

po.alcindonesia.co.id

REKURSI

Rekursi adalah suatu metode pemecahan masalah pada *programming* dengan memecah suatu masalah tersebut menjadi masalah yang lebih kecil sehingga masalah tersebut menjadi trivial untuk diselesaikan. Rekursi juga biasanya dapat diartikan sebagai sebuah fungsi yang memanggil dirinya sendiri.

Algoritma rekursi pasti memiliki 2 buah bagian, yaitu:

1. **Basis**, kasus terkecil dimana kita dapat menyelesaikan permasalahan tersebut secara langsung.
2. **Rekurens**, kasus yang didefinisikan berdasarkan kasus lain yang lebih kecil.

Selain dua hal di atas, rekursi juga harus memiliki sebuah *state* yang membedakan antara sebuah kasus dengan kasus yang lain. Selain itu *state* juga biasanya mengarah menuju basis.

Contoh Permasalahan

Berapakah nilai dari $1 + 2 + 3 + \dots + n$?

Jawab:

Permasalahan tersebut bisa diselesaikan dengan sebuah rekursi. Misalkan kita memiliki sebuah fungsi $f(n) = 1 + 2 + 3 \dots + n$.

Sudah sangat jelas sekali bahwa jika $n = 1$ maka $f(1) = 1$.

Selanjutnya untuk setiap bilangan bulat positif $n \geq 2$. Kita bisa memecahkan permasalahan $1 + 2 + 3 + \dots + n$ menjadi $(1 + 2 + \dots + (n - 1)) + n$

Sekarang, berdasarkan definisi yang sudah dijelaskan sebelumnya kita mendapatkan $1 + 2 + 3 + \dots + (n - 1) = f(n - 1)$

Oleh karena itu kita bisa menuliskan $f(n) = f(n - 1) + n$.

Sehingga bentuk permasalahan dari $1 + 2 + \dots + n = f(n)$ dapat kita modelkan menjadi:

$$f(n) = \begin{cases} 1, & \text{untuk } n \geq 1 \\ f(n - 1) + n, & \text{untuk } n \geq 2 \end{cases}$$

Dalam bahasa pascal, kita bisa menuliskannya menjadi sebuah fungsi sebagai berikut:



```
function sum(n : integer):integer;
begin
    if (n = 1) then sum := 1
    else sum := n + sum(n-1);
end;
```

Bagian dari if pada fungsi tersebut adalah basis dari rekursi. Kemudian untuk bagian dari else nya merupakan bagian dari rekurens, dimana fungsi tersebut memanggil fungsi lain yang serupa. Nilai n pada parameter fungsi sum tersebut biasanya disebut sebagai *state*.

Tips untuk menyelesaikan soal-soal bertipe rekursi adalah pertama perhatikan basis dari rekursi tersebut dan simpan nilainya. Kemudian mulailah mencari nilai dari fungsi tersebut dengan *state* yang paling kecil tetapi bukan basis, setelah itu gunakan hasil-hasil tersebut untuk mencari nilai fungsi dengan *state* yang lebih besar.

Tips lain yang digunakan untuk menyelesaikan soal-soal rekursi adalah dengan memperhatikan polanya itu sendiri.

Contoh soal:

```
function panggil1(x:longint):longint;
begin
    if (x<3) then panggil1:=0
    else panggil1:=panggil1(x-1)+2*panggil1(x-2)+3;
end;
```

Tentukan nilai dari panggil1(7)!

Jawaban :

Basis fungsi rekursi tersebut adalah ketika $x < 3$, maka nilai fungsi tersebut 0. Sehingga kita bisa mendapatkan:

$$\text{panggil1}(0) = 0$$

$$\text{panggil1}(1) = 0$$

$$\text{panggil1}(2) = 0$$

Kemudian, kita mulai mencari nilai fungsi tersebut dengan *state* yang paling kecil dan bukan basis. Pada soal ini *state* tersebut adalah ketika $x = 3$. Sehingga kita mampu mendapatkan nilai-nilai berikut ini:

$$\text{panggil1}(3) = \text{panggil1}(2) + 2 * \text{panggil1}(1) + 3 = 0 + 2 * 0 + 3 = 3$$

$$\text{panggil1}(4) = \text{panggil1}(3) + 2 * \text{panggil1}(2) + 3 = 3 + 2 * 0 + 3 = 6$$

$$\text{panggil1}(5) = \text{panggil1}(4) + 2 * \text{panggil1}(3) + 3 = 6 + 2 * 3 + 3 = 15$$

$$\text{panggil1}(6) = \text{panggil1}(5) + 2 * \text{panggil1}(4) + 3 = 15 + 2 * 6 + 3 = 30$$

$$\text{panggil1}(7) = \text{panggil1}(6) + 2 * \text{panggil1}(5) + 3 = 30 + 2 * 15 + 3 = 63$$

Dari sini, kita mendapatkan bahwa nilai dari panggil1(7) adalah 63.

