Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar

Vadas Norbert

Élszínezések

alkalmazott matematikus MSc szakdolgozat
operációkutatás szakirány

Témavezető:

Bérczi Kristóf
Operációkutatási Tanszék

Budapest, 2015

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés

1.1 Fogalmak és jelölések

A továbbiakban, hacsak nincs másképp jelezve, minden gráf egyszerű, véges és irányítatlan. Egy $G = (V, E)$ gráfon értelmezett $w : E \to [k] = \{1, \ldots, k\}$ függvényt k-**élsúlyozás**nak nevezünk. Amennyiben a csúcsokhoz is rendelünk súlyokat, azaz $w : V \cup E \to [k]$, akkor k-**teljes-súlyozás**ról beszélünk. Egy csúcs **érték**én vagy **szín**én a rá illeszkedő élek súlyainak, és amennyiben van, a saját súlyának összegét értjük. Az első eset egy másik elnevezése még a **súlyozott fokszám**. Azt mondjuk, hogy egy súlyozás **csúcs-megkülönböztető**, ha bármely két csúcsnak különböző az értéke. Abban az esetben, ha ezt csak szomszédos csúcspárokra követeljük meg, akkor a csúcsok értékei egy helyes színezését adják a gráfnak. Az ilyen súlyozást **csúcs-színező**nek vagy **helyes**nek hívjuk. Adott G gráfra a legkisebb olyan k számot, melyre létezik G-nek csúcs-színező k-élsúlyozása, illetve k-teljes-súlyozása, rendre $\chi_e(G)$-vel, illetve $\chi_t(G)$-vel jelöljük. Végezetül egy gráfra azt mondjuk, hogy **rendes**, ha egyetlen komponense sem izomorf K_2-vel.

1.2 Csúcsok színezése súlyozásokkal

Az 1-2-3-sejtés vizsgálatát a gráfok irregularitásának vizsgálata motiválta. Egy gráf éleinek súlyozását irregulárisnak nevezzük, ha bármely két csúcsra a rájuk illeszkedő éleken vett összeg különböző. Egy gráf irregularitásának erősségén azt a legkisebb k számot értjük, amelyre létezik irreguláris súlyozás az $\{1, \ldots, k\}$ halmazból vett súlyokkal. Ennek a feladatnak egy természetesen adódó egyszerűsítése, ha csak szomszédos csúcsokra követeljük meg azt, hogy különböző legyen az értékük.

A sejtést először Karoński, Łuczak, és Thomason [8] fogalmazta meg 2002-ben, és a következőképpen hangzik:

1.2.1 Sejtés (Az 1-2-3-sejtés). *Minden rendes gráf élei megcímkézhetőek az 1, 2, 3 számokkal oly módon, hogy tetszőleges két szomszédos csúcsra a rájuk illeszkedő éleken lévő számok összege különböző legyen.*

A sejtést megfogalmazása óta sokat vizsgálták. Az eddigi legjobb korlátot Kalkowski, Karoński, és Pfender [7] bizonyította be 2010-ben, mely szerint a helyes színezéshez öt élsúly elegendő. Világos, hogy $\chi_e(G) = 1$ pontosan akkor, ha a szomszédos csúcsok foka különböző. Könnyen látható az is, hogy léteznek olyan rendes gráfok, amelyekre nem elég két élsúly sem. Ilyen például a 3 vagy 6 hosszú kör. Így a legjobb remélhető általános korlát a $\chi_e(G) \leq 3$. Azonban egy aszimptotikus eredmény szerint egy $G(p, n)$ véletlen gráf majdnem biztosan megszínezhető csak az $1, 2$ élsúlyok segítségével [1]. Bizonyos gráfosztályokra már sikerült igazolni a sejtést. Eszerint 3-színezhető [8], illetve teljes gráfok [2] esetén $\chi_e(G) = 3$. Az előbbi eredmény nyomán feltehető az a kérdés, hogy mely páros gráfok esetében elegendő csak az $1, 2$ súlyok közül választani. Lu, Yu, és Zhang [9] cikke szerint a 3-összefüggő, valamint bizonyos fokszám-megkötéseknek eleget tevő páros gráfok ilyenek.

