

T.C.
MİMAR SİNAN GÜZEL SANATLAR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**DUAL HİPERSİMPLEKSLERİN TORİK H-SAYILARI VE CHOW-BETTİ
SAYILARI İLE DOĞRU PARÇALARIYLA MINKOWSKI
TOPLAMLARININ EHRHART POLİNOMLARI**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Nurdan ÜNLÜ

Anabilim Dalı: Matematik Anabilim Dalı

Programı: Matematik Programı

Tez Danışmanı: Dr. Öğr. Üyesi. Özer ÖZTÜRK
İkinci Danışman: Dr. Öğr. Üyesi. Zafeirakis ZAFEIRAKOPOULOS

OCAK 2019

T.C.
MİMAR SİNAN GÜZEL SANATLAR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**DUAL HİPERSİMPLEKSLERİN TORİK H-SAYILARI VE CHOW-BETTİ
SAYILARI İLE DOĞRU PARÇALARIYLA MINKOWSKI
TOPLAMLARININ EHRHART POLİNOMLARI**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Nurdan ÜNLÜ

Matematik Anabilim Dalı

Matematik Programı

Tez Danışmanı: Dr. Öğr. Üyesi. Özer ÖZTÜRK
İkinci Danışman: Dr. Öğr. Üyesi. Zafeirakis ZAFEIRAKOPOULOS

OCAK 2019

Nurdan Ünlü tarafından hazırlanan DUAL HİPERSIMPLEKSİN
TORİK H-VEKTÖRÜ VE CHOW-BETTİ SAYILARI İLE
MINKOWSKI TOPLAMLARININ EHRHART POLİNOMLARI adlı
bu tezin yüksek lisans tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.

Dr. Öğr. Üyesi. Özer Öztürk Dr. Öğr. Üyesi. Zafeirakis Zafeirakopoulos

Tez Danışmanı

Tez Eş Danışmanı

Bu çalışma jürimiz tarafından Matematik Anabilim dalında Yüksek
Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Jüri Başkanı : Dr. Öğr. Üyesi. Özer Öztürk

Üye : Dr. Öğr. Üyesi. Mustafa Topkara

Üye : Dr. Öğr. Üyesi. Ayesha Asloob Qureshi

Üye : Doç. Dr. Özgür Martin

Üye : Doç. Dr. Ayhan Günaydın

Bu tez, Mimar Sinan Güzel Sanatlar Üniversitesi Fen Bilimleri
Enstitüsü tez yazım kurallarına uygundur.

Mimar Sinan Güzel Sanatlar Üniversitesi Lisansüstü Tez Yazım Kılavuzuna uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel etik kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Başkalarının eserlerinden yararlanması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- Atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Ücret karşılığı başka kişilere yazdırmadığımı (dikte etme dışında), uygulamalarımı yaptırmadığımı,
- Bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

**DUAL HİPERSİMPLEKSLERİN TORİK H-SAYILARI VE CHOW-BETTİ
SAYILARI İLE DOĞRU PARÇALARIYLA MINKOWSKI
TOPLAMLARININ EHRHART POLİNOMLARI**

ÖZET

Bu tezde, ilk olarak torik varyeteleri ele aldık. Torik varyetelerin kombinatorik yapıları sayesinde, dual hipersimpleksin torik h-sayılarının ve Chow-Betti sayılarının kombinatorik araçlarla nasıl hesaplandığını inceledik. Bu sayılar için kolay hesaplama yöntemleri verdik. Dual hipersimpleksin torik h-sayılarını hesaplamak için Polymake kullandık. Daha sonra, herhangi bir latis politop ve bir latis doğru parçasının Minkowski toplamının Ehrhart polinomu ile bu latis politopun ve latis doğru parçasının Ehrhart polinomları arasındaki ilişkiyi inceledik. Bu ilişki için, ortogonal uzaylardaki politoplар ve deliksiz ikililer durumlarını ele aldık. Bu iki farklı durum için, iki sonuç elde ettik. Minkowski toplamının ve politoplарın Ehrhart polinomlarını hesaplarken SageMath kullandık. Bu sayıları ve polinomları hesaplamak için kullandığımız kodları belirttik.

Anahtar kelimeler: Torik varyeteler, Torik h-vektörü(sayıları), Chow-Betti Sayıları, Ehrhart Polinomları, Minkowski Toplamları

**CHOW-BETTI NUMBERS AND TORİC H-NUMBERS OF DUAL
HYPERSIMPLICES AND EHRHART POLYNOMİALS OF MİNKOWSKİ
SUMS WITH SEGMENTS**

ABSTRACT

In this thesis, we first studied toric varieties. Thanks to the combinatorial structure of the toric varieties, we examined how the toric h-numbers of dual hypersimplices and Chow-Betti numbers are calculated by combinatoric tools. We gave calculation methods for these numbers. We used Polymake to calculate the toric h-numbers of dual hypersimplices. Then, we also studied the relation between the Ehrhart polynomials of a lattice polytope and a lattice line segmented their Minkowski sum. For this relation, we examined the cases of polytopes in orthogonal spaces and pairs without holes. For these two cases, we obtained two different formulas. We used SageMath to calculate the Ehrhart polynomials of the Minkowski sum and the lattice polytopes. We provide the code we used to calculate these numbers and polynomials.

Keywords: Toric Varieties, Toric h-numbers, Chow-Betti Numbers, Ehrhart Polynomial, Minkowski Sum

ÖNSÖZ

Öncelikle, danıştığım her konuda yol göstererek bana en büyük desteği sunan değerli hocalarım Özer Öztürk, Mustafa Topkara ve Zafeirakis Zafeirakopoulos'a teşekkür etmek istiyorum. Bana karşı her zaman anlayışlı ve yardımsever davranışım, sadece bu tezin konuları ile sınırlı kalmayıp farklı alanlarda da çalışarak kendimi geliştirmeme katkı sağladığınız için minnettarım ve bana kattığınız her şey için sonsuz teşekkürlerimi sunarım. Sizin gibi heyecanıyla, matematik sevgimi daha da ileriye taşıyan danışmanlarım olduğu için kendimi çok şanslı hissediyorum.

Başta değerli hocalarım Ayşe Berkman, Kivanç Ersoy ve Sefa Feza Arslan olmak üzere tüm bölüm hocalarına da destekleri, anlayışları ve bana kattıkları tüm bilgiler için teşekkürlerimi sunarım.

Maddi ve manevi olarak destekleyerek hep en mutlu olduğum şeyi yapabilme şansını sunan anneme ve babama, mutluluk ve motive kaynaklarım başta Nurcan Ünlü, Safiye Dikmen, Ahmet Berkay Kebeci ve Nurdan Acar olmak üzere, tüm arkadaşlarımı sevgi ve desteklerini hep hissettirdikleri ve bana karşı her zaman fedakar davranışları için çok teşekkür ederim.

Ve son olarak yürütücülüğünü Zafeirakis Zafeirakopoulos'un yaptığı ve Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu (TÜBİTAK) 3501 Programı tarafından desteklenen 117F100 numaralı proje kapsamında burs veren TÜBİTAK'a içtenlikle teşekkürlerimi sunarım.

Nurdan Ünlü

İçindekiler

Tablo Listesi	viii
Şekil Listesi	x
1 GİRİŞ	1
I	7
2 TORİK VARYETELER	8
2.1 Koniler	8
2.2 Monoidler	11
2.3 Afin Torik Varyeteler	12
2.4 Torik Varyeteler	15
2.5 Torus Etkisi ve Yörüngeler	20
3 DUAL HİPERSİMPLEKSİN TORİK H-VEKTÖRÜ	27
3.1 Hipersimpleks	28
3.2 Hipersimpleksin Torik H-Vektörleri	44
3.3 Dual Hipersimpleks	53
3.4 Dual Hipersimpleksin Torik H-Vektörleri	54
4 CHOW-BETTİ SAYILARI	68
4.1 Chow (Kohomoloji) Halkası	68
4.2 Chow Betti Sayıları	73
5 TORİK H-VEKTÖRÜ VE CHOW-BETTİ SAYILARI	77
II	78
6 MINKOWSKI TOPLAMLARININ EHRHART POLİNOMLARI	79
6.1 Ehrhart Polinomları	79
6.2 Minkowski Toplamları	81
6.3 Doğru Parçalarıyla Minkowski Toplamlarının Ehrhart Polinomları	82
6.3.1 Ortogonal Uzaylardaki Politoplar	83
6.3.2 Deliksiz İkililer	85
7 SONUÇ	95

Tablo Listesi

3.1	$\Delta(2, 4)$ için I ve J kümelerinin eleman sayıları	28
3.2	i.durumdaki $\Delta_{2,4}$ 'ün yüzleri	30
3.3	ii.durumdaki $\Delta_{2,4}$ 'ün yüzleri	30
3.4	iii.durumdaki $\Delta_{2,4}$ 'ün yüzleri	31
3.5	iv.durumdaki $\Delta_{2,4}$ 'ün yüzleri	31
3.6	$\Delta_{2,4}$ 'ün yüz sayıları	31
3.7	$\Delta(2, 5)$ için I ve J kümelerinin eleman sayıları	32
3.8	i.durumdaki $\Delta_{2,5}$ 'in yüzleri	35
3.9	ii.durumdaki $\Delta_{2,5}$ 'in yüzleri	37
3.10	iii.durumdaki $\Delta_{2,5}$ 'in yüzleri	38
3.11	iv.durumdaki $\Delta_{2,5}$ 'in yüzleri	39
3.12	v.durumdaki $\Delta_{2,5}$ 'in yüzleri	39
3.13	vi.durumdaki $\Delta_{2,5}$ 'in yüzleri	40
3.14	$\Delta_{2,5}$ 'in yüz sayıları	40
3.15	$\Delta(k, n)$ 'nin yüz sayıları	42
3.16	$\Delta(k, n)$ 'nin Torik h -vektörü	53
3.17	$\Delta^*(k, n)$ 'nin yüz sayıları	54
3.18	$\Delta^*(k, n)$ 'nin Torik h -vektörü	67
4.1	$\Delta(k, n)$ 'nin normal fanının Chow-Betti sayıları	76
5.1	$\Delta^*(k, n)$ 'nin Torik h -vektörü ve $\Delta(k, n)$ 'nin normal fanının Chow-Betti sayıları	77
6.1	Dörtgen için Ehrhart polinomları	94

Şekil Listesi

2.1	$\text{koni}(e_2, 2e_1 - e_2)$	9
2.2	$H_{(e_2)}$ yarım uzayı	9
2.3	$H_{(2e_1 - e_2)}$ yarım uzayı	10
2.4	$\text{koni}(e_2, 2e_1 - e_2)$ 'nin dualı	10
2.5	$\text{koni}(e_1, e_1 + e_2)$	10
2.6	$\text{koni}(e_1, e_1 + e_2)$ 'nin dualı	10
2.7	$\{0\}$ 'ın dualı	12
2.8	$S_{\{0\}}$ monoidi	12
2.9	$\text{koni}(e_2, 2e_1 - e_2)$	14
2.10	$S_{\text{koni}(e_2, 2e_1 - e_2)}$ monoidi	14
2.11	$\text{koni}(e_1, e_2)$, $\text{koni}(e_2, -e_1 - e_2)$ ve $\text{koni}(e_1, -e_1 - e_2)$	16
2.12	$\text{koni}(e_1, e_2)$, $\text{koni}(e_2, -e_1 - e_2)$ ve $\text{koni}(e_1, -e_1 - e_2)$ 'nin dualleri	16
2.13	$\text{koni}(e_1, e_2)$	17
2.14	$\text{koni}(e_1, e_2)$ 'nin dualı	17
2.15	$S_{\text{koni}(e_2)}$	17
2.16	$\text{koni}(e_2, -e_1 - e_2)$	18
2.17	$\text{koni}(e_2, -e_1 - e_2)$ 'nin dualı	18
2.18	\mathbb{CP}^2 'nin fan yapısı	21
2.19	$\text{koni}(e_1, e_2)$, $\text{koni}(e_1, e_2)$ ve $\text{koni}(e_1, e_2)$ 'nin dualı	22
2.20	Δ 'nın yüz diyagramı ve \mathbb{CP}^2 'nin yörüngeleri diyagramı	25
2.21	\mathbb{CP}^2 'nin yörüngeleri ve yörüngelere karşılık gelen koniler	26
3.1	Oktahedron	43
3.2	Oktahedronun yüz diyagramı	44
3.3	Oktahedronun yüz latisi	44
3.4	Eulerian poset	45
3.5	Eulerian posetin alt posetleri	46
3.6	$P(\Delta_{2,4})$	48
3.7	$P(\Delta_{2,4})$ 'ün alt latisleri	48
3.8	$P(\Delta_{2,5})$ 'in alt latisleri	50
4.1	$\text{konv}\{(0, 0), (1, 0), (0, 1)\}$	68
4.2	$\text{konv}\{(0, 0), (1, 0), (0, 1)\}$ 'in yüzlerinin normal konileri	69
4.3	$\text{konv}\{(0, 0), (1, 0), (0, 1)\}$ 'in normal fani	69
4.4	$\Delta_{2,4}$	70
4.5	$\Delta_{2,4}$ 'ün bir 2-boyutlu yüzü ve onun normal vektörü	70
4.6	$\Delta_{2,4}$ 'ün bir 2-boyutlu yüzünün normal konisi	70
4.7	$\text{koni}(e_2, e_1 - e_2)$	72
6.1	Kare üzerindeki koni	80

6.2	Kare ve üçgenin Minkowski toplamı	81
6.3	Üçgen ve latis doğru parçasının Minkowski toplamı	83
6.4	Üçgen ve $1q$ kadar ötelenmiş üçgen	83
6.5	Üçgen ve latis doğru parçası ikilisinin deliği	83
6.6	Karenin kopyaları	85
6.7	Dikdörtgenin kopyaları	86
6.8	Dikdörtgen ile kopyalarının kesişimleri	86
6.9	Paralelkenarın kopyaları	88
6.10	Dikdörtgen ve kopyaları	92
6.11	Dikdörtgenlerin Minkowski toplamları	92
6.12	Dikdörtgen ve latis doğru parçasının Minkowski toplamının parçaları	92
6.13	Dikdörtgen ve latis doğru parçasının Minkowski toplamı	92
6.14	Dörtgen ve latis doğru parçasının Minkowski toplamı	93

1. GİRİŞ

Bu tezde ilk amacımız dual hipersimpleksin torik h-sayıları ve hipersimpleksin normal fanının Chow Betti sayılarını inceleyerek aralarındaki benzerliği anlayabilmektir. Bu benzerlikten [2]'de bahsedilmiştir.

Bu tezin ikinci bölümünde, torik varyeteleri ele alacağız. Torik varyete, bir yoğun açık küme olarak cebirsel torus $\mathbb{T} = (\mathbb{C}^*)^n$ 'yi içeren ve üzerinde yoğun torus etkisi olan bir cebirsel varyetedir. Kombinatorik bir nesne olan bir fana karşılık gelen torik varyete, torus etkisinin fanı oluşturan konilerin yörüngelerinin kapanışlarının kesişim ilişkisi incelendiğinde kombinatorik olarak da tanımlanabilmektedir. Bu kombinatorik yapı sayesinde torik varyetelerin pek çok özelliği kombinatorik yöntemlerle anlaşılmıştır. Bu tezde de kombinatorik araçlarla torik h-vektörlerinin ve Chow-Betti sayılarının nasıl hesaplandığını inceliyoruz.

Burada bahsettiğimiz koni, \mathbb{R}^n 'deki sonlu sayıda v_1, \dots, v_r vektörlerinin ürettiği,

$$\{\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_r v_r \mid \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r \in \mathbb{R}_{\geq 0}\}$$

kümeleridir. Bir fan ise aşağıdaki özelliklerini sağlayan orijinden geçen herhangi bir doğruya içermeyen, çokyüzlü, konveks, latis konilerin sonlu bir birleşimidir:

- Fanın bir konisinin her yüzü, fanın da bir konisidir,
- σ ve σ' , fanın konileri ise $\sigma \cap \sigma'$, σ ve σ' 'in ortak yüzüdür.

Fan yapısı ile fanı oluşturan konilerin afin torik varyeteleri arasında, konilerin kesişen yüzleri boyunca yapışma dönüşümleri elde ederiz. Torik varyeteler, afin torik varyetelerin bu yapıştırmalar ile birleşimidir.

Bu bölümde, bir koniden başlayarak bu koniye karşılık gelen afin torik varyeteyi inşa etmek için, aşağıdaki sıralamayı izleyeceğiz:

$$\sigma \longrightarrow \check{\sigma} \longrightarrow S_\sigma \longrightarrow R_\sigma \longrightarrow X_\sigma$$

Burada σ , \mathbb{R}^n 'deki sonlu sayıda v_1, \dots, v_r 'den oluşan bir S kümesi için, S 'nin ürettiği koni olan

$$\sigma = \text{koni}(S) = \{\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_r v_r \mid \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r \in \mathbb{R}_{\geq 0}\}$$

kümeleridir.

$\check{\sigma}$ konisi ise $(\mathbb{R}^n)^*$ uzayı \mathbb{R}^n 'nin dual uzayı olmak üzere, σ 'nın duali olan

$$\check{\sigma} = \{u \in (\mathbb{R}^n)^* : \langle v, u \rangle \geq 0 \text{ her } v \in S\}$$

kümeleridir.

M dual latis olmak üzere,

$$S_\sigma := \check{\sigma} \cap M$$

bir monoiddir.

Sonlu üreteçli bir monomial \mathbb{C} -cebir olan R_σ halkası, S_σ monoidinin üreteçleri arasındaki ilişkilerden yola çıkarak

$$\{f \in \mathbb{C}[z, z^{-1}] : \text{supp}(f) \subset \check{\sigma} \cap M\}$$

olarak tanımlanır [3].

S_σ monoidinin üreteçleri arasındaki ilişki bir binomial ilişkiye karşılık gelir. Ve bu ilişki I_σ idealini üretir. Değişmeli sonlu üreteçli \mathbb{C} -cebir R için, $\text{Spec}(R)$, \mathbb{C}^k 'deki $V(I)$ altvaryetesi ile tanımlanabildiğinden, σ konisine karşılık gelen afin torik varyete

$$X_\sigma = \text{Spec}(R_\sigma) = V(I_\sigma)' \text{dir.}$$

Torik varyetelere örnek olarak kompleks projektif düzlemin torik varyete yapısını ayrıntılı biçimde ele alacağız.

Bu bölümde, son olarak bir fanın kombinatorik yapısıyla torusun varyete üzerindeki etkisini karşılaştırarak grup etkisinin yörüngelerle ilişkisini açıklayacağız. Ve yine önek olarak kompleks projektif düzlemi inceleyeceğiz.

Üçüncü bölümde, dual hipersimplekslerin torik h-sayılarını ele alacağız. Bir hipersimpleks, \mathbb{R}^n 'de k tane koordinatı 1, diğer $(n-k)$ -tane koordinatı 0 olan vektörlerin konveks zarfidir¹.

Hipersimpleksin h-sayıları, hipersimpleksin yüz sayılarına bağlı olduğundan yüz sayılarının hesaplanması da yer vereceğiz. $I, J \subset [n] := \{1, 2, \dots, n\}$ olsun. $I \cap J = \emptyset$, $|I| < k$ ve $|J| < n - k$ olmak üzere, $\Delta(k, n)$ 'nin pozitif boyutlu yüzleri (I, J) eşleşmeleri ile isimlendirilir. $1 \leq i \leq n$ olmak üzere, μ_i .koordinatı 1 diğer koordinatları 0 olan $k - |I|$ tane $e_{\mu_1}, e_{\mu_2}, \dots, e_{\mu_{k-|I|}}$ vektörü için, $\Delta(k, n)$ 'nin (I, J) adlı yüzü

$$\mathcal{F}_{I,J} = \text{konv} \left\{ \left(\sum_{i \in I} e_i \right) + e_{\mu_1} + \dots + e_{\mu_{k-|I|}} : \{e_{\mu_1}, \dots, e_{\mu_{k-|I|}}\} \in \binom{\{1, 2, \dots, n\} - (I \cup J)}{k-|I|} \right\}$$

olarak tanımlanır [6]. Bu tanımla $\Delta(2, 4)$ 'ün ve $\Delta(2, 5)$ 'in yüzlerinin sayılarını hesaplayacağız. Hipersimplekslerin yüzlerinin sayılarını, vereceğimiz kodlarla, Sage Math [10] ve Polymake [8] ile nasıl hesaplanacağını göstereceğiz.

Bir hipersimpleksin torik h-vektörü; torik h-polinomu ve torik g-polinomlarının katsayıları ile ilgilidir. Bu polinomlar, bir Eulerian posetin torik h-polinomu ve torik g-polinomu olarak tanımlanacağı için, öncelikle Eulerian posetlerden bahsedeceğiz. Sonlu bir derecelendirilmiş posetin her aşikar olmayan aralığı tek ve çift ranklı aynı sayıda elemana sahipse bu posete Eulerian poset denir [16]. Eulerian poset L ile gösterilir.

¹convex hull

$h(L, x)$ ve $g(L, x)$ polinomları L üzerinde tümevarımsal olarak;

1. $h(\emptyset, x) = g(\emptyset, x) = 1$

2. $\text{rank}(L) > 0$ için,

$$h(L, x) = \sum_{p \in L - \{\hat{1}\}}^r g([\hat{0}, p], x)(x - 1)^{\text{rank}[\hat{1}] - \text{rank}(p) - 1}$$

3. $\text{rank}(L) > 0$ için, $d = \text{rank}(L) - 1$ ve $m = \lfloor d/2 \rfloor$ olmak üzere, $h(L, x) = h_0 + h_1 x^1 + \dots + h_d x^d$ polinomun katsayıları ile elde edilen

$$g(L, x) = h_0 + (h_1 - h_0)x + (h_2 - h_1)x^2 + \dots + (h_m - h_{m-1})x^m$$

şeklinde tanımlanır.

$$h(L, x) = \sum_{p \in L - \{\hat{1}\}}^r g([\hat{0}, p], x)(x - 1)^{\text{rank}[\hat{1}] - \text{rank}(p) - 1}$$

polinomu, L 'nin torik h-polinomudur [5]. $\text{rank}(L) > 0$ için, $d = \text{rank}(L) - 1$ ve $m = \lfloor d/2 \rfloor$ olmak üzere,

$$h(L, x) = h_0 + h_1 x^1 + \dots + h_d x^d$$

polinomun katsayıları ile elde edilen

$$g(L, x) = h_0 + (h_1 - h_0)x + (h_2 - h_1)x^2 + \dots + (h_m - h_{m-1})x^m$$

polinomu ise L 'nin torik g-polinomudur [5].

Dual hipersimpleksin torik h-sayılarını hesaplamadan önce, [2]'den farklı olarak, sırasıyla bir Eulerian posetin torik h-vektörünü ve bir politopun torik h-vektörünü de inceleyerek örnekler vereceğiz.

Bir politopun torik h-vektörü, bu politopun yüz latisinin torik h-vektörüdür. Bu yüz latisi bir Eulerian posettir. $\Delta(k, n)$ hipersimplekslerinin torik h-vektörünü hesaplarken, $h(L, x)$ ve $g(L, x)$ polinomlarındaki L Eulerian poseti; $\Delta(k, n)$ hipersimplekslerinin yüz latisi olur. Hipersimplekslerin torik h-vektörlerini, vereceğimiz kodlarla, Polymake [8]'de nasıl hesaplanacağını göstereceğiz. Buradaki amacımız, hipersimplekslerin torik h-vektörleri yardımcı ile dual hipersimplekslerin torik h-vektörlerini bulmaktır.

Bir dual hipersimpleks, hipersimpleksin herhangi bir r-yüzünün sayısı kadar $(n-r-2)$ -yüzden oluşan bir politoptur. Bu nedenle, bir $\Delta^*(k, n)$ dual hipersimpleksinin yüz sayılarını, $\Delta(k, n)$ hipersimpleksinin yüz sayılarından kolayca elde edebiliriz.

Bir dual hipersimpleksin torik h-vektörü, dual hipersimpleksin yüz latisinin torik h-vektöridür. Dual hipersimpleksin yüz latisine L diyelim.

$$h(L, x) = \sum_{p \in L - \{\hat{1}\}}^r g([\hat{0}, p], x) (x - 1)^{\text{rank}(\hat{1}) - \text{rank}(p) - 1}$$

polinomu, L 'nin torik h-polinomudur. $\text{rank}(L) > 0$ için, $d = \text{rank}(L) - 1$ ve $m = \lfloor d/2 \rfloor$ olmak üzere,

$$h(L, x) = h_0 + h_1 x^1 + \dots + h_d x^d$$

polinomun katsayıları ile elde edilen

$$g(L, x) = h_0 + (h_1 - h_0)x + (h_2 - h_1)x^2 + \dots + (h_m - h_{m-1})x^m$$

polinomu ise L 'nin torik g-polinomudur. Dual hipersimplekslerin torik h-sayıları, bu polinomlar ile elde edeceğimiz

$$h(L, x) = h_0 + h_1 x^1 + \dots + h_d x^d$$

torik h-polinomunun katsayılarının dizisi olan

$$(h_0, h_1, \dots, h_d)$$

vektörüdür. Bu bölümde dual hipersimplekslerin torik h-sayılarını Polymake [8] kullanarak da hesaplayacağız.

P d -boyutlu bir politop olsun. P 'nin $d - 2$ ve $d - 2$ 'den küçük boyutlu yüzleri simpleks ise P çeyrek-simpleksel bir politoptur. $0 \leq k \leq n$ için, $\Delta^*(k, n)$ çeyrek-simplekseldir. $\Delta^*(k, n)$ çeyrek-simpleksel olduğundan, $\Delta^*(k, n)$ 'nin torik h-vektörünün ilk yarısı, $\Delta^*(k, n)$ 'nin h-vektörünün ilk yarısına eşittir [2]. Bu durumda, $\Delta^*(k, n)$ 'nin torik h-vektörlerini, $\Delta^*(k, n)$ 'nin h-vektörlerinden kolayca elde edebiliriz.

Dual hipersimplekslerin torik h-sayılarını bulmak için, ilk olarak [17]'de, daha sonra [2]'de verilmiş aşağıdaki kombinatorik hesaplama formülünü de kullanacağımız:

$1 \leq k \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ için, $\Delta^*(k, n)$ 'nin torik h-vektörü,

$$h_r(\Delta_{k,n}^*) = \begin{cases} \sum_{i=0}^r \binom{n}{i} & 1 \leq r \leq k - 1 \\ \sum_{i=0}^{k-1} \binom{n}{i} & k \leq r \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \end{cases}$$

olarak tanımlanır.

Bu bölümde dual hipersimplekslerin torik h-sayılarını Polymake [8] kullanarak da hesaplayacağız.

Dördüncü bölümde, bir hipersimpleksin normal fanının Chow-Betti sayılarından bahsedeceğiz. $\Delta_{k,n}$ bir hipersimpleks olmak üzere, $(n-1)$ -boyutlu kompleks projektif torik varyete $X_{k,n}$, $\Delta_{k,n}$ 'nin normal fanına karşılık gelen torik varyetedir. Bir Δ fanı için, $\{0\}$ 'ı içeren ve yüzleri ile Δ 'yı üreten bir politop varsa bu fan politopsal² fandır ([3], 21. sayfa). Bir fan politopsaldır ancak ve ancak bu fana karşılık gelen torik varyete projektiftir ([3], 21. sayfa).

Chow-Betti sayıları kompleks projektif torik varyetenin Chow kohomoloji halkası ile ilgilidir. Bu bölümde, Chow kohomoloji halkasının ilk olarak genel bir tanımını, daha sonra [2]'deki bir hesaplamasını vereceğiz.

Sonra bu sayıların [2]'deki bir hesaplamasını vereceğiz.

Beşinci bölümde, önceki bölümlerde bulduğumuz dual hipersimpleksin torik h-vektörü ve Chow-Betti sayılarının arasındaki benzerliği göstermek için [2]'deki gibi bir tablo vereceğiz.

Bu tezin ikinci kısmındaki amacımız, herhangi bir latis politop ve bir latis doğru parçasının Minkowski toplamının Ehrhart polinomu ile bu latis politopun ve latis doğru parçasının Ehrhart polinomları arasında bir ilişki bulmaktır. Bu latis doğru parçasının köşelerinden birinin orijin olduğunu varsayıcağız. Bir latis politop P için, P 'nin Ehrhart polinomu, P politopunun t-genleşmesindeki latis noktalarını sayan

$$L_P(t) = |tP \cap \mathbb{Z}^d|$$

fonksiyonudur. Bu polinomları hesaplamak için, SageMath [10]'u kullanacağız. P latis politopu ve S latis doğru parçasının Minkowski toplamı,

$$P + S = \{p + s : p \in P, s \in S\}$$

'dir. P bir latis politop ise, $L_P(t)$ 'nin derecesi d olan bir polinom olduğunu Ehrhart ispatlamıştır. $L_P(t)$, $L_S(t)$ ve $L_M(t)$ Ehrhart polinomları arasındaki ilişkiyi P ve M 'nin farklı durumları için incelerken, S politopunu her zaman bir latis doğru parçası olarak alacağız. Bu farklı durumlardan en basit, ortogonal uzaylardaki politoplardur. Ortogonal uzaylardaki herhangi bir latis politop P ve bir latis doğru parçası S için,

$$L_M(t) = L_P(t) L_S(t)$$

formülünü oluşturacağız. Bu formül, S 'nin her noktası için, P 'nin tekrarsız ve M 'deki tüm latis noktalarını içерerek bir kopyasını almak anlamına gelir. Sonra, ortogonal olmayan uzaylardaki herhangi bir latis politop P ve bir latis doğru parçası S için, bu formül geçerli olmadıkından, bir

$$\delta = \dim(M) - \dim(P)$$

sayısı ile bu formülü geliştireceğiz. Buradaki amacımız, ortogonal olmayan uzaylardaki politoplardan meydana gelen formüldeki derece eşitsizliğini ortadan kaldırılmaktır.

²polytopal

İnceleyeceğimiz diğer bir durum ise

$$H = (P + S^1) \setminus P \setminus P^1$$

olarak tanımladığımız delik kavramı için, Minkowski toplamı olan (P, S) ikilisinin deliksiz olması durumudur. Burada, S latis doğru parçasının ilk latis noktası kadar ötelenmiş P politopuna ötelenmiş P politopu diyeceğiz. Bu kavram, Minkowski toplamını P politopunu öteleyerek elde etmeye çalışacağımız için önemli olacaktır. P ve ötelenmiş P politopunun kesişimine I_1 diyeceğiz. Bu kavramlar ile

$$L_M(t) = L_P(t) L_S(t^\delta)$$

formülünden yola çıkarak,

$$L_M(t) = L_P(t) L_S(t^\delta) - (L_S(1) - 1)L_{I_1}(t)$$

formülünü elde edeceğiz.

Kısim I

2. TORİK VARYETELER

Bu bölümde bir fana karşılık gelen torik varyeteyi, fan ve koni yapıları sayesinde kombinatorik olarak tanımlayacağız. Öncelikle torik varyeteleri tanımlayabilmek için ihtiyacımız olan koni, monoid ve afin torik varyetelerden bahsedeceğiz.

Torik varyetelere örnek olarak kompleks projektif düzlemin torik varyete yapısını ayrıntılı biçimde ele alacağız.

Bu bölümde, son olarak bir fanın kombinatorik yapısıyla torusun varyete üzerindeki etkisini karşılaştırarak grup etkisinin yörüngelerle ilişkisini açıklayacağız. Ve yine örnek olarak kompleks projektif düzlemi inceleyeceğiz.

Bu bölümde, genellikle [3]'ü takip edeceğimiz için ispatı verilmemiş özelliklerin, önsavların, önermelerin, teoremlerin ve sonuçların ispatları [3]'te bulunmaktadır.

2.1. Koniler

Tanım 2.1 ([1], Tanım 1.2, Çokyüzlü Koni¹).

\mathbb{R}^n 'deki sonlu sayıda v_1, \dots, v_r 'den oluşan bir küme olan S için, S 'nin ürettiği,

$$\sigma = \text{koni}(S) = \{\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_r v_r \mid \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r \in \mathbb{R}_{\geq 0}\}$$

kümeye *çokyüzlü koni* denir.

Tanım 2.2 (Latis Koni). $N \cong \mathbb{Z}^n \subset \mathbb{R}^n$ bir latis ve σ bir koni olmak üzere, σ 'nın tüm üreteçleri N 'ye aitse σ 'ya *latis koni* yada *rasyonel koni* denir.

Tanım 2.3 (Güçlü Konveks Koni²). Konveks bir koni, orjinden geçen herhangi bir doğruya içermiyorsa bu koniye *güçlü konveks koni* denir.

Tanım 2.4 (Dual Koni). σ çokyüzlü bir koni olsun. $(\mathbb{R}^n)^*$ uzayı \mathbb{R}^n 'nin dual uzayı ve $\langle \cdot, \cdot \rangle$ dual eşleme olmak üzere, σ 'yı üreten her $v \in \mathbb{R}^n$ vektörü için bir $H_v = \{u \in (\mathbb{R}^n)^* : \langle v, u \rangle \geq 0\}$ yarım uzayı tanımlayalım. σ 'nın *dualı*, $\bigcap_{i=1}^t H_{v_i} = \{u \in (\mathbb{R}^n)^* : \langle v_1, u \rangle \geq 0, \dots, \langle v_t, u \rangle \geq 0, \forall v_i \in \sigma, i = 1, 2, \dots, t\}$ olarak tanımlanır. Ve $\check{\sigma}$ ile gösterilir.

¹ing. polyhedral cone

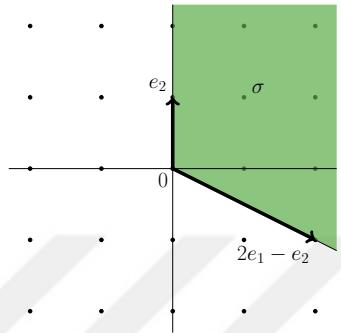
²ing. strongly convex cone

Bir $N \cong \mathbb{Z}^n$ latisinin dualı $(\mathbb{Z}^n)^*$ 'a izomorfik olan $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(N; \mathbb{Z})$ 'dir. Dual latis M ile gösterilir.

Özellik 2.5.

- i. σ bir latis koni ise $\check{\sigma}$ de bir latis konidir.
- ii. σ çokyüzlü, konveks bir koni ise $\check{\sigma}$ de çokyüzlü, konveks bir konidir.

Örnek 2.6. σ , Şekil 2.1'de gösterilen $v_1 = e_2$ ve $v_2 = 2e_1 - e_2$ vektörleri ile üretilen bir koni olsun.

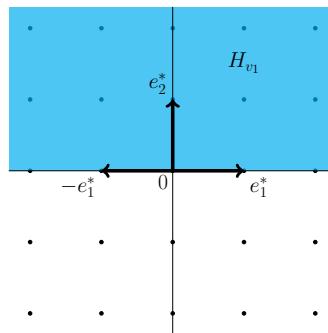


Şekil 2.1: $\text{koni}(e_2, 2e_1 - e_2)$

Tanım 2.4'ten, σ konisinin dualı

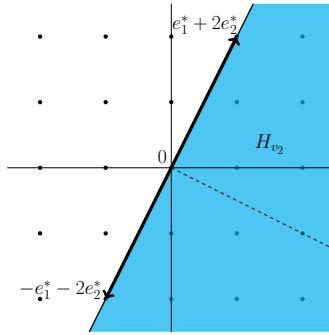
$$\check{\sigma} = H_{v_1} \cap H_{v_2} = \{u \in (\mathbb{R}^n)^* : \langle v_1, u \rangle \geq 0, \langle v_2, u \rangle \geq 0\}$$

olur. H_{v_1} ve H_{v_2} yarımlarızı bulalı. $\langle u, v_1 \rangle \geq 0$ koşulunu sağlayan u 'ların oluşturduğu küme Şekil 2.2'deki H_{v_1} yarımlarızı olur.



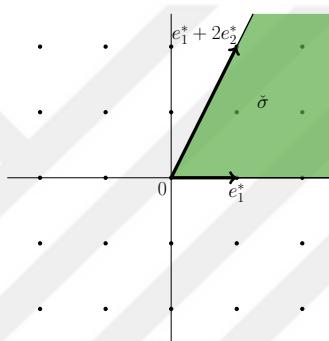
Şekil 2.2: $H_{(e_2)}$ yarımlarızı

$\langle u, v_2 \rangle \geq 0$ koşulunu sağlayan u 'ların oluşturduğu küme ise Şekil 2.3'teki H_{v_2} yarımlarızı olur.



Şekil 2.3: $H_{(2e_1 - e_2)}$ yarım uzayı

$H_{v_1} \cap H_{v_2}$ kümesi Şekil 2.4'teki e_1^* , $e_1^* + e_2^*$ ve $e_1^* + 2e_2^*$ vektörlerinin ürettiği $\check{\sigma}$ olur. $\check{\sigma}$ konisi sonlu sayıda vektör tarafından üretildiği için, Tanım 2.1'den, $\check{\sigma}$ çokyuzlu bir koni olur. $\check{\sigma}$ 'in üreteçleri olan e_1^* , $e_1^* + e_2^*$ ve $e_1^* + 2e_2^*$ vektörleri, M dual latisine ait olduğundan, Tanım 2.2'den, $\check{\sigma}$ latis koni olur.



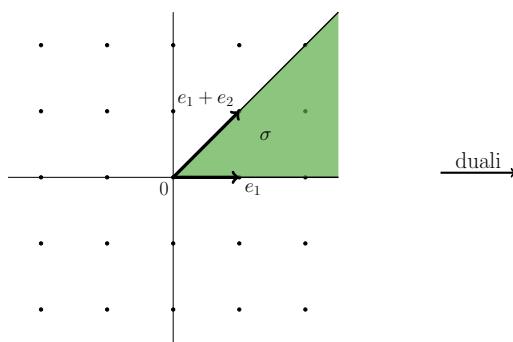
Şekil 2.4: $\text{koni}(e_2, 2e_1 - e_2)$ 'nin dualı

Tanım 2.7 (Koninin Yüzü). σ bir koni ve $\lambda \in \check{\sigma} \cap M$ olsun. σ ’nın bir yüzü

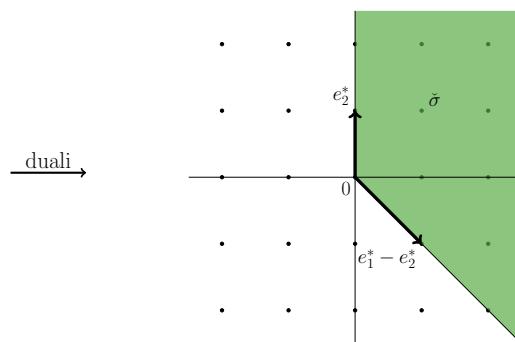
$$\sigma \cap \lambda^\perp = \{v \in \sigma : \langle \lambda, v \rangle \geq 0\}$$

olarak tanımlanır. Ve τ ile gösterilir.

Örnek 2.8. σ , Şekil 2.5'te gösterilen e_1 ve $e_1 + e_2$ vektörleri ile üretilen bir koni olsun.



Şekil 2.5: $\text{koni}(e_1, e_1 + e_2)$



Şekil 2.6: $\text{koni}(e_1, e_1 + e_2)$ 'nin dualı

$\lambda \in \check{\sigma} \cap M$ olsun. Tanım 2.7'den $\tau = \sigma \cap \lambda^\perp$ olduğundan, σ 'nın yüzleri; 0 , σ , e_1 ve $e_1 + e_2$ 'dir.(Şekil 2.5)

Şimdi, ileride ihtiyaç duyacağımız konilerle ilgili özelliklerden bahsedelim.

Özellik 2.9.

- i. Rasyonel, çokyüzlü, konveks bir koninin her yüzü rasyonel, çokyüzlü, konveks bir konidir.
- ii. Rasyonel, çokyüzlü, konveks bir koninin yüzlerinin her kesişimi de koninin bir yüzüdür.
- iii. Rasyonel, çokyüzlü, konveks bir koninin bir yüzünün her yüzü de bir yüzdür.

Özellik 2.10. $\lambda \in \check{\sigma}$ olmak üzere, τ σ 'nın bir yüzü ise $\check{\tau} = \check{\sigma} + \mathbb{R}_{\geq 0}(-\lambda)$ 'dır.

2.2. Monoidler

Tanım 2.11 (Monoid). S bir semi-grup olsun.

- i. $0 \in S$,
- ii. S değişmeli,
- iii. $s, s', t \in S$ için, $s + t = s' + t \Rightarrow s = s'$ koşullarını sağlayan S semi-grubuna **monoid** denir.

S_σ 'yı aşağıdaki önsav yardımı ile tanımlayacağız.

Önsav 2.12. N bir latis olsun. σ bir koni ise $\sigma \cap N$ bir monoiddir.

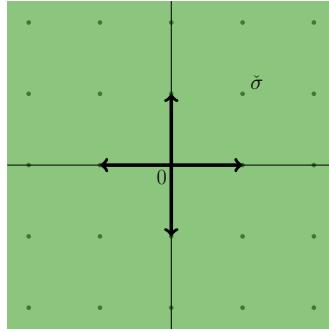
Bu önsavdan, M dual latisi ve $\check{\sigma}$ konisi için, $\check{\sigma} \cap M$ de bir monoid olur. Ve bu monoidi $S_\sigma := \check{\sigma} \cap M$ olarak tanımlarız.

Şimdi, S_σ monoidinin sonlu üreteçli bir monoid olabileceğini söyleyeceğiz. İleride afin torik varyeteleri S_σ monoidinin sonlu sayıdaki üreteçlerinin arasındaki ilişkiden yola çıkararak elde edeceğimiz için, S_σ monoidinin sonlu üreteçli olması önemlidir.

Önsav 2.13. σ çokyüzlü bir koni ise $\sigma \cap N$ sonlu üreteçli bir monoiddir.

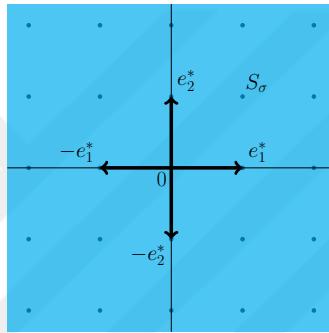
Bu önsavdan, $\check{\sigma}$ çokyüzlü bir koni ise $S_\sigma = \check{\sigma} \cap M$ de sonlu üreteçli bir monoid olur.

