PAKET 15

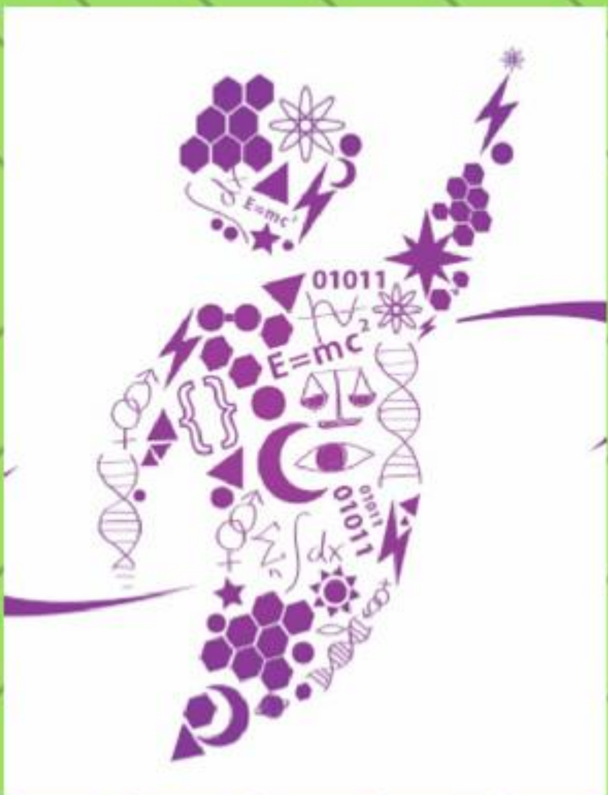
PELATIHAN ONLINE

2019

SMA

FISIKA

po.alcindonesia.co.id



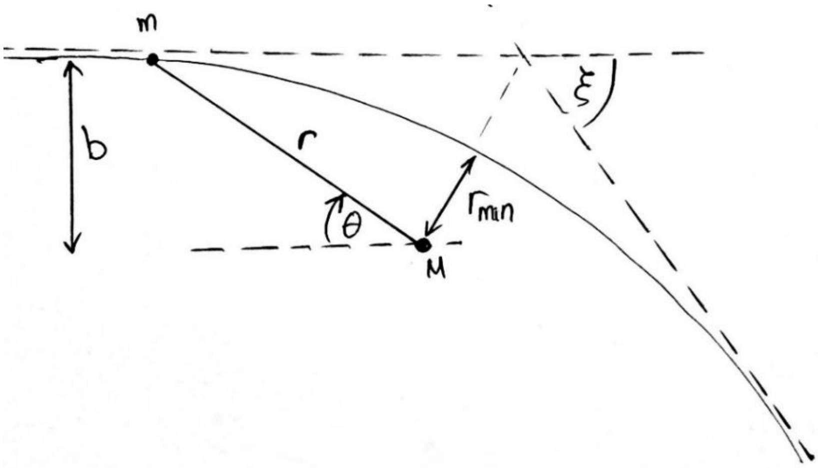
WWW.ALCINDONESIA.CO.ID

@ALCINDONESIA

085223273373

PEMBAHASAN PAKET 15

1. Momentum angular dan energi kekal pada sistem ini.



Persamaan Energi

$$E_i = E_f$$
$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r_{min}^2}$$

Persamaan Momentum Angular

$$mv_0 b = mvr_{min}$$
$$v_0 b = vr_{min}$$

Dengan dua persamaan diatas, dapat diselesaikan untuk menemukan besar r_{min}. Nanti, akan ditemukan persamaan kuadrat untuk menyelesaikannya (ambil solusi positif agar r_{min} menjadi fisis/tidak mungkin bernilai negative).

$$r_{min} = -\frac{GM}{v_0^2} + \sqrt{\left(\frac{GM}{v_0^2}\right)^2 + b^2}$$

(a)

2. Kita akan gunakan metode Newton dalam menyelesaikannya
Persamaan gaya sumbu x

$$\vec{F}_x = \frac{GMm}{r^2}\cos\theta\,\hat{x}$$

Persamaan gaya sumbu y

$$\vec{F}_y = -\frac{GMm}{r^2}\sin\theta\,\hat{y}$$

Persamaan Momentum sumbu x

$$\frac{dp_x}{dt} = F_x$$

Persamaan Momentum sumbu x

$$\frac{dp_y}{dt} = F_y$$

Seperti konsep soal sebelumnya, sistem ini mempunyai momentum angular yang kekal.

