - b) \\ &= \frac{1}{2}(a + b - ab) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2}(x - y) \\ &= \frac{1}{2}(2 - x) \geq \frac{1}{2}(2 - (4 - 2\sqrt{2})) = \sqrt{2} - 1 \end{aligned}$$

Jadi, luas ΔAKL minimal adalah $\sqrt{2} - 1$ yang dicapai saat $a = b = 2 - \sqrt{2}$

5. Jawaban : A

Misalkan $p, q \in \{1, 2, 3, \dots, 10\}$ dengan $p < q$ serta $a_{i-1} = q$ dan $a_i = p$

Maka semua bilangan kurang dari p akan berada di kiri q dan semua bilangan lebih dari q akan berada di kanan p .

Semua bilangan di antara p dan q bisa berada di kiri q maupun di kanan p .

Maka persoalannya setara dengan banyaknya cara memilih bilangan di antara p dan q untuk ditaruh di kiri q .

Misalkan n adalah banyaknya bilangan di antara p dan q dengan $n \in \{0, 1, 2, \dots, 8\}$

Maka banyaknya cara memilih bilangan $= C_0^n + C_1^n + C_2^n + \dots + C_n^n = 2^n$

Banyaknya pasangan (p, q) untuk $n = 0, 1, 2, \dots, 8$ berturut-turut adalah $9, 8, 7, \dots, 1$

Banyaknya permutasi hampir naik $= 9 \cdot 2^0 + 8 \cdot 2^1 + 7 \cdot 2^2 + \dots + 1 \cdot 2^8 = 1013$

\therefore Jadi, banyaknya permutasi hampir naik adalah 1013

6. Jawaban : C

Karena x, y , dan z bilangan asli, jelas n tidak memenuhi untuk n ganjil.

Misalkan $n = 2k$, maka persamaan menjadi :

$$(2k)^x + (2k)^{2y} = (2k)^{3z}$$

$$(2k)^{2y}((2k)^{x-2y} + 1) = (2k)^{3z}$$

Dari paritasnya, jelas $(2k)^{x-2y}$ harus ganjil, dan yang memenuhi hanya

$$(2k)^{x-2y} = 1$$

Maka,

$$(2k)^{x-2y} = 1$$

$$(2k)^{x-2y} = 2^0$$

$$x = 2y$$

$$n^x + n^{2y} = n^{3z}$$

$$n^x + n^x = n^{3z}$$

$$n^{x+1} = n^{3z}$$

$$x = 3z - 1 \leq 2017$$

$$3z \leq 2018$$

Agar z bulat, maka maksimum $3z = 2013$

Sehingga $x = 3z - 1 = 2013 - 1 = 2012$

Jadi, nilai terbesar yang mungkin dari x adalah 2012

7. Jawaban : A

Semua kemungkinan jumlah keenam dadu sama dengan 9 adalah $(1,1,1,1,1,4)$, $(1,1,1,1,2,3)$, $(1,1,1,2,2,2)$.

Maka ada 3 kasus :

a. Kasus 1, jika susunannya adalah $(1,1,1,1,1,4)$.

Banyaknya permutasi adalah $\frac{6!}{5!} = 6$

b. Kasus 2, jika susunannya adalah $(1,1,1,1,2,3)$.

Banyaknya permutasi adalah $\frac{6!}{4!} = 30$

c. Kasus 3, jika susunannya adalah $(1,1,1,2,2,2)$.

Banyaknya permutasi adalah $\frac{6!}{3!3!} = 20$

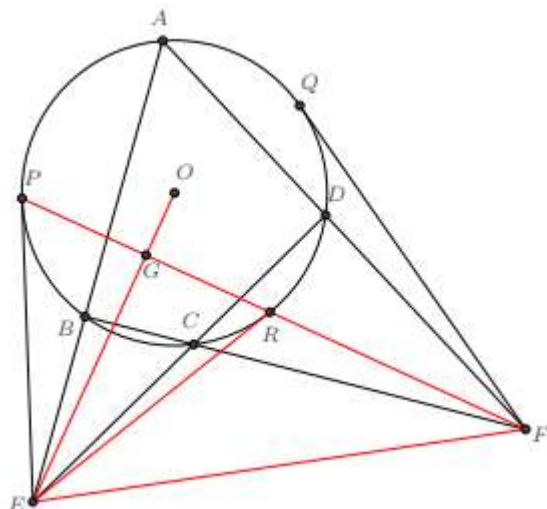
Jadi, banyaknya cara = 56

\therefore Jadi, probabilitas jumlah mata yang muncul 9 adalah $\frac{56}{6^6}$

8. Jawaban : B

Misalkan ER adalah garis singgung (lain) yang ditarik dari titik E.