Örnek 2.14. \mathbb{R}^2 ’de, $\sigma = \{0\}$ konisini düşünelim.



Şekil 2.7: $\{0\}$ ’ın dualı

Koninin dualı tanımından, $\{0\}$ ’ın dualı Şekil 2.7’deki $(\mathbb{R}^2)^*$ olur. M dual latis olmak üzere, Önsav 2.12’den $\check{\sigma} \cap M$ bir monoiddir.



Şekil 2.8: $S_{\{0\}}$ monoidi

Şekilde görüldüğü gibi $S_\sigma := \check{\sigma} \cap M$ ’nin üreteçleri, e_1^* , $-e_1^*$, e_2^* ve $-e_2^*$ ’dir.

Önerme 2.15. σ rasyonel, çokyüzlü, konveks bir koni ve M bir latis olsun. $\lambda \in S_\sigma = \check{\sigma} \cap M$ olmak üzere, $\tau = \sigma \cap \lambda^\perp$ σ ’nın bir yüzü olsun. O halde, $S_\tau = S_\sigma + \mathbb{Z}_{\geq 0} \cdot (-\lambda)$ ’dır.

2.3. Afin Torik Varyeteler

Afin torik varyeteyi inşa etmek için, sırasıyla Laurent polinomlarının halkası, Laurent monomial, Laurent polinomunun desteği ve afin cebirsel kümenin koordinat halkası gibi kavramlardan bahsedeceğiz.

Tanım 2.16 (Laurent Polinomlarının Halkası). Laurent polinomlarının halkası $\mathbb{C}[z, z^{-1}] = \mathbb{C}[z_1, \dots, z_n, z_1^{-1}, \dots, z_n^{-1}]$ ile ifade edilir.

Tanım 2.17 (Laurent Monomial). $\lambda \in \mathbb{C}^*$ ve $a = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}^n$ olmak üzere, bir Laurent monomial $\lambda \cdot z^a = \lambda \cdot z^{\alpha_1} \cdots z^{\alpha_n}$ olarak tanımlanır.

\mathbb{Z}^n toplamsal grubu ve monik Laurent monomialerin çarpımsal grubu arasında aşağıdaki gibi bir izomorfizm vardır.

$$\begin{aligned} \theta: \mathbb{Z}^n &\longrightarrow \mathbb{C}[z_1, z^{-1}] \\ a = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) &\longmapsto z^a = z^{\alpha_1} \cdots z^{\alpha_n} \end{aligned}$$

Tanım 2.18 (Laurent Polinomunun Desteği³). $f = \sum_{\text{sonlu}} \lambda_a z^a$ bir Laurent polinomu olsun. f 'nin desteği, $\text{supp}(f) = \{a \in \mathbb{Z}^n : \lambda_a \neq 0\}$ olarak tanımlanır.

Önerme 2.19. σ bir latis koni olsun. $R_\sigma = \{f \in \mathbb{C}[z, z^{-1}] : \text{supp}(f) \subset \sigma \cap M\}$ halkası sonlu üreteçli bir monomial \mathbb{C} -cebirdir.

Tanım 2.20. $\mathbb{C}[\xi] = \mathbb{C}[\xi_1, \dots, \xi_k]$, \mathbb{C} üzerinde k değişkenli polinomların halkası olsun. Ve $E = (f_1, \dots, f_r) \subset \mathbb{C}[\xi]$ olsun.

$V(E) = \{x \in \mathbb{C}^k : f_1(x) = \dots = f_r(x) = 0\}$ kümesine *E ile tanımlanan afin cebirsel küme* denir.

E ile üretilen bir I idealı için, $V(I) = V(E)$ 'dir.

Tanım 2.21. $X \subset \mathbb{C}^k$ olsun. $I(X) = \{f \in \mathbb{C}[\xi] : f|_X = 0\}$ idealı, *X'in sıfır-idealı* olarak adlandırılır.

Teorem 2.22 (Nullstellensatz'ın Zayıf Versiyonu). $\mathbb{C}[\xi]$ 'deki her maksimal ideal, bir x noktası için M_x olarak yazılabilir.

Sonuç 2.23. $x \mapsto M_x$ eşlemesi, \mathbb{C}^k 'daki noktalar ve $\mathbb{C}[\xi]$ 'nin M maksimal idealleri arasında birebir bir eşlemedir.

$$\mathbb{C}^k \longleftrightarrow \{M \subset \mathbb{C}[\xi], M \text{maksimal ideal}\}$$

Tanım 2.24 (Spektrum). $\text{Spec}(\mathbb{C}[\xi]) := \{M \subset \mathbb{C}[\xi], M \text{maksimal ideal}\}$

Önsav 2.25. I , $\mathbb{C}[\xi]$ 'nin bir idealı olsun. O halde, $V(I) = \{x \in \mathbb{C}^k : I \subset M_x\}$ olur.

Tanım 2.26 (Afin Cebirsel Kümenin Koordinat Halkası). $V(I)$ 'nın 0 idealine $I(V(I)) = I_V$ diyelim. $V(I)$ afin cebirsel kümesinin koordinat halkası $R_V = \mathbb{C}[\xi]/I_V$ 'dır. R_V , ξ_j koordinat fonksiyonlarının $\bar{\xi}_j$ sınıfları tarafından bir \mathbb{C} -cebri olarak üretilir.

Sonuç 2.27. $\text{Spec}(R_V) := \{M \subset R_V, M \text{maksimal ideal}\} \longleftrightarrow V$ eşlemesi birebir bir eşlemedir.

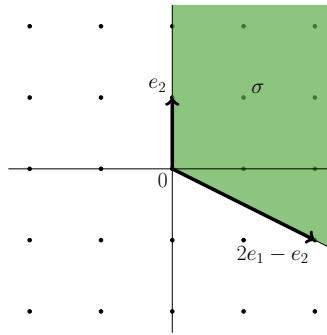
Zariski topolojisini her iki taraf için de tanımlayarak, $V \cong \text{Spec}(R_V)$ homeomorfizmini elde ederiz.

Her bir değişmeli sonlu üreteçli \mathbb{C} -cebir R , bir $\text{Spec}(R)$ afin kompleks varyetesi belirler. R 'nin üreteçleri seçilmişse, R bir I idealı için $\mathbb{C}[\xi_1, \dots, \xi_k]/I$ olarak yazılabilir. Yani $\text{Spec}(R)$, \mathbb{C}^k 'deki $V(I)$ altvaryetesi ile tanımlanabilir.

Tanım 2.28 (Afin Torik Varyete). Rasyonel, çokyüzlü, kesinlikle konveks bir σ konisine karşılık gelen afin torik varyete $X_\sigma = \text{Spec}(R_\sigma)$ olarak tanımlanır.

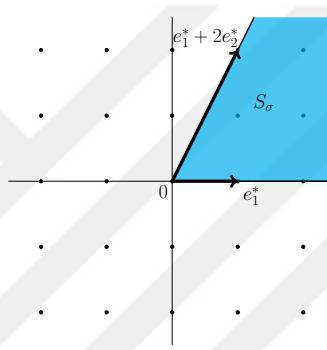
³ing. support

Örnek 2.29. σ , e_2 ve $2e_1 - e_2$ vektörleri ile üretilen bir koni olsun.



Şekil 2.9: $\text{koni}(e_2, 2e_1 - e_2)$

$S_\sigma = \sigma \cap M$ tanımından, Şekil 2.10'daki gibi S_σ 'nın üreteçleri e_1^* , $e_1^* + e_2^*$ ve $e_1^* + 2e_2^*$ dir.



Şekil 2.10: $S_{\text{koni}(e_2, 2e_1 - e_2)}$ monoidi

$A = (a_1, a_2, a_3) = (e_1^*, e_1^* + e_2^*, e_1^* + 2e_2^*)$ S_σ 'nın üreteçlerinin bir sistemi olsun.
Bir θ izomorfizması ile a_1 , a_2 ve a_3 vektörlerini, $u_1 = z_1$, $u_2 = z_1 z_2$ ve
 $u_3 = z_1 z_2^2$, ye eşleyelim:

$$\begin{aligned} a_1 &\xrightarrow{\theta} u_1 \\ a_2 &\xrightarrow{\theta} u_2 \\ a_3 &\xrightarrow{\theta} u_3 \end{aligned}$$

Ve θ dönüşümü $a_1 + a_3 = 2a_2$ bağıntısını $u_1 u_3 = u_2^2$ olarak korur. O halde koordinat halkası tanımından,

$$R_\sigma = \mathbb{C}[u_1, u_2, u_3] = \mathbb{C}[z_1, z_1 z_2, z_1 z_2^2] \cong \mathbb{C}[\xi_1, \xi_2, \xi_3]/I_\sigma$$

olur. $u_1 u_3 = u_2^2$ bağıntısına $\xi_1 \xi_3 = \xi_2^2$ binomial bağıntısı karşılık gelir ve I_σ idealini üretir. Yani,

$$I_\sigma = \langle \xi_1 \xi_3 - \xi_2^2 \rangle.$$

O halde, afin torik varyete tanımından σ konisine karşılık gelen afin torik varyete,

$$X_\sigma = V(I_\sigma) = V(\xi_1 \xi_3 - \xi_2^2) = \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{C}^3 : x_1 x_3 = x_2^2\}$$

quadratik konisi olur.

2.4. Torik Varyeteler

Tanım 2.30 (Fan). \mathbb{R}^n 'deki bir fan Δ ile gösterilir. Δ fani aşağıdaki kousulları sağlayan konilerin sonlu bir birleşimidir.

- i. Δ 'nın her konisi orjinden geçen herhangi bir doğruya içermeyen, çokyüzlü, konveks, latis konidir,
- ii. Δ 'nın bir konisinin her yüzü, Δ 'nın da bir konisidir,
- iii. σ ve σ' , Δ 'nın konileri ise $\sigma \cap \sigma'$, σ ve σ' 'ın ortak yüzüdür.

τ, σ konisinin bir yüzü olsun. Önerme 2.15'ten $S_\tau = S_\sigma + \mathbb{Z}_{\geq 0}(-\lambda)$ olduğunu biliyoruz. Buradan afin torik varyete tanımı ile X_σ 'dan, τ 'nun torik varyetesi X_τ 'ya bir izdüşüm elde edebiliriz. Bu da X_τ 'yu, X_σ 'nin açık alt kümeleriyle tanımlar.

Önsav 2.31. $X_\tau \cong X_\sigma \setminus (u_k = 0)$.

τ, σ ve σ' konilerinin ortak yüzü olsun. Önsav 2.31'den X_σ ve $X_{\sigma'}$, X_τ boyunca bir yapıştırma dönüsümü ile yapışırlar. Yani, Önsav 2.31'e göre $X_{\sigma'}$ 'da koordinatları (v_1, \dots, v_m) alırsak,

$$X_\tau \cong X_{\sigma'} \setminus (v_m = 0)$$

homeomorfizmi vardır. Ve yapıştırma dönüsümünü,

$$\psi_{\sigma, \sigma'} : X_\sigma \setminus (u_k = 0) \xrightarrow{\cong} X_\tau \xrightarrow{\cong} X_{\sigma'} \setminus (v_m = 0)$$

olarak elde ederiz.

Burada amacımız bir yapıştırma dönüsümü ile X_σ ve $X_{\sigma'}$ 'nın birbirine yapışan noktaların uyumlu olmasını sağlamaktır. $\psi_{\sigma, \sigma'}$ yapıştırma dönüsümü izomorfizm olduğundan, birbirine yapışan noktalar uyumlu olur.

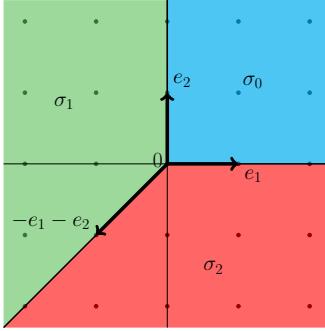
Tanım 2.32 (Torik Varyete). Δ , \mathbb{R}^n 'de bir fan olsun. $x \in X_\sigma$ ve $x' \in X_{\sigma'}$ noktaları için, $\psi_{\sigma, \sigma'}(x) = x'$ (yapıştırma dönüsümü) ise $\bigcup_{\sigma \in \Delta} X_\sigma$ ayrık bileşiminin oluşturduğu uzaya **torik varyete** denir. Δ fanının torik varyetesi X_Δ ile gösterilir.

Örnek 2.33 (Kompleks projektif düzlem). Kompleks projektif düzlem, \mathbb{C}^3 uzayında $(0, 0, 0)$ 'dan geçen doğruların kümesidir. Diğer bir deyişle, kompleks projektif düzlem, $\mathbb{C}^3 - \{(0, 0, 0)\}$ üzerinde $(0, 0, 0)$ 'dan geçen herhangi bir doğrunun üzerindeki her noktayı denk kabul eden bir denklik bağıntısına göre, bu denklik bağıntısının denklik sınıflarının kümesidir. \mathbb{CP}^2 ile gösterilir.

\mathbb{CP}^2 uzayının homojen koordinatlarını $[t_0 : t_1 : t_2]$ ile ifade edelim. \mathbb{CP}^2 klasik olarak aşağıdaki üç koordinat yaması ile kaplanır:

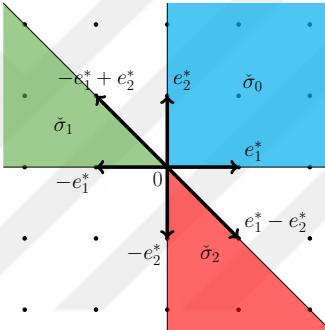
$$\begin{aligned} t_0 \neq 0 \text{'a} &\text{ karşılık gelen } U_0 \text{ açık kümesi } (t_1/t_0, t_2/t_0) = (z_1, z_2), \\ t_1 \neq 0 \text{'a} &\text{ karşılık gelen } U_1 \text{ açık kümesi } (t_0/t_1, t_2/t_1) = (z_1^{-1}, z_1^{-1}z_2), \\ t_2 \neq 0 \text{'a} &\text{ karşılık gelen } U_2 \text{ açık kümesi } (t_0/t_2, t_1/t_2) = (z_2^{-1}, z_1z_2^{-1}) \text{dir.} \end{aligned}$$

Şimdi \mathbb{R}^2 'de, Şekil 2.11'deki $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2$ konilerini düşünelim. Bu koniler ve bu konilerin yüzleri olan $\text{koni}(e_2)$, $\text{koni}(e_1)$, $\text{koni}(-e_1 - e_2)$ ve $\{0\}$ konilerinin oluşturduğu fana Δ diyelim.



Şekil 2.11: $\text{koni}(e_1, e_2)$, $\text{koni}(e_2, -e_1 - e_2)$ ve $\text{koni}(e_1, -e_1 - e_2)$

Aşağıda Şekil 2.12'den de görüleceği gibi $S_{\sigma_0} = \check{\sigma}_0 \cap M$ 'nin üreteçleri e_1^* ve e_2^* olur.



Şekil 2.12: $\text{koni}(e_1, e_2)$, $\text{koni}(e_2, -e_1 - e_2)$ ve $\text{koni}(e_1, -e_1 - e_2)$ 'nin dualleri

$A = (a_1, a_2) = (e_1^*, e_2^*)$ S_{σ_0} 'nın üreteçlerinin bir sistemi olsun. Bir θ izomorfizmi ile a_1, a_2 vektörlerini, $u_1 = z_1, u_2 = z_2$ 'ye eşleyelim:

$$\begin{aligned} a_1 &\xrightarrow{\theta} u_1 \\ a_2 &\xrightarrow{\theta} u_2 \end{aligned}$$

O halde koordinat halkası tanımından,

$$R_{\sigma_0} = \mathbb{C}[u_1, u_2] \cong \mathbb{C}[z_1, z_2] \cong \mathbb{C}[\xi_1, \xi_2]/I_{\sigma_0}$$

olur. a_1 ve a_2 arasında bir bağıntı olmadığından u_1 ve u_2 arasında da bir bağıntı yoktur. Bu durumda u_1 ve u_2 arasındaki bağıntıya karşılık gelen I_{σ_0} idealini üretecek binomial bir bağıntı yoktur. Bu nedenle, $I_{\sigma_0} = \langle 0 \rangle$ olur.

Buradan, σ_0 konisine karşılık gelen afin torik varyete,

$$X_{\sigma_0} = V(I_{\sigma_0}) = V(0) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{C}^2\} \cong \mathbb{C}^2_{(z_1, z_2)}$$

olur.

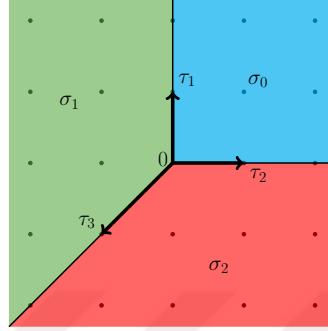
Benzer şekilde, S_{σ_1} 'nın üreteçleri $-e_1^*$ ve $-e_1^* + e_2^*$, $R_{\sigma_1} = \mathbb{C}[z_1^{-1}, z_1^{-1}z_2]$ ve $X_{\sigma_1} = \mathbb{C}^2_{(z_1^{-1}, z_1^{-1}z_2)}$ 'dır.

Son olarak, S_{σ_2} 'nın üreteçleri $-e_2^*$ ve $e_1^* - e_2^*$, $R_{\sigma_2} = \mathbb{C}[z_2^{-1}, z_1z_2^{-1}]$ ve $X_{\sigma_2} = \mathbb{C}^2_{(z_2^{-1}, z_1z_2^{-1})}$ olur.

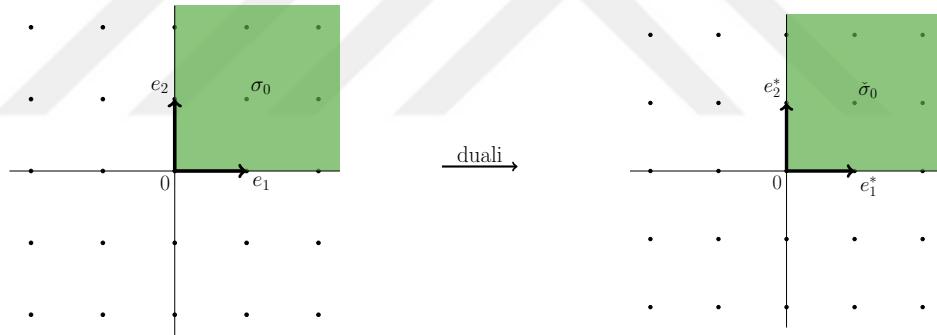
Buradan, X_{σ_0} , X_{σ_1} ve X_{σ_2} afin torik varyetelerinin sırasıyla U_0 , U_1 ve U_2 koordinat yamalarına karşılık geldiğini görürüz.

Fan yapısı, afin torik varyeteler arasında, konilerin kesişimlerindeki yüzlerin torik varyetesi boyunca bir yapıştırma sağlar. Dolayısıyla bu fan yapısı sayesinde yamaların nasıl yapıştığını göreceğiz.

Aşağıdaki şekildeki gibi σ_0 ve σ_1 'in ortak yüzüne τ_1 , σ_0 ile σ_2 'nin ortak yüzüne τ_2 ve σ_1 ile σ_2 'nin ortak yüzüne τ_3 diyelim.



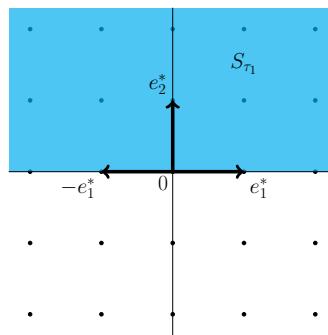
Afin torik varyeteler arasında üç tane ikili yapıştırma vardır. İlk olarak X_{σ_0} ve X_{σ_1} arasındaki X_{τ_1} boyunca olan yapıştırmayı açıklayalım. τ_1 hem σ_0 'ın hem de σ_1 'in bir yüzü olduğundan X_{τ_1} 'in iki farklı görüntüsü vardır. σ_0 'daki τ_1 yüzüne karşılık gelen X_{τ_1} afin torik varyetesini bulalım.



Şekil 2.13: $\text{koni}(e_1, e_2)$

Şekil 2.14: $\text{koni}(e_1, e_2)$ 'nin dualı

M bir latis olsun. Şekil 2.14'teki $\check{\sigma}_0$ 'dan, $S_{\sigma_0} = \check{\sigma}_0 \cap M$ 'nin üreteçleri e_1^* ve e_2^* olur. τ_1 'in tanımından, $\lambda = e_1^*$ ve Önerme 2.15'ten, $S_{\tau_1} = S_{\sigma_0} + \mathbb{Z}_{\geq 0} \cdot (-e_1^*)$ olur.



Şekil 2.15: $S_{\text{koni}(e_2)}$

Şekil 2.15'ten de görüldüğü gibi S_{τ_1} 'in üreteçleri e_1^* , $-e_1^*$ ve e_2^* 'dir.

$B = (b_1, b_2, b_3) = (e_1^*, -e_1^*, e_2^*)$ S_{τ_1} 'in üreteçlerinin bir sistemi olsun. Bir ψ izomorfizmi ile b_1, b_2, b_3 vektörlerini, sırasıyla $u_1 = z_1$, $u_2 = z_1^{-1}$, $u_3 = z_2$ 'ye eşleyelim:

$$\begin{aligned} b_1 &\xrightarrow{\psi} u_1 \\ b_2 &\xrightarrow{\psi} u_2 \\ b_3 &\xrightarrow{\psi} u_3 \end{aligned}$$

Ve ψ dönüşümü $b_1 + b_2 = 0$ bağıntısını $u_1 u_2 = 1$ olarak korur. O halde koordinat halkası tanımdan,

$$R_{\tau_1} = \mathbb{C}[u_1, u_2, u_3] \cong \mathbb{C}[z_1, z_1^{-1}, z_2] \cong \mathbb{C}[\xi_1, \xi_2, \xi_3]/I_{\tau_1}$$

olur. $u_1 u_2 = 1$ bağıntısına $\xi_1 \xi_2 = 1$ bağıntısı karşılık gelir ve I_{τ_1} idealini üretir. Yani,

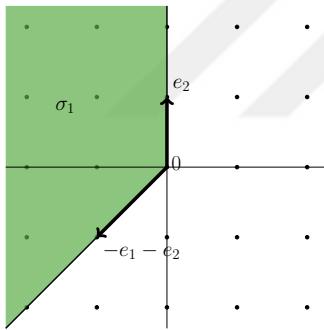
$$I_{\tau_1} = \langle \xi_1 \xi_2 - 1 \rangle.$$

Buradan, σ_0 'daki τ_1 yüzü için,

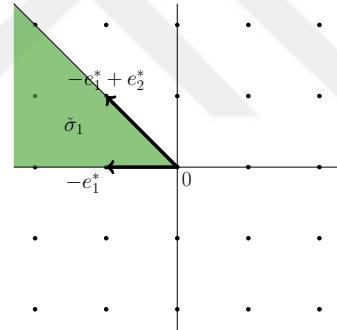
$$X_{\tau_1} = V(I_{\tau_1}) = V(\xi_1 \xi_2 - 1) = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{C}^3 : x_1 x_2 = 1\} \cong \mathbb{C}_{z_1}^* \times \mathbb{C}_{z_2}$$

olur.

σ_1 'daki τ_1 yüzüne karşılık gelen X_{τ_1} afin torik varyetesi bulalım.



Şekil 2.16: koni($e_2, -e_1 - e_2$)



Şekil 2.17: koni($e_2, -e_1 - e_2$)'nın dualı

M bir latis olsun. Şekil 2.17'deki $\check{\sigma}_1$ 'den, $S_{\sigma_1} = \check{\sigma}_1 \cap M$ 'nin üreteçleri $-e_1^*$ ve $-e_1^* + e_2^*$ olur. τ_1 'in tanımdan, $\lambda = -e_1^*$ ve Önerme 2.15'ten, $S_{\tau_1} = S_{\sigma_1} + \mathbb{Z}_{\geq 0} \cdot (e_1^*)$ olur. Buradan, S_{τ_1} 'in üreteçleri $-e_1^*$, e_1^* ve $-e_1^* + e_2^*$ dir. $C = (c_1, c_2, c_3) = (e_1^*, -e_1^*, e_2^*)$ S_{τ_1} 'in üreteçlerinin bir sistemi olsun.

Bir ϕ izomorfizmi ile c_1, c_2, c_3 vektörlerini, sırasıyla $u_1 = z_1^{-1}$, $u_2 = z_1$, $u_3 = z_1^{-1} z_2$ 'ye eşleyelim:

$$\begin{aligned} c_1 &\xrightarrow{\phi} u_1 \\ c_2 &\xrightarrow{\phi} u_2 \\ c_3 &\xrightarrow{\phi} u_3 \end{aligned}$$

Ve ϕ dönüşümü $c_1 + c_2 = 0$ bağıntısını $u_1 u_2 = 1$ olarak korur. O halde koordinat halkası tanımdan, $R_{\tau_1} = \mathbb{C}[u_1, u_2, u_3] \cong \mathbb{C}[z_1^{-1}, z_1, z_1^{-1} z_2] \cong \mathbb{C}[\xi_1, \xi_2, \xi_3]/I_{\tau_1}$ olur. $u_1 u_2 = 1$ bağıntısına $\xi_1 \xi_2 = 1$ bağıntısı karşılık gelir ve I_{τ_1} idealini üretir. Yani, $I_{\tau_1} = \langle \xi_1 \xi_2 - 1 \rangle$.

Buradan σ_1 'deki τ_1 yüzü için,

$$X_{\tau_1} = V(I_{\tau_1}) = V(\xi_1\xi_2 - 1) = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{C}^3 : x_1x_2 = 1\} \cong \mathbb{C}_{z_1^{-1}}^* \times \mathbb{C}_{z_1^{-1}z_2}$$

olur.

X_{σ_0} ve X_{σ_1} arasındaki X_{τ_1} boyunca olan yapıştırmayı $(z_1, z_2) \mapsto (z_1^{-1}, z_1^{-1}z_2)$ koordinat değişimini kullanarak yaparız. Bu iki afin torik varyetenin yapışması ile $\mathbb{CP}^2 \setminus \{[0 : 0 : 1]\}$ elde ederiz.

Benzer şekilde, X_{σ_0} ve X_{σ_2} arasındaki X_{τ_2} boyunca olan yapıştırmayı açıklayalım. τ_2 hem σ_0 'ın hem de σ_2 'nin bir yüzü olduğundan X_{τ_2} 'nin iki farklı görüntüsü vardır. X_{τ_2} 'nin iki farklı görüntüsünü X_{τ_1} 'e benzer şekilde aşağıdaki gibi buluruz:

σ_0 'daki τ_2 yüzüne karşılık gelen X_{τ_2} afin torik varyete;

$$X_{\tau_2} = V(I_{\tau_2}) = V(\xi_2\xi_3 - 1) = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{C}^3 : x_2x_3 = 1\} \cong \mathbb{C}_{z_1} \times \mathbb{C}_{z_2}^*$$

olur.

σ_2 'daki τ_2 yüzüne karşılık gelen X_{τ_2} afin torik varyete;

$$X_{\tau_2} = V(I_{\tau_2}) = V(\xi_1\xi_3 - 1) = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{C}^3 : x_1x_3 = 1\} \cong \mathbb{C}_{z_2^{-1}}^* \times \mathbb{C}_{z_1z_2^{-1}}$$

olur.

X_{σ_0} ve X_{σ_2} arasındaki X_{τ_2} boyunca olan yapıştırmayı $(z_1, z_2) \mapsto (z_2^{-1}, z_1z_2^{-1})$ koordinat değişimini kullanarak yaparız. Bu iki afin torik varyetenin yapışması ile $\mathbb{CP}^2 \setminus \{[0 : 1 : 0]\}$ elde ederiz.

Son ikili yapıştırma olan X_{σ_1} ve X_{σ_2} arasındaki X_{τ_3} boyunca olan yapıştırmayı açıklayalım. τ_3 hem σ_1 'ın hem de σ_2 'nin bir yüzü olduğundan X_{τ_3} 'ün iki farklı görüntüsü vardır. X_{τ_3} 'ün iki farklı görüntüsünü X_{τ_1} 'e ve X_{τ_2} 'ye benzer şekilde aşağıdaki gibi buluruz:

σ_1 'daki τ_3 yüzüne karşılık gelen X_{τ_3} afin torik varyete;

$$X_{\tau_3} = V(I_{\tau_3}) = V(\xi_2\xi_3 - 1) = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{C}^3 : x_2x_3 = 1\} \cong \mathbb{C}_{z_1^{-1}}^* \times \mathbb{C}_{z_1z_2}$$

olur.

σ_2 'daki τ_3 yüzüne karşılık gelen X_{τ_3} afin torik varyete;

$$X_{\tau_3} = V(I_{\tau_3}) = V(\xi_2\xi_3 - 1) = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{C}^3 : x_2x_3 = 1\} \cong \mathbb{C}_{z_2^{-1}}^* \times \mathbb{C}_{z_1z_2^{-1}}$$

olur.

X_{σ_1} ve X_{σ_2} arasındaki X_{τ_3} boyunca olan yapıştırmayı $(z_1^{-1}, z_1^{-1}z_2) \mapsto (z_2^{-1}, z_1z_2^{-1})$ koordinat değişimini kullanarak yaparız. Bu iki afin torik varyetenin yapışması ile $\mathbb{CP}^2 \setminus \{[1 : 0 : 0]\}$ elde ederiz.

X_{σ_0} ve X_{σ_1} 'i yapıştırarak elde ettiğimiz $\mathbb{CP}^2 \setminus \{[0 : 0 : 1]\}$ uzayına $X_{\sigma_{01}}$; X_{σ_0} ve X_{σ_2} 'yi yapıştırarak elde ettiğimiz $\mathbb{CP}^2 \setminus \{[0 : 1 : 0]\}$ uzayına $X_{\sigma_{02}}$ diyelim. Δ fanının torik varyete yapısını, $X_{\sigma_{01}}$ ve $X_{\sigma_{02}}$ 'yi yapıştırarak inşa edeceğiz. $X_{\sigma_{01}}$ ve $X_{\sigma_{02}}$ arasındaki bu yapıştırmayı, X_{σ_0} boyunca, $(z_1, z_2) \mapsto (z_1, z_2)$ dönüşümü ve X_{τ_3} boyunca, $(z_1^{-1}, z_1^{-1}z_2) \mapsto (z_2^{-1}, z_1z_2^{-1})$ koordinat değişimi ile yaparız. Bu yapıştırma ile \mathbb{CP}^2 uzayını elde ederiz.

2.5. Torus Etkisi ve Yörüngeler

Tanım 2.34 (Afin Torik Varyete Üzerine Torus Etkisi). $1 \leq j \leq n$ ve $1 \leq i \leq k$ için, $\alpha_i^j \in \mathbb{Z}$ olmak üzere, $a_i = (\alpha_i^1, \dots, \alpha_i^n)$ formunda bir (a_1, \dots, a_k) sistemi tanımlayalım.

$S_\sigma = \check{\sigma} \cap M$, (a_1, \dots, a_k) sistemi ile üretilen bir monoid olsun. $\mathbb{T} = (\mathbb{C}^*)^n$ n -boyutlu torus ve X_σ , σ konisine karşılık gelen afin torik varyete olsun. $t = (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{T} = (\mathbb{C}^*)^n$ ve $x \in X_\sigma$ olmak üzere, \mathbb{T} 'nin X_σ üzerine torus etkisi;

$$\begin{aligned}\mathbb{T} \times X_\sigma &\longrightarrow X_\sigma \\ (t, x) &\longmapsto tx = (t^{a_1}x_1, \dots, t^{a_k}x_k)\end{aligned}$$

olarak tanımlanır. Burada, $t^{a_i} = t_1^{\alpha_i^1} \dots t_n^{\alpha_i^n} \in \mathbb{C}^*$ 'dır.

Ayrıcalıklı noktalar, yörünge tanımı için gerekli olduğundan şimdi bu noktalardan bahsedelim.

Tanım 2.35 (Ayrıcalıklı noktalar⁴). σ bir koni ve τ , σ konisinin herhangi bir yüzü olsun. $S_\sigma = \check{\sigma} \cap M$ monoidi için, $a \in S_\sigma$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}\varphi_\tau : S_\sigma &\longrightarrow \mathbb{C} \\ a &\longmapsto \begin{cases} 1 & a \in \tau^\perp \\ 0 & a \notin \tau^\perp \end{cases}\end{aligned}$$

fonksiyonunu tanımlayalım. τ bir ayrıcalıklı noktaya sahiptir. Öyle ki, bu ayrıcalıklı noktanın i .koordinatı $\varphi_\tau(a_i)$ olarak tanımlanır. Buradaki a_i , Tanım 2.34'te tanımladığımız gibi, $a_i = (\alpha_i^1, \dots, \alpha_i^n)$ formundadır. τ yüzüne karşılık gelen ayrıcalıklı nokta x_τ ile gösterilir.

Tanım 2.36 (Yörünge⁵). σ bir koni, \mathbb{T} bir torus ve τ , σ konisinin herhangi bir yüzü olsun. X_σ , σ konisine karşılık gelen afin torik varyete olsun. x_τ , τ 'ya karşılık gelen ayrıcalıklı nokta olmak üzere, τ yüzünün yörüngesi, x_τ ayrıcalıklı noktasının yörüngesidir. Ve x_τ ayrıcalıklı noktasının yörüngesi, $t \in \mathbb{T}$ ve $x_\tau \in X_\sigma$ olmak üzere, $(t, x_\tau) \longmapsto tx_\tau$ torus etkisi ile elde ettiğimiz tx_τ 'nın gerdiği küme olarak tanımlanır. τ yüzünün yörüngesi O_τ ile gösterilir.

Yörüngenin kapanışı Chow-Betti sayıları ile ilgili olduğundan bu bölümde son olarak, yörüngenin kapanışını tanımlayacağız.

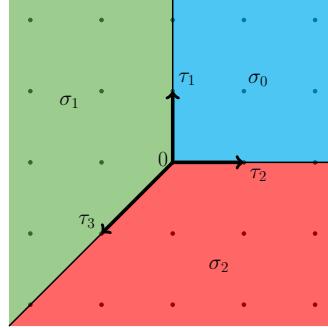
Tanım 2.37 ([3], 24.sayfa, Yörüngenin kapanışı). σ bir koni ve τ bu koninin bir yüzü olsun. $A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, S_σ monoidinin üreteçlerinin bir sistemi olsun. Ve O_τ , τ 'nın yörüngesi olsun. $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ olmak üzere, $a_i \notin \tau^\perp$ koşulunu sağlayan indekslerin oluşturduğu kümeye I diyelim. Her $i \in I$ için, O_τ 'nın kapanışı, X_σ 'da $u_i = z^{a_i} = 0$ elemanları ile tanımlanır. O_τ 'nın kapanışını $V(\tau)$ ile gösteririz.

⁴ing. distinguish points

⁵ing. orbit

Şimdi, yörunge ve yörüngenin kapanışı örneği olarak [3]'teki 4.6 örneğini verelim.

Örnek 2.38 (\mathbb{CP}^2 'nin yörüngeleri). Örnek 2.33'ten, \mathbb{CP}^2 'nin fan yapısının Şekil 2.18'deki gibi $\sigma_0 = \text{koni}(e_1, e_2)$, $\sigma_1 = \text{koni}(e_2, -e_1 - e_2)$, $\sigma_2 = \text{koni}(e_1, -e_1 - e_2)$, τ_1 , τ_2 , τ_3 ve $\{0\}$ konilerinin birleşiminden oluşan bir fan olduğunu biliyoruz.



Şekil 2.18: \mathbb{CP}^2 'nin fan yapısı

Bu 7 koniden oluşan fana Δ diyelim. \mathbb{CP}^2 'nin yörüngeleri, Δ 'nın yüzlerinin yörüngeleridir. İlk olarak, $\{0\}$ yüzünün yörüngesini bulalım. Tanım 2.36'dan, $\{0\}$ 'ın yörüngesi $\{0\}$ 'ın ayrıcalıklı noktasının yörüngesidir. $\{0\}$ yüzü, Δ 'nın tüm konilerinin ortak yüzüdür. O halde, $\{0\}$ 'ın ayrıcalıklı noktasını bulmak için, ayrıcalıklı nokta tanımından, S_{σ_0} , S_{σ_1} ve S_{σ_2} 'nin üreteçlerini kullanırız.

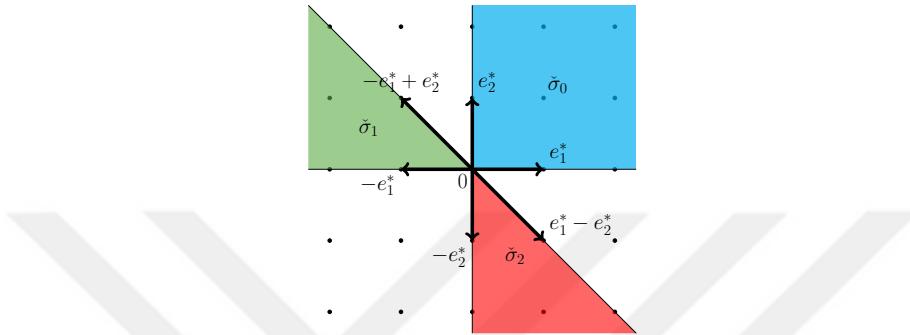
$\{0\}^\perp = \mathbb{R}^2$ olduğundan, tüm monoidlerin üreteçleri için, $a_1, a_2 \in \{0\}^\perp$ olur. O halde, ayrıcalıklı nokta tanımından, $\{0\}$ yüzüne karşılık gelen ayrıcalıklı noktanın koordinatları $\varphi_{\{0\}}(a_1) = \varphi_{\{0\}}(a_2) = 1$ 'dir. Buradan, $\{0\}$ yüzüne karşılık gelen ayrıcalıklı nokta $\{x_{\{0\}}\} = (1, 1)$ olur. Tanım 2.36'dan, $\{0\}$ 'ın yörüngesi $\{x_{\{0\}}\} = (1, 1)$ 'in yörüngesidir. Yani, $(t_1, t_2) \in \mathbb{T}$ olmak üzere, yörunge tanımından, $\{0\}$ 'ın yörüngesi, torus etkisi ile elde ettiğimiz $(t_1, t_2)(1, 1)$ 'in gerdiği kümedir.

$$\begin{aligned} (t_1, t_2)(1, 1) &= (t^{a_1}, t^{a_2}) \\ &= (t_1^1 t_2^0, t_1^0 t_2^1) \\ &= (t_1^1, t_2^1) \end{aligned}$$

Dolayısıyla, $\{0\}$ 'ın yörüngesi, $O_{\{0\}} = \mathbb{C}_{z_1}^* \times \mathbb{C}_{z_2}^*$ olur.

Şimdi, $O_{\{0\}}$ yörüngesinin kapanışı olan $V(\{0\})$ 'ı bulalım. $\{0\}^\perp = \mathbb{R}^2$ olduğundan, tüm S_{σ_0} , S_{σ_1} ve S_{σ_2} monoidlerin üreteçleri için, $a_1, a_2 \in \{0\}^\perp$ olur. O halde, yörüngenin kapanışı tanımından, $a_i \notin \{0\}^\perp$ koşulunu sağlayan bir indeks olmadığından, $I = \{\emptyset\}$ 'dir. Buradan, $X_{\sigma_0} = \mathbb{C}^2_{(z_1, z_2)}$ 'de $V(\{0\}) = \mathbb{C}_{(z_1)} \times \mathbb{C}_{(z_2)}$ 'dir. Benzer şekilde, $X_{\sigma_1} = \mathbb{C}^2_{(z_1^{-1}, z_1^{-1} z_2)}$ 'de $V(\{0\}) = \mathbb{C}_{(z_1^{-1})} \times \mathbb{C}_{(z_1^{-1} z_2)}$ ve $X_{\sigma_2} = \mathbb{C}^2_{(z_2^{-1}, z_1 z_2^{-1})}$ 'de $V(\{0\}) = \mathbb{C}_{(z_2^{-1})} \times \mathbb{C}_{(z_1 z_2^{-1})}$ olur.

τ_1 yüzü, σ_0 ve σ_1 'in ortak yüzü olduğundan, τ_1 'in yörüngesini bulmak için, yöringe tanımından, S_{σ_0} ve S_{σ_1} 'in üreteçlerini kullanacağız. Örnek 2.33'ten, Δ 'nın dual konileri Şekil 2.19'daki gibidir.



Şekil 2.19: $\text{koni}(e_1, e_2)$, $\text{koni}(e_1, e_2)$ ve $\text{koni}(e_1, e_2)'$ nin dualı

Şekil 2.19'dan da görüldüğü gibi, $S_{\sigma_0} = \check{\sigma}_0 \cap M$ 'nin üreteçleri, $a_1 = e_1^* = (1, 0)$ ve $a_2 = e_2^* = (0, 1)$ 'dir. $a_1 = (1, 0) \in \{\tau_1\}^\perp$ ve $a_2 = (0, 1) \notin \{\tau_1\}^\perp$ olduğundan, τ_1 yüzüne karşılık gelen ayrıcalıklı nokta $\{x_{\tau_1}\} = (1, 0)$ 'dır. Tanım 2.36'dan, τ_1 'in yörüngesi $\{x_{\tau_1}\} = (1, 0)$ 'ın yörüngesidir. Yani, $(t_1, t_2) \in \mathbb{T}$ olmak üzere, yörünge tanımından, τ_1 'in yörüngesi, torus etkisi ile elde ettiğimiz $(t_1, t_2)(1, 0)$ 'ın gerdigi kümedir.

$$\begin{aligned} (t_1, t_2)(1, 0) &= (t^{a_1}, 0) \\ &= (t_1^1 t_2^0, 0) \\ &= (t_1^1, 0) \end{aligned}$$

Dolayısıyla, τ_1 'in yörüngesi, $O_{\tau_1} = \mathbb{C}_{z_1}^* \times \{0\}$ olur.