$$mv_0 b = mr^2\dot{\theta}$$

$$v_0 b = r^2\frac{d\theta}{dt}$$

$$dt = \frac{r^2}{v_0 b}d\theta$$

Gunakan persamaan momentum linear y untuk menyelesaikannya

$$\Delta p_y = \int F_y\, dt$$

$$m(-v_0\sin\xi - 0) = -\int \frac{GMm}{r^2}\sin\theta\frac{r^2}{v_0 b}d\theta$$

$$v_0\sin\xi = \frac{GM}{v_0 b}\int_{\theta=0}^{\pi+\xi}\sin\theta\, d\theta$$

$$\frac{v_0^2 b\sin\xi}{GM} = 1+\cos\xi$$

Gunakan identitas trigonometri

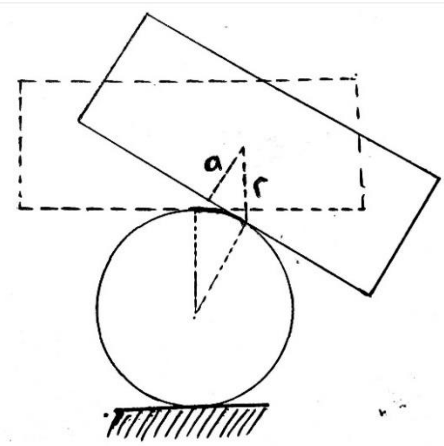
$$\frac{v_0^2 b}{GM}2\sin\frac{\xi}{2}\cos\frac{\xi}{2} = 2cos^2\frac{\xi}{2}$$

$$\tan\frac{\xi}{2} = \frac{GM}{v_0^2 b}$$

$$\xi = 2\arctan\left(\frac{GM}{v_0^2 b}\right)$$

(d)

3. Seperti soal OSP 2016, kita akan mengerjakan dengan poros yang bergerak, yaitu tempat persegi panjang dan lingkaran bersentuhan. Perhatikan gambar dibawah ini



Momen Inersia Segi Empat terhadap pusat massanya

$$I_{PM} = \frac{1}{12}(4a^2+4b^2) = \frac{1}{3}(a^2+b^2)$$

Maka, momen inersia terhadap posisi segi empat bersentuhan dengan lingkaran adalah

$$I = I_{PM} + mr^2$$

Kita mengetahui bahwa r

$$r^2 = a^2 + R^2\theta^2$$

Karena osilasi sudut kecil, maka $\theta^2 \approx 0$

$$r = a$$

Maka, $I = I_{PM} + ma^2$

Persamaan Torsi

$$\tau_{pemulih} = I\ddot{\theta}$$

$$-mgR\theta - mga\theta = (I_{PM} + ma^2)\ddot{\theta}$$

$$-\frac{3g(R-a)}{4a^2+b^2}\theta = \ddot{\theta}$$

Maka, periode osilasi sistem adalah

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{4a^2+b^2}{3g(R-a)}}$$

(d)

4. Untuk mempermudah, saya akan mengganti simbol $M \equiv M_1$, $m \equiv M_2$ dan $\mu \equiv M_3$. Dalam menentukan kecepatan angular sistem, periode bintang ganda mempunyai kecepatan angular yang sama.

