Actividad 6

Luis Aldair Hernández

1- Para el siguiente proceso

$Y_t = \varepsilon_t$ donde $\varepsilon \sim iid\ N(0, \sigma_\varepsilon^2)$ por tanto $E(\varepsilon_i \varepsilon_j) = 0$ para $i \neq j$

a) Encuentra su media

$$\mu = E(x) = E(\varepsilon_t)$$
$$= 0$$

b) Muestra que $var(Y_t) = \sigma_\varepsilon^2$ y que $\sigma_\varepsilon^2 = E(\varepsilon_t^2)$

Basandonos en su distribución se demuestra que

$$Var(Y_t) = Var(\varepsilon_t) = [E(\varepsilon_t)]^2 = E(\varepsilon_t^2) = \sigma_\varepsilon^2$$

c) Calcular la covarianza

$$Cov(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-k}) = 0 \quad \forall k \neq 0 \quad k = 1, 2, \ldots$$

d) Señala si es o no un proceso estacionario y porqué

Las condiciones para estacionariedad son

$E(Y_t) = \mu \ \forall t$

$Var(Y_t) = \gamma_0 \ \forall t$

Al ser un proceso de ruido blanco su corr = 0

$\therefore$ No cumple los requisitos de estacionariedad

2.- Para el siguiente proceso

$$Y_t = \varphi_1 Y_{t-1} + \varphi_2 Y_{t-2} + \varepsilon_t$$

donde $\varepsilon \sim iid\ N(0, \sigma_\varepsilon^2)$ por tanto $E(\varepsilon_i \varepsilon_j) = 0$ para $i \neq j$

a) ¿Que condición garantiza la convergencia de la sumatoria infinita del proceso?

Que $|\varphi| < 1$

b) Encuentra su media

$$E(Y_t) = E\left(\sum_{i=0}^{\infty} \varphi_i \varepsilon_{t-i}\right) = \sum_{i=0}^{\infty} \varphi_i \cancelto{0}{E(\varepsilon_{t-i})} = 0$$

c) Varianza

$$Var(Y_t) = Var\left(\sum_{i=0}^{\infty} \varphi^i \varepsilon_{t-i}\right) = \sum_{i=0}^{\infty} Var(\varphi^i \varepsilon_{t-i}) = \sum_{i=0}^{\infty} (\varphi^i)^2 Var(\varepsilon_{t-i})$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} \varphi^{2i} Var(\varepsilon_{t-i}) = \sigma_\varepsilon^2 \sum_{i=0}^{\infty} \varphi^{2i} = \frac{\sigma^2}{1-\varphi^2}$$

d) Covarianza con el primer rezago

$$Cov(Y_t, Y_{t-1}) = E[(Y_t - \mu_{Y_t})(Y_t - \mu_{Y_{t-1}})] = E(Y_t Y_{t-1})$$

$$= E\left[\left(\sum_{i=0}^{\infty} \varphi^i \varepsilon_{t-i}\right)\left(\sum_{i=0}^{\infty} \varphi^i \varepsilon_{t-1-i}\right)\right]$$

$$E[(\varepsilon_t + \varphi \varepsilon_{t-1} + \varphi^2 \varepsilon_{t-2} + \dots)(\varepsilon_{t-1} + \varphi \varepsilon_{t-2} + \varphi^2 \varepsilon_{t-3} + \dots)$$

$$E[(\varepsilon_t \varepsilon_{t-1} + \varphi \varepsilon_t \varepsilon_{t-2} + \varphi^2 \varepsilon_t \varepsilon_{t-3} + \dots)]$$

$$E(\varphi \varepsilon_{t-1}^2 + \varphi^3 \varepsilon_{t-2}^2 + \dots)$$

$$= \varphi E[\varepsilon_{t-1}^2 + \varphi^2 \varepsilon_{t-2}^2]$$

$$= \varphi(\sigma_\varepsilon^2 + \varphi^2 \sigma_\varepsilon^2 + \varphi^3 \sigma_\varepsilon^2 \dots)$$

$$= \varphi \sigma_\varepsilon^2 (1 + \varphi^2 + \varphi^3 + \dots)$$

$$= \varphi \sigma_\varepsilon^2 \sum_{i=0}^{\infty} (\varphi^2)^i$$

$$= \frac{\varphi^2}{1-\varphi^2}$$

Scribe

f) Calcula ρ_1

$$\rho_1 = \frac{\gamma_1}{\gamma_0} = \frac{\left(\frac{\varphi^2}{1-\varphi^2}\right)\gamma}{\gamma_0} = \frac{\varphi^2}{1-\varphi^2}$$

3. $Y_t = \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2} + \varepsilon_t$ donde $\varepsilon \sim iid\ N(0, \sigma_\varepsilon^2)$

a) Media

$$E(Y_t) = \theta_1 \cancel{E(\varepsilon_{t-1})} + \theta_2 \cancel{E(\varepsilon_{t-2})} + \cancel{E(\varepsilon_t)}^{0} + E(\mu)$$
$$= \mu$$

b) Varianza

$$\gamma_0 = Var(Y_t) = E[(Y_t - \mu)^2]$$
$$= E[(\varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2})^2]$$
$$= E(\varepsilon_t^2 + \theta_1^2 \varepsilon_{t-1}^2 + \theta_2^2 \varepsilon_{t-2}^2 + \dots)$$
$$= \sigma_\varepsilon^2 + \theta_1^2 \sigma^2 + \theta_2^2 \sigma^2 + 0$$
$$= (1 + \theta_1^2 + \theta_2^2)\sigma^2$$

c) Covarianza con el rezago k

$$\gamma_1 = Cov(Y_t, Y_{t-1}) = E[(Y_t - \mu)(Y_{t-1} - \mu)] =$$
$$= E[(\theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2} + \varepsilon_t)(\theta_1 \varepsilon_{t-2} + \theta_2 \varepsilon_{t-3} + \varepsilon_{t-1})]$$
$$= E[\theta_1^2 \varepsilon_{t-1}^2 + \theta_1\theta_2 \varepsilon_{t-2}^2 + \dots]$$
$$= (\theta_1 + \theta_1\theta_2)\sigma^2$$

$$\gamma_2 = E[(Y_t - \mu)(Y_{t-2} - \mu)] = E[(\varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2})(\varepsilon_{t-2} + \theta_1 \varepsilon_{t-3} + \theta_2 \varepsilon_{t-4})]$$
$$= E[\theta_2 \varepsilon_{t-2}^2 + \dots]$$
$$= \theta_2 \sigma^2$$

$\gamma_3 = Cov(Y_t, Y_{t-3}) = E[(\varepsilon_t + \theta_1\varepsilon_{t-1} + \theta_2\varepsilon_{t-2})(\varepsilon_{t-3} + \theta_1\varepsilon_{t-4} + \theta_2\varepsilon_{t-5})]$
$= 0$

$\therefore \quad \gamma_k = Cov(Y_t, Y_{t-k}) = E[(Y_t - \mu)(Y_{t-k} - \mu)] = 0 \quad \forall k \geq 3$

d) Encuentra ρ_k

$$\rho_k = \frac{Cov(Y_t\ Y_{t-k})}{\sigma^2_{Y_t}} = \frac{0}{\sigma^2} \quad \text{si} \quad k \geq 3$$

e) Gráfica de función de autocorrelación $\rho_1, \ldots, \rho_{10}$