Diger taraftan, Örnek 2.33'ten, S_{σ_1} 'in üreteçleri $a_1 = -e_1^* = (-1, 0)$ ve $a_2 = -e_1^* + e_2^* = (-1, 1)$ 'dir. (Şekil 2.19) $a_1 = (-1, 0) \in \{\tau_1\}^\perp$ ve $a_2 = (-1, 1) \notin \{\tau_1\}^\perp$ olduğundan, τ_1 yüzüne karşılık gelen ayrıcalıklı nokta $\{x_{\tau_1}\} = (1, 0)$ 'dır. Tanım 2.36'dan, τ_1 'in yörüngesi $\{x_{\tau_1}\} = (1, 0)$ 'ın yörüngesidir. Yani, $(t_1, t_2) \in \mathbb{T}$ olmak üzere, yörünge tanımından, τ_1 'in yörüngesi, torus etkisi ile elde ettigimiz $(t_1, t_2)(1, 0)$ 'ın gerdiği kümedir.

$$\begin{aligned}(t_1, t_2)(1, 0) &= (t^{a_1}, 0) \\ &= (t_1^{-1} t_2^0, 0) \\ &= (t_1^{-1}, 0)\end{aligned}$$

Dolayısıyla, τ_1 'in yörüngesi, $O_{\tau_1} = \mathbb{C}_{(z_1^{-1})}^* \times \{0\}$ olur.

Şimdi, O_{τ_1} yörüngesinin kapanışı olan $V(\tau_1)$ 'i bulalım. τ_1 yüzü, σ_0 ve σ_1 'in ortak yüzü olduğundan, yörüngenin kapanışı tanımından, S_{σ_0} ve S_{σ_1} 'in üreteçlerini kullanacağız. S_{σ_0} 'ın üreteçleri, $a_1 = e_1^* = (1, 0)$ ve $a_2 = e_2^* = (0, 1)$ 'dir. (Şekil 2.19) $a_1 = (1, 0) \in \{\tau_1\}^\perp$ ve $a_2 = (0, 1) \notin \{\tau_1\}^\perp$ olduğundan, yörüngenin kapanışı tanımından, $I = \{2\}$ 'dir. Buradan, $V(\{\tau_1\})$, $X_{\sigma_0} = \mathbb{C}^2_{(u_1, u_2)} = \mathbb{C}^2_{(z_1, z_2)}$ 'de $u_2 = z^{a_2} = z_2 = 0$ elemanı ile tanımlanır. O halde, $V(\{\tau_1\}) = \mathbb{C}_{(z_1)} \times \{0\}$ 'dır.

Diğer taraftan, S_{σ_1} 'in üreteçleri $a_1 = -e_1^* = (-1, 0)$ ve $a_2 = -e_2^* + e_1^* = (-1, 1)$ 'dir. (Şekil 2.19) $a_1 = (-1, 0) \in \{\tau_1\}^\perp$ ve $a_2 = (-1, 1) \notin \{\tau_1\}^\perp$ olduğundan, yörüngenin kapanışı tanımından, $I = \{2\}$ 'dir. Buradan, $V(\{\tau_1\})$, $X_{\sigma_1} = \mathbb{C}^2_{(u_1, u_2)} = \mathbb{C}^2_{(z_1^{-1}, z_1^{-1} z_2)}$ 'de $u_2 = z^{a_2} = z_1^{-1} z_2 = 0$ elemanı ile tanımlanır. O halde, $V(\{\tau_1\}) = \mathbb{C}_{(z_1^{-1})} \times \{0\}$ 'dır.

τ_2 yüzü, σ_0 ve σ_2 'nin ortak yüzüdür. Örnek 2.33'ten, $S_{\sigma_0} = \check{\sigma}_0 \cap M$ 'nin üreteçleri, $a_1 = e_1^* = (1, 0)$ ve $a_2 = e_2^* = (0, 1)$ 'dir. (Şekil 2.19) $a_1 = (1, 0) \notin \{\tau_2\}^\perp$ ve $a_2 = (0, 1) \in \{\tau_2\}^\perp$ olduğundan, τ_2 yüzüne karşılık gelen ayrıcalıklı nokta $\{x_{\tau_2}\} = (0, 1)$ 'dir. τ_2 'nin yörüngesi, Tanım 2.36'dan, $\{x_{\tau_2}\} = (0, 1)$ 'in yörüngesidir. Yani, $(t_1, t_2) \in \mathbb{T}$ olmak üzere, yörünge tanımından, τ_2 'nin yörüngesi, torus etkisi ile elde ettiğimiz $(t_1, t_2)(0, 1)$ 'in gerdiği kümedir.

$$\begin{aligned}(t_1, t_2)(0, 1) &= (0, t^{a_2}) \\ &= (0, t_1^0 t_2^1) \\ &= (0, t_2^1)\end{aligned}$$

Dolayısıyla, τ_2 'nin yörüngesi $O_{\tau_2} = \{0\} \times \mathbb{C}_{z_2}^*$ olur.

Diğer taraftan, Örnek 2.33'ten, S_{σ_2} 'nin üreteçleri $a_1 = (0, -1)$ ve $a_2 = (1, -1)$ 'dir. (Şekil 2.19) $a_1 = (0, -1) \in \{\tau_2\}^\perp$ ve $a_2 = (1, -1) \notin \{\tau_2\}^\perp$ olduğundan, τ_2 yüzüne karşılık gelen ayrıcalıklı nokta $\{x_{\tau_2}\} = (1, 0)$ 'dir. τ_2 'nin yörüngesi, Tanım 2.36'dan, $\{x_{\tau_2}\} = (1, 0)$ 'ın yörüngesidir. Yani, $(t_1, t_2) \in \mathbb{T}$ olmak üzere, yörünge tanımından, τ_2 'nin yörüngesi, torus etkisi ile elde ettiğimiz $(t_1, t_2)(1, 0)$ 'in gerdiği kümedir.

$$\begin{aligned}(t_1, t_2)(1, 0) &= (t^{a_1}, 0) \\ &= (t_2^{-1}, 0)\end{aligned}$$

Dolayısıyla, τ_2 'nin yörüngesi $O_{\tau_2} = \mathbb{C}_{(z_2^{-1})}^* \times \{0\}$ olur.

Şimdi, O_{τ_2} yörüngesinin kapanışı olan $V(\tau_2)$ 'yi bulalım. τ_2 yüzü, σ_0 ve σ_2 'nin ortak yüzü olduğundan, yörüngenin kapanışı tanımından, S_{σ_0} ve S_{σ_2} 'nin üreteçlerini kullanacağız. S_{σ_0} 'ın üreteçleri, $a_1 = e_1^* = (1, 0)$ ve $a_2 = e_2^* = (0, 1)$ 'dir. (Şekil 2.19) $a_1 = (1, 0) \notin \{\tau_2\}^\perp$ ve $a_2 = (0, 1) \in \{\tau_2\}^\perp$ olduğundan, yörüngenin kapanışı tanımından, $I = \{1\}$ 'dir. Buradan, $V(\{\tau_2\})$, $X_{\sigma_0} = \mathbb{C}^2_{(u_1, u_2)} = \mathbb{C}^2_{(z_1, z_2)}$ 'de $u_1 = z^{a_1} = z_1 = 0$ elemanı ile tanımlanır. O halde, $V(\{\tau_2\}) = \{0\} \times \mathbb{C}_{(z_2)}$ 'dır.

Diğer taraftan, S_{σ_2} 'nın üreteçleri $a_1 = (0, -1)$ ve $a_2 = (1, -1)$ 'dir. (Şekil 2.19) $a_1 = (0, -1) \in \{\tau_2\}^\perp$ ve $a_2 = (1, -1) \notin \{\tau_2\}^\perp$ olduğundan, yörüngenin kapanışı tanımından, $I = \{2\}$ 'dir. Buradan, $V(\{\tau_2\})$, $X_{\sigma_2} = \mathbb{C}^2_{(u_1, u_2)} = \mathbb{C}^2_{(z_2^{-1}, z_1 z_2^{-1})}$ 'de $u_2 = z^{a_2} = z_1^1 z_2^{-1} = 0$ elemanı ile tanımlanır. O halde, $V(\{\tau_2\}) = \mathbb{C}_{(z_2^{-1})} \times \{0\}$ 'dır.

τ_3 yüzü, σ_1 ve σ_2 'nin ortak yüzüdür. Örnek 2.33'ten, S_{σ_1} 'in üreteçleri $a_1 = -e_1^* = (-1, 0)$ ve $a_2 = -e_1^* + e_2^* = (-1, 1)$ 'dir. (Şekil 2.19) $a_1 \notin \{\tau_3\}^\perp$ ve $a_2 \in \{\tau_3\}^\perp$ olduğundan, τ_3 yüzüne karşılık gelen ayrıcalıklı nokta $\{x_{\tau_3}\} = (0, 1)$ 'dir. Diğer yüzlere benzer şekilde, τ_3 'ün yörüngesi, torus etkisi ile elde ettiğimiz $(t_1, t_2)(0, 1)$ 'in gerdiği küme olur.

$$\begin{aligned}(t_1, t_2)(0, 1) &= (0, t^{a_2}) \\ &= (0, t_1^{-1} t_2^1)\end{aligned}$$

Dolayısıyla, τ_3 'ün yörüngesi $O_{\tau_3} = \{0\} \times \mathbb{C}_{(z_1^{-1} z_2^1)}^*$ olur.

Diğer taraftan, Örnek 2.33'ten, S_{σ_2} 'nin üreteçleri $a_1 = (0, -1)$ ve $a_2 = (1, -1)$ 'dir. (Şekil 2.19) $a_1 \notin \{\tau_3\}^\perp$ ve $a_2 \in \{\tau_3\}^\perp$ olduğundan, τ_3 yüzüne karşılık gelen ayrıcalıklı nokta $\{x_{\tau_3}\} = (0, 1)$ 'dir. τ_3 'ün yörüngesi, torus etkisi ile elde ettiğimiz $(t_1, t_2)(0, 1)$ 'in gerdiği küme olur.

$$\begin{aligned}(t_1, t_2)(0, 1) &= (0, t^{a_2}) \\ &= (0, t_1^1 t_2^{-1})\end{aligned}$$

Dolayısıyla, τ_3 'ün yörüngesi $O_{\tau_3} = \{0\} \times \mathbb{C}_{(z_1^1 z_2^{-1})}^*$ olur.

Şimdi, O_{τ_3} yörüngesinin kapanışı olan $V(\tau_3)$ 'ü bulalım. τ_3 yüzü, σ_1 ve σ_2 'nin ortak yüzü olduğundan, yöringenin kapanışı tanımından, S_{σ_1} ve S_{σ_2} 'nin üreteçlerini kullanacağımız. S_{σ_1} 'in üreteçleri, $a_1 = (-1, 0)$ ve $a_2 = (-1, 1)$ 'dir. (Şekil 2.19) $a_1 \notin \{\tau_3\}^\perp$ ve $a_2 \in \{\tau_3\}^\perp$ olduğundan, yöringenin kapanışı tanımından, $I = \{1\}$ 'dir. Buradan, $V(\{\tau_3\})$, $X_{\sigma_1} = \mathbb{C}^2_{(u_1, u_2)} = \mathbb{C}^2_{(z_1^{-1}, z_1^{-1} z_2)}$ 'de $u_1 = z^{a_1} = z_1^{-1} = 0$ elemanı ile tanımlanır. O halde, $V(\{\tau_3\}) = \{0\} \times \mathbb{C}_{(z_1^{-1} z_2)}^*$ 'dir.

Diğer taraftan, S_{σ_2} 'nin üreteçleri $a_1 = (0, -1)$ ve $a_2 = (1, -1)$ 'dir. (Şekil 2.19) $a_1 \notin \{\tau_3\}^\perp$ ve $a_2 \in \{\tau_3\}^\perp$ olduğundan, yöringenin kapanışı tanımından, $I = \{1\}$ 'dir. Buradan, $V(\{\tau_3\})$, $X_{\sigma_2} = \mathbb{C}^2_{(u_1, u_2)} = \mathbb{C}^2_{(z_2^{-1}, z_1 z_2^{-1})}$ 'de $u_1 = z^{a_1} = z_2^{-1} = 0$ elemanı ile tanımlanır. O halde, $V(\{\tau_3\}) = \{0\} \times \mathbb{C}_{(z_1 z_2^{-1})}^*$ 'dir.

$\sigma_0^\perp = \sigma_1^\perp = \sigma_2^\perp = \{0\}$ olduğundan; σ_0 , σ_1 ve σ_2 yüzlerine karşılık gelen ayrıcalıklı noktalar $\{x_{\sigma_0}\} = \{x_{\sigma_1}\} = \{x_{\sigma_2}\} = (0, 0)$ olur. Buradan, σ_0 , σ_1 ve σ_2 yüzlerine karşılık gelen yörüngeler ise $O_{\sigma_0} = O_{\sigma_1} = O_{\sigma_2} = \{0\} \times \{0\}$ 'dır.

Şimdi, O_{σ_0} yörüngesinin kapanışı olan $V(\sigma_0)$ 'yı bulalım. $S_{\sigma_0} = \sigma_0 \cap M$ 'nin üreteçleri, $a_1 = (1, 0)$ ve $a_2 = (0, 1)$ 'dir. (Şekil 2.19) $a_1 \notin \{\sigma_0\}^\perp$ ve $a_2 \notin \{\sigma_0\}^\perp$ olduğundan, yöringenin kapanışı tanımından, $I = \{1, 2\}$ 'dir. Buradan, $V(\{\sigma_0\})$, $X_{\sigma_0} = \mathbb{C}^2_{(z_1, z_2)}$ 'de $u_1 = z^{a_1} = z_1 = 0$ ve $u_2 = z^{a_2} = z_2 = 0$ elemanları ile tanımlanır. O halde, $V(\{\sigma_0\}) = \{0\} \times \{0\}$ 'dır.

$V(\sigma_0)$ 'a benzer şekilde, $V(\sigma_1) = V(\sigma_2) = \{0\} \times \{0\}$ olur.

Yukarıda afin koordinatlarda bulduğumuz tüm yörüngeler, \mathbb{CP}^2 'nin homojen koordinatlarına karşılık gelir. Bu nedenle, şimdi, Δ 'nın yüzlerinin, \mathbb{CP}^2 'de hangi homojen koordinatlara karşılık geldiklerini bulalım.

Örnek 2.33'ten, $(t_0 : t_1 : t_2)$ koordinatları \mathbb{CP}^2 uzayının homojen koordinatları olmak üzere \mathbb{CP}^2 klasik olarak aşağıdaki üç koordinat yaması ile kaplanır:

- $t_0 \neq 0$ 'a karşılık gelen U_0 açık kümesi $(t_1/t_0, t_2/t_0) = (z_1, z_2)$,
- $t_1 \neq 0$ 'a karşılık gelen U_1 açık kümesi $(t_0/t_1, t_2/t_1) = (z_1^{-1}, z_1^{-1}z_2)$,
- $t_2 \neq 0$ 'a karşılık gelen U_2 açık kümesi $(t_0/t_2, t_1/t_2) = (z_2^{-1}, z_1z_2^{-1})$ 'dir.

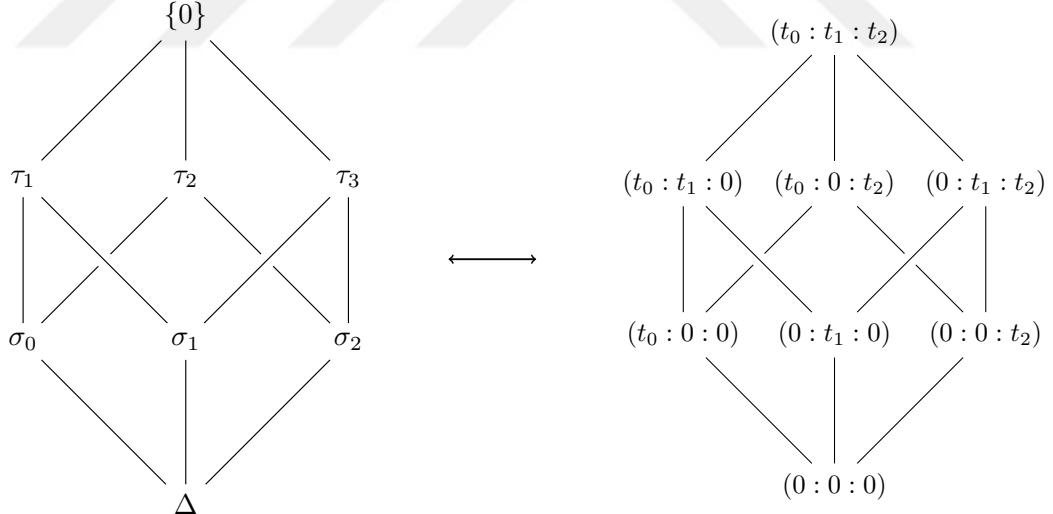
İlk olarak σ_0 'ın \mathbb{CP}^2 'de karşılık geldiği homojen koordinatları bulalım. Örnek 2.33'ten, X_{σ_0} afin torik varyetelerinin, \mathbb{CP}^2 'nin U_0 koordinat yamasına karşılık geldiğini biliyoruz. U_0 açık kümesinin tanımından ve $O_{\sigma_0} = \{0\} \times \{0\}$ olduğundan;

$$\begin{aligned}(z_1, z_2) = (0, 0) &\Rightarrow z_1 = 0 \text{ ve } z_2 = 0 \\ &\Rightarrow t_1/t_0 = 0 \text{ ve } t_2/t_0 = 0 \\ &\Rightarrow t_1 = 0 \text{ ve } t_2 = 0.\end{aligned}$$

Dolayısıyla, σ_0 konisi, \mathbb{CP}^2 'de $(t_0 : 0 : 0)$ 'a karşılık gelir.

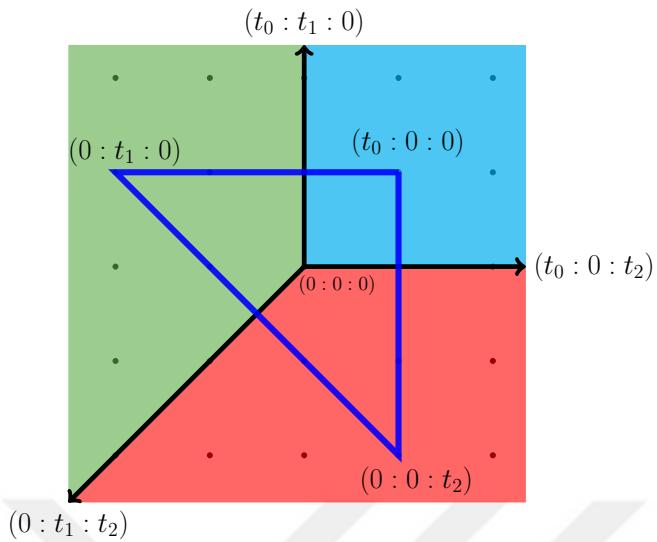
Örnek 2.33'ten, X_{σ_1} ve X_{σ_2} afin torik varyetelerinin, \mathbb{CP}^2 'nin sırasıyla U_1 ve U_2 koordinat yamalarına karşılık geldiğini biliyoruz. O halde, σ_0 konisine benzer şekilde, σ_1 konisi \mathbb{CP}^2 'de $(0 : t_1 : 0)$ 'a; σ_2 konisi \mathbb{CP}^2 'de $(0 : 0 : t_2)$ 'ye karşılık gelir.

Benzer şekilde, Δ 'nın tüm yörüngelerini, Şekil 2.20'te sağ taraftaki diyagramdaki gibi elde ederiz. Şekil 2.20'teki diyagralarda Δ 'nın bir yüzü, bu yüzün yörüngesine karşılık gelecek sekildedir.



Şekil 2.20: Δ 'nın yüz diyagramı ve \mathbb{CP}^2 'nin yörüngeleri diyagramı

Dolayısıyla, \mathbb{CP}^2 'nin yörüngeleri ve bu yörüngelere karşılık gelen koniler Şekil 2.21'daki gibi olur.



Şekil 2.21: \mathbb{CP}^2 'nin yörüngeleri ve yörüngelere karşılık gelen koniler

3. DUAL HİPERSİMPLEKSİN TORİK H-VEKTÖRÜ

Dual hipersimplekslerin torik h-sayılarını (h-vektörlerini) ele alacağımız bu bölümde genellikle [2]'yi, [5]'i ve [6]'yı takip edeceğiz.

Bir hipersimpleks, \mathbb{R}^n 'de k tane koordinatı 1, diğer $(n-k)$ -tane koordinatı 0 olan vektörlerin konveks zarfıdır [2]. Burada, konveks zarf¹ bu vektörleri içeren en küçük konveks kümedir. Yani, bu vektörleri çevreleyen bir yapı olarak düşünebilir.

Hipersimpleksin h-sayıları, hipersimpleksin yüz sayılarına bağlı olduğundan bu bölümde yüz sayılarının hesaplanması da yer vereceğiz. Hipersimplekslerin yüzlerinin sayılarını, vereceğimiz kodlarla, SageMath [10]'da ve Polymake [8]'de nasıl hesaplanacağını göstereceğiz.

Bir hipersimpleksin torik h-vektörü; torik h-polinomu ve torik g-polinomlarının katsayıları ile ilgilidir. Bu polinomlar, bir Eulerian posetin torik h-polinomu ve torik g-polinomu olarak tanımlanacağı için, öncelikle Eulerian posetlerden bahsedeceğiz.

Dual hipersimpleksin torik h-sayılarını hesaplamadan önce, [2]'den farklı olarak, sırasıyla bir Eulerian posetin torik h-vektörünü ve bir politopun torik h-vektörünü de inceleyerek örnekler vereceğiz.

Bir politopun torik h-vektörü, bu politopun yüz latisinin torik h-vektöridür. Bu yüz latisi bir Eulerian posettir. $\Delta(k, n)$ hipersimplekslerinin torik h-vektörünü hesaplarken, $h(L, x)$ ve $g(L, x)$ polinomlarındaki L Eulerian poseti; $\Delta(k, n)$ hipersimplekslerinin yüz latisi olur. Hipersimplekslerin torik h-vektörlerini, vereceğimiz kodlarla, Polymake [8]'de nasıl hesaplanacağını göstereceğiz. Buradaki amacımız, hipersimplekslerin torik h-vektörleri yardımcı ile dual hipersimplekslerin torik h-vektörlerini bulmak olacaktır.

P d -boyutlu bir politop olsun. P 'nin $d - 2$ ve $d - 2$ 'den küçük boyutlu yüzleri simpleks ise P çeyrek-simpleksel bir politoptur. $0 \leq k \leq n$ için, $\Delta^*(k, n)$ çeyrek-simplekseldir. $\Delta^*(k, n)$ çeyrek-simpleksel olduğundan, $\Delta^*(k, n)$ 'nin torik h-vektörünün ilk yarısı, $\Delta^*(k, n)$ 'nin h-vektörünün ilk yarısına eşittir [2]. Bu durumda, $\Delta^*(k, n)$ 'nin torik h-vektörlerini, $\Delta^*(k, n)$ 'nin h-vektörlerinden kolayca elde edebiliriz.

Dual hipersimplekslerin torik h-sayılarını bulmak için, ilk olarak [17]'de, daha sonra [2]'de verilmiş bir kombinatorik hesaplama formülünü de kullanacağız.

Bu bölümde dual hipersimplekslerin torik h-sayılarını Polymake [8] kullanarak da hesaplayacağız.

¹convex hull

3.1. Hipersimpleks

Tanım 3.1 ([2], 1.sayfa, Hipersimpleks). Bir hipersimpleks, \mathbb{R}^n 'de k tane koordinatı 1, diğer $(n-k)$ -tane koordinatı 0 olan vektörlerin konveks zarfidir². $\Delta(k, n)$ veya $\Delta_{k,n}$ ile gösterilir.

Tanım 3.2 ([6], 340.sayfa, Hipersimpleksin Yüzü). $I, J \subset [n] := \{1, 2, \dots, n\}$ olsun.

$I \cap J = \emptyset$, $|I| < k$ ve $|J| < n - k$ olmak üzere, $\Delta(k, n)$ 'nin pozitif boyutlu yüzleri (I, J) eşleşmeleri ile isimlendirilir. $1 \leq i \leq n$ olmak üzere, μ_i -koordinatı 1 diğer koordinatları 0 olan $k - |I|$ tane $e_{\mu_1}, e_{\mu_2}, \dots, e_{\mu_{k-|I|}}$ vektörü için, $\Delta(k, n)$ 'nin (I, J) adlı yüzü

$$\mathcal{F}_{I,J} = \text{konv} \left\{ \left(\sum_{i \in I} e_i \right) + e_{\mu_1} + \dots + e_{\mu_{k-|I|}} : \{e_{\mu_1}, \dots, e_{\mu_{k-|I|}}\} \in \binom{\{1, 2, \dots, n\} - (I \cup J)}{k-|I|} \right\}$$

olarak tanımlanır. Burada, $\binom{\{1, 2, \dots, n\} - (I \cup J)}{k-|I|}$ notasyonu $\{1, 2, \dots, n\} - (I \cup J)$ kümesinden $k - |I|$ tane eleman seçmek anlamına gelir. Ve konv ise küme parantezi içinde yer alan vektörleri içeren en küçük konveks kümeyi germe anlamına gelir. Başka bir deyişle, bu vektörleri içeren tüm konveks kümelerin kesişimi olarak tanımlanabilir.

Örnek 3.3. $\Delta(2, 4)$ hipersimpleksini ele alalım.

Tanım 3.1'den, $\Delta(2, 4)$ 2 tane koordinatı 1, diğer 2 tane koordinatı 0 olan vektörlerin konveks zarfi olur. O halde, $\Delta(2, 4)$ hipersimpleksinin köşeleri $(1, 1, 0, 0)$, $(1, 0, 1, 0)$, $(1, 0, 0, 1)$, $(0, 1, 1, 0)$, $(0, 1, 0, 1)$ ve $(0, 0, 1, 1)$ 'dir.

Şimdi, $\Delta(2, 4)$ hipersimpleksinin diğer yüzlerinin sayılarını bulalım. Tanım 3.2'den, $I, J \subset [4] := \{1, 2, 3, 4\}$, $I \cap J = \emptyset$, $|I| < 2$ ve $|J| < 2$ koşullarını sağlayan I ve J kümelerinin eleman sayıları 0 yada 1 elemanlı olur. O halde, aşağıdaki gibi 4 farklı durum vardır.

$ I $	$ J $
1	1
1	0
0	1
0	0

Tablo 3.1: $\Delta(2, 4)$ için I ve J kümelerinin eleman sayıları

- i. $|I| = 1$ ve $|J| = 1$ olsun. O halde, tüm (I, J) eşleşmeleri şöyledir:
 - $(\{1\}, \{2\}), (\{1\}, \{3\}), (\{1\}, \{4\}),$
 - $(\{2\}, \{1\}), (\{2\}, \{3\}), (\{2\}, \{4\}),$
 - $(\{3\}, \{1\}), (\{3\}, \{2\}), (\{3\}, \{4\}),$
 - $(\{4\}, \{1\}), (\{4\}, \{2\}), (\{4\}, \{3\}).$

²ing. hull

- ii. $|I| = 1$ ve $|J| = 0$ olsun. O halde, $J = \emptyset$ ve $I \subset \{1, 2, 3, 4\}$ olduğundan, tüm (I, J) eşleşmeleri şöyledir: $(\{1\}, \emptyset), (\{2\}, \emptyset), (\{3\}, \emptyset), (\{4\}, \emptyset)$.
- iii. $|J| = 1$ ve $|I| = 0$ olsun. O halde, $I = \emptyset$ ve $J \subset \{1, 2, 3, 4\}$ olduğundan, tüm (I, J) eşleşmeleri şöyledir: $(\emptyset, \{1\}), (\emptyset, \{2\}), (\emptyset, \{3\}), (\emptyset, \{4\})$.
- iv. $|J| = 0$ ve $|I| = 0$ olsun. Buradan, $I = \emptyset$ ve $J = \emptyset$ olmak üzere tek bir (\emptyset, \emptyset) ikilisi elde ederiz.

Şimdi elde ettiğimiz tüm (I, J) ikilileri için,

$$\mathcal{F}_{I,J} = \text{konv} \left\{ \left(\sum_{i \in I} e_i \right) + e_{\mu_1} + \dots + e_{\mu_{k-|I|}} : \{e_{\mu_1}, \dots, e_{\mu_{k-|I|}}\} \in \binom{\{1, 2, \dots, n\} - (I \cup J)}{k-|I|} \right\}$$

tanımından $\Delta(2, 4)$ 'ün yüzlerini bulalım. Hesapladığımız yüzler için, adım adım tablo oluşturacağız.

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\{1\}, \{2\}} &= \text{konv}\{e_1 + e_3, e_1 + e_4\} \\ &= \text{konv}\{(1, 0, 1, 0), (1, 0, 0, 1)\} \end{aligned}$$

Bu durumda, $\mathcal{F}_{\{1\}, \{2\}}$ yüzü, \mathbb{R}^4 'te, $(1, 0, 1, 0)$ ve $(1, 0, 0, 1)$ noktalarının girdiği bir doğru parçasıdır. Yani, $\Delta(2, 4)$ 'ün bir kenarını(1-yüzünü) verir.

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\{1\}, \{3\}} &= \text{konv}\{e_1 + e_2, e_1 + e_4\} \\ &= \text{konv}\{(1, 1, 0, 0), (1, 0, 0, 1)\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\{1\}, \{4\}} &= \text{konv}\{e_1 + e_2, e_1 + e_3\} \\ &= \text{konv}\{(1, 1, 0, 0), (1, 0, 1, 0)\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\{2\}, \{1\}} &= \text{konv}\{e_2 + e_3, e_2 + e_4\} \\ &= \text{konv}\{(0, 1, 1, 0), (0, 1, 0, 1)\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\{2\}, \{3\}} &= \text{konv}\{e_2 + e_1, e_2 + e_4\} \\ &= \text{konv}\{(1, 1, 0, 0), (0, 1, 0, 1)\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\{2\}, \{4\}} &= \text{konv}\{e_2 + e_1, e_2 + e_3\} \\ &= \text{konv}\{(1, 1, 0, 0), (0, 1, 1, 0)\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\{3\}, \{1\}} &= \text{konv}\{e_3 + e_2, e_3 + e_4\} \\ &= \text{konv}\{(0, 1, 1, 0), (0, 0, 1, 1)\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\{3\}, \{2\}} &= \text{konv}\{e_3 + e_1, e_3 + e_4\} \\ &= \text{konv}\{(0, 1, 1, 0), (0, 0, 1, 1)\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\{3\}, \{4\}} &= \text{konv}\{e_3 + e_1, e_3 + e_2\} \\ &= \text{konv}\{(1, 0, 1, 0), (0, 1, 1, 0)\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\{4\}, \{1\}} &= \text{konv}\{e_4 + e_2, e_4 + e_3\} \\ &= \text{konv}\{(0, 1, 0, 1), (0, 0, 1, 1)\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{\{4\},\{2\}} &= \text{konv}\{e_4 + e_1, e_4 + e_3\} \\ &= \text{konv}\{(1, 0, 0, 1), (0, 0, 1, 1)\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{\{4\},\{3\}} &= \text{konv}\{e_4 + e_1, e_4 + e_2\} \\ &= \text{konv}\{(1, 0, 0, 1), (0, 1, 0, 1)\}\end{aligned}$$

yüzün adı	yüzün boyutu
$\mathcal{F}_{\{1\},\{2\}}$	1
$\mathcal{F}_{\{1\},\{3\}}$	1
$\mathcal{F}_{\{1\},\{4\}}$	1
$\mathcal{F}_{\{2\},\{1\}}$	1
$\mathcal{F}_{\{2\},\{3\}}$	1
$\mathcal{F}_{\{2\},\{4\}}$	1
$\mathcal{F}_{\{3\},\{1\}}$	1
$\mathcal{F}_{\{3\},\{2\}}$	1
$\mathcal{F}_{\{3\},\{4\}}$	1
$\mathcal{F}_{\{4\},\{1\}}$	1
$\mathcal{F}_{\{4\},\{2\}}$	1
$\mathcal{F}_{\{4\},\{3\}}$	1

Tablo 3.2: i.durumdaki $\Delta_{2,4}$ 'ün yüzleri

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{\{1\},\emptyset} &= \text{konv}\{e_1 + e_2, e_1 + e_3, e_1 + e_4\} \\ &= \text{konv}\{(1, 1, 0, 0), (1, 0, 1, 0), (1, 0, 0, 1)\}\end{aligned}$$

Bu konveks küme, \mathbb{R}^4 'te, $(1, 1, 0, 0)$, $(1, 0, 1, 0)$ ve $(1, 0, 0, 1)$ noktalarının gerdiği bir üçgendir. Yani, $\Delta(2, 4)$ 'ün bir 2-yüzünü verir.

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{\{2\},\emptyset} &= \text{konv}\{e_2 + e_1, e_2 + e_3, e_2 + e_4\} \\ &= \text{konv}\{(1, 1, 0, 0), (0, 1, 1, 0), (0, 1, 0, 1)\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{\{3\},\emptyset} &= \text{konv}\{e_3 + e_1, e_3 + e_2, e_3 + e_4\} \\ &= \text{konv}\{(1, 0, 1, 0), (0, 1, 1, 0), (0, 0, 1, 1)\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{\{4\},\emptyset} &= \text{konv}\{e_4 + e_1, e_4 + e_2, e_4 + e_3\} \\ &= \text{konv}\{(1, 0, 0, 1), (0, 1, 0, 1), (0, 0, 1, 1)\}\end{aligned}$$

yüzün adı	yüzün boyutu
$\mathcal{F}_{\{1\},\emptyset}$	2
$\mathcal{F}_{\{2\},\emptyset}$	2
$\mathcal{F}_{\{3\},\emptyset}$	2
$\mathcal{F}_{\{4\},\emptyset}$	2

Tablo 3.3: ii.durumdaki $\Delta_{2,4}$ 'ün yüzleri

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_{\emptyset,\{1\}} &= \text{konv}\{e_2 + e_3, e_2 + e_4, e_3 + e_4\} \\
&= \text{konv}\{(0, 1, 1, 0), (0, 1, 0, 1), (0, 0, 1, 1)\} \\
\mathcal{F}_{\emptyset,\{2\}} &= \text{konv}\{e_1 + e_3, e_1 + e_4, e_3 + e_4\} \\
&= \text{konv}\{(1, 0, 1, 0), (1, 0, 0, 1), (0, 0, 1, 1)\} \\
\mathcal{F}_{\emptyset,\{3\}} &= \text{konv}\{e_1 + e_2, e_1 + e_4, e_2 + e_4\} \\
&= \text{konv}\{(1, 1, 0, 0), (1, 0, 0, 1), (0, 1, 0, 1)\} \\
\mathcal{F}_{\emptyset,\{4\}} &= \text{konv}\{e_1 + e_2, e_1 + e_3, e_2 + e_3\} \\
&= \text{konv}\{(1, 1, 0, 0), (1, 0, 1, 0), (0, 1, 1, 0)\}
\end{aligned}$$

yüzün adı	yüzün boyutu
$\mathcal{F}_{\emptyset,\{1\}}$	2
$\mathcal{F}_{\emptyset,\{2\}}$	2
$\mathcal{F}_{\emptyset,\{3\}}$	2
$\mathcal{F}_{\emptyset,\{4\}}$	2

Tablo 3.4: iii.durumdaki $\Delta_{2,4}$ 'ün yüzleri

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_{\emptyset,\emptyset} &= \text{konv}\{e_1 + e_2, e_1 + e_3, e_1 + e_4, e_2 + e_3, e_2 + e_4, e_3 + e_4\} \\
&= \text{konv}\{(1, 1, 0, 0), (1, 0, 1, 0), (1, 0, 0, 1), (0, 1, 1, 0), (0, 1, 0, 1), \\
&\quad (0, 0, 1, 1)\}
\end{aligned}$$

Bu konveks küme, \mathbb{R}^4 'te, $(1, 1, 0, 0), (1, 0, 1, 0), (1, 0, 0, 1), (0, 1, 1, 0), (0, 1, 0, 1), (0, 0, 1, 1)$ noktalarının gerdığı bir 8 yüzlüdür. Yani, bu (3.21)'deki yüz $\Delta(2, 4)$ 'ün tamamını verir.

yüzün adı	yüzün boyutu
$\mathcal{F}_{\emptyset,\emptyset}$	3

Tablo 3.5: iv.durumdaki $\Delta_{2,4}$ 'ün yüzleri

Yukarıdaki Tablo 3.2, Tablo 3.3, Tablo 3.4 ve Tablo 3.5'ten, $\Delta(2, 4)$ 'ün 6 köşesi, 12 kenarı ve 8 2-yüzü vardır.(Tablo 3.6)

yüzün boyutu	yüz sayısı
0	6
1	12
2	8

Tablo 3.6: $\Delta_{2,4}$ 'ün yüz sayıları

Örnek 3.4. $\Delta(2, 5)$ hipersimpleksini ele alalım.

Tanım 3.1'den, $\Delta(2, 5)$ 2 tane koordinatı 1, diğer 3 tane koordinatı 0 olan vektörlerin konveks zarfı olur. O halde, $\Delta_{2,5}$ hipersimpleksinin köşeleri $(1, 1, 0, 0, 0)$, $(1, 0, 1, 0, 0)$, $(1, 0, 0, 1, 0)$, $(1, 0, 0, 0, 1)$, $(0, 1, 1, 0, 0)$, $(0, 1, 0, 1, 0)$, $(0, 1, 0, 0, 1)$, $(0, 0, 1, 1, 0)$, $(0, 0, 1, 0, 1)$ ve $(0, 0, 0, 1, 1)$ 'dir.

Şimdi, $\Delta(2, 5)$ hipersimpleksinin diğer yüzlerinin sayılarını bulalım. Tanım 3.2'den, $I, J \subset [5] := \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $I \cap J = \emptyset$, $|I| < 2$ ve $|J| < 3$ koşullarını sağlayan I ve J kümelerinin eleman sayıları için aşağıdaki gibi 6 farklı durum vardır.

$ I $	$ J $
1	2
1	1
1	0
0	2
0	1
0	0

Tablo 3.7: $\Delta(2, 5)$ için I ve J kümelerinin eleman sayıları

- $|I| = 1$ ve $|J| = 2$ olsun. O halde, tüm (I, J) eşleşmeleri şöyledir:
 $(\{1\}, \{2, 3\}), (\{1\}, \{2, 4\}), (\{1\}, \{2, 5\}), (\{1\}, \{3, 4\}), (\{1\}, \{3, 5\}),$
 $(\{1\}, \{4, 5\}), (\{2\}, \{1, 3\}), (\{2\}, \{1, 4\}), (\{2\}, \{1, 5\}), (\{2\}, \{3, 4\}),$
 $(\{2\}, \{3, 5\}), (\{2\}, \{4, 5\}), (\{3\}, \{1, 2\}), (\{3\}, \{1, 4\}), (\{3\}, \{1, 5\}),$
 $(\{3\}, \{2, 4\}), (\{3\}, \{2, 5\}), (\{3\}, \{4, 5\}), (\{4\}, \{1, 2\}), (\{4\}, \{1, 3\}),$
 $(\{4\}, \{1, 5\}), (\{4\}, \{2, 3\}), (\{4\}, \{2, 5\}), (\{4\}, \{3, 5\}), (\{5\}, \{1, 2\}),$
 $(\{5\}, \{1, 3\}), (\{5\}, \{1, 4\}), (\{5\}, \{2, 3\}), (\{5\}, \{2, 4\}), (\{5\}, \{3, 4\})$.
- $|I| = 1$ ve $|J| = 1$ olsun. O halde, tüm (I, J) eşleşmeleri şöyledir:
 $(\{1\}, \{2\}), (\{1\}, \{3\}), (\{1\}, \{4\}), (\{1\}, \{5\}),$
 $(\{2\}, \{1\}), (\{2\}, \{3\}), (\{2\}, \{4\}), (\{2\}, \{5\}),$
 $(\{3\}, \{1\}), (\{3\}, \{2\}), (\{3\}, \{4\}), (\{3\}, \{5\}),$
 $(\{4\}, \{1\}), (\{4\}, \{2\}), (\{4\}, \{3\}), (\{4\}, \{5\}),$
 $(\{5\}, \{1\}), (\{5\}, \{2\}), (\{5\}, \{3\}), (\{5\}, \{4\})$.
- $|I| = 1$ ve $|J| = 0$ olsun. O halde, $J = \emptyset$ ve $I \subset \{1, 2, 3, 4, 5\}$ olduğundan, tüm (I, J) eşleşmeleri şöyledir: $(\{1\}, \emptyset), (\{2\}, \emptyset), (\{3\}, \emptyset), (\{4\}, \emptyset), (\{5\}, \emptyset)$.
- $|J| = 2$ ve $|I| = 0$ olsun. O halde, $I = \emptyset$ ve $J \subset \{1, 2, 3, 4, 5\}$ olduğundan, tüm (I, J) eşleşmeleri şöyledir: $(\emptyset, \{1, 2\}), (\emptyset, \{1, 3\}), (\emptyset, \{1, 4\}), (\emptyset, \{1, 5\}),$
 $(\emptyset, \{2, 3\}), (\emptyset, \{2, 4\}), (\emptyset, \{2, 5\}), (\emptyset, \{3, 4\}), (\emptyset, \{3, 5\}), (\emptyset, \{4, 5\})$.

- v. $|J| = 1$ ve $|I| = 0$ olsun. O halde, $I = \emptyset$ ve $J \subset \{1, 2, 3, 4, 5\}$ olduğundan, tüm (I, J) eşleşmeleri şöyledir: $(\emptyset, \{1\}), (\emptyset, \{2\}), (\emptyset, \{3\}), (\emptyset, \{4\}), (\emptyset, \{5\})$.
- vi. $|J| = 0$ ve $|I| = 0$ olsun. Buradan, $I = \emptyset$ ve $J = \emptyset$ olmak üzere tek bir (\emptyset, \emptyset) ikilisi elde ederiz.

Şimdi yukarıda elde ettiğimiz tüm (I, J) ikilileri için,

$$\mathcal{F}_{I,J} = \text{konv} \left\{ \left(\sum_{i \in I} e_i \right) + e_{\mu_1} + \dots + e_{\mu_{k-|I|}} : \{e_{\mu_1}, \dots, e_{\mu_{k-|I|}}\} \in \binom{\{1, 2, \dots, n\} - (I \cup J)}{k-|I|} \right\}$$

tanımından $\Delta(2, 5)$ 'in yüzlerini bulalım.