$$T^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{G(M_1+M_2)}$$

Sedangkan periode adalah $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$

$$\frac{4\pi^2 a^3}{G(M_1+M_2)} = \frac{4\pi^2}{\omega_0^2}$$

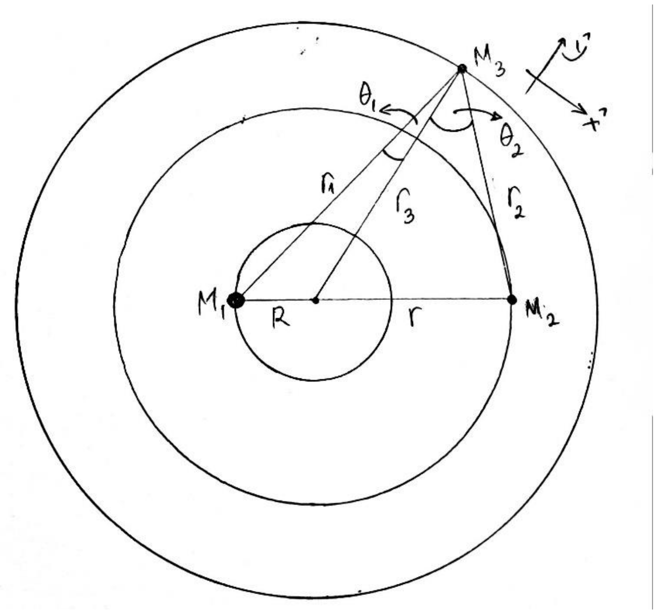
$$\frac{(R+r)^3}{G(M_1+M_2)} = \frac{1}{\omega_0^2}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{G(M_1+M_2)}{(R+r)^3}} \equiv \sqrt{\frac{G(M+m)}{(R+r)^3}}$$

Objek μ yang massanya sangatlah kecil dibandingkan M dan m (tidak mengubah posisi pusat massa) diletakkan pada orbit yang sebidang dengan M dan m. Obejk μ diam relatif terhadap M dan m.

(a)

5. Perhatikan diagram berikut



Persamaan gaya sumbu x

$$F_x = 0$$

$$\frac{GM_1M_3}{r_1^2}\sin\theta_1 = \frac{GM_2M_3}{r_2^2}\sin\theta_2$$

$$\frac{M_1}{r_1^2}\sin\theta_1 = \frac{M_2}{r_2^2}\sin\theta_2$$

Persamaan gaya sumbu y

$$F_y = 0$$

$$\frac{GM_1M_3}{r_1^2}\cos\theta_1 + \frac{GM_2M_3}{r_2^2}\cos\theta_2 = M_3\omega_0^2 r_3$$

$$\frac{GM_1}{r_1^2}\cos\theta_1 + \frac{GM_2}{r_2^2}\cos\theta_2 = \omega_0^2 r_3 = \frac{G(M_1+M_2)}{(R+r)^3}r_3$$

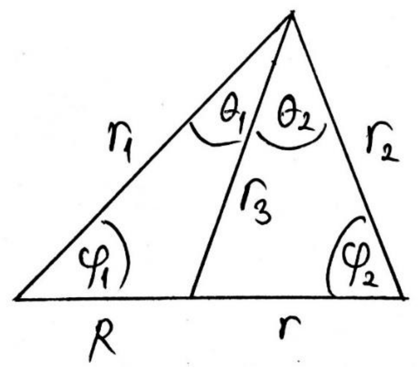
$$\frac{M_1}{r_1^2}\cos\theta_1 + \frac{M_2}{r_2^2}\cos\theta_2 = \frac{(M_1+M_2)}{(R+r)^3}r_3$$

Persamaan gaya kesetimbangan untuk sumbu x dan y di subtitusikan

$$\frac{M_2}{r_2^2}\frac{\sin\theta_2}{\sin\theta_1}\cos\theta_1 + \frac{M_2}{r_2^2}\cos\theta_2 = \frac{(M_1+M_2)}{(R+r)^3}r_3$$

$$\frac{M_2}{r_2^2}\sin(\theta_1+\theta_2) = \frac{(M_1+M_2)}{(R+r)^3}r_3\sin\theta_1$$

Geometri



Pers. Geometri 1

$$\frac{\sin(\theta_1+\theta_2)}{R+r}=\frac{\sin\varphi_2}{r_1}=\frac{\sin\varphi_1}{r_2}$$

Pers. Geometri 2

$$\frac{\sin\theta_1}{R}=\frac{\sin\varphi_1}{r_3}$$

Persamaan

(1) $\frac{M_2}{r_2^2}\sin(\theta_1+\theta_2)=\frac{(M_1+M_2)}{(R+r)^3}r_3\sin\theta_1$

