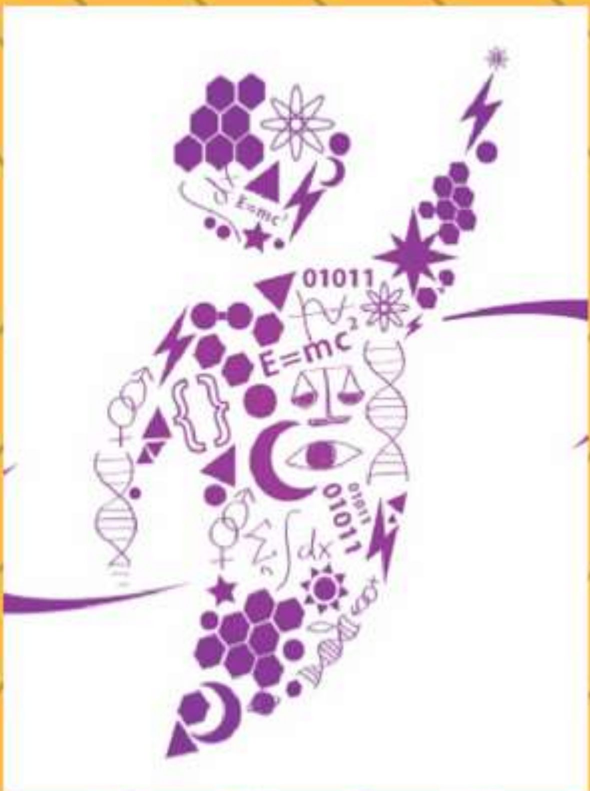
PAKET 4

PELATIHAN ONLINE 2019

SMP MATEMATIKA

po.alcindonesia.co.id



WWW.ALCINDONESIA.CO.ID

@ALCINDONESIA

085223273373

PEMBAHASAN PAKET 4

1. Banyak bilangan bulat negatif $k > -20$ sehingga parabola $y = x^2 + k$ tidak berpotongan dengan lingkaran $x^2 + y^2 = 9$ adalah ....

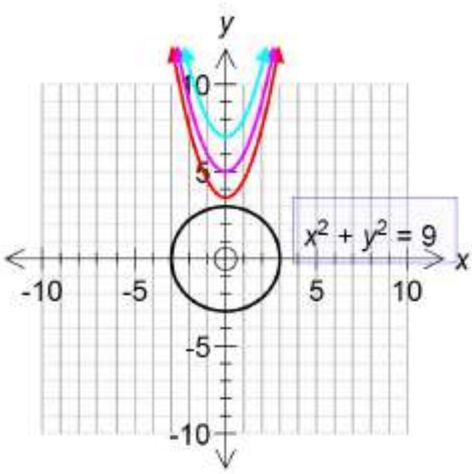
   A. 20

   B. 19

   C. 11

   D. 10

   Solusi:

   $y = x^2 + k \leftrightarrow x^2 = y - k$

   Subtitusikan $x^2 = y - k$ ke persamaan lingkaran $x^2 + y^2 = 9$, diperoleh:

   $y - k + y^2 = 9$

   $y^2 + y - (k + 9) = 0$

   $a = 1, b = 1, c = -(k + 9)$

   Syarat kedua grafik tidak berpotongan nilai diskriminan $D < 0$.

   $D = b^2 - 4\,a\,c < 0$

   $1^2 - 4 \,.\, 1 \,.\, (-(k + 9)) < 0$

   $1 + 4k + 36 < 0$

   $4k < -37$

   $k < -9{,}25$

   Ini berarti $-20 < k < -9{,}25$, dengan k bilangan bulat negatif

   $k = -19, -18, \ldots, -10$

   banyaknya k adalah $19 - 10 + 1 = 10$

2. Jika $n! = n.(n-1).(n-2) \dots 2.1$, maka

   $1.1! + 2.2! + 3.3! + \cdots + (n-1).(n-1)! + n.n! = \cdots$

   A. $(n - 1)! + 1$

   B. $(n + 1)! - 1$

   C. $(n + 1)! + 1$

   D. $n! + n$

   Solusi:

   Perhatikan pola berikut:

   $1.1! = 1$

   $1.1! + 2.2! = 1 + 4 = 5 = 6 - 1 = 3! - 1$

   $1.1! + 2.2! + 3.3! = 5 + 18 = 23 = 24 - 1 = 4! - 1$

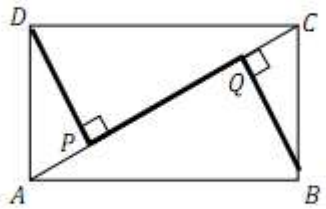
   $1.1! + 2.2! + 3.3! + 4.4! = 23 + 96 = 119 = 120 - 1 = 5! - 1$

   ……………………………………………………..

