

# EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM

## TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR

---

Vadas Norbert

### ÉLSZÍNEZÉSEK

alkalmazott matematikus MSc szakdolgozat  
operációkutatás szakirány

Témavezető:

Bérczi Kristóf

Operációkutatási Tanszék



Budapest, 2015

# Tartalomjegyzék

<b>1</b>	<b>Bevezetés</b>	<b>1</b>
1.1	Fogalmak és jelölések . . . . .	1
1.2	Csúcsok színezése súlyozásokkal . . . . .	1
<b>2</b>	<b>Élsúlyozások és az 1-2-3-sejtés</b>	<b>3</b>
2.1	Csúcs-színező 6-élsúlyozás . . . . .	3
2.2	Csúcs-színező 5-élsúlyozás . . . . .	5
2.3	Csúcs-színező 3-élsúlyozás irányított gráfokra . . . . .	7
<b>3</b>	<b>Teljes súlyozások és az 1-2-sejtés</b>	<b>10</b>
3.1	Csúcs-színező $\left(\left\lfloor \frac{\chi(G)}{2} \right\rfloor + 1\right)$ -teljes-súlyozás . . . . .	10
3.2	Csúcs-színező 11-teljes-súlyozás . . . . .	11
3.3	Minden gráf $(2, 3)$ -választható . . . . .	12
<b>4</b>	<b>Pontos eredmények speciális gráfokra</b>	<b>16</b>
4.1	Színezés $\chi(G)$ élsúllyal . . . . .	16
4.2	Teljes gráfokra $\chi_t(G) = 2$ . . . . .	17
4.3	4-reguláris gráfokra $\chi_t(G) = 2$ . . . . .	17
<b>5</b>	<b>Élsúlyozások komplexitása</b>	<b>19</b>
5.1	Az 1-2-SÚLY NP-teljes . . . . .	19

# 1. Bevezetés

## 1.1 Fogalmak és jelölések

A továbbiakban, hacsak nincs másképp jelezve, minden gráf egyszerű, véges és irányítatlan. Egy  $G = (V, E)$  gráfon értelmezett  $w : E \rightarrow [k] = \{1, \dots, k\}$  függvényt  $k$ -**élsúlyozás**nak nevezünk. Amennyiben a csúcsokhoz is rendelünk súlyokat, azaz  $w : V \cup E \rightarrow [k]$ , akkor  $k$ -**teljes-súlyozás**ról beszélünk. Egy csúcs **értékén** vagy **színén** a rá illeszkedő élek súlyainak, és amennyiben van, a saját súlyának összegét értjük. Az első eset egy másik elnevezése még a **súlyozott foksám**. Azt mondjuk, hogy egy súlyozás **csúcs-megkülönböztető**, ha bármely két csúcsnak különböző az értéke. Abban az esetben, ha ezt csak szomszédos csúcspárokra követeljük meg, akkor a csúcsok értékei egy helyes színezését adják a gráfnak. Az ilyen súlyozást **csúcs-színező**nek vagy **helyesnek** hívjuk. Adott  $G$  gráfra a legkisebb olyan  $k$  számot, melyre létezik  $G$ -nek csúcs-színező  $k$ -élsúlyozása, illetve  $k$ -teljes-súlyozása, rendre  $\chi_e(G)$ -vel, illetve  $\chi_t(G)$ -vel jelöljük. Végezetül egy gráfra azt mondjuk, hogy **rendes**, ha egyetlen komponense sem izomorf  $K_2$ -vel.

## 1.2 Csúcsok színezése súlyozásokkal

Az 1-2-3-sejtés vizsgálatát a gráfok irregularitásának vizsgálata motiválta. Egy gráf éleinek súlyozását irregularisnak nevezzük, ha bármely két csúcsra a rájuk illeszkedő éleken vett összeg különböző. Egy gráf irregularitásának erősségén azt a legkisebb  $k$  számot értjük, amelyre létezik irregularis súlyozás az  $\{1, \dots, k\}$  halmazból vett súlyokkal. Ennek a feladatnak egy természetesen adódó egyszerűsítése, ha csak szomszédos csúcsokra követeljük meg azt, hogy különböző legyen az értékük.

A sejtést először Karoński, Łuczak, és Thomason [8] fogalmazta meg 2002-ben, és a következőképpen hangzik:

**1.2.1 Sejtés** (Az 1-2-3-sejtés). *Minden rendes gráf élei megcímkézhetőek az 1, 2, 3 számokkal oly módon, hogy tetszőleges két szomszédos csúcsra a rájuk illeszkedő éleken lévő számok összege különböző legyen.*

A sejtést megfogalmazása óta sokat vizsgálták. Az eddigi legjobb korlátot Kalkowski, Karoński, és Pfender [7] bizonyította be 2010-ben, mely szerint a helyes színezéshez

öt élsúly elegendő. Világos, hogy  $\chi_e(G) = 1$  pontosan akkor, ha a szomszédos csúcsok foka különböző. Könnyen látható az is, hogy léteznek olyan rendes gráfok, amelyekre nem elég két élsúly sem. Ilyen például a 3 vagy 6 hosszú kör. Így a legjobb remélhető általános korlát a  $\chi_e(G) \leq 3$ . Azonban egy aszimptotikus eredmény szerint egy  $G(p, n)$  véletlen gráf majdnem biztosan megszínezhető csak az 1, 2 élsúlyok segítségével [1]. Bizonyos gráfosztályokra már sikerült igazolni a sejtést. Eszerint 3-színezhető [8], illetve teljes gráfok [2] esetén  $\chi_e(G) = 3$ . Az előbbi eredmény nyomán feltehető az a kérdés, hogy mely páros gráfok esetében elegendő csak az 1, 2 súlyok közül választani. Lu, Yu, és Zhang [9] cikke szerint a 3-összefüggő, valamint bizonyos fokszám-megkötéseknek eleget tevő páros gráfok ilyenek.

Hasonló sejtést fogalmazott meg teljes-súlyozásokra Przybylo és Wozniak 2008-ban:

**1.2.2 Sejtés** (Az 1-2-sejtés). *Minden gráf élei és csúcsai megcímkézhetőek az 1, 2 számokkal oly módon, hogy tetszőleges két szomszédos csúcra a rájuk illeszkedő éleken és magán a csúcson lévő számok összege különböző legyen.*

Ebben a cikkben bebizonyították, hogy  $\chi_t(G) \leq 11$ , valamint  $\chi_t(G) \leq \left(\left\lfloor \frac{\chi(G)}{2} \right\rfloor + 1\right)$ . A jelenleg ismert legjobb eredmény szerint  $\chi_t(G) \leq 3$ .

A csúcs-színező élsúlyozásoknak számos változatát vizsgálták már az elmúlt évtizedben. Az irányított esetben egy digráf éleit súlyozzuk, a csúcsok értékét pedig csak a kifelé vezető éleken vett összeg határozza meg. Ez a probléma lényegesen egyszerűbb, mint az irányítatlan változat, ugyanis itt könnyedén belátható az 1-2-3-sejtéssel analóg állítás [4].

**1.2.3 Állítás.** *Minden  $D$  digráfra  $\chi_e(D) = 3$ .*

Más változatokban az élsúlyok összege helyett azok szorzata, halmaza, multihalmaza vagy sorozata határozza meg a csúcsok színeit. Emellett élsúlyozás helyett tekinthetünk csúcs-, illetve teljes-súlyozást is. Érdekes kérdés az is, hogy mit mondhatunk abban az esetben, ha a súlyokat nem az  $\{1, \dots, k\}$  halmazból, hanem tetszőleges  $k$ -elemű listából választhatjuk ki. A különféle változatok eddigi eredményeiről Seamone [11] cikkében olvashatunk bővebben.

Természetesen adódik az a kérdés is, hogy vajon NP-nehéz-e annak eldöntése, hogy egy gráf színezéséhez 2 élsúly elegendő-e. A  $\{0, 1\}$  és az  $\{1, 2\}$  halmazok esetében, valamint irányított gráfokra a válasz igen, egyéb esetben ez egy nyitott probléma.

## 2. Élsúlyozások és az 1-2-3-sejtés

A sejtéssel kapcsolatban a legfontosabb előrehaladást tetszőleges  $G$  gráf esetén a  $\chi_e(G)$ -re vonatkozó konstans korlátok bevezetése és javítása jelenti. A sejtést először felvető cikkben még csak azt bizonyították, hogy véges sok valós élsúly elegendő, később viszont egész számokra vonatkozó korlátokat is adtak. A jelenleg ismert legjobb eredmény Kalkowski, Karoński, és Pfender nevéhez fűződik, akik a  $\chi_e(G) \leq 6$  [6], kicsivel később pedig a  $\chi_e(G) \leq 5$  [7] korlátot adták a problémára. A két bizonyítás merőben más eszközöket használ, amelyek önmagukban is említésre érdemesek, ezért a következőkben mindkettőre kitérünk.

### 2.1 Csúcs-színező 6-élsúlyozás

Először vizsgáljuk a gyengébb korlátot. Az erre vonatkozó tétel bizonyítása előtt tekintsük a következő lemmát, mely az [6] cikk első szerzőjének egy korábbi eredménye:

**2.1.1 Lemma.** *Minden összefüggő, rendez  $G$  gráfra létezik olyan  $f : E(G) \rightarrow \{1, 2, 3\}$  élsúlyozás és  $f' : V(G) \rightarrow \{0, 1\}$  csúcs-súlyozás, melyre a csúcsok  $w(v) = f'(v) + \sum_{w \in N(v)} f(vw)$  értéke egy helyes színezés.*

Ennek segítségével egy  $\chi_e(G) \leq 10$  korlát adható az élsúlyok megháromszorozásával, majd bizonyos élek 1-gyel történő módosításával. Jelen esetben is egy hasonló eljárást követünk majd, amelyhez szükségünk lesz a lemma egy általánosabb alakjára. Előtte azonban érdemes megjegyezni egy egyszerű következményt. A sejtés vizsgálatánál érdekes kérdés lehet, hogy mit tudunk mondani a rossz élek részgráfjáról, vagyis azon élekről, melyek végpontjai azonos értékűek. A fenti lemma erre is ad egyfajta választ, ugyanis az általa biztosított teljes-súlyozásban minden csúcstra 0-t írva olyan élsúlyozást kapunk, ahol a rossz élek egy páros gráfot alkotnak. Ez a megfigyelés segíthet abban, hogy közelebb jussunk a sejtés bizonyításához vagy cáfolatához. Visszatérve a tételünkhöz, a lemma általánosítása a következőképpen hangzik:

**2.1.2 Lemma.** *Legyen  $\alpha \in \mathbb{R}$  és  $\beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Ekkor minden összefüggő, rendez  $G$  gráfra, és tetszőleges  $T$  feszítőfájára létezik olyan  $f : E(G) \rightarrow \{\alpha - \beta, \alpha, \alpha + \beta\}$  élsúlyozás és  $f' : V(G) \rightarrow \{0, \beta\}$  csúcs-súlyozás, melyre a csúcsok  $w(v) = f'(v) + \sum_{w \in N(v)} f(vw)$  értéke egy helyes színezés. Továbbá  $f$  megválasztható úgy, hogy  $f(e) = \alpha$  minden  $e \in E(T)$ -re.*

*Bizonyítás.* Legyen  $v_1, v_2, \dots, v_n$  a csúcsoknak egy olyan sorrendje, melyre minden  $k \geq 2$ -re  $v_k$ -ból pontosan egy  $T$ -beli él vezet  $\{v_1, v_2, \dots, v_{k-1}\}$ -be. Kezdetben minden élhez az  $\alpha$  súlyt rendeljük, amelyet legfeljebb egyszer módosítunk, hogy sorban minden  $v_k$  csúcs értékét véglegesítsük.