Hasonló sejtést fogalmazott meg teljes-súlyozásokra Przybylo és Wozniak 2008-ban:

1.2.2 Sejtés (Az 1-2-sejtés)**.** *Minden gráf élei és csúcsai megcímkézhetőek az 1, 2 számokkal oly módon, hogy tetszőleges két szomszédos csúcsra a rájuk illeszkedő éleken és magán a csúcson lévő számok összege különböző legyen.*

Ebben a cikkben bebizonyították, hogy $\chi_t(G) \leq 11$, valamint $\chi_t(G) \leq \left(\left\lfloor \frac{\chi(G)}{2} \right\rfloor + 1\right)$. A jelenleg ismert legjobb eredmény szerint $\chi_t(G) \leq 3$.

A csúcs-színező élsúlyozásoknak számos változatát vizsgálták már az elmúlt évtizedben. Az irányított esetben egy digráf éleit súlyozzuk, a csúcsok értékét pedig csak a kifelé vezető éleken vett összeg határozza meg. Ez a probléma lényegesen egyszerűbb, mint az irányítatlan változat, ugyanis itt könnyedén belátható az 1-2-3-sejtéssel analóg állítás [4].

1.2.3 Állítás. *Minden D digráfra $\chi_e(D) = 3$.*

Más változatokban az élsúlyok összege helyett azok szorzata, halmaza, multihalmaza vagy sorozata határozza meg a csúcsok színeit. Emellett élsúlyozás helyett tekinthetünk csúcs-, illetve teljes-súlyozást is. Érdekes kérdés az is, hogy mit mondhatunk abban az esetben, ha a súlyokat nem az $\{1, \dots, k\}$ halmazból, hanem tetszőleges k-elemű listából választhatjuk ki. A különféle változatok eddigi eredményeiről Seamone [11] cikkében olvashatunk bővebben.

Természetesen adódik az a kérdés is, hogy vajon NP-nehéz-e annak eldöntése, hogy egy gráf színezéséhez 2 élsúly elegendő-e. A $\{0, 1\}$ és az $\{1, 2\}$ halmazok esetében, valamint irányított gráfokra a válasz igen, egyéb esetben ez egy nyitott probléma.

1.3 A dolgozat felépítése

A következő fejezetben először az élsúlyozásokkal fogunk foglalkozni. Megvizsgáljuk az 1-2-3-sejtésre vonatkozó legfrissebb eredményeket, melyek szerint minden rendes gráfnak létezik csúcs-színező 6- illetve 5-élsúlyozása. Ezután kitérünk arra az esetre, amelyben irányított gráfokat súlyozunk. Bebizonyítjuk, hogy minden digráfnak létezik csúcs-színező 3-élsúlyozása, valamint azt, hogy minden gráfnak van olyan irányítása, amelynek létezik csúcs-színező 1-élsúlyozása.

Ezt követően a harmadik fejezetben megismerkedünk a teljes-súlyozásokkal és az 1-2-sejtéssel. Belátjuk, hogy minden gráfnak létezik csúcs-színező $\left(\left\lfloor \frac{\chi(G)}{2} \right\rfloor + 1\right)$- illetve 11-teljes-súlyozása. Továbbá megnézünk egy olyan eredményt is, amely a fent említett két sejtés listaszínezés általánosításainak egyfajta közös felső korlátjának tekinthető.

A negyedik fejezetben speciális gráfosztályokat mutatunk be, amelyekre bizonyítani tudjuk a fenti sejtések egyikét. Emellett egy olyan állítást is belátunk, mely szerint a legtöbb gráfnak létezik csúcs-színező 2-élsúlyozása.

Végül az utolsó fejezetben az élsúlyozások komplexitását vizsgáljuk meg. Megmutatjuk, hogy annak eldöntése, hogy egy gráfnak létezik-e csúcs-színező élsúlyozása a $0,\ 1$ valamint az $1,\ 2$ számokkal, NP-teljes.

2. Élsúlyozások és az 1-2-3-sejtés

A sejtéssel kapcsolatban a legfontosabb előrehaladást tetszőleges G gráf esetén a $\chi_e(G)$-re vonatkozó konstans korlátok bevezetése és javítása jelenti. A sejtést először felvető cikkben még csak azt bizonyították, hogy véges sok valós élsúly elegendő, később viszont egész számokra vonatkozó korlátokat is adtak. A jelenleg ismert legjobb eredmény Kalkowski, Karoński, és Pfender nevéhez fűződik, akik a $\chi_e(G) \leq 6$ [6], kicsivel később pedig a $\chi_e(G) \leq 5$ [7] korlátot adták a problémára. A két bizonyítás merőben más eszközöket használ, amelyek önmagukban is említésre érdemesek, ezért a következőkben mindkettőre kitérünk. Ezek után megvizsgáljuk a probléma irányított gráfokra vonatkozó változatát is, amelyről Baudon, Bensmail, és Sopena [4] bebizonyították, hogy tetszőleges D digráfra $\chi_e(D) \leq 3$.