(2) $\frac{\sin(\theta_1+\theta_2)}{R+r}=\frac{\sin\varphi_1}{r_2}$

(3) $\frac{\sin\theta_1}{R}=\frac{\sin\varphi_1}{r_3}$

Subtitusi persamaan (3) ke (2)

$$\frac{\sin(\theta_1+\theta_2)}{R+r}=\frac{r_3}{r_2R}\sin\theta_1$$

Subtitusikan pada persamaan (1)

$$\frac{M_2}{r_2^2}\frac{r_3}{r_2R}\sin\theta_1\,(R+r)=\frac{(M_1+M_2)}{(R+r)^3}r_3\sin\theta_1$$

$$r_2=\sqrt[3]{\frac{(R+r)^4}{R}\frac{M_2}{M_1+M_2}}$$

Perlu disadari, kita dapat menyederhanakan jawaban diatas dengan posisi pusat massa sistem dengan $x=0$ di M_1

$$x_{PM}=R=\frac{M_1(0)+M_2(R+r)}{M_1+M_2}=\frac{M_2}{M_1+M_2}(R+r)$$

Maka,

$$r_2=\sqrt[3]{\frac{(R+r)^4}{R}\frac{R}{R+r}}=R+r$$

(a)

6. Untuk mencari jarak M_1 ke M_3, kita dapat gunakan persamaan pada pembahasan sebelumnya, hanya saja dengan bentuk yang berbeda.

Persamaan gaya sumbu x

$$F_x = 0$$
$$\frac{GM_1M_3}{r_1^2}\sin\theta_1 = \frac{GM_2M_3}{r_2^2}\sin\theta_2$$
$$\frac{M_1}{r_1^2}\sin\theta_1 = \frac{M_2}{r_2^2}\sin\theta_2$$

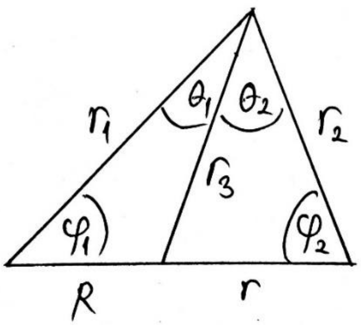
Persamaan gaya sumbu y

$$F_y = 0$$
$$\frac{GM_1M_3}{r_1^2}\cos\theta_1 + \frac{GM_2M_3}{r_2^2}\cos\theta_2 = M_3\omega_0^2 r_3$$
$$\frac{GM_1}{r_1^2}\cos\theta_1 + \frac{GM_2}{r_2^2}\cos\theta_2 = \omega_0^2 r_3 = \frac{G(M_1+M_2)}{(R+r)^3}r_3$$
$$\frac{M_1}{r_1^2}\cos\theta_1 + \frac{M_2}{r_2^2}\cos\theta_2 = \frac{(M_1+M_2)}{(R+r)^3}r_3$$

Persamaan gaya kesetimbangan untuk sumbu x dan y di subtitusikan

$$\frac{M_1}{r_1^2}\cos\theta_1 + \frac{M_1}{r_1^2}\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2}\cos\theta_2 = \frac{(M_1+M_2)}{(R+r)^3}r_3$$
$$\frac{M_1}{r_1^2}\sin(\theta_1+\theta_2) = \frac{(M_1+M_2)}{(R+r)^3}r_3\sin\theta_2$$

Geometri



Pers. Geometri 1

$$\frac{\sin(\theta_1+\theta_2)}{R+r} = \frac{\sin\varphi_2}{r_1} = \frac{\sin\varphi_1}{r_2}$$

Pers. Geometri 2

$$\frac{\sin\theta_2}{r} = \frac{\sin\varphi_2}{r_3}$$

Persamaan

(1) $\frac{M_1}{r_1^2}\sin(\theta_1+\theta_2) = \frac{(M_1+M_2)}{(R+r)^3}r_3\sin\theta_2$

(2) $\frac{\sin(\theta_1+\theta_2)}{R+r} = \frac{\sin\varphi_2}{r_1}$

(3) $\frac{\sin\theta_2}{r} = \frac{\sin\varphi_2}{r_3}$

Subtitusi persamaan (3) ke (2)

$$\frac{\sin(\theta_1+\theta_2)}{R+r} = \frac{r_3}{r_1 r}\sin\theta_1$$

Subtitusikan pada persamaan (1)

$$\frac{M_1}{r_1^2}\frac{r_3}{r_1 r}\sin\theta_1\,(R+r) = \frac{(M_1+M_2)}{(R+r)^3} r_3 \sin\theta_2$$

$$r_1 = \sqrt[3]{\frac{(R+r)^4}{r}\frac{M_1}{M_1+M_2}}$$

Perlu disadari, kita dapat menyederhanakan jawaban diatas dengan posisi pusat massa sistem dengan $x = 0$ di M_1

$$x_{PM} = R = \frac{M_1(R+r)+M_2(0)}{M_1+M_2} = \frac{M_1}{M_1+M_2}(R+r)$$

Maka,

$$r_2 = \sqrt[3]{\frac{(R+r)^4}{R}\frac{R}{R+r}} = R+r$$

(a)

