GEBZE
TEKNİK ÜNİVERSİTESİ

ELM - 472 Ödev 4

Makine Öğrenmesinin Temelleri

Dr. Öğr. Üyesi Ahmet Güneş

Hazırlayan:

Alican Bayındır

Elektronik Mühendisliği (Lisans)

200102002087

Alican Bayındır
20010200 2087

A

1) Aşağıda verilen denklem $p = 1,2,3$ değerleri için bir metrik midir? Regresyon problemi için $p = 1,2,3$ değerlerinden hangilerini ne tür problemler için kullanmayı tercih edebilirsiniz? Açıklayınız.

$$d(x_1, x_2) = \sqrt[p]{|x_1 - x_2|^p}$$

$d : X \times X \to R \quad (x,y) \to d(x,y)$ fonksiyonu $x, y, z \in X$ olm. üz.

(i) $d(x,y) > 0$

(ii) $d(x,y) = 0 \iff x = y$

(iii) $d(x,y) = d(y,x)$

(iv) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ → metrik fonksiyon (X,d) birer metrik uzaydır.

Bu aynı zamanda üçgen eşitsizliğidir.

Örneğin; (R^2, d) metrik uzayını ele alalım

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$$

her bir maddeyi sağlaması gerekir -metrik olması için-

$$d((x_1, y_1), (x_1, y_1)) = |x_1 - x_1| + |y_1 - y_1| = 0$$

$$0 = d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \underbrace{|x_1 - x_2|}_{0} + \underbrace{|y_1 - y_2|}_{0}$$

iki değerin de sıfır olması gerekir. Bundan dolayı da iki değer de birbirine ~~eşit~~ aynı diyebiliriz.

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| = |x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|$$
$$= d((x_2, y_2), (x_1, y_1))$$

$$d((x_1, y_1), (x_3, y_3)) + d((x_3, y_3), (x_2, y_2)) = |x_1 - x_3| + |y_1 - y_3| + |x_3 - x_2| + |y_3 - y_2|$$

$$= |x_1 - x_3| + |x_3 - x_2| + |y_1 - y_3| + |y_3 - y_2|$$

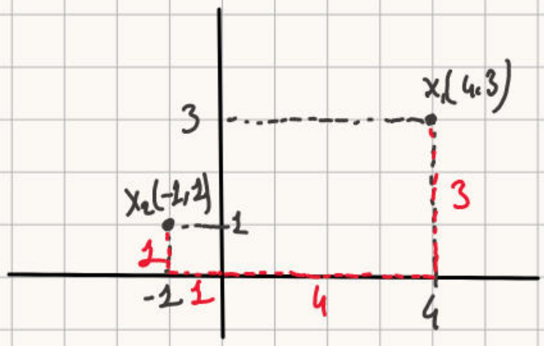
$$\leq |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| = d((x_1, y_1), (x_2, y_2))$$ → üçgen eşitsizliği sağlanır.

Alican Bayındır
200102002087

A

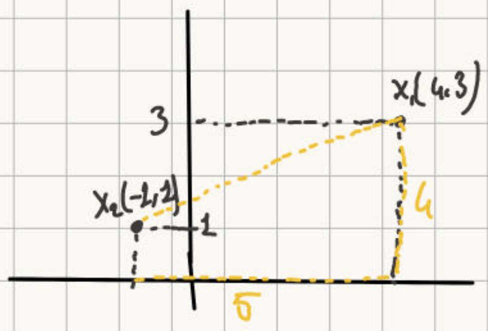
l_1 norm (Manhattan Distance)

Feature vector X



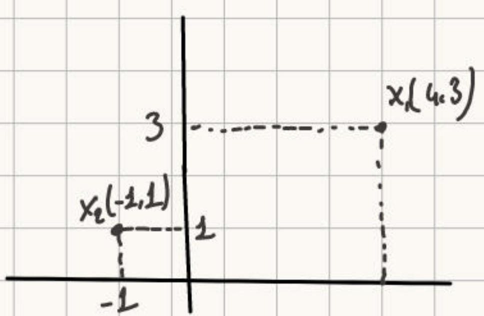
$$l_1 \text{ norm}: \left(\sum_{i=1}^{k} |x_i|^1 \right)^{\frac{1}{1}} = 7 + 2 = 9$$

l_2 norm (Euclidean Distance)



$$l_2 \text{ norm}: \left(\sum_{i=1}^{k} |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4^2 + 5^2} = \sqrt{41}$$