   $1.1! + 2.2! + 3.3! + \dots + (n - 1).(n - 1)! + n.n! = (n + 1)! - 1$

3. Diketahui persegi panjang $ABCD$ dengan $AB = 12$ dan $BC = 5$. Panjang lintasan $DPQB$ pada

   gambar berikut adalah ….

   A. $\frac{119}{13}$

   B. $\frac{120}{13}$

   C. $\frac{214}{13}$

   D. $\frac{239}{13}$

   Solusi:

   Perhatikan ΔABC siku-siku di B, sehingga

$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2}$$
$$= \sqrt{12^2 + 5^2}$$
$$= \sqrt{144 + 25}$$
$$= \sqrt{16} = 13$$

Perhatikan ΔABC sebangun dengan ΔBQC, sehingga

$\frac{BC}{CA} = \frac{CQ}{BC} \rightarrow BC^2 = CQ \times CA$

$\leftrightarrow \quad CQ = \frac{BC^2}{CA}$

$\leftrightarrow \quad CQ = \frac{5^2}{13}$

$\leftrightarrow \quad CQ = \frac{25}{13}$

Mudah dibuktikan bahwa karena:

- $BC = DA$ *(lebar persegi panjang $ABCD$)*
- $\Delta BCQ = \angle DAP$ *(sudut dalam berseberangan)*
- $\angle BQC = \angle DPA$ *(sudut siku-siku)*

Maka ΔBQC kongruen dengan ΔDPA, sehingga $AP = CQ = \frac{25}{13}$

Pandang ruas garis AC merupakan hasil penjumlahan dari beberapa ruas garis AP, PQ dan CQ, serta karena $AP = CQ$, maka diperoleh:

$AC = AP + PQ + CQ \rightarrow PQ = AC - 2(AP)$

$$= 13 - 2\left(\frac{25}{13}\right)$$
$$= \frac{169}{13} - \frac{50}{13}$$
$$= \frac{119}{13}$$

Dengan menggunakan kesamaan luas ΔABC, maka

$L\Delta ABC = L\Delta ABC$

$\leftrightarrow \frac{1}{2} \times BQ \times AC = \frac{1}{2} \times AB \times BC$

$\leftrightarrow \quad BQ = \frac{AB \times BC}{AC}$

$\leftrightarrow \quad BQ = \frac{5 \times 12}{13}$

$\leftrightarrow \quad BQ = \frac{60}{13}$

Sehingga karena ΔBQC kongruen dengan ΔDPA, maka $DP = BQ = \frac{60}{13}$

Sehingga panjang lintasan $DPQB$ adalah:

panjang lintasan $= DP + PQ + QB$

$$= \frac{60}{13} + \frac{119}{13} + \frac{60}{13}$$
$$= \frac{239}{13}$$

4. Pada suatu data terdapat 21 bilangan bulat positif. Bilangan terbesar pada data tersebut adalah 16. Median dari data adalah 10. Rata-rata terkecil yang mungkin dari data tersebut adalah ....

A. 5,0

B. 5,5

C. 6,0

D. 6,5

Solusi:

Kemungkinan bilangan : $1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 10, 10, 10, 10, 10, 10, 10, 10, 10, 10, 16$

Rata-rata $= \frac{10\times1+10\times10+16}{21}$

Rata-rata $= \frac{10+100+16}{21}$

Rata-rata $= \frac{126}{21} = 6$

5. Kubus ABCD.PQRS memiliki sisi-sisi yang panjangnya 4 cm. Jika E titik tengah PQ dan F titik tengah QR, maka luas daerah $ACFE$ adalah .... cm^2

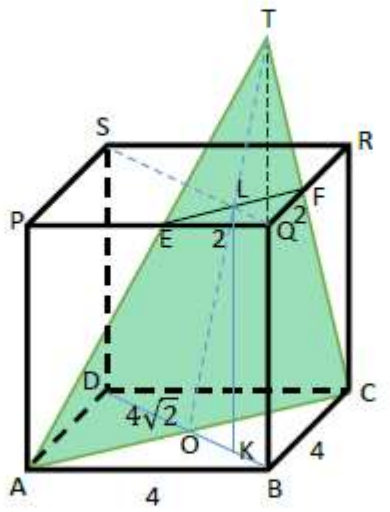
A. 16

B. 18

C. 32

D. 64

Solusi:



