

# EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM

## TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR

---

Vadas Norbert

ÉLSZÍNEZÉSEK

alkalmazott matematikus MSc szakdolgozat  
operációkutatás szakirány

Témavezető:

Bérczi Kristóf

Operációkutatási Tanszék



Budapest, 2015

# Tartalomjegyzék

<b>1</b>	<b>Bevezetés</b>	<b>1</b>
1.1	Fogalmak és jelölések . . . . .	1
1.2	Az 1, 2, 3 - sejtés . . . . .	1
<b>2</b>	<b>A fontosabb eredmények</b>	<b>3</b>
2.1	Csúcs-színező 6-élsúlyozás . . . . .	3
2.2	Csúcs-színező 5-élsúlyozás . . . . .	5
<b>3</b>	<b>Élsúlyozások irányított gráfokon</b>	<b>7</b>
3.1	Csúcs-színező 3-élsúlyozás . . . . .	7

# 1. Bevezetés

## 1.1 Fogalmak és jelölések

A továbbiakban, hacsak nincs másképp jelezve, minden gráf egyszerű, véges és irányítatlan. Egy  $G = (V, E)$  gráfon értelmezett  $w : E \rightarrow [k] = \{1, \dots, k\}$  függvényt  $k$ -**élsúlyozás**nak nevezünk. Amennyiben a csúcsokhoz is rendelünk súlyokat, azaz  $w : V \cup E \rightarrow [k]$ , akkor  $k$ -**teljes-súlyozás**ról beszélünk. Egy csúcs **értékén** vagy **színén** a rá illeszkedő élek súlyainak, és amennyiben van, a saját súlyának összegét értjük. Az első eset egy másik elnevezése még a **súlyozott foksám**. Azt mondjuk, hogy egy súlyozás **csúcs-megkülönböztető**, ha bármely két csúcsnak különböző az értéke. Abban az esetben, ha ezt csak szomszédos csúcspárokra követeljük meg, akkor a csúcsok értékei egy színezését adják a gráfnak. Az ilyen súlyozást **csúcs-színező**nek hívjuk. Adott  $G$  gráfra a legkisebb olyan  $k$  számot, melyre létezik  $G$ -nek csúcs-színező  $k$ -élsúlyozása  $\chi_e(G)$ -vel jelöljük. Végezetül egy gráfra azt mondjuk, hogy **rendes**, ha egyetlen komponense sem izomorf  $K_2$ -vel.

## 1.2 Az 1, 2, 3 - sejtés

Az 1, 2, 3 - sejtés vizsgálatát a gráfok irregularitásának vizsgálata motiválta. Egy gráf éleinek súlyozását irregularisnak nevezzük, ha bármely két csúcsra a rájuk illeszkedő éleken vett összeg különböző. Egy gráf irregularitásának erősségén azt a legkisebb  $k$  számot értjük, amelyre létezik irregularis súlyozás az  $\{1, \dots, k\}$  halmazból vett súlyokkal. Ennek a feladatnak egy természetesen adódó egyszerűsítése, ha csak szomszédos csúcsokra követeljük meg azt, hogy különböző legyen az értékük.

A sejtést először Karoński, Łuczak, és Thomason [7] fogalmazta meg 2002-ben, és a következőképpen hangzik:

**1.2.1 Sejtés** (Az 1, 2, 3 - sejtés). *Minden rendes gráf élei megcímkézhetőek az 1, 2, 3 számokkal oly módon, hogy tetszőleges két szomszédos csúcsra a rájuk illeszkedő éleken lévő számok összege különböző legyen.*

A sejtést megfogalmazása óta sokat vizsgálták. Az eddigi legjobb korlátot Kalkowski, Karoński, és Pfender [6] bizonyította be 2010-ben, mely szerint a helyes színezéshez 5 élsúly elegendő. Könnyen látható, hogy léteznek olyan rendes gráfok, amelyekre nem elég