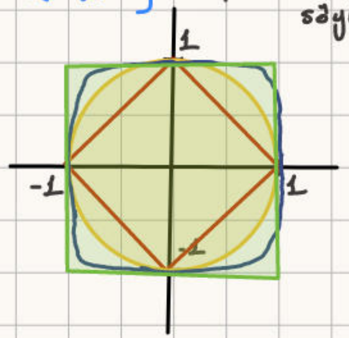
$l_3 - l_p$ norm (Generalized)



$$l_p \text{ norm}: \left(\sum_{i=1}^{k} |x_i|^n \right)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[3]{4^3 + 5^3} = \sqrt[3]{189}$$ → Matematik kısmı doğru mu bilmiyorum

Bonus

l_0 norm → a.k.a "discrete metric" (not a norm) kaç eleman olduğunu söyler



l_1 norm
l_2 norm
l_3 norm
l_∞ norm $= \text{Max}(X_1, X_2, \ldots X_k)$

Lasso regression Constraints

l_1 norm$(w) \leq r$

Mean squared Error

$$\frac{1}{m}\left[l_2 \text{ norm}(y - \bar{y})\right]^2$$

Ridge Regression Constraint

l_2 norm$(w) \leq \sqrt{r}$

l_∞ → worst case scenario

Alican Bayındır
200102002087

A

2) Aşağıda verilen Poisson olasılık dağılımının birinci ve ikinci momentini hesaplayınız.

$$P(x|\lambda) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, k = 0,1,2,\cdots$$

$$\langle x^n \rangle = \sum_{x=0}^{\infty} x_i^n \, p(x)$$

$$\sum_{x=0}^{\infty} \frac{x \cdot e^{-\lambda} \lambda^x}{x(x-1)!} = e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^x}{(x-1)!} = \lambda e^{-\lambda} \left(\sum_{x=1}^{\infty} \frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!} \right)$$

$$= \lambda e^{-\lambda} \left(1 + \frac{\lambda}{1!} + \frac{\lambda^2}{2!} + \cdots \right) = \lambda \cancel{e^{-\lambda}} \cancel{e^{\lambda}} = \boxed{\lambda}$$

when $n = 2$

$$\langle x^2 \rangle = E(x^2) = \sum_{x=0}^{\infty} x^2 P(x) \Rightarrow \sum_{x=0}^{\infty} (x^2 - x + x) \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!}$$

$$\sum_{x=0}^{\infty} (x(x-1) + x) \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!} = \sum_{x=0}^{\infty} [(x(x-1))] \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!} + \sum_{x=0}^{\infty} \frac{x e^{-\lambda} \lambda^x}{x!}$$

$$\sum_{x=2}^{\infty} [\cancel{x(x-1)}] \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{\cancel{x(x-1)}(x-2)!} + \underbrace{\sum_{x=0}^{\infty} \frac{x e^{-\lambda} \lambda^x}{x(x-1)!}}_{\text{Same eq. solved above it makes } \lambda}$$

$$= e^{-\lambda} \sum_{x=2}^{\infty} \frac{\lambda^x}{(x-2)!} + \lambda = e^{-\lambda} \lambda^2 \sum_{x=2}^{\infty} \frac{\lambda^{x-2}}{(x-2)!} + \lambda = \lambda^2 e^{-\lambda} e^{\lambda} + \lambda$$

$$\boxed{\langle x_2' \rangle = \lambda^2 + \lambda}$$

Alican Bayındır
200102002087

A

3) $\{[0.5, 0.5]^T, [0.5, 1.0]^T, [0.6, 0.5]^T\}$ örneklemini kullanarak en olası doğru denklemini bulunuz.

$$[a, b]^T = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

$$y = w_1 x + w_0$$

	1	2	3
x_1	0,5	0,5	0,6
x_2	0,5	1	0,5

$$w_1 = \frac{\sum x_i y_i - \frac{\sum x_i \sum y_i}{n}}{\sum x_i^2 - \frac{(\sum x_i)^2}{n}} = \frac{1{,}05 - 1{,}06}{0{,}86 - 1{,}3}$$

$$= \frac{0{,}01}{0{,}47} = 0{,}021$$ is the value of w_1

$$\frac{1{,}6}{3} = 0{,}53 = \bar{x}$$

$$0{,}66 = \bar{y}$$

$$w_0 = \bar{y} - w_1 x \rightarrow 0.66 - 0.21 \cdot 0{,}53 = 0.648$$

$$\bar{y} = 0.648 + 0{,}021 x$$