Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar

Vadas Norbert

Élszínezések

alkalmazott matematikus MSc szakdolgozat
operációkutatás szakirány

Témavezetõ:
Bérczi Kristóf
Operációkutatási Tanszék

Budapest, 2015

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés

1.1 Fogalmak és jelölések

A továbbiakban, hacsak nincs másképp jelezve, minden gráf egyszerű, véges és irányítatlan. Egy $G = (V, E)$ gráfon értelmezett $w : E \to [k] = \{1, \dots, k\}$ függvényt k-**élsúlyozás**nak nevezünk. Amennyiben a csúcsokhoz is rendelünk súlyokat, azaz $w : V \cup E \to [k]$, akkor k-**teljes-súlyozás**ról beszélünk. Egy csúcs **érték**én vagy **szín**én a rá illeszkedő élek súlyainak, és amennyiben van, a saját súlyának összegét értjük. Az első eset egy másik elnevezése még a **súlyozott fokszám**. Azt mondjuk, hogy egy súlyozás **csúcs-megkülönböztető**, ha bármely két csúcsnak különböző az értéke. Abban az esetben, ha ezt csak szomszédos csúcspárokra követeljük meg, akkor a csúcsok értékei egy színezését adják a gráfnak. Az ilyen súlyozást **csúcs-színező**nek hívjuk. Adott G gráfra a legkisebb olyan k számot, melyre létezik G-nek csúcs-színező k-élsúlyozása $\chi_e(G)$-vel jelöljük. Végezetül egy gráfra azt mondjuk, hogy **rendes**, ha egyetlen komponense sem izomorf K_2-vel.

1.2 Az 1, 2, 3 - sejtés

Az 1, 2, 3 - sejtés vizsgálatát a gráfok irregularitásának vizsgálata motiválta. Egy gráf éleinek súlyozását irregulárisnak nevezzük, ha bármely két csúcsra a rájuk illeszkedő éleken vett összeg különböző. Egy gráf irregularitásának erősségén azt a legkisebb k számot értjük, amelyre létezik irreguláris súlyozás az $\{1, \dots, k\}$ halmazból vett súlyokkal. Ennek a feladatnak egy természetesen adódó egyszerűsítése, ha csak szomszédos csúcsokra követeljük meg azt, hogy különböző legyen az értékük.

A sejtést először Karoński, Łuczak, és Thomason [7] fogalmazta meg 2002-ben, és a következőképpen hangzik:

1.2.1 Sejtés (Az 1, 2, 3 - sejtés). *Minden rendes gráf élei megcímkézhetőek az 1, 2, 3 számokkal oly módon, hogy tetszőleges két szomszédos csúcsra a rájuk illeszkedő éleken lévő számok összege különböző legyen.*

A sejtést megfogalmazása óta sokat vizsgálták. Az eddigi legjobb korlátot Kalkowski, Karoński, és Pfender [6] bizonyította be 2010-ben, mely szerint a helyes színezéshez 5 élsúly elegendő. Könnyen látható, hogy léteznek olyan rendes gráfok, amelyekre nem elég

2 élsúly. Azonban egy aszimptotikus eredmény szerint egy $G(p, n)$ véletlen gráf majdnem biztosan megszínezhető csak az 1, 2 élsúlyok segítségével [1]. Bizonyos gráfosztályokra már sikerült igazolni a sejtést. Eszerint 3-színezhető [7], illetve teljes gráfok [2] esetén $\chi_e(G) = 3$. Az előbbi eredmény nyomán feltehető az a kérdés, hogy mely páros gráfok esetében elegendő csak az 1, 2 súlyok közül választani. Lu, Yu, és Zhang [9] cikke szerint a 3-összefüggő, valamint bizonyos fokszám-megkötéseknek eleget tevő páros gráfok ilyenek.

A csúcs-színező élsúlyozásoknak számos változatát vizsgálták már az elmúlt évtizedben. Az irányított esetben egy digráf éleit súlyozzuk, a csúcsok értékét pedig csak a kifelé vezető éleken vett összeg határozza meg. Ez a probléma lényegesen egyszerűbb, mint az irányítatlan változat, ugyanis itt könnyedén belátható az 1, 2, 3 - sejtéssel analóg állítás [4].

1.2.2 Állítás. *Minden D digráfra $\chi_e(D) = 3$.*

Más változatokban az élsúlyok összege helyett azok szorzata, halmaza, multihalmaza vagy sorozata határozza meg a csúcsok színeit. Emellett élsúlyozás helyett tekinthetünk csúcs-, illetve teljes-súlyozást is. Érdekes kérdés az is, hogy mit mondhatunk abban az esetben, ha a súlyokat nem az $\{1, \ldots, k\}$ halmazból, hanem tetszőleges k-elemű listából választhatjuk ki. A különféle változatok eddigi eredményeiről Seamone [11] cikkében olvashatunk bővebben.

