PAKET 10

PELATIHAN ONLINE

2019

SMP
MATEMATIKA

po.alcindonesia.co.id

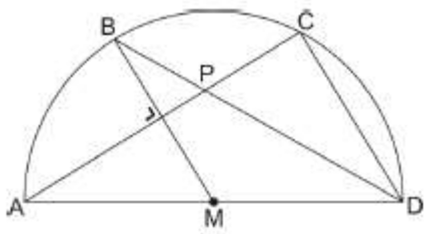
WWW.ALCINDONESIA.CO.ID

@ALCINDONESIA

085223273373

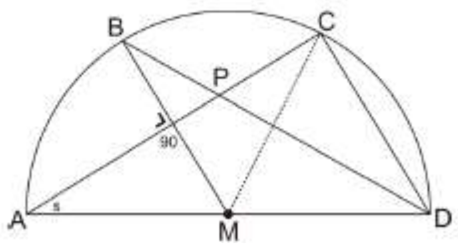
PEMBAHASAN PAKET 10

1. Perhatikan gambar bangun datar setengah lingkaran dengan diameter AD dan pusat lingkaran M berikut. Misalkan B dan C adalah titik-titik pada lingkaran sedemikian sehingga $AC \perp BM$ dan BD memotong di titik P. Jika besar $\angle CAD = s°$, maka besar $\angle CPD = \cdots°$



   a. $30 + \frac{s}{2}$
   b. $45 + s$
   c. $45 + \frac{s}{2}$
   d. $30 + s$

   Solusi:



   Mencari $\angle AMB$:

   $\angle AMB = 180 - 90 - s = 90 - s$

   Hubungan sudut pusat $\angle CMD$ dengan sudut keliling $\angle CAD$:

   $\angle CMD = 2 \,.\, \angle CAD = 2s$

   $\angle CPD$ merupakan sudut antara dua tali busur AC dan BD, sehingga:

   $\angle CPD = \frac{1}{2} \,.\, (\angle AMB + \angle CMD)$

   $\angle CPD = \frac{1}{2} \,.\, (90 - s + 2s)$

$\angle CPD = \frac{1}{2} . (90 + s)$

$\angle CPD = 45 + \frac{s}{2}$

2. Diketahui dua buah himpunan A dan B dengan $A = \{(x, y) | 1987 \leq y < x \leq 2013 \; dengan \; x \; dan \; y \; bilangan \; bulat\}$ dan $B = \{(x, y) | y \leq 2013 - x \; dengan \; x \; dan \; y \; bilangan \; bulat\}$

   Banyak anggota himpunan A – B adalah ...

   a. 351
   b. 315
   c. 350
   d. 311

   Solusi:

   $A - B = \{(x, y) | (x, y) \in A \; dan \; (x, y) \notin A \cap B\}$

   Mencari anggota A:

   $A = \{(x, y) | 1987 \leq y < x \leq 2013 \; dengan \; x \; dan \; y \; bilangan \; bulat\}$

   Banyaknya bilangan mulai dari 1987 sampai dengan 2013 ada sebanyak 27 bilangan. Kemudian bilangan-bilangan tersebut disusun dengan mengambil 2 bilangan (x, y) atau (y, x). Permasalahan ini sesuai dengan aturan kombinasi bahwa terdapat 27 bilangan yang akan disusun menjadi 2 bilangan, yaitu

   $$C_2^{27} = \frac{27!}{(27 - 2)! \; . \; 2!} = 27 . 13 = 351$$

   Dengan demikai $n(A) = 351$

   Selanjutnya mencari anggota $A \cap B$

   $A \rightarrow 1987 \leq y < x \leq 2013$

   $A = \{(1987, 1988), \ldots\ldots., (1987, 2013), \ldots\ldots., (2012, 2013)\}$

   $B \rightarrow y \leq 2013 - x$

   $y + x \leq 2013$

Untuk nilai x dan y bilangan bulat positif pada B, maka dapat susunan sebagai berikut:

$B =$
$\{(0, 2013), (1, 2012), \ldots, (1005, 1008), (1006, 1007), \ldots, (2012, 1), (2013, 0)\}$

Sehingga dapat disumpulkan bahwa: $A \cap B = \{\}$ sehingga $n(A \cap B) = 0$

Dengan demikian, diperoleh:

$A - B = \{(x, y) | (x, y) \in A \; dan \; (x, y) \notin A \cap B\}$

$A - B = A$

$n(A - B) = n(A)$

$n(A - B) = 351$

Jadi, banyak anggota himpunan A – B adalah 351

3. Rata-rata nilai dari 25 siswa adalah 40. Jika selisih rata-rata nilai 5 siswa terendah dan 20 siswa sisanya adalah 25, maka nilai rata-rata 5 siswa terendah adalah ...
   a. 15
   b. 20
   c. 25
   d. 30