Legyen  $w(v_1) = \alpha d(v_1)$ , és tegyük fel, hogy valamely  $k \geq 2$ -re már meghatároztuk az  $f$  élsúlyokat az  $E(G[\{v_1, v_2, \dots, v_{k-1}\}]) \setminus E(T)$  halmazon és az  $f'$  csúcs-súlyokat  $\{v_1, v_2, \dots, v_{k-1}\}$ -en úgy, hogy az első  $k-1$  csúcs  $w(v_i)$  értéke már végleges.

A  $v_k$  csúcs esetén minden  $E(v_k, \{v_1, v_2, \dots, v_{k-1}\}) \setminus E(T)$ -beli él súlyát módosíthatjuk  $\beta$ -val. Amennyiben  $v_k v_i \in E(G) \setminus E(T)$  és  $f'(v_i) = 0$ , akkor választhatunk  $(f(v_k v_i) = \alpha, f'(v_i) = 0)$  és  $(f(v_k v_i) = \alpha - \beta, f'(v_i) = \beta)$  között anélkül, hogy megváltoztatnánk  $w(v_i)$ -t. Hasonlóan, ha  $v_k v_i \in E(G) \setminus E(T)$  és  $f'(v_i) = \beta$ , akkor választhatunk  $(f(v_k v_i) = \alpha, f'(v_i) = \beta)$  és  $(f(v_k v_i) = \alpha + \beta, f'(v_i) = 0)$  között anélkül, hogy megváltoztatnánk  $w(v_i)$ -t. Végezetül megválaszthatjuk  $f'(v_k)$  értékét is. Ez összesen  $|E(v_k, \{v_1, v_2, \dots, v_{k-1}\}) \setminus E(T)| + 2 = |E(v_k, \{v_1, v_2, \dots, v_{k-1}\})| + 1$  különböző lehetőség  $w(v_k)$  értékének, melyek közül kiválaszthatjuk azt, amely minden  $N(v_k) \cap \{v_1, v_2, \dots, v_{k-1}\}$ -beli csúcs értékétől különbözik.

Ezt az eljárást folytatva megkaphatjuk a kívánt súlyozást.  $\square$

Ezen lemma birtokában most már készen állunk a tétel bizonyítására.

**2.1.3 Tétel** (Kalkowski, Karoński, és Pfender [6]). *Minden  $G$  rendes gráfra  $\chi_e(G) \leq 6$ .*

*Bizonyítás.* Feltehető, hogy  $G$  összefüggő, különben a komponenseket külön-külön vizsgálhatjuk. Induljunk ki egy tetszőleges  $T$  feszítőfából, és vegyünk egy  $(f, f', w)$  súlyozást a lemma alapján,  $\alpha = 4$  és  $\beta = -2$  paraméterekkel. Ekkor minden csúcs és él súlya páros. A bizonyítás hátralévő részében módosítani fogjuk  $f$ -et és  $f'$ -t, de  $w(v)$  változatlan marad minden  $v \in V(G)$  csúcsra.

Legyen  $H = G[\{v \in v(G) \mid f'(v) = -2\}]$ , és ebben  $H_1$  egy maximális feszítő részgráf, melyben a legnagyobb foksám legfeljebb 2. Adjunk hozzá  $-1$ -et  $f(e)$ -hez a  $H_1$  minden  $e$  élére, és módosítsuk  $V(H_1)$  minden  $v$  csúcsán az  $f'(v)$  értéket ennek megfelelően, hogy  $w(v)$  változatlan maradjon. Így minden  $v \in V(G)$  csúcsra  $f'(V) \in \{0, -1, -2\}$ , minden  $e \in E(G)$  élre  $f(e) \in \{1, 2, \dots, 6\}$ , továbbá minden  $e \in E(T)$  élre  $f(e) \in \{3, 4\}$ .

Legyen  $i \in \{0, 1, 2\}$  esetén  $S_i = \{v \in v(G) \mid f'(v) = -i\}$  és  $s_i = |S_i|$ . Figyeljük meg, hogy minden  $v \in S_0 \cup S_2$  csúcs  $w(v) - f'(v)$  súlya páros, az  $S_1$ -beli csúcsoké pedig páratlan.  $H_1$  maximalitása miatt minden  $uv$  élre, ahol  $u, v \in S_1 \cup S_2$ , teljesül, hogy  $u, v \in S_1$  és  $uv \in E(H_1)$ , hiszen ha nem így lenne, akkor az előző lépésben a  $H_1$  részgráfot tudtuk volna még bővíteni. Részletesebben, ezen élek végpontjaira  $w(u) - f'(u) \neq w(v) - f'(v)$ . Az ilyen élek halmazát jelölje  $E^*$ .

Ha  $s_2 = 0$ , akkor készen vagyunk, hiszen  $f$  jó színezést ad. Amennyiben  $s_2 = 1$  és  $s_1 = 0$ , legyen  $u \in S_2$ . Figyeljük meg, hogy minden  $u$ -ra illeszkedő  $e$  él súlya  $f(e) \in \{2, 4, 6\}$ . Ha  $u$ -nak van egy olyan  $v$  szomszédja, melyre  $w(u) + 2 \neq w(v)$ , akkor az  $uv$  és súlyát

1-gyel csökkentve szintén helyes színezéshez jutunk. (Figyeljük meg, hogy csak  $u$  és  $v$  súlya páratlan.) Ha  $u$  minden  $v \in N(u)$  szomszédjára  $w(u) + 2 = w(v)$  és  $|N(u)| \geq 2$ , akkor két különböző,  $u$ -ra illeszkedő élen is csökkentjük a súlyt 1-gyel. Ez ismét a kívánt súlyozáshoz vezet. Végül, ha az  $u$  csúcs egyetlen  $v$  szomszédjára  $w(u) + 2 = w(v)$ , akkor vegyünk egy  $x \in N_T(v) \setminus \{u\}$  csúcsot, csökkentjük  $f(uv)$ -t 1-gyel,  $f(vx)$ -et pedig növeljük 1-gyel. Így ismét megfelelő súlyozást kapunk.

Ha  $s_2 = 1$  és  $s_1 \geq 1$ , akkor vegyünk egy  $T$ -beli utat  $u \in S_2$  és egy  $v \in S_1$  között, majd felváltva csökkentjük és növeljük az élek súlyát 1-gyel, ügyelve arra, hogy a  $v$ -re illeszkedő él súlyát csökkentjük. Ezzel a keresett súlyozáshoz jutunk.

Ha  $s_2 \geq 2$ , akkor indukcióval beláthatjuk, hogy tudunk találni  $\lceil \frac{s_2}{2} \rceil$  olyan  $T$ -beli utat, melyek végpontjai pontosan az  $S_2$ -beli csúcsok, és amelyek  $T$  minden élet legfeljebb kétszer használják. Ilyen utakat  $2 \leq s_2 \leq 3$  esetén könnyen találhatunk. Amennyiben  $s_2 \geq 4$ , úgy keressünk egy olyan  $e \in E(T)$  élt, melyre  $T - e$  mindkét komponense legalább 2  $S_2$ -beli csúcsot tartalmaz, és legalább az egyikben páros számú ilyen csúcs van. A két komponensre indukciót alkalmazva megtalálhatjuk a keresett utakat.

Felváltva csökkentjük és növeljük ezen utak mentén az élek súlyait úgy, hogy csak a végpontok súlya változzon, és módosítsuk ennek megfelelően az  $f'$  értékeket ezeken a csúcsokon. Ha egy  $u \in S_2$  csúcs két útnak is végpontja (például, ha  $s_2$  páratlan), akkor ügyeljünk arra, hogy az  $u$ -ra illeszkedő mindkét élen csökkentjük a súlyt, hogy  $f'(u) = 0$  adódjon. Figyeljük meg, hogy csak  $E(T)$ -beli éleket használunk, így nem kapunk 1-nél kisebb vagy 6-nál nagyobb élsúlyokat. Ezek után minden csúcsra, amely korábban  $S_2$ -ben volt,  $f'(v) \in \{-3, -1, 0\}$ . Könnyen látható, hogy így az  $f$  súlyozást tekintve minden  $v$  csúcs értéke  $w(v)$ , amennyiben  $w(v)$  páros. A páratlan értékű csúcsok között futó élek mind  $E^*$ -ban vannak, tehát a végpontjaik  $w$  súlya különböző, ahogyan azt korábban már láttuk. Így  $f$  egy csúcs-színező 6-élsúlyozás.  $\square$

## 2.2 Csúcs-színező 5-élsúlyozás

**2.2.1 Tétel** (Kalkowski, Karoński, és Pfender [7]). Minden  $G$  rendes gráfra  $\chi_e(G) \leq 5$ .

*Bizonyítás.* Feltehető, hogy  $G$  összefüggő, különben komponensenként érvelhetünk. Feltehető még továbbá az is, hogy  $|V| \geq 3$ , és létezik olyan  $v$  csúcs, melyre  $d(v) \geq 2$ . Legyen  $v_1, v_2, \dots, v_n$  a csúcsoknak egy olyan sorrendje, melyre  $d(v_n) \geq 2$ , és minden  $1 \leq i \leq n - 1$ -re  $v_i$ -nek van szomszédja  $\{v_{i+1}, v_{i+2}, \dots, v_n\}$ -ben.

Kezdetben minden  $e$  élhez az  $f(e) = 3$  élsúlyt rendeljük, majd legfeljebb kétszer módosítjuk, miközben sorban végighaladunk a csúcsokon. Minden  $i < n$ -re a  $v_i$  csúcshoz hozzárendelünk két szint,  $W(v_i) = \{w(v_i), w(v_i) + 2\}$ , ahol  $w(v_i) \in \{0, 1\} \bmod 4$ , oly módon, hogy minden  $v_j v_i \in E$  élre, ahol  $1 \leq j < i$ ,  $W(v_j) \cap W(v_i) = \emptyset$ , és biztosítani fogjuk, hogy  $f(v_i) = \sum_{u \in N(v_i)} f(uv_i) \in W(v_i)$ . Végül beállítjuk a  $v_n$ -re illeszkedő élek súlyát úgy, hogy  $f(v_n)$  különbözzön  $f(v_i)$ -től minden  $v_i \in N(v_n)$ -re.

