PAKET 14

PELATIHAN ONLINE

2019

SMA
MATEMATIKA

po.alcindonesia.co.id

WWW.ALCINDONESIA.CO.ID

@ALCINDONESIA

085223273373

PEMBAHASAN PAKET 14

1. Tentukan jumlah

$$\sum_{n=1}^{1994}(-1)^n\frac{n^2+n+1}{n!}$$

Jawaban boleh dinyatakan dalam faktorial.

a. $-1+\frac{1995}{1994!}$
b. $1-\frac{1995}{1994!}$
c. $1+\frac{1995}{1994!}$
d. $-1-\frac{1995}{1994!}$

Solusi:

Misalkan $S=\sum_{n=1}^{1994}(-1)^n\frac{n^2+n+1}{n!}$

$S=\sum_{n=1}^{1994}(-1)^n\left(\frac{n}{(n-1)!}+\frac{n+1}{n!}\right)$

$S=\sum_{n=1}^{1994}(-1)^n\left(\frac{n}{(n-1)!}\right)+\sum_{n=1}^{1994}(-1)^n\left(\frac{n+1}{n!}\right)$

$S=\sum_{n=0}^{1993}(-1)^{n+1}\left(\frac{n+1}{n!}\right)+\sum_{n=1}^{1994}(-1)^n\left(\frac{n+1}{n!}\right)$

$S=\left(-\frac{1}{0!}+\frac{2}{1!}-\frac{3}{2!}+\cdots-\frac{1993}{1992!}+\frac{1994}{1993!}\right)+\left(-\frac{2}{1!}+\frac{3}{2!}-\frac{4}{3!}+\frac{5}{4!}-\cdots-\frac{1994}{1993!}+\frac{1995}{1994!}\right)$

$\sum_{n=1}^{1994}(-1)^n\frac{n^2+n+1}{n!}=-1+\frac{1995}{1994!}$

2. Jika α,β dan γ adalah akar-akar persamaan $x^3-x-1=0$ tentukan

$$\frac{1+\alpha}{1-\alpha}+\frac{1+\beta}{1-\beta}+\frac{1+\gamma}{1-\gamma}$$

a. -1
b. -3
c. -5
d. -7

Solusi:

$\alpha+\beta+\gamma=-\frac{B}{A}=0$

$\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma=\frac{C}{A}=-\frac{1}{1}=-1$

$\alpha\beta\gamma=-\frac{D}{A}=-\frac{-1}{1}=1$

$\frac{1+\alpha}{1-\alpha}+\frac{1+\beta}{1-\beta}+\frac{1+\gamma}{1-\gamma}=\frac{(1+\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)+(1+\beta)(1-\alpha)(1-\gamma)+(1+\gamma)(1-\alpha)(1-\beta)}{(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)}$

$$\frac{1+\alpha}{1-\alpha}+\frac{1+\beta}{1-\beta}+\frac{1+\gamma}{1-\gamma}=\frac{3-(\alpha+\beta+\gamma)-(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma)+3\alpha\beta\gamma}{1-(\alpha+\beta+\gamma)+(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma)-\alpha\beta\gamma}$$
$$\frac{1+\alpha}{1-\alpha}+\frac{1+\beta}{1-\beta}+\frac{1+\gamma}{1-\gamma}=\frac{3-(0)-(-1)+3(1)}{1-(0)+(-1)-(1)}$$
$$\frac{1+\alpha}{1-\alpha}+\frac{1+\beta}{1-\beta}+\frac{1+\gamma}{1-\gamma}=-7$$