2 élsúly. Azonban egy aszimptotikus eredmény szerint egy  $G(p, n)$  véletlen gráf majdnem biztosan megszínezhető csak az 1, 2 élsúlyok segítségével [1]. Bizonyos gráfosztályokra már sikerült igazolni a sejtést. Eszerint 3-színezhető [7], illetve teljes gráfok [2] esetén  $\chi_e(G) = 3$ . Az előbbi eredmény nyomán feltehető az a kérdés, hogy mely páros gráfok esetében elegendő csak az 1, 2 súlyok közül választani. Lu, Yu, és Zhang [9] cikke szerint a 3-összefüggő, valamint bizonyos foksám-megkötéseknek eleget tevő páros gráfok ilyenek.

A csúcs-színező élsúlyozásoknak számos változatát vizsgálták már az elmúlt évtizedben. Az irányított esetben egy digráf éleit súlyozzuk, a csúcsok értékét pedig csak a kifelé vezető éleken vett összeg határozza meg. Ez a probléma lényegesen egyszerűbb, mint az irányítatlan változat, ugyanis itt könnyedén belátható az 1, 2, 3 - sejtéssel analóg állítás [4].

**1.2.2 Állítás.** Minden  $D$  digráfra  $\chi_e(D) = 3$ .

Más változatokban az élsúlyok összege helyett azok szorzata, halmaza, multihalmaza vagy sorozata határozza meg a csúcsok színeit. Emellett élsúlyozás helyett tekinthetünk csúcs-, illetve teljes-súlyozást is. Érdekes kérdés az is, hogy mit mondhatunk abban az esetben, ha a súlyokat nem az  $\{1, \dots, k\}$  halmazból, hanem tetszőleges  $k$ -elemű listából választhatjuk ki. A különféle változatok eddigi eredményeiről Seamone [11] cikkében olvashatunk bővebben.

Természetesen adódik az a kérdés is, hogy vajon NP-nehéz-e annak eldöntése, hogy egy gráf színezéséhez 2 élsúly elegendő. Irányított gráfokra a válasz igen, egyéb esetben ez egy nyitott probléma.

## 2. A fontosabb eredmények

A sejtéssel kapcsolatban a legfontosabb előrehaladást a  $\chi_e(G)$ -re vonatkozó konstans korlátok bevezetése és javítása jelenti. A sejtést először felvető cikkben még csak azt bizonyították, hogy véges sok valós élsúly elegendő, később viszont egész számokra vonatkozó korlátokat is adtak. A jelenleg ismert legjobb eredmény Kalkowski, Karoński, és Pfender nevéhez fűződik, akik a  $\chi_e(G) \leq 6$  [5], kicsivel később pedig a  $\chi_e(G) \leq 5$  [6] korlátot adták a problémára. A két bizonyítás merőben más eszközöket használ, amelyek önmagukban is említésre érdemesek, ezért a következőkben mindkettőre kitérünk.

### 2.1 Csúcs-színező 6-élsúlyozás

Először vizsgáljuk a gyengébb korlátot. Az erre vonatkozó tétel bizonyítása előtt tekintsük a következő lemmát, mely az [5] cikk első szerzőjének egy korábbi eredménye:

**2.1.1 Lemma.** Minden összefüggő, rendezett  $G$  gráfra létezik olyan  $f : E(G) \rightarrow \{1, 2, 3\}$  élsúlyozás és  $f' : V(G) \rightarrow \{0, 1\}$  csúcs-súlyozás, melyre a csúcsok  $w(v) = f'(v) + \sum_{w \in N(v)} f(vw)$  értéke egy helyes színezés.