AC diagonal sisi sehingga $AC = 4\sqrt{2}$ cm

$LK = QB = 4$ cm

$OK = \frac{1}{4} \times 4\sqrt{2} = \sqrt{2}$ cm

Segitiga OLK siku-siku di K, sehingga

$OL = \sqrt{LK^2 + OK^2}$

$OL = \sqrt{4^2 + \left(\sqrt{2}\right)^2}$

$OL = \sqrt{16 + 2}$

$OL = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ cm

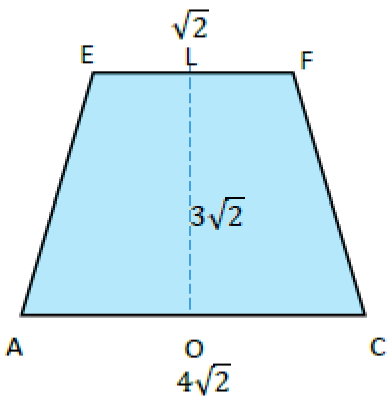
Segitiga EQF siku-siku di Q, sehingga

$EF = \sqrt{EQ^2 + QF^2}$

$EF = \sqrt{2^2 + 2^2}$

$OL = \sqrt{4 + 4}$

$OL = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ cm



Luas trapezium $ACFE$

$= \frac{1}{2} \times (AC + EF) \times OL$

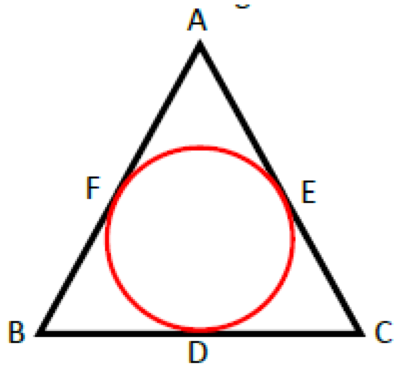
$= \frac{1}{2} \times (4\sqrt{2} + \sqrt{2}) \times 3\sqrt{2}$

$= \frac{1}{2} \times (4\sqrt{2} + 2\sqrt{2}) \times 3\sqrt{2}$

$= 3\sqrt{2} \times 3\sqrt{2}$

$= 18\ cm^2$

6. Perhatikan ΔABC dan lingkaran dalam pada gambar di bawah.



Jika ΔABC samasisi dengan CD=6 cm, maka luas daerah lingkaran dalam adalah …. cm^2.

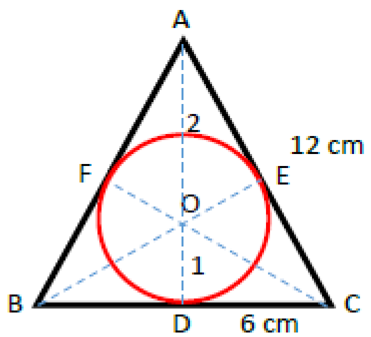
A. 16π

B. 12π

C. 9π

D. 4π

Solusi:



$AD = \sqrt{12^2 - 6^2}$

$AD = \sqrt{144 - 36}$

$AD = \sqrt{108} = 6\sqrt{3}$

Karena pusat O merupakan perpotongan garis tinggi maka

Jari-jari $OD = \frac{1}{3} \times 6\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$ cm

Luas lingkaran $= \pi \times \left(2\sqrt{3}\right)^2 = 12\pi\ cm^2$

7. Semua bilangan real x yang memenuhi pertidaksamaan $\frac{2(x+3)-5\sqrt{x+2}}{x+2} \geq 0$ adalah ....

A. $x \leq -\frac{7}{4}\ atau\ x \geq 2$

B. $-2 < x \leq -\frac{7}{4}\ atau\ x \geq 2$

C. $0 \leq x \leq -\frac{7}{4}\ atau\ x \geq \frac{1}{2}$

D. $-\frac{7}{4} \leq x \leq 2$

Solusi:

Agar $\frac{2(x+3)-5\sqrt{x+2}}{x+2} \geq 0$ maka ada dua kemungkinan

- $x + 2$ positif dan $2(x+3) - 5\sqrt{x+2}$ non negatif

  $x + 2 > 0$ maka $x > -2$ pertidaksamaan (i)