Természetesen adódik az a kérdés is, hogy vajon NP-nehéz-e annak eldöntése, hogy egy gráf színezéséhez 2 élsúly elegendő. Irányított gráfokra a válasz igen, egyéb esetben ez egy nyitott probléma.

2. A fontosabb eredmények

A sejtéssel kapcsolatban a legfontosabb előrehaladást tetszőleges G gráf esetén a $\chi_e(G)$-re vonatkozó konstans korlátok bevezetése és javítása jelenti. A sejtést először felvető cikkben még csak azt bizonyították, hogy véges sok valós élsúly elegendő, később viszont egész számokra vonatkozó korlátokat is adtak. A jelenleg ismert legjobb eredmény Kalkowski, Karoński, és Pfender nevéhez fűződik, akik a $\chi_e(G) \leq 6$ [5], kicsivel később pedig a $\chi_e(G) \leq 5$ [6] korlátot adták a problémára. A két bizonyítás merőben más eszközöket használ, amelyek önmagukban is említésre érdemesek, ezért a következőkben mindkettőre kitérünk.

2.1 Csúcs-színező 6-élsúlyozás

Először vizsgáljuk a gyengébb korlátot. Az erre vonatkozó tétel bizonyítása előtt tekintsük a következő lemmát, mely az [5] cikk első szerzőjének egy korábbi eredménye:

2.1.1 Lemma. *Minden összefüggő, rendes G gráfra létezik olyan $f : E(G) \to \{1, 2, 3\}$ élsúlyozás és $f' : V(G) \to \{0, 1\}$ csúcs-súlyozás, melyre a csúcsok $w(v) = f'(v) + \sum_{w \in N(v)} f(vw)$ értéke egy helyes színezés.*

Ennek segítségével egy $\chi_e(G) \leq 10$ korlát adható az élsúlyok megháromszorozásával, majd bizonyos élek 1-gyel történő módosításával. Jelen esetben is egy hasonló eljárást követünk majd, amelyhez szükségünk lesz a lemma egy általánosabb alakjára. Előtte azonban érdemes megjegyezni egy egyszerű következményt. A sejtés vizsgálatánál érdekes kérdés lehet, hogy mit tudunk mondani a rossz élek részgráfjáról, vagyis azon élekről, melyek végpontjai azonos értékűek. A fenti lemma erre is ad egyfajta választ, ugyanis az általa biztosított teljes súlyozásban minden csúcsra 0-t írva olyan élsúlyozást kapunk, ahol a rossz élek egy páros gráfot alkotnak. Ez a megfigyelés segíthet abban, hogy közelebb jussunk a sejtés bizonyításához vagy cáfolatához. Visszatérve a tételünkhöz, a lemma általánosítása a következőképpen hangzik:

2.1.2 Lemma. *Legyen $\alpha \in \mathbb{R}$ és $\beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Ekkor minden összefüggő, rendes G gráfra, és tetszőleges T feszítőfájára létezik olyan $f : E(G) \to \{\alpha - \beta, \alpha, \alpha + \beta\}$ élsúlyozás és $f' : V(G) \to \{0, \beta\}$ csúcs-súlyozás, melyre a csúcsok $w(v) = f'(v) + \sum_{w \in N(v)} f(vw)$ értéke egy helyes színezés. Továbbá f megválasztható úgy, hogy $f(e) = \alpha$ minden $e \in E(T)$-re.*

Bizonyítás. Legyen $v_1, v_2, \dots, v_n$ a csúcsoknak egy olyan sorrendje, melyre minden $k \geq 2$-re v_k-ból pontosan egy T-beli él vezet $\{v_1, v_2, \dots, v_{k-1}\}$-be. Kezdetben minden élhez az α súlyt rendeljük, amelyet legfeljebb egyszer módosítunk, hogy sorban minden v_k csúcs értékét véglegesítsük.

Legyen $w(v_1) = \alpha d(v_1)$, és tegyük fel, hogy valamely $k \geq 2$-re már meghatároztuk az f élsúlyokat az $E(G[\{v_1, v_2, \dots, v_{k-1}\}]) \setminus E(T)$ halmazon és az f' csúcs-súlyokat $\{v_1, v_2, \dots, v_{k-1}\}$-en úgy, hogy az első $k-1$ csúcs $w(v_i)$ értéke már végleges.

A v_k csúcs esetén minden $E(v_k, \{v_1, v_2, \dots, v_{k-1}\}) \setminus E(T)$-beli él súlyát módosíthatjuk β-val. Amennyiben $v_k v_i \in E(G) \setminus E(T)$ és $f'(v_i) = 0$, akkor választhatunk $(f(v_k v_i) = \alpha, f'(v_i) = 0)$ és $(f(v_k v_i) = \alpha - \beta, f'(v_i) = \beta)$ között anélkül, hogy megváltoztatnánk $w(v_i)$-t. Hasonlóan, ha $v_k v_i \in E(G) \setminus E(T)$ és $f'(v_i) = \beta$, akkor választhatunk $(f(v_k v_i) = \alpha, f'(v_i) = \beta)$ és $(f(v_k v_i) = \alpha + \beta, f'(v_i) = 0)$ között anélkül, hogy megváltoztatnánk $w(v_i)$-t. Végezetül megválaszthatjuk $f'(v_k)$ értékét is. Ez összesen $|E(v_k, \{v_1, v_2, \dots, v_{k-1}\}) \setminus E(T)| + 2 = |E(v_k, \{v_1, v_2, \dots, v_{k-1}\})| + 1$ különböző lehetőség $w(v_k)$ értékének, melyek közül kiválaszthatjuk azt, amely minden $N(v_k) \cap \{v_1, v_2, \dots, v_{k-1}\}$-beli csúcs értékétől különbözik.