   Solusi:

   $\bar{x}_5$ = rata-rata nilai 5 siswa terendah

   $\bar{n}_5$ = banyaknya siswa pada $\bar{x}_5$

   $\bar{x}_{20}$ = rata-rata nilai 20 siswa terendah

   $\bar{n}_{20}$ = banyaknya siswa pada $\bar{x}_{20}$

   $\bar{x}$ = rata-rata seluruh siswa

   Diketahui:

   $n = 25$

$\bar{x} = 40$

$\bar{n}_5 = 5$

$\bar{n}_{20} = 20$

- $\bar{x}_{20} - \bar{x}_5 = 25 \quad \rightarrow \quad \bar{x}_{20} = 5 + \bar{x}_5$
- $\bar{x} = \frac{n_5.\bar{x}_5 + n_{20}.\bar{x}_{20}}{n_5 + n_{20}}$

  $40 = \frac{5.\bar{x}_5 + 20.(5+\bar{x}_5)}{5+20}$

  $40.25 = 25\,.\,\bar{x}_5 + 500$

  $\bar{x}_5 = 20$

Jadi, nilai rata-rata 5 siswa terendah adalah 20

4. Misalkan n adalah suatu bilangan asli dan x adalah bilangan riil positif. Jika $2x^n + \frac{3}{x^{-\frac{n}{2}}} - 2 = 0$, maka nilai $\frac{2}{x^{n+\frac{1}{4}}}$ sama dengan …
   a. 1
   b. 2
   c. 3
   d. 4

Solusi:

$2x^n + \frac{3}{x^{-\frac{n}{2}}} - 2 = 0$

$2x^n + 3x^{\frac{n}{2}} - 2 = 0$

$2\left(x^{\frac{n}{2}}\right)^2 + 3x^{\frac{n}{2}} - 2 = 0$

$\frac{1}{2}\,.\left(2x^{\frac{n}{2}} + 4\right).\left(2x^{\frac{n}{2}} - 1\right) = 0$

$\frac{1}{2}\,.\,2\,.\left(x^{\frac{n}{2}} + 2\right).\left(2x^{\frac{n}{2}} - 1\right) = 0$

$\left(x^{\frac{n}{2}} + 2\right).\left(2x^{\frac{n}{2}} - 1\right) = 0$

$x^{\frac{n}{2}} + 2 = 0$ atau $2x^{\frac{n}{2}} - 1 = 0$

$x^{\frac{n}{2}} = -2$ atau $x^{\frac{n}{2}} = \frac{1}{2}$

Sehingga,

$x^{\frac{n}{2}} = -2$ (tidak memenuhi, karena x harus bilangan riil positif)

$x^{\frac{n}{2}} = \frac{1}{2}$ (memenuhi) $\rightarrow$ $\left(x^{\frac{n}{2}}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$ $\rightarrow$ $x^n = \frac{1}{4}$

Jadi nilai $\frac{2}{x^n+\frac{1}{4}} = \frac{2}{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}} = \frac{2}{\frac{2}{4}} = 4$

5. Jika a dan b adalah penyelesaian dari persamaan kuadrat $4x^2 - 7x - 1 = 0$, maka nilai dari $\frac{3a^2}{4b-7} + \frac{3b^2}{4a-7}$ adalah ...
   a. $-\frac{21}{16}$
   b. $-\frac{16}{21}$
   c. $-\frac{26}{16}$
   d. $-\frac{16}{26}$

   Solusi:

   $4x^2 - 7x - 1 = 0$

   $a + b = \frac{7}{4}$ $\rightarrow$ $4a + 4b = 7$

   $4b - 7 = -4a$ (1)

   $4a - 7 = -4b$ (2)

   Substitusikan (1) dan (2):

$$\frac{3a^2}{4b-7} + \frac{3b^2}{4a-7} = \frac{3a^2}{-4a} + \frac{3b^2}{-4b} = -\frac{3a}{4} - \frac{3b}{4} = -\frac{3}{4}(a+b) = -\frac{3}{4}.\frac{7}{4}$$
$$= -\frac{21}{16}$$