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\{1\}, \{2, 3\}} &= \text{konv}\{e_1 + e_4, e_1 + e_5\} \\ &= \text{konv}\{(1, 0, 0, 1, 0), (1, 0, 0, 0, 1)\} \\ \mathcal{F}_{\{1\}, \{2, 4\}} &= \text{konv}\{e_1 + e_3, e_1 + e_5\} \\ &= \text{konv}\{(1, 1, 0, 0), (1, 0, 0, 1)\} \\ \mathcal{F}_{\{1\}, \{2, 5\}} &= \text{konv}\{e_1 + e_3, e_1 + e_4\} \\ &= \text{konv}\{(1, 1, 0, 0), (1, 0, 1, 0)\} \\ \mathcal{F}_{\{1\}, \{3, 4\}} &= \text{konv}\{e_1 + e_2, e_1 + e_5\} \\ &= \text{konv}\{(1, 1, 0, 0), (1, 0, 1, 0)\} \\ \mathcal{F}_{\{1\}, \{3, 5\}} &= \text{konv}\{e_1 + e_2, e_1 + e_4\} \\ &= \text{konv}\{(1, 1, 0, 0), (1, 0, 1, 0)\} \\ \mathcal{F}_{\{1\}, \{4, 5\}} &= \text{konv}\{e_1 + e_2, e_1 + e_3\} \\ &= \text{konv}\{(1, 1, 0, 0), (1, 0, 1, 0)\} \\ \mathcal{F}_{\{2\}, \{1, 3\}} &= \text{konv}\{e_2 + e_4, e_2 + e_5\} \\ &= \text{konv}\{(0, 1, 1, 0), (0, 1, 0, 1)\} \\ \mathcal{F}_{\{2\}, \{1, 4\}} &= \text{konv}\{e_2 + e_3, e_2 + e_5\} \\ &= \text{konv}\{(1, 1, 0, 0), (0, 1, 0, 1)\} \\ \mathcal{F}_{\{2\}, \{1, 5\}} &= \text{konv}\{e_2 + e_3, e_2 + e_4\} \\ &= \text{konv}\{(1, 1, 0, 0), (0, 1, 1, 0)\} \\ \mathcal{F}_{\{2\}, \{3, 4\}} &= \text{konv}\{e_2 + e_1, e_2 + e_5\} \\ &= \text{konv}\{(1, 1, 0, 0), (0, 1, 1, 0)\} \\ \mathcal{F}_{\{2\}, \{3, 5\}} &= \text{konv}\{e_2 + e_1, e_2 + e_4\} \\ &= \text{konv}\{(1, 1, 0, 0), (0, 1, 1, 0)\} \\ \mathcal{F}_{\{2\}, \{4, 5\}} &= \text{konv}\{e_2 + e_1, e_2 + e_3\} \\ &= \text{konv}\{(1, 1, 0, 0), (0, 1, 1, 0)\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_{\{3\},\{1,2\}} &= \text{konv}\{e_3 + e_4, e_3 + e_5\} \\
&= \text{konv}\{(0, 1, 1, 0), (0, 0, 1, 1)\} \\
\mathcal{F}_{\{3\},\{1,4\}} &= \text{konv}\{e_3 + e_2, e_3 + e_5\} \\
&= \text{konv}\{(0, 1, 1, 0), (0, 0, 1, 1)\} \\
\mathcal{F}_{\{3\},\{1,5\}} &= \text{konv}\{e_3 + e_2, e_3 + e_4\} \\
&= \text{konv}\{(0, 1, 1, 0), (0, 0, 1, 1)\} \\
\mathcal{F}_{\{3\},\{2,4\}} &= \text{konv}\{e_3 + e_1, e_3 + e_5\} \\
&= \text{konv}\{(0, 1, 1, 0), (0, 0, 1, 1)\} \\
\mathcal{F}_{\{3\},\{2,5\}} &= \text{konv}\{e_3 + e_1, e_3 + e_4\} \\
&= \text{konv}\{(0, 1, 1, 0), (0, 0, 1, 1)\} \\
\mathcal{F}_{\{4\},\{1,2\}} &= \text{konv}\{e_4 + e_3, e_4 + e_5\} \\
&= \text{konv}\{(0, 1, 1, 0), (0, 0, 1, 1)\} \\
\mathcal{F}_{\{4\},\{1,3\}} &= \text{konv}\{e_4 + e_2, e_4 + e_5\} \\
&= \text{konv}\{(0, 1, 1, 0), (0, 0, 1, 1)\} \\
\mathcal{F}_{\{4\},\{1,5\}} &= \text{konv}\{e_4 + e_2, e_4 + e_3\} \\
&= \text{konv}\{(0, 1, 1, 0), (0, 0, 1, 1)\} \\
\mathcal{F}_{\{4\},\{2,3\}} &= \text{konv}\{e_4 + e_1, e_4 + e_5\} \\
&= \text{konv}\{(0, 1, 1, 0), (0, 0, 1, 1)\} \\
\mathcal{F}_{\{4\},\{2,5\}} &= \text{konv}\{e_4 + e_1, e_4 + e_3\} \\
&= \text{konv}\{(0, 1, 1, 0), (0, 0, 1, 1)\} \\
\mathcal{F}_{\{4\},\{3,5\}} &= \text{konv}\{e_4 + e_1, e_4 + e_2\} \\
&= \text{konv}\{(0, 1, 1, 0), (0, 0, 1, 1)\} \\
\mathcal{F}_{\{5\},\{1,2\}} &= \text{konv}\{e_5 + e_3, e_5 + e_4\} \\
&= \text{konv}\{(0, 1, 1, 0), (0, 0, 1, 1)\} \\
\mathcal{F}_{\{5\},\{1,3\}} &= \text{konv}\{e_5 + e_2, e_5 + e_4\} \\
&= \text{konv}\{(0, 1, 1, 0), (0, 0, 1, 1)\} \\
\mathcal{F}_{\{5\},\{1,4\}} &= \text{konv}\{e_5 + e_2, e_5 + e_3\} \\
&= \text{konv}\{(0, 1, 1, 0), (0, 0, 1, 1)\} \\
\mathcal{F}_{\{5\},\{2,3\}} &= \text{konv}\{e_5 + e_1, e_5 + e_4\} \\
&= \text{konv}\{(0, 1, 1, 0), (0, 0, 1, 1)\} \\
\mathcal{F}_{\{5\},\{2,4\}} &= \text{konv}\{e_5 + e_1, e_5 + e_3\} \\
&= \text{konv}\{(0, 1, 1, 0), (0, 0, 1, 1)\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{\{5\},\{3,4\}} &= \text{konv}\{e_5 + e_1, e_5 + e_2\} \\ &= \text{konv}\{(0, 1, 1, 0), (0, 0, 1, 1)\}\end{aligned}$$

yüzün adı	yüzün boyutu
$\mathcal{F}_{\{1\},\{2,3\}}$	1
$\mathcal{F}_{\{1\},\{2,4\}}$	1
$\mathcal{F}_{\{1\},\{2,5\}}$	1
$\mathcal{F}_{\{1\},\{3,4\}}$	1
$\mathcal{F}_{\{1\},\{3,5\}}$	1
$\mathcal{F}_{\{1\},\{4,5\}}$	1
$\mathcal{F}_{\{2\},\{1,3\}}$	1
$\mathcal{F}_{\{2\},\{1,4\}}$	1
$\mathcal{F}_{\{2\},\{1,5\}}$	1
$\mathcal{F}_{\{2\},\{3,4\}}$	1
$\mathcal{F}_{\{2\},\{3,5\}}$	1
$\mathcal{F}_{\{2\},\{4,5\}}$	1
$\mathcal{F}_{\{3\},\{1,2\}}$	1
$\mathcal{F}_{\{3\},\{1,4\}}$	1
$\mathcal{F}_{\{3\},\{1,5\}}$	1
$\mathcal{F}_{\{3\},\{2,4\}}$	1
$\mathcal{F}_{\{3\},\{2,5\}}$	1
$\mathcal{F}_{\{3\},\{4,5\}}$	1
$\mathcal{F}_{\{4\},\{1,2\}}$	1
$\mathcal{F}_{\{4\},\{1,3\}}$	1
$\mathcal{F}_{\{4\},\{1,5\}}$	1
$\mathcal{F}_{\{4\},\{2,3\}}$	1
$\mathcal{F}_{\{4\},\{2,5\}}$	1
$\mathcal{F}_{\{4\},\{3,5\}}$	1
$\mathcal{F}_{\{5\},\{1,2\}}$	1
$\mathcal{F}_{\{5\},\{1,3\}}$	1
$\mathcal{F}_{\{5\},\{1,4\}}$	1
$\mathcal{F}_{\{5\},\{2,3\}}$	1
$\mathcal{F}_{\{5\},\{2,4\}}$	1
$\mathcal{F}_{\{5\},\{3,4\}}$	1

Tablo 3.8: i.durumdaki $\Delta_{2,5}$ 'in yüzleri

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{\{1\},\{2\}} &= \text{konv}\{e_1 + e_3, e_1 + e_4, e_1 + e_5\} \\ &= \text{konv}\{(1, 0, 1, 0, 0), (1, 0, 0, 1, 0), (1, 0, 0, 0, 1)\} \\ \mathcal{F}_{\{1\},\{3\}} &= \text{konv}\{e_1 + e_2, e_1 + e_4, e_1 + e_5\} \\ &= \text{konv}\{(1, 0, 1, 0, 0), (1, 0, 0, 1, 0), (1, 0, 0, 0, 1)\} \\ \mathcal{F}_{\{1\},\{4\}} &= \text{konv}\{e_1 + e_2, e_1 + e_3, e_1 + e_5\} \\ &= \text{konv}\{(1, 1, 0, 0, 0), (1, 0, 1, 0, 0), (1, 0, 0, 0, 1)\} \\ \mathcal{F}_{\{1\},\{5\}} &= \text{konv}\{e_1 + e_2, e_1 + e_3, e_1 + e_4\} \\ &= \text{konv}\{(1, 1, 0, 0, 0), (1, 0, 1, 0, 0), (1, 0, 0, 1, 0)\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_{\{2\},\{1\}} &= \text{konv}\{e_2 + e_3, e_2 + e_4, e_2 + e_5\} \\
&= \text{konv}\{(0, 1, 1, 0, 0), (0, 1, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 0, 1)\} \\
\mathcal{F}_{\{2\},\{3\}} &= \text{konv}\{e_2 + e_1, e_2 + e_4, e_2 + e_5\} \\
&= \text{konv}\{(1, 1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 0, 1)\} \\
\mathcal{F}_{\{2\},\{4\}} &= \text{konv}\{e_2 + e_1, e_2 + e_3, e_2 + e_5\} \\
&= \text{konv}\{(1, 1, 0, 0, 0), (0, 1, 1, 0, 0), (0, 1, 0, 0, 1)\} \\
\mathcal{F}_{\{2\},\{5\}} &= \text{konv}\{e_2 + e_1, e_2 + e_3, e_2 + e_4\} \\
&= \text{konv}\{(1, 1, 0, 0, 0), (0, 1, 1, 0, 0), (0, 1, 0, 1, 0)\} \\
\mathcal{F}_{\{3\},\{1\}} &= \text{konv}\{e_3 + e_2, e_3 + e_4, e_3 + e_5\} \\
&= \text{konv}\{(0, 1, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 1, 0), (0, 0, 1, 0, 1)\} \\
\mathcal{F}_{\{3\},\{2\}} &= \text{konv}\{e_3 + e_1, e_3 + e_4, e_3 + e_5\} \\
&= \text{konv}\{(1, 0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 1, 0), (0, 0, 1, 0, 1)\} \\
\mathcal{F}_{\{3\},\{4\}} &= \text{konv}\{e_3 + e_1, e_3 + e_2, e_3 + e_5\} \\
&= \text{konv}\{(1, 0, 1, 0, 0), (0, 1, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0, 1)\} \\
\mathcal{F}_{\{3\},\{5\}} &= \text{konv}\{e_3 + e_1, e_3 + e_2, e_3 + e_4\} \\
&= \text{konv}\{(1, 0, 1, 0, 0), (0, 1, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 1, 0)\} \\
\mathcal{F}_{\{4\},\{1\}} &= \text{konv}\{e_4 + e_2, e_4 + e_3, e_4 + e_5\} \\
&= \text{konv}\{(0, 1, 0, 1, 0), (0, 0, 1, 1, 0), (0, 0, 0, 1, 1)\} \\
\mathcal{F}_{\{4\},\{2\}} &= \text{konv}\{e_4 + e_1, e_4 + e_3, e_4 + e_5\} \\
&= \text{konv}\{(1, 0, 0, 1, 0), (0, 0, 1, 1, 0), (0, 0, 0, 1, 1)\} \\
\mathcal{F}_{\{4\},\{3\}} &= \text{konv}\{e_4 + e_1, e_4 + e_2, e_4 + e_5\} \\
&= \text{konv}\{(1, 0, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1, 1)\} \\
\mathcal{F}_{\{4\},\{5\}} &= \text{konv}\{e_4 + e_1, e_4 + e_2, e_4 + e_3\} \\
&= \text{konv}\{(1, 0, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 1, 0), (0, 0, 1, 1, 0)\} \\
\mathcal{F}_{\{5\},\{1\}} &= \text{konv}\{e_5 + e_2, e_5 + e_3, e_5 + e_4\} \\
&= \text{konv}\{(0, 1, 0, 0, 1), (0, 0, 1, 0, 1), (0, 0, 0, 1, 1)\} \\
\mathcal{F}_{\{5\},\{2\}} &= \text{konv}\{e_5 + e_1, e_5 + e_3, e_5 + e_4\} \\
&= \text{konv}\{(1, 0, 0, 0, 1), (0, 0, 1, 0, 1), (0, 0, 0, 1, 1)\} \\
\mathcal{F}_{\{5\},\{3\}} &= \text{konv}\{e_5 + e_1, e_5 + e_2, e_5 + e_4\} \\
&= \text{konv}\{(1, 0, 0, 0, 1), (0, 1, 0, 0, 1), (0, 0, 0, 1, 1)\} \\
\mathcal{F}_{\{5\},\{4\}} &= \text{konv}\{e_5 + e_1, e_5 + e_2, e_5 + e_3\} \\
&= \text{konv}\{(1, 0, 0, 0, 1), (0, 1, 0, 0, 1), (0, 0, 1, 0, 1)\}
\end{aligned}$$

yüzün adı	yüzün boyutu
$\mathcal{F}_{\{1\},\{2\}}$	2
$\mathcal{F}_{\{1\},\{3\}}$	2
$\mathcal{F}_{\{1\},\{4\}}$	2
$\mathcal{F}_{\{1\},\{5\}}$	2
$\mathcal{F}_{\{2\},\{1\}}$	2
$\mathcal{F}_{\{2\},\{3\}}$	2
$\mathcal{F}_{\{2\},\{4\}}$	2
$\mathcal{F}_{\{2\},\{5\}}$	2
$\mathcal{F}_{\{3\},\{1\}}$	2
$\mathcal{F}_{\{3\},\{2\}}$	2
$\mathcal{F}_{\{3\},\{4\}}$	2
$\mathcal{F}_{\{3\},\{5\}}$	2
$\mathcal{F}_{\{4\},\{1\}}$	2
$\mathcal{F}_{\{4\},\{2\}}$	2
$\mathcal{F}_{\{4\},\{3\}}$	2
$\mathcal{F}_{\{4\},\{5\}}$	2
$\mathcal{F}_{\{5\},\{1\}}$	2
$\mathcal{F}_{\{5\},\{2\}}$	2
$\mathcal{F}_{\{5\},\{3\}}$	2
$\mathcal{F}_{\{5\},\{4\}}$	2

Tablo 3.9: ii.durumdaki $\Delta_{2,5}$ 'in yüzleri

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{\{1\},\emptyset} &= \text{konv}\{e_1 + e_2, e_1 + e_3, e_1 + e_4, e_1 + e_5\} \\ &= \text{konv}\{(1, 1, 0, 0, 0), (1, 0, 1, 0, 0), (1, 0, 0, 1, 0), (1, 0, 0, 0, 1)\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{\{2\},\emptyset} &= \text{konv}\{e_2 + e_1, e_2 + e_3, e_2 + e_4\} \\ &= \text{konv}\{(1, 1, 0, 0, 0), (0, 1, 1, 0, 0), (0, 1, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 1, 0)\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{\{3\},\emptyset} &= \text{konv}\{e_3 + e_1, e_3 + e_2, e_3 + e_4, e_3 + e_5\} \\ &= \text{konv}\{(1, 0, 1, 0, 0), (0, 1, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 1, 0), (0, 0, 1, 0, 1)\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{\{4\},\emptyset} &= \text{konv}\{e_4 + e_1, e_4 + e_2, e_4 + e_3, e_4 + e_5\} \\ &= \text{konv}\{(1, 0, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 1, 0), (0, 0, 1, 1, 0), (0, 0, 0, 1, 1)\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{\{5\},\emptyset} &= \text{konv}\{e_5 + e_1, e_5 + e_2, e_5 + e_3, e_5 + e_4\} \\ &= \text{konv}\{(1, 0, 0, 0, 1), (0, 1, 0, 0, 1), (0, 0, 1, 0, 1), (0, 0, 0, 1, 1)\}\end{aligned}$$

yüzün adı	yüzün boyutu
$\mathcal{F}_{\{1\}, \emptyset}$	3
$\mathcal{F}_{\{2\}, \emptyset}$	3
$\mathcal{F}_{\{3\}, \emptyset}$	3
$\mathcal{F}_{\{4\}, \emptyset}$	3
$\mathcal{F}_{\{5\}, \emptyset}$	3

Tablo 3.10: iii.durumdaki $\Delta_{2,5}$ 'in yüzleri

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_{\emptyset, \{1,2\}} &= \text{konv}\{e_3 + e_4, e_3 + e_5, e_4 + e_5\} \\
&= \text{konv}\{(0, 0, 1, 1, 0), (0, 0, 1, 0, 1), (0, 0, 0, 1, 1)\} \\
\mathcal{F}_{\emptyset, \{1,3\}} &= \text{konv}\{e_2 + e_4, e_2 + e_5, e_4 + e_5\} \\
&= \text{konv}\{(0, 1, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 0, 1), (0, 0, 0, 1, 1)\} \\
\mathcal{F}_{\emptyset, \{1,4\}} &= \text{konv}\{e_2 + e_3, e_2 + e_5, e_3 + e_5\} \\
&= \text{konv}\{(0, 1, 1, 0, 0), (0, 1, 0, 0, 1), (0, 0, 1, 0, 1)\} \\
\mathcal{F}_{\emptyset, \{1,5\}} &= \text{konv}\{e_2 + e_3, e_2 + e_4, e_3 + e_4\} \\
&= \text{konv}\{(0, 1, 1, 0, 0), (0, 1, 0, 1, 0), (0, 0, 1, 1, 0)\} \\
\mathcal{F}_{\emptyset, \{2,3\}} &= \text{konv}\{e_1 + e_4, e_1 + e_5, e_4 + e_5\} \\
&= \text{konv}\{(1, 0, 0, 1, 0), (1, 0, 0, 0, 1), (0, 0, 0, 1, 1)\} \\
\mathcal{F}_{\emptyset, \{2,4\}} &= \text{konv}\{e_1 + e_3, e_1 + e_5, e_3 + e_5\} \\
&= \text{konv}\{(1, 0, 1, 0, 0), (1, 0, 0, 0, 1), (0, 0, 1, 0, 1)\} \\
\mathcal{F}_{\emptyset, \{2,5\}} &= \text{konv}\{e_1 + e_3, e_1 + e_4, e_3 + e_4\} \\
&= \text{konv}\{(1, 0, 1, 0, 0), (1, 0, 0, 1, 0), (0, 0, 1, 1, 0)\} \\
\mathcal{F}_{\emptyset, \{3,4\}} &= \text{konv}\{e_1 + e_2, e_1 + e_5, e_2 + e_5\} \\
&= \text{konv}\{(1, 1, 0, 0, 0), (1, 0, 0, 0, 1), (0, 1, 0, 0, 1)\} \\
\mathcal{F}_{\emptyset, \{3,5\}} &= \text{konv}\{e_1 + e_2, e_1 + e_4, e_2 + e_4\} \\
&= \text{konv}\{(1, 1, 0, 0, 0), (1, 0, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 1, 0)\} \\
\mathcal{F}_{\emptyset, \{4,5\}} &= \text{konv}\{e_1 + e_2, e_1 + e_3, e_2 + e_3\} \\
&= \text{konv}\{(1, 1, 0, 0, 0), (1, 0, 1, 0, 0), (0, 1, 1, 0, 0)\}
\end{aligned}$$

yüzün adı	yüzün boyutu
$\mathcal{F}_{\emptyset, \{1,2\}}$	2
$\mathcal{F}_{\emptyset, \{1,3\}}$	2
$\mathcal{F}_{\emptyset, \{1,4\}}$	2
$\mathcal{F}_{\emptyset, \{1,5\}}$	2
$\mathcal{F}_{\emptyset, \{2,3\}}$	2
$\mathcal{F}_{\emptyset, \{2,4\}}$	2
$\mathcal{F}_{\emptyset, \{2,5\}}$	2
$\mathcal{F}_{\emptyset, \{3,4\}}$	2
$\mathcal{F}_{\emptyset, \{3,5\}}$	2
$\mathcal{F}_{\emptyset, \{4,5\}}$	2

Tablo 3.11: iv.durumdaki $\Delta_{2,5}$ 'in yüzleri

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}_{\emptyset, \{1\}} &= \text{konv}\{e_2 + e_3, e_2 + e_4, e_2 + e_5, e_3 + e_4, e_3 + e_5, e_4 + e_5\} \\
 &= \text{konv}\{(0, 1, 1, 0, 0), (0, 1, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 0, 1), (0, 0, 1, 1, 0), \\
 &\quad (0, 0, 1, 0, 1), (0, 0, 0, 1, 1)\} \\
 \\
 \mathcal{F}_{\emptyset, \{2\}} &= \text{konv}\{e_1 + e_3, e_1 + e_4, e_1 + e_5, e_3 + e_4, e_3 + e_5, e_4 + e_5\} \\
 &= \text{konv}\{(1, 0, 1, 0, 0), (1, 0, 0, 1, 0), (1, 0, 0, 0, 1), (0, 0, 1, 1, 0), \\
 &\quad (0, 0, 1, 0, 1), (0, 0, 0, 1, 1)\} \\
 \\
 \mathcal{F}_{\emptyset, \{3\}} &= \text{konv}\{e_1 + e_2, e_1 + e_4, e_1 + e_5, e_2 + e_4, e_2 + e_5, e_4 + e_5\} \\
 &= \text{konv}\{(1, 1, 0, 0, 0), (1, 0, 0, 1, 0), (1, 0, 0, 0, 1), (0, 1, 0, 1, 0), \\
 &\quad (0, 1, 0, 0, 1), (0, 0, 0, 1, 1)\} \\
 \\
 \mathcal{F}_{\emptyset, \{4\}} &= \text{konv}\{e_1 + e_2, e_1 + e_3, e_1 + e_5, e_2 + e_3, e_2 + e_5, e_3 + e_5\} \\
 &= \text{konv}\{(1, 1, 0, 0, 0), (1, 0, 1, 0, 0), (1, 0, 0, 0, 1), (0, 1, 1, 0, 0), \\
 &\quad (0, 1, 0, 0, 1), (0, 0, 1, 0, 1)\} \\
 \\
 \mathcal{F}_{\emptyset, \{5\}} &= \text{konv}\{e_1 + e_2, e_1 + e_3, e_1 + e_4, e_2 + e_3, e_2 + e_4, e_3 + e_4\} \\
 &= \text{konv}\{(1, 1, 0, 0, 0), (1, 0, 1, 0, 0), (1, 0, 0, 1, 0), (0, 1, 1, 0, 0), \\
 &\quad (0, 1, 0, 1, 0), (0, 0, 1, 1, 0)\}
 \end{aligned}$$

yüzün adı	yüzün boyutu
$\mathcal{F}_{\emptyset, \{1\}}$	3
$\mathcal{F}_{\emptyset, \{2\}}$	3
$\mathcal{F}_{\emptyset, \{3\}}$	3
$\mathcal{F}_{\emptyset, \{4\}}$	3
$\mathcal{F}_{\emptyset, \{5\}}$	3

Tablo 3.12: v.durumdaki $\Delta_{2,5}$ 'in yüzleri

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_{\emptyset, \emptyset} &= \text{konv}\{e_1 + e_2, e_1 + e_3, e_1 + e_4, e_1 + e_5, e_2 + e_3, e_2 + e_4, e_2 + e_5, e_3 + e_4, \\
&\quad e_3 + e_5, e_4 + e_5\} \\
&= \text{konv}\{(1, 1, 0, 0, 0), (1, 0, 1, 0, 0), (1, 0, 0, 1, 0), (1, 0, 0, 0, 1), (0, 1, 1, 0, 0), \\
&\quad (0, 1, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 0, 1), (0, 0, 1, 1, 0), (0, 0, 1, 0, 1), (0, 0, 0, 1, 1)\}
\end{aligned}$$

yüzün adı	yüzün boyutu
$\mathcal{F}_{\emptyset, \emptyset}$	4

Tablo 3.13: vi.durumdaki $\Delta_{2,5}$ 'in yüzleri

Yukarıdaki Tablo 3.8, Tablo 3.9, Tablo 3.10, Tablo 3.11, Tablo 3.12 ve Tablo 3.13'ten, $\Delta(2, 5)$ 'in 10 köşesi, 30 kenarı, 30 2-yüzü ve 10 3-yüzü vardır.(Tablo 3.14)

yüzün boyutu	yüz sayısı
0	10
1	30
2	30
3	10

Tablo 3.14: $\Delta_{2,5}$ 'in yüz sayıları

Yukarıda bulduğumuz hipersimplekslerin yüzlerinin sayılarından, dual hipersimplekslerin yüzlerinin sayılarını elde edeceğimiz için bu sayılar önemlidir. Ayrıca hipersimplekslerin yüzlerinin sayılarını SageMath [10] kullanarak aşağıdaki şekilde, hipersimpleksleri köşeleri ile tanımlayarak, hesaplayabiliriz.

$\Delta(2, 4)$ 'ün yüz sayılarını bulmak için, ilk olarak SageMath [10]'da $\Delta(2, d)$ 'yi aşağıdaki kodlarla tanımlarız:

```

def hypersimplex(k,d):
    V = [ [ 1 if j in i else 0 for j in range(d) ] for i in
Subsets(list(range(d)),2)]
    "print V" kodu ile  $\Delta(2, 4)$ 'ün köşelerini elde edeceğiz.
    "return Polyhedron(vertices=V)" kodu, bir sonraki kodda hipersimpleksi
    "hypersimplex(2,4)" olarak belirtmemizle,  $\Delta(2, 4)$ 'ün köşelerini; bu köşelerin
    gerdiği çokyüzlüye dönüştürecektir.
    "hypersimplex(2,4).f_vector()" kodu ile de  $\Delta(2, 4)$ 'ün f-vektörünü yani
    yüzlerinin sayılarını buluruz.

```

Sonuç:

$\Delta(2,4)$ 'ün köşeleri: [[1, 1, 0, 0], [1, 0, 1, 0], [1, 0, 0, 1], [0, 1, 1, 0], [0, 1, 0, 1], [0, 0, 1, 1]]
 $\Delta(2,4)$ 'ün yüz sayıları: (6, 12, 8)

$\Delta(3,5)$ 'in yüz sayıları benzer şekilde bulunur. Kısaca yazalım:

```
def hypersimplex(k,d):  
    V = [ [ 1 if j in i else 0 for j in range(d) ] for i in  
          Subsets(list(range(d)),3)]  
    print V  
    return Polyhedron(vertices=V)  
hypersimplex(3,5).f_vector()
```

Sonuç:

$\Delta(3,5)$ 'in köşeleri: [[1, 1, 1, 0, 0], [1, 1, 0, 1, 0], [1, 1, 0, 0, 1], [1, 0, 1, 1, 0], [1, 0, 1, 0, 1], [1, 0, 0, 1, 1], [0, 1, 1, 1, 0], [0, 1, 1, 0, 1], [0, 1, 0, 1, 1], [0, 0, 1, 1, 1]]
 $\Delta(3,5)$ 'in yüz sayıları: (10 30 30 10)

Bu sayıları Polymake [8] ile de şu şekilde hesaplayabiliriz:

$\Delta(2,4)$ 'ün yüz sayıları:

```
$h_24 = hypersimplex(2,4,group=>1);  
print $h_24->F_VECTOR;  
6 12 8
```

$\Delta(3,5)$ 'in yüz sayıları:

```
$h_35 = hypersimplex(3,5,group=>1);  
print $h_35->F_VECTOR;  
10 30 30 10
```

Tüm $\Delta(k,n)$ 'lerin yüz sayılarını hesaplamak için ise genel form şu şekildedir:

```
$h = hypersimplex(k,n,group=>1);  
print $h->F_VECTOR;
```

Bazı $\Delta(k, n)$ 'lerin yüzlerinin sayılarını bir tabloda gösterelim.(Tablo 3.15)

k, n	yüz sayıları(f vektörü)
2, 4	6 12 8
2, 5	10 30 30 10
2, 6	15 60 80 45 12
3, 6	20 90 120 60 12
2, 7	21 105 175 140 63 14
3, 7	35 210 350 245 84 14
2, 8	28 168 336 350 224 84 16
3, 8	56 420 840 770 392 112 16
4, 8	70 560 1120 980 448 112 16
2, 9	36 252 588 756 630 336 108 18
3, 9	84 756 1764 2016 1386 588 144 18
4, 9	126 1260 2940 3150 1890 672 144 18
2, 10	45 360 960 1470 1512 1050 480 135 20
3, 10	120 1260 3360 4620 4032 2310 840 180 20
4, 10	210 2520 6720 8610 6552 3150 960 180 20
5, 10	252 3150 8400 10500 7560 3360 960 180 20

Tablo 3.15: $\Delta(k, n)$ 'nin yüz sayıları

Bir hipersimpleksin torik h-vektörü, bu hipersimpleksin yüz latisi ile ilgili olduğundan, şimdi yüz latisini ele alacağız. İlk olarak, yüz latisi tanımlamak için gerekli olan poset ve latis tanımlarını yapacağız. Ve bir sonraki bölümde Eulerian poset tanımda ihtiyaç duyacağımız derecelendirilmiş poseti tanımlayacağız. Bu tanımlar için [9], §1'i takip edeceğiz.

Tanım 3.5 (Poset). Yansıma, antisimetri ve geçişme özelliklerini sağlayan bir kümeye *kısmi sıralı küme* veya *poset* denir. Ve P ile gösterilir.

P bir poset olmak üzere, P 'den alınan birbirinden farklı herhangi iki eleman, poset üzerindeki kısmi sıralamaya(\leq) göre karşılaştırılabilirse bu posete *zincir* denir. $b \in P$ elemanı için, $b < a$ olacak şekilde bir $a \in P$ bulunmuyorsa b 'ye P 'nin *maksimal elemanı*; $a \in P$ elemanı için, $a < b$ olacak şekilde bir $b \in P$ bulunmuyorsa a 'ya P 'nin *minimal elemanı* denir.

Şimdi, derecelendirilmiş poseti tanımlayalım.

Tanım 3.6 (Derecelendirilmiş Poset). P bir bir poset olsun. $a, b \in P$ alalım.

- i. $a < b$ ise $f(a) < f(b)$ ve
- ii. $a < b$ ve a, b elemanları arasında a ve b 'den farklı bir eleman yok ise

$$f(b) = f(a) + 1$$

koşullarını sağlayan bir $f : P \rightarrow \mathbb{Z}$ rank fonksiyonu varsa P posetine *derecelendirilmiş poset* denir. Bir derecelendirilmiş posetin rankı, herhangi bir maksimal zincirdeki elemanların sayısının 1 eksigidir.

Bir hipersimpleksin yüz latisini tanımlamadan önce, latisin genel tanımını yapalım.

Tanım 3.7 (Latis). Bir P posetinin boş kümeden farklı bütün alt kümeleri, en az bir üst sınıra ve en büyük alt sınıra sahipse P posetine ***latis*** denir.

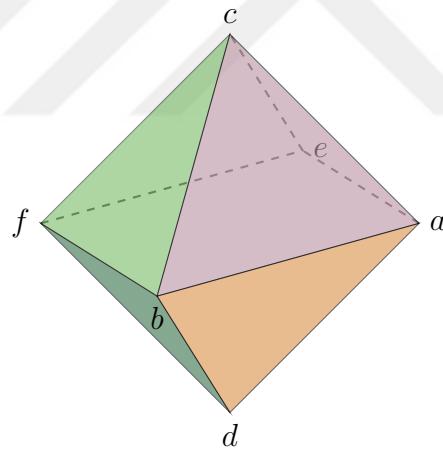
Biz hipersimplekslerin yüzleri arasındaki içerme ilişkisi altında kısmi sıralı kümelerle ilgileneceğiz. $\Delta(k, n)$ bir hipersimpleks olmak üzere, $\Delta(k, n)$ 'nin yüz poseti $P(\Delta(k, n))$ ile gösterilir. Latis tanımından, yani $P(\Delta(k, n))$ posetinin boş kümeden farklı bütün alt kümeleri en az bir üst sınıra ve en büyük alt sınıra sahip olduğundan, $P(\Delta(k, n))$ poseti bir latistir.

Tanım 3.8 (Yüz Latisı). $\Delta(k, n)$ bir hipersimpleks olmak üzere, bu hipersimpleksin yüzleri arasındaki içerme ilişkisi altında kısmi sıralı bir küme olan $P(\Delta(k, n))$ latisine $\Delta(k, n)$ hipersimpleksinin ***yüz latisı*** denir.

Şimdi, hipersimplekslerin yüz latisleri örneklerinden önce, geometrik olarak daha anlaşılır bir politopun yüz latisini bulalım.

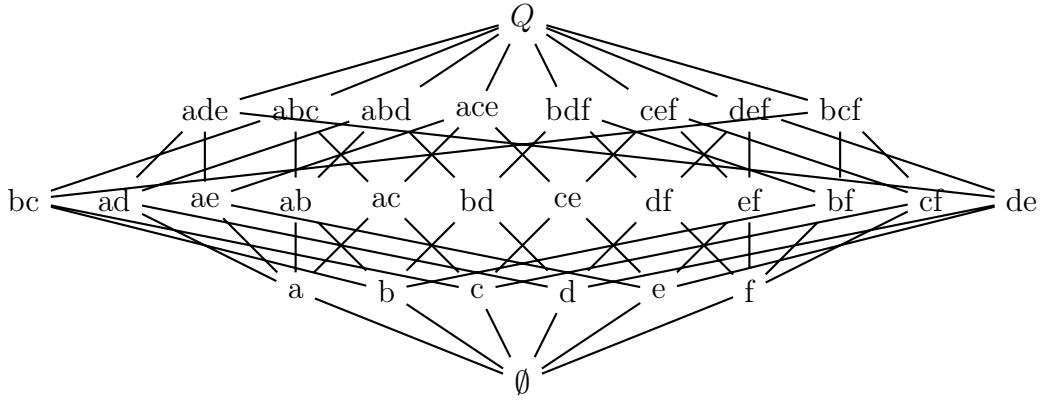
Örnek 3.9. Konveks bir politop olan oktahedronu ele alalım.

Q , köşeleri $(1, 0, 0)$, $(-1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, -1, 0)$, $(0, 0, 1)$ ve $(0, 0, -1)$ olan bir oktahedron olsun. Q 'nun köşelerini isimlendirelim. $a = (1, 0, 0)$, $b = (0, 0, 1)$, $c = (0, 1, 0)$, $d = (0, -1, 0)$, $e = (0, 0, -1)$ ve $f = (-1, 0, 0)$ olsun. (Şekil 3.1)



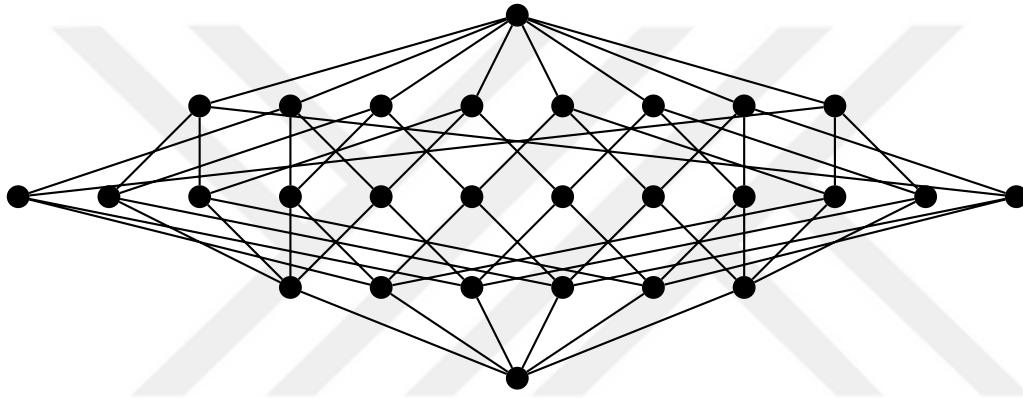
Şekil 3.1: Oktahedron

Oktahedronun kenarlarını ve 2-yüzlerini de köşelerine göre isimlendirelim. Örneğin, a ve b köşelerinin arasında kalan kenar ab ; ab , ac ve bc kenarlarının arasında kalan eşkenar üçgen abc olsun. Buna göre oktahedron oluşturan tüm yüzler arasında Şekil 3.2'deki gibi bir ilişki vardır.



Şekil 3.2: Oktahedronun yüz diyagramı

Şekil 3.2'den, oktahedronun yüz latisi Şekil 3.3'teki gibi olur.



Şekil 3.3: Oktahedronun yüz latisi

3.2. Hipersimpleksin Torik H-Vektörleri

Bir hipersimpleksin torik h-vektörü, torik h-polinomu ve torik g-polinomlarının katsayıları ile ilgilidir. Bu polinomları tanımlamadan önce için ihtiyaç duyacağımız Eulerian poseti tanımlayalım. Hipersimpleksin torik h-vektörleri için, [2]'yi, [4]'ü, [5]'i ve [16]'yı takip edeceğiz.

Tanım 3.10 ([16], 9.sayfa, Eulerian Poset). Sonlu bir derecelendirilmiş posetin her aşikar olmayan aralığı tek ve çift ranklı aynı sayıda elemana sahipse bu posete **Eulerian poset** denir. Ve L ile gösterilir.

L 'nin en küçük elemanı $\hat{0}$, en büyük elemanı ise $\hat{1}$ 'dir.

$p \in L$ için, $[\hat{0}, p] = \{q \in L : q \leq p\}$ olmak üzere, $\text{rank}[\hat{0}, p] = \text{rank}(p)$ 'dir.

Torik h-polinomu ve torik g-polinomunu, [2]'deki gibi tanımlayacağız. Ayrıca, bu tanımlar, [4]'te 190.sayfada ve [5]'te 355.sayfada bulunabilir. Biz [4] ve [5]'teki tanımlardan farklı olarak [2]'deki gibi f-polinomu yerine h-polinomu notasyonunu kullandık.

Tanım 3.11 ([2], 2.sayfa, Torik h-polinomu ve Torik g-polinomu). L bir Eulerian poset olsun. $h(L, x)$ ve $g(L, x)$ polinomları L üzerinde tümevarımsal olarak;

1.

$$h(\emptyset, x) = g(\emptyset, x) = 1$$

2. $\text{rank}(L) > 0$ için,

$$h(L, x) = \sum_{p \in L - \{\hat{1}\}}^r g([\hat{0}, p], x) (x - 1)^{\text{rank}[\hat{1}] - \text{rank}(p) - 1}$$

3. $\text{rank}(L) > 0$ için, $d = \text{rank}(L) - 1$ ve $m = \lfloor d/2 \rfloor$ olmak üzere, $h(L, x) = h_0 + h_1 x^1 + \dots + h_d x^d$ polinomun katsayıları ile elde edilen

$$g(L, x) = h_0 + (h_1 - h_0)x + (h_2 - h_1)x^2 + \dots + (h_m - h_{m-1})x^m$$

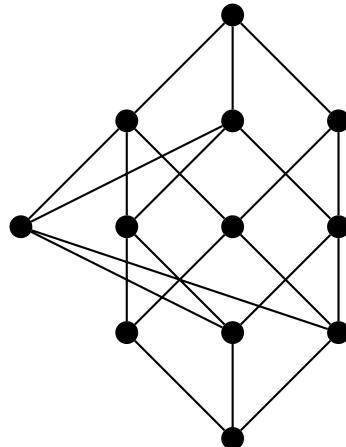
şeklinde tanımlanır. Burada $h(L, x)$ polinomuna L 'nin **torik h-polinomu**, $g(L, x)$ polinomuna ise L 'nin **torik g-polinomu** denir.

Bir hipersimpleksin torik h-vektörünü bulmak için öncelikle yüz latisini bulmamız gerekeceğinden bir Eulerian posetin torik h-vektörünü hesaplamak çok daha kolay olacaktır. Bu nedenle ilk olarak Eulerian posetlerin torik h-vektörleri ilgileneceğiz.

Tanım 3.12 ([4], 189.sayfa, Eulerian Posetin Torik H-vektörü). L bir Eulerian poset olsun. L 'nin torik h-vektörü, Tanım 3.11'de tanımlanan $h(L, x) = h_0 + h_1 x^1 + \dots + h_d x^d$ torik h-polinomunun katsayılarının dizisi olan (h_0, h_1, \dots, h_d) vektörüdür.

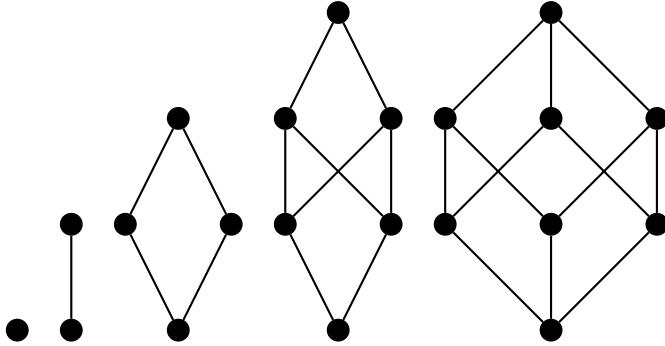
Şimdi [5], 356.sayfadaki 3.16.7 örneğinin benzeri olan bir Eulerian posetin torik h-vektörünü bulalım.

Örnek 3.13. L , Şekil 3.4'teki gibi bir Eulerian poset olsun.



Şekil 3.4: Eulerian poset

P_0, P_1, P_2, P_3 ve P_4 posetleri, L 'nin alt posetleri olsun. (Şekil 3.5)



Şekil 3.5: Eulerian posetin alt posetleri

Şekil 3.5'ten görüldüğü gibi L 'nin alt posetlerinin hepsi latis değildir. Daha sonra, hipersimplekslerin alt posetleri anlamına gelen yüz posetlerinin her birinin latis olduğunu göreceğiz.