Ezt az eljárást folytatva megkaphatjuk a kívánt súlyozást. $\square$

Ezen lemma birtokában most már készen állunk a tétel bizonyítására.

2.1.3 Tétel (Kalkowski, Karoński, és Pfender [5]). *Minden G rendes gráfra $\chi_e(G) \leq 6$.*

Bizonyítás. Feltehető, hogy G összefüggő, különben a komponenseket külön-külön vizsgálhatjuk. Induljunk ki egy tetszőleges T feszítőfából, és vegyünk egy (f, f', w) súlyozást a lemma alapján, $\alpha = 4$ és $\beta = -2$ paraméterekkel. Ekkor minden csúcs és él súlya páros. A bizonyítás hátralévő részében módosítani fogjuk f-et és f'-t, de $w(v)$ változatlan marad minden $v \in V(G)$ csúcsra.

Legyen $H = G[\{v \in v(G) \mid f'(v) = -2\}]$, és ebben H_1 egy maximális feszítő részgráf, melyben a legnagyobb fokszám legfeljebb 2. Adjunk hozzá -1-et $f(e)$-hez a H_1 minden e élére, és módosítsuk $V(H_1)$ minden v csúcsán az $f'(v)$ értéket ennek megfelelően, hogy $w(v)$ változatlan maradjon. Így minden $v \in V(G)$ csúcsra $f'(V) \in \{0, -1, -2\}$, minden $e \in E(G)$ élre $f(e) \in \{1, 2, \dots, 6\}$, továbbá minden $e \in E(T)$ élre $f(e) \in \{3, 4\}$.

Legyen $i \in \{0, 1, 2\}$ esetén $S_i = \{v \in v(G) \mid f'(v) = -i\}$ és $s_i = |S_i|$. Figyeljük meg, hogy minden $v \in S_0 \cup S_2$ csúcs $w(v) - f'(v)$ súlya páros, az S_1-beli csúcsoké pedig páratlan. H_1 maximalitása miatt minden uv élre, ahol $u, v \in S_1 \cup S_2$, teljesül, hogy $u, v \in S_1$ és $uv \in E(H_1)$, hiszen ha nem így lenne, akkor az előző lépésben a H_1 részgráfot tudtuk volna még bővíteni. Részletesebben, ezen élek végpontjaira $w(u) - f'(u) \neq w(v) - f'(v)$. Az ilyen élek halmazát jelölje E^*.

Ha $s_2 = 0$, akkor készen vagyunk, hiszen f jó színezést ad. Amennyiben $s_2 = 1$ és $s_1 = 0$, legyen $u \in S_2$. Figyeljük meg, hogy minden u-ra illeszkedő e él súlya $f(e) \in \{2, 4, 6\}$. Ha u-nak van egy olyan v szomszédja, melyre $w(u) + 2 \neq w(v)$, akkor az uv és súlyát

1-gyel csökkentve szintén helyes színezéshez jutunk. (Figyeljük meg, hogy csak u és v súlya páratlan.) Ha u minden $v \in N(u)$ szomszédjára $w(u) + 2 = w(v)$ és $|N(u)| \geq 2$, akkor két különböző, u-ra illeszkedő élen is csökkentsük a súlyt 1-gyel. Ez ismét a kívánt súlyozáshoz vezet. Végül, ha az u csúcs egyetlen v szomszédjára $w(u) + 2 = w(v)$, akkor vegyünk egy $x \in N_T(v) \setminus \{u\}$ csúcsot, csökkentsük $f(uv)$-t 1-gyel, $f(vx)$-et pedig növeljük 1-gyel. Így ismét megfelelő súlyozást kapunk.

Ha $s_2 = 1$ és $s_1 \geq 1$, akkor vegyünk egy T-beli utat $u \in S_2$ és egy $v \in S_1$ között, majd felváltva csökkentsük és növeljük az élek súlyát 1-gyel, ügyelve arra, hogy a v-re illeszkedő él súlyát csökkentsük. Ezzel a keresett súlyozáshoz jutunk.

