PAKET 9

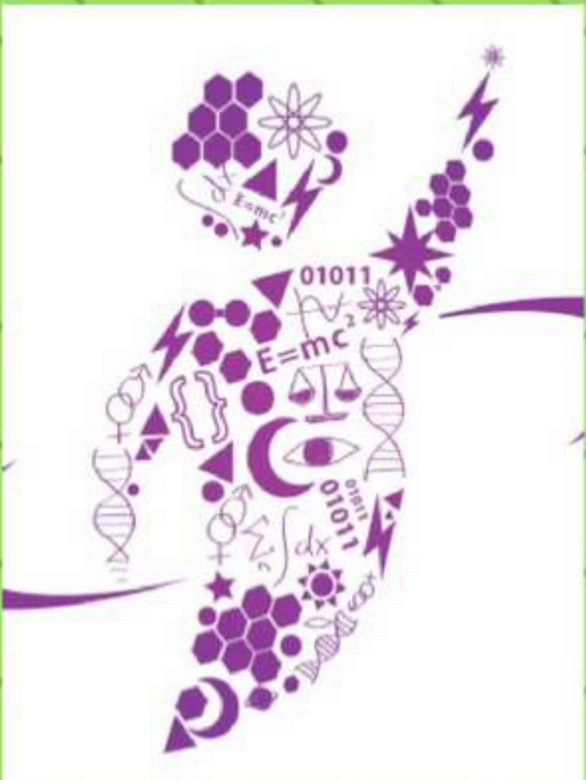
PELATIHAN ONLINE

2019

SMA

MATEMATIKA

po.alcindonesia.co.id



WWW.ALCINDONESIA.CO.ID

@ALCINDONESIA

085223273373

PEMBAHASAN PAKET 9

1. Solusi: C

Misalkan $a < n$ adalah faktor positif dari n sehingga $a + n = 2016$. Perhatikan bahwa a membagi 2016. Sehingga a adalah faktor positif dari 2016. Karena $2016 = 2^5 \times 3^2 \times 7$ maka faktor positif dari 2016 ada sebanyak $6 \times 3 \times 2 = 36$. Dan karena $n = 2016 - a \geq 1$ serta $a < n$ maka $a \neq 2016$ dan $a \neq 1008$. Sehingga banyaknya bilangan asli n yang memenuhi ada $36 - 2 = 34$

2. Solusi: D

$a = x + y = x^2$
$b = xy = y^2$
Jelas maks $(a, b) = (2, 2)$ dan min $(a\,, b) = (0{,}0)$
Maka selisih nilai terbesar dan terkecil dari $a + b$ adalah $(2 + 2) - (0 + 0) = 4$

3. Solusi: B

$n = a + b$ dengan $n \leq 2015$ dan $n, a, b \in N$
Jelas bahwa $b < a$
$a + b = n \leq 2015$
$2b < n \leq 2015$ maka $b \leq 1007$
Andaikan $FPB(a, b) = d$
Maka $a = dp$ dan $b = dq$
$a - b = d(p - q)$ merupakan bilangan prima. Maka $d = 1$
Karena ab kuadrat sempurna sedangkan $FPB\,(a, b) = 1$ maka haruslah a dan b masing-masing kuadrat sempurna.
Misalkan $a = m^2$ dan $b = t^2$
$t^2 \leq 1007$ sehingga $t \leq 31$
$a - b = m^2 - t^2 = (m + t)(m - t)$ adalah bilangan prima
Maka $m - t = 1$
$a - b = (t + 1)^2 - t^2 = 2t + 1 \leq 63$ adalah bilangan prima ganjil.
Bilangan prima ganjil ≤ 63 adalah
$3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59$ dan 61. Banyaknya nilai b yang memenuhi ada 17.
∴ Jadi, banyaknya nilai n yang memenuhi ada 17

4. Solusi: D

Jelas $c \neq 0$. Karena $(x - c)^2$ faktor dari $p(x)$ maka diperoleh

$$x^4 + 4x + a = (x^2 - 2cx + c^2)\left(x^2 + bx + \frac{a}{c^2}\right)$$

dengan menjabarkan ruas kanan diperoleh

$x^4 + 4x + a = x^4 + (b - 2c)x^3 + \left(\frac{a}{c^2} - 2bc + c^2\right)x^2 + \left(bc^2 - \frac{2a}{c}\right)x + a$

Oleh karena itu,

$b - 2c = 0 \Rightarrow b = 2c$

$\frac{a}{c^2} - 2bc + c^2 = 0 \Rightarrow a = 3c^4$

$bc^2 - \frac{2a}{c} = 4 \Rightarrow c^3 = -1 \Rightarrow c = -1$

sehingga $a = 3c^4 = 3$

5. Solusi: C

Supaya C bermain minimal, maka C menang haruslah minimal juga.