6. Diketahui Iwan adalah seorang siswa laki-laki dan Sasa adalah seorang siswa perempuan. Saat ini mereka duduk di kelas IX pada suatu sekolah. Mereka mencatat banyak siswa kelas IX di sekolah mereka. Sasa mencatat, $\frac{3}{20}$ dari total siswa di kelas IX adalah laki-laki. Sedangkan menurut catatan Iwan, $\frac{1}{7}$ dari total

siswa kelas IX selain dirinya adalah laki-laki. Banyak siswa laki-laki kelas IX di sekolah mereka adalah …

a. 14
b. 16
c. 18
d. 20

Solusi:

Misal:

N = banyak siswa kelas IX

L = banyak siswa laki-laki kelas IX

Sasa $\rightarrow$ $\frac{3}{20}\,.\,N = L \qquad (1)$

Iwan $\rightarrow$ $\frac{1}{7}\,.\,(N-1) = L - 1 \qquad (2)$

Kurangkan persamaan (1) dan (2), diperoleh:

$\frac{3}{20}N - \frac{1}{7}N + \frac{1}{7} = 1$

$\frac{21}{140}N - \frac{20}{140}N = 1 - \frac{1}{7}$

$\frac{1}{140}N = \frac{6}{7}$

$N = 120$

$L = \frac{3}{20}N = \frac{3}{20}\,.\,120 = 18$

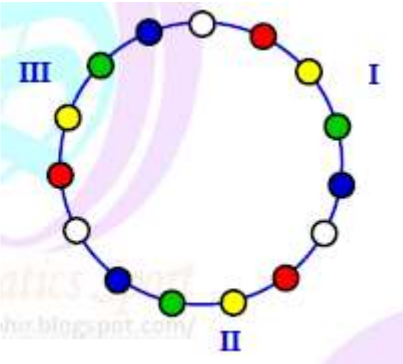
Jadi, banyak siswa laki-laki di kelas IX adalah 18.

7. Tini ingin membuat gelang dari bahan manik-manik berwarna-warni yang terdiri dari masing-masing 3 butir manik-manik berwarna merah, kuning, hijau, biru, dan putih. Ia ingin menyusun manik-manik tersebut sedemikian rupa sehingga di antara 2 manik-manik berwarna putih selalu terdapat 4 manik-manik berwarna selain putih. Banyak susunan gelang yang mungkin untuk dibuat adalah ....

a. 61806
b. 61680
c. 61068
d. 61608

Solusi:

Perhatikan ilustrasi gambar gelang berikut ini.



Misalkan:

Putih = P = 3

Merah = M = 3

Kuning = K = 3

Hijau = H = 3

Biru = B = 3

Dikatahui di antara 2 manik-manik berwarna putih selalu terdapat 4 manik-manik berwarna selain putih. Sehingga yang dicari adalah susunan warna manik-manik yang berwarna selalin putih, yaitu sebanyak $M + K + H + B = 3 + 3 + 3 + 3 = 12$.

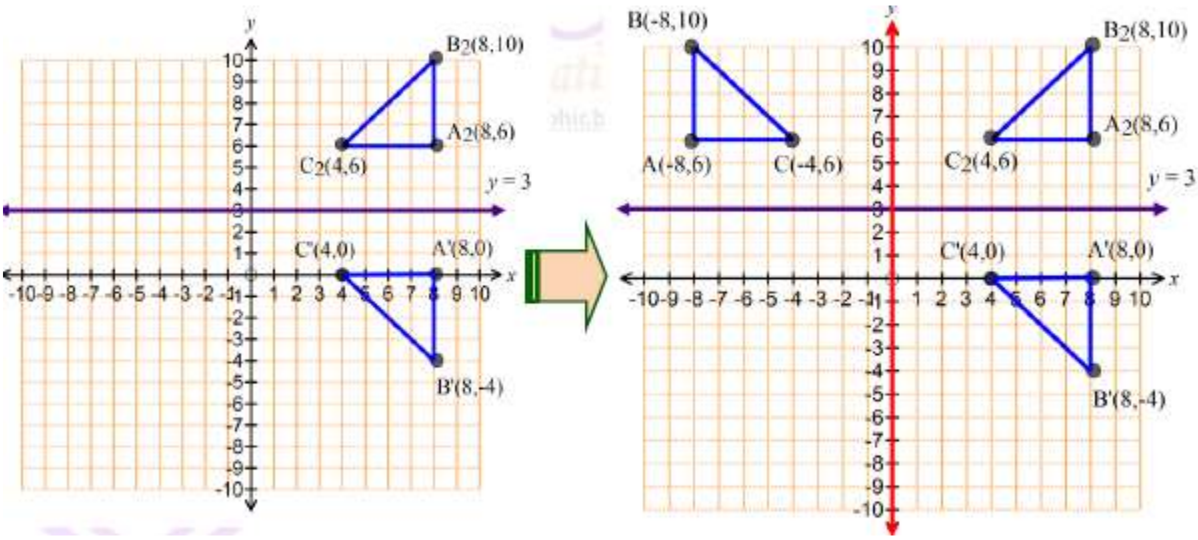
Kemudian kita perhatikan, susunan warna manik-manik pada lokasi I, II, dan III memiliki unsur yang sama, sehingga susunan warna manik-manik tersebut membentuk permutasi berulang, karena ada 12 unsur dengan 3 unsur yang muncul.