Ennek segítségével egy  $\chi_e(G) \leq 10$  korlát adható az élsúlyok megháromszorozásával, majd bizonyos élek 1-gyel történő módosításával. Jelen esetben is egy hasonló eljárást követünk majd, amelyhez szükségünk lesz a lemma egy általánosabb alakjára. Előtte azonban érdemes megjegyezni egy egyszerű következményt. A sejtés vizsgálatánál érdekes kérdés lehet, hogy mit tudunk mondani a rossz élek részgráfról, vagyis azon élekről, melyek végpontjai azonos értékűek. A fenti lemma erre is ad egyfajta választ, ugyanis az általa biztosított teljes súlyozásban minden csúcstra 0-t írva olyan élsúlyozást kapunk, ahol a rossz élek egy páros gráfot alkotnak. Ez a megfigyelés segíthet abban, hogy közelebb jussunk a sejtés bizonyításához vagy cáfolatához. Visszatérve a tételünkhöz, a lemma általánosítása a következőképpen hangzik:

**2.1.2 Lemma.** Legyen  $\alpha \in \mathbb{R}$  és  $\beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Ekkor minden összefüggő, rendezett  $G$  gráfra, és tetszőleges  $T$  feszítőfájára létezik olyan  $f : E(G) \rightarrow \{\alpha - \beta, \alpha, \alpha + \beta\}$  élsúlyozás és  $f' : V(G) \rightarrow \{0, \beta\}$  csúcs-súlyozás, melyre a csúcsok  $w(v) = f'(v) + \sum_{w \in N(v)} f(vw)$  értéke egy helyes színezés. Továbbá  $f$  megválasztható úgy, hogy  $f(e) = \alpha$  minden  $e \in E(T)$ -re.

*Bizonyítás.* Legyen  $v_1, v_2, \dots, v_n$  a csúcsoknak egy olyan sorrendje, melyre minden  $k \geq 2$ -re  $v_k$ -ból pontosan egy  $T$ -beli él vezet  $\{v_1, v_2, \dots, v_{k-1}\}$ -be. Kezdetben minden élhez az  $\alpha$  súlyt rendeljük, amelyet legfeljebb egyszer módosítunk, hogy sorban minden  $v_k$  csúcs értékét véglegesítsük.

Legyen  $w(v_1) = \alpha d(v_1)$ , és tegyük fel, hogy valamely  $k \geq 2$ -re már meghatároztuk az  $f$  élsúlyokat az  $E(G[\{v_1, v_2, \dots, v_{k-1}\}]) \setminus E(T)$  halmazon és az  $f'$  csúcs-súlyokat  $\{v_1, v_2, \dots, v_{k-1}\}$ -en úgy, hogy az első  $k-1$  csúcs  $w(v_i)$  értéke már végleges.

A  $v_k$  csúcs esetén minden  $E(v_k, \{v_1, v_2, \dots, v_{k-1}\}) \setminus E(T)$ -beli él súlyát módosíthatjuk  $\beta$ -val. Amennyiben  $v_k v_i \in E(G) \setminus E(T)$  és  $f'(v_i) = 0$ , akkor választhatunk  $(f(v_k v_i) = \alpha, f'(v_i) = 0)$  és  $(f(v_k v_i) = \alpha - \beta, f'(v_i) = \beta)$  között anélkül, hogy megváltoztatnánk  $w(v_i)$ -t. Hasonlóan, ha  $v_k v_i \in E(G) \setminus E(T)$  és  $f'(v_i) = \beta$ , akkor választhatunk  $(f(v_k v_i) = \alpha, f'(v_i) = \beta)$  és  $(f(v_k v_i) = \alpha + \beta, f'(v_i) = 0)$  között anélkül, hogy megváltoztatnánk  $w(v_i)$ -t. Végezetül megválaszthatjuk  $f'(v_k)$  értékét is. Ez összesen  $|E(v_k, \{v_1, v_2, \dots, v_{k-1}\}) \setminus E(T)| + 2 = |E(v_k, \{v_1, v_2, \dots, v_{k-1}\})| + 1$  különböző lehetőség  $w(v_k)$  értékének, melyek közül kiválaszthatjuk azt, amely minden  $N(v_k) \cap \{v_1, v_2, \dots, v_{k-1}\}$ -beli csúcs értékétől különbözik.

