Introducción a la Teoría de Grafos

Juan Gutierrez
juangutierrez288@gmail.com

Febrero de 2012

1. Grafo

Definición 1.1. Un grafo es un par ordenado $G = (V, E)$,donde:

- V es un conjunto de vértices o nodos ($n = |V_G|$)
- E es un conjunto de aristas o arcos, que relacionan estos nodos ($m = |E_G|$)

Ejemplo (Figura 1.1):
$V = \{a, b, c, d, e\}$
$E = \{\{a, b\}, \{b, c\}, \{a, c\}, \{c, d\}\}$, hacemos la simplifiación: $E = \{ab, bc, ac, cd\}$

En este material, no se considerarán los siguientes grafos:

1. $\{\{a, b\}, \{b, a\}\}$ (Figura 1.2)
2. $\{\{a, a\}\}$ (Figura 1.3)

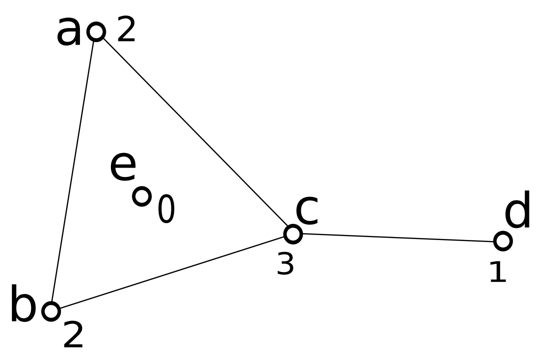

Figura 1.1: Grafo Dirigido

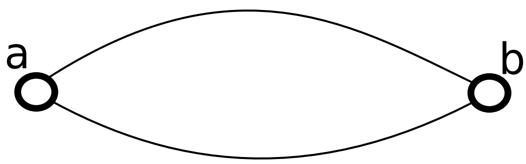

Figura 1.2: Grafo ab

Figura 1.3: Grafo aa

Definición 1.2. Grado de un vértice (d)
$d(v)$: número de vértices adyacentes al vértice v

1. Grado mínimo: $\delta(G) = 0$
2. Grado máximo: $\Delta(G) = 3$

1.1. Representación matricial

1. Matriz de Incidencia
2. Matriz de Adyacencia

1.2. Grafos Famosos

1. **Regular:** Cuando $\delta(G) = \Delta(G)$
2. **Completo:** Donde $E_G = V_G^{(2)}$
   donde: $V_G^{(2)} = \{uv/u, v \in V_G\}$
   Notación: K_n es un grafo completo de n vértices.
   $$E_{K_n} = \frac{n(n-1)}{2}$$
3. **Bipartido:**
4. **Bipartido Completo:**
5. **Estrella:**
6. **Grafo de las Aristas:**

Teorema 1.1. *En un grafo G, la suma de los grados de todos los vértices es igual al doble del número de aristas.*

$$\sum_{v \in V_G}^{n} d(v) = 2|E_G|$$

Demostración. Por inducción en $|E_G|$
Base: $|E_G| = 0$

$$\sum_{v \in V_G}^{n} d(v) = \sum_{v \in V_G}^{n} 0 = 0 = 2|E_G|$$

Paso de inducción $|E_G| > 0$, escoja $uv \in E_G$, defina:

$$H = (V_G, E_G - \{uv\})$$

Por hipótesis inductiva:

$$\sum_{v \in V_H}^{n} d(v) = 2|E_H| = 2(|E_G| - 1) = 2|E_G| - 2$$

Paso:

$$\sum_{v \in V_G}^{n} d(v) = \sum_{v \in V_H}^{n} d(v) + 2 = |E_G| - 2 + 2 = 2|E_G|$$

□

Teorema 1.2. *Todo grafo tiene un número par de vértices de grado impar.*

Demostración. Por contradicción, suponga que existe un número impar de vertices de grado impar.
Entonces:

$$\sum_{v \in V_G}^{n} d(v) = \sum_{v \in V_G \ |d(v) \ es \ par} d(v) + \sum_{v \in V_G \ |d(v) \ es \ impar} d(v)$$

$$\sum_{v \in V_G}^{n} d(v) = Par + Impar = Impar$$

Contradición:

$$\sum_{v \in V_G}^{n} d(v) = 2|E_G|$$

□

Teorema 1.3. *En un grafo G existe por lo menos dos vértices con el mismo grado.*

Demostración. Sea $V = \{1, 2, 3, ...n\}$, entonces: $0 \leq d(v) \leq n - 1$

Suponga que todos los vértices tienen grados distintos, entonces existe un vertice de grado 0 y un vértice de grado $n - 1$.

Contradición: El vértice de grado $n - 1$ tendría que estar unido al vertice de grado 0. □

1.3. Unión, Intersección y Subgrafo

- **Unión:**
$$G \cup H = (V_G \cup V_H, E_G \cup E_H)$$
- **Intersección:**
$$G \cap H = (V_G \cap V_H, E_G \cap E_H)$$
- **Subgrafo:** G es un subgrafo de H, si $V_G \subseteq V_H$ y $V_H \subseteq E_H$

1.4. Caminos

Es una sucesión finita en la que aparecen vértices y aristas alternadamente. No es camino si se repiten vértices. Se define como la longitud de un camino al número de aristas del mismo.