SOAL

Perhatikan potongan program berikut ini untuk soal nomor 1 dan 2

```
function f(x : integer):integer;  
begin  
    If (x = 1) or (x = 2) then f := 1  
    Else f := f(x-1) + f(x-2);  
end;
```

1. Nilai dari f(5) adalah ...
 - A. 4
 - B. 5
 - C. 6
 - D. 7
 - E. 8
2. Nilai dari f(16) adalah ...
 - A. 610
 - B. 789
 - C. 879
 - D. 987
 - E. 1007

Perhatikan potongan program berikut ini untuk soal nomor 3 dan 4

```
function f(x : integer):integer;  
begin  
    if (x = 1) then f:= 1  
    else if (x = 2) then f := 2  
    else if (x = 3) then f := 3  
    else f := f(x-1) + 2*f(x-2) + 3*f(x-3);  
end;
```

3. Nilai dari f(5) adalah ...
 - A. 22
 - B. 23
 - C. 24
 - D. 25
 - E. 26
4. Nilai dari f(10) adalah ...
 - A. 1567
 - B. 1576
 - C. 1657

- D. 1675
- E. 1765

Perhatikan potongan program berikut ini untuk soal nomor 5 dan 6

```
Function fungsi(nilai1, nilai2 : longint):longint;  
Begin  
    If (nilai2 = 0) then fungsi := 1  
    Else fungsi := nilai1*fungsi(nilai1, nilai2-1);  
End;
```

5. Berapakah nilai dari fungsi(3, 6)?
 - A. 723
 - B. 725
 - C. 727
 - D. 729
 - E. 731
6. Berapa banyak pasangan (nilai1, nilai2) yang mungkin jika nilai dari fungsi(nilai1, nilai2) adalah 4096?
 - A. 4
 - B. 6
 - C. 8
 - D. 10
 - E. 12

Perhatikan potongan program berikut ini untuk soal nomor 7 dan 8

```
function ALC(a, b, x : longint) : longint;  
begin  
    if ( b = 1 ) then ALC := a + x  
    else  
        begin  
            if (b mod 2 = 1) then x := x + a;  
            ALC := ALC(2 * a, b div 2, x);  
        end;  
    end;  
end;
```

7. Nilai dari ALC(5, 6, 0) adalah ...
 - A. 30
 - B. 35
 - C. 40
 - D. 50
 - E. 60
8. Apakah hasil dari ALC(120, 32, 32)?

- A. 3600
- B. 3782
- C. 3872
- D. 3920
- E. 4000

Perhatikan potongan program berikut ini untuk soal nomor 9

```
Function g(x : integer):integer;  
begin  
    if (x = 0) then g:=0  
    else g:=g(g(g(x-1))) + 1;  
end;
```

9. Nilai g(20) adalah ...

- A. 18
- B. 19
- C. 20
- D. 21
- E. 22

Perhatikan potongan program berikut ini untuk soal nomor 10 dan 11

```
function abc(a,b : integer):integer;  
begin  
    if (a<b) then abc:=0  
    else abc:=abc(a-b,b)+1;  
end;  
function xyz(a,b : integer):integer;  
begin  
    if (b=0) then xyz:=1  
    else xyz:=xyz(a,b-1)+a;  
end;
```

10. Berapakah nilai dari abc(19,4)?

- A. 1
- B. 2
- C. 3
- D. 4
- E. 5

11. Berapakah nilai dari xyz(12,17)?

- A. 201

- B. 202
- C. 203
- D. 204
- E. 205

Perhatikan potongan program berikut ini untuk soal nomor 12-14

```
function A(x,y:integer):integer;
begin
    if (y = 0) then A := x
    else A := A(y, x mod y);
end;

function B(x, y:integer):int64;
var
    tmp : integer;
begin
    tmp := A(x, y);
    B := (x*y) div tmp;
end;

function C(x, y : integer):integer;
begin
    if (y = 1) then C := 1
    else if (A(x, y) = 1) then C := 1 + C(x, y-1)
    else C := C(x, y-1);
end;
```

12. Nilai dari A(1234, 3124) adalah ...

- A. 2
- B. 4
- C. 6
- D. 14
- E. 22

13. Nilai dari B(142, 120) adalah ...

- A. 8500
- B. 8520
- C. 8540
- D. 9040
- E. 17040

14. Nilai dari C(2018, 2018) adalah

- A. 1
- B. 2
- C. 1008
- D. 1009
- E. 2018

Perhatikan potongan program berikut ini untuk soal nomor 15


```
function F1(i, j : integer) : integer;
begin
    if (i < 0) or (j < 0) then begin
        if (i > j) then F1 := i + 1
        else F1 := j + 1;
    end
    else if (i = j) then
        F1 := F1(i + 1, j - 1)
    else
        F1 := F1(i - 2, j - 1) + F1(i - 1, j - 2);
    end;
end;
```

15. Nilai dari F1(4, 3) adalah ...

- A. 4
- B. 6
- C. 8
- D. 10
- E. 12

Perhatikan potongan program berikut ini untuk soal nomor 16

```
procedure A(x : integer);
var
    i : integer;
begin
    if (x <= 2) then begin
        for i := 1 to x do
            write('x');
        writeln;
    end
    else begin
        A(x-1);
        for i := 1 to x do
            write('x');
        writeln;
        A(x-2);
    end;
end;
```

