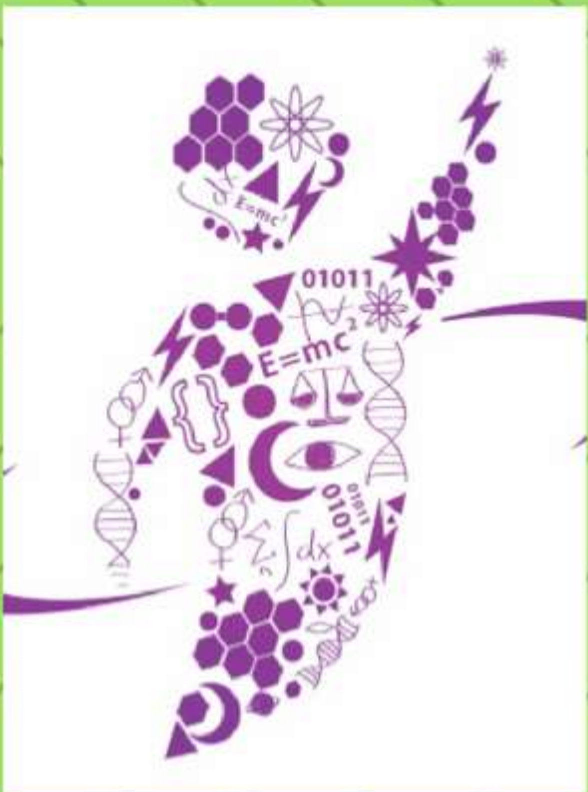
PAKET 1

PELATIHAN ONLINE 2019

SMA ASTRONOMI

po.alcindonesia.co.id



WWW.ALCINDONESIA.CO.ID

@ALCINDONESIA

085223273373

PENGANTAR

Astronomi merupakan bagian sains yang mengkaji objek-objek langit dan fenomena yang menyertai mereka. Olimpiade Astronomi sendiri melingkupi selapis tipis saja ilmu Astronomi 'yang sesungguhnya'. Dalam paket-paket pelatihan daring ini, kami sampaikan ulasan ringkas materi yang perlu teman-teman kuasai untuk bisa terjun ke pertarungan olimpiade Astronomi. Namun, perlu diingat bahwa bahan yang kami sajikan tidak dimaksudkan untuk mencukupi segala kebutuhan teman-teman secara paripurna. Buku dan segudang referensi lain di luar paket ini tetap harus ditelaah dengan seksama apabila teman-teman bertujuan menjadi juara. Selanjutnya kami ucapkan selamat belajar, selamat berkubang dalam lika-liku yang menantang, semoga sukses mengusahakan dan menjadi yang terbaik!

I. ULASAN MATEMATIKA DASAR

A. Persamaan dan Fungsi Kuadrat

Persamaan kuadrat satu variabel, x misalnya, adalah suatu persamaan dengan bentuk umum $ax^2 + bx + c = 0$, dengan a, b, dan c merupakan bilangan real dan $a \neq 0$. Akar-akar persamaan kuadrat (mari sebut sebagai x_1 dan x_2) bisa ditentukan secara analitik melalui tiga cara:

1. Pemfaktoran

   Melalui cara ini, bentuk umum $ax^2 + bx + c = 0$ diubah ke bentuk perkalian faktor-faktornya, misal menjadi $(x - x_1)(x - x_2) = 0$. Maka, x_1 dan x_2, sebagai akar-akar persamaan kuadrat tersebut, bisa diperoleh dengan cara di bawah ini.

   Pertama, jabarkan terlebih dahulu bentuk perkalian faktor-faktor dalam persamaan tersebut.

   $$(x - x_1)(x - x_2) = 0$$
   $$x^2 - x_2x - x_1x + x_1x_2 = 0$$
   $$x^2 - (x_2 + x_1)x + x_1x_2 = 0 \qquad \text{(A.1)}$$

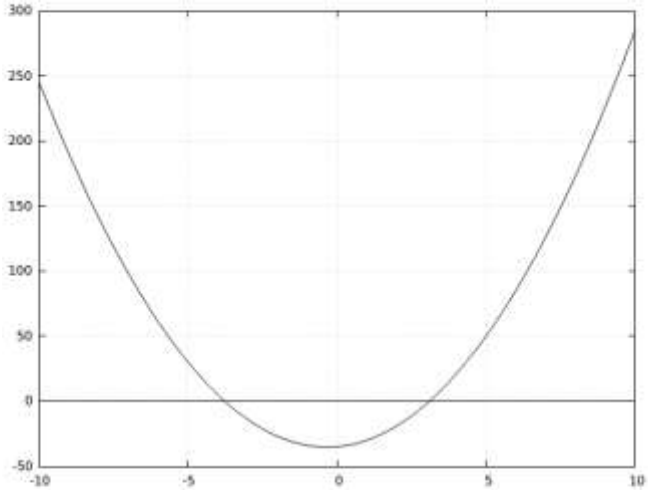
   Kedua, samakan pers. (A.1) dengan bentuk umum $ax^2 + bx + c = 0$. Jika diperhatikan, ini tidak mungkin dilakukan karena dalam bentuk umum tersebut koefisien x^2 bernilai a (bisa berapa saja asal bukan 0) sedangkan dalam pers. (A.1), koefisien x^2bernilai 1. Lakukan sedikit perubahan dengan mengalikan kedua ruas pada bentuk umum dengan $\frac{1}{a}$ menjadi $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$. Samakan ruas kiri pers. (A.1) dengan ruas kiri bentuk ini (toh mereka sama-sama bernilai nol).