2.1 Csúcs-színező 6-élsúlyozás

Először vizsgáljuk a gyengébb korlátot. Az erre vonatkozó tétel bizonyítása előtt tekintsük a következő lemmát, mely az [6] cikk első szerzőjének egy korábbi eredménye:

2.1.1 Lemma. *Minden összefüggő, rendes G gráfra létezik olyan $f : E(G) \to \{1,2,3\}$ élsúlyozás és $f' : V(G) \to \{0,1\}$ csúcs-súlyozás, melyre a csúcsok $w(v) = f'(v) + \sum_{w \in N(v)} f(vw)$ értéke egy helyes színezés.*

Ennek segítségével egy $\chi_e(G) \leq 10$ korlát adható az élsúlyok megháromszorozásával, majd bizonyos élek 1-gyel történő módosításával. Jelen esetben is egy hasonló eljárást követünk majd, amelyhez szükségünk lesz a lemma egy általánosabb alakjára. Előtte azonban érdemes megjegyezni egy egyszerű következményt. A sejtés vizsgálatánál érdekes kérdés lehet, hogy mit tudunk mondani a rossz élek részgráfjáról, vagyis azon élekről, melyek végpontjai azonos értékűek. A fenti lemma erre is ad egyfajta választ, ugyanis az általa biztosított teljes-súlyozásban minden csúcsra 0-t írva olyan élsúlyozást kapunk, ahol a rossz élek egy páros gráfot alkotnak. Ez a megfigyelés segíthet abban, hogy közelebb jussunk a sejtés bizonyításához vagy cáfolatához. Visszatérve a tételünkhöz, a fenti lemma általánosítása a következőképpen hangzik:

2.1.2 Lemma. *Legyen $\alpha \in \mathbb{R}$ és $\beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Ekkor minden összefüggő, rendes G gráfra és tetszőleges T feszítőfájára létezik olyan $f : E(G) \to \{\alpha - \beta, \alpha, \alpha + \beta\}$ élsúlyozás és f' :*

$V(G) \to \{0,\beta\}$ *csúcs-súlyozás, melyre a csúcsok* $w(v) = f'(v) + \sum_{w \in N(v)} f(vw)$ *értéke egy helyes színezés. Továbbá* f *megválasztható úgy, hogy* $f(e) = \alpha$ *minden* $e \in E(T)$*-re.*

Bizonyítás. Legyen $v_1, v_2, \dots, v_n$ a csúcsoknak egy olyan sorrendje, melyre minden $k \geq 2$-re v_k-ból pontosan egy T-beli él vezet $\{v_1, v_2, \dots, v_{k-1}\}$-be. Kezdetben minden élhez az α súlyt rendeljük, amelyet legfeljebb egyszer módosítunk, hogy sorban minden v_k csúcs értékét véglegesítsük.

Legyen $w(v_1) = \alpha d(v_1)$, és tegyük fel, hogy valamely $k \geq 2$-re már meghatároztuk az f élsúlyokat az $E(G[\{v_1, v_2, \dots, v_{k-1}\}]) \setminus E(T)$ halmazon és az f' csúcs-súlyokat $\{v_1, v_2, \dots, v_{k-1}\}$-en úgy, hogy az első $k-1$ csúcs $w(v_i)$ értéke már végleges.

A v_k csúcs esetén minden $E(v_k, \{v_1, v_2, \dots, v_{k-1}\}) \setminus E(T)$-beli él súlyát módosíthatjuk β-val. Amennyiben $v_k v_i \in E(G) \setminus E(T)$ és $f'(v_i) = 0$, akkor választhatunk $(f(v_k v_i) = \alpha, f'(v_i) = 0)$ és $(f(v_k v_i) = \alpha - \beta, f'(v_i) = \beta)$ között anélkül, hogy megváltoztatnánk $w(v_i)$-t. Hasonlóan, ha $v_k v_i \in E(G) \setminus E(T)$ és $f'(v_i) = \beta$, akkor választhatunk $(f(v_k v_i) = \alpha, f'(v_i) = \beta)$ és $(f(v_k v_i) = \alpha + \beta, f'(v_i) = 0)$ között anélkül, hogy megváltoztatnánk $w(v_i)$-t. Végezetül megválaszthatjuk $f'(v_k)$ értékét is. Ez összesen $|E(v_k, \{v_1, v_2, \dots, v_{k-1}\}) \setminus E(T)| + 2 = |E(v_k, \{v_1, v_2, \dots, v_{k-1}\})| + 1$ különböző lehetőség $w(v_k)$ értékének, melyek közül kiválaszthatjuk azt, amely minden $N(v_k) \cap \{v_1, v_2, \dots, v_{k-1}\}$-beli csúcs értékétől különbözik.