Ezt az eljárást folytatva megkaphatjuk a kívánt súlyozást.  $\square$

Ezen lemma birtokában most már készen állunk a tétel bizonyítására.

**2.1.3 Tétel** (Kalkowski, Karoński, és Pfender [5]). *Minden  $G$  rendes gráfra  $\chi_e(G) \leq 6$ .*

*Bizonyítás.* Feltehető, hogy  $G$  összefüggő, különben a komponenseket külön-külön vizsgálhatjuk. Induljunk ki egy tetszőleges  $T$  feszítőfából, és vegyünk egy  $(f, f', w)$  súlyozást a lemma alapján,  $\alpha = 4$  és  $\beta = -2$  paraméterekkel. Ekkor minden csúcs és él súlya páros. A bizonyítás hátralévő részében módosítani fogjuk  $f$ -et és  $f'$ -t, de  $w(v)$  változatlan marad minden  $v \in V(G)$  csúcsra.

Legyen  $H = G[\{v \in v(G) \mid f'(v) = -2\}]$ , és ebben  $H_1$  egy maximális feszítő részgráf, melyben a legnagyobb foksám legfeljebb 2. Adjunk hozzá  $-1$ -et  $f(e)$ -hez a  $H_1$  minden  $e$  élére, és módosítsuk  $V(H_1)$  minden  $v$  csúcsán az  $f'(v)$  értéket ennek megfelelően, hogy  $w(v)$  változatlan maradjon. Így minden  $v \in V(G)$  csúcsra  $f'(V) \in \{0, -1, -2\}$ , minden  $e \in E(G)$  élre  $f(e) \in \{1, 2, \dots, 6\}$ , továbbá minden  $e \in E(T)$  élre  $f(e) \in \{3, 4\}$ .

Legyen  $i \in \{0, 1, 2\}$  esetén  $S_i = \{v \in v(G) \mid f'(v) = -i\}$  és  $s_i = |S_i|$ . Figyeljük meg, hogy minden  $v \in S_0 \cup S_2$  csúcs  $w(v) - f'(v)$  súlya páros, az  $S_1$ -beli csúcsoké pedig páratlan.  $H_1$  maximalitása miatt minden  $uv$  élre, ahol  $u, v \in S_1 \cup S_2$ , teljesül, hogy  $u, v \in S_1$  és  $uv \in E(H_1)$ , hiszen ha nem így lenne, akkor az előző lépésben a  $H_1$  részgráfot tudtuk volna még bővíteni. Részletesebben, ezen élek végpontjaira  $w(u) - f'(u) \neq w(v) - f'(v)$ . Az ilyen élek halmazát jelölje  $E^*$ .

Ha  $s_2 = 0$ , akkor készen vagyunk, hiszen  $f$  jó színezést ad. Amennyiben  $s_2 = 1$  és  $s_1 = 0$ , legyen  $u \in S_2$ . Figyeljük meg, hogy minden  $u$ -ra illeszkedő  $e$  él súlya  $f(e) \in \{2, 4, 6\}$ . Ha  $u$ -nak van egy olyan  $v$  szomszédja, melyre  $w(u) + 2 \neq w(v)$ , akkor az  $uv$  és súlyát

1-gyel csökkentve szintén helyes színezéshez jutunk. (Figyeljük meg, hogy csak  $u$  és  $v$  súlya páratlan.) Ha  $u$  minden  $v \in N(u)$  szomszédjára  $w(u) + 2 = w(v)$  és  $|N(u)| \geq 2$ , akkor két különböző,  $u$ -ra illeszkedő élen is csökkentjük a súlyt 1-gyel. Ez ismét a kívánt súlyozáshoz vezet. Végül, ha az  $u$  csúcs egyetlen  $v$  szomszédjára  $w(u) + 2 = w(v)$ , akkor vegyünk egy  $x \in N_T(v) \setminus \{u\}$  csúcsot, csökkentjük  $f(uv)$ -t 1-gyel,  $f(vx)$ -et pedig növeljük 1-gyel. Így ismét megfelelő súlyozást kapunk.