   $$x^2 - (x_2 + x_1)x + x_1x_2 = x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}$$
   $$-(x_2 + x_1) = \frac{b}{a}$$
   $$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \qquad \text{(A.2)}$$

$$x_1 x_2 = \frac{c}{a} \quad \text{(A.3)}$$

2. Melengkapkan kuadrat sempurna dan “rumus ABC”
   Dua cara ini pada dasarnya mirip, sehingga dalam paket pelatihan daring ini, kami menyajikannya dalam satu kelompok. Ingat bahwa bentuk kuadrat sempurna
   $$(x-w)^2 = x^2 - 2xw + w^2. \quad \text{(A.4)}$$
   Menggunakan cara serupa dengan poin 1 di atas, bentuk umum persamaan kuadrat bisa dinyatakan:
   $$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$
   $$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a} \quad \text{(A.5)}$$
   Dalam pers. (A.4) ruas kanan, besar koefisien x^0 (atau sebut saja konstanta yang di sana bernilai w^2) adalah kuadrat dari setengah koefisien x^1 (atau sebut sebagai x saja). Memanfaatkan ide ini, modifikasi pers. (A.5) agar bentuknya mirip dengan pers. (A.4) ruas kanan. Koefisien x dalam pers. (A.5) bernilai $\frac{b}{a}$, sehingga untuk melengkapkan kuadrat, ruas kiri pada persamaan tersebut perlu ditambah dengan kuadrat dari setengah nilai itu. Tentu ruas kanan juga harus ditambah dengan nilai yang sama. Secara matematis, dapat dituliskan:
   $$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$$
   $$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a}\left(\frac{4a}{4a}\right) + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$$
   $$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2-4ac}{(2a)^2}$$
   Sampai tahap ini, langkah penentuan akar (lanjutkan penghitungannya dengan memasukkan angka) sering dikenal di buku SMA sebagai metode melengkapkan kuadrat. Metode ini bisa dilanjutkan untuk menurunkan “rumus ABC”.
   $$\left(x - \left(-\frac{b}{2a}\right)\right)^2 = \frac{b^2-4ac}{(2a)^2}$$
   Maka akar persamaan tersebut:
   $$x - \left(-\frac{b}{2a}\right) = \pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{(2a)^2}}$$

Selanjutnya, apa bedanya antara persamaan dan fungsi kuadrat? Persamaan dan fungsi kuadrat berbeda di nilai mereka. Bentuk umum fungsi kuadrat bisa dinyatakan dengan: $f(x) = ax^2 + bx + c$. Pada persamaan kuadrat, selalu berlaku $f(x) = 0$ sedangkan pada fungsi kuadrat, $f(x)$ boleh tidak sama dengan *0*. Grafik fungsi kuadrat bisa digambarkan sebagai berikut:



Gambar A.1: Contoh grafik fungsi kuadrat terbuka ke atas, mengindikasikan nilai a positif. Jika a negatif, grafik terbuka ke bawah. Mengapa demikian? Coba pikirkan sebagai bahan latihan.

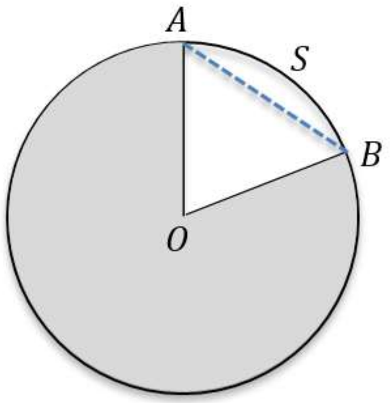
B. Sudut dan Lingkaran, Segitiga dan Trigonometri

Sudut dan Lingkaran

Dalam geometri, sudut adalah besaran yang dibatasi oleh dua garis yang berpotongan pada satu titik. Lingkaran adalah suatu bangun tertutup yang dibatasi oleh titik titik yang berjarak sama dari suatu titik pusat. Didefinisikan satu lingkaran penuh melingkupi sudut $360°$. Sudut siku-siku menggambarkan bentangan terkecil yang dibatasi oleh dua garis tegak lurus, menyapu seperempat lingkaran ($= 90°$). Sudut yang besarnya $< 90°$ disebut sudut lancip, sedangkan sudut yang besarnya antara $90°$ dan $180°$ dinamakan sudut tumpul.
SI untuk sudut adalah radian. Meskipun dalam satuan derajat sudut merupakan besaran yang memiliki dimensi, dalam radian, sudut tidak berdimensi. Besar sudut dalam radian dinyatakan oleh rasio antara busur lingkaran di hadapan sudut dengan jari-jari lingkaran. Dalam Gambar B.1 misalnya, besar sudut AOB bisa dinyatakan sebagai:

$$\angle AOB\ (radian) = \frac{panjang\ busur\ S}{panjang\ jari-jari\ lingkaran\ OA}$$

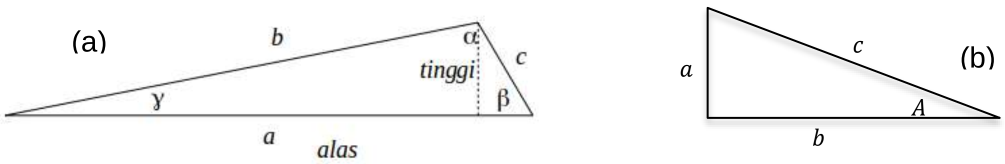
Besar sudut dalam radian yang disapu untuk satu lingkaran penuh besarnya 2π, dengan $\pi = 3.14159265359$ ... yang sering dinyatakan dalam pecahan terdekat $\frac{22}{7}$. Ingat bahwa $\pi \neq \frac{22}{7}$, nilai itu hanya digunakan untuk mendekati π saja.



Gambar B.1: Ilustrasi lingkaran beserta bagian-bagiannya. Garis lengkung yang menghubungkan titik A dan B disebut busur (busur S), sedangkan garis lurus putus-putus biru AB dikenal dengan sebutan tali busur. Bangun datar yang dibatasi garis AB dan busur S dinamakan tembereng, sedangkan bangun datar yang dibatasi garis OA, garis OB, dan busur S adalah juring.

Segitiga dan Trigonometri

Segitiga adalah suatu bangun (datar) tertutup yang memiliki tiga sisi, sebut saja $a, b, c,$ dan tiga sudut, sebut saja α, β, γ, yang jika dijumlahkan $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$. Jumlahan dua sisi segitiga harus lebih besar daripada satu sisi yang lain. Luas segitiga bisa dihitung dengan $L_\Delta = \frac{1}{2} \cdot alas \cdot tinggi$. Alas dan tinggi segitiga harus senantiasa tegak lurus, seperti pada Gambar B.2.a berikut.