3. Tentukan banyaknya semua penyelesaian sistem persamaan berikut.

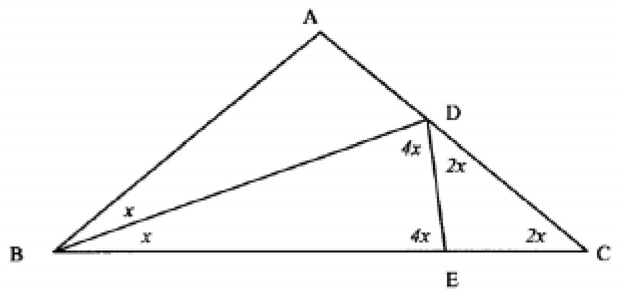
$$\begin{cases}\dfrac{4x^2}{1+4x^2}=y\\ \dfrac{4y^2}{1+4y^2}=z\\ \dfrac{4z^2}{1+4z^2}=x\end{cases}$$

a. 1
b. 2
c. 3
d. 4

Solusi:
Karena bilangan kuadrat tidak mungkin negatif maka :
$0 \leq 4p^2 < 1 + 4p^2$
$0 \leq \frac{4t^2}{1+4t^2} < 1 \quad \rightarrow 0 \leq x < 1\,;\, 0 \leq y < 1\,;\, 0 \leq z < 1$
• Jika $x = 0$
Dari pers (1) didapat $y = 0 \rightarrow \quad z = 0$
Begitu juga jika $y = 0$ dan $z = 0$
Didapat penyelesaian sistem persamaan (x, y, z) adalah $(0, 0, 0)$

• Jika tidak ada satu pun $x, y, z = 0$
$$\frac{4x^2}{1+4x^2}+\frac{4y^2}{1+4y^2}+\frac{4z^2}{1+4z^2}=x+y+z$$
$$\frac{4x^3+x-4x^2}{1+4x^2}+\frac{4y^3+y-4y^2}{1+4y^2}+\frac{4z^3+z-4z^2}{1+4z^2}=0$$
$$\frac{x(2x-1)^2}{1+4x^2}+\frac{y(2y-1)^2}{1+4y^2}+\frac{z(2z-1)^2}{1+4z^2}=0$$
Karena persamaan kuadrat tidak mungkin negatif dan telah dibuktikan sebelumnya bahwa $x, y, z > 0$ maka persamaan di atas hanya dapat dipenuhi jika :
$(2x - 1)^2 = 0\,;\, (2y - 1)^2 = 0$ dan $(2z - 1)^2 = 0$
$x = y = z = \frac{1}{2}$
Jadi terdapat dua buah penyelesaian tripel (x, y, z) sistem persamaan di atas yaitu $(0, 0, 0)$ dan $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

4. Segitiga ABC adalah segitiga sama kaki dengan AB = AC. Garis bagi dari titik B memotong AC di D dan diketahui bahwa BC = BD + AD. Tentukan besar ∠A.
   a. $60°$
   b. $75°$
   c. $100°$
   d. $120°$
   Solusi:



Dibuat titik E yang terletak pada sisi BC sehingga BE = BD → AD = EC

Karena BD adalah garis bagi ΔABC maka : $\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{CD}$

$\frac{CE}{CD} = \frac{AD}{CD} = \frac{AB}{BC}$

Karena ΔABC sama kaki maka :

$\frac{CE}{CD} = \frac{AD}{CD} = \frac{AB}{BC} = \frac{CA}{BC}$

Pada ΔCED dan ΔCAB berlaku ∠DCE = ∠ACB dan $\frac{CE}{CD} = \frac{CA}{BC}$ yang membuat ΔCED ≅ ΔCAB

Maka ∠DCE = ∠ACB ; ∠CDE = ∠ABC dan ∠CED = ∠CAB

Misalkan $\angle ABC = 2x$ maka $\angle CDE = \angle DCE = 2x \rightarrow \angle DEC = 180^o - 4x \rightarrow \angle DEB = 4x$

Karena ∠BDE sama kaki maka $\angle BDE = \angle DEB = 4x$

Karena BD adalah garis bagi sudut B maka $\angle DBE = x$

Pada ∠BDE berlaku : $x + 4x + 4x = 180^o \rightarrow x = 20^o$

$\angle A = 180^o - 4x$

$\angle A = 100^o$

5. Berapa banyak pasangan bilangan bulat positif x, y dengan $x \leq y$ yang memenuhi $FPB(x, y) = 5!$ dan $KPK(x, y) = 50!$
   a. 2^{14}
   b. 2^{15}
   c. 5^{14}
   d. 5^{15}
   Solusi:

Misalkan $p_1, p_2, p_3, \cdots, p_{12}$ adalah bilangan prima antara 7 sampai 47
$5! = 2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^1 \cdot p_1^0 \cdot p_2^0 \cdot \cdots \cdot p_{12}^0$
$50! = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot p_1^{m4} \cdot p_2^{m5} \cdot \cdots \cdot p_{12}^{m15}$
$2^4, 3^2, 5^2, p_1^{m4}, p_2^{m5}, \cdots, p_{12}^{m15}$ semuanya membagi 50!. Maka pangkat prima dari 5! Dan 50! semuanya berbeda.
Misalkan,
$x = 2^{n1} \cdot 3^{n2} \cdot 5^{n3} \cdot p_1^{n4} \cdot p_2^{n5} \cdot \cdots \cdot p_{12}^{n15}$
$y = 2^{m1} \cdot 3^{m2} \cdot 5^{m3} \cdot p_1^{m4} \cdot p_2^{m5} \cdot \cdots \cdot p_{12}^{m15}$
Maka $maks\ (n_i, m_i)$ = pangkat prima dari 50! Dan $min\ (n_i, m_i)$ = pangkat prima dari 5!
Karena ni dan mi keduanya berbeda maka ada 2 kemungkinan nilai ni maupun m_i
Banyaknya kemungkinan nilai x dan y masing-masing adalah 2^{15}
Karena tidak ada nilai x dan y yang sama dan karena diinginkan $x < y$ maka hanya ada setengah kemungkinan dari nilai x dan y yang mungkin.
Banyaknya pasangan (x, y) yang memenuhi dengan $x < y$ adalah $\frac{2^{15}}{2} = 2^{14}$

6. Bilangan a, b, c adalah digit-digit dari suatu bilangan yang memenuhi $49a + 7b + c = 286$. Berapakah nilai b yang memenuhi?
   a. 3
   b. 5
   c. 7
   d. 9
   Solusi:
   286 jika dibagi 7 akan bersisa 6
   $49a + 7b$ habis dibagi 7
   Karena ruas kanan jika dibagi 7 bersisa 6 maka $c = 6$
   $49a + 7b + 6 = 286 \rightarrow 7a + b = 40$
   karena $0 \leq b \leq 9$ maka $31 \leq 7a \leq 40$ maka $a = 5 \rightarrow b = 5$
   Jadi, nilai b adalah 5

7. Jika $\log_{2n}(1994) = \log_n\left(486\sqrt{2}\right)$, tentukan nilai n^6.
   a. $3^{10}.2^6$
   b. $3^{15}.2^6$
   c. $3^{20}.2^6$
   d. $3^{25}.2^6$
   Solusi:
   Misalkan $\log_{2n}(1994) = \log_n\left(486\sqrt{2}\right) = k$, maka:

$1944 = (2n)^k$ dan $486\sqrt{2} = n^k$

$\left(\frac{2n}{n}\right)^k = \frac{1944}{486\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} \quad \rightarrow \quad 2^k = 2^{3/2} \rightarrow \quad k = \frac{3}{2}$

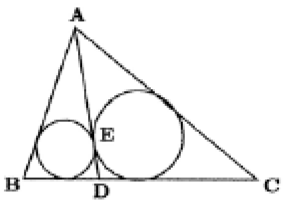
$n^6 = (n^k)^4 = \left(486\sqrt{2}\right)^4$

$n^6 = 3^{20}.2^6$

8. Dua dadu dengan sisinya dicat merah atau biru. Dadu pertama terdiri dari 5 sisi merah dan 1 sisi biru. Ketika kedua dadu tersebut dilempar, peluang munculnya sisi dadu berwarna sama adalah ½. Ada berapa banyak sisi dadu kedua yang berwarna merah ?
   a. 1
   b. 2
   c. 3
   d. 4