Ha  $s_2 = 1$  és  $s_1 \geq 1$ , akkor vegyünk egy  $T$ -beli utat  $u \in S_2$  és egy  $v \in S_1$  között, majd felváltva csökkentjük és növeljük az élek súlyát 1-gyel, ügyelve arra, hogy a  $v$ -re illeszkedő él súlyát csökkentjük. Ezzel a keresett súlyozáshoz jutunk.

Ha  $s_2 \geq 2$ , akkor indukcióval beláthatjuk, hogy tudunk találni  $\lceil \frac{s_2}{2} \rceil$  olyan  $T$ -beli utat, melyek végpontjai pontosan az  $S_2$ -beli csúcsok, és amelyek  $T$  minden élet legfeljebb kétszer használják. Ilyen utakat  $2 \leq s_2 \leq 3$  esetén könnyen találhatunk. Amennyiben  $s_2 \geq 4$ , úgy keressünk egy olyan  $e \in E(T)$  élt, melyre  $T - e$  mindkét komponense legalább 2  $S_2$ -beli csúcsot tartalmaz, és legalább az egyikben páros számú ilyen csúcs van. A két komponensre indukciót alkalmazva megtalálhatjuk a keresett utakat.

Felváltva csökkentjük és növeljük ezen utak mentén az élek súlyait úgy, hogy csak a végpontok súlya változzon, és módosítsuk ennek megfelelően az  $f'$  értékeket ezeken a csúcsokon. Ha egy  $u \in S_2$  csúcs két útnak is végpontja (például, ha  $s_2$  páratlan), akkor ügyeljünk arra, hogy az  $u$ -ra illeszkedő mindkét élen csökkentjük a súlyt, hogy  $f'(u) = 0$  adódjon. Figyeljük meg, hogy csak  $E(T)$ -beli éleket használunk, így nem kapunk 1-nél kisebb vagy 6-nál nagyobb élsúlyokat. Ezek után minden csúcsra, amely korábban  $S_2$ -ben volt,  $f'(v) \in \{-3, -1, 0\}$ . Könnyen látható, hogy így az  $f$  súlyozást tekintve minden  $v$  csúcs értéke  $w(v)$ , amennyiben  $w(v)$  páros. A páratlan értékű csúcsok között futó élek mind  $E^*$ -ban vannak, tehát a végpontjaik  $w$  súlya különböző, ahogyan azt korábban már láttuk. Így  $f$  egy csúcs-színező 6-élsúlyozás.  $\square$

## 2.2 Csúcs-színező 5-élsúlyozás

**2.2.1 Tétel** (Kalkowski, Karoński, és Pfender [6]). Minden  $G$  rendes gráfra  $\chi_e(G) \leq 5$ .

*Bizonyítás.* Feltehető, hogy  $G$  összefüggő, különben komponensenként érvelhetünk. Feltehető még továbbá az is, hogy  $|V| \geq 3$ , és létezik olyan  $v$  csúcs, melyre  $d(v) \geq 2$ . Legyen  $v_1, v_2, \dots, v_n$  a csúcsoknak egy olyan sorrendje, melyre  $d(v_n) \geq 2$ , és minden  $1 \leq i \leq n-1$ -re  $v_i$ -nek van szomszédja  $\{v_{i+1}, v_{i+2}, \dots, v_n\}$ -ben.