Gambar B.2: Contoh gambar segitiga sembarang, dengan $a \neq b \neq c$ dan $\alpha \neq \beta \neq \gamma$. Segitiga yang salah satu sudutnya bernilai 90° disebut segitiga siku-siku.

Cabang matematika yang mempelajari hubungan antara panjang sisi segitiga dan sudut-sudutnya dinamakan trigonometri. Fungsi dasar trigonometri didefinisikan dengan memanfaatkan segitiga siku-siku seperti pada Gambar B.2.b, dengan A menyatakan sudut yang diapit sisi samping b dan sisi miring c sedangkan a merupakan sisi hadap sudut A. Fungsi dasar sudut bisa dilihat dalam tabel berikut.

Tabel B.1: Fungsi trigonometri dasar, sin menyatakan $sinus$, cos menyatakan $cosinus$, tan menyatakan $tangen$, sec menyatakan $secan$, csc menyatakan $cosecan$, dan cot menyatakan $cotangen$.

$\sin A = \frac{sisi\ hadap}{sisi\ miring} = \frac{a}{c}$	$\cos A = \frac{sisi\ samping}{sisi\ miring} = \frac{b}{c}$	$\tan A = \frac{sisi\ hadap}{sisi\ samping} = \frac{a}{b} = \frac{\sin A}{\cos A}$
$\sec A = \left(\frac{1}{\cos A}\right)$	$\csc A = (\frac{1}{\sin A})$	$\cot A = (\frac{1}{\tan A})$

Dengan definisi dalam Tabel B.1, diperoleh identitas trigonometri:

$$\sin^2 A + \cos^2 A = 1$$
$$1 + \tan^2 A = \sec^2 A$$
$$1 + \cot^2 A = \csc^2 A$$

Penting pula nilai sin dan cos jumlahan sudut:

$$\sin(A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$$
$$\cos(A + B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$$

Dengan mengganti B dengan bilangan negatif misalnya $B = -C$,bentuk $\sin(A - C)$ maupun $\cos(A - C)$ bisa diperoleh (untuk sudut bernilai positif atau negatif, lihat di bagian selanjutnya pada pembahasan Tata Koordinat Kartesian dan Polar). Bentuk tan jumlahan sudut bisa diturunkan mengingat $\tan A = \frac{\sin A}{\cos A}$. Bentuk lain yang lebih rumit bisa dikembangkan dari persamaan-persamaan dasar yang telah dituliskan di atas.

Dalam segitiga datar sembarang, berlaku (notasi mengikuti ilustrasi Gambar B.2.a):

1. Aturan $sinus$

$$\frac{\sin \alpha}{a} = \frac{\sin \beta}{b} = \frac{\sin \gamma}{c}$$

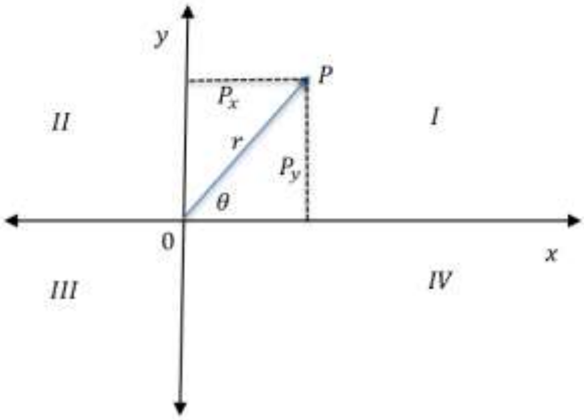
2. Aturan $cosinus$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

C. Tata Koordinat Kartesian dan Polar

Tata koordinat adalah suatu perangkat aturan yang digunakan untuk menyatakan posisi suatu titik atau elemen geometri lain di suatu ruang. Nama kartesian berasal dari matematikawan dan filsuf Prancis René Descartes yang secara formal mempublikasikan ide ini pada tahun 1637 meskipun ia bukan pencetus awalnya. Sistem kartesian pertama kali ditemukan oleh Pierre de Fermat.

Dalam tata koordinat kartesian ruang dua dimensi, posisi sebuah titik dinyatakan oleh kombinasi angka di sepanjang dua sumbu yang saling tegak lurus: sumbu horizontal (absis) sering dinotasikan sebagai x dan sumbu vertikal (ordinat) y, yang berpotongan pada satu titik asal (0,0). Untuk dimensi tiga, tambahkan saja satu sumbu lagi, sering disimbolkan z, yang tegak lurus terhadap dua sumbu yang telah ada. Perhatikan ilustrasi di bawah ini.



Gambar C.1: Ilustrasi posisi titik P dalam tata koordinat kartesian dan polar dua dimensi. Huruf Romawi $I-IV$ menyatakan kuadran di daerah tersebut. Kuadran I: $0° \le \theta \le 90°, II$: $90° \le \theta \le 180°, III$: $180° \le \theta 270°, IV$: $270° \le 360°$.

Dalam sistem kartesian dua dimensi, posisi suatu titik dituliskan dengan (x, y). Pada Gambar C.1, titik P bisa dinyatakan sebagai $P(P_x, P_y)$. Cara lain untuk menyatakan posisi titik P adalah menggunakan sistem koordinat polar $P(r, \theta)$, dengan r menyatakan jarak ke titik asal koordinat dan θ sudut sapuan yang dibatasi sumbu-x positif dan garis yang menghubungkan titik asal dan posisi benda. Sudut θ bernilai positif jika sapuan sudut berlawanan arah jarum jam dan negatif jika searah jarum jam.