Ha $s_2 \geq 2$, akkor indukcióval beláthatjuk, hogy tudunk találni $\lceil \frac{s_2}{2} \rceil$ olyan T-beli utat, melyek végpontjai pontosan az S_2-beli csúcsok, és amelyek T minden élét legfeljebb kétszer használják. Ilyen utakat $2 \leq s_2 \leq 3$ esetén könnyen találhatunk. Amennyiben $s_2 \geq 4$, úgy keressünk egy olyan $e \in E(T)$ élt, melyre $T - e$ mindkét komponense legalább 2 S_2-beli csúcsot tartalmaz, és legalább az egyikben páros számú ilyen csúcs van. A két komponensre indukciót alkalmazva megtalálhatjuk a keresett utakat.

Felváltva csökkentsük és növeljük ezen utak mentén az élek súlyait úgy, hogy csak a végpontok súlya változzon, és módosítsuk ennek megfelelően az f' értékeket ezeken a csúcsokon. Ha egy $u \in S_2$ csúcs két útnak is végpontja (például, ha s_2 páratlan), akkor ügyeljünk arra, hogy az u-ra illeszkedő mindkét élen csökkentsük a súlyt, hogy $f'(u) = 0$ adódjon. Figyeljük meg, hogy csak $E(T)$-beli éleket használunk, így nem kapunk 1-nél kisebb vagy 6-nál nagyobb élsúlyokat. Ezek után minden csúcsra, amely korábban S_2-ben volt, $f'(v) \in \{-3, -1, 0\}$. Könnyen látható, hogy így az f súlyozást tekintve minden v csúcs értéke $w(v)$, amennyiben $w(v)$ páros. A páratlan értékű csúcsok között futó élek mind E^*-ban vannak, tehát a végpontjaik w súlya különböző, ahogyan azt korábban már láttuk. Így f egy csúcs-színező 6-élsúlyozás. □

2.2 Csúcs-színező 5-élsúlyozás

2.2.1 Tétel (Kalkowski, Karoński, és Pfender [6]). *Minden G rendes gráfra $\chi_e(G) \leq 5$.*

Bizonyítás. Feltehető, hogy G összefüggő, különben komponensenként érvelhetünk. Feltehető még továbbá az is, hogy $|V| \geq 3$, és létezik olyan v csúcs, melyre $d(v) \geq 2$. Legyen $v_1, v_2, \ldots, v_n$ a csúcsoknak egy olyan sorrendje, melyre $d(v_n) \geq 2$, és minden $1 \leq i \leq n-1$-re v_i-nek van szomszédja $\{v_{i+1}, v_{i+2}, \ldots, v_n\}$-ben.

Kezdetben minden e élhez az $f(e) = 3$ élsúlyt rendeljük, majd legfeljebb kétszer módosítjuk, miközben sorban végighaladunk a csúcsokon. Minden $i < n$-re a v_i csúcshoz hozzárendelünk két színt, $W_(v_i) = \{w(v_i), w(v_i) + 2\}$, ahol $w(v_i) \in \{0, 1\}$ mod 4, oly módon, hogy minden $v_j v_i \in E$ élre, ahol $1 \leq j < i$, $W(v_j) \cap W(v_i) = \emptyset$, és biztosítani fogjuk, hogy $f(v_i) = \sum_{u \in N(v_i)} f(uv_i) \in W(v_i)$. Végül beállítjuk a v_n-re illeszkedő élek súlyát úgy, hogy $f(v_n)$ különbözzön $f(v_i)$-től minden $v_i \in N(v_n)$-re.

Ezt szem előtt tartva legyen $f(v_1) = 3d(v_1)$, és válasszuk meg a $W(v_1)$ halmazt úgy, hogy $f(v_1) \in W(v_1)$, valamint $w(v_1) \in \{0,1\}$ mod 4 teljesüljön. Legyen $2 \leq k \leq n-1$, és tegyük fel, hogy már minden $i < k$-ra meghatároztuk $W(v_i)$-t, valamint

- $f(v_i) \in W(v_i)$, ahol $i < k$
- $f(v_k v_j) = 3$ minden élre, ahol $j > k$
- ha $f(v_i v_k) \neq 3$ valamely élre $i < k$ esetén, akkor vagy $f(v_i v_k) = 2$ és $f(v_i) = w(v_i)$, vagy $f(v_i v_k) = 4$ és $f(v_i) = w(v_i) + 2$.

Ha $v_i v_k \in E$ valamely $i < k$-ra, akkor $f(v_i v_k)$-t 2-vel növelhetjük vagy csökkenthetjük úgy, hogy $f(v_i) \in W(v_i)$ maradjon. Amennyiben v_k-nak d ilyen szomszédja van, úgy ez $d + 1$ lehetséges értéket jelent $f(v_k)$ számára, melyek mind azonos paritásúak. Ezen felül megengedjük még, hogy az $f(v_k v_j)$ súlyt 1-gyel módosítsuk, ahol $j > k$ a legkisebb index, melyre $v_k v_j \in E$. Ezáltal $f(v_k)$ egy $[a, a+2d+2]$ intervallum minden értékét felveheti. Úgy szeretnénk módosítani a súlyokat és meghatározni $w(v_k)$-t, hogy