7. Kesimpulan dari kasus ini adalah segitiga merupakan segitiga sama sisi

$$\theta_1+\theta_2 = 60^\circ = \varphi_1 = \varphi_2$$

$$r_1 = r_2 = R+r$$

Maka, dengan hukum cosinus, didapatkan bahwa r_3

$$r_3 = \sqrt{R^2+r^2+rR}$$

(b)

8. Diketahui bahwa $M_1 = M_2 \equiv M$. Maka, $R = r \equiv d$.

$$r_3 = \sqrt{R^2+r^2+rR} = \sqrt{d^2+d^2+d^2} = d\sqrt{3}$$

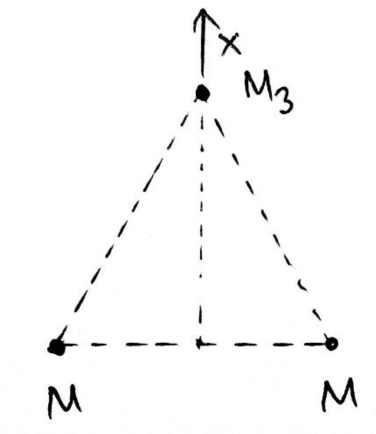
$$\omega_0 = \sqrt{\frac{G(M+m)}{(R+r)^3}} = \sqrt{\frac{G2M}{8d^3}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{GM}{d^3}}$$

Saat disimpangkan sebesar x arah radial, tidak ada torsi eksternal. Sehingga, momentum angular sistem tetap kekal.

$$I_0\omega_0 = I\omega$$

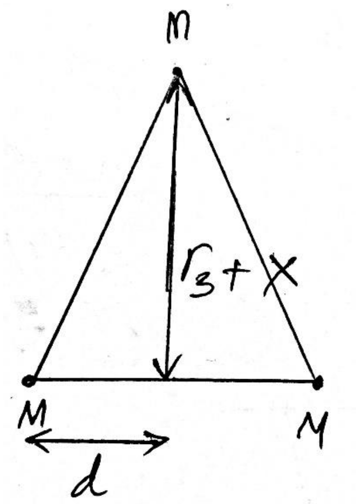
$$M_3 r_3^2\omega_0 = M_3(r_3+x)^2\omega$$

$$\omega = \frac{r_3^2}{(r_3 + x)^2}\omega_0$$



Perhatikan diagram simpangan radial diatas ini.

Kita akan dapatkan persamaan gerak harmonik sederhana dengan persamaan gaya



Dari gambar terlihat bahwa trigonometri suatu segitiga

$$\cos\theta = \frac{r_3 + x}{\sqrt{(r_3 + x)^2 + d^2}}$$

Persamaan Gaya

$$F_{pemulih} = M_3\ddot{x}$$

$$-\frac{2GMM_3}{(r_3 + x)^2 + d^2}\cos\theta + M_3\omega^2(r_3 + x) = M_3\ddot{x}$$

$$-\frac{2GM(r_3 + x)}{((r_3 + x)^2 + d^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{r_3\omega_0^2}{(r_3 + x)^3} = \ddot{x}$$

$$-2GM(r_3 + x)((r_3 + x)^2 + d^2)^{-\frac{3}{2}} + r_3\omega_0^2(r_3 + x)^{-3} = \ddot{x}$$

Lakukan aproksimasi untuk $x \ll d$

$$((r_3 + x)^2 + d^2)^{-\frac{3}{2}} = (r_3^2 + 2xr_3 + x^2 + d^2)^{-\frac{3}{2}} = \left(4d^2 + 2\sqrt{3}xd + x^2\right)^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{8d^3}\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{x}{d} + \frac{x^2}{d^2}\right)^{-\frac{3}{2}}$$

