Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar

Vadas Norbert

Élszínezések

alkalmazott matematikus MSc szakdolgozat
operációkutatás szakirány

Témavezetõ:
Bérczi Kristóf
Operációkutatási Tanszék

Budapest, 2015

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés

1.1 Fogalmak és jelölések

A továbbiakban, hacsak nincs másképp jelezve, minden gráf egyszerű, véges és irányítatlan. Egy $G = (V, E)$ gráfon értelmezett $w : E \to [k] = \{1, \dots, k\}$ függvényt k-**élsúlyozás**nak nevezünk. Amennyiben a csúcsokhoz is rendelünk súlyokat, azaz $w : V \cup E \to [k]$, akkor k-**teljes-súlyozás**ról beszélünk. Egy csúcs **érték**én a rá illeszkedő élek súlyainak, és amennyiben van, a saját súlyának összegét értjük. Azt mondjuk, hogy egy súlyozás **csúcs-megkülönböztető**, ha bármely két csúcsnak különböző az értéke. Abban az esetben, ha ezt csak szomszédos csúcspárokra követeljük meg, akkor a csúcsok értékei egy színezését adják a gráfnak. Az ilyen súlyozást **csúcs-színező**nek hívjuk. Adott G gráfra a legkisebb olyan k számot, melyre létezik G-nek csúcs-színező k-élsúlyozása $\chi_e(G)$-vel jelöljük. Végezetül egy gráfra azt mondjuk, hogy **rendes**, ha egyetlen komponense sem izomorf K_2-vel.

1.2 Az 1, 2, 3 - sejtés

Az 1, 2, 3 - sejtés vizsgálatát a gráfok irregularitásának vizsgálata motiválta. Egy gráf éleinek súlyozását irregulárisnak nevezzük, ha bármely két csúcsra a rájuk illeszkedő éleken vett összeg különböző. Egy gráf irregularitásának erősségén azt a legkisebb k számot értjük, amelyre létezik irreguláris súlyozás az $\{1, \dots, k\}$ halmazból vett súlyokkal. Ennek a feladatnak egy természetesen adódó egyszerűsítése, ha csak szomszédos csúcsokra követeljük meg azt, hogy különböző legyen az értékük.

A sejtést először Karoński, Łuczak, és Thomason [7] fogalmazta meg 2004-ben, és a következőképpen hangzik:

1.2.1 Sejtés (Az 1, 2, 3 - sejtés). *Minden rendes gráf élei megcímkézhetőek az 1, 2, 3 számokkal oly módon, hogy tetszőleges két szomszédos csúcsra a rájuk illeszkedő éleken lévő számok összege különböző legyen.*

A sejtést megfogalmazása óta sokat vizsgálták. Az eddigi legjobb korlátot Kalkowski, Karoński, és Pfender [6] bizonyította be 2010-ben, mely szerint a helyes színezéshez 5 élsúly elegendő. Könnyen látható, hogy léteznek olyan rendes gráfok, amelyekre nem elég

2 élsúly. Azonban egy aszimptotikus eredmény szerint egy $G(p, n)$ véletlen gráf majdnem biztosan megszínezhető csak az 1, 2 élsúlyok segítségével [1]. Bizonyos gráfosztályokra már sikerült igazolni a sejtést. Eszerint 3-színezhető [7], illetve teljes gráfok [2] esetén $\chi_e(G) = 3$. Az előbbi eredmény nyomán feltehető az a kérdés, hogy mely páros gráfok esetében elegendő csak az 1, 2 súlyok közül választani. Lu, Yu, és Zhang [9] cikke szerint a 3-összefüggő, valamint bizonyos fokszám-megkötéseknek eleget tevő páros gráfok ilyenek.

A csúcs-színező élsúlyozásoknak számos változatát vizsgálták már az elmúlt évtizedben. Az irányított esetben egy digráf éleit súlyozzuk, a csúcsok értékét pedig csak a kifelé vezető éleken vett összeg határozza meg. Ez a probléma lényegesen egyszerűbb, mint az irányítatlan változat, ugyanis itt könnyedén belátható az 1, 2, 3 - sejtéssel analóg állítás [4].

1.2.2 Állítás. *Minden D digráfra* $\chi_e(D) = 3$.