Kezdetben minden  $e$  élhez az  $f(e) = 3$  élsúlyt rendeljük, majd legfeljebb kétszer módosítjuk, miközben sorban végighaladunk a csúcsokon. Minden  $i < n$ -re a  $v_i$  csúcsához hozzárendelünk két szint,  $W(v_i) = \{w(v_i), w(v_i) + 2\}$ , ahol  $w(v_i) \in \{0, 1\} \bmod 4$ , oly módon, hogy minden  $v_j v_i \in E$  élre, ahol  $1 \leq j < i$ ,  $W(v_j) \cap W(v_i) = \emptyset$ , és biztosítani fogjuk, hogy  $f(v_i) = \sum_{u \in N(v_i)} f(uv_i) \in W(v_i)$ . Végül beállítjuk a  $v_n$ -re illeszkedő élek súlyát úgy, hogy  $f(v_n)$  különbözzön  $f(v_i)$ -től minden  $v_i \in N(v_n)$ -re.

Ezt szem előtt tartva legyen  $f(v_1) = 3d(v_1)$ , és válasszuk meg a  $W(v_1)$  halmazt úgy, hogy  $f(v_1) \in W(v_1)$ , valamint  $w(v_1) \in \{0, 1\} \bmod 4$  teljesüljön. Legyen  $2 \leq k \leq n-1$ , és tegyük fel, hogy már minden  $i < k$ -ra meghatároztuk  $W(v_i)$ -t, valamint

- $f(v_i) \in W(v_i)$ , ahol  $i < k$
- $f(v_k v_j) = 3$  minden élre, ahol  $j > k$
- ha  $f(v_i v_k) \neq 3$  valamely élre  $i < k$  esetén, akkor vagy  $f(v_i v_k) = 2$  és  $f(v_i) = w(v_i)$ , vagy  $f(v_i v_k) = 4$  és  $f(v_i) = w(v_i) + 2$ .

Ha  $v_i v_k \in E$  valamely  $i < k$ -ra, akkor  $f(v_i v_k)$ -t 2-vel növelhetjük vagy csökkenthetjük úgy, hogy  $f(v_i) \in W(v_i)$  maradjon. Amennyiben  $v_k$ -nak  $d$  ilyen szomszédja van, úgy ez  $d + 1$  lehetséges értéket jelent  $f(v_k)$  számára, melyek mind azonos paritásúak. Ezen felül megengedjük még, hogy az  $f(v_k v_j)$  súlyt 1-gyel módosítsuk, ahol  $j > k$  a legkisebb index, melyre  $v_k v_j \in E$ . Ezáltal  $f(v_k)$  egy  $[a, a + 2d + 2]$  intervallum minden értékét felveheti. Úgy szeretnénk módosítani a súlyokat és meghatározni  $w(v_k)$ -t, hogy

1.  $f(v_i) \in W(v_i)$ , ahol  $1 \leq i \leq k$
2.  $v_i v_k \in E$  esetén  $w(v_i) \neq w(v_k)$ , ahol  $i < k$
3. vagy  $f(v_k) = w(v_k)$  és  $f(v_k v_j) \in \{2, 3\}$  vagy  $f(v_k) = w(v_k) + 2$  és  $f(v_k v_j) \in \{3, 4\}$

teljesüljön. A második feltétel legfeljebb  $2d$  értéket zárhat ki az  $[a, a + 2d + 2]$  intervallumból, míg a harmadik feltétel csak az  $a$  és  $a + 2d + 2$  értékeket, hiszen minden más  $f(v_k)$  értékre  $f(v_k v_j) \neq 3$  esetén lehetőségünk van választani  $f(v_k v_j) = 2$  és  $f(v_k v_j) = 4$  között. Így legalább egy érték szabadon marad  $f(v_k)$  számára.

Ilyen módon lépésről lépésre, konfliktus nélkül meghatározhatjuk a  $W(v_k)$  halmazokat minden  $k \leq n-1$ -re. Vegyük észre, hogy amikor az  $f(v_k)$  érték először változik meg egy  $v_k v_i$ ,  $i > k$  él módosítása miatt, akkor  $i = j$ , vagyis nem okoznak problémát a 2 vagy 4 súlyú élek.