Aproksimasi dengan penyederhanaan $a \equiv \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{x}{d} + \frac{x^2}{d^2}$

$$\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{x}{d} + \frac{x^2}{d^2}\right)^{-\frac{3}{2}} \equiv (1+a)^{-\frac{3}{2}} = 1 - \frac{3}{2}a + \frac{15}{8}a^2 + \cdots$$

Karena $x \ll d$, maka orde $\frac{x^2}{d^2} \approx 0$ dan untuk orde diatasnya

$$\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{x}{d} + \frac{x^2}{d^2}\right)^{-\frac{3}{2}} \approx 1 - \frac{3}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{x}{d} + \frac{x^2}{d^2}\right) + \frac{15}{8}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{x}{d} + \frac{x^2}{d^2}\right)^2 = 1 - \frac{3}{4}\sqrt{3}\frac{x}{d} - \frac{3}{8}\frac{x^2}{d^2}$$

Maka,

$$((r_3+x)^2 + d^2)^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{8d^3}\left(1 - \frac{3}{4}\sqrt{3}\frac{x}{d} - \frac{3}{8}\frac{x^2}{d^2}\right)$$

Komponen gaya gravitasi

$$-2GM(r_3+x)((r_3+x)^2+d^2)^{-\frac{3}{2}} = -\frac{GM}{4d^2}\left(\sqrt{3} + \frac{x}{d}\right)\left(1 - \frac{3}{4}\sqrt{3}\frac{x}{d} - \frac{3}{8}\frac{x^2}{d^2}\right)$$

$$-2GM(r_3+x)((r_3+x)^2+d^2)^{-\frac{3}{2}} = -\frac{GM}{4d^2}\left(\sqrt{3} - \frac{5}{4}\frac{x}{d}\right)$$

Aproksimasi gaya sentripetal

$$r_3\omega_0^2(r_3+x)^{-3} = \frac{GM}{4d^2}\sqrt{3}\left(1 - \frac{3x}{\sqrt{3}d}\right)$$

Maka, persamaan gerak harmonik sederhana sistem adalah

$$-2GM(r_3+x)((r_3+x)^2+d^2)^{-\frac{3}{2}} + r_3\omega_0^2(r_3+x)^{-3} = \ddot{x}$$

$$-\frac{GM}{4d^2}\left(\sqrt{3} - \frac{5}{4}\frac{x}{d}\right) + \frac{GM}{4d^2}\sqrt{3}\left(1 - \frac{3x}{\sqrt{3}d}\right) = \ddot{x}$$

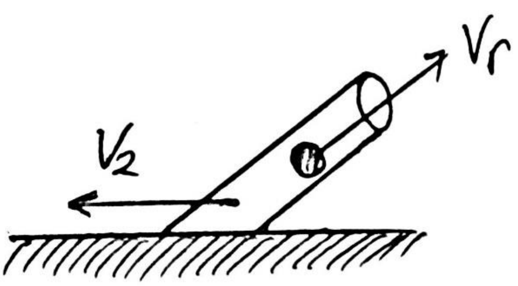
$$-\frac{7}{4}\frac{GM}{d^3}x = \ddot{x}$$

Maka, frekuensi angular sistem adalah

$$\omega' = \sqrt{\frac{7}{4}\frac{GM}{d^3}} = \frac{1}{2}\omega_0\sqrt{7}$$

(a)

9. Perhatikan diagram gerak sistem dibawah ini



Komponen v_r merupakan kecepatan peluru relatif terhadap meriam dan v_2 merupakan kecepatan meriam relatif terhadap tanah dan v_1 merupakan kecepatan peluru terhadap tanah/ Konsep fisika yang perlu dibangun adalah kekekalan energi dan kekekalan momentum linear sumbu horizontal.