Más változatokban az élsúlyok összege helyett azok szorzata, halmaza, multihalmaza vagy sorozata határozza meg a csúcsok színeit. Emellett élsúlyozás helyett tekinthetünk csúcs-, illetve teljes-súlyozást is. Érdekes kérdés az is, hogy mit mondhatunk abban az esetben, ha a súlyokat nem az $\{1, \ldots, k\}$ halmazból, hanem tetszőleges k-elemű listából választhatjuk ki. A különféle változatok eddigi eredményeiről Seamone [11] cikkében olvashatunk bővebben.

Természetesen adódik az a kérdés is, hogy vajon NP-nehéz-e annak eldöntése, hogy egy gráf színezéséhez 2 élsúly elegendő. Irányított gráfokra a válasz igen, egyéb esetben ez egy nyitott probléma.

2. A sejtés bizonyítása felé

2.1 Csúcs-színező 5-élsúlyozás

2.1.1 Tétel (Kalkowski, Karoński, és Pfender [6]). *Minden G rendes gráfra $\chi_e(G) \leq 5$.*

Bizonyítás. Feltehető, hogy G összefüggő, különben komponensenként érvelhetünk. Feltehető még továbbá az is, hogy $|V| \geq 3$, és létezik olyan v csúcs, melyre $d(v) \geq 2$. Legyen $v_1, v_2, \ldots, v_n$ a csúcsoknak egy olyan sorrendje, melyre $d(v_n) \geq 2$, és minden $1 \leq i \leq n-1$-re v_i-nek van szomszédja $\{v_{i+1}, v_{i+2}, \ldots, v_n\}$-ben.

Kezdetben minden e élhez az $f(e) = 3$ élsúlyt rendeljük, majd legfeljebb kétszer módosítjuk, miközben sorban végighaladunk a csúcsokon. Minden $i < n$-re a v_i csúcshoz hozzárendelünk két színt, $W_(v_i) = \{w(v_i), w(v_i) + 2\}$, ahol $w(v_i) \in \{0, 1\}$ mod 4, oly módon, hogy minden $v_j v_i \in E$ élre, ahol $1 \leq j < i$, $W(v_j) \cap W(v_i) = \emptyset$, és biztosítani fogjuk, hogy $f(v_i) = \sum_{u \in N(v_i)} f(uv_i) \in W(v_i)$. Végül beállítjuk a v_n-re illeszkedő élek súlyát úgy, hogy $f(v_n)$ különbözzön $f(v_i)$-től minden $v_i \in N(v_n)$-re.

Ezt szem előtt tartva legyen $f(v_1) = 3d(v_1)$, és válasszuk meg a $W(v_1)$ halmazt úgy, hogy $f(v_1) \in W(v_1)$, valamint $w(v_1) \in \{0, 1\}$ mod 4 teljesüljön. Legyen $2 \leq k \leq n-1$, és tegyük fel, hogy már minden $i < k$-ra meghatároztuk $W(v_i)$-t, valamint

- $f(v_i) \in W(v_i)$, ahol $i < k$
- $f(v_k v_j) = 3$ minden élre, ahol $j > k$
- ha $f(v_i v_k) \neq 3$ valamely élre $i < k$ esetén, akkor vagy $f(v_i v_k) = 2$ és $f(v_i) = w(v_i)$, vagy $f(v_i v_k) = 4$ és $f(v_i) = w(v_i) + 2$.

Ha $v_i v_k \in E$ valamely $i < k$-ra, akkor $f(v_i v_k)$-t 2-vel növelhetjük vagy csökkenthetjük úgy, hogy $f(v_i) \in W(v_i)$ maradjon. Amennyiben v_k-nak d ilyen szomszédja van, úgy ez $d+1$ lehetséges értéket jelent $f(v_k)$ számára, melyek mind azonos paritásúak. Ezen felül megengedjük még, hogy az $f(v_k v_j)$ súlyt 1-gyel módosítsuk, ahol $j > k$ a legkisebb index, melyre $v_k v_j \in E$. Ezáltal $f(v_k)$ egy $[a, a+2d+2]$ intervallum minden értékét felveheti. Úgy szeretnénk módosítani a súlyokat és meghatározni $w(v_k)$-t, hogy

1. $f(v_i) \in W(v_i)$, ahol $1 \leq i \leq k$
2. $v_i v_k \in E$ esetén $w(v_i) \neq w(v_k)$, ahol $i < k$