Transformasi antara sistem kartesian dan polar bisa dilakukan melalui hubungan:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$x = r\cos\theta$$
$$y = r\sin\theta$$

Dari transformasi tersebut, fungsi-fungsi dasar trigonometri bisa dinyatakan dalam nilai absis dan ordinat di sistem koordinat kartesian: $\cos\theta = \frac{x}{r}$, $\sin\theta = \frac{y}{r}$, $\tan\theta = \frac{y}{x}$. Maka, dengan memperhatikan nilai x dan y pada masing-masing kuadran (lihat keterangan Gambar C.1), positif atau negatifnya nilai fungsi dasar trigonometri bisa ditentukan. Contohnya di kuadran I, seluruh fungsi dasar trigonometri bernilai positif karena x dan y di kuadran itu positif. Nilai r dipastikan positif karena merupakan akar yang per definisi harus senantiasa positif. Di kuadran II, x bernilai negatif dan y positif sehingga nilai cos dan tan negatif di sana tetapi sin positif, dan seterusnya.

Perhatikan pula dari geometrinya, akan berlaku hubungan:

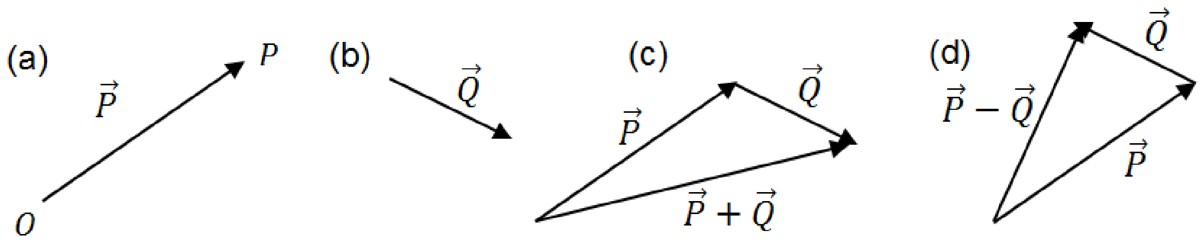
$$\begin{aligned}
\cos(90° - \theta) &= \sin\theta \\
\sin(90° - \theta) &= \cos\theta \\
\sin(-\theta) &= -\sin\theta \\
\cos(-\theta) &= \cos\theta
\end{aligned}$$

Bentuk lain seperti $\sin(180° - \theta)$bisa diturunkan dengan memanfaatkan hubungan-hubungan di atas.

D. Vektor

Vektor adalah jenis besaran yang memiliki besar dan arah. Jenis besaran lain antara lain skalar yang hanya memiliki besar saja dan tensor yang memiliki besar, arah, dan hubungan unik yang mengaitkan antara banyak besar dan arah dalam kelompok besaran tersebut. Vektor salah satunya digunakan untuk merepresentasikan posisi dan perubahan posisi suatu benda.

Vektor umumnya dinotasikan dengan huruf dengan panah di atasnya (misal $\vec{P}$) atau huruf tebal (**P**). Perhatikan ilustrasi berikut.



Gambar D.1: (a) Ilustrasi vektor $\vec{P} = p\hat{p}$ dengan titik asal O (tidak harus (0,0)) dan titik akhir P, p menyatakan besar atau panjang vektor (sering dinotasikan $\|\vec{P}\|$ atau $|\vec{P}|$) sedangkan $\hat{p}$ vektor satuan yang menunjukkan arah vektor, dalam gambar tersebut ke kanan atas. (b) Ilustrasi vektor lain. (c) Sketsa penjumlahan vektor. (d) Sketsa pengurangan vektor.

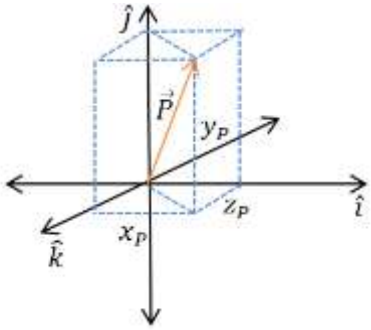
Penjumlahan dan pengurangan vektor

Dua atau lebih vektor bisa dijumlah atau dikurangkan. Cara paling primitif untuk menjumlahkan vektor adalah dengan menggunakan sketsa. Contoh: jumlahan antara vektor $\vec{P}$ pada Gambar D.1.a dan vektor $\vec{Q}$ pada Gambar D.1.b yang proses beserta hasilnya ditunjukkan oleh Gambar D.1.c. Langkah-langkah untuk menjumlahkan vektor menggunakan sketsa:

1. Gambar vektor pertama.
2. Gambar pangkal vektor kedua di ujung vektor pertama/sebelumnya. Lakukan langkah ini sebanyak jumlah vektor yang ingin dijumlahkan.
3. Gambar hasil akhir jumlahan vektor (resultan jumlahan vektor) dengan membuat vektor berpangkal di pangkal vektor pertama, dan berujung di ujung vektor terakhir.

Bagaimana dengan pengurangan vektor? Pengurangan bisa dimaknai sebagai penjumlahan dengan negatif dari nilai selanjutnya. Contoh: $\vec{P} - \vec{Q} = \vec{P} + (-\vec{Q})$. Padahal dalam vektor, tanda minus/negatif hanya menyatakan arah sebaliknya saja. Jadi, jika menggunakan metode sketsa, langkah-langkah yang perlu dilakukan sama. Hanya saja, perlu tambahan membalik arah vektor yang bertanda minus.

Berdasarkan pemaparan di atas, ternyata sebuah vektor bisa dinyatakan sebagai jumlahan dan pengurangan vektor lain. Maka, dalam sebuah sistem koordinat, vektor bisa dinyatakan sebagai jumlahan dari vektor-vektor basis (vektor satuan) dalam koordinat itu. Dalam sistem kartesian tiga dimensi, vektor basis yang dikenal ada 3: vektor basis dalam arah $x\ (\hat{\imath}), y\ (\hat{\jmath}),$ dan $z(\hat{k})$. Maka sebuah vektor bisa dinyatakan pula dalam (misalnya) $\vec{P} = x_P\hat{\imath} + y_P\hat{\jmath} + z_P\hat{k}$ dengan ilustrasi pada Gambar D.2 berikut.



Gambar D.2: Ilustrasi vektor dalam koordinat kartesian tiga dimensi.