Perhatikan susunan warna manik-manik pada lokasi I, II, dan III. Apabila susunan warna manik-manik pada lokasi I di pindah ke lokasi II, dan susunan warna manik-manik pada lokasi II di pindah ke lokasi III serta susunan warna manik-manik pada lokasi III di pidah ke lokasi I, maka perputaran warna tersebut dianggap sama dan warnanya dibolak-balikpun juga sama, sehingga permutasi siklis tersebut harus dibagi 6 (dibagi 3 dan dibagi 2). Akan tetapi masih ada satu susunan lagi yang harus ditambahkan yaitu susunan warna berbeda pada ke-3 lokasi tersebut, yaitu $\frac{12!}{3!\times3!\times3!\times3!\times6}+\frac{4!}{3}=61600+8=61608$

Jadi, banyak susunan gelang yang mungkin untuk dibuat adalah 61608 cara

8. Sebuah ΔABC dicerminkan terhadap sumbu Y, kemudian dicerminkan lagi terhadap garis $y = 3$ sehingga hasil pencerminannya adalah $\Delta A'B'C'$. Jika koordinat titik-titik $A'(8,0), B'(8,-4)$, dan $C'(4,0)$, maka koordinat titik-titik A, B, dan C berturut-turut adalah ....
   a. $(-8,6), (-8,10), (-4,6)$
   b. $(-6,8), (-8,10), (-6,4)$
   c. $(-8,10), (-8,6), (-4,6)$
   d. $(-4,6), (-8,10), (-8,6)$

   Solusi:



   Diketahui koordinat titik-titik $A'(8,0), B'(8,-4)$, dan $C'(4,0)$

   Dimisalkan koordinat titik-titik sebelum dicerminkan pada garis $y = 3$, yakni titik-titik $A_2(8,6), B_2(8,10)$, dan $C_2(4,6)$

   Sehingga koordinat titik-titik sebelum dicerminkan pada garis sumbu y adalah titik-titik $A(-8,6), B(-8,10)$, dan $C(-4,6)$

Jadi, koordinat titik-titik A, B, dan C berturut-turut adalah $(-8,6), (-8,10)$, dan $(-4,6)$

9. Jika a dan b bilangan bulat ganjil serta $a > b$, maka banyak bilangan bulat di antara $2a$ dan b adalah ....
   a. $2a - b - 1$
   b. $2a - b + 1$
   c. $2a - b$
   d. $\frac{2a - b - 1}{2}$

   Solusi:

   Untuk mengetahui jawaban dari berapa banyak bilangan bulat di antara $2a$ dan b, dimana a dan b merupakan bilangan bulat ganjil serta $a > b$, perhatikan ilustrasi berikut:

   Misalkan $a = 9$ dan $b = 3$, maka

   $2a = 2(9) = 18$ dan $b = 3$

   Sehingga bilangan antara 18 dan 3 adalah $4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17$, yaitu sebanyak 14 bilangan.

   Dapat disimpulkan sebanyak $= 2(9) - 3 - 1 = 18 - 3 - 1 = 14$

   Dengan cara yang sama untuk bilangan-bilangan yang lainnya dengan syarat $a > b$, maka dapat dihasilkan, menjadi $= 2a - b - 1$

   Jadi, banyak bilangan bulat di antara $2a$ dan b adalah $2a - b - 1$

10. Diketahui $x - y = 10$ dan $xy = 10$. Nilai dari $x^4 + y^4$ adalah ....
   a. 11420
   b. 14200
   c. 12400
   d. 11400

   Solusi:
   $x^2 + y^2 = (x - y)^2 + 2xy$
   $x^2 + y^2 = 10^2 + 2(10)$
   $x^2 + y^2 = 100 + 20$
   $x^2 + y^2 = 120$

$$x^4 + y^4 = (x^2 + y^2)^2 - 2(xy)^2$$
$$x^4 + y^4 = 120^2 - 2(10)^2$$
$$x^4 + y^4 = 14400 - 200$$
$$x^4 + y^4 = 14200$$