Utolsó lépésként találunk kell egy szabad értéket  $v_n$ -nek. Ez alkalommal nem áll rendelkezésünkre egy  $v_n v_j$  segédél, de nem is kell későbbi csúcsok miatt aggódnunk. Az előzőekhez hasonlóan, ha  $v_i v_n \in E$  valamely  $i < n$ -re, akkor  $f(v_i v_n)$ -t 2-vel növelhetjük vagy csökkenthetjük úgy, hogy  $f(v_i) \in W(v_i)$  maradjon. Ezek a módosítások összesen  $d(v_n) + 1 \geq 3$ , azonos paritású lehetőséget jelentenek  $f(v_n)$  értékének. Így, ha a legkisebb ilyen lehetséges  $a$  értékre  $a \in \{2, 3\} \bmod 4$ , akkor minden  $v_n$ -re illeszkedő élen a kisebb értéket választva a csúcsok egy helyes színezését kapjuk. Ha  $a \in \{0, 1\} \bmod 4$ , és létezik olyan  $v_i \in N(v_n)$  csúcs, melyre  $w(v_i) \neq a$ , akkor a  $v_i v_n$  élen a nagyobb, minden más élen pedig a kisebb súlyt választva  $f(v_n) = a + 2$ , ami szintén helyes színezéshez vezet. Végezetül, amennyiben  $a \in \{0, 1\} \bmod 4$  és  $w(v_i) = a$  minden  $v_i \in N(v_n)$ -re, akkor legalább két élen a nagyobb súlyt választva kapunk helyes színezést. Ezzel a tétel állítását beláttuk.  $\square$



### 3. Élsúlyozások irányított gráfokon

Az eddigiekben irányítatlan gráfok élsúlyozásait vizsgáltuk, de joggal merülhet fel a kérdés, hogy vajon mit tudunk mondani az irányított esetről. Itt két lehetőségünk van egy csúcs színének meghatározására.

Az első esetben a kimenő élek összsúlyából kivonjuk bemenő élek összsúlyát. Erről a változatról Bartnicki, Grytczuk, és Niwczyk [3] bebizonyították, hogy a súlyokat tetszőleges kételemű listákról választva is létezik csúcs-színező élsúlyozás.

A második esetben egy csúcs színét csak a kimenő éleken vett súlyok összege, azaz a csúcs súlyozott kifoka határozza meg. A továbbiakban ezzel az esettel fogunk foglalkozni.

#### 3.1 Csúcs-színező 3-élsúlyozás

Könnyen látható, hogy léteznek olyan digráfok, például a 3 hosszú irányított kör, amelyek helyes színezéséhez nem elegendőek az  $\{1, 2\}$  élsúlyok. A következő tétel azt mondja ki, hogy minden irányított gráfnak van csúcs-színező 3-élsúlyozása. Ez abból következik, hogy minden digráfnak van egy alkalmas csúcsa, amely a szomszédai számához képest sok lehetséges súlyozott kifok-értéket vehet fel. Egy ilyen csúcs létezése teljes indukció használatát teszi lehetővé, továbbá a bizonyítás polinomiális idejű algoritmust is eredményez egy csúcs-színező 3-élsúlyozás megtalálására.

**3.1.1 Tétel.** Minden  $D$  digráfra  $\chi_e(D) \leq 3$ .

*Bizonyítás.* A bizonyítás  $D$  élszáma szerinti indukcióval történik. Az állítás nyilvánvaló 0 vagy 1 élű digráf esetén. Tegyük fel, hogy legfeljebb  $m - 1$  élre már igazoltuk a tételt, és legyen  $D = (V, A)$  egy  $m \geq 2$  élű digráf.