3. vagy $f(v_k) = w(v_k)$ és $f(v_kv_j) \in \{2,3\}$ vagy $f(v_k) = w(v_k)+2$ és $f(v_kv_j) \in \{3,4\}$

teljesüljön. A második feltétel legfeljebb $2d$ értéket zárhat ki az $[a, a + 2d + 2]$ intervallumból, míg a harmadik feltétel csak az a és $a + 2d + 2$ értékeket, hiszen minden más $f(v_k)$ értékre $f(v_kv_j) \neq 3$ esetén lehetőségünk van választani $f(v_kv_j) = 2$ és $f(v_kv_j) = 4$ között. Így legalább egy érték szabadon marad $f(v_k)$ számára.

Ilyen módon lépésről lépésre, konfliktus nélkül meghatározhatjuk a $W(v_k)$ halmazokat minden $k \leq n-1$-re. Vegyük észre, hogy amikor az $f(v_k)$ érték először változik meg egy v_kv_i, $i > k$ él módosítása miatt, akkor $i = j$, vagyis nem okoznak problémát a 2 vagy 4 súlyú élek.

Utolsó lépésként találnunk kell egy szabad értéket v_n-nek. Ez alkalommal nem áll rendelkezésünkre egy v_nv_j segédél, de nem is kell későbbi csúcsok miatt aggódnunk. Az előzőekhez hasonlóan, ha $v_iv_n \in E$ valamely $i < n$-re, akkor $f(v_iv_n)$-t 2-vel növelhetjük vagy csökkenthetjük úgy, hogy $f(v_i) \in W(v_i)$ maradjon. Ezek a módosítások összesen $d(v_n) + 1 \geq 3$, azonos paritású lehetőséget jelentenek $f(v_n)$ értékének. Így, ha a legkisebb ilyen lehetséges a értékre $a \in \{2,3\}$ mod 4, akkor minden v_n-re illeszkedő élen a kisebb értéket választva a csúcsok egy helyes színezését kapjuk. Ha $a \in \{0,1\}$ mod 4, és létezik olyan $v_i \in N(v_n)$ csúcs, melyre $w(v_i) \neq a$, akkor a v_iv_n élen a nagyobb, minden más élen pedig a kisebb súlyt választva $f(v_n) = a + 2$, ami szintén helyes színezéshez vezet. Végezetül, amennyiben $a \in \{0,1\}$ mod 4 és $w(v_i) = a$ minden $v_i \in N(v_n)$-re, akkor legalább két élen a nagyobb súlyt választva kapunk helyes színezést. Ezzel a tétel állítását beláttuk. □

2.2 Csúcs-színező 6-élsúlyozás

2.2.1 Lemma. *Minden összefüggő, rendes G gráfra létezik olyan $f : E(G) \to \{1,2,3\}$ élsúlyozás és $f' : V(G) \to \{0,1\}$ csúcs-súlyozás, melyre a csúcsok $w(v) = f'(v) + \sum_{w \in N(v)} f(vw)$ értéke egy helyes színezés.*

2.2.2 Lemma. *Legyen $\alpha \in \mathbb{R}$ és $\beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Ekkor minden összefüggő, rendes G gráfra, és tetszőleges T feszítőfájára létezik olyan $f : E(G) \to \{\alpha - \beta, \alpha, \alpha + \beta\}$ élsúlyozás és $f' : V(G) \to \{0, \beta\}$ csúcs-súlyozás, melyre a csúcsok $w(v) = f'(v) + \sum_{w \in N(v)} f(vw)$ értéke egy helyes színezés. Továbbá f megválasztható úgy, hogy $f(e) = \alpha$ minden $e \in E(T)$-re.*

Bizonyítás. Legyen $v_1, v_2, \ldots, v_n$ a csúcsoknak egy olyan sorrendje, melyre minden $k \geq 2$-re v_k-ból pontosan egy T-beli él vezet $\{v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}\}$-be. Kezdetben minden élhez az α súlyt rendeljük, amelyet legfeljebb egyszer módosítunk, hogy sorban minden v_k csúcs értékét véglegesítsük.

Legyen $w(v_1) = \alpha d(v_1)$, és tegyük fel, hogy valamely $k \geq 2$-re már meghatároztuk az f élsúlyokat az $E(G[\{v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}\}]) \setminus E(T)$ halmazon és az f' csúcs-súlyokat $\{v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}\}$-en úgy, hogy az első $k-1$ csúcs $w(v_i)$ értéke már végleges.