Misal ilustrasi permainan :

A lawan B → B kalah

A lawan C → C kalah

A lawan B → A kalah

B lawan C → C kalah

dst…

n = banyak permainan

Jelas banyak C bermain = $\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor + m$, dengan m adalah jumlah C menang.

Kasus 1 : C tidak pernah menang

Maka banyak permainan :

$n = \frac{1}{2}\left(20 + 17 + \left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\right)$

$2n = 37 + \left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor$

$\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor = 2n - 37$

- Untuk $n = 2k$

  $\left\lfloor\frac{2k}{2}\right\rfloor = 4k - 37$

  $\rightarrow k = 4k - 37$

  $\rightarrow k = \frac{37}{3} (kontradiksi)$

- Untuk $n = 2k + 1$
  $\left\lfloor\frac{2k+1}{2}\right\rfloor = 2(2k+1) - 37$
  $\rightarrow k = 4k - 35$
  $\rightarrow k = \frac{35}{3}\,(kontradiksi)$

Kasus 2: C menang sekali
Maka banyak permainan:

$n = \frac{1}{2}\left(20 + 17 + \left(\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor + 1\right)\right)$

$2n = 38 + \left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor$

$\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor = 2n - 38$

- Untuk $n = 2k$
  $\left\lfloor\frac{2k}{2}\right\rfloor = 4k - 38$
  $\rightarrow k = 4k - 38$
  $\rightarrow k = \frac{38}{3}\,(kontradiksi)$
- Untuk $n = 2k + 1$
  $\left\lfloor\frac{2k+1}{2}\right\rfloor = 2(2k+1) - 38$
  $\rightarrow k = 4k - 36$
  $\rightarrow k = \frac{36}{3} = 12\ (memenuhi)$

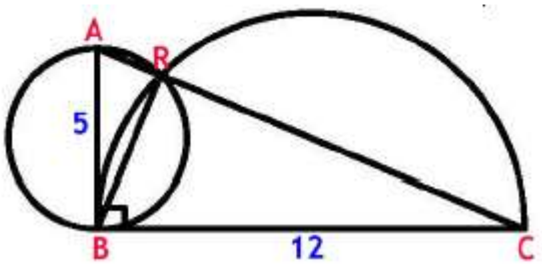
Maka $n = 2k + 1 = 2(12) + 1 = 25$

Sehingga banyak C bermain $= \left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor + m = \left\lfloor\frac{25}{2}\right\rfloor + 1 = 12 + 1 = 13$

Jadi, jumlah permainan yang dimainkan Cokro minimal sebanyak 13

6. Solusi: D

Misalkan titik R terletak pada sisi AC sehingga BR tegak lurus AC



Karena $\angle ARB = 90°$ maka lingkaran berdiameter AB akan melalui titik R

Karena $\angle BRC = 90°$ maka lingkaran berdiameter BC akan melalui titik R

Jadi, titik $R = P$

$AC \cdot BP = AB \cdot BC$

$13 \cdot BP = 5 \cdot 12$

$BP = x = \frac{60}{13}$

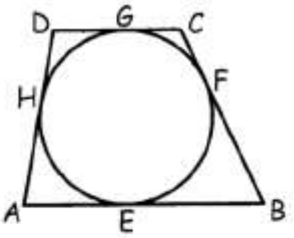
∴ Jadi, nilai dari x adalah $\frac{60}{13}$

7. Solusi: B

Misalkan n menyatakan jumlah anak laki-laki dan misalkan pula tempat duduk diantara dua laki-laki yang berdekatan kita sebut sebagai ruang.
Jika n ≥ 8 maka ada minimal 8 ruang yang bisa ditempati oleh anak perempuan. Sementara itu, jumlah anak perempuan maksimal ada 40. Jadi, kita dapat mengatur anak perempuan tersebut ke dalam ruang-ruang sehingga tiap ruang maksimal ada 5 anak perempuan.
Jika n = 7 maka ada 7 ruang yang bisa ditempati oleh 41 anak perempuan. Berdasarkan PHP pasti ada setidaknya satu ruang yang ditempati oleh setidaknya 6 anak perempuan.
Jadi, jumlah anak perempuan minimum ada 41.