Figyeljük meg, hogy  $D$ -nek létezik egy olyan  $v$  csúcsa, melyre  $\delta(v) > 0$  és  $\delta(v) > \varrho(v)$ , hiszen különben  $\sum_{v \in V} \varrho(v) \neq \sum_{v \in V} \delta(v)$  lenne. Első lépésként töröljünk minden  $v$ -ből kilépő élet. Ekkor az indukciós feltevés miatt a fennmaradó digráfnak létezik egy  $w$  csúcs-színező 3-élsúlyozása. Tegyük vissza a kitörölt éleket, és terjesszük ki ezekre  $w$ -t oly módon, hogy  $v$  súlyozott kifoka különbözzön mind a  $\delta(v) + \varrho(v)$  szomszédjától. Ez megtehető, hiszen  $2\delta(v) + 1$  érték közül választhatunk, nevezetesen a  $\{\delta(v), \delta(v) + 1, \dots, 3\delta(v)\}$  halmazból, míg a tiltott értékek száma  $v$  választása miatt legfeljebb  $\varrho(v) + \delta(v) < 2\delta(v) + 1$ . Mivel ezen élsúlyok kizárólag a  $v$  csúcs súlyozott kifokát befolyásolják, ezért az így kapott kiterjesztett súlyozás a  $D$  digráf egy csúcs-színező 3-élsúlyozása.  $\square$

# Irodalomjegyzék

- [1] L. Addario-Berry, K. Dalal, és B.A. Reed. “Degree constrained subgraphs”. In: *Discrete Applied Mathematics* 156.7 (2008), pp. 1168–1174.
- [2] Mohammad hadi Alaeiyan. “The edge-labeling and vertex-colors of  $K_n$ ”. In: *Mathematical Sciences* 6.1 (2012), p. 45.
- [3] Tomasz Bartnicki, Jarosław Grytczuk, és Stanisław Niwczyk. “Weight choosability of graphs”. In: *Journal of Graph Theory* 60.3 (2009), pp. 242–256.
- [4] Olivier Baudon, Julien Bensmail, és Eric Sopena. “An oriented version of the 1-2-3 Conjecture”. In: *Discussiones Mathematicae Graph Theory* (2014).
- [5] Maciej Kalkowski, Michał Karoński, és Florian Pfender. “Vertex coloring edge weightings with integer weights at most 6”. In: *Rostocker Mathematisches Kolloquium* 64 (2009), pp. 39–43.
- [6] Maciej Kalkowski, Michał Karoński, és Florian Pfender. “Vertex-coloring edge-weightings: Towards the 1-2-3-conjecture”. In: *Journal of Combinatorial Theory, Series B* 100.3 (2010), pp. 347–349.
- [7] Michał Karoński, Tomasz Łuczak, és Andrew Thomason. “Edge weights and vertex colours”. In: *Journal of Combinatorial Theory, Series B* 91.1 (2004), pp. 151–157.
- [8] Mahdad Khatirinejad et al. “Vertex-colouring edge-weightings with two edge weights”. In: *Discrete Mathematics & Theoretical Computer Science* 14.1 (2012).
- [9] Hongliang Lu, Qinglin Yu, és Cun-Quan Zhang. “Vertex-coloring 2-edge-weighting of graphs”. In: *European Journal of Combinatorics* 32.1 (2011), pp. 21–27.
- [10] Jakub Przybyło és Mariusz Woźniak. “On a 1, 2 Conjecture”. In: *Discrete Mathematics & Theoretical Computer Science* 12.1 (2010), pp. 101–108.
- [11] B. Seamone. “The 1-2-3 Conjecture and related problems: a survey”. In: *ArXiv e-prints* (Nov. 2012). arXiv: 1211.5122.
- [12] Joanna Skowronek-Kaziów. “1,2 Conjecture—the multiplicative version”. In: *Information Processing Letters* 107.3–4 (2008), pp. 93–95.
- [13] Tsai-Lien Wong és Xuding Zhu. “Every graph is (2,3)-choosable”. In: *Combinatorica* (2014), pp. 1–7.