Ezt az eljárást folytatva megkaphatjuk a kívánt súlyozást. □

Ezen lemma birtokában most már készen állunk a tétel bizonyítására.

2.1.3 Tétel (Kalkowski, Karoński, és Pfender [6]). *Minden* G *rendes gráfra* $\chi_e(G) \leq 6$.

Bizonyítás. Feltehető, hogy G összefüggő, különben a komponenseket külön-külön vizsgálhatjuk. Induljunk ki egy tetszőleges T feszítőfából, és vegyünk egy (f, f', w) súlyozást a lemma alapján, $\alpha = 4$ és $\beta = -2$ paraméterekkel. Ekkor minden csúcs és él súlya páros. A bizonyítás hátralévő részében módosítani fogjuk f-et és f'-t, de $w(v)$ változatlan marad minden $v \in V(G)$ csúcsra.

Legyen $H = G[\{v \in v(G) \mid f'(v) = -2\}]$, és ebben H_1 egy maximális feszítő részgráf, melyben a legnagyobb fokszám legfeljebb 2. Adjunk hozzá -1-et $f(e)$-hez a H_1 minden e élére, és módosítsuk $V(H_1)$ minden v csúcsán az $f'(v)$ értéket ennek megfelelően, hogy $w(v)$ változatlan maradjon. Így minden $v \in V(G)$ csúcsra $f'(V) \in \{0, -1, -2\}$, minden $e \in E(G)$ élre $f(e) \in \{1, 2, \dots, 6\}$, továbbá minden $e \in E(T)$ élre $f(e) \in \{3, 4\}$.

Legyen $i \in \{0, 1, 2\}$ esetén $S_i = \{v \in v(G) \mid f'(v) = -i\}$ és $s_i = |S_i|$. Figyeljük meg, hogy minden $v \in S_0 \cup S_2$ csúcs $w(v) - f'(v)$ súlya páros, az S_1-beli csúcsoké pedig páratlan. H_1 maximalitása miatt minden uv élre, ahol $u, v \in S_1 \cup S_2$, teljesül, hogy $u, v \in S_1$ és $uv \in E(H_1)$, hiszen ha nem így lenne, akkor az előző lépésben a H_1 részgráfot tudtuk volna még bővíteni. Részletesebben, ezen élek végpontjaira $w(u) - f'(u) \neq w(v) - f'(v)$. Az ilyen élek halmazát jelölje E^*.

Ha $s_2 = 0$, akkor készen vagyunk, hiszen f jó színezést ad. Amennyiben $s_2 = 1$ és $s_1 = 0$, legyen $u \in S_2$. Figyeljük meg, hogy minden u-ra illeszkedő e él súlya $f(e) \in \{2,4,6\}$. Ha u-nak van egy olyan v szomszédja, melyre $w(u) + 2 \neq w(v)$, akkor az uv és súlyát 1-gyel csökkentve szintén helyes színezéshez jutunk. (Figyeljük meg, hogy csak u és v súlya páratlan.) Ha u minden $v \in N(u)$ szomszédjára $w(u) + 2 = w(v)$ és $|N(u)| \geq 2$, akkor két különböző, u-ra illeszkedő élen is csökkentsük a súlyt 1-gyel. Ez ismét a kívánt súlyozáshoz vezet. Végül, ha az u csúcs egyetlen v szomszédjára $w(u) + 2 = w(v)$, akkor vegyünk egy $x \in N_T(v) \setminus \{u\}$ csúcsot, csökkentsük $f(uv)$-t 1-gyel, $f(vx)$-et pedig növeljük 1-gyel. Így ismét megfelelő súlyozást kapunk.

Ha $s_2 = 1$ és $s_1 \geq 1$, akkor vegyünk egy T-beli utat $u \in S_2$ és egy $v \in S_1$ között, majd felváltva csökkentsük és növeljük az élek súlyát 1-gyel, ügyelve arra, hogy a v-re illeszkedő él súlyát csökkentsük. Ezzel a keresett súlyozáshoz jutunk.