8. Solusi: B

Jika titik P di luar lingkaran dan garis yang ditarik dari titik P menyinggung lingkaran tersebut di titik Q dan R maka PQ = PR



Dari gambar di atas didapat $DG = DH$; $CG = CF$; $BF = BE$; $AE = AH$

Keliling = $AE + AH + BE + BF + CF + CG + DG + DH = 2\,(DG + CG + AE + BE)$

Keliling = $2(DC + AB) = 2(25 + 84)$

∴ Keliling trapesium = 218

9. Solusi: C

Karena $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$, dan $a + c + e > b + d + f$ maka $6 \le b + d + f \le 10$. WLOG $a < c < e$ dan $b < d < f$.

• Jika $b + d + f = 6$ maka $(b, d, f) = (1, 2, 3)$ dan $(a, c, e) = (4, 5, 6)$.

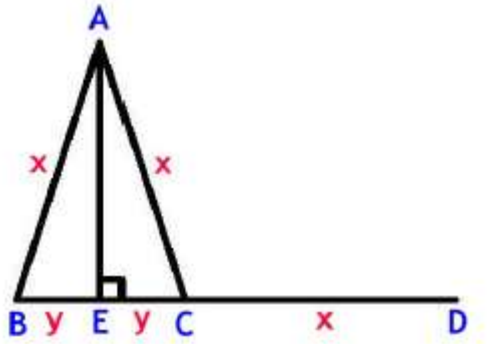
• Jika $b + d + f = 7$ maka $(b, d, f) = (1, 2, 4)$ dan $(a, c, e) = (3, 5, 6)$.

• Jika $b + d + f = 8$ maka

– $(b, d, f) = (1, 2, 5)$ dan $(a, c, e) = (3, 4, 6)$,

– $(b,d,f) = (1,3,4)$ dan $(a,c,e) = (2,5,6)$
• Jika $b + d + f = 9$ maka
– $(b,d,f) = (1,2,6)$ dan $(a,c,e) = (3,4,5)$,
– $(b,d,f) = (1,3,5)$ dan $(a,c,e) = (2,4,6)$,
– $(b,d,f) = (2,3,4)$ dan $(a,c,e) = (1,5,6)$
• Jika $b + d + f = 10$ maka
– $(b,d,f) = (1,3,6)$ dan $(a,c,e) = (2,4,5)$,
– $(b,d,f) = (1,4,5)$ dan $(a,c,e) = (2,3,6)$,
– $(b,d,f) = (2,3,5)$ dan $(a,c,e) = (1,4,6)$
Jadi, pasangan (a,b,c,d,e,f) yang memenuhi ada sebanyak $10 \times 3! \times 3! = 360$

10. Solusi: A
Misalkan panjang $BC = 2y$ dan $AB = AC = CD = x$. Titik E pertengahan BC sehingga $BE = EC = y$
$\angle BAE = \angle CAE$
$cos\, 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\, cos\, \alpha$
$\sin(36°) = \sin(90° - 54°) = \cos 54°$
$2\, sin\, 18°\, cos\, 18° = 4\cos^3 18° - 3\, cos\, 18°$
$2\, sin\, 18° = 4 - 4\sin^2 18° - 3$
$4\sin^2 18° + 2\sin 18° - 1 = 0$
$sin 18° = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$



$\frac{1}{|CD|} - \frac{1}{|BD|} = \frac{1}{|BD|+|CD|}$
$|BD|^2 - |CD|^2 = |BD||CD|$
$(2y + x)^2 - x^2 = (2y + x)(x)$
$4\left(\frac{y}{x}\right)^2 + 2\left(\frac{y}{x}\right) - 1 = 0$
$\frac{y}{x} = \frac{-2+\sqrt{2^2-4(4)(-1)}}{8} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$
$sin\angle BAE = \frac{y}{x} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$

$\angle BAE = 18°$
Maka $\angle BAC = 36°$
∴ Jadi, besar $\angle BAC$ adalah $36°$