1.4.1. Camino máximo

Un camino C de G es máximo si no existe un camino C' tal que $|C| < |C'|$.

1.4.2. Camino maximal

Un camino C es maximal si no existe C' tal que $C \subset C'$.

Teorema 1.4. *Para todo grafo G tal que $d(v) \geq k$ $\forall V \in V_G$, existe un camino de longitud mayor o igual a k.*

Demostración. Tome camino maximal, sea v un extremo de este camino, como $d(v) \geq k$ y C es maximal, entonces v es adyacente a por lo menos k vértices del camino y por tanto $|C| \geq k$.

□

1.5. Circuito

Es un camino cerrado, donde los únicos vértices que se repetidos son el primero y el último.

Teorema 1.5. *Si $\delta(G) \geq 2$, entonces G tiene circuito.*

Demostración. Tome un camino maximal C. Sea v un extremo de este camino, como $d(v) \geq 2$ y C es un maximal, existe $u \neq v$, tal que $uv \in E_G$ y por tanto un circuito C'. □

2. Cortes

Dado un conjunto $X \subset V_G$, decimos que $\partial(X) = \{uv/u \in x, v \in V_G \setminus x\}$ es el corte asociado a x.

Si $x = V_G$, entoces $\partial(x) = \phi$.

Definición 2.1. Una arista a es un "puente", si $\{a\}$ es un corte.

Teorema 2.1. *Si todos los vértices del grafo G tiene grado par, entonces G no tiene puentes.*

Demostración. Asumimos que existe un puente a, sea $H = (V_G, E_G - \{a\})$. Sea H_1 y H_2 los componentes de H. En H_1 existe un solo vértice de grado impar. Contradicción por que :

$$\sum_{v \in V_{H_1}}^{n} d(v) = 2|E_H|$$

□

Teorema 2.2. *En todo grafo G tal que $|V_G| \geq 2$, existe $X \subseteq V_G$ tal que $\partial(X) \geq \frac{1}{2}|E_G|$.*

3. Conexidad

Definición 3.1. Un grafo es conexo si $\forall x, y \in V_G$ existe al menos un camino de x a y.

Decimos que x está ligado a y si existe un camino de x a y.

Teorema 3.1. *En un grafo G conexo, se cumple:*

1. $m(G) \geq n(G) - 1$

2. $\exists v \in V_G$ *tal que* $G - v$ *es conexo.*

Demostración. 1. El grafo conexo más simple es un camino de n vértices, el cual tiene $n - 1$ aristas.

2. Podemos tomar cualquier vértice v que sea extremo en un camino maximal del grafo. Por definición, todas sus aristas apuntan a otros vértices del camino, los cuales están unidos por el mismo camino, por tanto, eliminando v no afectamos la conexidad de éstos.

□

Teorema 3.2. *Sea* G *un grafo* (U, W)*-bipartido, tal que* $\delta(G) > k/2$ *entonces* G *es conexo.* $k = max(|U|, |W|)$

Teorema 3.3. *Sean* P^* *y* Q^* *dos caminos máximos en un grafo conexto* G*, entonces* $E_{P^*} \cap E_{Q^*} \neq \emptyset$

Definición 3.2. Un subgrafo conexo H de un grafo G es maximal (con relación a la conexidad) si no existe un subgrafo conexo H' tal que $H \subset H' \subseteq G$

Definición 3.3. Un componente de un grafo G es cualquier subgrafo maximal de G.

Notación: $C(G)$ es el número de componentes de G.

Teorema 3.4. *En todo grafo* G*, se cumple que* $m(G) \geq n(G) - C(G)$*.*

Demostración. Si G es conexo, obtenemos $m(G) \geq n(G) - 1$, que es el teorema 3.1.

Si G no es conexo, aplicamos el teorema 3.1 en cada componente de G:

$$m(G_i) \geq n(G_i) - 1$$

Aplicando sumatoria a ambos lados:

$$\sum_i m(G_i) \geq \sum_i (n(G_i) - 1)$$

$$\sum_i m(G_i) \geq \sum_i n(G_i) - \sum_i 1$$
$$m(G) \geq n(G) - C(G)$$

□

Ejercicios

Diseñe los siguientes algoritmos:

1. **Algoritmo:** Entrada: G y $v \in V_G$

   Salida: Componente de G que contiene a v

2. **Algoritmo:** Entrada: G

   Salida: $C(G)$

4. Bicolorabilidad

Definición 4.1. Un grafo G es bicolorable si existe una partición (U, W) tal que toda arista de G tiene una punta en U y la otra punta en W.

También se dice que el grafo es potencialmente bipartible.

Teorema 4.1. *Un grafo es bicolorable si y sólo si no hay un circuito impar en él.*

Demostración. Probaremos primero que si existe un circuito impar en el grafo, entonces éste no es bicolorable. Asignamos a cualquier vértice del circuito un color 1 y recorriendo el mismo en sentido antihorario intercalamos con el color 2. El último vértice en pintarse será de color 1 y, como por definición de circuito es adyancente al primero, el grafo no es bicolorable.

Para probar que si un grafo es bicolorable no existe un circuito impar en él, usaremos inducción en el número de aristas. □