Tanım 3.11'den, L posetinin torik h-polinomu aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned} h(L, x) &= \sum_{p \in L - \{\hat{1}\}} g([\hat{0}, p], x)(x-1)^{\text{rank } \hat{1} - \text{rank}(p)-1} \\ &= g(P_0, x)(x-1)^{4-1} + 3g(P_1, x)(x-1)^{4-1-1} + 4g(P_2, x)(x-1)^{4-2-1} \\ &\quad + g(P_3, x)(x-1)^{4-3-1} + 2g(P_4, x)(x-1)^{4-3-1} \end{aligned}$$

$h(L, x)$ polinomun katsayılarını bulmak için, $g(P_0, x)$, $g(P_1, x)$, $g(P_2, x)$ ve $g(P_3, x)$ polinomlarını hesaplayalım.

$$h(P_0, x) = g(P_0, x) = 1 \tag{3.1}$$

$$\begin{aligned} h(P_1, x) &= \sum_{p \in P_1 - \{\hat{1}\}} g([\hat{0}, p], x)(x-1)^{\text{rank } \hat{1} - \text{rank}(p)-1} \\ &= g(P_0, x)(x-1)^{1-0-1} = 1 = h_0 \\ g(P_1, x) &= h_0 = 1 \end{aligned} \tag{3.2}$$

$$\begin{aligned} h(P_2, x) &= \sum_{p \in P_2 - \{\hat{1}\}} g([\hat{0}, p], x)(x-1)^{\text{rank } \hat{1} - \text{rank}(p)-1} \\ &= g(P_0, x)(x-1)^{2-0-1} + 2g(P_1, x)(x-1)^{2-1-1} \\ &= x+1 \\ &= h_1 x + h_0 \\ g(P_2, x) &= h_0 = 1 \end{aligned} \tag{3.3}$$

$$\begin{aligned} h(P_3, x) &= \sum_{p \in P_3 - \{\hat{1}\}} g([\hat{0}, p], x)(x-1)^{\text{rank } \hat{1} - \text{rank}(p)-1} \\ &= g(P_0, x)(x-1)^{3-0-1} + 2g(P_1, x)(x-1)^{3-1-1} + \\ &\quad 2g(P_2, x)(x-1)^{3-2-1} \\ &= x^2 + 1 \\ &= h_2 x^2 + h_1 x + h_0 \end{aligned}$$

$$g(P_3, x) = h_0 + (h_1 - h_0)x = 1 - x \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned} h(P_4, x) &= \sum_{p \in P_3 - \{\hat{1}\}} g([\hat{0}, p], x)(x-1)^{\text{rank}[\hat{1}] - \text{rank}(p)-1} \\ &= g(P_0, x)(x-1)^{3-0-1} + 3g(P_1, x)(x-1)^{3-1-1} + \\ &\quad 3g(P_2, x)(x-1)^{3-2-1} \\ &= x^2 + x + 1 \\ &= h_2x^2 + h_1x + h_0 \end{aligned}$$

$$g(P_4, x) = h_0 + (h_1 - h_0)x = 1 \quad (3.5)$$

(3.1), (3.2), (3.3), (3.4) ve (3.5)'ten $g(P_0, x) = g(P_1, x) = g(P_2, x) = g(P_4, x) = 1$ ve $g(P_3, x) = 1 - x$ olur. Şimdi, $h(L, x)$ polinomun katsayılarını bulabiliyoruz.

$$\begin{aligned} h(L, x) &= \sum_{p \in L - \{\hat{1}\}} g([\hat{0}, p], x)(x-1)^{4-\text{rank}(p)-1} \\ &= g(P_0, x)(x-1)^{4-1} + 3g(P_1, x)(x-1)^{4-1-1} + 4g(P_2, x)(x-1)^{4-2-1} \\ &\quad + g(P_3, x)(x-1)^{4-3-1} + 2g(P_4, x)(x-1)^{4-3-1} \\ &= x^3 + 1 \\ &= h_3x^3 + h_2x^2 + h_1x + h_0 \end{aligned}$$

Dolayısıyla, $h(L, x)$ polinomunun katsayılarının dizisi $(h_0, h_1, h_2, h_3) = (1, 0, 0, 1)$ 'dir. Tanım 3.12'den, L 'nin torik h-vektörü $(1, 0, 0, 1)$ olur.

Politopun torik h-vektörünü, benzer tanımlara sahip olan [5]'in 356.sayfasındaki ve [2]'nin 2.sayfasındaki gibi tanımlayacağız.

Tanım 3.14 (Politopun Torik H-vektörü). P bir politop olsun. Ve L latisi, P politopun yüz poseti olsun. P politopun yüz poseti Eulerian posettir [[16], 9.sayfa].

P politopunun torik h-vektörü, P politopun yüz latisi olan L latisinin torik h-vektördür. Yani, $d = \text{rank}(P) - 1$ olmak üzere, P politopunun torik h-vektörü, Tanım 3.11'de tanımlanan $h(L, x) = h_0 + h_1x^1 + \dots + h_dx^d$ torik h-polinomunun katsayılarının dizisi olan (h_0, h_1, \dots, h_d) vektördür. (h_0, h_1, \dots, h_d) vektörü, simetrik bir vektördür. Yani, her $0 \leq i \leq d$ için, $h_i = h_{d-i}$ dir. Ve (h_0, h_1, \dots, h_d) vektörü unimodal bir vektördür. Yani, $1 = h_0 \leq h_1 \leq \dots \leq h_{\lfloor \frac{d-1}{2} \rfloor}$ dir.

Tanım 3.15 ([18], 205.sayfa, Politopun H-vektörü). P bir politop olsun. Ve F , P politopunun bir yüzü olsun. L , P politopunun yüz latisi olmak üzere, P politopunun h-vektörü, Tanım 3.11'de tanımlanan $h(L, x)$ torik h-polinomuna eşit olan

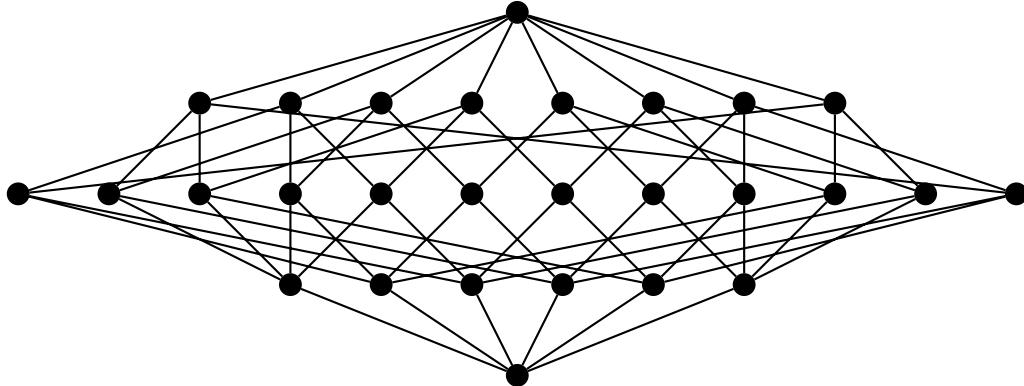
$$\sum_{F \subseteq P} (x-1)^{d-\dim F} = h_0x^d + h_1x^{d-1} + \dots + h_d$$

polinomunun katsayılarının dizisi; (h_0, h_1, \dots, h_d) vektörü olarak tanımlanır.

Politopun h-vektörü ve torik h-vektörü tanımlarındaki $h(L, x)$ torik h-polinomunun katsayıları olan h_0, \dots, h_d sayılarının sıralanışları ile görüyoruz ki; torik h-vektörü, h-vektörünün tersten yazılmış halidir.

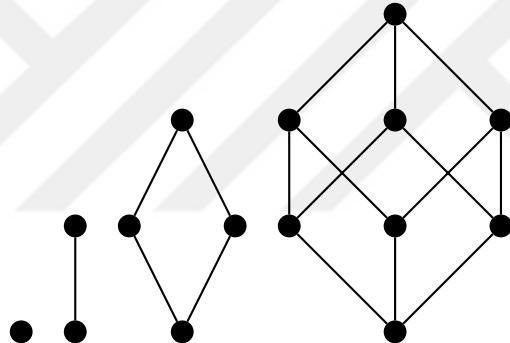
Şimdi, $\Delta(2, 4)$, $\Delta(2, 5)$, $\Delta(2, 6)$ ve $\Delta(3, 6)$ hipersimplekslerinin torik h-vektörlerini hesaplayalım.

Örnek 3.16 ($\Delta_{2,4}$ 'ün torik h-vektörü). Tanım 3.14'ten, $\Delta(2, 4)$ 'ün torik h-vektörü $\Delta(2, 4)$ 'ün yüz latisi olan $P(\Delta_{2,4})$ latisinin torik h-vektörüdür. (Şekil 3.6)



Şekil 3.6: $P(\Delta_{2,4})$

P_0 , P_1 , P_2 ve P_3 latisleri $P(\Delta_{2,4})$ 'ün alt latisleri olsun.(Şekil 3.7)



Şekil 3.7: $P(\Delta_{2,4})$ 'ün alt latisleri

Tanım 3.11'den, $P(\Delta_{2,4})$ latisinin torik h-polinomu aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned}
h(P(\Delta_{2,4}), x) &= \sum_{p \in P(\Delta_{2,4}) - \{\hat{1}\}} g([\hat{0}, p], x)(x-1)^{\text{rank } \hat{1} - \text{rank}(p)-1} \\
&= g(P_0, x)(x-1)^{4-0-1} + 6g(P_1, x)(x-1)^{4-1-1} \\
&\quad + 12g(P_2, x)(x-1)^{4-2-1} + 8g(P_3, x)(x-1)^{4-3-1}
\end{aligned}$$

$h(P(\Delta_{2,4}), x)$ polinomun katsayılarını bulmak için, $g(P_0, x)$, $g(P_1, x)$, $g(P_2, x)$ ve $g(P_3, x)$ polinomlarını hesaplayalım.

$$h(P_0, x) = g(P_0, x) = 1 \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned} h(P_1, x) &= \sum_{p \in P_1 - \{\hat{1}\}} g([\hat{0}, p], x)(x-1)^{1-rank(p)-1} \\ &= g(P_0, x)(x-1)^{1-0-1} = 1 = h_0 \end{aligned}$$

$$g(P_1, x) = h_0 = 1 \quad (3.7)$$

$$\begin{aligned}
h(P_2, x) &= \sum_{p \in P_2 - \{\hat{1}\}} g([\hat{0}, p], x)(x-1)^{2-rank(p)-1} \\
&= g(P_0, x)(x-1)^{2-0-1} + 2g(P_1, x)(x-1)^{2-1-1} \\
&= x+1 \\
&= h_1x + h_0
\end{aligned}$$

(3.8)

$$g(P_2, x) = h_0 = 1$$

$$\begin{aligned}
h(P_3, x) &= \sum_{p \in P_3 - \{\hat{1}\}} g([\hat{0}, p], x)(x-1)^{3-rank(p)-1} \\
&= g(P_0, x)(x-1)^{3-0-1} + 3g(P_1, x)(x-1)^{3-1-1} + \\
&\quad 3g(P_2, x)(x-1)^{3-2-1} \\
&= x^2 + x + 1 \\
&= h_2x^2 + h_1x + h_0
\end{aligned}$$

(3.9)

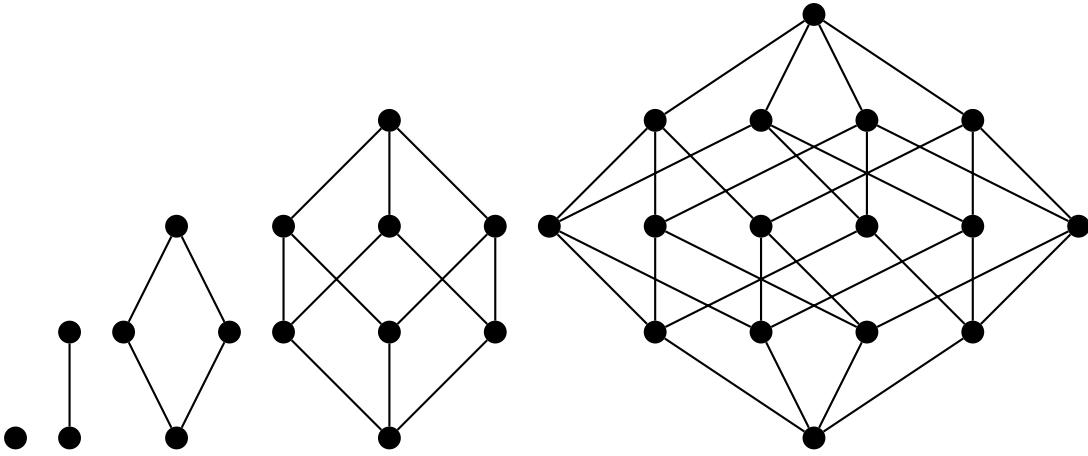
(3.6), (3.7), (3.8) ve (3.9)'dan $g(P_0, x) = g(P_1, x) = g(P_2, x) = g(P_3, x) = 1$ olur. Şimdi, $h(P(\Delta_{2,4}), x)$ polinomun katsayılarını bulabiliriz.

$$\begin{aligned}
h(P(\Delta_{2,4}), x) &= \sum_{p \in P(\Delta_{2,4}) - \{\hat{1}\}} g([\hat{0}, p], x)(x-1)^{4-rank(p)-1} \\
&= g(P_0, x)(x-1)^{4-0-1} + 6g(P_1, x)(x-1)^{4-1-1} \\
&\quad + 12g(P_2, x)(x-1)^{4-2-1} + 8g(P_3, x)(x-1)^{4-3-1} \\
&= (x-1)^3 + 6(x-1)^2 + 12(x-1) + 8 \\
&= x^3 + 3x^2 + 3x + 1 \\
&= h_3x^3 + h_2x^2 + h_1x + h_0
\end{aligned}$$

Dolayısıyla, $h(P(\Delta_{2,4}), x)$ polinomunun katsayılarının dizisi $(h_0, h_1, h_2, h_3) = (1, 3, 3, 1)$ 'dır. Bu dizi simetrik ve unimodaldır. Tanım 3.14'ten, $\Delta(2, 4)$ 'ün torik h-vektörü $(1, 3, 3, 1)$ olur.

Örnek 3.17 ($\Delta_{2,5}$ 'in torik h-vektörü). Tanım 3.14'ten, $\Delta(2, 5)$ 'in torik h-vektörü $P(\Delta_{2,5})$ latisinin torik h-vektördür. $P(\Delta_{2,5})$ latisi, $P(\Delta_{2,4})$ latisine benzer şekilde bulunabilir. Biz sadece $P(\Delta_{2,5})$ 'in alt latislerini göstereceğiz. $\Delta_{2,5}$ 'in 0 boyutlu, 1 boyutlu, 2 boyutlu ve 3 boyutlu yüzlerinin yüz latisleri $\Delta_{2,4}$ örneğinde hesapladığımız gibi sırasıyla, Şekil 3.8'deki P_0, P_1, P_2 ve P_3 'tür.

$\Delta_{2,5}$ 'in en yüksek boyutlu yüzü 3-yüzdür. 3-yüzün 4 köşesi, $\binom{4}{2}$ tane kenarı ve $\binom{4}{3}$ tane 2-yüzü vardır. O halde, $\Delta_{2,5}$ 'in 3 boyutlu herhangi bir yüzünün yüz latisi Şekil 3.8'deki P_4 'tür. Sonuç olarak, $P(\Delta_{2,5})$ 'in alt latisleri, Şekil 3.8'deki gibi rankı 4'e kadar olan yüz latisleridir.



Şekil 3.8: $P(\Delta_{2,5})$ 'in alt latisleri

Örnek 3.16'dan, aynı P_0 , P_1 , P_2 ve P_3 latisleri için,

$$g(P_0, x) = g(P_1, x) = g(P_2, x) = g(P_3, x) = 1$$

bulduk. Şimdi, Şekil 3.8'deki P_4 latisi için, $g(P_4, x)$ polinomunu bulalım.

$$\begin{aligned} h(P_4, x) &= \sum_{p \in P_4 - \{\hat{1}\}} g([\hat{0}, p], x)(x-1)^{\text{rank } \hat{1} - \text{rank}(p)-1} \\ &= g(P_0, x)(x-1)^{4-0-1} + 4g(P_1, x)(x-1)^{4-1-1} \\ &\quad + 6g(P_2, x)(x-1)^{4-2-1} + 4g(P_3, x)(x-1)^{4-3-1} \\ &= x^3 + x^2 + x + 1 \\ &= h_3x^3 + h_2x^2 + h_1x + h_0 \end{aligned}$$

$$g(P_4, x) = h_0 + (h_1 - h_0)x = 1$$

Tanım 3.11'den, $P(\Delta_{2,5})$ latisinin torik h-polinomu aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned} h(P(\Delta_{2,5}), x) &= \sum_{p \in P(\Delta_{2,5}) - \{\hat{1}\}} g([\hat{0}, p], x)(x-1)^{\text{rank } \hat{1} - \text{rank}(p)-1} \\ &= g(P_0, x)(x-1)^{5-0-1} + 10g(P_1, x)(x-1)^{5-1-1} \\ &\quad + 30g(P_2, x)(x-1)^{5-2-1} + 30g(P_3, x)(x-1)^{5-3-1} \\ &\quad + 10g(P_4, x)(x-1)^{5-4-1} \\ &= x^4 + 6x^3 + 6x^2 - 4x + 1 \\ &= h_4x^4 + h_3x^3 + h_2x^2 + h_1x + h_0 \end{aligned}$$

Dolayısıyla, $h(P(\Delta_{2,5}), x)$ polinomunun katsayılarının dizisi $(h_0, h_1, h_2, h_3, h_4) = (1, -4, 6, 6, 1)$ 'dır. Tanım 3.14'ten, $h_0 = h_4$, $h_1 = h_3$ ve $h_0 \leq h_1$ olmalıdır. O halde, $h_1 = h_3 = 6$ olur. Sonuç olarak, $\Delta(2, 5)$ 'in torik h-vektörü $(1, 6, 6, 6, 1)$ 'dır.

Örnek 3.18 ($\Delta_{2,6}$ 'nın torik h-vektörü). Tanım 3.14'ten, $\Delta(2, 6)$ 'nın torik h-vektörü $P(\Delta_{2,6})$ latisinin torik h-vektördür. $\Delta_{2,6}$ 'nın en yüksek boyutlu yüzü 4-yüzdür. 4-yüzün 5 köşesi, $\binom{5}{2}$ tane kenarı, $\binom{5}{3}$ tane 2-yüzü, $\binom{5}{4}$ tane 3-yüzü vardır. Bu yüzün latisine P_5 diyelim.

Örnek 3.17'den, $P(\Delta_{2,6})$ 'nın aynı P_0, P_1, P_2, P_3 ve P_4 latisleri için,

$$g(P_0, x) = g(P_1, x) = g(P_2, x) = g(P_3, x) = g(P_4, x) = 1$$

bulduk. Şimdi, P_5 latisi için, $g(P_5, x)$ polinomunu bulalım.

$$\begin{aligned} h(P_5, x) &= \sum_{p \in P_5 - \{\hat{1}\}} g([\hat{0}, p], x)(x-1)^{4-rank(p)-1} \\ &= g(P_0, x)(x-1)^{5-0-1} + 5g(P_1, x)(x-1)^{5-1-1} \\ &\quad + 10g(P_2, x)(x-1)^{5-2-1} + 10g(P_3, x)(x-1)^{5-3-1} \\ &\quad + 5g(P_4, x)(x-1)^{5-4-1} \\ &= x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 \\ &= h_4x^4 + h_3x^3 + h_2x^2 + h_1x + h_0 \end{aligned}$$

$$g(P_5, x) = h_0 + (h_1 - h_0)x + (h_2 - h_1)x^2 = 1$$

Tanım 3.11'den, $P(\Delta_{2,6})$ latisinin torik h-polinomu aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned} h(P(\Delta_{2,6}), x) &= \sum_{p \in P(\Delta_{2,6}) - \{\hat{1}\}} g([\hat{0}, p], x)(x-1)^{rank(\hat{1}) - rank(p)-1} \\ &= g(P_0, x)(x-1)^{6-0-1} + 15g(P_1, x)(x-1)^{6-1-1} \\ &\quad + 60g(P_2, x)(x-1)^{6-2-1} + 80g(P_3, x)(x-1)^{6-3-1} \\ &\quad + 45g(P_4, x)(x-1)^{6-4-1} + 12g(P_5, x)(x-1)^{6-5-1} \\ &= (x-1)^5 + 15(x-1)^4 + 60(x-1)^3 + 80(x-1)^2 + 45(x-1) \\ &\quad + 12 \\ &= x^5 + 10x^4 + 10x^3 - 20x^2 + 10x + 1 \\ &= h_5x^5 + h_4x^4 + h_3x^3 + h_2x^2 + h_1x + h_0 \end{aligned}$$

Dolayısıyla, $h(P(\Delta_{2,6}), x)$ polinomunun katsayılarının dizisi $(h_0, h_1, h_2, h_3, h_4, h_5) = (1, 10, -20, 10, 10, 1)$ 'dır. Tanım 3.14'ten, $h_0 = h_5$, $h_1 = h_4$, $h_2 = h_3$ ve $h_0 \leq h_1 \leq h_2$ olmalıdır. O halde, $h_2 = h_3 = 10$ olur. Sonuç olarak, $\Delta(2, 6)$ 'nın torik h-vektörü $(1, 10, 10, 10, 10, 1)$ 'dır.

Örnek 3.19 ($\Delta_{3,6}$ 'nın torik h-vektörü). Tanım 3.14'ten, $\Delta(2, 6)$ 'nın torik h-vektörü $P(\Delta_{3,6})$ latisinin torik h-vektörüdür. Örnek 3.18'den, $P(\Delta_{2,6})$ 'nın aynı P_0, P_1, P_2, P_3, P_4 ve P_5 alt latisleri için,

$$g(P_0, x) = g(P_1, x) = g(P_2, x) = g(P_3, x) = g(P_4, x) = g(P_5, x) = 1$$

bulduk. O halde, Tanım 3.11'den, $P(\Delta_{2,4})$ latisinin torik h-polinomu aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned} h(P(\Delta_{3,6}), x) &= \sum_{p \in P(\Delta_{3,6}) - \{\hat{1}\}} g([\hat{0}, p], x)(x-1)^{rank(\hat{1}) - rank(p)-1} \\ &= g(P_0, x)(x-1)^{6-0-1} + 20g(P_1, x)(x-1)^{6-1-1} \\ &\quad + 90g(P_2, x)(x-1)^{6-2-1} + 120g(P_3, x)(x-1)^{6-3-1} \\ &\quad + 60g(P_4, x)(x-1)^{6-4-1} + 12g(P_5, x)(x-1)^{6-5-1} \\ &= (x-1)^5 + 20(x-1)^4 + 90(x-1)^3 + 120(x-1)^2 \\ &\quad + 60(x-1) + 12 \\ &= x^5 + 15x^4 + 20x^3 - 40x^2 + 15x + 1 \\ &= h_4x^4 + h_3x^3 + h_2x^2 + h_1x + h_0 \end{aligned}$$

Dolayısıyla, $h(P(\Delta_{3,6}), x)$ polinomunun katsayılarının dizisi $(h_0, h_1, h_2, h_3, h_4, h_5) = (1, 15, -40, 20, 15, 1)$ 'dir. Tanım 3.14'ten, $h_0 = h_5$, $h_1 = h_4$, $h_2 = h_3$ ve $h_0 \leq h_1 \leq h_2$ olmalıdır. O halde, $h_2 = h_3 = 20$ olur. Sonuç olarak, $\Delta(3, 6)$ 'in torik h -vektörü $(1, 15, 20, 20, 15, 1)$ 'dir.

Yukarıda bulduğumuz $\Delta(k, n)$ hipersimplekslerinin torik h -vektörlerini Polymake [8] kullanarak aşağıdaki kodlarla da hesaplayabiliriz:

$\Delta(2, 4)$ 'ün torik h -vektörü:

```
$h_24 = hypersimplex(2,4,group=>1);
print $h_24->H_VECTOR;
1 3 3 1
```

$\Delta(2, 4)$ 'ün torik h -vektörü:

```
$h_25 = hypersimplex(2,5,group=>1);
print $h_25->H_VECTOR;
1 6 6 6 1
```

```
$h_26 = hypersimplex(2,6,group=>1);
print $h_26->H_VECTOR;
1 10 10 10 10 1
```

```
$h_36 = hypersimplex(3,6,group=>1);
print $h_36->H_VECTOR;
1 15 20 20 15 1
```

Benzer şekilde, $\Delta(k, n)$ 'nin torik h -vektörünü aşağıdaki kodlarla bulabiliriz:

```
$h = hypersimplex(k,n,group=>1);
print $h->H_VECTOR;
```

$\Delta(k, n)$ 'nin torik h -vektörlerini tabloda gösterelim.(Tablo 3.16)

k, n	torik h -vektörü
2, 4	1 3 3 1
2, 5	1 6 6 6 1
2, 6	1 10 10 10 10 1
3, 6	1 15 20 20 15 1
2, 7	1 15 15 15 15 15 1
3, 7	1 29 50 50 50 29 1
2, 8	1 21 21 21 21 21 21 1
3, 8	1 49 105 105 105 105 49 1
4, 8	1 63 161 175 175 161 63 1
2, 9	1 28 28 28 28 28 28 28 1
3, 9	1 76 196 196 196 196 196 76 1
4, 9	1 118 406 490 490 490 406 118 1
2, 10	1 36 36 36 36 36 36 36 36 1
3, 10	1 111 336 336 336 336 336 336 111 1
4, 10	1 201 876 1176 1176 1176 1176 876 201 1
5, 10	1 243 1170 1722 1764 1764 1722 1170 243 1

Tablo 3.16: $\Delta(k, n)$ 'nin Torik h -vektörü

3.3. Dual Hipersimpleks

Tanım 3.20 (dual hipersimpleks). Bir dual hipersimpleks, hipersimpleksin herhangi bir r -yüzünün sayısını kadar $(n-r-2)$ -yüzden oluşan bir politoptur. $\Delta^*(k, n)$ veya $\Delta_{k,n}^*$ ile gösterilir.

Örnek 3.21 ($\Delta_{2,4}^*$ 'ün dualı). Örnek 3.3'ten, $\Delta(2, 4)$ hipersimpleksinin 6 köşesi, 12 kenarı ve 8 2-yüzü olduğunu biliyoruz. Tanım 3.20'den, $\Delta^*(2, 4)$ 6 2-yüz, 12 kenar ve 8 köşeden oluşan bir politoptur.

Örnek 3.22 ($\Delta_{2,5}^*$ 'ün dualı). Örnek 3.4'ten, $\Delta(2, 5)$ hipersimpleksinin 10 köşesi, 30 kenarı, 30 2-yüzü ve 10 3-yüzü olduğunu biliyoruz. Tanım 3.20'den, $\Delta^*(2, 5)$ dual hipersimpleksi 10 3-yüz, 30 2-yüz, 30 kenar ve 10 köşeden oluşan bir politoptur.

Yukarıdaki dual hipersimpleksler gibi herhangi bir $\Delta^*(k, n)$ dual hipersimpleksinin yüz sayılarını da $\Delta(k, n)$ hipersimpleksinin yüz sayılarından kolayca elde edebiliriz.(Tablo 3.17)

k, n	yüz sayıları
2, 4	8 12 6
2, 5	10 30 30 10
2, 6	12 45 80 60 15
3, 6	12 60 120 90 20
2, 7	14 63 140 175 105 21
3, 7	14 84 245 350 210 35
2, 8	16 84 224 350 336 168 28
3, 8	16 112 392 770 840 420 56
4, 8	16 112 448 980 1120 560 70
2, 9	18 108 336 630 756 588 252 36
3, 9	18 144 588 1386 2016 1764 756 84
4, 9	18 144 672 1890 3150 2940 1260 126
2, 10	20 135 480 1050 1512 1470 960 360 45
3, 10	20 180 840 2310 4032 4620 3360 1260 120
4, 10	20 180 960 3150 6552 8610 6720 2520 210
5, 10	20 180 960 3360 7560 10500 8400 3150 252

Tablo 3.17: $\Delta^*(k, n)$ 'nin yüz sayıları

3.4. Dual Hipersimpleksin Torik H-Vektörleri

Tanım 3.14'ten, $\Delta^*(k, n)$ dual hipersimpleksinin torik h-vektörü, $\Delta^*(k, n)$ 'nin yüz latisi olan $P(\Delta^*(k, n))$ latisinin torik h-vektördür. $P(\Delta^*(k, n))$ latisinin alt latisleri ile $P(\Delta(k, n))$ latisinin alt latisleri aynıdır. Yani, $P(\Delta^*(k, n))$ latislerinin alt latisleri olan P_0, P_1, P_2, P_3, P_4 ve P_5 latisleri için de $g(P_0, x) = g(P_1, x) = g(P_2, x) = g(P_3, x) = g(P_4, x) = g(P_5, x) = 1$ 'dir.

Örnek 3.23 ($\Delta_{2,4}^*$ 'ün h-vektörü).

$$\begin{aligned}
 h(P(\Delta_{2,4}^*), x) &= \sum_{p \in P(\Delta_{2,4}^*) - \{\hat{1}\}} g([\hat{0}, p], x)(x-1)^{\text{rank } \hat{1} - \text{rank}(p)-1} \\
 &= g(P_0, x)(x-1)^{4-0-1} + 8g(P_1, x)(x-1)^{4-1-1} \\
 &\quad + 12g(P_2, x)(x-1)^{4-2-1} + 6g(P_3, x)(x-1)^{4-3-1} \\
 &= (x-1)^3 + 8(x-1)^2 + 12(x-1) + 6 \\
 &= x^3 + 5x^2 - x + 1 \\
 &= h_0x^3 + h_1x^2 + h_2x + h_3
 \end{aligned}$$

Tanım 3.15'ten, $\Delta^*(2, 4)$ 'ün h-vektörü $(h_0, h_1, h_2, h_3) = (1, 5, -1, 1)$ olur.

Örnek 3.24 ($\Delta_{2,5}^*$ 'in h-vektörü).

$$\begin{aligned}
 h(P(\Delta_{2,5}^*), x) &= \sum_{p \in P(\Delta_{2,5}^*) - \{\hat{1}\}} g([\hat{0}, p], x)(x-1)^{\text{rank } \hat{1} - \text{rank}(p)-1} \\
 &= g(P_0, x)(x-1)^{5-0-1} + 10g(P_1, x)(x-1)^{5-1-1} \\
 &\quad + 30g(P_2, x)(x-1)^{5-2-1} + 30g(P_3, x)(x-1)^{5-3-1} \\
 &\quad + 10g(P_4, x)(x-1)^{5-4-1} \\
 &= x^4 + 6x^3 + 6x^2 - 4x + 1 \\
 &= h_0x^4 + h_1x^3 + h_2x^2 + h_3x + h_4
 \end{aligned}$$

Tanım 3.15'ten, $\Delta^*(2, 5)$ 'in h-vektörü

$$(h_0, h_1, h_2, h_3, h_4) = (1, 6, 6, -4, 1)$$

olur.

Örnek 3.25 ($\Delta_{2,6}^*$ 'nin h-vektörü).

$$\begin{aligned}
 h(P(\Delta_{2,6}^*), x) &= \sum_{p \in P(\Delta_{2,6}^*) - \{\hat{1}\}} g([\hat{0}, p], x)(x-1)^{\text{rank } \hat{1} - \text{rank}(p)-1} \\
 &= g(P_0, x)(x-1)^{6-0-1} + 12g(P_1, x)(x-1)^{6-1-1} \\
 &\quad + 45g(P_2, x)(x-1)^{6-2-1} + 80g(P_3, x)(x-1)^{6-3-1} \\
 &\quad + 60g(P_4, x)(x-1)^{6-4-1} + 15g(P_5, x)(x-1)^{6-5-1} \\
 &= (x-1)^5 + 12(x-1)^4 + 45(x-1)^3 + 80(x-1)^2 \\
 &\quad + 60(x-1) + 15 \\
 &= x^5 + 7x^4 + 7x^3 + 7x^2 - 8x + 1 \\
 &= h_0x^5 + h_1x^4 + h_2x^3 + h_3x^2 + h_4x + h_5
 \end{aligned}$$

Tanım 3.15'ten, $\Delta^*(2, 6)$ 'nın h-vektörü

$$(h_0, h_1, h_2, h_3, h_4, h_5) = (1, 7, 7, 7, -8, 1)$$

olur.

Örnek 3.26 ($\Delta_{3,6}^*$ 'nın h-vektörü).

$$\begin{aligned}
 h(P(\Delta_{3,6}^*), x) &= \sum_{p \in P(\Delta_{3,6}^*) - \{\hat{1}\}} g([\hat{0}, p], x)(x-1)^{\text{rank } \hat{1} - \text{rank}(p)-1} \\
 &= g(P_0, x)(x-1)^{6-0-1} + 12g(P_1, x)(x-1)^{6-1-1} \\
 &\quad + 60g(P_2, x)(x-1)^{6-2-1} + 120g(P_3, x)(x-1)^{6-3-1} \\
 &\quad + 90g(P_4, x)(x-1)^{6-4-1} + 20g(P_5, x)(x-1)^{6-5-1} \\
 &= (x-1)^5 + 12(x-1)^4 + 60(x-1)^3 + 120(x-1)^2 \\
 &\quad + 90(x-1) + 20 \\
 &= x^5 + 7x^4 + 22x^3 + 2x^2 - 13x + 1 \\
 &= h_0x^5 + h_1x^4 + h_2x^3 + h_3x^2 + h_4x + h_5
 \end{aligned}$$

Tanım 3.15'ten, $\Delta^*(3, 6)$ 'nın h-vektörü

$$(h_0, h_1, h_2, h_3, h_4, h_5) = (1, 7, 22, 2, -13, 1)$$

olur.

Şimdi, dual hipersimplekslerin torik h-vektörünü bulmak için gereklili olan dual hipersimplekslerin bir özelliğinden bahsedeceğiz.

Tanım 3.27 (çeyrek-simpleksel³). P d-boyutlu bir politop olsun. P'nin $d-2$ ve $d-2$ 'den küçük boyutlu yüzleri simpleks ise P **çeyrek-simpleksel** bir politoptur.

Önsav 3.28. $0 \leq k \leq n$ için, $\Delta^*(k, n)$ çeyrek-simplekseldir.

$\Delta^*(k, n)$ çeyrek-simpleksel olduğundan, $\Delta^*(k, n)$ 'nin torik h-vektörünün ilk yarısı, $\Delta^*(k, n)$ 'nin h-vektörünün ilk yarısına eşittir [2]. Bu durumda, $\Delta^*(k, n)$ 'nin torik h-vektörlerini, $\Delta^*(k, n)$ 'nin h-vektörlerinden kolayca elde edebiliriz.

Örnek 3.29 ($\Delta_{2,4}^*$ 'ün torik h-vektörü). $h(P(\Delta_{2,4}^*), x)$ polinomunun katsayılarının dizisi torik h-vektörünün tanımına göre $(1, -1, 5, 1)$ olur. Diğer taraftan, $\Delta^*(2, 4)$ 'ün h-vektörü $(1, 5, -1, 1)$ 'dir. O halde, $\Delta^*(2, 4)$ 'ün torik h-vektörünün ilk yarısı, $\Delta^*(2, 4)$ 'ün h-vektörünün ilk yarısına eşit olduğundan, $\Delta^*(2, 4)$ 'ün torik h-vektörünü $(h_0, h_1, h_2, h_3) = (1, 5, 5, 1)$ olarak elde ederiz.

Örnek 3.30 ($\Delta_{2,5}^*$ 'in torik h-vektörü). $h(P(\Delta_{2,5}^*), x)$ polinomunun katsayılarının dizisi torik h-vektörünün tanımına göre $(1, -4, 6, 6, 1)$ olur. Diğer taraftan, $\Delta^*(2, 5)$ 'in h-vektörü $(1, 6, 6, -4, 1)$ olduğundan, $\Delta^*(2, 5)$ 'in torik h-vektörünü $(1, 6, 6, 6, 1)$ olarak elde ederiz.

Örnek 3.31 ($\Delta_{2,6}^*$ 'nın torik h-vektörü). $h(P(\Delta_{2,6}^*), x)$ polinomunun katsayılarının dizisi torik h-vektörünün tanımına göre $(1, -8, 7, 7, 7, 1)$ olur. Diğer taraftan, $\Delta^*(2, 6)$ 'nın h-vektörü $(1, 7, 7, 7, -8, 1)$ olduğundan, $\Delta^*(2, 6)$ 'nın torik h-vektörünü $(1, 7, 7, 7, 7, 1)$ olarak elde ederiz.

Örnek 3.32 ($\Delta_{3,6}^*$ 'nın torik h-vektörü). $h(P(\Delta_{3,6}^*), x)$ polinomunun katsayılarının dizisi torik h-vektörünün tanımına göre $(1, -13, 2, 22, 7, 1)$ olur. Diğer taraftan, $\Delta^*(3, 6)$ 'nın h-vektörü $(1, 7, 22, 2, -13, 1)$ olduğundan, $\Delta^*(3, 6)$ 'nın torik h-vektörünü $(1, 7, 22, 22, 7, 1)$ olarak elde ederiz.

$\Delta^*(k, n)$ 'lerin torik h-vektörlerini yukarıdaki şekilde hesaplayabiliriz. Şimdi [2]'de yer alan daha kolay bir hesaplama vereceğiz:

Teorem 3.33 (dual hypersimpleksin torik h-vektörü). [[2], Teorem 2.2]

$1 \leq k \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ için, $\Delta^*(k, n)$ 'nin torik h-vektörü,

$$h_r(\Delta_{k,n}^*) = \begin{cases} \sum_{i=0}^r \binom{n}{i} & 1 \leq r \leq k-1 \\ \sum_{i=0}^{k-1} \binom{n}{i} & k \leq r \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \end{cases}$$

olarak tanımlanır.

Bu teoremin ispatı [2]'deki Teorem 2.2'de bulunmaktadır.

Teorem 3.33 ile torik h-vektörü hesaplama örnekleri verelim.

Örnek 3.34 ($\Delta_{2,4}^*$ 'ün torik h-vektörü).

$$\begin{aligned} h_1(\Delta_{2,4}^*) &= \sum_{i=0}^1 \binom{4}{i} = \binom{4}{0} + \binom{4}{1} = 5 \\ h_2(\Delta_{2,4}^*) &= \sum_{i=0}^1 \binom{4}{i} = \binom{4}{0} + \binom{4}{1} = 5 \end{aligned}$$

³ing. quasi-simplicial

$\Delta^*(2, 4)$ çeyrek-simpleksel olduğundan, $\Delta^*(2, 4)$ 'ün torik h-vektörünün ilk yarısı, $\Delta^*(2, 4)$ 'ün h-vektörünün ilk yarısına eşittir.[2] O halde, $\Delta^*(2, 4)$ 'ün torik h-vektörünü $(h_0, h_1, h_2, h_3) = (1, 5, 5, 1)$ olarak elde ederiz.

Örnek 3.35 ($\Delta_{2,5}^*$ 'in torik h-vektörü).

$$\begin{aligned} h_1(\Delta_{2,5}^*) &= \sum_{i=0}^1 \binom{5}{i} = \binom{5}{0} + \binom{5}{1} = 6 \\ h_2(\Delta_{2,5}^*) &= \sum_{i=0}^1 \binom{5}{i} = \binom{5}{0} + \binom{5}{1} = 6 \end{aligned}$$

$\Delta^*(2, 5)$ çeyrek-simpleksel olduğundan, $\Delta^*(2, 5)$ 'in torik h-vektörünün ilk yarısı, $\Delta^*(2, 5)$ 'in h-vektörünün ilk yarısına eşittir.[2] Dolayısıyla, $\Delta^*(2, 5)$ 'in torik h-vektörünü $(h_0, h_1, h_2, h_3, h_4) = (1, 6, 6, 6, 1)$ olarak elde ederiz.

Örnek 3.36 ($\Delta_{2,6}^*$ 'nın torik h-vektörü).

$$\begin{aligned} h_1(\Delta_{2,6}^*) &= \sum_{i=0}^1 \binom{6}{i} = \binom{6}{0} + \binom{6}{1} = 7 \\ h_2(\Delta_{2,6}^*) &= \sum_{i=0}^1 \binom{6}{i} = \binom{6}{0} + \binom{6}{1} = 7 \\ h_3(\Delta_{2,6}^*) &= \sum_{i=0}^1 \binom{6}{i} = \binom{6}{0} + \binom{6}{1} = 7 \end{aligned}$$

$\Delta^*(2, 6)$ 'nın torik h-vektörünü $(h_0, h_1, h_2, h_3, h_4, h_5) = (1, 7, 7, 7, 7, 1)$ olarak elde ederiz.

Örnek 3.37 ($\Delta_{3,6}^*$ 'nın torik h-vektörü).

$$\begin{aligned} h_1(\Delta_{3,6}^*) &= \sum_{i=0}^1 \binom{6}{i} = \binom{6}{0} + \binom{6}{1} = 7 \\ h_2(\Delta_{3,6}^*) &= \sum_{i=0}^2 \binom{6}{i} = \binom{6}{0} + \binom{6}{1} + \binom{6}{2} = 22 \\ h_3(\Delta_{3,6}^*) &= \sum_{i=0}^2 \binom{6}{i} = \binom{6}{0} + \binom{4}{1} + \binom{6}{2} = 22 \end{aligned}$$

$\Delta^*(3, 6)$ 'nın torik h-vektörünü $(h_0, h_1, h_2, h_3, h_4, h_5) = (1, 7, 22, 22, 7, 1)$ olarak elde ederiz.

Örnek 3.38 ($\Delta_{2,7}^*$ 'nin torik h-vektörü).

$$\begin{aligned} h_1(\Delta_{2,7}^*) &= \sum_{i=0}^1 \binom{7}{i} = \binom{7}{0} + \binom{7}{1} = 8 \\ h_2(\Delta_{2,7}^*) &= \sum_{i=0}^1 \binom{7}{i} = \binom{7}{0} + \binom{7}{1} = 8 \\ h_3(\Delta_{2,7}^*) &= \sum_{i=0}^1 \binom{7}{i} = \binom{7}{0} + \binom{7}{1} = 8 \end{aligned}$$

$\Delta^*(2, 7)$ 'nın torik h-vektörünü $(h_0, h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6) = (1, 8, 8, 8, 8, 8, 1)$ olarak elde ederiz.