Kekekalan Energi

$$E_i = E_f$$

$$E_0 = \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2$$

Kekekalan Momentum Linear

$$p_i = p_f$$

$$0 = m_1 v_{1x} - m_2 v_2$$

Persamaan gerak relatif horizontal

$$v_{1x} = v_r \cos\theta - v_2$$

Persamaan gerak relatif vertikal

$$v_{1y} = v_r \sin\theta$$

$$v_1 = \sqrt{v_{1x}^2 + v_{1y}^2}$$

Persamaan

(1) $E_0 = \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2$

(2) $m_1 v_{1x} = m_2 v_2$

(3) $v_{1x} = v_r \cos\theta - v_2$

(4) $v_{1y} = v_r \sin\theta$

(5) $v_1 = \sqrt{v_{1x}^2 + v_{1y}^2}$

Jika persamaan diatas diselesaikan, kalian akan dapatkan besar kecepatan meriam terhadap tanah

$$v_2 = \sqrt{\frac{2E_0 m_1}{(m_1 + m_2)(m_2 + m_1\, sin^2\theta)}}\cos\theta$$

(a)

10. Gunakan persamaan pada pembahasan sebelumnya

$$v_{1x} = \frac{m_2}{m_1} v_2$$

$$v_{1x} = \frac{m_2}{m_1}\sqrt{\frac{2E_0 m_1}{(m_1 + m_2)(m_2 + m_1\, sin^2\theta)}}\cos\theta$$

(b)

11. Menentukan v_{2y}

$$v_r \cos\theta = v_2 + v_{1x}$$

$$v_r = \left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right)\sqrt{\frac{2E_0 m_1}{(m_1 + m_2)(m_2 + m_1\, sin^2\theta)}}$$

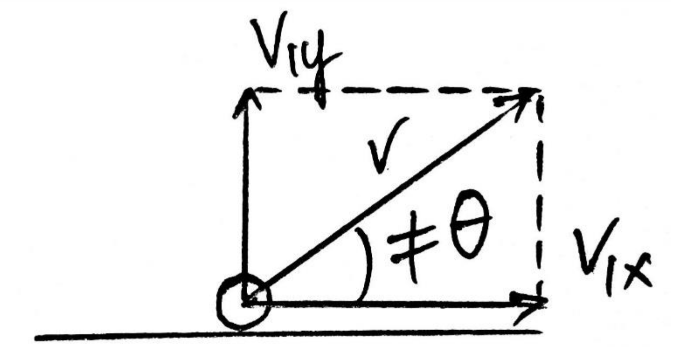
Maka, v_{1y} bernilai

$$v_{1y} = v_r \sin\theta$$

$$v_{1y} = \left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right)\sqrt{\frac{2E_0 m_1}{(m_1 + m_2)(m_2 + m_1\, sin^2\theta)}}\sin\theta$$

(d)

12. Perhatikan diagram gerak dibawah ini



Gunakan persamaan kinematika sederhana. Asumsikan S merupaka jarak total yang ditempuh

$$S = v_{1x} t$$

$$S(\theta) = \frac{2v_{1x}v_{1y}}{g} = \frac{\sin 2\theta}{g}\frac{m_2}{m_1}\left(\frac{2E_0}{m_2 + m_1\, sin^2\theta}\right)$$

Syarat agar S maksimum adalah $\frac{dS}{d\theta} = 0$

$$\frac{dS}{d\theta} = 0 = \frac{d}{d\theta}\left(\frac{\sin 2\theta}{m_2 + m_1\, sin^2\theta}\right)$$

Selesaikan persamaan differensial tersebut dan akan didapatkan

$$\tan\theta = \sqrt{\frac{m_2}{m_1 + m_2}}$$

$$\theta = \arctan\sqrt{\frac{m_2}{m_1 + m_2}}$$

(e)

13. Masukkan nilai θ pada pembahasan sebelumnya

$$S(\theta) = \frac{\sin 2\theta}{g}\frac{m_2}{m_1}\left(\frac{2E_0}{m_2 + m_1\, sin^2\theta}\right) = \frac{4\sin\theta\cos\theta}{g}\frac{m_2}{m_1}\left(\frac{E_0}{m_2 + m_1\, sin^2\theta}\right)$$

$$S = \frac{4m_2E_0}{gm_1}\frac{\sqrt{m_1+m_2}\sqrt{m_2}}{m_1+2m_2}\frac{1}{m_2 + \frac{m_1m_2}{m_1+2m_2}} = \frac{4E_0}{m_1g}\frac{\sqrt{m_1+m_2}\sqrt{m_2}}{(m_1+2m_2)+m_1}$$

$$S_{maksimum} = \frac{2E_0}{m_1g}\sqrt{\frac{m_2}{m_1+m_2}}$$

(e)