Penjumlahan vektor bisa dilakukan dengan mudah jika dituliskan dalam bentuk seperti ini. Jika $\vec{Q} = x_Q\hat{\imath} + z_Q\hat{k}$, maka $\vec{P} + \vec{Q} = (x_P + x_Q)\hat{\imath} + (y_P + y_Q)\hat{\jmath} + (z_P + z_Q)\hat{k}$. Dalam hal ini, $y_Q = 0$. Besar jumlahan vektor dihitung dengan cara:

$$\|\vec{P} + \vec{Q}\| = \sqrt{(x_P + x_Q)^2 + (y_P + y_Q)^2 + (z_P + z_Q)^2} \tag{D.1}$$

Cara lain untuk menuliskan vektor adalah dengan memanfaatkan matriks. Matriks adalah susunan angka (komponen matriks) yang dituliskan dalam bentuk baris dan kolom, diapit dengan tanda kurung. Matriks 3×3 artinya susunan angka yang terdiri dari 3 baris $\times$ 3 kolom. Vektor dalam koordinat kartesian tiga dimensi sering dinyatakan sebagai matriks 1×3 (1 baris 3 kolom) atau matriks 3×1 (3 baris 1 kolom).

Perkalian vektor

Terdapat dua jenis perkalian vektor:

1. Produk skalar/perkalian titik/*dot product*

Hasil perkalian titik antara dua vektor menghasilkan skalar. Operasi ini bersifat komutatif $\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A}$. Aturan perkalian titik:

$\vec{A} \cdot \vec{B} = \|\vec{A}\|\|\vec{B}\| \cos\theta$, dengan θ adalah sudut antara vektor $\vec{A}$ dan $\vec{B}$.

2. Produk vektor/perkalian silang/*cross product*

Hasil perkalian silang antara dua vektor menghasilkan vektor. Operasi ini bersifat tidak komutatif $\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$. Aturan perkalian silang:

Anggap vektor dalam koordinat kartesian tiga dimensi yang dinotasikan dalam matriks $\vec{A} = (x_A, y_A, z_A)$ dan $\vec{B} = (x_B, y_B, z_B)$. Perkalian silang antara dua vektor tersebut bisa dilakukan dengan:

1. Menulis ulang komponen matriks ke dalam matriks persegi 3×3 (sesuai jumlah komponen vektor) dengan baris pertama menyatakan vektor satuan, baris kedua menyatakan komponen vektor pertama, dan baris ketiga komponen vektor kedua:

$$\begin{pmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ x_A & y_A & z_A \\ x_B & y_B & z_B \end{pmatrix}$$

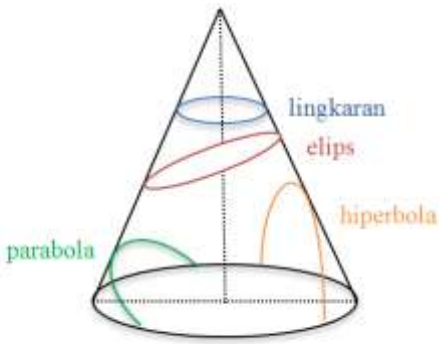
2. Menghitung determinan matriks tersebut.

$$\vec{A}\times\vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ x_A & y_A & z_A \\ x_B & y_B & z_B \end{vmatrix} = \begin{matrix} \hat{\jmath} & \hat{k} \\ y_A & z_A \\ y_B & z_B \end{matrix} \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ x_A & y_A & z_A \\ x_B & y_B & z_B \end{vmatrix} \begin{matrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} \\ x_A & y_A \\ x_B & y_B \end{matrix} = (y_A z_B - y_B z_A)\hat{\imath} + (z_A x_B - z_B x_A)\hat{\jmath} + (x_A y_B - x_B y_A)\hat{k}$$

Perkalian yang mengikuti garis oranye bertanda positif, sedangkan garis biru bertanda negatif. Arah vektor hasil perkalian silang selalu tegak lurus terhadap vektor-vektor yang dikalikan. Arahnya dapat ditentukan dengan kaidah tangan kanan (silakan coba cari tahu lebih lanjut mengenai kaidah ini). Besar vektor hasil perkalian silang salah satunya bisa dihitung dengan: $\vec{A}\times\vec{B} = \|\vec{A}\|\|\vec{B}\|\sin\theta$

E. Irisan Kerucut

Kerucut adalah bangun tiga dimensi yang masuk keluarga limas dengan alas lingkaran. Bergantung pada cara memotongnya, irisan kerucut bisa menghasilkan 4 jenis penampang (lihat Gambar E.1 untuk ilustrasi):



Gambar E.1: Gambar irisan kerucut. Jika kerucut dipotong sejajar dengan alasnya, penampang yang terbentuk adalah lingkaran (warna biru). Jika kerucut dipotong tidak sejajar dengan alasnya tanpa memotong alas, penampang yang terbentuk adalah elips (warna merah). Jika kerucut dipotong tidak sejajar dengan alasnya tetapi memotong alas, penampang yang terbentuk adalah parabola (warna hijau). Jika kerucut dipotong tegak lurus terhadap alasnya, penampang yang terbentuk adalah hiperbola (warna oranye).

Jika (x_p, y_p) menyatakan pusat, maka dalam koordinat kartesian, persamaan umum:

lingkaran $\quad (x - x_p)^2 + (y - y_p)^2 = r^2$, r radius,

elips $\quad \left(\frac{x-x_p}{a}\right)^2 + \left(\frac{y-y_p}{b}\right)^2 = 1$, a semimayor, b semiminor.

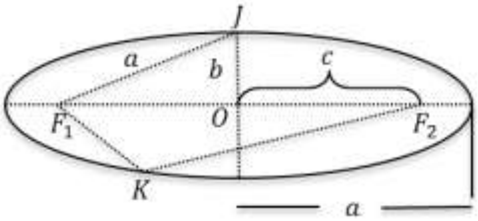
Jika titik puncak (h, k), maka dalam koordinat kartesian, persamaan umum:

parabola $\quad (y-k)^2 = 4p(x-h)$, direktris $= (h-p)$,

hiperbola $\quad \left(\frac{x-h}{a}\right)^2 - \left(\frac{y-k}{b}\right)^2 = 1$, a semimayor, b semiminor, direktris $= h \pm a^2/\sqrt{a^2-b^2}$.