Ezt szem előtt tartva legyen  $f(v_1) = 3d(v_1)$ , és válasszuk meg a  $W(v_1)$  halmazt úgy, hogy  $f(v_1) \in W(v_1)$ , valamint  $w(v_1) \in \{0, 1\} \bmod 4$  teljesüljön. Legyen  $2 \leq k \leq n-1$ , és tegyük fel, hogy már minden  $i < k$ -ra meghatároztuk  $W(v_i)$ -t, valamint

- $f(v_i) \in W(v_i)$ , ahol  $i < k$
- $f(v_k v_j) = 3$  minden élre, ahol  $j > k$
- ha  $f(v_i v_k) \neq 3$  valamely élre  $i < k$  esetén, akkor vagy  $f(v_i v_k) = 2$  és  $f(v_i) = w(v_i)$ , vagy  $f(v_i v_k) = 4$  és  $f(v_i) = w(v_i) + 2$ .

Ha  $v_i v_k \in E$  valamely  $i < k$ -ra, akkor  $f(v_i v_k)$ -t 2-vel növelhetjük vagy csökkenthetjük úgy, hogy  $f(v_i) \in W(v_i)$  maradjon. Amennyiben  $v_k$ -nak  $d$  ilyen szomszédja van, úgy ez  $d + 1$  lehetséges értéket jelent  $f(v_k)$  számára, melyek mind azonos paritásúak. Ezen felül megengedjük még, hogy az  $f(v_k v_j)$  súlyt 1-gyel módosítsuk, ahol  $j > k$  a legkisebb index, melyre  $v_k v_j \in E$ . Ezáltal  $f(v_k)$  egy  $[a, a + 2d + 2]$  intervallum minden értékét felveheti. Úgy szeretnénk módosítani a súlyokat és meghatározni  $w(v_k)$ -t, hogy

1.  $f(v_i) \in W(v_i)$ , ahol  $1 \leq i \leq k$
2.  $v_i v_k \in E$  esetén  $w(v_i) \neq w(v_k)$ , ahol  $i < k$
3. vagy  $f(v_k) = w(v_k)$  és  $f(v_k v_j) \in \{2, 3\}$  vagy  $f(v_k) = w(v_k) + 2$  és  $f(v_k v_j) \in \{3, 4\}$

teljesüljön. A második feltétel legfeljebb  $2d$  értéket zárhat ki az  $[a, a + 2d + 2]$  intervallumból, míg a harmadik feltétel csak az  $a$  és  $a + 2d + 2$  értékeket, hiszen minden más  $f(v_k)$  értékre  $f(v_k v_j) \neq 3$  esetén lehetőségünk van választani  $f(v_k v_j) = 2$  és  $f(v_k v_j) = 4$  között. Így legalább egy érték szabadon marad  $f(v_k)$  számára.

Ilyen módon lépésről lépésre, konfliktus nélkül meghatározhatjuk a  $W(v_k)$  halmazokat minden  $k \leq n-1$ -re. Vegyük észre, hogy amikor az  $f(v_k)$  érték először változik meg egy  $v_k v_i$ ,  $i > k$  él módosítása miatt, akkor  $i = j$ , vagyis nem okoznak problémát a 2 vagy 4 súlyú élek.

Utolsó lépésként találnunk kell egy szabad értéket  $v_n$ -nek. Ez alkalommal nem áll rendelkezésünkre egy  $v_n v_j$  segédél, de nem is kell későbbi csúcsok miatt aggódnunk. Az előzőekhez hasonlóan, ha  $v_i v_n \in E$  valamely  $i < n$ -re, akkor  $f(v_i v_n)$ -t 2-vel növelhetjük vagy csökkenthetjük úgy, hogy  $f(v_i) \in W(v_i)$  maradjon. Ezek a módosítások összesen  $d(v_n) + 1 \geq 3$ , azonos paritású lehetőséget jelentenek  $f(v_n)$  értékének. Így, ha a legkisebb ilyen lehetséges  $a$  értékre  $a \in \{2, 3\} \bmod 4$ , akkor minden  $v_n$ -re illeszkedő élen a kisebb értéket választva a csúcsok egy helyes színezését kapjuk. Ha  $a \in \{0, 1\} \bmod 4$ , és létezik olyan  $v_i \in N(v_n)$  csúcs, melyre  $w(v_i) \neq a$ , akkor a  $v_i v_n$  élen a nagyobb, minden más élen pedig a kisebb súlyt választva  $f(v_n) = a + 2$ , ami szintén helyes színezéshez vezet. Végezetül, amennyiben  $a \in \{0, 1\} \bmod 4$  és  $w(v_i) = a$  minden  $v_i \in N(v_n)$ -re, akkor legalább két élen a nagyobb súlyt választva kapunk helyes színezést. Ezzel a tétel állítását beláttuk.  $\square$



## 2.3 Csúcs-színező 3-élsúlyozás irányított gráfokra

Az eddigiekben irányítatlan gráfok élsúlyozásait vizsgáltuk, de joggal merülhet fel a kérdés, hogy vajon mit tudunk mondani az irányított esetről. Itt két lehetőségünk van egy csúcs színének meghatározására.

Az első esetben a kimenő élek összsúlyából kivonjuk bemenő élek összsúlyát. Erről a változatról Bartnicki, Grytczuk, és Niwczyk [3] bebizonyították, hogy a súlyokat tetszőleges kételemű listákról választva is létezik csúcs-színező élsúlyozás.

A második esetben egy csúcs színét csak a kimenő éleken vett súlyok összege, azaz a csúcs súlyozott kifoka határozza meg. A továbbiakban ezzel az esettel fogunk foglalkozni.

Könnyen látható, hogy léteznek olyan digráfok, például a 3 hosszú irányított kör, amelyek helyes színezéséhez nem elegendőek az  $\{1, 2\}$  élsúlyok. A következő tétel azt mondja ki, hogy minden irányított gráfnak van csúcs-színező 3-élsúlyozása. Ez abból következik, hogy minden digráfnak van egy alkalmas csúcsa, amely a szomszédai számához képest sok lehetséges súlyozott kifok-értéket vehet fel. Egy ilyen csúcs létezése teljes indukció használatát teszi lehetővé, továbbá a bizonyítás polinomiális idejű algoritmust is eredményez egy csúcs-színező 3-élsúlyozás megtalálására.

**2.3.1 Tétel** (Baudon, Bensmail, és Sopena [4]). *Minden  $D$  digráfra  $\chi_e(D) \leq 3$ .*

*Bizonyítás.* A bizonyítás  $D$  élszáma szerinti indukcióval történik. Az állítás nyilvánvaló 0 vagy 1 élű digráf esetén. Tegyük fel, hogy legfeljebb  $m - 1$  élre már igazoltuk a tételt, és legyen  $D = (V, A)$  egy  $m \geq 2$  élű digráf.

Figyeljük meg, hogy  $D$ -nek létezik egy olyan  $v$  csúcsa, melyre  $\delta(v) > 0$  és  $\delta(v) > \varrho(v)$ , hiszen különben  $\sum_{v \in V} \varrho(v) \neq \sum_{v \in V} \delta(v)$  lenne. Első lépésként töröljünk minden  $v$ -ből kilépő élet. Ekkor az indukciós feltevés miatt a fennmaradó digráfnak létezik egy  $w$  csúcs-színező 3-élsúlyozása. Tegyük vissza a kitörölt éleket, és terjesszük ki ezekre  $w$ -t oly módon, hogy  $v$  súlyozott kifoka különbözzön mind a  $\delta(v) + \varrho(v)$  szomszédjájától. Ez megtehető, hiszen  $2\delta(v) + 1$  érték közül választhatunk, nevezetesen a  $\{\delta(v), \delta(v) + 1, \dots, 3\delta(v)\}$  halmazból, míg a tiltott értékek száma  $v$  választása miatt legfeljebb  $\varrho(v) + \delta(v) < 2\delta(v) + 1$ . Mivel ezen élsúlyok kizárólag a  $v$  csúcs súlyozott kifokát befolyásolják, ezért az így kapott kiterjesztett súlyozás a  $D$  digráf egy csúcs-színező 3-élsúlyozása.  $\square$

Ebben a bizonyításban azt használtuk ki, hogy egy  $d$ -edfokú csúcs lehetséges súlyozott kifokainak száma kellően nagy, pontosabban legalább  $2d + 1$ , amennyiben az éleket az  $\{1, 2, 3\}$  számokkal súlyozzuk. Most megmutatjuk, hogy ez a tulajdonság tetszőleges  $\{a, b, c\}$  súlyok esetén fennáll, és így egy erősebb tétel is igaz.

**2.3.2 Lemma.** *Legyen egy  $D$  digráfnak  $v$  egy legalább  $d$ -edfokú csúcsa, valamint  $a, b$  és  $c$  három valós szám. Ekkor  $v$  súlyozott kifoka legalább  $2d + 1$  különböző értéket vehet fel  $D$  egy tetszőleges élsúlyozásában, amelyben a  $v$ -ből kimenő élek súlyai az  $\{a, b, c\}$  halmazból kerülnek ki.*

*Bizonyítás.* A bizonyítás  $d$  szerinti indukcióval történik. Amennyiben  $d = 1$ , úgy a  $v$ -ből kilépő él súlya  $a, b$  vagy  $c$  lehet. Mivel ezek különbözőek, ezért  $v$  súlyozott kifokának is 3 különböző értéke lehet.

Tegyük fel, hogy  $d \leq i - 1$  esetén már igazoltuk az állítást, és legyen  $d = i$ . Jelölje  $D'$  azt a digráfot, amelyet egy  $v$ -ből kilépő  $vu$  él elhagyásával kapunk  $D$ -ből. Ekkor az indukciós feltevés szerint  $v$  súlyozott kifoka legalább  $2(d-1)+1$  lehetséges értéket vehet fel  $D$  egy tetszőleges élsúlyozásában, amely a  $v$ -ből kilépő éleket az  $\{a, b, c\}$  számokkal súlyozza. Legyen  $F'$  ezen lehetséges értékek halmaza, valamint  $k$  és  $n$  rendre a legkisebb, illetve legnagyobb eleme  $F'$ -nek, továbbá  $w_K$  és  $w_N$  két élsúlyozása  $D'$ -nek, melyekre a  $v$  csúcs súlyozott kifoka rendre  $K$ , illetve  $N$ .

Tegyük fel, hogy  $a < b < c$ . Amennyiben az állítás igaz az  $\{a, b, c\}$  számokra, úgy igaz a  $\{-a, -b, -c\}$  számokra is, ezért két eset lehetséges:

1.  $0 \leq a < b < c$

2.  $a < 0 \leq b < c$

Az első esetben terjesszük ki a  $D'$  minden élsúlyozását a  $D$  digráfra úgy, hogy a  $vu$  élre  $a$  súlyt írunk. Ekkor azt kapjuk, hogy az  $F = \{x + a : x \in F'\}$  halmaz a  $v$  csúcs lehetséges súlyozott kifokainak  $2(d-1) + 1$  elemű halmaza. A fennmaradó két lehetőséget úgy kapjuk, hogy a  $w_N$  súlyozást  $b$  vagy  $c$  értékkel kiterjesztjük a  $vu$  élre. Ekkor ugyanis  $N + b$  és  $N + c$  két újabb lehetséges érték, hiszen  $a < b < c$  miatt ezek nincsenek  $F$ -ben. Tehát létezik legalább  $2d + 1$  választás  $v$  súlyozott kifokára.