Misalkan O adalah pusat lingkaran Γ , dan G perpotongan antara EO dan PR, seperti terlihat pada gambar berikut,



Jelas bahwa $PG = GR$. Perhatikan pula bahwa P, R, F segaris. Hal ini karena PR adalah polar dari E , sementara itu F juga terletak pada polar E .

Selanjutnya dengan dalil Pythagoras pada $\triangle EPG$ dan $\triangle EFG$ diperoleh

$$EP^2 - PG^2 = EF^2 - FG^2$$

$$\Leftrightarrow EP^2 - PG^2 = EF^2 - (GR + RF)^2$$

$$\Leftrightarrow EP^2 - PG^2 = EF^2 - (PG + RF)^2$$

$$\Leftrightarrow EP^2 - PG^2 = EF^2 - PG^2 - 2 \times PG \times RF - RF^2$$

$$\Leftrightarrow EP^2 = EF^2 - RF(2 \times PG + RF)$$

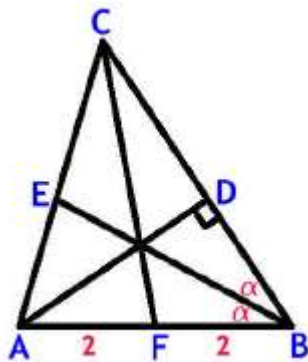
$$\Leftrightarrow EP^2 = EF^2 - RF \times PF$$

$$\Leftrightarrow EP^2 = EF^2 - FQ^2$$

$$\Leftrightarrow EF = \sqrt{60^2 + 63^2} = 87$$

9. Jawaban : D

Karena CF adalah garis berat maka $AF = FB = 2$



Karena BE adalah garis bagi maka $\frac{CE}{EA} = \frac{BC}{AB} = \frac{5}{4}$

Ketiga garis bertemu di satu titik maka sesuai dari Ceva didapat

$$\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1$$

$$\frac{2}{2} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{5}{4} = 1$$

$$\text{Maka } \frac{BD}{DC} = \frac{4}{5}$$

Misalkan $BD = 4x$ maka $CD = 5x$

$$BD + CD = 5 \text{ maka } x = \frac{5}{9}$$

$$\text{Maka panjang } CD = \frac{25}{9} = \frac{m^2}{n^2}$$

Didapat $m = 5$ dan $n = 3$

\therefore Jadi, nilai $m + n$ adalah 8

10. Jawaban : D

Misalkan

$$3 \log_x(3y) = 3 \log_{3x}(27z) = \log_{3x^4}(81yz) = k$$

Berdasarkan definisi fungsi logaritma diperoleh:

$$\log_x(3y) = \frac{k}{3} \Rightarrow 3y = x^{\frac{k}{3}} \Rightarrow x^k = 3^3 y^3 \dots\dots\dots (1)$$

$$\log_{3x}(27z) = \frac{k}{3} \Rightarrow 27z = (3x)^{\frac{k}{3}} \Rightarrow (3x)^k = 3^9 z^3 \dots\dots\dots (2)$$

$$\log_{3x^4}(81yz) = k \Rightarrow 81yz = (3x^4)^k \dots\dots\dots (3)$$

Sehingga diperoleh

$$\frac{x^k \cdot 3^k \cdot x^k}{3^k \cdot x^{4k}} = \frac{3^3 y^3 \cdot 3^9 z^3}{3^4 yz} \Leftrightarrow \frac{1}{x^{2k}} = 3^8 y^2 z^2 \Leftrightarrow x^k = \frac{1}{3^4 yz}$$

Dari pers (1) diperoleh

$$\frac{1}{3^4 yz} = 27y^3 \Rightarrow y^4 z = \frac{1}{3^7}$$

Dari pers (3) diperoleh

$$(3x^4)^k = \left(\frac{1}{x}\right)^k \Rightarrow 3x^4 = \frac{1}{x} \Rightarrow x^5 = \frac{1}{3}$$

$$\text{Jadi, } x^5 y^4 z = \frac{1}{3^8}$$