1. $f(v_i) \in W(v_i)$, ahol $1 \leq i \leq k$
2. $v_i v_k \in E$ esetén $w(v_i) \neq w(v_k)$, ahol $i < k$
3. vagy $f(v_k) = w(v_k)$ és $f(v_k v_j) \in \{2,3\}$ vagy $f(v_k) = w(v_k)+2$ és $f(v_k v_j) \in \{3,4\}$

teljesüljön. A második feltétel legfeljebb $2d$ értéket zárhat ki az $[a, a+2d+2]$ intervallumból, míg a harmadik feltétel csak az a és $a + 2d + 2$ értékeket, hiszen minden más $f(v_k)$ értékre $f(v_k v_j) \neq 3$ esetén lehetőségünk van választani $f(v_k v_j) = 2$ és $f(v_k v_j) = 4$ között. Így legalább egy érték szabadon marad $f(v_k)$ számára.

Ilyen módon lépésről lépésre, konfliktus nélkül meghatározhatjuk a $W(v_k)$ halmazokat minden $k \leq n-1$-re. Vegyük észre, hogy amikor az $f(v_k)$ érték először változik meg egy $v_k v_i$, $i > k$ él módosítása miatt, akkor $i = j$, vagyis nem okoznak problémát a 2 vagy 4 súlyú élek.

Utolsó lépésként találnunk kell egy szabad értéket v_n-nek. Ez alkalommal nem áll rendelkezésünkre egy $v_n v_j$ segédél, de nem is kell későbbi csúcsok miatt aggódnunk. Az előzőekhez hasonlóan, ha $v_i v_n \in E$ valamely $i < n$-re, akkor $f(v_i v_n)$-t 2-vel növelhetjük vagy csökkenthetjük úgy, hogy $f(v_i) \in W(v_i)$ maradjon. Ezek a módosítások összesen $d(v_n) + 1 \geq 3$, azonos paritású lehetőséget jelentenek $f(v_n)$ értékének. Így, ha a legkisebb ilyen lehetséges a értékre $a \in \{2,3\}$ mod 4, akkor minden v_n-re illeszkedő élen a kisebb értéket választva a csúcsok egy helyes színezését kapjuk. Ha $a \in \{0,1\}$ mod 4, és létezik olyan $v_i \in N(v_n)$ csúcs, melyre $w(v_i) \neq a$, akkor a $v_i v_n$ élen a nagyobb, minden más élen pedig a kisebb súlyt választva $f(v_n) = a + 2$, ami szintén helyes színezéshez vezet. Végezetül, amennyiben $a \in \{0,1\}$ mod 4 és $w(v_i) = a$ minden $v_i \in N(v_n)$-re, akkor legalább két élen a nagyobb súlyt választva kapunk helyes színezést. Ezzel a tétel állítását beláttuk. $\square$

3. Speciális esetek

Habár az 1, 2, 3 - sejtést még nem sikerült bizonyítani, bizonyos gráfosztályokra már belátták, hogy létezik csúcs-színező 3-élsúlyozásuk. A továbbiakban ezeket fogjuk megvizsgálni.

3.1 Színezés $\chi(G)$ élsúllyal

Az első ilyen típusú eredmény a sejtést először felvető cikkből [7] származik. Ez azt mondja ki, hogy egy k-színezhető gráf élei megsúlyozhatóak egy k-adrendű Abel-csoport elemeivel csúcs-színező módon, amennyiben k páratlan. Ebből rögtön következik, hogy minden 3-színezhető gráfra igaz a sejtés. Az alábbi két tétel ezen eredmény módosítása, melyet Lu, Yu, és Zhang [9] cikkében olvashatunk.

3.1.1 Tétel. *Legyen G egy összefüggő nem-páros gráf és $\Gamma = \{g_1, g_2, \dots, g_k\}$ egy véges Abel-csoport, ahol $k = |\Gamma|$. Legyen továbbá s egy k-színezése a G csúcsainak az $\{U_1, U_2, \dots, U_k\}$ színosztályokkal, ahol $|U_i| = n_i$, $1 \leq i \leq k$. Ha létezik olyan $h \in \Gamma$, melyre $n_1 g_1 + \dots + n_k g_k = 2h$, akkor létezik olyan élsúlyozás Γ elemeivel, melyre az indukált csúcs-színezés s.*

Bizonyítás. Legyen s egy k-színezés a $g_1, g_2, \dots, g_k$ színekkel és az $\{U_1, U_2, \dots, U_k\}$ színosztályokkal, melyre $n_1 g_1 + \dots + n_k g_k = 2h$.