A második esetben terjesszük ki a  $D'$  minden élsúlyozását a  $D$  digráfra úgy, hogy a  $vu$  élre  $b$  súlyt írunk. Ekkor azt kapjuk, hogy az  $F = \{x + b : x \in F'\}$  halmaz a  $v$  csúcs lehetséges súlyozott kifokainak  $2(d-1) + 1$  elemű halmaza. A fennmaradó két lehetőséget úgy kapjuk, hogy a  $w_N$  és  $w_K$  súlyozásokat rendre  $a$ , illetve  $c$  értékkel kiterjesztjük a  $vu$  élre. Ezekből azt kapjuk, hogy  $K + a$  és  $N + c$  két újabb lehetséges érték, amely nem szerepel  $F$ -ben a súlyokra vonatkozó feltevés miatt. Ezzel az állítást beláttuk.  $\square$

A lemma következményeként azt kapjuk, hogy az előző tétel bizonyításában nem számít, hogy egy csúcsnál mely három súlyt írhatjuk a kimenő élekre. Ez a megfigyelés az alábbi listaszínezési tételhez vezet.

**2.3.3 Tétel.** *Legyen adott egy  $D$  digráf minden  $v$  csúcsára egy három valós számból álló  $L(v)$  lista. Ekkor  $D$ -nek van olyan csúcs-színező élsúlyozása, amelyben minden  $v$  csúcsra a kimenő élek súlyai  $L(v)$ -ből kerülnek ki.*

A probléma egyfajta kiterjesztéseként megkérdezhetjük, hogy melyik az a legkisebb  $k \in \{1, 2, 3\}$ , melyre minden irányított gráfnak létezik olyan irányítása, amelynek van csúcs-színező  $k$ -élsúlyozása. Tudjuk, hogy egy digráfnak pontosan akkor létezik csúcs-színező 1-élsúlyozása, ha bármely két szomszédos pont kifoka különböző. A következő lemma azt mondja ki, hogy minden gráfnak létezik olyan irányítása, amelyre ez teljesül.

**2.3.4 Lemma.** Minden  $G$  gráfnak létezik olyan irányítása, amelyben bármely két szomszédos csúcs kifoka különböző.

*Bizonyítás.* A bizonyítás  $G$  pontszáma szerinti indukcióval történik. Az állítás  $n \leq 2$  esetén nyilvánvaló. Tegyük fel, hogy legfeljebb  $i - 1$  csúcsra már igaz a lemma, és legyen  $G$  egy  $n = i$  pontú gráf. Jelölje  $v$  a legnagyobb fokszámú csúcsot  $G$ -ben. Az indukciós feltevés szerint  $G' = G - v$  megirányítható úgy, hogy bármely két szomszédos csúcs kifoka különböző legyen. Jelölje az így kapott digráfot  $D'$ . Figyeljük meg, hogy  $v$  választása miatt  $D'$ -ben minden  $v$ -vel szomszédos csúcs kifoka legfeljebb  $d(v) - 1$ . Legyen  $D$  a  $G$  gráf azon irányítása, amelyet a  $D'$  irányításból kapunk oly módon, hogy a  $v$ -re illeszkedő éleket mind kifelé irányítjuk. Mivel így  $v$  kifoka a  $D$  digráfban  $d(v)$ , és a szomszédos csúcsok kifoka nem változott, ezért a kapott irányítás továbbra is teljesíti a lemma feltételét.  $\square$

Ezen lemma ismeretében és a korábbi megfigyelésünk alapján az alábbi tételt fogalmazhatjuk meg:

**2.3.5 Tétel.** Minden irányítatlan gráfnak létezik olyan irányítása, amelynek van csúcs-színező 1-élsúlyozása.

### 3. Teljes súlyozások és az 1-2-sejtés

#### 3.1 Csúcs-színező $\left(\left\lfloor \frac{\chi(G)}{2} \right\rfloor + 1\right)$ -tejes-súlyozás

**3.1.1 Állítás.** Minden  $G$  páros gráfra  $\chi_t(G) \leq 2$ .

*Bizonyítás.* Rendeljük a gráf éleihez az 1, 2 súlyokat tetszőleges módon. Ezután válasszuk meg a csúcsok súlyát úgy, hogy az egyik színosztályban minden csúcs összsúlya páros, a másik színosztályban pedig páratlan legyen.  $\square$

Hasonló gondolatmenettel kapjuk az alábbi, általánosabb megfigyelésünket is:

**3.1.2 Állítás.** Legyen adott a  $G$  gráf és minden  $v \in V(G)$  csúcsra egy  $t_v$  szín. Ekkor  $G$ -nek létezik olyan 2-tejes-súlyozása, hogy  $c(v) \equiv t_v \pmod{2}$  minden  $v \in V(G)$ -re.

A következőkben egy még általánosabb állítást fogunk igazolni, amelynek segítségével felülről tudjuk majd becsülni  $\chi_t(G)$ -t a  $G$  kromatikus számával.

**3.1.3 Lemma.** Legyen adott egy  $C$  kör, minden  $v \in V(C)$  csúcsra egy  $t_v$  szín, és  $p \geq 3$  egész. Ekkor  $C$ -nek létezik olyan  $\left(\left\lfloor \frac{p}{2} \right\rfloor + 1\right)$ -tejes-súlyozása, hogy  $c(v) \equiv t_v \pmod{p}$  minden  $v \in V(C)$ -re.

*Bizonyítás.* Legyenek  $C$  csúcsai sorban  $v_1, v_2, \dots, v_n$ , ahol  $n = |C|$ . Feltehetjük, hogy minden  $i$ -re  $t_{v_i} \in [3, p+2]$ . Legyen  $V(C) = S \cup L$ , ahol  $v_i \in S$ , ha  $t_{v_i} \in [3, \left\lfloor \frac{p}{2} \right\rfloor + 2]$ , valamint  $v_i \in L$ , ha  $t_{v_i} \in [\left\lfloor \frac{p}{2} \right\rfloor + 3, p+2]$ . Jelölje a  $t_{v_i}$  színt  $s_i$ , ha  $v_i \in S$ , illetve  $l_i$ , ha  $v_i \in L$ , és legyen  $h = \left\lfloor \frac{p}{2} \right\rfloor + 1$ . A továbbiakban csak az  $1, 2, \dots, h$  súlyokat fogjuk használni.

Először is figyeljük meg, hogy ha  $|L|$  páros, akkor könnyedén megkaphatjuk a kívánt súlyozást. Ehhez elég csak az  $1, h$  súlyokat használni az éleken. Kezdetnek legyen  $w(v_n v_1) = 1$ , és ezután sorban rendeljük hozzá az  $1, h$  súlyokat az élekhez oly módon, hogy a  $v_i$ -re illeszkedő két él súlya azonos legyen, ha  $v_i \in S$ , illetve különböző, ha  $v_i \in L$ . Így a jelenlegi összsúlyok értéke mod  $p$  az  $S$ -beli csúcsok esetén 1 vagy 2 ( $p$  paritásától függően), illetve  $\left\lfloor \frac{p}{2} \right\rfloor + 2$  az  $L$ -beli csúcsokra. Innen már könnyedén befejezhető a súlyozás a csúcsok súlyainak megválasztásával.

Legyen  $|L|$  páratlan, és legyen  $v_2 \in L$  egy olyan csúcs, melynek szomszédai,  $v_1$  és  $v_3$ ,  $S$ -beliek. Ha  $s_1 - 2 + s_3 - 2 \geq l_2 - h$ , akkor létezik  $s'_1 \in [1, s_1 - 2]$  és  $s'_3 \in [1, s_3 - 2]$  úgy, hogy  $s'_1 + s'_3 = l_2 - h$ . Legyen  $w(v_1 v_2) = s'_1$ ,  $w(v_2) = h$  és  $w(v_2 v_3) = s'_3$ , így

elérve, hogy  $c(v_2) = l_2$  legyen. Ezután folytassuk a súlyozást a  $w(v_n v_1) = w(v_3 v_4) = 1$  választással. Ez megtehető, hiszen  $v_n v_1 = v_3 v_4$ , amennyiben  $C = C_3$ . Mivel páros számú súlyozatlan csúcs maradt  $L$ -ben, ezért az előbbiekben leírt módszert követve a kívánt súlyozáshoz jutunk. Ha  $p + s_1 - 2h + p + s_3 - 2h \leq l_2 - 1$ , akkor létezik  $s'_1 \in [p + s_1 - 2h, h]$  és  $s'_3 \in [p + s_3 - 2h, h]$  úgy, hogy  $s'_1 + s'_3 = l_2 - 1$ . A fentiekhez hasonlóan legyen  $w(v_1 v_2) = s'_1$ ,  $w(v_2) = 1$  és  $w(v_2 v_3) = s'_3$ , amiből kapjuk, hogy  $c(v_2) = l_2$ . Ezután legyen  $w(v_n v_1) = w(v_3 v_4) = h$ , és kövessük a fentebb említett módszert, hogy eljussunk a kívánt súlyozáshoz.

Végezetül, legyen továbbra is  $|L|$  páratlan, és legyen  $v_2$  és  $v_3$  két egymást követő csúcs  $L$ -ben, melyekre  $l_2 \leq l_3$ . Ekkor  $h + l_2 - l_3$ ,  $l_3 - h - 1 \in \{1, 2, \dots, h\}$ , ezért elegendő a súlyokat úgy megválasztani, hogy  $w(v_1 v_2) = 1$ ,  $w(v_2) = h + l_2 - l_3$ ,  $w(v_2 v_3) = l_3 - h - 1$ ,  $w(v_3) = 1$  és  $w(v_3 v_4) = h$ , illetve ezáltal  $c(v_2) = l_2$  és  $c(v_3) = l_3$  legyen. Ezúttal páratlan számú súlyozatlan csúcs marad  $L$ -ben, azonban a  $v_1 v_2$  és  $v_3 v_4$  élek súlyainak köszönhetően ismét be tudjuk fejezni a súlyozást a fentebb említett módszerrel.  $\square$

**3.1.4 Lemma.** *Legyen adott egy  $G$  gráf, egy  $u \in V(G)$  kijelölt csúcs, minden  $v \in V(G)$  csúcsra egy  $t_v$  szín, és  $p \geq 3$  egész. Ekkor  $G$ -nek létezik olyan  $\left(\left\lfloor \frac{p}{2} \right\rfloor + 1\right)$ -teljes-súlyozása, hogy  $c(v) \equiv t_v \pmod{p}$  minden  $v \in V(G) \setminus \{u\}$ -ra.*

*Bizonyítás.* Kezdetben minden csúcs és él súlya legyen 1. Ha létezik olyan  $v \in V(G) \setminus \{u\}$  csúcs, melynek színe  $\text{mod } p$  nem megfelelő, akkor válasszunk egy  $v$ -ből  $u$ -ba menő utat. A  $v$  csúcs és az úton rá illeszkedő él súlyát alkalmasan megválasztva elérhetjük, hogy  $c(v) \equiv t_v \pmod{p}$  teljesüljön. Ezután haladjunk végig az úton, minden lépésben egy csúcs és a rákövetkező él súlyát módosítva úgy, hogy végül az út minden  $u$ -tól különböző csúcsának megfelelő legyen a színe  $\text{mod } p$ . Figyeljük meg, hogy eközben az úthoz nem tartozó csúcsok összsúlya nem változik. Így eggyel csökkentettük a  $V(G) \setminus \{u\}$ -beli hibás csúcsok számát, tehát az eljárást ismételve a kívánt súlyozáshoz jutunk.  $\square$