16. Banyaknya karakter 'x' yang tercetak di layar saat A(10) dijalankan adalah ...

- A. 310
- B. 320
- C. 330
- D. 340
- E. 350

Perhatikan potongan program berikut ini untuk soal nomor 17 dan 18

```
function ubah(x : integer):string;  
var  
    tmp : string;  
begin  
    tmp := '';  
    if (x = 0) then ubah := ''  
    else begin  
        tmp := ubah(x div 2);  
        if (x mod 2 = 0) then  
            tmp := tmp + '0'  
        else tmp := tmp + '1';  
        ubah := tmp;  
    end;  
end;
```

17. Nilai dari ubah(12) adalah ...

- A. 1001
- B. 1011
- C. 1100
- D. 1101
- E. 1110

18. Nilai dari ubah(9381) adalah ...

- A. 10010010100101
- B. 10010010101001
- C. 10010010101101
- D. 10010010110000
- E. 10010010111010

Perhatikan potongan program berikut ini untuk soal nomor 19 dan 20

```
function cimi(x,y:integer):integer;  
begin  
    if (x + y = 0) then begin  
        cimi := 0;  
    end else if (x > y) then begin  
        cimi := y + cimi(x-1,y);  
    end else begin  
        cimi := x + cimi(x,y-1);  
    end;  
end;
```

19. Nilai dari cimi(5, 8) adalah ...

- A. 24
- B. 32
- C. 36
- D. 40

E. 50

20. Nilai dari cimi (30, 14) adalah ...

- A. 400
- B. 420
- C. 450
- D. 480
- E. 520

Perhatikan potongan program berikut ini untuk soal nomor 21-23

```
function A(x : longint):longint;
var
    i, tmp : longint;
begin
    tmp := 1;
    for i := 1 to x do
        tmp := tmp + i;
    A := tmp;
end;

function B(x : longint):longint;
var
    i, tmp : longint;
begin
    tmp := 0;
    for i := 1 to x do
        tmp := tmp + A(i);
    B := tmp;
end;

function C(x, y : longint):longint;
var
    i, tmp : longint;
begin
    tmp := 1;
    for i := x to y do
        tmp := tmp + B(i);
    C := tmp;
end;
```

21. Nilai dari A(50) adalah ...

- A. 1274
- B. 1275
- C. 1276
- D. 1277
- E. 1278

22. Nilai dari B(20) adalah ...

- A. 1500
- B. 1520

- C. 1540
- D. 1560
- E. 1580

23. Nilai dari $C(2, 7)$ adalah ...

- A. 234
- B. 235
- C. 236
- D. 237
- E. 238

Perhatikan potongan program berikut ini untuk soal nomor 24 dan 25

```
function S(x, y: longint):longint;
begin
    S := ((x mod y)*(x mod y)) mod y;
end;

function P(x, y, z : longint):longint;
begin
    if (y = 0) then P := 1
    else if (y = 1) then P := x mod z
    else if (y mod 2 = 0) then P := S(P(x, y div 2, z), z)
    else P := ((x mod z)*S(P(x, (y-1) div 2, z), z)) mod z;
end;
```

24. Berapakah nilai dari $P(3, 19, 7)$?

- A. 1
- B. 2
- C. 3
- D. 4
- E. 5

25. Berapakah nilai dari $P(21, 2019, 11)$?

- A. 0
- B. 1
- C. 4
- D. 7
- E. 10

Perhatikan potongan program berikut ini untuk soal nomor 26

```
function makan(x, y, z : integer):longint;
begin
    if (x = y) then makan := z
    else if (x = z) then makan := y
    else if (y = z) then makan := x
    else makan := makan(x-2, y+1, z-1) + x + y + z;
end;
```

26. Berapakah nilai dari makan(15, 5, 10)?

- A. 110
- B. 120
- C. 130
- D. 140
- E. 150

Perhatikan program berikut ini untuk soal nomor 27 dan 28

```
var
    x, ans : longint;

procedure naon(n : longint);
begin
    if (n < 30) then begin
        naon(5*n);
        naon(3*n);
        x := x + 1;
        ans := ans + x*n;
    end;
end;

begin
    ans := 0;
    x := 0;
    naon(1);
    writeln(x);           {1}
end.
```

27. Apakah output program di atas?

- A. 8
- B. 9
- C. 10
- D. 11
- E. 12

28. Jika perintah pada {1}, diganti menjadi "writeln(ans);", maka output dari program di atas adalah ...

- A. 344
- B. 345
- C. 346
- D. 347
- E. 348

Perhatikan potongan program berikut ini untuk soal nomor 29-30

```
function F(x, y:integer):integer;
begin
    if (x <= 0) then F := Y
    else F := F(x-1, y+2);
end;
```

29. Berapakah nilai dari $F(8, 10)$?

- A. 23
- B. 24
- C. 25
- D. 26
- E. 27

30. Berapakah nilai dari $F(2018, 2019)$?

- A. 6045
- B. 6055
- C. 6065
- D. 6075
- E. 6085