Örnek 3.39 ($\Delta_{3,7}^*$ 'nin torik h-vektörü).

$$\begin{aligned} h_1(\Delta_{3,7}^*) &= \sum_{i=0}^1 \binom{7}{i} = \binom{7}{0} + \binom{7}{1} = 8 \\ h_2(\Delta_{3,7}^*) &= \sum_{i=0}^2 \binom{7}{i} = \binom{7}{0} + \binom{7}{1} + \binom{7}{2} = 29 \\ h_3(\Delta_{3,7}^*) &= \sum_{i=0}^2 \binom{7}{i} = \binom{7}{0} + \binom{7}{1} + \binom{7}{2} = 29 \end{aligned}$$

$\Delta^*(3, 7)$ 'nin torik h-vektörünü

$$(h_0, h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6) = (1, 8, 29, 29, 29, 8, 1)$$

olarak elde ederiz.

Örnek 3.40 ($\Delta_{2,8}^*$ 'in torik h-vektörü).

$$\begin{aligned} h_1(\Delta_{2,8}^*) &= \sum_{i=0}^1 \binom{8}{i} = \binom{8}{0} + \binom{8}{1} = 9 \\ h_2(\Delta_{2,8}^*) &= \sum_{i=0}^1 \binom{8}{i} = \binom{8}{0} + \binom{8}{1} = 9 \\ h_3(\Delta_{2,8}^*) &= \sum_{i=0}^1 \binom{8}{i} = \binom{8}{0} + \binom{8}{1} = 9 \\ h_4(\Delta_{2,8}^*) &= \sum_{i=0}^1 \binom{8}{i} = \binom{8}{0} + \binom{8}{1} = 9 \end{aligned}$$

$\Delta^*(2, 8)$ 'in torik h-vektörünü

$$(h_0, h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6, h_7) = (1, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 1)$$

olarak elde ederiz.

Örnek 3.41 ($\Delta_{3,8}^*$ 'in torik h-vektörü).

$$\begin{aligned} h_1(\Delta_{3,8}^*) &= \sum_{i=0}^1 \binom{8}{i} = \binom{8}{0} + \binom{8}{1} = 9 \\ h_2(\Delta_{3,8}^*) &= \sum_{i=0}^2 \binom{8}{i} = \binom{8}{0} + \binom{8}{1} + \binom{8}{2} = 37 \\ h_3(\Delta_{3,8}^*) &= \sum_{i=0}^2 \binom{8}{i} = \binom{8}{0} + \binom{8}{1} + \binom{8}{2} = 37 \\ h_4(\Delta_{3,8}^*) &= \sum_{i=0}^2 \binom{8}{i} = \binom{8}{0} + \binom{8}{1} + \binom{8}{2} = 37 \end{aligned}$$

$\Delta^*(3, 8)$ 'in torik h-vektörünü

$$(h_0, h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6, h_7) = (1, 9, 37, 37, 37, 37, 9, 1)$$

olarak elde ederiz.

Örnek 3.42 ($\Delta_{4,8}^*$ 'in torik h-vektörü).

$$\begin{aligned} h_1(\Delta_{4,8}^*) &= \sum_{i=0}^1 \binom{8}{i} = \binom{8}{0} + \binom{8}{1} = 9 \\ h_2(\Delta_{4,8}^*) &= \sum_{i=0}^2 \binom{8}{i} = \binom{8}{0} + \binom{8}{1} + \binom{8}{2} = 37 \\ h_3(\Delta_{4,8}^*) &= \sum_{i=0}^3 \binom{8}{i} = \binom{8}{0} + \binom{8}{1} + \binom{8}{2} + \binom{8}{3} = 93 \\ h_4(\Delta_{4,8}^*) &= \sum_{i=0}^3 \binom{8}{i} = \binom{8}{0} + \binom{8}{1} + \binom{8}{2} + \binom{8}{3} = 93 \end{aligned}$$

$\Delta^*(4, 8)$ 'in torik h-vektörünü

$$(h_0, h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6, h_7) = (1, 9, 37, 93, 93, 37, 9, 1)$$

olarak elde ederiz.

Örnek 3.43 ($\Delta_{2,9}^*$ 'un torik h-vektörü).

$$\begin{aligned} h_1(\Delta_{2,9}^*) &= \sum_{i=0}^1 \binom{9}{i} = \binom{9}{0} + \binom{9}{1} = 10 \\ h_2(\Delta_{2,9}^*) &= \sum_{i=0}^1 \binom{9}{i} = \binom{9}{0} + \binom{9}{1} = 10 \\ h_3(\Delta_{2,9}^*) &= \sum_{i=0}^1 \binom{9}{i} = \binom{9}{0} + \binom{9}{1} = 10 \\ h_4(\Delta_{2,9}^*) &= \sum_{i=0}^1 \binom{9}{i} = \binom{9}{0} + \binom{9}{1} = 10 \end{aligned}$$

$\Delta^*(2, 9)$ 'un torik h-vektörünü

$$(h_0, h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6, h_7, h_8) = (1, 10, 10, 10, 10, 10, 10, 10, 1)$$

olarak elde ederiz.

Örnek 3.44 ($\Delta_{3,9}^*$ 'un torik h-vektörü).

$$\begin{aligned} h_1(\Delta_{3,9}^*) &= \sum_{i=0}^1 \binom{9}{i} = \binom{9}{0} + \binom{9}{1} = 10 \\ h_2(\Delta_{3,9}^*) &= \sum_{i=0}^2 \binom{9}{i} = \binom{9}{0} + \binom{9}{1} + \binom{9}{2} = 46 \\ h_3(\Delta_{3,9}^*) &= \sum_{i=0}^2 \binom{4}{i} = \binom{9}{0} + \binom{9}{1} + \binom{9}{2} = 46 \\ h_4(\Delta_{3,9}^*) &= \sum_{i=0}^2 \binom{4}{i} = \binom{9}{0} + \binom{9}{1} + \binom{9}{2} = 46 \end{aligned}$$

$\Delta^*(3, 9)$ 'un torik h-vektörünü

$$(h_0, h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6, h_7, h_8) = (1, 10, 46, 46, 46, 46, 46, 10, 1)$$

olarak elde ederiz.

Örnek 3.45 ($\Delta_{4,9}^*$ 'un torik h-vektörü).

$$\begin{aligned} h_1(\Delta_{4,9}^*) &= \sum_{i=0}^1 \binom{9}{i} = \binom{9}{0} + \binom{9}{1} = 10 \\ h_2(\Delta_{4,9}^*) &= \sum_{i=0}^2 \binom{9}{i} = \binom{9}{0} + \binom{9}{1} + \binom{9}{2} = 46 \\ h_3(\Delta_{4,9}^*) &= \sum_{i=0}^3 \binom{9}{i} = \binom{9}{0} + \binom{9}{1} + \binom{9}{2} + \binom{9}{3} = 130 \\ h_4(\Delta_{4,9}^*) &= \sum_{i=0}^4 \binom{9}{i} = \binom{9}{0} + \binom{9}{1} + \binom{9}{2} + \binom{9}{3} = 130 \end{aligned}$$

$\Delta^*(4, 9)$ 'un torik h-vektörünü

$$(h_0, h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6, h_7, h_8) = (1, 10, 46, 130, 130, 130, 46, 10, 1)$$

olarak elde ederiz.

Örnek 3.46 ($\Delta_{2,10}^*$ 'un torik h-vektörü).

$$\begin{aligned} h_1(\Delta_{2,10}^*) &= \sum_{i=0}^1 \binom{10}{i} = \binom{10}{0} + \binom{10}{1} = 11 \\ h_2(\Delta_{2,10}^*) &= \sum_{i=0}^2 \binom{10}{i} = \binom{10}{0} + \binom{10}{1} = 11 \\ h_3(\Delta_{2,10}^*) &= \sum_{i=0}^3 \binom{10}{i} = \binom{10}{0} + \binom{10}{1} = 11 \\ h_4(\Delta_{2,10}^*) &= \sum_{i=0}^4 \binom{10}{i} = \binom{10}{0} + \binom{10}{1} = 11 \\ h_5(\Delta_{2,10}^*) &= \sum_{i=0}^5 \binom{10}{i} = \binom{10}{0} + \binom{10}{1} = 11 \end{aligned}$$

$\Delta^*(2, 10)$ 'un torik h-vektörünü $(h_0, h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6, h_7, h_8, h_9) = (1, 11, 11, 11, 11, 11, 11, 11, 11, 1)$ olarak elde ederiz.

Örnek 3.47 ($\Delta_{3,10}^*$ 'un torik h-vektörü).

$$\begin{aligned} h_1(\Delta_{3,10}^*) &= \sum_{i=0}^1 \binom{10}{i} = \binom{10}{i} = \binom{10}{0} + \binom{10}{1} = 11 \\ h_2(\Delta_{3,10}^*) &= \sum_{i=0}^2 \binom{10}{i} = \binom{10}{i} = \binom{10}{0} + \binom{10}{1} + \binom{10}{2} = 56 \\ h_3(\Delta_{3,10}^*) &= \sum_{i=0}^3 \binom{10}{i} = \binom{10}{i} = \binom{10}{0} + \binom{10}{1} + \binom{10}{2} = 56 \\ h_4(\Delta_{3,10}^*) &= \sum_{i=0}^4 \binom{10}{i} = \binom{10}{i} = \binom{10}{0} + \binom{10}{1} + \binom{10}{2} = 56 \\ h_5(\Delta_{3,10}^*) &= \sum_{i=0}^5 \binom{10}{i} = \binom{10}{i} = \binom{10}{0} + \binom{10}{1} + \binom{10}{2} = 56 \end{aligned}$$

$\Delta^*(3, 10)$ 'un torik h-vektörünü $(h_0, h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6, h_7, h_8, h_9) = (1, 11, 56, 56, 56, 56, 56, 56, 11, 1)$ olarak elde ederiz.

Örnek 3.48 ($\Delta_{4,10}^*$ 'un torik h-vektörü).

$$\begin{aligned}
 h_1(\Delta_{4,10}^*) &= \sum_{i=0}^1 \binom{10}{i} = \binom{10}{0} + \binom{10}{1} = 11 \\
 h_2(\Delta_{4,10}^*) &= \sum_{i=0}^2 \binom{10}{i} = \binom{10}{0} + \binom{10}{1} + \binom{10}{2} = 56 \\
 h_3(\Delta_{4,10}^*) &= \sum_{i=0}^3 \binom{10}{i} = \binom{10}{0} + \binom{10}{1} + \binom{10}{2} + \binom{10}{3} = 176 \\
 h_4(\Delta_{4,10}^*) &= \sum_{i=0}^3 \binom{10}{i} = \binom{10}{0} + \binom{10}{1} + \binom{10}{2} + \binom{10}{3} = 176 \\
 h_5(\Delta_{4,10}^*) &= \sum_{i=0}^3 \binom{10}{i} = \binom{10}{0} + \binom{10}{1} + \binom{10}{2} + \binom{10}{3} = 176
 \end{aligned}$$

$\Delta^*(4, 10)$ 'un torik h-vektörünü ($h_0, h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6, h_7, h_8, h_9$)
 $= (1, 11, 56, 176, 176, 176, 176, 56, 11, 1)$ olarak elde ederiz.

Örnek 3.49 ($\Delta_{5,10}^*$ 'un torik h-vektörü).

$$\begin{aligned}
 h_1(\Delta_{5,10}^*) &= \sum_{i=0}^1 \binom{10}{i} = \binom{10}{0} + \binom{10}{1} = 11 \\
 h_2(\Delta_{5,10}^*) &= \sum_{i=0}^2 \binom{10}{i} = \binom{10}{0} + \binom{10}{1} + \binom{10}{2} = 56 \\
 h_3(\Delta_{5,10}^*) &= \sum_{i=0}^3 \binom{10}{i} = \binom{10}{0} + \binom{10}{1} + \binom{10}{2} + \binom{10}{3} = 176 \\
 h_4(\Delta_{5,10}^*) &= \sum_{i=0}^4 \binom{10}{i} = \binom{10}{0} + \binom{10}{1} + \binom{10}{2} + \binom{10}{3} + \binom{10}{4} = 386 \\
 h_5(\Delta_{5,10}^*) &= \sum_{i=0}^4 \binom{10}{i} = \binom{10}{0} + \binom{10}{1} + \binom{10}{2} + \binom{10}{3} + \binom{10}{4} = 386
 \end{aligned}$$

$\Delta^*(5, 10)$ 'un torik h-vektörünü ($h_0, h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6, h_7, h_8, h_9$)
 $= (1, 11, 56, 176, 386, 386, 176, 56, 11, 1)$ olarak elde ederiz.

Örnek 3.50 ($\Delta_{2,11}^*$ 'in torik h-vektörü).

$$\begin{aligned}
 h_1(\Delta_{2,11}^*) &= \sum_{i=0}^1 \binom{11}{i} = \binom{11}{0} + \binom{11}{1} = 12 \\
 h_2(\Delta_{2,11}^*) &= \sum_{i=0}^1 \binom{11}{i} = \binom{11}{0} + \binom{11}{1} = 12 \\
 h_3(\Delta_{2,11}^*) &= \sum_{i=0}^1 \binom{11}{i} = \binom{11}{0} + \binom{11}{1} = 12 \\
 h_4(\Delta_{2,11}^*) &= \sum_{i=0}^1 \binom{11}{i} = \binom{11}{0} + \binom{11}{1} = 12 \\
 h_5(\Delta_{2,11}^*) &= \sum_{i=0}^1 \binom{11}{i} = \binom{11}{0} + \binom{11}{1} = 12
 \end{aligned}$$

$\Delta^*(2, 11)$ 'in torik h-vektörünü ($h_0, h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6, h_7, h_8, h_9, h_{10}$)
 $= (1, 12, 12, 12, 12, 12, 12, 12, 12, 12, 1)$ olarak elde ederiz.

Örnek 3.51 ($\Delta_{3,11}^*$ 'in torik h-vektörü).

$$\begin{aligned}
 h_1(\Delta_{3,11}^*) &= \sum_{i=0}^1 \binom{11}{i} = \binom{11}{0} + \binom{11}{1} = 12 \\
 h_2(\Delta_{3,11}^*) &= \sum_{i=0}^2 \binom{11}{i} = \binom{11}{0} + \binom{11}{1} + \binom{11}{2} = 67 \\
 h_3(\Delta_{3,11}^*) &= \sum_{i=0}^2 \binom{11}{i} = \binom{11}{0} + \binom{11}{1} + \binom{11}{2} = 67 \\
 h_4(\Delta_{3,11}^*) &= \sum_{i=0}^2 \binom{11}{i} = \binom{11}{0} + \binom{11}{1} + \binom{11}{2} = 67 \\
 h_5(\Delta_{3,11}^*) &= \sum_{i=0}^2 \binom{11}{i} = \binom{11}{0} + \binom{11}{1} + \binom{11}{2} = 67
 \end{aligned}$$

$\Delta^*(3, 11)$ 'in torik h-vektörünü ($h_0, h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6, h_7, h_8, h_9, h_{10}$)
 $= (1, 12, 67, 67, 67, 67, 67, 67, 67, 12, 1)$ olarak elde ederiz.

Örnek 3.52 ($\Delta_{4,11}^*$ 'in torik h-vektörü).

$$\begin{aligned}
 h_1(\Delta_{4,11}^*) &= \sum_{i=0}^1 \binom{11}{i} = \binom{11}{0} + \binom{11}{1} = 12 \\
 h_2(\Delta_{4,11}^*) &= \sum_{i=0}^2 \binom{11}{i} = \binom{11}{0} + \binom{11}{1} + \binom{11}{2} = 67 \\
 h_3(\Delta_{4,11}^*) &= \sum_{i=0}^3 \binom{11}{i} = \binom{11}{0} + \binom{11}{1} + \binom{11}{2} + \binom{11}{3} = 232 \\
 h_4(\Delta_{4,11}^*) &= \sum_{i=0}^3 \binom{11}{i} = \binom{11}{0} + \binom{11}{1} + \binom{11}{2} + \binom{11}{3} = 232 \\
 h_5(\Delta_{4,11}^*) &= \sum_{i=0}^3 \binom{11}{i} = \binom{11}{0} + \binom{11}{1} + \binom{11}{2} + \binom{11}{3} = 232
 \end{aligned}$$

$\Delta^*(4, 11)$ 'in torik h-vektörünü, ($h_0, h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6, h_7, h_8, h_9, h_{10}$)
 $= (1, 12, 67, 232, 232, 232, 232, 232, 67, 12, 1)$ olarak elde ederiz.

Örnek 3.53 ($\Delta_{5,11}^*$ 'in torik h-vektörü).

$$\begin{aligned}
 h_1(\Delta_{5,11}^*) &= \sum_{i=0}^1 \binom{11}{i} = \binom{11}{0} + \binom{11}{1} = 12 \\
 h_2(\Delta_{5,11}^*) &= \sum_{i=0}^2 \binom{11}{i} = \binom{11}{0} + \binom{11}{1} + \binom{11}{2} = 67 \\
 h_3(\Delta_{5,11}^*) &= \sum_{i=0}^3 \binom{11}{i} = \binom{11}{0} + \binom{11}{1} + \binom{11}{2} + \binom{11}{3} = 232 \\
 h_4(\Delta_{5,11}^*) &= \sum_{i=0}^4 \binom{11}{i} = \binom{11}{0} + \binom{11}{1} + \binom{11}{2} + \binom{11}{3} + \binom{11}{4} = 562 \\
 h_5(\Delta_{5,11}^*) &= \sum_{i=0}^4 \binom{11}{i} = \binom{11}{0} + \binom{11}{1} + \binom{11}{2} + \binom{11}{3} + \binom{11}{4} = 562
 \end{aligned}$$

$\Delta^*(5, 11)$ 'in torik h-vektörünü, ($h_0, h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6, h_7, h_8, h_9, h_{10}$)
 $= (1, 12, 67, 232, 562, 562, 562, 232, 67, 12, 1)$ olarak elde ederiz.

Örnek 3.54 ($\Delta_{2,12}^*$ 'nin torik h-vektörü).

$$\begin{aligned} h_1(\Delta_{2,12}^*) &= \sum_{i=0}^1 \binom{12}{i} = \binom{12}{0} + \binom{12}{1} = 13 \\ h_2(\Delta_{2,12}^*) &= \sum_{i=0}^1 \binom{12}{i} = \binom{12}{0} + \binom{12}{1} = 13 \\ h_3(\Delta_{2,12}^*) &= \sum_{i=0}^1 \binom{12}{i} = \binom{12}{0} + \binom{12}{1} = 13 \\ h_4(\Delta_{2,12}^*) &= \sum_{i=0}^1 \binom{12}{i} = \binom{12}{0} + \binom{12}{1} = 13 \\ h_5(\Delta_{2,12}^*) &= \sum_{i=0}^1 \binom{12}{i} = \binom{12}{0} + \binom{12}{1} = 13 \\ h_6(\Delta_{2,12}^*) &= \sum_{i=0}^1 \binom{12}{i} = \binom{12}{0} + \binom{12}{1} = 13 \end{aligned}$$

$\Delta^*(2, 12)$ 'nin torik h-vektörünü;
 $(h_0, h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6, h_7, h_8, h_9, h_{10}, h_{11})$
 $= (1, 13, 13, 13, 13, 13, 13, 13, 13, 13, 13, 1)$ olarak elde ederiz.

Örnek 3.55 ($\Delta_{3,12}^*$ 'nin torik h-vektörü).

$$\begin{aligned} h_1(\Delta_{3,12}^*) &= \sum_{i=0}^1 \binom{12}{i} = \binom{12}{0} + \binom{12}{1} = 13 \\ h_2(\Delta_{3,12}^*) &= \sum_{i=0}^2 \binom{12}{i} = \binom{12}{0} + \binom{12}{1} + \binom{12}{2} = 79 \\ h_3(\Delta_{3,12}^*) &= \sum_{i=0}^2 \binom{12}{i} = \binom{12}{0} + \binom{12}{1} + \binom{12}{2} = 79 \\ h_4(\Delta_{3,12}^*) &= \sum_{i=0}^2 \binom{12}{i} = \binom{12}{0} + \binom{12}{1} + \binom{12}{2} = 79 \\ h_5(\Delta_{3,12}^*) &= \sum_{i=0}^2 \binom{12}{i} = \binom{12}{0} + \binom{12}{1} + \binom{12}{2} = 79 \\ h_6(\Delta_{3,12}^*) &= \sum_{i=0}^2 \binom{12}{i} = \binom{12}{0} + \binom{12}{1} + \binom{12}{2} = 79 \end{aligned}$$

$\Delta^*(3, 12)$ 'nin torik h-vektörünü;
 $(h_0, h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6, h_7, h_8, h_9, h_{10}, h_{11})$
 $= (1, 13, 79, 79, 79, 79, 79, 79, 79, 79, 79, 13, 1)$ olarak elde ederiz.

Örnek 3.56 ($\Delta_{4,12}^*$ 'nin torik h-vektörü).

$$\begin{aligned} h_1(\Delta_{4,12}^*) &= \sum_{i=0}^1 \binom{12}{i} = \binom{12}{0} + \binom{12}{1} = 13 \\ h_2(\Delta_{4,12}^*) &= \sum_{i=0}^2 \binom{12}{i} = \binom{12}{0} + \binom{12}{1} + \binom{12}{2} = 79 \\ h_3(\Delta_{4,12}^*) &= \sum_{i=0}^3 \binom{12}{i} = \binom{12}{0} + \binom{12}{1} + \binom{12}{2} + \binom{12}{3} = 299 \\ h_4(\Delta_{4,12}^*) &= \sum_{i=0}^3 \binom{12}{i} = \binom{12}{0} + \binom{12}{1} + \binom{12}{2} + \binom{12}{3} = 299 \\ h_5(\Delta_{4,12}^*) &= \sum_{i=0}^3 \binom{12}{i} = \binom{12}{0} + \binom{12}{1} + \binom{12}{2} + \binom{12}{3} = 299 \\ h_6(\Delta_{4,12}^*) &= \sum_{i=0}^3 \binom{12}{i} = \binom{12}{0} + \binom{12}{1} + \binom{12}{2} + \binom{12}{3} = 299 \end{aligned}$$

$\Delta^*(4, 12)$ 'nin torik h-vektörünü;
 $(h_0, h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6, h_7, h_8, h_9, h_{10}, h_{11})$
 $= (1, 13, 79, 299, 299, 299, 299, 299, 299, 79, 13, 1)$ olarak elde ederiz.

Örnek 3.57 ($\Delta_{5,12}^*$ 'nin torik h-vektörü).

$$\begin{aligned} h_1(\Delta_{5,12}^*) &= \sum_{i=0}^1 \binom{12}{i} = \binom{12}{0} + \binom{12}{1} = 13 \\ h_2(\Delta_{5,12}^*) &= \sum_{i=0}^2 \binom{12}{i} = \binom{12}{0} + \binom{12}{1} + \binom{12}{2} = 79 \\ h_3(\Delta_{5,12}^*) &= \sum_{i=0}^3 \binom{12}{i} = \binom{12}{0} + \binom{12}{1} + \binom{12}{2} + \binom{12}{3} = 299 \\ h_4(\Delta_{5,12}^*) &= \sum_{i=0}^4 \binom{12}{i} = \binom{12}{0} + \binom{12}{1} + \binom{12}{2} + \binom{12}{3} + \binom{12}{4} = 794 \\ h_5(\Delta_{5,12}^*) &= \sum_{i=0}^4 \binom{12}{i} = \binom{12}{0} + \binom{12}{1} + \binom{12}{2} + \binom{12}{3} + \binom{12}{4} = 794 \\ h_6(\Delta_{5,12}^*) &= \sum_{i=0}^4 \binom{12}{i} = \binom{12}{0} + \binom{12}{1} + \binom{12}{2} + \binom{12}{3} + \binom{12}{4} = 794 \end{aligned}$$

$\Delta^*(5, 12)$ 'nin torik h-vektörünü;
 $(h_0, h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6, h_7, h_8, h_9, h_{10}, h_{11})$
 $= (1, 13, 79, 299, 794, 794, 794, 794, 299, 79, 13, 1)$ olarak elde ederiz.

Örnek 3.58 ($\Delta_{6,12}^*$ 'nin torik h-vektörü).

$$\begin{aligned} h_1(\Delta_{6,12}^*) &= \sum_{i=0}^1 \binom{12}{i} = \binom{12}{0} + \binom{12}{1} = 13 \\ h_2(\Delta_{6,12}^*) &= \sum_{i=0}^2 \binom{12}{i} = \binom{12}{0} + \binom{12}{1} + \binom{12}{2} = 79 \\ h_3(\Delta_{6,12}^*) &= \sum_{i=0}^3 \binom{12}{i} = \binom{12}{0} + \binom{12}{1} + \binom{12}{2} + \binom{12}{3} = 299 \\ h_4(\Delta_{6,12}^*) &= \sum_{i=0}^4 \binom{12}{i} = \binom{12}{0} + \binom{12}{1} + \binom{12}{2} + \binom{12}{3} + \binom{12}{4} = 794 \\ h_5(\Delta_{6,12}^*) &= \sum_{i=0}^5 \binom{12}{i} = \binom{12}{0} + \binom{12}{1} + \binom{12}{2} + \binom{12}{3} + \binom{12}{4} + \binom{12}{5} = 1586 \\ h_6(\Delta_{6,12}^*) &= \sum_{i=0}^5 \binom{12}{i} = \binom{12}{0} + \binom{12}{1} + \binom{12}{2} + \binom{12}{3} + \binom{12}{4} + \binom{12}{5} = 1586 \end{aligned}$$

$\Delta^*(6, 12)$ 'nin torik h-vektörünü;
 $(h_0, h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6, h_7, h_8, h_9, h_{10}, h_{11})$
 $= (1, 13, 79, 299, 794, 1586, 1586, 794, 299, 79, 13, 1)$ olarak elde ederiz.

Örnek 3.59 ($\Delta_{2,13}^*$ 'ün torik h-vektörü).

$$\begin{aligned} h_1(\Delta_{2,13}^*) &= \sum_{i=0}^1 \binom{13}{i} = \binom{13}{0} + \binom{13}{1} = 14 \\ h_2(\Delta_{2,13}^*) &= \sum_{i=0}^1 \binom{13}{i} = \binom{13}{0} + \binom{13}{1} = 14 \\ h_3(\Delta_{2,13}^*) &= \sum_{i=0}^1 \binom{13}{i} = \binom{13}{0} + \binom{13}{1} = 14 \\ h_4(\Delta_{2,13}^*) &= \sum_{i=0}^1 \binom{13}{i} = \binom{13}{0} + \binom{13}{1} = 14 \\ h_5(\Delta_{2,13}^*) &= \sum_{i=0}^1 \binom{13}{i} = \binom{13}{0} + \binom{13}{1} = 14 \\ h_6(\Delta_{2,13}^*) &= \sum_{i=0}^1 \binom{13}{i} = \binom{13}{0} + \binom{13}{1} = 14 \end{aligned}$$

$\Delta^*(2, 13)$ 'ün torik h-vektörünü;
 $(h_0, h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6, h_7, h_8, h_9, h_{10}, h_{11}, h_{12})$
 $= (1, 14, 14, 14, 14, 14, 14, 14, 14, 14, 14, 1,)$ olarak elde ederiz.

Örnek 3.60 ($\Delta_{3,13}^*$ 'ün torik h-vektörü).

$$\begin{aligned} h_1(\Delta_{3,13}^*) &= \sum_{i=0}^1 \binom{13}{i} = \binom{13}{0} + \binom{13}{1} = 14 \\ h_2(\Delta_{3,13}^*) &= \sum_{i=0}^2 \binom{13}{i} = \binom{13}{0} + \binom{13}{1} + \binom{13}{2} = 92 \\ h_3(\Delta_{3,13}^*) &= \sum_{i=0}^2 \binom{13}{i} = \binom{13}{0} + \binom{13}{1} + \binom{13}{2} = 92 \\ h_4(\Delta_{3,13}^*) &= \sum_{i=0}^2 \binom{13}{i} = \binom{13}{0} + \binom{13}{1} + \binom{13}{2} = 92 \\ h_5(\Delta_{3,13}^*) &= \sum_{i=0}^2 \binom{13}{i} = \binom{13}{0} + \binom{13}{1} + \binom{13}{2} = 92 \\ h_6(\Delta_{3,13}^*) &= \sum_{i=0}^2 \binom{13}{i} = \binom{13}{0} + \binom{13}{1} + \binom{13}{2} = 92 \end{aligned}$$

$\Delta^*(3, 13)$ 'ün torik h-vektörünü;
 $(h_0, h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6, h_7, h_8, h_9, h_{10}, h_{11}, h_{12})$
 $= (1, 14, 92, 92, 92, 92, 92, 92, 92, 92, 92, 14, 1,)$ olarak elde ederiz.

Örnek 3.61 ($\Delta_{4,13}^*$ 'ün torik h-vektörü).

$$\begin{aligned} h_1(\Delta_{4,13}^*) &= \sum_{i=0}^1 \binom{13}{i} = \binom{13}{0} + \binom{13}{1} = 14 \\ h_2(\Delta_{4,13}^*) &= \sum_{i=0}^2 \binom{13}{i} = \binom{13}{0} + \binom{13}{1} + \binom{13}{2} = 92 \\ h_3(\Delta_{4,13}^*) &= \sum_{i=0}^3 \binom{13}{i} = \binom{13}{0} + \binom{13}{1} + \binom{13}{2} + \binom{13}{3} = 378 \\ h_4(\Delta_{4,13}^*) &= \sum_{i=0}^3 \binom{13}{i} = \binom{13}{0} + \binom{13}{1} + \binom{13}{2} + \binom{13}{3} = 378 \\ h_5(\Delta_{4,13}^*) &= \sum_{i=0}^3 \binom{13}{i} = \binom{13}{0} + \binom{13}{1} + \binom{13}{2} + \binom{13}{3} = 378 \\ h_6(\Delta_{4,13}^*) &= \sum_{i=0}^3 \binom{13}{i} = \binom{13}{0} + \binom{13}{1} + \binom{13}{2} + \binom{13}{3} = 378 \end{aligned}$$

$\Delta^*(4, 13)$ 'ün torik h-vektörünü;
 $(h_0, h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6, h_7, h_8, h_9, h_{10}, h_{11}, h_{12})$
 $= (1, 14, 92, 378, 378, 378, 378, 378, 378, 378, 378, 92, 14, 1)$ olarak elde ederiz.

Örnek 3.62 ($\Delta_{5,13}^*$ 'ün torik h-vektörü).

$$\begin{aligned} h_1(\Delta_{5,13}^*) &= \sum_{i=0}^1 \binom{13}{i} = \binom{13}{0} + \binom{13}{1} = 14 \\ h_2(\Delta_{5,13}^*) &= \sum_{i=0}^2 \binom{13}{i} = \binom{13}{0} + \binom{13}{1} + \binom{13}{2} = 92 \\ h_3(\Delta_{5,13}^*) &= \sum_{i=0}^3 \binom{13}{i} = \binom{13}{0} + \binom{13}{1} + \binom{13}{2} + \binom{13}{3} = 378 \\ h_4(\Delta_{5,13}^*) &= \sum_{i=0}^4 \binom{13}{i} = \binom{13}{0} + \binom{13}{1} + \binom{13}{2} + \binom{13}{3} + \binom{13}{4} = 1093 \\ h_5(\Delta_{5,13}^*) &= \sum_{i=0}^4 \binom{13}{i} = \binom{13}{0} + \binom{13}{1} + \binom{13}{2} + \binom{13}{3} + \binom{13}{4} = 1093 \\ h_6(\Delta_{5,13}^*) &= \sum_{i=0}^4 \binom{13}{i} = \binom{13}{0} + \binom{13}{1} + \binom{13}{2} + \binom{13}{3} + \binom{13}{4} = 1093 \end{aligned}$$

$\Delta^*(5, 13)$ 'ün torik h-vektörünü;
 $(h_0, h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6, h_7, h_8, h_9, h_{10}, h_{11}, h_{12})$
 $= (1, 14, 92, 378, 1093, 1093, 1093, 1093, 1093, 378, 92, 14, 1)$ olarak elde ederiz.

Örnek 3.63 ($\Delta_{6,13}^*$ 'ün torik h-vektörü).

$$\begin{aligned} h_1(\Delta_{6,13}^*) &= \sum_{i=0}^1 \binom{13}{i} = \binom{13}{0} + \binom{13}{1} = 14 \\ h_2(\Delta_{6,13}^*) &= \sum_{i=0}^2 \binom{13}{i} = \binom{13}{0} + \binom{13}{1} + \binom{13}{2} = 92 \\ h_3(\Delta_{6,13}^*) &= \sum_{i=0}^3 \binom{13}{i} = \binom{13}{0} + \binom{13}{1} + \binom{13}{2} + \binom{13}{3} = 378 \\ h_4(\Delta_{6,13}^*) &= \sum_{i=0}^4 \binom{13}{i} = \binom{13}{0} + \binom{13}{1} + \binom{13}{2} + \binom{13}{3} + \binom{13}{4} = 1093 \\ h_5(\Delta_{6,13}^*) &= \sum_{i=0}^5 \binom{13}{i} = \binom{13}{0} + \binom{13}{1} + \binom{13}{2} + \binom{13}{3} + \binom{13}{4} + \binom{13}{5} = 2380 \\ h_6(\Delta_{6,13}^*) &= \sum_{i=0}^5 \binom{13}{i} = \binom{13}{0} + \binom{13}{1} + \binom{13}{2} + \binom{13}{3} + \binom{13}{4} + \binom{13}{5} = 2380 \end{aligned}$$

$\Delta^*(6, 13)$ 'ün torik h-vektörünü;
 $(h_0, h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6, h_7, h_8, h_9, h_{10}, h_{11}, h_{12})$
 $= (1, 14, 92, 378, 1093, 2380, 2380, 2380, 1093, 378, 92, 14, 1)$ olarak elde ederiz.

Yukarıda bulduğumuz bu torik h-vektörlerini tabloda gösterelim.(3.18)

k, n	torik h -vektörü
2, 4	1 5 5 1
2, 5	1 6 6 6 1
2, 6	1 7 7 7 7 1
3, 6	1 7 22 22 7 1
2, 7	1 8 8 8 8 8 1
3, 7	1 8 29 29 29 8 1
2, 8	1 9 9 9 9 9 9 1
3, 8	1 9 37 37 37 37 9 1
4, 8	1 9 37 93 93 37 9 1
2, 9	1 10 10 10 10 10 10 10 1
3, 9	1 10 46 46 46 46 46 10 1
4, 9	1 10 46 130 130 130 46 10 1
2, 10	1 11 11 11 11 11 11 11 11 1
3, 10	1 11 56 56 56 56 56 56 11 1
4, 10	1 11 56 176 176 176 176 56 11 1
5, 10	1 11 56 176 386 386 176 56 11 1
2, 11	1 12 12 12 12 12 12 12 12 12 1
3, 11	1 12 67 67 67 67 67 67 67 12 1
4, 11	1 12 67 232 232 232 232 232 67 12 1
5, 11	1 12 67 232 562 562 562 232 67 12 1
2, 12	1 13 13 13 13 13 13 13 13 13 13 1
3, 12	1 13 79 79 79 79 79 79 79 79 13 1
4, 12	1 13 79 299 299 299 299 299 299 79 13 1
5, 12	1 13 79 299 794 794 794 794 299 79 13 1
6, 12	1 13 79 299 794 1586 1586 794 299 79 13 1
2, 13	1 14 14 14 14 14 14 14 14 14 14 14 1
3, 13	1 14 92 92 92 92 92 92 92 92 92 14 1
4, 13	1 14 92 378 378 378 378 378 378 378 92 14 1
5, 13	1 14 92 378 1093 1093 1093 1093 1093 378 92 14 1
6, 13	1 14 92 378 1093 2380 2380 2380 1093 378 92 14 1

Tablo 3.18: $\Delta^*(k, n)$ 'nin Torik h -vektörü

4. CHOW-BETTI SAYILARI

Bu bölümde bir hipersimpleksin normal fanının Chow-Betti sayıları ile ilgileneceğiz. $\Delta_{k,n}$ bir hipersimpleks olmak üzere, $\Delta_{k,n}$ 'nin normal fanına karşılık gelen torik varyete $(n-1)$ -boyutlu bir kompleks projektif torik varyetedir. Bir hipersimpleksin normal fanının Chow-Betti sayıları ise $(n-1)$ -boyutlu bir kompleks projektif torik varyetenin Chow kohomoloji halkası ile ilgilidir. Bu bölümde, Chow kohomoloji halkasının ilk olarak genel bir tanımını, daha sonra [2]'deki bir hesaplamasını vereceğiz.

Bu bölümde genellikle [6]'yı takip edeceğiz.

4.1. Chow (Kohomoloji) Halkası

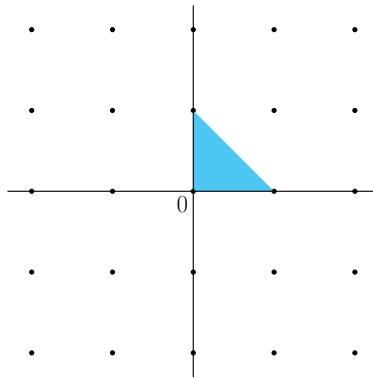
Chow kohomoloji halkası tanımdan önce, ihtiyaç duyacağımız tam fan, hipersimpleksin normal fanı, düzey, ağırlık ve Minkowski ağırlıkları gibi kavramlardan bahsedeceğiz.

Tanım 4.1 (Tam Fan). Bir Δ fanı için, $|\Delta| = \mathbb{R}^n$ ise Δ 'ya **tam fan** denir.

Δ fanı tam ise Δ 'ya karşılık gelen torik varyete X_Δ da tamdır [7, 67.sayfa].

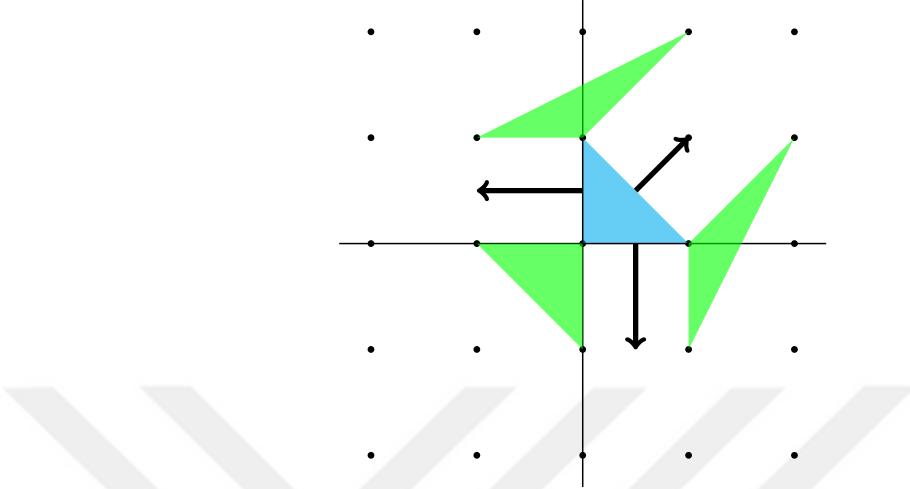
Tanım 4.2 (Hipersimpleksin Normal Fanı). Bir hipersimpleksin yüzünün normal konisi, $\{0\}$ ve bu yüzün tüm dış normal vektörlerinden oluşur. Bir hipersimpleksin her yüzü için bir normal koni vardır. Bir hipersimpleksin tüm yüzlerinin normal konilerinin oluşturduğu fana bu **hipersimpleksin normal fanı** denir.

Örnek 4.3 (Bir politopun normal fanı). Şekil 4.1'deki $\text{konv}\{(0, 0), (1, 0), (0, 1)\}$ politopunu düşünelim.



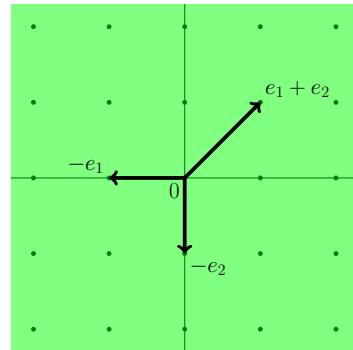
Şekil 4.1: $\text{konv}\{(0, 0), (1, 0), (0, 1)\}$

$\text{konv}\{(0, 0), (1, 0), (0, 1)\}$ 'in bir yüzünün normal konisi, $\{0\}$ ve bu yüzün tüm dış normal vektörlerinden oluşur. O halde, $\text{konv}\{(0, 0), (1, 0), (0, 1)\}$ 'in kenarlarının normal konileri, Şekil 4.2'deki gibi tek bir dış normal vektör iken; $\text{konv}\{(0, 0), (1, 0), (0, 1)\}$ 'in köşelerinin normal konileri, Şekil 4.2'deki gibi 2 vektör ile üretilen koniler olur.



Şekil 4.2: $\text{konv}\{(0, 0), (1, 0), (0, 1)\}$ 'in yüzlerinin normal konileri

$\text{konv}\{(0, 0), (1, 0), (0, 1)\}$ 'in normal fani, $\text{konv}\{(0, 0), (1, 0), (0, 1)\}$ 'in tüm yüzlerinin normal konilerinin birleşimidir. Yani, $\text{konv}\{(0, 0), (1, 0), (0, 1)\}$ 'in normal fani; Şekil 4.3'teki gibi $\{0\}$, $e_1 + e_2$, $-e_1$, $-e_2$, $\text{koni}(e_1 + e_2, -e_2)$, $\text{koni}(-e_1, -e_2)$ ve $\text{koni}(-e_1, e_1 + e_2)$ konilerinden oluşan fandır.

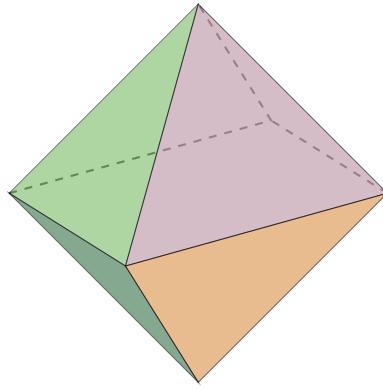


Şekil 4.3: $\text{konv}\{(0, 0), (1, 0), (0, 1)\}$ 'in normal fani

Örnek 4.4 ($\Delta_{2,4}$ 'ün normal fani). $\Delta_{2,4}$ hipersimpleksini düşünelim.