Tegyünk egy élre h súlyt, a többire pedig 0-t, így a csúcsszínek összege $2h$. A következőkben ezt az élsúlyozást fogjuk módosítani úgy, hogy közben ez az összeg ne változzon, amíg minden U_i-beli csúcs színe g_i nem lesz, $1 \leq i \leq k$-ra. Tegyük fel, hogy létezik egy $u \in U_i$ csúcs, amelynek a $g \neq g_i$ színe nem megfelelő. Mivel $n_1 g_1 + \dots + n_k g_k = 2h$, ezért szükségképpen létezik egy u-tól különböző v csúcs, amelynek szintén rossz a színe. Válasszunk egy páros hosszú sétát u-ból v-be. Ez mindig megtehető, mivel G nem-páros és $k \geq 3$. Adjuk hozzá a séta éleihez felváltva a $g_i - g$ illetve a $g - g_i$ értéket. Ez az eljárás megtartja a csúcsszínek összegét, valamint minden csúcs színét u és v kivételével, továbbá eggyel növeli a megfelelő színű csúcsok számát. Ennek ismételt alkalmazásával megkaphatjuk a kívánt súlyozást. $\square$

Érdemes megjegyezni, hogy a fenti tételben s tetszőleges színezés lehet, nem csak egy helyes színezése a csúcsoknak.

3.1.2 Tétel. *Legyen G egy rendes, összefüggő páros gráf és $Z_2 = \{0, 1\}$. Legyen továbbá s egy 2-színezése a G csúcsainak az $\{U_0, U_1\}$ színosztályokkal, ahol $|U_i| = n_i$, $i = 0, 1$. Ha n_1 páros, akkor létezik olyan élsúlyozás Z_2 elemeivel, melyre az indukált csúcs-színezés s.*

Bizonyítás. Kövessük az előző bizonyítás gondolatmenetét, és tegyünk egy élre $h = 1$ súlyt. Ha létezik egy $u \in U_i$ csúcs, amelynek nem megfelelő a színe, akkor n_1 párossága miatt szükségképpen létezik egy u-tól különböző v csúcs, amelynek szintén rossz a színe. Mivel G összefüggő, ezért létezik út u-ból v-be. Adjunk hozzá az út minden éléhez 1-et. Ez az eljárás megtartja a csúcsszínek összegét, valamint minden csúcs színét u és v kivételével, továbbá eggyel növeli a megfelelő színű csúcsok számát. Ennek ismételt alkalmazásával megkaphatjuk a kívánt súlyozást. $\square$

Ezzel beláttuk, hogy 3-színezhető gráfnak van csúcs-színező 3-élsúlyozása. Felmerül a kérdés, hogy hasonló állítás igaz-e páros gráfokra. A válasz sajnos nem, ugyanis könnyen ellenőrizhető, hogy például a C_6 vagy C_{10} gráfoknak nincs ilyen súlyozásuk. A második tétel alapján viszont az alábbi állítást fogalmazhatjuk meg:

3.1.3 Állítás. *Legyen $G = (U, V; E)$ egy rendes, összefüggő páros gráf. Ha $|A|$ vagy $|B|$ páros, akkor G-nek létezik csúcs-színező 2-élsúlyozása.*

4. Élsúlyozások irányított gráfokon

Az eddigiekben irányítatlan gráfok élsúlyozásait vizsgáltuk, de joggal merülhet fel a kérdés, hogy vajon mit tudunk mondani az irányított esetről. Itt két lehetőségünk van egy csúcs színének meghatározására.

Az első esetben a kimenő élek összsúlyából kivonjuk bemenő élek összsúlyát. Erről a változatról Bartnicki, Grytczuk, és Niwczyk [3] bebizonyították, hogy a súlyokat tetszőleges kételemű listákról választva is létezik csúcs-színező élsúlyozás.

A második esetben egy csúcs színét csak a kimenő éleken vett súlyok összege, azaz a csúcs súlyozott kifoka határozza meg. A továbbiakban ezzel az esettel fogunk foglalkozni.

4.1 Csúcs-színező 3-élsúlyozás

Könnyen látható, hogy léteznek olyan digráfok, például a 3 hosszú irányított kör, amelyek helyes színezéséhez nem elegendőek az $\{1, 2\}$ élsúlyok. A következő tétel azt mondja ki, hogy minden irányított gráfnak van csúcs-színező 3-élsúlyozása. Ez abból következik, hogy minden digráfnak van egy alkalmas csúcsa, amely a szomszédai számához képest sok lehetséges súlyozott kifok-értéket vehet fel. Egy ilyen csúcs létezése teljes indukció használatát teszi lehetővé, továbbá a bizonyítás polinomiális idejű algoritmust is eredményez egy csúcs-színező 3-élsúlyozás megtalálására.

4.1.1 Tétel (Baudon, Bensmail, és Sopena [4]). *Minden D digráfra $\chi_e(D) \leq 3$.*

Bizonyítás. A bizonyítás D élszáma szerinti indukcióval történik. Az állítás nyilvánvaló 0 vagy 1 élű digráf esetén. Tegyük fel, hogy legfeljebb $m-1$ élre már igazoltuk a tételt, és legyen $D = (V, A)$ egy $m \geq 2$ élű digráf.