  Misal $x + 2 = y$ maka $2(x+3) - 5\sqrt{x+2} = 2(y+1) - 5\sqrt{y}$

  $2(y+1) - 5\sqrt{y} \geq 0$

  $2y + 2 \geq 5\sqrt{y}$ kuadratkan kedua ruas

  $(2y+2)^2 \geq \left(5\sqrt{y}\right)^2$

  $4y^2 + 8y + 4 \geq 25y$

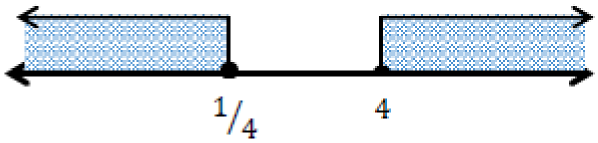
  $4y^2 + 8y - 25y + 4 \geq 0$

  $4y^2 - 17y + 4 \geq 0$

  $(4y-1)(y-4) \geq 0$

  $4y - 1 = 0$ atau $y = 4$

  $y = 14$ atau $y = 4$



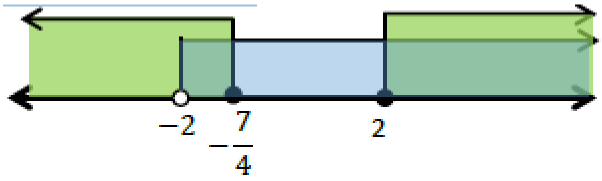
  $y \leq \frac{1}{4}$ atau $y \geq 4$

  $x + 2 \leq \frac{1}{4}$ atau $x + 2 \geq 4$

  $x \leq \frac{1}{4} - 2$ atau $x \geq 4 - 2$

$x \leq -\frac{7}{4}$ atau $x \geq 2$ pertidaksamaan (ii)

Gabungan (i) dan (ii)



$-2 < x \leq -\frac{7}{4}$ atau $x \geq 2$

- $x + 2$ negatif dan $2(x + 3) - 5\sqrt{x + 2}$ non positif

  Karena $x + 2 < 0$ maka $\sqrt{x + 2}$ merupakan bilangan imajiner (tidak memenuhi)

8. Sebuah wajah memuat 5 bola merah dan 3 bola putih. Seseorang mengambil bola-bola tersebut sebanyak 3 kali, masing-masing dua bola setiap pengambilan tanpa pengembalian. Peluang bahwa pada setiap pengambilan, bola yang terambil berbeda warna adalah ....

   A. $\frac{14}{48}$

   B. $\frac{72}{80}$

   C. $\frac{1}{56}$

   D. $\frac{1}{7}$

   Solusi:

   Peluang terambilnya bola berbeda warna:

$$= \frac{C_1^5 . C_1^3}{C_2^8} \times \frac{C_1^4 . C_1^3}{C_2^6} \times \frac{C_1^3 . C_1^1}{C_2^4}$$

$$= \frac{5 \times 3}{\frac{8.7}{1.2}} \times \frac{4 \times 2}{\frac{6.5}{1.2}} \times \frac{3 \times 1}{\frac{4.3}{1.2}}$$

$$= \frac{1}{7}$$

9. Diketahui dua titik $A(1,1)$ dan $B(12, -1)$. Garis l dengan gradien $-\frac{3}{4}$ melalui titik B. Jarak antara titik A dan garis l adalah ... satuan panjang.

   A. 4

   B. 5

   C. 6

   D. 7

Solusi:

Garis l dengan gradien $-\frac{3}{4}$ melalui titik $B(12, -1)$ adalah

$y - (-1) = -\frac{3}{4}(x - 12)$

$y + 1 = -\frac{3}{4}x + 9$

$4y + 4 = -3x + 36$

$3x + 4y - 32 = 0$

Jarak titik $A\ (1,1)$ terhadap garis l dicari dengan

$$d = \frac{|3.1 + 4.1 - 32|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{25}{5} = 5$$

Jadi jarak titik $A\ (1,1)$ terhadap garis l adalah 5 satuan

10. Menjelang tahun baru, harga sejenis pakaian olahraga dipotong (didiskon) dua kali seperti dinyatakan pada gambar di samping. Jika harga mula-mula suatu pakaian Rp 400.000,00, maka seseorang yang membeli pakaian tersebut harus membayar sebesar ….

    DISKON $60\% + 15\%$

    A. Rp 124.000,00

    B. Rp 136.000,00

    C. Rp 276.000,00

    D. Rp 300.000,00

Solusi:

Harga setelah diskon pertama

$= \frac{100-60}{100} \times Rp\ 400.000{,}00$

$= \frac{40}{100} \times Rp\ 400.000{,}00$

$= Rp\ 160.000{,}00$

Harga setelah diskon kedua

$= \frac{100-15}{100} \times Rp\ 160.000{,}00$

$= \frac{85}{100} \times Rp\ 160.000{,}00$

$= Rp\ 136.000{,}00$