Parabola dan hiperbola dalam bentuk umum di atas terbuka secara horizontal. Dalam konteks ini, direktris adalah garis vertikal di luar parabola. Jika ditarik garis sejajar sumbu-x dari direktris ke parabola, garis tersebut panjangnya akan sama dengan jarak dari titik potong di parabola ke titik fokus (untuk detailnya, baca lebih lanjut dari sumber lain).

Bicara irisan kerucut, dikenal sebuah parameter yang dinamakan eksentrisitas. Perhatikan elips pada Gambar E.2 berikut. Eksentrisitas didefinisikan sebagai $e = \frac{c}{a}$.



Gambar E.2: Sketsa elips. F_1 dan F_2 menggambarkan dua titik fokus elips, a semimayor, b semiminor, O pusat elips. Jarak dari satu titik di elips ke kedua titik fokus selalu berjumlah $2a$.

F. Statistika

Tabel F.1 berikut merangkum rumus sederhana yang sering diperlukan dalam statistika dasar.

Besaran	Data tunggal	Data berkelompok
Rata-rata/mean	$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$	$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i x_i}{n}$
Variansi	$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n}$	$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i(x_i - \bar{x})^2}{n}$
Standar deviasi	s	s

Dalam rumus di atas, makna variabel yang digunakan sebagai berikut.

x_i : untuk data tunggal bermakna data ke-i, untuk data berkelompok bermakna nilai tengah kelas ke-i

f_i : frekuensi kelas ke-i

G. Peluang

Istilah dasar yang penting diketahui dalam peluang:

1. Frekuensi relatif $= \frac{jumlah\ kejadian\ yang\ muncul}{jumlah\ percobaan}$
2. Peluang suatu kejadian tunggal A sering dinotasikan $(A) = \frac{jumlah\ kejadian}{jumlah\ percobaan}$, $0 \leq P(A) \leq 1$, 0 menyatakan mustahil terjadi dan 1 pasti terjadi. Pada kejadian majemuk, terdapat:
   a) Peluang gabungan 2 kejadian (atau lebih): $P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap B_2)$. Pada kejadian lebih dari 2, lanjutkan indeks A sebanyak jumlah kejadian.
   b) Peluang kejadian saling lepas. Dua kejadian dikatakan saling lepas jika mereka tidak mungkin terjadi secara bersamaan, sehingga $P(A_1 \cap A_2) = 0$.
   c) Peluang kejadian saling bebas. Dua kejadian dikatakan saling bebas jika mereka tidak saling mempengaruhi. Dalam artian, kejadian A_1 tidak akan mempengaruhi peluang terjadinya A_2 dan sebaliknya. Nilai peluangnya $= P(A_1) \times P(A_2)$

Peluang kejadian bersyarat/bergantung

Dua kejadian dikatakan bersyarat/bergantung jika mereka saling mempengaruhi. Peluang kejadian A_2 dengan syarat A_1 telah terjadi dihitung dengan cara:

$P(A_2/A_1) = P(A_2 \cap A_1)/P(A_1)$ dengan $P(A_1) \neq 0$

H. Limit Fungsi

Limit menyatakan kecenderungan nilai suatu fungsi jika nilai variabel penyusun fungsi itu dibatasi mendekati nilai tertentu. Limit fungsi $f(x)$ dinotasikan dengan $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$. Nilai limit ditentukan dengan:

1. Jika $f(a) = k, \lim_{x\to a} f(x) = k$
2. Jika $f(a) = \frac{k}{0}, \lim_{x\to a} f(x) = \infty$
3. Jika $f(a) = \frac{0}{k}, \lim_{x\to a} f(x) = 0$
4. Jika $f(a) = \frac{0}{0}$ (atau bentuk tak tentu $\frac{\infty}{\infty}, \infty - \infty, 0 \cdot \infty, 0^0, \infty^0$), sederhanakan $f(a)$ agar diperoleh bentuk seperti pada nomor 1, 2, atau 3.

Aturan L'Hospital

Aturan ini menyatakan bahwa dalam kondisi tertentu, misalnya pada poin 4 di atas, limit dari pembagian fungsi $\frac{g(x)}{h(x)}$ dapat ditentukan dengan pembagian turunan-turunannya menjadi $\frac{g'(x)}{h'(x)}$. Lihat bagian pengenalan kalkulus untuk mengetahui tentang turunan.

I. Logaritma dan Eksponensial

Jika $a = b^c$, didefinisikan $\log_b a = c$, dibaca: logaritma a basis b sama dengan c. Ada pula yang menuliskan basis di bagian kiri atas tulisan log. Untuk basis 10, seringkali nilai basisnya tidak dituliskan, misalnya jika $d = 10^e$, maka $\log d = e$. Aturan-aturan mendasar yang berlaku dalam pembahasan logaritma:

1. $\log_b a = \frac{\log a}{\log b}$
2. $\log(ab) = \log a + \log b$
3. $\log a^b = b \log a$

Bentuk lain yang lebih kompleks bisa dikembangkan dari 3 aturan dasar ini.

Alam ternyata berperilaku unik. Fungsi-fungsi yang mendeskripsikannya lebih sering cocok dengan logaritma berbasis bilangan natural $e = 2.71828182$ ... dibanding basis yang lain. Didefinisikan logaritma natural $\ln a = \log_e a$ (ln dilafalkan len dengan huruf 'e' seperti dalam kata 'besar' atau lon).

J. Pengenalan Kalkulus

Pada dasarnya, soal olimpiade Astronomi didesain untuk bisa diselesaikan tanpa kalkulus. Namun, tidak ada salahnya mengenal kalkulus lebih awal, setidaknya sebagai bekal untuk membaca referensi buku yang mau tidak mau sering kali memberi deskripsi menggunakan kalkulus.