**3.1.5 Tétel.** *Legyen adott egy  $G$  összefüggő, nem fa gráf, minden  $v \in V(G)$  csúcsra egy  $t_v$  szín, és  $p \geq 3$  egész. Ekkor  $G$ -nek létezik olyan  $\left(\left\lfloor \frac{p}{2} \right\rfloor + 1\right)$ -teljes-súlyozása, hogy  $c(v) \equiv t_v \pmod{p}$  minden  $v \in V(G)$ -re.*

*Bizonyítás.* Mivel  $G$  nem fa, ezért tartalmaz egy  $C$  kört. Legyen  $u$  ennek egy tetszőleges csúcsa. Az előző lemma alapján tudunk találni olyan súlyozást, amelyben minden  $v \in V(G) \setminus \{u\}$  csúcs összsúlya megfelelő. Változtassuk meg  $C$  minden élének és csúcsának a súlyát 0-ra, és jelölje az így kapott súlyozásban a  $v \in V(G)$  csúcs összsúlyát  $s_v$ . Innen a 3.1.3 lemmát a  $t_v - s_v$  színekre alkalmazva adódik a kívánt súlyozás.  $\square$

**3.1.6 Következmény.** *Minden  $G$  gráfra  $\chi_t(G) \leq \left\lfloor \frac{\chi(G)}{2} \right\rfloor + 1$ .*

## 3.2 Csúcs-színező 11-teljes-súlyozás

Addario-Berry, Dalal, és Reed [1] cikkükben az alábbi tételt bizonyították:

**3.2.1 Tétel.** Legyen  $G = (V, E)$  egy páros gráf, ahol  $V = X \cup Y$ . Minden  $v \in X$ -re legyen  $a_v^- = \lfloor \frac{d(v)}{2} \rfloor$  és legyen  $a_v^+ = a_v^- + 1$ . Minden  $v \in Y$ -ra legyen  $a_v^-$  és  $a_v^+$  olyan, hogy  $a_v^- \leq \lfloor \frac{d(v)}{2} \rfloor \leq a_v^+$  és  $a_v^+ \leq \min\left(\frac{d(v) + a_v^-}{2} + 1, 2a_v^- + 1\right)$ . Ekkor létezik  $G$ -nek egy olyan  $H$  feszítő részgráfja, melyre  $d_H(v) \in \{a_v^-, a_v^+\}$  minden  $v \in V$ -re.

Ezt az eredményt és a cikkben leírt konstrukciót használva belátjuk a következő tételt:

**3.2.2 Tétel.** Minden  $G$  gráfra  $\chi_t(G) \leq 11$ .

*Bizonyítás.* Legyen  $G$  egy összefüggő gráf. A csúcsok egy tetszőleges sorrendjére legyen  $F(v_i) = \{v_j \mid v_j \in N(v_i) \text{ és } j > i\}$  és  $B(v_i) = \{v_j \mid v_j \in N(v_i) \text{ és } j < i\}$ . Nevezzük ezeket rendre a  $v_i$  csúcs előre- illetve hátra-szomszédainak. Válasszunk egy olyan sorrendet, amelyre  $k = \max\{j : |F(v_i)| > |B(v_i)|, i \leq j\}$  maximális. Legyen  $V_1$  az első  $k$  csúcs halmaza, a  $T$  ideiglenes halmaz pedig álljon a többi csúcsból. Figyeljük meg, hogy  $k$  értéke nem csökken, akárhogy is változtatjuk meg a  $T$  csúcsainak sorrendjét. Ezen felül minden  $v \in T$  csúcsra  $d_T(v) \leq d_{V_1}(v)$ , különben  $v$ -t a  $(k + 1)$ -edik helyre rakva jobb sorrendet kapnánk.

Ezután alkalmazzuk a fenti eljárást a  $G[T]$  gráfra is, egy  $V_2$   $T$  halmazhoz és a  $T$  csúcsainak egy új sorrendjéhez jutva. Hagyjuk el  $V_2$  csúcsait  $T$ -ből, és ismételjük meg az eljárást még kétszer, a  $V_3$  és  $V_4$  halmazokat kapva. Legyen  $V_5 = V(G) \setminus (V_1 \cup V_2 \cup V_3 \cup V_4)$ . Figyeljük meg, hogy minden  $v \in V_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$  csúcsnak szigorúan kevesebb hátra-szomszédja van, mint előre-szomszédja. A korábbi megfigyelésünk alapján, minden  $v \in V_5$  csúcsra  $d_{V_2}(v) + d_{V_3}(v) + d_{V_4}(v) + d_{V_5}(v) = d_{V_2 \cup V_3 \cup V_4 \cup V_5}(v) \leq d_{V_1}(v)$ . Hasonlóan kapjuk, hogy  $d_{V_3}(v) + d_{V_4}(v) + d_{V_5}(v) \leq d_{V_2}(v)$ ,  $d_{V_4}(v) + d_{V_5}(v) \leq d_{V_3}(v)$  valamint  $d_{V_5}(v) \leq d_{V_4}(v)$ , és így  $8d_{V_5}(v) \leq d_{V_1}(v)$  minden  $v \in V_5$ -re.

Tekintsük a  $V_5$  és  $V_1$  közötti éleket. □

### 3.3 Minden gráf (2, 3)-választható

A következőkben egy teljes-súlyozásokra vonatkozó eredménnyel ismerkedünk meg, amely a 6-élsúlyozási tétel bizonyításához felhasznált 2.1.2 lemma egy listasúlyozási változata, amely Wong és Zhu [12] cikkében jelent meg.

Legyen egy  $G$  gráfra  $\psi : V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots\}$ . Azt mondjuk, hogy  $L$  egy  $\psi$ -lista hozzárendelés, ha minden  $z \in V(G) \cup E(G)$ -re  $L(z)$  valós számoknak egy  $\psi(z)$  elemű listája. Azt mondjuk, hogy a  $G$  gráf  $\psi$ -választható, ha tetszőleges  $\psi$ -lista hozzárendelésre  $G$ -nek létezik olyan  $\phi$  csúcs-színező teljes-súlyozása, melyre  $\phi(z) \in L(z)$  minden  $z \in V(G) \cup E(G)$  esetén. Amennyiben minden  $v \in V(G)$ -re  $\psi(v) = k$  és minden  $e \in E(G)$ -re  $\psi(e) = l$ , úgy a  $G$  gráfot  $(k, l)$ -választhatónak nevezzük.

Az 1-2-3- illetve 1-2-sejtés erősítéseként felmerült az a feltételezés, miszerint minden gráf (1, 3)-, valamint (2, 2)-választható. Wong és Zhu cikke előtt azonban nem volt

ismert olyan  $k$  és  $l$  konstans, melyekre minden gráf  $(k, l)$ -választható lenne. Az viszont továbbra is nyitott kérdés, hogy létezik-e olyan  $k$  illetve  $l$  konstans, melyekre minden gráf  $(1, l)$ - illetve  $(k, 2)$ -választható.

Az alábbiakban azt fogjuk belátni, hogy minden gráf  $(2, 3)$ -választható. A bizonyításhoz algebrai eszközöket fogunk használni, valamint az Alon-féle kombinatorikus nullhelytételt.

Rendeljünk minden  $z \in V \cup E$ -hez egy  $x_z$  változót, és legyen  $D$  egy tetszőleges irányítása  $G$ -nek. Tekintsük az alábbi polinomot:

$$P_G(\{x_z : z \in V \cup E\}) = \prod_{e=uv \in E(D)} \left( \left( \sum_{e \in E(u)} x_e + x_u \right) - \left( \sum_{e \in E(v)} x_e + x_v \right) \right) \quad (3.1)$$

Legyen  $x_z$  értéke  $\phi(z)$ , és tekintsünk erre  $z$  súlyaként. Jelölje a fenti polinom értékét az  $x_z = \phi(z)$  behelyettesítésnél  $P_G(\phi)$ . Így  $\phi$  a  $G$  gráf egy helyes teljes-súlyozása pontosan akkor, ha  $P_G(\phi) \neq 0$ .

A  $G$  egy indexfüggvénye egy olyan  $\eta$  leképezés, amely a gráf minden  $z$  éléhez és csúcsához egy  $\eta(z)$  nemnegatív egész számot rendel. Egy  $\eta$  indexfüggvény érvényes, ha  $\sum_{z \in V \cup E} \eta(z) = |E|$ . Vegyük észre, hogy  $|E|$  épp a  $P_G$  polinom foka. Egy  $\eta$  érvényes indexfüggvényre legyen  $c_\eta$  a  $\prod_{z \in V \cup E} x_z^{\eta(z)}$  monom együtthatója  $P_G$  kifejtésében. A kombinatorikus nullhelytétel ismeretében tudjuk, hogy ha  $c_\eta \neq 0$ , és  $L(z)$  minden  $z \in V \cup E$ -re valós számok egy  $\eta(z) + 1$  elemű listája, akkor létezik egy olyan  $\phi$  hozzárendelés, hogy minden  $z$ -re  $\phi(z) \in L(z)$  és  $P_G(\phi) \neq 0$ .

Egy  $\eta$  indexfüggvény nem-szinguláris, ha létezik egy olyan  $\eta' \leq \eta$  (azaz  $\eta'(z) \leq \eta(z)$  minden  $z$ -re) érvényes indexfüggvény, melyre  $c_{\eta'} \neq 0$ . A következő tétel a problémakör fő eredménye:

**3.3.1 Tétel.** Minden  $G = (V, E)$  gráfnak létezik olyan nem-szinguláris  $\eta$  indexfüggvénye, melyre  $\eta(v) \leq 1 \ \forall v \in V$  és  $\eta(e) \leq 2 \ \forall e \in E$ .

A fentiek alapján ebből a tételből következik, hogy minden gráf  $(2, 3)$ -választható. Írjuk fel a  $P_G$  polinomot az alábbi alakban:

$$P_G(\{x_z : z \in V \cup E\}) = \prod_{e \in E(D)} \sum_{z \in V \cup E} A_G[e, z] x_z \quad (3.2)$$

Könnyen ellenőrizhető, hogy ekkor  $e = (u, v) \in E$  és  $z \in V \cup E$  esetén

$$A_G[e, z] = \begin{cases} 1 & \text{ha } z = u, \text{ vagy } z \neq e \text{ egy } u\text{-ra illeszkedő él} \\ -1 & \text{ha } z = v, \text{ vagy } z \neq e \text{ egy } v\text{-re illeszkedő él} \\ 0 & \text{különben} \end{cases} \quad (3.3)$$

Itt  $A_G$  egy mátrix, amelynek sorait  $G$  élével, az oszlopait pedig  $G$  csúcsaival és élével

indexeljük. Legyen  $z \in V \cup E$  esetén  $A_G(z)$  az  $A_G$  mátrix  $z$  által indexelt oszlopa. A  $G$  gráf egy  $\eta$  indexfüggvényére legyen  $A_G(\eta)$  az a mátrix, amely minden  $A_G(z)$  oszlopból  $\eta(z)$  darabot tartalmaz. Tudjuk, hogy egy  $\eta$  érvényes indexfüggvényre  $c_\eta \neq 0$  akkor és csak akkor, ha  $\text{per}(A_G(\eta)) \neq 0$ , ahol  $\text{per}(A)$  az  $A$  négyzetes mátrix permanensét jelöli. Ez azt jelenti, hogy  $\eta$  pontosan akkor nem-szinguláris, ha  $\text{per}(A_G(\eta)) \neq 0$ .