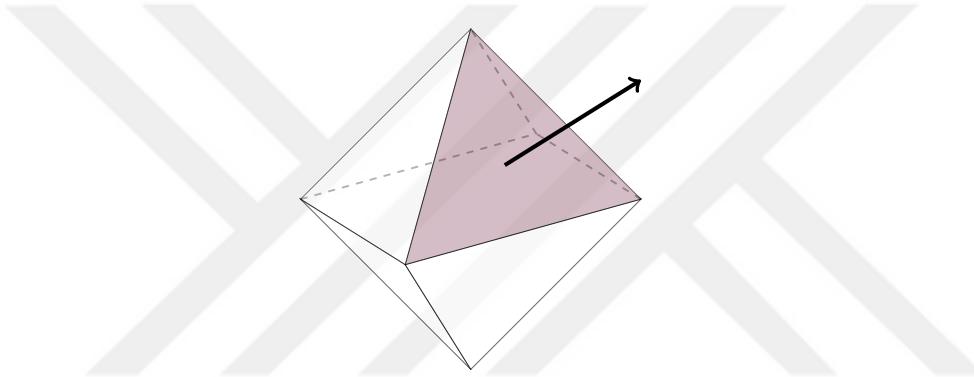
$2 \leq k \leq n-2$ için, $\Delta_{k,n}$ hipersimpleksi $(n-1)$ -boyutlu ve $2n$ tane 1-ters boyutlu yüzeye¹ sahip olan bir politoptur ([6], 8. sayfa). O halde, $\Delta_{2,4}$ hipersimpleksinde $k = 2$ olduğundan, $\Delta_{2,4}$ 3-boyutludur. Ve $2n = 8$ tane 1-ters boyutlu yüzeye sahip bir politoptur. Yani, Şekil 4.4'teki gibi $\Delta_{2,4}$ 'ün 8 tane 2-boyutlu yüzü vardır.

¹facet



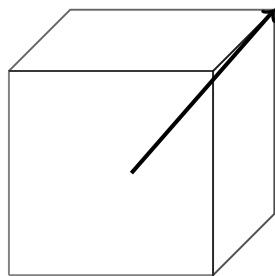
Şekil 4.4: $\Delta_{2,4}$

1-ters boyutlu yüzün normalleri mod $\langle (e_1 + \dots + e_n) \rangle$ 'de $\pm e_i$ birim vektörleridir ([6], 8.sayfa). Yani, $\Delta_{2,4}$ 'ün bir 2-boyutlu yüzünün normali mod $\langle (1, 1, 1, 1) \rangle$ 'de Şekil 4.5'teki gibi $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ için tek bir $\pm e_i$ vektöridür.



Şekil 4.5: $\Delta_{2,4}$ 'ün bir 2-boyutlu yüzü ve onun normal vektörü

$\Delta_{2,4}$ 'ün bir 2-boyutlu yüzünün normal konisi, Şekil 4.6'daki gibi Şekil 4.5'teki normal vektörün oluşturduğu konidir.



Şekil 4.6: $\Delta_{2,4}$ 'ün bir 2-boyutlu yüzünün normal konisi

$\Delta_{2,4}$ 'ün 8 tane 2-boyutlu yüzü olduğundan, bu yüzlerin normal konilerini; 8 tane $e_1, e_2, e_3, e_4, -e_1, -e_2, -e_3$ ve $-e_4$ vektörü olarak elde ederiz.

$\Delta_{2,4}$ 'ün bir köşesinin normal konisini bulalım. Normal fan, hipersimpleksin yüzlerinin kesişim ilişkilerini bu yüzlere karşı gelen konilerde korur. O halde, $\Delta_{2,4}$ 'ün bir köşesini içeren 4 tane 2-boyutlu yüzün normal konilerini düşündüğümüzde; $\Delta_{2,4}$ 'ün bir köşesinin normal konisini, $\{0\}$ 'dan ve köşeleri $e_1, e_2, e_3, e_4, -e_1, -e_2, -e_3, -e_4$ olan küpün bir yüzünün köşelerine giden vektörlerin ürettiği bir 3-boyutlu koni olarak elde ederiz.

Dolayısıyla, $\Delta_{2,4}$ 'ün normal fani;

- $\{0\}$,
- $e_1, e_2, e_3, e_4, -e_1, -e_2, -e_3, -e_4$ vektörlerinin ürettiği 1-boyutlu koniler,
- $\text{koni}(e_1, e_2), \text{koni}(e_2, e_3), \text{koni}(e_3, e_4), \text{koni}(e_4, e_1), \text{koni}(-e_1, -e_2), \text{koni}(-e_2, -e_3), \text{koni}(-e_3, -e_4), \text{koni}(-e_4, -e_1)$ 2-boyutlu konileri ve
- $\text{koni}(\{0\}, e_1, e_2, e_3, e_4), \text{koni}(\{0\}, e_1, e_2, -e_1, -e_2), \text{koni}(\{0\}, e_3, e_4, -e_3, -e_4), \text{koni}(\{0\}, e_1, e_4, -e_1, -e_4), \text{koni}(\{0\}, e_2, e_3, -e_2, -e_3), \text{koni}(\{0\}, -e_1, -e_2, -e_3, -e_4)$ 3-boyutlu konilerinden oluşur.

$\Delta_{2,4}$ 'ün normal fanına F diyelim. $|F| = \mathbb{R}^3$ olduğundan, tam fan tanımından, F , yani $\Delta_{2,4}$ 'ün normal fani bir tam fan olur.

Tanım 4.5 (Düzey²). $I, J \subset [n] = \{1, 2, \dots, n\}$ ve $I \cap J = \emptyset$ olacak şekilde bir (I, J) ikilisi için,

$$|I| + |J| = n - r - 1, \quad |I| < k \text{ ve } |J| < n - k \quad (4.1)$$

olsun. (I, J) 'nin düzeyi, $|I|$ ile $|I|$ 'nın (4.1) koşulunu sağlayan en büyük değerinin farkı olarak tanımlanır. (I, J) 'nin düzeyi, $\ell^{r,k,n}(I, J)$ ile gösterilir.

Örnek 4.6. $n = 9, k = 4, r = 3$ sayıları için, Tanım 4.5'teki gibi tanımlanan (I, J) ikilisinin düzeyini bulalım.

Tanım 4.5'ten, $I, J \subset [9] = \{1, 2, \dots, 9\}$ altkümeleri ayrıktır. Ve 4.5'teki (4.1) koşulundan, $|I|$ ve $|J|$ için,

$$|I| + |J| = n - r - 1 \Rightarrow |I| + |J| = 5, \quad (4.2)$$

$$|I| < k \Rightarrow |I| < 4, \quad (4.3)$$

$$|J| < n - k \Rightarrow |J| < 5 \quad (4.4)$$

elde ederiz.

²ing. level

(4.2), (4.3) ve (4.4)'ten, $1 < |J| < 5$ ve $0 < |I| < 4$ olur. O halde, $|I|$ 'nin alabileceği en büyük değer 3'tür. Bu durumda, farklı (I, J) ikilileri için aşağıdaki düzeyleri elde ederiz:

$$\begin{aligned}(I, J) = (\{2, 3, 4, 5\}, \{1\}) &\Rightarrow \ell^{3,4,9}(I, J) = 3 - |I| = 3 - 1 = 2. \\(I, J) = (\{1, 2, 3, 4\}, \{5\}) &\Rightarrow \ell^{3,4,9}(I, J) = 3 - |I| = 3 - 1 = 2. \\(I, J) = (\{1, 2, 4\}, \{3, 7\}) &\Rightarrow \ell^{3,4,9}(I, J) = 3 - |I| = 3 - 2 = 1. \\(I, J) = (\{2, 3, 4\}, \{1, 9\}) &\Rightarrow \ell^{3,4,9}(I, J) = 3 - |I| = 3 - 2 = 1. \\(I, J) = (\{1, 2\}, \{3, 5, 7\}) &\Rightarrow \ell^{3,4,9}(I, J) = 3 - |I| = 3 - 3 = 0. \\(I, J) = (\{3, 4\}, \{7, 8, 9\}) &\Rightarrow \ell^{3,4,9}(I, J) = 3 - |I| = 3 - 3 = 0.\end{aligned}$$

Tanım 4.7 ([6], 338.sayfa, Ağırlık³). Δ , N latisinde bir tam fan ve X_Δ bu fana karşılık gelen tam torik varyete olsun. $\Delta^{(k)}$ 'yı, Δ 'daki ters boyutu k olan tüm konilerin alt kümesi olarak tanımlayalım. $\Delta^{(k)}$ üzerinde tam sayı değerli bir fonksiyon, Δ üzerinde ters boyutu k olan bir **ağırlık** olarak adlandırılır.

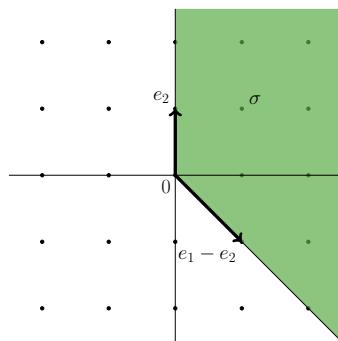
Minkowski ağırlıkları tanımlarken ihtiyaç duyacağımız N_σ/N_τ latisi bir bölüm latisi olduğundan, şimdi bölüm latisini tanımlayalım.

Tanım 4.8 ([3], 25.sayfa, Bölüm latisi). σ bir koni, τ bu koninin bir yüzü ve N bir latis olsun. $\tau \cap N$ 'nin ürettiği bir grup olan alt latis $N_\tau = (\tau \cap N) + (-\tau \cap N)$ için, $N(\tau) = N/N_\tau$ da bir latis olur. Bu latise bölüm latisi deriz.

Tanım 4.9 ($n_{\sigma,\tau}$). σ , Δ 'da bir koni ve τ , σ 'nın bir yüzü ve N bir latis olsun. $\sigma \cap N$ 'nin ürettiği bir grup olan $N_\sigma = (\sigma \cap N) + (-\sigma \cap N)$ alt latisi ve $\tau \cap N$ 'nin ürettiği bir grup olan $N_\tau = (\tau \cap N) + (-\tau \cap N)$ alt latisi için, N_σ/N_τ latisi bir bölüm latisidir.

$n_{\sigma,\tau} \in \sigma$, 1 boyutlu N_σ/N_τ latisinin üreticisi için σ konisindeki herhangi bir temsilci olarak tanımlanır.

Örnek 4.10. Şekil 4.7'deki $\sigma = \text{koni}(e_2, e_1 - e_2)$ konisini düşünelim. σ 'nın $\tau = e_2$ yüzü için, $n_{\sigma,\tau}$ latis noktasını bulalım.



Şekil 4.7: koni($e_2, e_1 - e_2$)

³ing. Weight

Tanım 4.9'dan, $N_\sigma/N_\tau = \mathbb{Z} \times \{0\}$ 'dır. N_σ/N_τ latisinin e_1 ve $-e_1$ olmak üzere 2 üreteci vardır. σ konisinde olan üreteci e_1 olduğundan, Tanım 4.9'dan, $n_{\sigma,\tau} = e_1$ 'dır.

Tanım 4.11 ([6], 338.sayfa, Minkowski ağırlıkları⁴). σ , Δ 'da bir koni; τ , σ 'nın bir yüzü; M, N latisinin dualı ve $\Delta^{(k+1)}$, Δ 'daki ters boyutu $k+1$ olan tüm konilerin alt kümesi olsun.

$n_{\sigma,\tau} \in \sigma$, Tanım 4.9'da tanımladığımız latis noktası olmak üzere; her $\tau \in \Delta^{(k+1)}$ konisi ve her $u \in \tau^\perp \cap M$ elemanı için, bir c fonksiyonu

$$\sum_{\sigma \in \Delta^{(k)} : \sigma \supset \tau} \langle u, n_{\sigma,\tau} \rangle > c(\sigma) = 0$$

esitliğini sağlıyorsa c bir **Minkowski ağırlığı**dır.

Teorem 4.12 ([6], Teorem 3.1). Δ bir fan ve X_Δ bu fana karşılık gelen tam torik varyete olsun. X_Δ torik varyetelerinin Chow kohomoloji grubu, Δ üzerinde ters boyutu k olan Minkowski ağırlıklarının grubuna kanonik olarak izomorfiktir. X_Δ torik varyetelerinin Chow kohomoloji grubu $A^k(X_\Delta)$ ile gösterilir.

Bu teoremin ispatı [6]'daki Teorem 3.1'de bulunmaktadır.

$\Delta_{k,n}$ hipersimpleksinin normal fanına karşılık gelen torik varyete $(n-1)$ -boyutlu bir kompleks projektif torik varyetedir. $\Delta_{k,n}$ hipersimpleksinin normal fanına karşılık gelen torik varyeteyi $X_{k,n}$ ile göstereceğiz.

Tanım 4.13 ([6], Chow Kohomoloji Halkası). $\Delta_{k,n}$ hipersimpleksinin normal fanına karşılık gelen $(n-1)$ -boyutlu kompleks projektif torik varyeteye $X_{k,n}$ diyalim. Bir tam torik varyete olan $X_{k,n}$ 'nin **Chow kohomoloji halkası**, $\Delta_{k,n}$ 'nin normal fanındaki ters boyutu r olan koniler üzerindeki rasyonel değerli Minkowski ağırlıklarının halkası olarak tanımlanır. Diğer bir ifadeyle, $\Delta_{k,n}$ hipersimpleksinin normal fanının Chow kohomoloji halkası Minkowski ağırlıklarının uzayına karşılık gelir. $A^r(X_{k,n})$ ile gösterilir.

4.2. Chow Betti Sayıları

Tanım 4.14 ([6], Hipersimpleksin Chow-Betti Sayıları). $A^r(X_{k,n})$ kompleks projektif torik varyetenin Chow kohomoloji halkası olmak üzere, $\Delta_{k,n}$ **hipersimpleksin r. Chow-Betti sayısı**, $A^r(X_{k,n})$ Chow kohomoloji halkasının rankıdır.

Aynı zamanda, $\Delta_{k,n}$ hipersimpleksin normal fanının Chow-Betti sayıları, $\Delta_{k,n}$ 'nin normal fanındaki ters boyutu r olan koniler üzerindeki Minkowski ağırlıklarının uzayının boyutudur.

$\Delta_{k,n}$ hipersimpleksin Chow-Betti sayıları $\beta_{r,k,n}$ ile gösterilir.

⁴ing. Minkowski weights

$A^r(X_{k,n})$ Chow kohomoloji grubu, bir serbest abelyen gruptur. Serbest grubun rankı baz elemanlarının sayısıdır [11]. Bu durumda, $A^r(X_{k,n})$ 'nin rankı baz elemanlarının sayısı olur.

Örnek 4.15 ($\Delta_{2,4}$ 'ün normal fanının Chow-Betti sayıları). Örnek 4.4'ten, $\Delta_{2,4}$ 'ün normal fani;

- $\{0\}$,
- $e_1, e_2, e_3, e_4, -e_1, -e_2, -e_3, -e_4$ vektörleri ile üretilen 1-boyutlu koniler,
- $\text{koni}(e_1, e_2), \text{koni}(e_2, e_3), \text{koni}(e_3, e_4), \text{koni}(e_4, e_1), \text{koni}(-e_1, -e_2), \text{koni}(-e_2, -e_3), \text{koni}(-e_3, -e_4), \text{koni}(-e_4, -e_1)$ 2-boyutlu konileri ve
- $\text{koni}(\{0\}, e_1, e_2, e_3, e_4), \text{koni}(\{0\}, e_1, e_2, -e_1, -e_2), \text{koni}(\{0\}, e_3, e_4, -e_3, -e_4), \text{koni}(\{0\}, e_1, e_4, -e_1, -e_4), \text{koni}(\{0\}, e_2, e_3, -e_2, -e_3), \text{koni}(\{0\}, -e_1, -e_2, -e_3, -e_4)$ 3-boyutlu konilerinden oluşan fandır.

Şimdi, $\Delta_{2,4}$ 'ün normal fanının Chow-Betti sayılarını bulalım. Tanım 4.14'ten, $\Delta_{2,4}$ hipersimpleksin normal fanının r . Chow-Betti sayısı olan $\beta_{r,2,4}$, $A^r(X_{2,4})$ Chow kohomoloji halkasının rankıdır. Burada, $X_{2,4}$, $\Delta_{2,4}$ hipersimpleksin normal fanına karşılık gelen 3-boyutlu kompleks projektif torik varyetedir.

Tanım 4.13'ten, $A^r(X_{2,4})$ Chow kohomoloji halkası, $\Delta_{2,4}$ 'nin normal fanındaki ters boyutu r olan koniler üzerindeki rasyonel değerli Minkowski ağırlıklarının halkasıdır.

O halde, $A^r(X_{2,4})$ Chow kohomoloji halkasını bulmak için, $\Delta_{2,4}$ 'ün normal fanındaki ters boyutu r olan koniler üzerindeki Minkowski ağırlıklarını bulalım.

İlk olarak, $\Delta_{2,4}$ 'ün normal fanının 0. Chow-Betti sayısı olan $\beta_{0,2,4}$ 'ü bulalım. 0. Chow-Betti sayısı için, $\Delta_{2,4}$ 'ün normal fanındaki ters boyutu 0 olan koniler üzerindeki Minkowski ağırlıklarını bulmalıyız. $\Delta_{2,4}$ 'ün normal fanındaki ters boyutu 0 olan koniler, $\Delta_{2,4}$ 'ün normal fanındaki tam boyutlu konilerdir. $\Delta_{2,4}$ 'ün normal fani bir tam fan olduğundan, $\Delta_{2,4}$ 'ün normal fanındaki tam boyutlu konilerin üzerindeki Minkowski ağırlıkları tektir ([2], 4. sayfa). Bu durumda,

$$\beta_{0,2,4} = 1$$

olur.

$\Delta_{2,4}$ 'ün normal fanının 1. Chow-Betti sayısı olan $\beta_{1,2,4}$ 'ü bulalım. 1. Chow-Betti sayısı için, $\Delta_{2,4}$ 'ün normal fanındaki ters boyutu 1 olan koniler üzerindeki Minkowski ağırlıklarını bulmalıyız. $\Delta_{2,4}$ 'ün normal fanındaki ters boyutu 1 olan koniler, $\Delta_{2,4}$ 'ün normal fanındaki 2 boyutlu konilerdir.

$X_{2,4}$ torik varyetesine karşılık gelen $\Delta_{2,4}$ 'ün normal fanındaki ters boyutu r olan her σ konisi için, $A_r(X_{2,4})$ Chow homoloji halkası, $V(\{\sigma\})$ yörüngé kapamaları ile üretilir ([6], 335. sayfa)

O halde, $\sigma \Delta_{2,4}$ 'ün normal fanındaki 2 boyutlu koniler olmak üzere, yörünge kapanışı tanımından, her $V(\{\sigma\}) = \{0\} \times \{0\}$ olur. Bu nedenle, $A_r(X_{2,4})$ Chow homoloji halkası $\{0\} \times \{0\}$ ile üretilen bir halkadır.

Daha önce belirttiğimiz gibi $A^r(X_{k,n})$ Chow homoloji halkasının rankı baz elemanlarının sayısı olur. O halde, $A_1(X_{2,4})$ Chow homoloji grubunun baz elemanlarının sayısı 1 olduğundan, $A_1(X_{2,4})$ Chow homoloji grubunun rankı 1'dir. $\text{rank}(A_1(X_{2,4})) = \text{rank}(A^1(X_{2,4}))$ 'dır [6]. Bu durumda, $1 = \text{rank}(A_1(X_{2,4})) = \text{rank}(A^1(X_{2,4}))$ 'den,

$$\beta_{1,2,4} = 1$$

olur.

$\Delta_{2,4}$ 'ün normal fanının 2. Chow-Betti sayısı olan $\beta_{2,2,4}$ 'ü bulalım. $\Delta_{2,4}$ politopu bir oktahedron olduğundan, $\Delta_{2,4}$ 'ün boyutu 3'tür. Ve oktahedron, yani $\Delta_{2,4}$ 8 tane 1 ters boyutlu yüze sahiptir. O halde, $\Delta_{2,4}$ 'ün normal fanının 2. Chow-Betti sayısı,

$$\beta_{2,2,4} = 8 - 3 = 5$$

olur ([2], 8. sayfa).

$\Delta_{2,4}$ 'ün normal fanının 3. Chow-Betti sayısı olan $\beta_{3,2,4}$ 'ü bulalım. 3. Chow-Betti sayısı için, $\Delta_{2,4}$ 'ün normal fanındaki ters boyutu 3 olan koniler üzerindeki Minkowski ağırlıklarını bulmalıyız. $\Delta_{2,4}$ 'ün normal fanındaki ters boyutu 3 olan koniler, $\Delta_{2,4}$ 'ün normal fanındaki 0 boyutlu konilerdir. $\Delta_{2,4}$ 'ün normal fanındaki 0 boyutlu koni $\{0\}$ 'dır. $n_{\{0\},\{0\}} = 0$ olduğundan, $\{0\}$ üzerindeki Minkowski ağırlıkları tektir. Bu durumda, 3. Chow-Betti sayısı,

$$\beta_{3,2,4} = 1$$

olur.

Şimdi, Chow Betti sayılarının [2]'deki formülünü verelim.

Teorem 4.16 ([2], Teorem 3.1 Chow Betti Sayıları). $1 \leq k \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ olmak üzere,

$$\beta_{r,k,n} = \begin{cases} \sum_{i=0}^{r-1} \binom{n}{i} & 1 \leq r \leq k \\ \sum_{i=0}^{k-1} \binom{n}{i} & k < r < n-k \\ \sum_{i=0}^{n-r-1} \binom{n}{i} & n-k \leq r \leq n-1 \end{cases}$$

Burada, $A^r(X_{k,n})$ 'nin bir bazı, düzey tanımındaki (4.1) koşulunu sağlayan (I, J) ve $K \subset [n]$ için,

$$c_K^{r,k,n} = \begin{cases} 1, & K \subseteq I \cup J \text{ ve } |J \cap K| = \ell^{r,k,n}(I, J) \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan Minkowski ağırlıkları ile verilir. Bu teoremin ispatı [2]'deki Teorem 3.1'de bulunmaktadır.

k, n	Chow-Betti sayıları
2, 4	1 1 5 1
2, 5	1 1 6 6 1
2, 6	1 1 7 7 7 1
3, 6	1 1 7 22 7 1
2, 7	1 1 8 8 8 8 1
3, 7	1 1 8 29 29 8 1
2, 8	1 1 9 9 9 9 9 1
3, 8	1 1 9 37 37 37 9 1
4, 8	1 1 9 37 93 37 9 1
2, 9	1 1 10 10 10 10 10 10 1
3, 9	1 1 10 46 46 46 46 10 1
4, 9	1 1 10 46 130 130 46 10 1
2, 10	1 1 11 11 11 11 11 11 11 1
3, 10	1 1 11 56 56 56 56 56 11 1
4, 10	1 1 11 56 176 176 176 56 11 1
5, 10	1 1 11 56 176 386 176 56 11 1
2, 11	1 1 12 12 12 12 12 12 12 12 1
3, 11	1 1 12 67 67 67 67 67 67 12 1
4, 11	1 1 12 67 232 232 232 232 67 12 1
5, 11	1 1 12 67 232 562 562 232 67 12 1
2, 12	1 1 13 13 13 13 13 13 13 13 13 1
3, 12	1 1 13 79 79 79 79 79 79 79 13 1
4, 12	1 1 13 79 299 299 299 299 299 79 13 1
5, 12	1 1 13 79 299 794 794 794 299 79 13 1
6, 12	1 1 13 79 299 794 1586 794 299 79 13 1
2, 13	1 1 14 14 14 14 14 14 14 14 14 14 1
3, 13	1 1 14 92 92 92 92 92 92 92 92 14 1
4, 13	1 1 14 92 378 378 378 378 378 378 92 14 1
5, 13	1 1 14 92 378 1093 1093 1093 1093 378 92 14 1
6, 13	1 1 14 92 378 1093 2380 2380 1093 378 92 14 1

Tablo 4.1: $\Delta(k, n)$ 'nin normal fanının Chow-Betti sayıları

5. TORİK H-VEKTÖRÜ VE CHOW-BETTİ SAYILARI

Bu bölümde, önceki bölümlerde bulduğumuz dual hipersimpleksin torik h-vektörü ve Chow-Betti sayılarının arasındaki benzerliğini göstermek için bir tablo oluşturacağız. Bu benzerlikten ilk olarak, [2]'de bahsedilmiştir. Aşağıdaki tabloyu genel olarak Polymake [8] kullanarak oluşturduk.

k, n	torik h -vektörü	Chow-Betti sayıları
2, 4	1 5 5 1	1 1 5 1
2, 5	1 6 6 6 1	1 1 6 6 1
2, 6	1 7 7 7 7 1	1 1 7 7 7 1
3, 6	1 7 22 22 7 1	1 1 7 22 7 1
2, 7	1 8 8 8 8 8 1	1 1 8 8 8 8 1
3, 7	1 8 29 29 29 8 1	1 1 8 29 29 8 1
2, 8	1 9 9 9 9 9 9 1	1 1 9 9 9 9 9 1
3, 8	1 9 37 37 37 37 9 1	1 1 9 37 37 37 9 1
4, 8	1 9 37 93 93 37 9 1	1 1 9 37 93 37 9 1
2, 9	1 10 10 10 10 10 10 10 1	1 1 10 10 10 10 10 10 1
3, 9	1 10 46 46 46 46 46 10 1	1 1 10 46 46 46 46 10 1
4, 9	1 10 46 130 130 130 46 10 1	1 1 10 46 130 130 46 10 1
2, 10	1 11 11 11 11 11 11 11 11 1	1 1 11 11 11 11 11 11 11 1
3, 10	1 11 56 56 56 56 56 56 11 1	1 1 11 56 56 56 56 56 11 1
4, 10	1 11 56 176 176 176 176 56 11 1	1 1 11 56 176 176 176 176 56 11 1
5, 10	1 11 56 176 386 386 176 56 11 1	1 1 11 56 176 386 176 56 11 1
2, 11	1 12 12 12 12 12 12 12 12 12 1	1 1 12 12 12 12 12 12 12 12 1
3, 11	1 12 67 67 67 67 67 67 67 12 1	1 1 12 67 67 67 67 67 67 12 1
4, 11	1 12 67 232 232 232 232 232 67 12 1	1 1 12 67 232 232 232 232 67 12 1
5, 11	1 12 67 232 562 562 562 232 67 12 1	1 1 12 67 232 562 562 232 67 12 1
2, 12	1 13 13 13 13 13 13 13 13 13 13 1	1 1 13 13 13 13 13 13 13 13 13 1
3, 12	1 13 79 79 79 79 79 79 79 13 1	1 1 13 79 79 79 79 79 79 13 1
4, 12	1 13 79 299 299 299 299 299 299 79 13 1	1 1 13 79 299 299 299 299 299 79 13 1
5, 12	1 13 79 299 794 794 794 794 299 79 13 1	1 1 13 79 299 794 794 794 299 79 13 1
6, 12	1 13 79 299 794 1586 1586 794 299 79 13 1	1 1 13 79 299 794 1586 794 299 79 13 1

Tablo 5.1: $\Delta^*(k, n)$ 'nin Torik h -vektörü ve $\Delta(k, n)$ 'nin normal fanının Chow-Betti sayıları

Kısim II

6. MINKOWSKI TOPLAMLARININ EHRHART POLİNOMLARI

Bu bölümde amacımız iki latis politopun Minkowski toplamının Ehrhart polinomu ile bu politopların Ehrhart polinomları arasında bir ilişki bulmaktır. Burada, iki latis politoptan birini herhangi bir latis politop, diğerini ise köşelerinden biri orijin olan bir latis doğru parçası olarak alacağız.

İlk olarak gerekli temel kavramlar olan Ehrhart polinomları ve Minkowski toplamlarından bahsedeceğiz. Sonra, başta bahsettiğimiz Ehrhart polinomları arasındaki ilişki için iki formül ispatlayacağız. P herhangi bir latis politop ve S köşelerinden biri orijin olan bir latis doğru parçası olmak üzere, P ve S için elde edeceğimiz bu formüllerin ortaya çıkmasındaki en temel fikir Minkowski toplamını P politopunu öteleyerek elde etmeye çalışmak olacaktır.

Bu bölümde, [12], [13], [14] ve [15]'i takip edeceğiz. Tüm hesaplamalar için SageMath [10]'u kullanacağız.

6.1. Ehrhart Polinomları

Bu bölümde latis politoplarla ilgileneceğimiz için ilk olarak latis politoplarını, sonra Ehrhart polinomunun tanımı için gerekli olan t-genleşmeyi ve bir politop üzerindeki koniyi tanımlayacağız.

Tanım 6.1 (Standart Latis).

$$\mathbb{Z}^d = \{(z_1, z_2, \dots, z_d) \mid \text{her } z_i \in \mathbb{Z}, i \in \{1, 2, \dots, d\}\}$$

kümlesi **standart latis** olarak adlandırılır.

Şu andan itibaren, latis dediğimizde standart latis düşüneceğiz.

Tanım 6.2 (Latis Politop). \mathbb{R}^n 'deki sonlu sayıda yarım uzayın kesişimine bir **çokyüzlü** denir. Bir sınırlı çokyüzlüye **politop** adı verilir. Bir politopun tüm köşeleri latis noktası ise, yani standart latisin elemanı ise, bu politop **latis politop** denir.

Tanım 6.3 (t-genleşme¹). Bir S kümesinin **t-genleşmesi** $tS = \{tx \mid x \in S\}$ olarak tanımlanır.

Politopların genleşmelerini düşünüduğumuzde, $t \in \mathbb{N}$ olduğunu varsayıcağız.

¹ing. t-dilation

Tanım 6.4 ([12], Bir politop üzerindeki koni²). P , köşeleri v_1, v_2, \dots, v_n olan, \mathbb{R}^d 'de konveks bir politop olsun. P 'nin köşelerine son koordinat olarak 1 ekleyerek, P politopunu \mathbb{R}^{d+1} 'e yükseltelim. Bu yeni noktalara u_1, u_2, \dots, u_n diyelim.

O halde, **P üzerindeki koni**

$$\text{koni}(P) = \{x \in \mathbb{R}^{d+1} \mid x = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_n u_n, \quad \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}_{\geq 0}\}$$

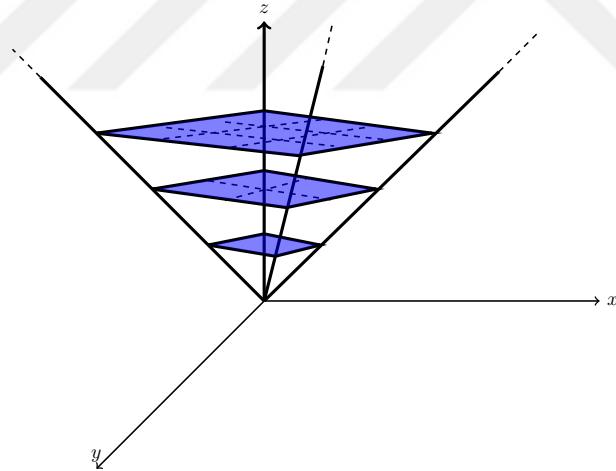
olarak tanımlanır.

Tanım 6.5 (Ehrhart Polinomu). $L_P(t) = |tP \cap \mathbb{Z}^d|$ fonksiyonu, P politopunun t -genleşmesindeki latis noktalarını sayan bir fonksiyon olsun. Ehrhart, P bir latis politop ise, $L_P(t)$ 'nin derecesi d olan bir polinom olduğunu ispatlamıştır. $L_P(t)$ polinomu, P 'nin **Ehrhart polinomu** olarak adlandırılır.

Örnek 6.6. $P = \text{konv}\{(0, 0), (1, 0), (1, 1), (0, 1)\}$ olsun. Tanım 6.3'den, P karesinin t -genleşmesi $tP = \{tx \mid x \in \text{konv}\{(0, 0), (1, 0), (1, 1), (0, 1)\}, t \in \mathbb{N}\}$ 'dir. O halde,

$$\begin{aligned} t = 0 &\Rightarrow tP = \text{konv}\{(0, 0)\} \\ t = 1 &\Rightarrow tP = \text{konv}\{(0, 0), (1, 0), (1, 1), (0, 1)\} \\ t = 2 &\Rightarrow tP = \text{konv}\{(0, 0), (2, 0), (2, 2), (0, 2)\}. \end{aligned}$$

Tanım 6.4'ten, P karesinin üzerindeki koni Şekil 6.1'deki gibidir.



Şekil 6.1: Kare üzerindeki koni

Dolayısıyla, aşağıdaki latis noktalarının sayılarını elde ederiz:

$$\begin{aligned} t = 0 &\Rightarrow 0P \text{'nin latis noktalarının sayısı} = 1 \\ t = 1 &\Rightarrow 1P \text{'nin latis noktalarının sayısı} = 4 \\ t = 2 &\Rightarrow 2P \text{'nin latis noktalarının sayısı} = 9 \end{aligned}$$

O halde, Tanım 6.5'ten, P 'nin Ehrhart polinomu sabit terimi 1 ve derecesi 2 olan polinom $L_P(t) = (t + 1)^2 = t^2 + 2t + 1$ olur.

²ing. Cone over a polytope

Ayrıca, Ehrhart polinomlarını aşağıdaki kodlarla SageMath [10]'u kullanarak da bulabiliriz:

konv{ $(0,0), (1,0), (1,1), (0,1)$ }’nin Ehrhart polinomu:

```
P = Polyhedron(vertices=[[0, 0], [1, 0], [1, 1], [0, 1]])
P.ehrhart_polynomial()
```

Output:

konv{ $(0,0), (1,0), (1,1), (0,1)$ }’nin Ehrhart polinomu: t^2+2t+1

6.2. Minkowski Toplamları

Tanım 6.7 (Minkowski Toplami). P_1, P_2, \dots, P_k politoplarının **Minkowski toplamı**

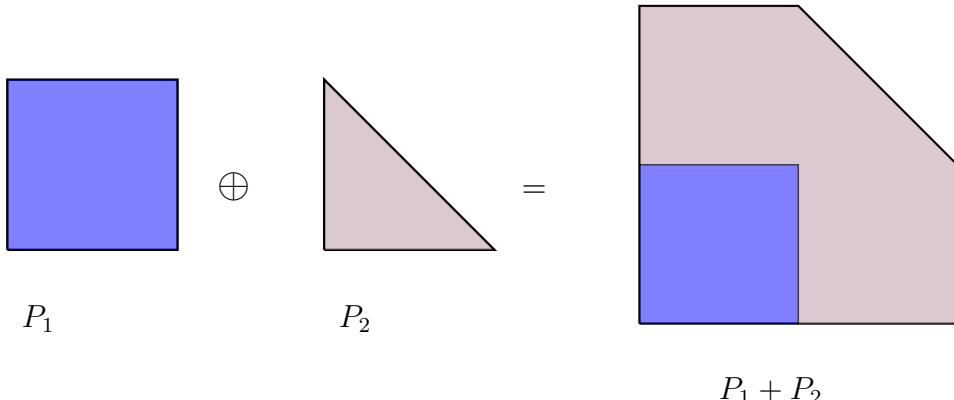
$$P_1 + \dots + P_k := \{a_1 + \dots + a_k \mid \text{her } a_i \in P_i, i \in \{1, 2, \dots, k\}\}$$

olarak tanımlanır.

Örnek 6.8. P_1 ve P_2 , Şekil 6.2'deki gibi sırasıyla $\text{konv}\{(0, 0), (1, 0), (1, 1), (0, 1)\}$ karesi ve $\text{konv}\{(0, 0), (1, 0), (0, 1)\}$ üçgeni olsun. Minkowski toplamı tanımından, P_1 ve P_2 'nin Minkowski toplamı

$$P_1 + P_2 = \{p_1 + p_2 \mid p_1 \in P_1, p_2 \in P_2\} = \text{konv}\{(0, 0), (2, 0), (2, 1), (1, 2), (0, 2)\}$$

olur. (Şekil 6.2)



Şekil 6.2: Kare ve üçgenin Minkowski toplamı

Ayrıca, Minkowski toplamını, aşağıdaki kodlarla, SageMath [10]'u kullanarak da bulabiliriz:

```
P1 karesinin ve P2 üçgeninin Minkowski toplamının köşeleri:  

P_1 = Polyhedron(vertices=[[0, 0], [1, 0], [1, 1], [0, 1]])  

P_2 = Polyhedron(vertices=[[0, 0], [1, 0], [0, 1]])  

M = P_1.minkowski_sum(P_2)  

M.vertices()
```

Output:

P₁ karesinin ve P₂ üçgeninin Minkowski toplamının köşeleri:
(A vertex at (0, 0), A vertex at (2, 1), A vertex at (0, 2),
A vertex at (2, 0), A vertex at (1, 2))

6.3. Doğru Parçalarıyla Minkowski Toplamlarının Ehrhart Polinomları

Şu andan itibaren, bir P latis politopunun ve bir S latis doğru parçasının Minkowski toplamı olan $M = P + S'$ nin Ehrhart polinomunu inceleyeceğiz. Latis doğru parçasının köşelerinden birinin orijin olduğunu varsayacağımız.

Aşağıdaki notasyonları sabitleyelim:

- q , S' nin orijine en yakın latis noktasıdır.
- S^1 , $(0, q)$ indirgenmiş doğru parçasıdır, yani bir ilkel vektördür.
- $P^i = P + iq$ politopu P 'nin iq kadar ötelenmiş kopyasıdır.
- $\delta = \dim(M) - \dim(P)$.
- I_i , P ve P^i 'nin kesişimidir.
- $L_P(t)$, $L_S(t)$ ve $L_M(t)$ sırasıyla, P , S ve M 'nin Ehrhart polinomlarıdır.

Tanım 6.9 (Delik³). Yukarıdaki notasyonlarla, (P, S) ikilisinin **delığını**,

$$H = (P + S^1) \setminus P \setminus P^1$$

olarak tanımlarız.

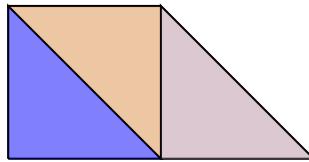
Bir delik P ve S^1 'e bağlıdır.

³ing. Hole

Örnek 6.10. $P = \text{konv}\{(0,0), (1,0), (0,1)\}$ ve $S = \text{konv}\{(0,0), (1,0)\}$ olsun. Minkowski toplamı tanımından, P ve S 'nin Minkowski toplamı Şekil 6.3'teki gibi

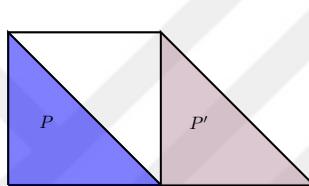
$$P + S = \text{konv}\{(0,0), (2,0), (1,1), (0,1)\}$$

olur.



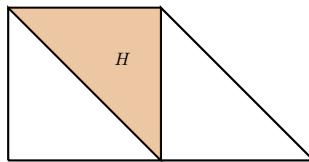
Şekil 6.3: Üçgen ve latis doğru parçasının Minkowski toplamı

$P^1 = P + 1q$, Şekil 6.4'teki gibidir.



Şekil 6.4: Üçgen ve $1q$ kadar ötelenmiş üçgen

Dolayısıyla, delik tanımından, $H = \text{konv}\{(0,1), (1,0), (1,1)\}$ olur. (Figure 6.5)



Şekil 6.5: Üçgen ve latis doğru parçası ikilisinin deliği

6.3.1. Ortogonal Uzaylardaki Politoplar

Doğru parçalarıyla Minkowski toplamlarının Ehrhart polinomlarını düşünürken, en basit durum bir P latis politopu ve bir S latis doğru parçasının ortogonal uzaylarda olmaları durumudur.

Önsav 6.11. Bir P latis politopu ve bir S latis doğru parçası ortogonal uzaylarda politoplar ise P ve S politoplarının Minkowski toplamının her latis noktası, P 'deki bir latis noktası ile S 'deki bir latis noktasının tek bir kombinasyonudur.

Kanıt. P latis politopu ve S latis doğru parçası ortogonal uzaylardaki politoplar olsun. P ve S 'nin Minkowski toplamı, Tanim 6.7'dan,

$$P + S = \{p + s : p \in P, s \in S\}$$

olur. $m \in P + S$ alalım. O halde, öyle bir $p = (p_1, p_2, \dots, p_k, 0, 0, \dots, 0) \in P$ ve $s = (0, 0, \dots, 0, s_{k+1}, s_{k+2}, \dots, s_{k+n}) \in S$ vardır ki $m = p + s$ olur. Dolayısıyla,

$$m = (p_1, p_2, \dots, p_k, s_{k+1}, s_{k+2}, \dots, s_{k+n}) \quad (6.1)$$

elde ederiz.

$m = p' + s'$ olacak şekilde bir $p' \in P - \{p\}$ ve bir $s' \in S - \{s\}$ olduğunu varsayıyalım. P ve S ortogonal uzaylarda olduğundan, $p' \in P$ ve $s' \in S$ için, $p' = (p'_1, p'_2, \dots, p'_k, 0, 0, \dots, 0)$ ve $s' = (0, 0, \dots, 0, s'_{k+1}, s'_{k+2}, \dots, s'_{k+n})$ 'dır. O halde,

$$m = (p'_1, p'_2, \dots, p'_k, s'_{k+1}, s'_{k+2}, \dots, s'_{k+n}) \quad (6.2)$$

olur. (6.1) ve (6.2)'den,

$$(p'_1, \dots, p'_m, p'_{k+1}, \dots, s'_{k+n}) = (p_1, \dots, p_m, s_{k+1}, \dots, s_{k+n})$$

elde ederiz. Dolayısıyla, $1 \leq i \leq k + n$ için, $p_i = p'_i$ ve $s_i = s'_i$ olur. \square

Bu Önsav, P latis politopu ve S latis doğru parçası ortogonal uzaylardaki politoplar olduğunda, S 'nin her latis noktası için P 'nin tekrarsız ve M 'deki tüm latis noktalarını içерerek bir kopyasını almak anlamına gelir. Buradan da, bir P latis politopu ve bir S latis doğru parçası ortogonal uzaylardaki politoplar olduğunda

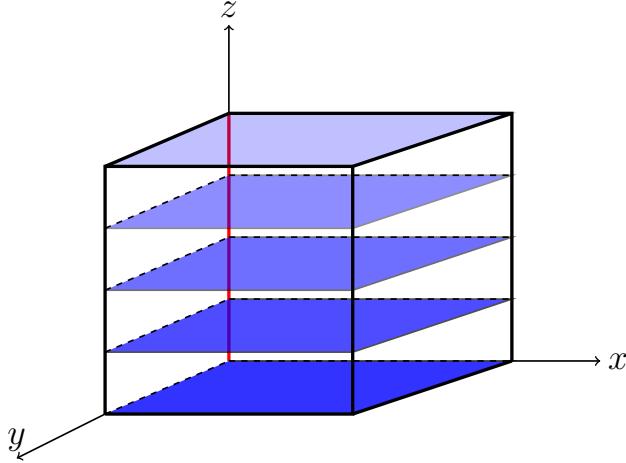
$$L_M(t) = L_P(t)L_S(t)$$

formülünü elde ederiz.