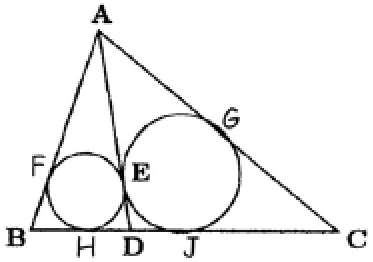
   Solusi:
   Misalkan banyaknya sisi dadu kedua yang berwarna merah $= x$ maka sisi dadu birunya $= 6 - x$
   Peluang munculnya sisi dadu berwarna sama $= \frac{5}{6}.\frac{x}{6} + \frac{1}{6}.\frac{6-x}{6}$
   $\frac{5}{6}.\frac{x}{6} + \frac{1}{6}.\frac{6-x}{6} = \frac{1}{2}$
   $5x + 6 - x = 18$
   $x = 3$
   Banyaknya sisi dadu kedua yang berwarna merah adalah 3

9. Segitiga ABC memiliki sisi AB = 137, AC = 241 dan BC = 200. Titik D terletak pada sisi BC sehingga lingkaran dalam ΔABD dan lingkaran dalam ΔACD menyinggung sisi AD di titik yang sama, yaitu E. Tentukan panjang CD.



   a. 122
   b. 132
   c. 142
   d. 152

   Solusi:



Misalkan garis AB menyinggung lingkaran di F dan G. Garis BC menyingung lingkaran di H dan J.

Panjang $AF = x \rightarrow AE = AF = x$ dan $BF = 137 - x \rightarrow AG = AE = x \rightarrow BH = BF = 137 - x$

Panjang $GC = 241 - x \rightarrow CJ = CG = 241 - x$

Misalkan panjang $DE = y \rightarrow DH = DJ = DE = y$

$BC = BH + HD + DJ + CJ = 137 - x + y + y + 241 - x = 378 + 2y - 2x$

$200 = 378 + 2y - 2x \rightarrow x - y = 89$

$BD = 137 - x + y = 137 - 89 = 48$

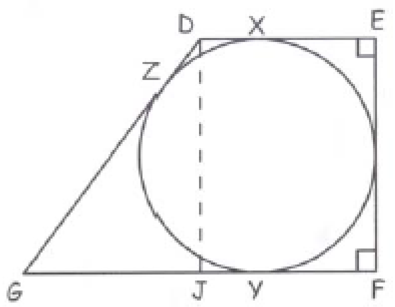
$CD = CJ + DJ \rightarrow CD = 241 - x + y \rightarrow CD = 241 - (x - y)$

$CD = 241 - 89$

$CD = 152$

10. Sebuah trapesium DEFG dengan sebuah lingkaran dalam menyinggung keempat sisinya dan berjari-jari 2 serta berpusat di C. Sisi DE dan GF adalah sisi yang sejajar dengan $DE < GF$ dan $DE = 3$. Diketahui bahwa $\angle DEF = \angle EFG = 90^o$. Tentukan luas trapesium.
    a. 12
    b. 15
    c. 16
    d. 18

    Solusi:



Misalkan garis DG menyinggung lingkaran di titik Z dan Garis GF menyinggung lingkaran di titik Y maka $GZ = GY$ dan $FY = 2$

Misalkan garis DE menyinggung lingkaran di titik X maka $DX = 3 - 2 = 1 \quad \rightarrow \quad DZ = DX = 1$

Tarik garis dari titik D tegak lurus GF memotong GF di titik J maka $DJ = 4$

Dengan menganggap $GZ = GY = k$ maka pada ΔDGJ berlaku :

$(k + 1)^2 = (k - 1)^2 + 4^2 \quad \rightarrow \quad k = 4$

$GF = GY + YF = 4 + 2 = 6$

Luas trapesium $= \frac{6+3}{2} = 18$