Figyeljük meg, hogy D-nek létezik egy olyan v csúcsa, melyre $\delta(v) > 0$ és $\delta(v) > \varrho(v)$, hiszen különben $\sum\limits_{v \in V} \varrho(v) \neq \sum\limits_{v \in V} \delta(v)$ lenne. Első lépésként töröljünk minden v-ből kilépő élet. Ekkor az indukciós feltevés miatt a fennmaradó digráfnak létezik egy w csúcs-színező 3-élsúlyozása. Tegyük vissza a kitörölt éleket, és terjesszük ki ezekre w-t oly módon, hogy v súlyozott kifoka különbözzön mind a $\delta(v) + \varrho(v)$ szomszédjáétól. Ez megtehető, hiszen $2\delta(v) + 1$ érték közül választhatunk, nevezetesen a $\{\delta(v), \delta(v) + 1, \dots, 3\delta(v)\}$ halmazból, míg a tiltott értékek száma v választása miatt legfeljebb $\varrho(v) + \delta(v) < 2\delta(v) + 1$. Mivel ezen élsúlyok kizárólag a v csúcs súlyozott kifokát befolyásolják, ezért az így kapott kiterjesztett súlyozás a D digráf egy csúcs-színező 3-élsúlyozása. $\square$

Ebben a bizonyításban azt használtuk ki, hogy egy d-edfokú csúcs lehetséges súlyozott kifokainak száma kellően nagy, pontosabban legalább $2d + 1$, amennyiben az éleket az $\{1, 2, 3\}$ számokkal súlyozzuk. Most megmutatjuk, hogy ez a tulajdonság tetszőleges $\{a, b, c\}$ súlyok esetén fennáll, és így egy erősebb tétel is igaz.

4.1.2 Lemma. *Legyen egy D digráfnak v egy legalább d-edfokú csúcsa, valamint a, b és c három valós szám. Ekkor v súlyozott kifoka legalább $2d + 1$ különböző értéket vehet fel D egy tetszőleges élsúlyozásában, amelyben a v-ből kimenő élek súlyai az $\{a, b, c\}$ halmazból kerülnek ki.*

Bizonyítás. A bizonyítás d szerinti indukcióval történik. Amennyiben $d = 1$, úgy a v-ből kilépő él súlya a, b vagy c lehet. Mivel ezek különbözőek, ezért v súlyozott kifokának is 3 különböző értéke lehet.

Tegyük fel, hogy $d \leq i - 1$ esetén már igazoltuk az állítást, és legyen $d = i$. Jelölje D' azt a digráfot, amelyet egy v-ből kilépő vu él elhagyásával kapunk D-ből. Ekkor az indukciós feltevés szerint v súlyozott kifoka legalább $2(d-1)+1$ lehetséges értéket vehet fel D egy tetszőleges élsúlyozásában, amely a v-ből kilépő éleket az $\{a, b, c\}$ számokkal súlyozza. Legyen F' ezen lehetséges értékek halmaza, valamint k és n rendre a legkisebb, illetve legnagyobb eleme F'-nek, továbbá w_K és w_N két élsúlyozása D'-nek, melyekre a v csúcs súlyozott kifoka rendre K, illetve N.

Tegyük fel, hogy $a < b < c$. Amennyiben az állítás igaz az $\{a, b, c\}$ számokra, úgy igaz a $\{-a, -b, -c\}$ számokra is, ezért két eset lehetséges:

1. $0 \leq a < b < c$
2. $a < 0 \leq b < c$

Az első esetben terjesszük ki a D' minden élsúlyozását a D digráfra úgy, hogy a vu élre a súlyt írunk. Ekkor azt kapjuk, hogy az $F = \{x + a : x \in F'\}$ halmaz a v csúcs lehetséges súlyozott kifokainak $2(d - 1) + 1$ elemű halmaza. A fennmaradó két lehetőséget úgy kapjuk, hogy a w_N súlyozást b vagy c értékkel kiterjesztjük a vu élre. Ekkor ugyanis $N + b$ és $N + c$ két újabb lehetséges érték, hiszen $a < b < c$ miatt ezek nincsenek F-ben. Tehát létezik legalább $2d + 1$ választás v súlyozott kifokára.

A második esetben terjesszük ki a D' minden élsúlyozását a D digráfra úgy, hogy a vu élre b súlyt írunk. Ekkor azt kapjuk, hogy az $F = \{x + b : x \in F'\}$ halmaz a v csúcs lehetséges súlyozott kifokainak $2(d - 1) + 1$ elemű halmaza. A fennmaradó két lehetőséget úgy kapjuk, hogy a w_N és w_K súlyozásokat rendre a, illetve c értékkel kiterjesztjük a vu élre. Ezekből azt kapjuk, hogy $K + a$ és $N + c$ két újabb lehetséges érték, amely nem szerepel F-ben a súlyokra vonatkozó feltevés miatt. Ezzel az állítást beláttuk. □

A lemma következményeként azt kapjuk, hogy az előző tétel bizonyításában nem számít, hogy egy csúcsnál mely három súlyt írhatjuk a kimenő élekre. Ez a megfigyelés az alábbi listaszínezési tételhez vezet.