Örnek 6.12. $P = \text{konv}\{(0, 0, 0), (1, 0, 0), (1, 1, 0), (0, 1, 0)\}$ ve $S = \text{konv}\{(0, 0, 0), (0, 0, 1)\}$ olsun. Minkowski toplamının tanımından, P karesinin ve S latis doğru parçasının Minkowski toplamı,

$$\{p + s : p \in \text{konv}\{(0, 0, 0), (1, 0, 0), (1, 1, 0), (0, 1, 0)\}, s \in \text{konv}\{(0, 0, 0), (0, 0, 1)\}\}$$

olur. Yani, $P + S$ Minkowski toplamının, Şekil 6.6'daki gibi P karesinin S latis doğru parçası boyunca kopyaları alınarak elde edilen bir küp olduğunu düşünelimiz.



Şekil 6.6: Karenin kopyaları

6.3.2. Deliksiz İkililer

Bir P latis politopu ve bir S latis doğru parçası ortogonal uzaylarda değılseler, $L_M(t) = L_P(t)L_S(t)$ eşitliğinin sağlanmayacağı açıktır. Çünkü, örneğin; $L_M(t) = L_P(t)L_S(t)$ eşitliğindeki Ehrhart polinomlarının dereceleri bu eşitliği sağlamaz.

\mathbb{R}^d deki $P = (P_1, P_2, \dots, P_k)$ latis politopları için,

$$L_P(t_1, t_2, \dots, t_k) = |(t_1P_1 + t_2P_2 + \dots + t_kP_k) \cap \mathbb{Z}^d|$$

fonksiyonu, t_i değişkenli $\dim(P_i)$ dereceli çok değişkenli bir polinomdur ([15], Bernstein-McMullen). O halde, bizim ilgilendiğimiz politoplar olan P latis politopunun ve S latis doğru parçasının Minkowski toplamı

$$L_M(t) = L(t_1P + t_2S) |_{t_1=t_2=t}$$

olur.

$L_M(t)$ polinomunun baş terimi, $L_P(t)L_S(t)$ çarpımından geldiği için, $L_M(t)$ 'nin derecesinin, $L_P(t)$ 'nin ve $L_S(t)$ 'nin derecelerinin toplamına eşit olması gereklidir. Fakat, S politopu 1 boyutlu olduğundan, $L_S(t)$ polinomu lineer bir polinomdur. Yani, bu derece eşitliğinde, $L_P(t)$ 'nin ve $L_M(t)$ 'nin derecelerinden bağımsızdır. Bu nedenle, $L_M(t) = L_P(t)L_S(t)$ eşitliğindeki Ehrhart polinomlarının derecelerinin bu eşitliği bozmaması için, $L_S(t)$ polinomunun derecesini $L_P(t)$ 'nin ve $L_M(t)$ 'nin derecelerine bağlı olacak şekilde değiştirmeliyiz. Dolayısıyla, daha önce bahsettiğimiz gibi $L_M(t)$ 'nin derecesinin, $L_P(t)$ 'nin ve $L_S(t)$ 'nin derecelerinin toplamına eşit olması gerektiğinden, $L_S(t)$ 'nin derecesi, $L_M(t)$ 'nin derecesinin ve $L_P(t)$ 'nin derecesinin farkı olmalıdır. Ehrhart, bu farkın M 'nin ve P 'nin boyutlarının farkı anlamına geldiğini göstermiştir. $\delta = \dim(M) - \dim(P)$ olarak tanımladığımız δ sayısını önceki formülde kullanarak,

$$L_M(t) = L_P(t)L_S(t^{\delta})$$

formülünü elde ederiz.

P ve M 'nin aynı boyutlu olması durumunda, $L_M(t) = L_P(t)L_S(t^\delta)$ çarpımdaki $L_S(t^\delta)$ 'nın derecesi olan δ , $\dim(M) - \dim(P)$ tanımından, 0'a eşit olur. Yani, P ve M 'nin aynı boyutlu olması durumunda $L_M(t) = L_P(t)L_S(1)$ 'dır. $L_P(t)L_S(1)$, S 'deki latis noktalarının sayısı kadar P 'nin kopyalarını almak anlamına gelir.

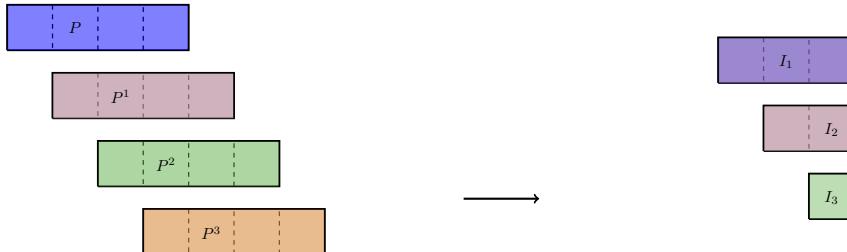
P ve M 'nin farklı boyutlu olması durumunu inceleyelim. S 'nin boyutu 1 olduğundan, P ve M 'nin farklı boyutlu olması durumda, M 'nin boyutu P 'nin boyutundan ancak 1 fazla olabilir. O halde, $\delta = \dim(M) - \dim(P)$ tanımından, $\delta = 1$ olur. Dolayısıyla, $L_M(t) = L_P(t)L_S(t^\delta)$ eşitliğindeki δ yerine 1 yazarsak, bu durum için $L_M(t) = L_P(t)L_S(t)$ elde ederiz. Daha önce bahsettiğimiz P ve S 'nin ortogonal uzaylarda olması da bu duruma dahildir. Yani, δ kullandığımız $L_M(t) = L_P(t)L_S(t^\delta)$ için yine aynı $L_M(t) = L_P(t)L_S(t)$ eşitliğinin geldiğini görürüz. $L_P(t)L_S(t)$ 'nin anlamı ortogonal daha önce 6.3.1.Ortogonal Uzaylardaki Politoplolar kısmında da belirttiğimiz gibi $L_P(t)L_S(t)$, S 'nin her latis noktası için P 'nin tekrarsız ve M 'deki tüm latis noktalarını içerecek bir kopyasını almak anlamına gelir.

Şimdi incelediğimiz deliksiz ikililer durumunda ise, ortogonal uzaylar durumunun aksine, P 'nin kopyaları üst üste gelebilir, yani latis noktalarını birden fazla sayabiliriz. Burada, ikililer delik tanımındaki gibi (P, S) formundadır. M 'nin Ehrhart polinomu $L_M(t)$, M 'deki her noktayı bir kere sayan bir fonksiyon olduğundan, $L_M(t)$ 'yi elde etmek için, P 'nin kopyalarının üst üste geldiği kesişim bölgelerindeki latis noktalarını P 'nin tüm kopyalarının latis noktalarından çıkarmak gereklidir. Bu fikirle biz deliksiz ikililer için,

$$L_M(t) = L_P(t)L_S(t^\delta) - (L_S(1) - 1)L_{I_1}(t)$$

eşitliğinin sağlandığını iddia ediyoruz. Bunu ispatlamadan önce, bu ispatta kullanacağımız tanım, teorem ve önsavları vereceğiz. İlk olarak, bir politopun kopyalarını ve kesimlerini inceleyelim.

Örnek 6.13. $P = \text{konv}\{(0, 0), (4, 0), (4, 1), (0, 1)\}$ ve $S = \text{konv}\{(0, 0), (3, 0)\}$ olsun. P 'nin en fazla S kadar ötelemiş kopyaları olan politoplolar Şekil 6.7'deki gibidir. $I_1 = P \cap P^1$, $I_2 = P \cap P^2$ ve $I_3 = P \cap P^3$ kesimleri ise Şekil 6.8'deki gibi olur.



Şekil 6.7: Dikdörtgenin kopyaları

Şekil 6.8: Dikdörtgen ile kopyalarının kesimleri

Önsav 6.14. M , bir latis politop P 'nin ve bir latis doğru parçası S^1 'in Minkowski toplamı olsun. (P, S^1) ikilisi deliksizdir ancak ve ancak $M = P \cup P^1$.

Kanıt. İlk olarak, (P, S^1) ikilisi deliksiz ise $M = P \cup P^1$ olduğunu gösterelim.

1. $m \in M$ alalım. O halde, M 'nin tanımından, $m = p + s$ olacak şekilde bir $p \in P$ ve $s \in S^1$ vardır. Çelişki elde etmek amacıyla, $p + s \notin P \cup P^1$ olduğunu varsayıyalım. Buradan, $p + s \notin P$ ve $p + s \notin P^1$ olur. Diğer taraftan (P, S^1) ikilisi deliksiz olduğundan, delik tanımı $H = (P + S^1) \setminus P \setminus P^1$ 'den, $(P + S^1) \setminus P \setminus P^1 = \emptyset$ olur. Dolayısıyla, $m = p + s$ elemanı için; $m = p + s \notin P$, $m = p + s \notin P^1$ ve $m = p + s \in M = P + S^1$ olduğundan, $m = p + s \in (P + S^1) \setminus P \setminus P^1 = H = \emptyset$ olur. Bu çelişkiden, $M \subseteq P \cup P^1$ elde ederiz.
2. $P^1 = P + 1q$ tanımından, $P^1 \subseteq P + S^1$ 'dir. O halde, $P^1 \subseteq P + S^1 = M$ olur. Diğer taraftan, $P = P + 0 \subseteq P + S^1 = M$ olduğu açıktır. $P^1 \subseteq M$ ve $P \subseteq M$ olduğundan, $P \cup P^1 \subseteq M$ 'dir.

1 ve 2'den, (P, S^1) ikilisi deliksiz ise $M = P \cup P^1$ olur.

Şimdi, $M = P \cup P^1$ ise (P, S^1) ikilisinin deliksiz olduğunu gösterelim. $M = P \cup P^1$ olduğunu varsayıyalım. $M = P \cup P^1$ ve $M = P + S^1$ olduğundan, $P \cup P^1 = P + S^1$ olur. Delik tanımı $H = (P + S^1) \setminus P \setminus P^1$ 'de, $P + S^1$ yerine $P \cup P^1$ yazarsak, $H = (P \cup P^1) \setminus P \setminus P^1$ olur. Dolayısıyla, $H = (P \cup P^1) \setminus P \setminus P^1 = \emptyset$ 'dir. Yani, (P, S^1) ikilisi deliksizdir. \square

Tanım 6.15. Bir latis politop P , bir latis doğru parçası S ve q için,

$$\bigcup_{k \in [0, L_S(1)-1]} (kq + P)$$

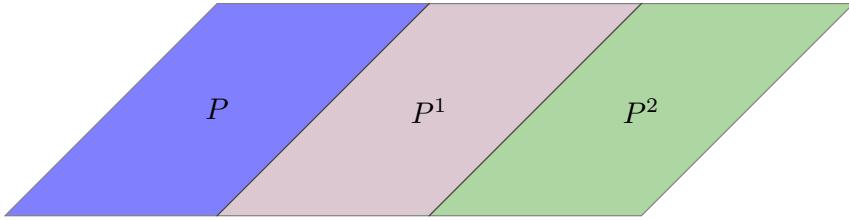
birleşimi, S 'deki latis noktalarının sayısının 1 eksiği kadar P 'nin kopyalarının birleşimidir.

Örnek 6.16. $P = \text{konv}\{(0,0), (1,0), (2,1), (1,1)\}$, Şekil 6.9'daki gibi bir politop olsun. Ve $S = \text{konv}\{(0,0), (2,0)\}$ olsun. S 'nin Ehrhart polinomu, tanımından, $L_S(t) = 2t + 1$ 'dir. O halde, $L_S(1) = 3$ olur. Tanım 6.15'deki k ve q sayıları için, bu tanımdaki birleşim

$$\bigcup_{k \in [0, L_S(1)-1]} kq + P = \bigcup_{k \in [0, 2]} (kq + P) = (0q + P) \cup (1q + P) \cup (2q + P)$$

olur.

Tanım 6.15'den, $P^1 = 1q + P$ ve $P^2 = 2q + P$ Şekil 6.9'daki gibidir.



Şekil 6.9: Paralelkenarın kopyaları

Dolayısıyla, $\bigcup_{k \in [0, L_S(1)-1]} (kq + P) = \{(0, 0), (3, 0), (4, 1), (1, 1)\}$ olur. Burada, P ve S 'nin Minkowski toplamı, $\bigcup_{k \in [0, L_S(1)-1]} (kq + P)$ birleşimine karşılık gelir. Yani,

$$P + S = \bigcup_{k \in [0, L_S(1)-1]} (kq + P) = \{(0, 0), (3, 0), (4, 1), (1, 1)\}.$$

Sonuç olarak, bu örnekte, P ve S 'nin Minkowski toplamını sadece P 'yi ötele-yerek elde ettik.

Önsav 6.17. M , bir latis politop P 'nin ve bir latis doğru parçası S 'nin Minkowski toplamı olsun. $\delta = \dim(M) - \dim(P)$ için, $\delta = 0$ yada $\delta = 1$ 'dir.

Kanıt. $n \in \mathbb{N}$ için, $\dim(P) = n$ olsun. $\dim(S) = 1$ olduğundan, Minkowski toplamı tanımından, $\dim(M) \leq n + 1$ 'dir. O halde, $\delta = \dim(M) - \dim(P) \leq (n + 1) - n = 1$ olur. Diğer taraftan, Minkowski toplamı tanımından, $\delta \geq 0$ 'dır. $\delta \geq 0$ ve $\delta \leq 1$ olduğundan, $\delta = 0$ yada $\delta = 1$ 'dir. \square

Önsav 6.18. M , bir latis politop P 'nin ve bir latis doğru parçası S 'nin Minkowski toplamı olsun. Ve $\delta = \dim(M) - \dim(P)$ olsun. (P, S) deliksiz ise $\delta = 0$ 'dır.

Kanıt. (P, S) ikilisinin deliksiz olduğunu varsayılmı. $\delta = 0$ olduğunu göstermek istiyoruz. Önsav 6.17'den, $\delta = 0$ yada $\delta = 1$ 'dir. $\delta = 1$ olduğunu varsayıyalım. O halde, δ tanımından, $\dim(M) - \dim(P) = \delta = 1$ 'dir. Buradan, $\dim(M) = \dim(P) + 1$ olur. Yani, P politopu \mathbb{R}^n 'de ise M Minkowski toplamı \mathbb{R}^{n+1} 'dedir. Bu, S 'nin her latis noktası için, M 'nin tüm latis noktalarını içerecek ve bu noktaları bir defa sayacak şekilde P 'nin bir kopyasını almak anlamına gelir. Bu nedenle, P 'nin kopyaları arasındaki bölge (P, S) ikilisi için bir deliktir. Ama, (P, S) ikilisinin deliksiz olduğunu varsayıydık. Çelişki. Dolayısıyla, $\delta = 0$ olur. \square

Önsav 6.19. M , bir latis politop P 'nin ve bir latis doğru parçası S^1 'in Minkowski toplamı olsun. $I_1 = P \cap P^1$ için, (P, S^1) deliksiz ise $I_1 \neq \emptyset$ 'dir.

Kanıt. (P, S^1) ikilisinin deliksiz olduğunu varsayıyalım. $I_1 \neq \emptyset$ olduğunu göstermek istiyoruz. $I_1 = \emptyset$ olduğunu varsayıyalım. O halde, $P \cap P^1 = I_1 = \emptyset$ olur. P politopu \mathbb{R}^n 'de olsun. Bu durumda, P^1 politopu, q 'ya bağlı olarak \mathbb{R}^n 'de yada \mathbb{R}^{n+1} 'dedir. P^1 'in \mathbb{R}^n 'de olduğunu varsayıyalım. P^1 'in tanımından, $\dim(P) = \dim(P^1)$ olur. (P, S^1) deliksiz, P ve P^1 , \mathbb{R}^n 'de latis politoplar, $\dim(P) = \dim(P^1)$ ve $P \cap P^1 = I_1 = \emptyset$ olduğundan, P politopu $I_1 \neq \emptyset$ koşulunu sağlayan bir latis doğru parçası olur. O halde, P^1 tanımından, P^1 politopu da bu latis doğru parçasının $1q$ kadar öteleenmiş kopyasıdır.

P ve P^1 kesişmeyen latis doğru parçaları olduğundan, (P, S^1) ikilisi için delik oluşur. Ama (P, S^1) ikilisinin deliksiz olduğunu varsayıdık. Dolayısıyla, P^1 politopu \mathbb{R}^{n+1} ’dedir.

(P, S^1) ikilisi deliksiz olduğundan, Önsav 6.14’ten, $M = P \cup P^1$ ’dir. P politopu \mathbb{R}^n ’de, P^1 politopu \mathbb{R}^{n+1} ’de olduğundan, $M = P \cup P^1$ toplamı \mathbb{R}^{n+1} ’dedir ve $\dim(M) = n + 1$ olur. Ama, (P, S^1) ikilisinin deliksiz olduğu varsayıdık. O halde, Önsav 6.18’den, $\delta = 0$ ’dır. Yani, tanımdan, $0 = \delta = \dim(M) - \dim(P) = n + 1 - n = 1$ olur. Çelişki. Dolayısıyla, $I_1 \neq \emptyset$ ’dir. \square

Theorem 6.20. M , bir latis politop P ’nin ve bir latis doğru parçası S^1 ’in Minkowski toplamı olsun. (P, S^1) ikilisi deliksiz ise $\delta = \dim(M) - \dim(P)$ ve $I_1 = P \cap P^1$ için,

$$L_M(t) = 2L_P(t) - L_{I_1}(t).$$

Kanıt. (P, S^1) ikilisinin deliksiz olduğunu varsayıyalım. Rastgele bir $m \in M$ alalım. (P, S^1) ikilisi deliksiz olduğundan, Önsav 6.14’ten, $M = P \cup P'$ olur. $m \in M$ ve $M = P \cup P'$ olduğundan, $m \in P$ yada $m \in P'$ ’dir. O halde, Ehrhart polinomu tanımından, m latis noktasını $L_P(t)$ yada $L_{P^1}(t)$ ’de sayarız. $m \in M$ rastgele olduğundan, M ’deki her latis noktasını $L_P(t) + L_{P^1}(t)$ ’de sayarız.

Diğer taraftan, (P, S^1) ikilisi deliksiz olduğundan, Önsav 6.19’dan, $I_1 \neq \emptyset$ ’dir. O halde, $m' \in I_1$ olacak şekilde bir $m' \in M$ latis noktasının varıdır. $I_1 = P \cap P'$ olduğundan, m' noktasını, $L_P(t) + L_{P'}(t)$ ’de 2 kez sayarız. Benzer şekilde, I_1 ’deki her latis noktasını da $L_P(t) + L_{P'}(t)$ ’de 2 kez sayarız. O halde, $L_P(t) + L_{P'}(t)$ ’de saydığımız latis noktalarından $L_{I_1}(t)$ ’de saylıklarımızı çıkarmalıyız. Yani, $L_M(t) = L_P(t) + L_{P'}(t) - L_{I_1}(t)$. $L_P(t) = L_{P'}(t)$ olduğundan, $L_P(t) + L_{P'}(t) = 2L_P(t)$ ’dir. Dolayısıyla, $L_M(t) = 2L_P(t) - L_{I_1}(t)$ olur. \square

Önsav 6.21. P bir latis politop, S bir latis doğru parçası ve I_1 , P ile P^1 ’in kesişimi olsun. $I_1 \neq \emptyset$ ise $m \in P + S'$ için, $m = p + s$ olacak şekilde, tek bir $p \in P \setminus I_1$ ve $s \in S$ vardır.

Kanıt. $m = p + s = p' + s'$ olacak şekilde, $p \neq p'$, $s \neq s'$ koşullarını sağlayan $p, p' \in P$, $p, p' \notin I_1$ ve $s, s' \in S$ latis noktalarının olduğunu varsayıyalım. O halde, $0 = m - m = p + s - (p' + s')$ olur. Buradan, $p - p' = s' - s$ ’dir. S bir latis doğru parçası olduğundan, $k \in [0, L_S(1) - 1]$ için, $s' - s = kq$ ’dir. $s \neq s'$ olduğundan, genelligi kaybetmeden $k \geq 1$ olur. Dolayısıyla, $k \geq 1$ için, $p - p' = s' - s = kq$ olur. Yani, $k \geq 1$ için, $p = p' + kq$ olur. $p' \in P$ olduğundan, $k \geq 1$ için, $p \in P^k$ ’dir. Ama $p \notin I_1$ olduğunu varsayıdık. $k \geq 1$ için, $p \in P^k$ olduğundan ve $p \notin I_1$ olduğundan, $p \notin P'$ dir. \square

Teorem 6.22. M , bir latis politop P ve bir latis doğru parçası S 'nin Minkowski toplamı olsun. (P, S) ikilisi deliksiz ise $\delta = \dim(M) - \dim(P)$ ve $I_1 = P \cap P^1$ için,

$$L_M(t) = L_P(t) L_S(t^\delta) - (L_S(1) - 1)L_{I_1}(t).$$

Kanıt. (P, S) ikilisinin deliksiz olduğunu varsayılm. Rastgele bir $m \in M$ alalım. $1 \leq i \leq (L_S(1) - 1)$ için, M^i , $P + ((i-1)q)$ ve $((i-1)q, iq)$ 'nun Minkowski toplamı, yani

$$M^i = (P + ((i-1)q)) + ((i-1)q, iq)$$

olsun. Bu durumda,

$$M = \bigcup_{i \in [1, L_S(1)-1]} M^i$$

olur. O halde, m latis noktasını M^1 yada M^2 yada ... yada $M^{(L_S(1)-1)}$ 'de sayarız. $1 \leq j \leq (L_S(1) - 1)$ için, M^{j+1} Minkowski toplamı M^j 'nin $1q$ kadar ötelenmiş kopyasıdır. Bu nedenle, her $1 \leq j \leq (L_S(1) - 1)$ için $L_{M^j}(t) = L_{M^1}(t)$ olur. Yani, $L_M(t)$ 'yi bulmak için tüm $L_{M^j}(t)$ Ehrhart polinomları yerine $L_{M^1}(t)$ 'yi kullanmak yeterlidir. Dolayısıyla, $M = \bigcup_{i \in [1, L_S(1)-1]} M^i$ olduğundan, M 'deki her latis noktasını $(L_S(1) - 1)L_{M^1}(t)$ 'de sayarız.

(P, S) ikilisi deliksiz olduğundan, indirgenmiş doğru parçası S^1 için, (P, S^1) ikilisi de deliksiz olur. Önsav 6.19'dan, (P, S^1) ikilisi deliksiz ise $I_1 \neq \emptyset$ dir. Önsav 6.21'den, $m \in M^1$ için, $m = p + s$ olacak şekilde, tek bir $p \in P \setminus I_1$ ve $s \in S$ vardır.

Benzer şekilde, $1 \leq i \leq (L_S(1) - 1)$ için, (P, S) ikilisi deliksiz olduğundan, $M^i = (P + ((i-1)q)) + ((i-1)q, iq) = P^i + S^1$ Minkowski toplamındaki (P^i, S^1) ikilisi de deliksizdir. Bu durumda, (P^{i-1}, S^1) deliksiz olduğundan, Önsav 6.19'dan, $I_i = P^{i-1} \cap P^i \neq \emptyset$ olur. $I_i = P^{i-1} \cap P^i \neq \emptyset$ olduğundan, Önsav 6.21'den, $m \in M^i$ için, $m = p + s$ olacak şekilde tek bir $p \in P^{i-1} \setminus I_i$ ve $s \in S$ vardır. Önsav 6.14'ten, $1 \leq i \leq (L_S(1) - 1)$ için, (P^i, S^1) ikilisi deliksiz olduğundan, $M^i = P^{i-1} \cup P^i$ dir. O halde, $P^{i-1} \setminus I_i = M^i \setminus P^i$ dir. Dolayısıyla, $m \in M^i$ için, $m = p + s$ olacak şekilde tek bir $p \in M^i \setminus P^i$, ve $s \in S$ vardır. $1 \leq i \leq (L_S(1) - 1)$ için, $M^i = P^{i-1} \cup P^i$ olduğundan,

$$\begin{aligned} M^1 &= P \cup P^1 \\ M^2 &= P^1 \cup P^2 \\ &\vdots \\ M^{L_S(1)-2} &= P^{L_S(1)-3} \cup P^{L_S(1)-2} \\ M^{L_S(1)-1} &= P^{L_S(1)-2} \cup P^{L_S(1)-1} \end{aligned}$$

elde ederiz.

O halde, $1 \leq i \leq (L_S(1) - 2)$ için, p latis noktası P^i 'de ise biz $m = p + s$ latis noktasını, $(L_S(1) - 1)L_{M^1}(t)$ 'de en az 2 kez sayarız. 2 kez saymamak amacıyla, $1 \leq i \leq (L_S(1) - 2)$ için, $M^i \setminus (M^i \setminus P^i) = P^i$ 'deki latis noktalarını çıkarmalıyız. Yani, $L_{P^1} + \dots + L_{P^{L_S(1)-2}}$ 'yi çıkarmalıyız. $1 \leq i \leq (L_S(1) - 1)$ için, Ehrhart polinomu tanımından, $L_{P^i}(t) = L_P(t)$ dir. Bu nedenle,

$$L_{P^1} + \dots + L_{P^{L_S(1)-2}} = (L_S(1) - 2)L_P(t)$$

elde ederiz. Dolayısıyla,

$$L_M(t) = (L_S(1) - 1)L_{M^1}(t) - (L_S(1) - 2)L_P(t) \quad (6.3)$$

olur.

(P, S^1) deliksiz olduğundan, Teorem 6.20'den,

$$L_{M^1}(t) = 2L_P(t) - L_{I_1}(t) \quad (6.4)$$

olur. O halde, (6.4)'ün her iki tarafını da $(L_S(1) - 1)$ ile çarparsa,

$$(L_S(1) - 1)L_{M^1}(t) = (L_S(1) - 1)(2L_P(t) - L_{I_1}(t)) \quad (6.5)$$

elde ederiz. Dolayısıyla, (6.3) ve (6.5)'ten,

$$\begin{aligned} L_M(t) &= (L_S(1) - 1)L_{M^1}(t) - (L_S(1) - 2)L_P(t) \\ &= (L_S(1) - 1)(2L_P(t) - L_{I_1}(t)) - (L_S(1) - 2)L_P(t) \\ &= (2L_S(1) - 2 - L_S(1) + 2)L_P(t) - (L_S(1) - 1)L_{I_1}(t) \\ &= L_S(1)L_P(t) - (L_S(1) - 1)L_{I_1}(t) \end{aligned}$$

olur.

(P, S) deliksiz ise, Önsav 6.18'den, $\delta = 0$ olur. Bu durumda, $L_S(t^\delta) = L_S(1)$ 'dir. O halde, $L_P(t)L_S(t^\delta) = L_P(t)L_S(1)$. Dolayısıyla,

$$L_M(t) = L_S(1)L_P(t) - (L_S(1) - 1)L_{I_1}(t)$$

eşitliğinden,

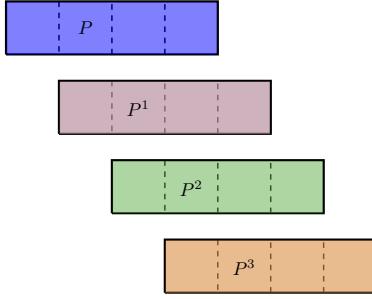
$$L_M(t) = L_P(t)L_S(t^\delta) - (L_S(1) - 1)L_{I_1}(t)$$

elde ederiz. □

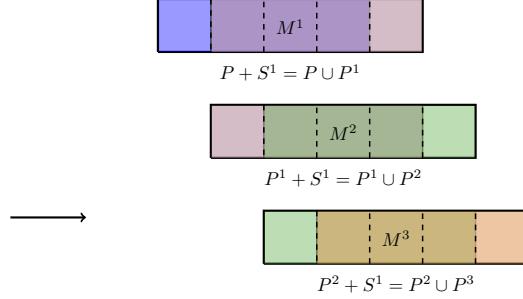
Şimdi, Önsav 1.14 ve Teorem 1.22'yi geometrik olarak anlamak için bir örnek vereceğiz.

Örnek 6.23. $P = \text{conv}\{(0, 0), (4, 0), (4, 1), (0, 1)\}$ Şekil 6.10'da gösterildiği gibi bir politop ve $S = \text{conv}\{(0, 0), (3, 0)\}$ olsun.

P 'nin en fazla $3q$ kadar ötelemiş kopyaları Şekil 6.10'daki gibidir. $S^1 = \text{conv}\{(0, 0), (1, 0)\}$ olmak üzere, (P, S^1) ikilisi deliksiz olduğundan, Önsav 6.14'ten, $M^1 = P \cup P^1$ Şekil 6.11'deki gibi olur. Benzer şekilde, $M^i = (P + ((i-1)q)) + ((i-1)q, iq)$ tanımından, $1 \leq i \leq (L_S(1) - 1)$ için, M^2 ve M^3 de Şekil 6.11'deki gibidir.



Şekil 6.10: Dikdörtgen ve kopyaları

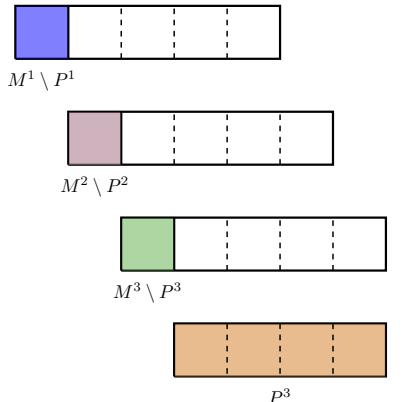


Şekil 6.11: Dikdörtgenlerin Minkowski toplamları

SageMath [10] kullanarak, P , S ve M^1 'in Ehrhart polinomlarını tablodaki gibi buluruz.

$$\begin{array}{c|c|c} \frac{L_P(t)}{4t^2 + 5t + 1} & \frac{L_S(1)}{4} & \frac{L_{M^1}(t)}{5t^2 + 6t + 1} \\ \hline \end{array}$$

Önsav 6.21'den, $I_1 = P \cap P^1 \neq \emptyset$ olduğundan, $m' \in P + S^1$ için, $m' = p' + s'$ koşulunu sağlayacak şekilde, tek bir $p' \in P \setminus I_1$ ve $s' \in S$ vardır. Benzer şekilde, $1 \leq i \leq 3$ için, $I_i = P^{i-1} \cap P^i \neq \emptyset$ olduğundan, $P^{i-1} + S^i$ 'deki m latis noktası için, $m = p + s$ koşulunu sağlayacak şekilde, tek bir $p \in P^{i-1} \setminus I_i$ ve $s \in S$ vardır. Şekil 6.10'dan ve Şekil 6.11'den, $M^1 \setminus P^1$, $M^2 \setminus P^2$, $M^3 \setminus P^3$ ve P^3 Şekil 6.12'deki gibidir. Buradan $1 \leq i \leq 3$ için, $P^{i-1} \setminus I_i = M^i \setminus P^i$ olduğunu Şekil 6.12'den görebiliriz. Dolayısıyla, $p \in (M^1 \setminus P^1) \cup (M^2 \setminus P^2) \cup (M^3 \setminus P^3)$ ve $s \in S$ ise $P^{i-1} + S^i$ 'deki $m = p + s$ latis noktasını Şekil 6.12 ve Şekil 6.13'ten de görüleceği gibi bir kez sayarız.



Şekil 6.12: Dikdörtgen ve latis doğru parçasının Minkowski toplamının parçaları

Şekil 6.13: Dikdörtgen ve latis doğru parçasının Minkowski toplamı

Diğer taraftan, Teorem 6.22'den,

$$L_M(t) = (L_S(1) - 1)L_{M^1}(t) - (L_S(1) - 2)L_P(t) \quad (6.6)$$

olduğunu biliyoruz. $L_S(1) = 4$ olduğundan, (6.6)'da yerine yazarsak

$$L_M(t) = 3L_{M^1}(t) - 2L_P(t) \quad (6.7)$$

elde ederiz. $1 \leq i \leq 3$ için, Ehrhart polinomu tanımından, $L_{M^i}(t) = L_{M^1}(t)$ ve $L_{P^i}(t) = L_P(t)$ 'dir. Bu durumda,

$$L_M(t) = L_{M^1}(t) + L_{M^2}(t) + L_{M^3}(t) - L_{P^1}(t) - L_{P^2}(t)$$

olur. Şekil 6.12 ve Şekil 6.13'te, then we can see

$$L_M(t) = L_{M^1}(t) + L_{M^2}(t) + L_{M^3}(t) - L_{P^1}(t) - L_{P^2}(t)$$

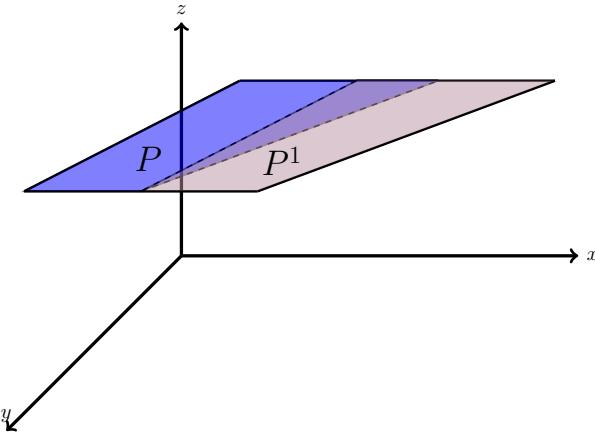
formülünün geometrik anlamını görebiliriz.

Dolayısıyla, $M = P + S = \text{conv}\{(0,0), (7,0), (7,1), (0,1)\}$ Minkowski toplamının Ehrhart polinomunu (6.7) formülünden,

$$L_M(t) = 3L_{M^1}(t) - 2L_P(t) = 3(5t^2 + 6t + 1) - 2(4t^2 + 5t + 1) = 7t^2 + 8t + 1$$

olarak buluruz.

Örnek 6.24. P politopu Şekil 6.14'teki gibi $\text{konv}\{(0,0), (1,0), (2,1), (0,1)\}$ dörtgeni olsun. $S = \text{konv}\{(0,0,0), (1,0,0)\}$ olsun. P^1 , tanımdan, Şekil 6.14'teki gibi dir. Delik tanımından, $H = (P + S^1) \setminus P \setminus P^1 = \emptyset$ olur. O halde, (P, S) ikilisi Şekil 6.14'teki gibi deliksizdir.



Şekil 6.14: Dörtgen ve latis doğru parçasının Minkowski toplamı

$S = \text{konv}\{(0,0,0), (1,0,0)\}$ politopunun Ehrhart polinomu $L_S(t) = t + 1$ 'dir. $\dim(M) = 2$ ve $\dim(P) = 2$ olduğu açıklar. O halde, $\delta = \dim(M) - \dim(P)$ tanımından, $\delta = 2 - 2 = 0$ olur. $\delta = 0$ olduğundan, $L_S(t^\delta) = L_S(1) = 2$ 'dir.

P , M ve I_1 'in Ehrhart polinomlarını SageMath [10]'u kullanarak Tablo 6.1'deki gibi buluruz.

$L_P(t)$ $3/2t^2 + 5/2t + 1$	$L_S(t^\delta)$ 2	$L_M(t)$ $5/2t^2 + 7/2t + 1$	$L_{I_1}(t)$ $1/2t^2 + 3/2t + 1$
---------------------------------	----------------------	---------------------------------	-------------------------------------

Tablo 6.1: Dörtgen için Ehrhart polinomları

Tablo 6.1'deki polinomlar ile

$$L_M(t) = L_P(t)L_S(t^\delta) - (L_S(1) - 1)L_{I_1}(t)$$

formülü sağlanır.



7. SONUÇ

Bu tezde, ilk olarak dual hipersimpleksin torik h-sayılarını ve Chow-Betti sayılarını inceledik. Torik h-sayıları ve Chow-Betti sayıları arasındaki benzerliği gösterebilme için, birçok farklı dual hipersimpleks için bu sayıları hesaplayarak bir tablo oluşturduk. Bazı dual hipersimplekslerin torik h-sayılarını Polymake [8] kullanarak hesapladık.

Daha sonra, herhangi bir latis politop P ve bir latis doğru parçası S 'nin Minkowski toplamının Ehrhart polinomu ile bu latis politopun ve latis doğru parçasının Ehrhart polinomları arasındaki ilişkiyi inceledik. P politopunun farklı durumlarını incelerken, S politopunu her zaman köşelerinden biri orijin olan bir latis doğru parçası olarak alındı. Bu farklı durumlardan en basit, ortogonal uzaylarda politoplar durumuydu. P ve S ortogonal uzaylarda olduklarında, M Minkowski toplamı için,

$$L_M(t) = L_P(t) L_S(t)$$

formülünü geliştirdik.

Bulduğumuz bu formülü genelleştirebilmek için,

$$\delta = \dim(M) - \dim(P)$$

sayısını kullandık. Buradaki amacımız, ortogonal uzaylarda olmayan politoplar için, formüldeki Ehrhart polinomlarının derece eşitsizliğini ortadan kaldırmaktı. Bu nedenle, bulduğumuz bu formül δ ile

$$L_M(t) = L_P(t) L_S(t^\delta)$$

formülüne dönüştü.

İncelediğimiz diğer bir durum ise

$$H := (P + S^1) \setminus P \setminus P^1$$

olarak tanımladığımız bir delik kavramı için, (P, S) ikilisinin deliksiz olması durumuydu. Burada, P^1 , S 'nin ilk latis noktası kadar ötelenmiş P politopudur.

Bizim amacımız, Minkowski toplamını, P politopunu öteleyerek elde etmeye çalışmaktır. Bu nedenle, (P, S) ikilisinin deliksiz olması durumunda P ve P^1 politoplarının kesiştiği için P ve P^1 politoplarının kesişimi olan I_1 'deki latis noktalarını birden fazla saymamak çıkarmalıydık.

Dolayısıyla, bu kavramlar ile

$$L_M(t) = L_P(t) L_S(t^\delta)$$

formülünden yola çıkararak elde ettiğimiz

$$L_M(t) = L_P(t) L_S(t^\delta) - (L_S(1) - 1)L_{I_1}(t)$$

formülünü ispatladık.

Kaynakça

- [1] DAVID A. COX, *Lectures on Toric Varieties*, School on Commutative Algebra given in Hanoi, 2005.
- [2] CHARLES WANG AND JOSEPHINE YU, *Toric H-vectors and Chow Betti Numbers of Dual Hypersimplices*, 2017, arXiv:math/1707.04581.
- [3] JEAN-PAUL BRASSELET, *Introduction to Toric Varieties*, IMPA, Rio de Janeiro, 2008.
- [4] RICHARD STANLEY, *Generalized H-vectors, intersection cohomology of toric varieties, and related results*, Commutative algebra and combinatorics (Kyoto, 1985), Adv. Stud. Pure Math., vol. 11, North-Holland, Amsterdam, 1987, 187–213. MR 951205.
- [5] RICHARD P. STANLEY, *Enumerative Combinatorics*, Volume 1, second ed., Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 49, Cambridge University Press, Cambridge, 2012. MR 2868112.
- [6] WILLIAM FULTON AND BERND STURMFELS, *Intersection Theory on Toric Varieties*, Topology 36 (1997), no. 2, 335–353. MR 1415592 (97h:14070).
- [7] WILLIAM FULTON, *Introduction to Toric Varieties*, Princeton University Press, Princeton, 1993.
- [8] EWGENIJ GAWRILOW AND MICHAEL JOSWIG, *polymake: a framework for analyzing convex polytopes*, Polytopes—combinatorics and computation (Oberwolfach, 1997), DMV Sem., vol. 29, Birkhäuser, Basel, 2000, pp. 43–73. MR 1785292 (2001f:52033).
- [9] STEVEN ROMAN, *Lattices and Ordered Sets*, Springer Science Business Media, LLC, 233 Spring Street, New York, 2008.
- [10] THE SAGE DEVELOPERS, *SageMath, the Sage Mathematics Software System (Version 8.3)*, 2018. <http://www.sagemath.org/>.
- [11] ALLEN HATCHER, *Algebraic Topology*, Cambridge University Press, Cambridge, U.K., 2002.
- [12] M. BECK AND S. ROBINS, *Computing the Continuous Discretely: Integer-Point Enumeration in Polyhedra*, Springer, 2007.
- [13] C. WEIBEL, *Minkowski Sums of Polytopes: Combinatorics and Computation*, PhD thesis, Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne, 2007.

- [14] M. BECK, P. JAYAWANT AND T. B. MCALLISTER, *Lattice-point generating functions for free sums of convex sets.*, Journal of Combinatorial Theory Series A 120 (2013), 1246–1262, <https://arxiv.org/pdf/1207.0164.pdf>.
- [15] C. HAASE, M. JUHNKE-KUBITZKE, R. SANYAL AND T. THEOBALD, *Mixed Ehrhart polynomials*, The Electronic Journal of Combinatorics, Volume 24, Issue 1 (2017).
- [16] LOUIS BILLERA, *Enumeration of Flags in Eulerian Posets*, Cornell University, Ithaca, NY 14853, 2005.
- [17] DUŠKO JOJIĆ, *Extendable shelling, simplicial and toric h-vector of some polytopes*, Publ. Inst. Math. (N.S.) 81(95) (2007), 85–93.
- [18] GIL KALAI, *A new basis of polytopes*, J. Combin. Theory Ser. A 49 (1988), no. 2, 191–209.



ÖZGEÇMİŞ

Nurdan Ünlü, 15.02.1992 tarihinde İstanbul'da doğdu. 2015 yılında Mimar Sinan Güzel Sanatlar Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'ünü bitirdi. 2016 yılında Mimar Sinan Güzel Sanatlar Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda yüksek lisans eğitimiine başladı.