A v_k csúcs esetén minden $E(v_k, \{v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}\}) \setminus E(T)$-beli él súlyát módosíthatjuk β-val. Amennyiben $v_k v_i \in E(G) \setminus E(T)$ és $f'(v_i) = 0$, akkor választhatunk $(f(v_k v_i) = \alpha, f'(v_i) = 0)$ és $(f(v_k v_i) = \alpha - \beta, f'(v_i) = \beta)$ között anélkül, hogy megváltoztatnánk $w(v_i)$-t. Hasonlóan, ha $v_k v_i \in E(G) \setminus E(T)$ és $f'(v_i) = \beta$, akkor választhatunk $(f(v_k v_i) = \alpha, f'(v_i) = \beta)$ és $(f(v_k v_i) = \alpha + \beta, f'(v_i) = 0)$ között anélkül, hogy megváltoztatnánk $w(v_i)$-t. Végezetül megválaszthatjuk $f'(v_k)$ értékét is. Ez összesen $|E(v_k, \{v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}\}) \setminus E(T)| + 2 = |E(v_k, \{v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}\})| + 1$ különböző lehetőség $w(v_k)$ értékének, melyek közül kiválaszthatjuk azt, amely minden $N(v_k) \cap \{v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}\}$-beli csúcs értékétől különbözik.

Ezt az eljárást folytatva megkaphatjuk a kívánt súlyozást. $\square$

2.2.3 Tétel (Kalkowski, Karoński, és Pfender [5]). *Minden G rendes gráfra $\chi_e(G) \leq 6$.*

Bizonyítás. $\square$

Irodalomjegyzék

[1] L. Addario-Berry, K. Dalal, és B.A. Reed. "Degree constrained subgraphs". In: *Discrete Applied Mathematics* 156.7 (2008), pp. 1168–1174.

[2] Mohammad hadi Alaeiyan. "The edge-labeling and vertex-colors of K_n". In: *Mathematical Sciences* 6.1 (2012), p. 45.

[3] Tomasz Bartnicki, Jarosław Grytczuk, és Stanisław Niwczyk. "Weight choosability of graphs". In: *Journal of Graph Theory* 60.3 (2009), pp. 242–256.

[4] Olivier Baudon, Julien Bensmail, és Eric Sopena. "An oriented version of the 1-2-3 Conjecture". In: *Discussiones Mathematicae Graph Theory* (2014).

[5] Maciej Kalkowski, Michał Karoński, és Florian Pfender. "Vertex coloring edge weightings with integer weights at most 6". In: *Rostocker Mathematisches Kolloquium* 64 (2009), pp. 39–43.

[6] Maciej Kalkowski, Michał Karoński, és Florian Pfender. "Vertex-coloring edge-weightings: Towards the 1-2-3-conjecture". In: *Journal of Combinatorial Theory, Series B* 100.3 (2010), pp. 347–349.

[7] Michał Karoński, Tomasz Łuczak, és Andrew Thomason. "Edge weights and vertex colours". In: *Journal of Combinatorial Theory, Series B* 91.1 (2004), pp. 151–157.

[8] Mahdad Khatirinejad et al. "Vertex-colouring edge-weightings with two edge weights". In: *Discrete Mathematics & Theoretical Computer Science* 14.1 (2012).

[9] Hongliang Lu, Qinglin Yu, és Cun-Quan Zhang. "Vertex-coloring 2-edge-weighting of graphs". In: *European Journal of Combinatorics* 32.1 (2011), pp. 21–27.

[10] Jakub Przybylo és Mariusz Wozniak. "On a 1, 2 Conjecture". In: *Discrete Mathematics & Theoretical Computer Science* 12.1 (2010), pp. 101–108.

[11] B. Seamone. "The 1-2-3 Conjecture and related problems: a survey". In: *ArXiv e-prints* (Nov. 2012). arXiv: 1211.5122.

[12] Joanna Skowronek-Kaziów. "1,2 Conjecture—the multiplicative version". In: *Information Processing Letters* 107.3–4 (2008), pp. 93–95.

[13] Tsai-Lien Wong és Xuding Zhu. "Every graph is (2,3)-choosable". In: *Combinatorica* (2014), pp. 1–7.