Egy  $m \times m$ -es  $A$  mátrixra  $\text{per}(A) = \sum_{\sigma \in S_m} A[i, \sigma(i)]$ , ahol  $S_m$  az  $m$ -edrendű szimmetrikus csoport. A definícióból következik, hogy egy mátrix permanense multi-lineáris az oszlopvektorain és a sorvektorain is. Ha  $C$  az  $A$  mátrix egy oszlopa, amely  $C = \alpha C' + \beta C''$  alakban áll elő, továbbá az  $A'$  és  $A''$  mátrixok a  $C$  oszlop  $C'$ -re illetve  $C''$ -re cserélésével adódnak  $A$ -ból, akkor  $\text{per}(A) = \alpha \text{per}(A') + \beta \text{per}(A'')$ .

Tegyük fel, hogy  $A$  egy négyzetes mátrix, amelynek oszlopai az  $A_G$  oszlopainak lineáris kombinációi. Legyen  $\eta_A(z)$  az az indexfüggvény, amely minden  $z \in V \cup E$ -hez  $A$  azon oszlopainak számát rendeli, amelyek előállításában  $A_G(z)$  nem-nulla együtthatóval szerepel. Vegyük észre, hogy  $A_G$  oszlopvektorai nem lineárisan függetlenek. Mivel  $A$  oszlopai többféleképpen is felírhatóak  $A_G$  oszlopainak lineáris kombinációjaként, ezért az  $A$  mátrix nem határozza meg egyértelműen a  $\eta_A$  indexfüggvényt. A továbbiakban azonban minden esetben, amikor ezt a jelölést használjuk, az  $A$  mátrix oszlopainak egy adott előállítására utalunk, amely a szövegkörnyezetből nyilvánvaló.

A fenti tétel bizonyításához elég egy olyan  $A$  négyzetes mátrixot találni, amelynek az oszlopai oly módon állnak elő, hogy minden  $v$  csúcsra  $\eta_A(v) \leq 1$  és minden  $e$  élre  $\eta_A(e) \leq 2$ .

Most már készen állunk a tétel bizonyítására, és rögtön egy kicsivel erősebb állítást fogunk igazolni.

**3.3.2 Tétel.** *Legyen  $G = (V, E)$  egy összefüggő gráf és  $F$  egy feszítőfája. Ekkor létezik egy olyan  $A$  mátrix, amelynek az oszlopai  $A_G$  oszlopainak olyan lineáris kombinációi, hogy  $\text{per}(A) \neq 0$ ,  $\eta_A(v) \leq 1$  minden  $v \in V$ -re,  $\eta_A(e) = 0$  minden  $e \in E(F)$ -re és  $\eta_A \leq 2$  minden  $e \in E \setminus E(F)$ -re.*

*Bizonyítás.* Figyeljük meg, hogy ez a tétel ekvivalens azzal az állítással, hogy  $G$ -nek létezik olyan  $\eta$  érvényes indexfüggvénye, amelyre

- $\text{per}(A_G(\eta)) \neq 0$
- $\eta(v) \leq 1$  minden  $v \in V$ -re
- $\eta(e) \leq 2$  minden  $e \in E$ -re
- $\eta(e) = 0$  minden  $e \in E(F)$ -re

Tegyük fel, hogy a tétel nem igaz, és legyen  $G$  egy minimális ellenpélda. Világos, hogy  $G$  összefüggő és  $|V| \leq 3$ .



Legyen  $u$  egy olyan csúcsa a  $G$  gráfnak, amely levél  $F$ -ben. Legyen továbbá  $N(u) = \{u_1, u_2, \dots, u_k\}$  valamint  $e_i = uu_i$ ,  $1 \leq i \leq k$ . Hagyjuk el az  $u$  csúcst  $G$ -ből, és jelöljük az így kapott gráfot  $G'$ -vel. A feltevésünk miatt  $G'$ -nek létezik olyan  $\eta'$  érvényes indexfüggvénye, melyre  $\text{per}(A_{G'}(\eta')) \neq 0$ ,  $\eta'(v) \leq 1$  minden  $v \in V(G')$ -re,  $\eta'(e) \leq 2$  minden  $e \in E(G')$ -re és  $\eta(e) = 0$  minden  $e \in E(F - u)$ -ra.

Legyen  $|E(G)| = m$  és  $|E(G')| = m' = m - k$ . Tekintsünk  $\eta'$ -re  $G$  indexfüggvényként,  $z \in (V(G) \cup E(G)) \setminus (V(G') \cup E(G'))$  esetén  $\eta'(z) = 0$  választással. Ekkor  $A_G(\eta')$  egy  $m \times m'$  méretű mátrix  $A_G$  oszlopaiból. Legyen  $\eta = \eta'$  azzal a különbséggel, hogy  $\eta(u) = k$ . Így  $A_G(\eta)$  egy  $m \times m$ -es mátrix, amely  $A_G(\eta')$ -ből az  $A_G(u)$  oszlop  $k$  másolatának hozzávételével adódik. Ezen új oszlopoknak  $k$  sora (amelyek az  $u$ -ra illeszkedő élekkel indexeltek) csupa 1-esből áll, a többi elemük pedig mind 0. Ezáltal  $\text{per}(A_G(\eta)) = \text{per}(A_{G'}(\eta'))k!$ , és így  $\text{per}(A_G(\eta)) \neq 0$ .

Legyen  $M_0 = A_G(\eta)$ , és minden  $1 \leq i \leq k - 1$ -re  $M_i = M_{i-1}$ , ha  $\eta'(u_i) = 0$ . Amennyiben  $\eta'(u_i) = 1$ , akkor  $M_i$  legyen az a mátrix, amelyet az  $M_{i-1}$ -ből az  $A_G(u_i)$  oszlop  $A_G(e_i)$ -re cserélésével kapunk.

**3.3.3 Állítás.** Minden  $1 \leq i \leq k$  esetén  $\text{per}(M_i) = \text{per}(M_{i-1})$ .

*Bizonyítás.* Amennyiben  $\eta'(u_i) = 0$ , úgy  $M_i = M_{i-1}$ , és nincs mit bizonyítanunk. Ezért tegyük fel, hogy  $\eta'(u_i) = 1$ . Legyen  $M'_i$  az a mátrix, amelyet az  $M_{i-1}$ -ből az  $A_G(u_i)$  oszlop  $A_G(u)$ -ra cserélésével kapunk. Ebben a mátrixban az  $A_G(u)$  oszlop  $k + 1$ -szer szerepel. Ezen oszlopok  $k$  sora csupa 1-es, minden más elemük 0. Ezáltal  $\text{per}(M'_i) = 0$ . Mivel  $A_G(e_i) = A_G(u_i) + A_G(u)$ , ezért  $\text{per}(M_i) = \text{per}(M_{i-1}) + \text{per}(M'_i) = \text{per}(M_{i-1})$ .  $\square$

Figyeljük meg, hogy  $M_{k-1} = A_G(\tau)$  a  $G$  gráf minden olyan  $\tau$  indexfüggvényére, amelyre

- $\tau(u_i) = 0$ ,  $\tau(u) = k$  és  $\tau(v) \leq 1$  minden más  $v \in V(G)$  csúcsra
- $\tau(e_i) \leq 1$  minden  $1 \leq i \leq k - 1$ -re,  $\tau(e) = 0$  minden  $e \in F$ -re és  $\tau(e) \leq 2$  minden más  $e \in E(G)$  élre

Cseréljük ki az  $A_G(u)$  oszlop  $k - 1$  másolatát az  $A_G(e_i) - A_G(u_i)$  oszlopokra, ahol  $1 \leq i \leq k - 1$ . Jelölje az így kapott mátrixot  $A$ . Ez a mátrix megegyezik  $A_G(\tau)$ -val, hiszen minden  $1 \leq i \leq k - 1$ -re  $A_G(u) = A_G(e_i) - A_G(u_i)$ . Ebben az új formában azonban  $\eta_A(v) \leq 1$  minden  $v \in V(G)$ -re,  $\eta_A(e) \leq 2$  minden  $e \in E(G)$ -re és  $\eta_A(e) = 0$  minden  $e \in E(F)$ -re. Mivel  $\text{per}(A) = \text{per}(A_G(\tau)) = \text{per}(A_G(\eta)) \neq 0$ , ezért a tételt beláttuk.  $\square$

**3.3.4 Következmény.** Minden gráf  $(2, 3)$ -választható.

Ennél egy kicsivel több is igaz. Legyen  $G$  egy összefüggő gráf,  $F$  pedig egy feszítőfája. Legyen továbbá minden  $v \in V(G)$ -re  $\psi(v) = 2$ , minden  $e \in E(F)$ -re  $\psi(e) = 1$  és minden  $e \in E(G) \setminus E(F)$ -re  $\psi(e) = 3$ . Ekkor a  $G$  gráf  $\psi$ -választható.

## 4. Pontos eredmények speciális gráfokra

Habár az 1-2-3-sejtést még nem sikerült bizonyítani, bizonyos gráfosztályokra már belátták, hogy létezik csúcs-színező 3-élsúlyozásuk. A továbbiakban ezeket fogjuk megvizsgálni.

### 4.1 Színezés $\chi(G)$ élsúllyal

Az első ilyen típusú eredmény a sejtést először felvető cikkből [8] származik. Ez azt mondja ki, hogy egy  $k$ -színezhető gráf élei megsúlyozhatóak egy  $k$ -adrendű Abel-csoport elemeivel csúcs-színező módon, amennyiben  $k$  páratlan. Ebből rögtön következik, hogy minden 3-színezhető gráfra igaz a sejtés. Az alábbi két tétel ezen eredmény módosítása, melyet Lu, Yu, és Zhang [9] cikkében olvashatunk.

**4.1.1 Tétel.** Legyen  $G$  egy összefüggő nem-páros gráf és  $\Gamma = \{g_1, g_2, \dots, g_k\}$  egy véges Abel-csoport, ahol  $k = |\Gamma|$ . Legyen továbbá  $s$  egy  $k$ -színezése a  $G$  csúcsainak az  $\{U_1, U_2, \dots, U_k\}$  színosztályokkal, ahol  $|U_i| = n_i$ ,  $1 \leq i \leq k$ . Ha létezik olyan  $h \in \Gamma$ , melyre  $n_1g_1 + \dots + n_kg_k = 2h$ , akkor létezik olyan élsúlyozás  $\Gamma$  elemeivel, melyre az indukált csúcs-színezés  $s$ .

*Bizonyítás.* Legyen  $s$  egy  $k$ -színezés a  $g_1, g_2, \dots, g_k$  színekkel és az  $\{U_1, U_2, \dots, U_k\}$  színosztályokkal, melyre  $n_1g_1 + \dots + n_kg_k = 2h$ .