1. Turunan/diferensial

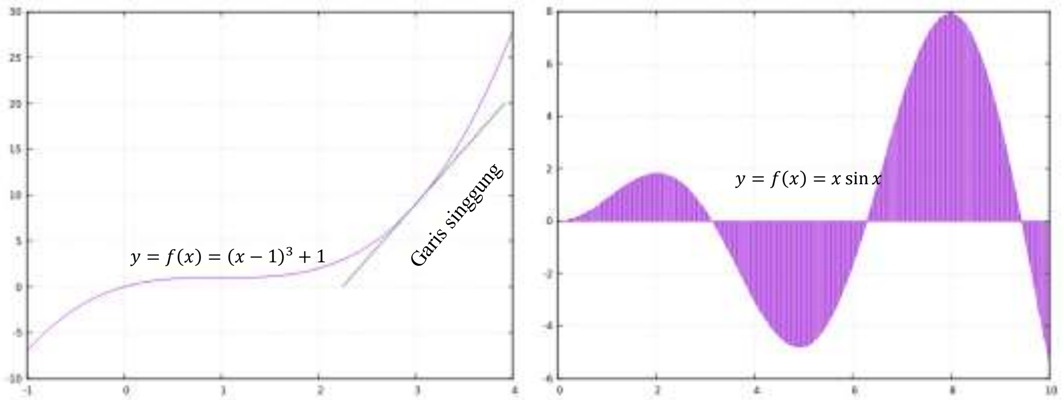
Cara termudah untuk mendeskripsikan turunan adalah dengan menggambarkannya sebagai gradien garis singgung fungsi di suatu titik. Perhatikan Gambar J.1.a.

Secara Matematis, turunan fungsi $f(x)$ dinotasikan sebagai $f'(x) = \frac{df}{dx}$, dibaca $df\ dx$, bukan df per dx. Turunan dari turunan pertama dinamakan turunan kedua, dinotasikan sebagai $f''(x) = \frac{d^2f}{dx^2}$ (dibaca d dua $f\ dx$ kuadrat) dan seterusnya (ikuti pola yang sama untuk menotasikan turunan ketiga, keempat dan seterusnya). Definisi turunan secara formal adalah:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Tabel J.1: Turunan fungsi dasar yang banyak digunakan:

$\boldsymbol{f(x)}$	$\boldsymbol{f'(x)}$
ax^b	bax^{b-1}
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
ae^{bx}	bae^{bx}
$\ln(ax+b)$	$\frac{a}{ax+b}$
$h(x)\cdot g(x)$	$h'(x)g(x) + g'(x)h(x)$



Gambar J.1: (a) Penggambaran nilai turunan/diferensial di suatu titik sebagai gradian garis singgung fungsi di titik tersebut. (b) Ilustrasi integral fungsi digambarkan oleh daerah warna ungu. Integral fungsi bisa didekati dengan jumlahan elemen luas kecil-kecil persegi panjang dengan tinggi $f(x)$ dan lebar Δx berukuran sangat kecil: $\sum_{i=1}^{n} f(x)\Delta x$. Dalam bentuk integral menjadi $\int f(x)dx$.

2. Integral

Integral adalah invers dari diferensial. Cara paling sederhana untuk menggambarkan integral yakni dengan membayangkannya sebagai luas/volum area yang dibatasi oleh fungsi dengan batas tertentu. Lihat Gambar J.1.b.

Secara formal, integral dinotasikan sebagai $I(x) = \int f(x)dx = F(x) + C$ untuk integral tak tentu (tanpa batas) dan $I(x) = \int_{x_{awal}}^{x_{akhir}} f(x)dx = F(x_{akhir}) - F(x_{awal})$ untuk integral tentu dengan batas. C pada integral tak tentu mewakili suatu konstanta. $F(x)$ ditabulasikan sebagai berikut.

Tabel J.2: Daftar integral fungsi yang banyak digunakan.

$\boldsymbol{f(x)}$	$\boldsymbol{F(x)}$
ax^b	$\frac{ax^{b+1}}{b+1}$
$\sin x$	$-\cos x$

$\cos x$	$\sin x$
ae^{bx}	$\frac{a}{b}e^{bx}$
$\frac{a}{ax+b}$	$\ln(ax+b)$
$h(x)d[g(x)]$	$h(x)g(x)-g(x)d[h(x)]$

SOAL

1. Persamaan $x^2 + px - p + 1 = 0$ memiliki akar-akar x_1 dan x_2. Jika $x_1^2 + x_2^2 = 13$, maka nilai p adalah ….
   a. 3
   b. -3
   c. 5
   d. -5
   e. 2

2. Grafik fungsi $x = y^2 + y + 3$ akan memotong sumbu y di titik ….
   a. 3
   b. 1
   c. 0
   d. -3
   e. Tidak ada

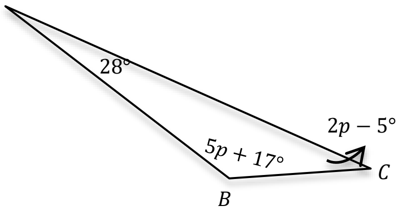
3. Grafik fungsi yang sama seperti pada soal nomor 2 akan memotong sumbu x di titik ….
   a. 3
   b. 1
   c. 0
   d. -3
   e. Tidak ada

4. Sisi-sisi segitiga panjangnya secara berturut-turut 23 cm, 27 cm, dan 32 cm. Berapa sudut yang diapit oleh sisi dengan panjang 23 cm dan 32 cm?
   a. $79°$
   b. $56°$
   c. $45°$
   d. $34°$
   e. $11°$

5. Sudut terbesar yang dibentuk antara dua jarum jam yang menunjuk pukul $4:00$ adalah … π radian.
   a. 240
   b. 120
   c. $\frac{4}{3}$
   d. $\frac{2}{3}$
   e. $\frac{1}{3}$

6. Berapa nilai sudut C dalam segitiga berikut?

A



a. $15°$
b. $20°$
c. $35°$
d. $40°$
e. $45°$

7. Seekor semut mula-mula berada pada posisi $(1, \sqrt{3})$. Ia kemudian bergerak lurus sejauh 2 satuan ke $30°$ berlawanan arah jarum jam dari arah semula. Posisi semut saat ini adalah ….
   a. $\left(2, \sqrt{3}\right)$
   b. $\left(1, 2\sqrt{3}\right)$
   c. $\left(1, 2 + \sqrt{3}\right)$
   d. $\left(2, 1 + \sqrt{3}\right)$
   e. $\left(2, 2 + \sqrt{3}\right)$