4.1.3 Tétel. *Legyen adott egy D digráf minden v csúcsára egy három valós számból álló $L(v)$ lista. Ekkor D-nek van olyan csúcs-színező élsúlyozása, amelyben minden v csúcsra a kimenő élek súlyai $L(v)$-ből kerülnek ki.*

A probléma egyfajta kiterjesztéseként megkérdezhetjük, hogy melyik az a legkisebb $k \in \{1, 2, 3\}$, melyre minden irányított gráfnak létezik olyan irányítása, amelynek van csúcs-színező k-élsúlyozása. Tudjuk, hogy egy digráfnak pontosan akkor létezik csúcs-színező 1-élsúlyozása, ha bármely két szomszédos pont kifoka különböző. A következő lemma azt mondja ki, hogy minden gráfnak létezik olyan irányítása, amelyre ez teljesül.

4.1.4 Lemma. *Minden G gráfnak létezik olyan irányítása, amelyben bármely két szomszédos csúcs kifoka különböző.*

Bizonyítás. A bizonyítás G pontszáma szerinti indukcióval történik. Az állítás $n \leq 2$ esetén nyilvánvaló. Tegyük fel, hogy legfeljebb $i - 1$ csúcsra már igaz a lemma, és legyen G egy $n = i$ pontú gráf. Jelölje v a legnagyobb fokszámú csúcsot G-ben. Az indukciós feltevés szerint $G' = G - v$ megirányítható úgy, hogy bármely két szomszédos csúcs kifoka különböző legyen. Jelölje az így kapott digráfot D'. Figyeljük meg, hogy v választása miatt D'-ben minden v-vel szomszédos csúcs kifoka legfeljebb $d(v) - 1$. Legyen D a G gráf azon irányítása, amelyet a D' irányításból kapunk oly módon, hogy a v-re illeszkedő éleket mind kifelé irányítjuk. Mivel így v kifoka a D digráfban $d(v)$, és a szomszédos csúcsok kifoka nem változott, ezért a kapott irányítás továbbra is teljesíti a lemma feltételét. □

Ezen lemma ismeretében és a korábbi megfigyelésünk alapján az alábbi tételt fogalmazhatjuk meg:

4.1.5 Tétel. *Minden irányítatlan gráfnak létezik olyan irányítása, amelynek van csúcs-színező 1-élsúlyozása.*

Irodalomjegyzék

[1] L. Addario-Berry, K. Dalal, és B.A. Reed. “Degree constrained subgraphs”. In: *Discrete Applied Mathematics* 156.7 (2008), pp. 1168–1174.

[2] Mohammad hadi Alaeiyan. “The edge-labeling and vertex-colors of K_n”. In: *Mathematical Sciences* 6.1 (2012), p. 45.

[3] Tomasz Bartnicki, Jarosław Grytczuk, és Stanisław Niwczyk. “Weight choosability of graphs”. In: *Journal of Graph Theory* 60.3 (2009), pp. 242–256.

[4] Olivier Baudon, Julien Bensmail, és Eric Sopena. “An oriented version of the 1-2-3 Conjecture”. In: *Discussiones Mathematicae Graph Theory* (2014).

[5] Maciej Kalkowski, Michał Karoński, és Florian Pfender. “Vertex coloring edge weightings with integer weights at most 6”. In: *Rostocker Mathematisches Kolloquium* 64 (2009), pp. 39–43.

[6] Maciej Kalkowski, Michał Karoński, és Florian Pfender. “Vertex-coloring edge-weightings: Towards the 1-2-3-conjecture”. In: *Journal of Combinatorial Theory, Series B* 100.3 (2010), pp. 347–349.

[7] Michał Karoński, Tomasz Łuczak, és Andrew Thomason. “Edge weights and vertex colours”. In: *Journal of Combinatorial Theory, Series B* 91.1 (2004), pp. 151–157.

[8] Mahdad Khatirinejad et al. “Vertex-colouring edge-weightings with two edge weights”. In: *Discrete Mathematics & Theoretical Computer Science* 14.1 (2012).

[9] Hongliang Lu, Qinglin Yu, és Cun-Quan Zhang. “Vertex-coloring 2-edge-weighting of graphs”. In: *European Journal of Combinatorics* 32.1 (2011), pp. 21–27.

[10] Jakub Przybylo és Mariusz Wozniak. “On a 1, 2 Conjecture”. In: *Discrete Mathematics & Theoretical Computer Science* 12.1 (2010), pp. 101–108.

[11] B. Seamone. “The 1-2-3 Conjecture and related problems: a survey”. In: *ArXiv e-prints* (Nov. 2012). arXiv: 1211.5122.

[12] Joanna Skowronek-Kaziów. “1,2 Conjecture—the multiplicative version”. In: *Information Processing Letters* 107.3–4 (2008), pp. 93–95.

[13] Tsai-Lien Wong és Xuding Zhu. “Every graph is (2,3)-choosable”. In: *Combinatorica* (2014), pp. 1–7.