Tegyük egy élre  $h$  súlyt, a többire pedig 0-t, így a csúcsszínek összege  $2h$ . A következőkben ezt az élsúlyozást fogjuk módosítani úgy, hogy közben ez az összeg ne változzon, amíg minden  $U_i$ -beli csúcs színe  $g_i$  nem lesz,  $1 \leq i \leq k$ -ra. Tegyük fel, hogy létezik egy  $u \in U_i$  csúcs, amelynek a  $g \neq g_i$  színe nem megfelelő. Mivel  $n_1g_1 + \dots + n_kg_k = 2h$ , ezért szükségképpen létezik egy  $u$ -tól különböző  $v$  csúcs, amelynek szintén rossz a színe. Válasszunk egy páros hosszú sétát  $u$ -ból  $v$ -be. Ez mindig megtehető, mivel  $G$  nem-páros és  $k \geq 3$ . Adjuk hozzá a séta éleihez felváltva a  $g_i - g$  illetve a  $g - g_i$  értéket. Ez az eljárás megtartja a csúcsszínek összegét, valamint minden csúcs színét  $u$  és  $v$  kivételével, továbbá eggyel növeli a megfelelő színű csúcsok számát. Ennek ismételt alkalmazásával megkaphatjuk a kívánt súlyozást.  $\square$

Érdemes megjegyezni, hogy a fenti tételben  $s$  tetszőleges színezés lehet, nem csak egy helyes színezése a csúcsoknak.

**4.1.2 Tétel.** Legyen  $G$  egy rendezes, összefüggő páros gráf és  $Z_2 = \{0, 1\}$ . Legyen továbbá  $s$  egy 2-színezése a  $G$  csúcsainak az  $\{U_0, U_1\}$  színosztályokkal, ahol  $|U_i| = n_i$ ,  $i = 0, 1$ . Ha  $n_1$  páros, akkor létezik olyan élsúlyozás  $Z_2$  elemeivel, melyre az indukált csúcs-színezés  $s$ .

*Bizonyítás.* Kövessük az előző bizonyítás gondolatmenetét, és tegyünk egy élre  $h = 1$  súlyt. Ha létezik egy  $u \in U_i$  csúcs, amelynek nem megfelelő a színe, akkor  $n_1$  páros-sága miatt szükségképpen létezik egy  $u$ -tól különböző  $v$  csúcs, amelynek szintén rossz a színe. Mivel  $G$  összefüggő, ezért létezik út  $u$ -ból  $v$ -be. Adjunk hozzá az út minden éléhez 1-et. Ez az eljárás megtartja a csúcsszín összegét, valamint minden csúcs színét  $u$  és  $v$  kivételével, továbbá eggyel növeli a megfelelő színű csúcsok számát. Ennek ismételt alkalmazásával megkaphatjuk a kívánt súlyozást.  $\square$

Ezzel beláttuk, hogy 3-színezhető gráfnak van csúcs-színező 3-élsúlyozása. Felmerül a kérdés, hogy hasonló állítás igaz-e páros gráfokra. A válasz sajnos nem, ugyanis könnyen ellenőrizhető, hogy például a  $C_6$  vagy  $C_{10}$  gráfoknak nincs ilyen súlyozásuk. A második tétel alapján viszont az alábbi állítást fogalmazhatjuk meg:

**4.1.3 Állítás.** Legyen  $G = (U, V; E)$  egy rendezes, összefüggő páros gráf. Ha  $|A|$  vagy  $|B|$  páros, akkor  $G$ -nek létezik csúcs-színező 2-élsúlyozása.

## 4.2 Teljes gráfokra $\chi_t(G) = 2$

**4.2.1 Állítás.** Minden  $G$  teljes gráfra  $\chi_t(G) = 2$ .

*Bizonyítás.* Teljes indukciót használva megadjuk  $K_n$  egy olyan teljes súlyozását az 1, 2 számokkal, melyben a csúcsok összsúlya  $n$  egymást követő egész  $n$ -től  $2n - 1$ -ig vagy  $n + 1$ -től  $2n$ -ig.  $n = 2$  esetén ez triviális.

Legyen  $n \geq 3$ , és tegyük fel, hogy  $K_{n-1}$ -re már találtunk egy ilyen súlyozást. Adjunk hozzá a gráfhoz egy új  $v$  csúcsot, minden más csúccsal összekötve. Figyeljük meg, hogy a  $K_{n-1}$  csúcsainak összsúlyai egymást követő egészek az  $[n - 1, 2n - 2]$  intervallumban. Amennyiben a legnagyobb közülük  $2n - 3$ , úgy legyen a  $v$  csúcs és minden rá illeszkedő él súlya 2. Ezzel a  $K_n$  csúcsainak összsúlya  $n$  különböző egész az  $[n + 1, 2n]$  intervallumból. Hasonlóan, ha a  $K_{n-1}$  legnagyobb összsúlya  $2n - 2$ , akkor a  $v$  csúcs és minden rá illeszkedő él súlyát 1-nek választva szintén megfelelő súlyozást kapunk.  $\square$

## 4.3 4-reguláris gráfokra $\chi_t(G) = 2$

**4.3.1 Tétel.** Minden  $G$  4-reguláris gráfra  $\chi_t(G) = 2$

*Bizonyítás.* Legyen  $G$  egy összefüggő, 4-reguláris gráf. Amennyiben  $G = K_5$  vagy  $\chi(G) \leq 3$ , úgy az előző tétel, illetve a 3.1.6 következmény alapján készen vagyunk. Így Brooks tétele miatt feltehetjük, hogy  $\chi(G) = 4$ . Válasszuk meg úgy az  $A, B, C, D$  színosztályokat,

hogy  $A$  a lehető legnagyobb legyen, ezen belül  $B$  is a lehető legnagyobb legyen, ezen belül  $C$  is a lehető legnagyobb legyen, végül ezen belül  $D$  is a lehető legnagyobb legyen. Ennek következtében minden  $B \cup C \cup D$ -beli csúcsnak van legalább egy szomszédja  $A$ -ban, minden  $C \cup D$ -beli csúcsnak van legalább egy szomszédja  $B$ -ben, és minden  $D$ -beli csúcsnak van legalább egy szomszédja  $C$ -ben. Legyen  $D = D_1 \cup D_2$ , ahol  $v \in D_i$ , ha  $v$ -nek pontosan  $i$  szomszédja van  $A$ -ban. Jelölje továbbá  $X, Y \in V(G)$  esetén  $E(X, Y)$  az  $X$  és  $Y$  között húzódó éleket. Definiáljunk egy  $w$  súlyozást a következő módon.

Legyen az  $E(A, B \cup C \cup D)$ -beli élek súlya 2, az  $E(D, B \cup C)$ -belieké 1, az  $A \cup D_2$ -beli csúcsoké 2, a  $D_1$ -belieké pedig 1. Így a  $G[B \cup C]$  részgráf súlyozatlan marad, míg  $v \in A$  esetén  $c(v) = 10$ ,  $v \in D_1$  esetén  $c(v) = 6$  és  $v \in D_2$  esetén  $c(v) = 8$ . Minden  $xy \in E(B, C)$  élre, ahol  $y \in C$ , tegyünk 2 súlyt, ha az  $y$  csúcsnak van szomszédja  $D_1$ -ben, különben pedig 1-et. Ezután válasszuk meg minden  $B$ -beli csúcs súlyát úgy, hogy az összsúlyuk páratlan legyen. Mivel mindegyikre illeszkedik legalább egy  $E(B, A)$ -beli él 2 súllyal, ezért  $c(u) \in \{7, 9\}$  minden  $u \in B$ -re. Ezzel az  $A \cup B \cup D$ -beli szomszédos csúcsok már eltérő összsúlyúak.

Figyeljük meg, hogy egy tetszőleges  $v \in C$  csúcsra legalább egy  $(E(C, A)$ -beli) él illeszkedik 2 élsúllyal, és legalább egy, amelynek a súlya 1. Tekintsük a  $v$ -re illeszkedő négy élt. Ha közülük háromnak 1 a súlya, azaz  $N(v) \cap D_1 = \emptyset$ , akkor legyen  $w(v) = 1$ , és így  $c(v) = 6$ . Amennyiben legalább kettőnek 2 a súlya, és  $N(v) \cap D_2 = \emptyset$ , úgy válasszuk meg  $w(v)$ -t oly módon, hogy  $c(v) = 8$  teljesüljön. Végül, ha legalább kettőnek 2 a súlya, és létezik egy  $y \in N(v) \cap D_2$  csúcs, akkor a konstrukció miatt  $w(y) = 2$ ,  $w(yv) = 1$  és  $v$ -nek pontosan egy szomszédja van  $B$ -ben, az  $x$  csúcs. Sőt, pontosan két  $v$ -re illeszkedő él súlya 1. Ha  $c(x) = 9$ , akkor legyen  $w(v) = 1$ , és így  $c(v) = 7$ . Különben, ha  $c(x) = 7$ , akkor legyen  $w(y) = 1$ ,  $w(yv) = 2$  és  $w(v) = 2$ . Így  $y$  összsúlya változatlan marad, míg  $c(v) = 9$ .

Minden  $C$ -beli csúcsot a fentieknek megfelelően súlyozva csúcs-színező súlyozást kapunk. □

## 5. Élsúlyozások komplexitása

Addario-Berry, Dalal, és Reed [1] cikkéből tudjuk, hogy majdnem minden gráfnak van csúcs-színező 2-élsúlyozása. Most megmutatjuk, hogy annak eldöntése, hogy egy adott gráfnak van-e helyes élsúlyozása az 1, 2 számokkal, NP-teljes. Jelölje 1-2-SÚLY azon gráfok nyelvét, melyeknek létezik csúcs-színező 2-élsúlyozásuk.