8. Dalam sistem kartesian, terdapat titik-titik $A(2, -1), B(-10,8), C(-15,20)$. Di mana titik D agar terbentuk jajar genjang $ABCD$?
   a. $(-3,11)$
   b. $(3, -11)$
   c. $(-13,15)$
   d. $(13,15)$
   e. (13,-15)

9. Titik pusat lingkaran yang mengikuti persamaan dalam koordinat kartesian $x^2 + y^2 - 6x + 8y + 24 = 0$ adalah ….
   a. $(3, -4)$
   b. $(-3,4)$
   c. $(3,4)$
   d. $(4, -3)$
   e. $(-4,3)$

10. Salah satu titik perpotongan antara parabola $y = 2x^2 - x + 1$ dengan garis $y = 2(1 - 2x)$ adalah ….
   a. $\left(\frac{3}{2}, 1\right)$
   b. $(4,2)$
   c. $\left(1, \frac{3}{2}\right)$
   d. $(1,2)$
   e. Tidak ada perpotongan

11. Diberikan vektor $\boldsymbol{A}(-2, a, 2a)$ dan $\boldsymbol{B}(-8, a-2, -3)$ saling tegak lurus. Maka nilai a yang memenuhi adalah ….
    a. 4
    b. -4
    c. 2 atau 8
    d. -2 atau -8
    e. 16

12. Alci memberi gaya pada balok $F_A = 3\hat{\imath} - 2\hat{\jmath} + \hat{k}$ sedangkan Ezara mendorong balok dengan gaya $F_E = \hat{\imath} + 2\hat{\jmath} + 3\hat{k}$. Berapa sudut terkecil antara dua gaya yang Alci dan Ezara berikan?
    a. $8°$
    b. $60°$
    c. $82°$
    d. $92°$
    e. $98°$

13. Dua buah vektor berpangkal di satu titik yang sama. Vektor pertama menunjuk arah timur laut sedangkan vektor kedua menunjuk arah utara. Arah mana yang akan ditunjuk oleh vektor resultan jika kedua vektor pertama dikali silang dengan vektor kedua?
    a. Tenggara
    b. Barat laut
    c. Barat
    d. Bawah
    e. Atas

14. Berapa eksentrisitas elips yang dibatasi persamaan $9x^2 - 18x + 50y + 25y^2 - 191 = 0$?
    a. $0{,}16$
    b. $0{,}36$
    c. $0{,}40$
    d. $0{,}60$
    e. $0{,}80$

15. Sebuah elips memiliki koordinat y maksimum 13 dan x minimum -5. Diketahui bahwa sumbu-x dan sumbu-y masing-masing adalah garis simetri yang dapat membelah elips tersebut menjadi dua bagian sama besar. Jarak terdekat elips tersebut ke salah satu titik fokusnya adalah ….
    a. 1
    b. 5
    c. 12
    d. 13
    e. 25

16. Pilih jawaban berikut yang memberikan lokasi titik fokus elips pada soal nomor 15!
    a. $(0,0)$
    b. $(12,0)$
    c. $(-12,0)$
    d. $(0,12)$
    e. $(4,0)$

17. Di dalam sebuah kotak terdapat 6 bola merah dan 8 bola hijau. Jika diambil 1 bola, lalu bola dikembalikan, kemudian diambil 1 bola lagi, peluang mendapati keduanya bola merah adalah ….
    a. $\frac{3}{7}$
    b. $\frac{4}{7}$
    c. $\frac{9}{49}$
    d. $\frac{16}{49}$
    e. $\frac{15}{91}$
18. Jika pada kotak yang sama seperti pada soal nomor 7, diambil 1 bola, tidak dikembalikan, kemudian diambil 1 bola lagi, maka peluang kedua bola yang diambil sama-sama merah adalah ….
    a. $\frac{3}{7}$
    b. $\frac{4}{7}$
    c. $\frac{9}{49}$
    d. $\frac{16}{49}$
    e. $\frac{15}{91}$
19. Masih dengan kotak yang sama, kali ini diambil 2 bola sekaligus, peluang kedua bola yang diambil sama-sama merah adalah ….
    a. $\frac{3}{7}$
    b. $\frac{4}{7}$
    c. $\frac{9}{49}$
    d. $\frac{16}{49}$
    e. $\frac{15}{91}$
20. $\lim_{x\to 2} \frac{2x^2+4}{2x+2} = \ldots.$
    a. 1
    b. 2
    c. 4
    d. 6

e. ∞

21. $\lim_{x\to -1} \frac{x^2-1}{2x+2} = \ldots.$
   a. -1
   b. 0
   c. 1
   d. 2
   e. $\pm\infty$
22. Nilai x yang memenuhi $9^{x+1} = 27^{x-1}$ yaitu ….
   a. 1
   b. 2
   c. 3
   d. 4
   e. 5
23. Diberikan nilai $\log_3 2 = p$ dan $\log_5 3 = q$, maka $\log_4 10 = \ldots.$
   a. $pq + 1$
   b. $\frac{pq+1}{2p}$
   c. $\frac{pq+1}{2pq}$
   d. $\frac{p+q}{2pq}$
   e. $\frac{1+\frac{1}{pq}}{2pq}$
24. Jika $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}+2\sqrt{3}} = m + n\sqrt{6}$, maka $n - m = \ldots.$
   a. $\frac{17}{10}$
   b. $\frac{17}{11}$
   c. $\frac{11}{10}$
   d. $-\frac{11}{10}$
   e. $\frac{7}{10}$

25. Berapa nilai $\frac{2^{2000}-2^{1999}}{4^{1000}}$?
   a. 2^{-2000}
   b. 2^{-1999}
   c. $\frac{1}{4}$
   d. $\frac{1}{2}$
   e. 2