### 5.1 Az 1-2-SÚLY NP-teljes

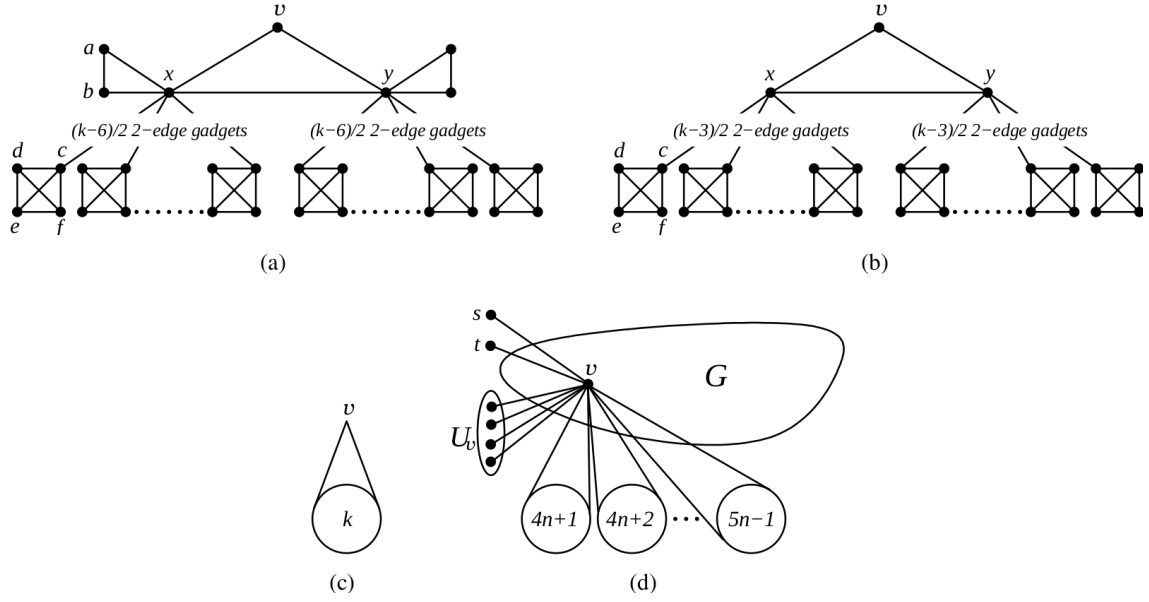
#### 5.1.1 Tétel (Dudek és Wajc [5]). Az 1-2-SÚLY NP-teljes

*Bizonyítás.* Vegyük észre, hogy az 1-2-SÚLY NP-ben van, hiszen polinom időben eldönthető egy gráf egy adott 2-élsúlyozásáról, hogy csúcs-színező-e. Tehát csak azt kell belátnunk, hogy az 1-2-SÚLY NP-nehéz. Ennek érdekében tekintsük a 3-SZÍN problémát, amely közismerten NP-teljes. A következőkben készíteni fogunk egy  $f$  polinomiális redukciót, melyre  $G \in 3\text{-SZÍN}$  akkor és csak akkor, ha  $f(G) \in 1\text{-2-SÚLY}$ . Előtte azonban definiálunk néhány segédszerkezetet.

Az első ilyen a háromszög-szerkezet. Ez egy olyan  $xab$  teljes hármas, melyre külső csúcsból csak  $x$ -be, a szerkezet tetejébe vezethet él. Figyeljük meg, hogy egy helyes súlyozásban egy ilyen háromszög pontosan 3-mal járul hozzá az  $x$  csúcs összsúlyához.

A következő a 2-él-szerkezet, amely egy  $cdef$  teljes négyesből és egy erre illeszkedő  $xc$  élből áll. Könnyen ellenőrizhető, hogy egy olyan gráf esetében, amely csak az  $x$  csúccsal szomszédos, tetszőleges  $w$  helyes súlyozásra  $w(xc) = 2$ . Az  $x$  csúcsot a szerkezet végpontjának nevezzük.

Ezek segítségével definiálunk egy harmadik szerkezetet, amelynek  $k$ -kizáró szerkezet a neve. Itt feltesszük, hogy  $k \geq 8$ . A szerkezetnek van egy  $vxy$  fő háromszöge, ahol a  $v$  csúcsot gyökérnek nevezzük. Ezenfelül, ha  $k$  páratlan, akkor  $x$  és  $y$  is  $\frac{k-3}{2}$  diszjunkt 2-él-szerkezet végpontjai. Amennyiben  $k$  páros, úgy  $x$  és  $y$  is  $\frac{k-6}{2}$  diszjunkt 2-él-szerkezet végpontjai és egy-egy háromszög-szerkezet tetejei, amelyek szintén diszjunktak. Figyeljük meg, hogy minden  $w$  helyes súlyozásban  $w(vx) \neq w(vy)$ . Ellenkező esetben, mivel a szerkezetek  $k - 3$ -mal járulnak hozzá  $x$  és  $y$  összsúlyához, azt kapnánk, hogy  $w(x) = w(xv) + w(xy) + k - 3 = w(yv) + w(yy) + k - 3 = w(y)$ . Ezért tetszőleges  $k$  esetén, ha  $w(xy) = 1$ , akkor  $\{w(x), w(y)\} = \{k - 1, k\}$ , illetve ha  $w(xy) = 2$ , akkor  $\{w(x), w(y)\} = \{k, k + 1\}$ . Akárhogy is,  $v$ -nek van egy  $k$  súlyú szomszédja, ezért



5.1. ábra:

$w(v) \neq k$ . Ezen felül  $\{w(vx), w(vy)\} = \{1, 2\}$ , ezért egy ilyen szerkezet 3-mal járul hozzá  $v$  összsúlyához.

Most már minden eszközünk megvan a redukció elkészítéséhez. Legyen  $G = (V, E)$  egy  $n$  pontú gráf, ahol feltehetjük, hogy  $n \geq 3$ . Az  $f(G) = (W, F)$  gráfot a következőképpen kapjuk meg  $G$ -ből. Minden  $v \in V$ -re

- összekötjük  $v$ -t két új csúccsal,  $s_v$ -vel és  $t_v$ -vel
- összekötjük  $v$ -t egy új  $U_v$  halmaz minden csúcsával, ahol  $|U_v| = n - 1 - d(v)$
- felvesszünk  $n - 1$  új,  $v$  gyökerű  $k$ -kizáró szerkezetet, ahol  $k = 4n + 1, 4n + 2, \dots, 5n - 1$

Világos, hogy  $f(G)$  polinom időben kiszámítható.

**5.1.2 Állítás.**  $f(G)$  bármely  $w$  helyes súlyozására az  $1, 2$  súlyokkal,  $w(v) \in \{4n - 2, 4n - 1, 4n\}$  minden  $v \in V$ -re.

*Bizonyítás.* Válasszunk egy  $v \in V$  csúcsot. Mivel  $w(vs_v) + w(vt_v) \in \{2, 3, 4\}$ , továbbá a  $v$  csúcsra  $n - 1$  darab  $V \cup U_v$ -be menő él illeszkedik, és  $n - 1$  darab  $k$ -kizáró szerkezetnek a gyökere, ezért

$$w(v) \in \{2, 3, 4\} + \{n - 1, \dots, 2n - 2\} + \{3n - 3\} = \{4n - 2, \dots, 5n - 1\}$$

Figyelembe véve, hogy minden  $k \in \{4n + 1, 4n + 2, \dots, 5n - 1\}$ -re a  $v$  csúcs gyökere egy  $k$ -kizáró szerkezetnek, azt kapjuk, hogy egy  $w$  helyes súlyozásban  $w(v) \in \{4n - 2, 4n - 1, 4n\}$ .  $\square$

Most megmutatjuk, hogy  $G \in 3\text{-SZÍN}$  akkor és csak akkor, ha  $f(G) \in 1\text{-}2\text{-SÚLY}$ .

Először tegyük fel, hogy  $G \in 3\text{-SZÍN}$ . Ez azt jelenti, hogy  $G$ -nek van egy helyes 3-színezése. Legyen ez  $s : V \rightarrow \{4n - 2, 4n - 1, 4n\}$ . Definiáljunk egy  $w : E \rightarrow \{1, 2\}$  súlyozást az  $f(G)$  gráfon a következő módon. Minden  $e \in E$ -re legyen  $w(e) = 1$ . Minden  $e = vu$  élre, ahol  $v \in V$  és  $u \in U_v$ , legyen  $w(e) = 1$ . Minden  $v \in V$  csúcsra  $s(v) = 4n - 2$  esetén  $w(vs_v) = w(vt_v) = 1$ ,  $s(v) = 4n - 1$  esetén  $w(vs_v) = 1$  és  $w(vt_v) = 2$ , valamint  $s(v) = 4n$  esetén  $w(vs_v) = w(vt_v) = 2$ . A szerkezetekhez tartozó éleket az alábbi módon súlyozzuk. Egy  $xab$  háromszög-szerkezetre, melynek teteje  $x$ , legyen  $w(xa) = 2$  és  $w(xb) = w(ab) = 1$ . Egy  $xcd$  2-él-szerkezetre, melynek végpontja  $x$ , legyen  $w(xc) = w(cd) = w(ce) = w(de) = w(df) = 2$  és  $w(cf) = w(ef) = 1$ . Egy  $v$  gyökerű és  $vxy$  fő háromszögű  $k$ -kizáró-szerkezet esetén legyen  $w(vx) = w(xy) = 2$  és  $w(vy) = 1$ , minden más él súlyozása pedig a fentieknek megfelelő. Figyeljük meg, hogy  $w$  egy helyes színezése  $f(G)$ -nek, hiszen  $w(v) = s(v)$  minden  $v \in V$ -re.

Tegyük most fel, hogy  $G \notin 3\text{-SZÍN}$ . Ennélfogva minden  $s : V \rightarrow \{4n - 2, 4n - 1, 4n\}$ -re  $s$  nem egy helyes színezés. Ezt összevetve az 5.1.2 állítással azt kapjuk, hogy  $f(G)$ -nek nem létezik helyes súlyozása, azaz  $f(G) \notin 1\text{-}2\text{-SÚLY}$ .

Ezzel a tételt beláttuk. □

# Irodalomjegyzék

- [1] L. Addario-Berry, K. Dalal, és B.A. Reed. “Degree constrained subgraphs”. In: *Discrete Applied Mathematics* 156.7 (2008), pp. 1168–1174.
- [2] Mohammad hadi Alaeiyan. “The edge-labeling and vertex-colors of  $K_n$ ”. In: *Mathematical Sciences* 6.1 (2012), p. 45.
- [3] Tomasz Bartnicki, Jarosław Grytczuk, és Stanisław Niwczyk. “Weight choosability of graphs”. In: *Journal of Graph Theory* 60.3 (2009), pp. 242–256.
- [4] Olivier Baudon, Julien Bensmail, és Eric Sopena. “An oriented version of the 1-2-3 Conjecture”. In: *Discussiones Mathematicae Graph Theory* (2014).
- [5] Andrzej Dudek és David Wajc. “On the complexity of vertex-coloring edge-weightings”. In: *Discrete Mathematics & Theoretical Computer Science* 13.3 (2011).
- [6] Maciej Kalkowski, Michał Karoński, és Florian Pfender. “Vertex coloring edge weightings with integer weights at most 6”. In: *Rostocker Mathematisches Kolloquium* 64 (2009), pp. 39–43.
- [7] Maciej Kalkowski, Michał Karoński, és Florian Pfender. “Vertex-coloring edge-weightings: Towards the 1-2-3-conjecture”. In: *Journal of Combinatorial Theory, Series B* 100.3 (2010), pp. 347–349.
- [8] Michał Karoński, Tomasz Łuczak, és Andrew Thomason. “Edge weights and vertex colours”. In: *Journal of Combinatorial Theory, Series B* 91.1 (2004), pp. 151–157.
- [9] Hongliang Lu, Qinglin Yu, és Cun-Quan Zhang. “Vertex-coloring 2-edge-weighting of graphs”. In: *European Journal of Combinatorics* 32.1 (2011), pp. 21–27.
- [10] Jakub Przybyło és Mariusz Woźniak. “On a 1, 2 Conjecture”. In: *Discrete Mathematics & Theoretical Computer Science* 12.1 (2010), pp. 101–108.
- [11] B. Seamone. “The 1-2-3 Conjecture and related problems: a survey”. In: *ArXiv e-prints* (Nov. 2012). arXiv: 1211.5122.
- [12] Tsai-Lien Wong és Xuding Zhu. “Every graph is (2,3)-choosable”. In: *Combinatorica* (2014), pp. 1–7.