Ha $s_2 \geq 2$, akkor indukcióval beláthatjuk, hogy tudunk találni $\lceil \frac{s_2}{2} \rceil$ olyan T-beli utat, melyek végpontjai pontosan az S_2-beli csúcsok, és amelyek T minden élét legfeljebb kétszer használják. Ilyen utakat $2 \leq s_2 \leq 3$ esetén könnyen találhatunk. Amennyiben $s_2 \geq 4$, úgy keressünk egy olyan $e \in E(T)$ élt, melyre $T - e$ mindkét komponense legalább 2 S_2-beli csúcsot tartalmaz, és legalább az egyikben páros számú ilyen csúcs van. A két komponensre indukciót alkalmazva megtalálhatjuk a keresett utakat.

Felváltva csökkentsük és növeljük ezen utak mentén az élek súlyait úgy, hogy csak a végpontok súlya változzon, és módosítsuk ennek megfelelően az f' értékeket ezeken a csúcsokon. Ha egy $u \in S_2$ csúcs két útnak is végpontja (például, ha s_2 páratlan), akkor ügyeljünk arra, hogy az u-ra illeszkedő mindkét élen csökkentsük a súlyt, hogy $f'(u) = 0$ adódjon. Figyeljük meg, hogy csak $E(T)$-beli éleket használunk, így nem kapunk 1-nél kisebb vagy 6-nál nagyobb élsúlyokat. Ezek után minden csúcsra, amely korábban S_2-ben volt, $f'(v) \in \{-3, -1, 0\}$. Könnyen látható, hogy így az f súlyozást tekintve minden v csúcs értéke $w(v)$, amennyiben $w(v)$ páros. A páratlan értékű csúcsok között futó élek mind E^*-ban vannak, tehát a végpontjaik w súlya különböző, ahogyan azt korábban már láttuk. Így f egy csúcs-színező 6-élsúlyozás. □

2.2 Csúcs-színező 5-élsúlyozás

A gyengébb korlát után most vizsgáljuk meg az eddig ismert legjobb eredményt a sejtéssel kapcsolatban.

2.2.1 Tétel (Kalkowski, Karoński, és Pfender [7]). *Minden G rendes gráfra $\chi_e(G) \leq 5$.*

Bizonyítás. Feltehető, hogy G összefüggő, különben komponensenként érvelhetünk. Feltehető még továbbá az is, hogy $|V| \geq 3$, és létezik olyan v csúcs, melyre $d(v) \geq 2$. Legyen $v_1, v_2, \ldots, v_n$ a csúcsoknak egy olyan sorrendje, melyre $d(v_n) \geq 2$, és minden $1 \leq i \leq n-1$-re v_i-nek van szomszédja $\{v_{i+1}, v_{i+2}, \ldots, v_n\}$-ben.

Kezdetben minden e élhez az $f(e) = 3$ élsúlyt rendeljük, majd legfeljebb kétszer módosítjuk, miközben sorban végighaladunk a csúcsokon. Minden $i < n$-re a v_i csúcshoz hozzárendelünk két színt, $W(v_i) = \{w(v_i), w(v_i) + 2\}$, ahol $w(v_i) \in \{0, 1\}$ mod 4, oly módon, hogy minden $v_j v_i \in E$ élre, ahol $1 \leq j < i$, $W(v_j) \cap W(v_i) = \emptyset$, és biztosítani fogjuk, hogy $f(v_i) = \sum_{u \in N(v_i)} f(uv_i) \in W(v_i)$. Végül beállítjuk a v_n-re illeszkedő élek súlyát úgy, hogy $f(v_n)$ különbözzön $f(v_i)$-től minden $v_i \in N(v_n)$-re.

Ezt szem előtt tartva legyen $f(v_1) = 3d(v_1)$, és válasszuk meg a $W(v_1)$ halmazt úgy, hogy $f(v_1) \in W(v_1)$, valamint $w(v_1) \in \{0, 1\}$ mod 4 teljesüljön. Legyen $2 \leq k \leq n-1$, és tegyük fel, hogy már minden $i < k$-ra meghatároztuk $W(v_i)$-t, valamint

- $f(v_i) \in W(v_i)$, ahol $i < k$
- $f(v_k v_j) = 3$ minden élre, ahol $j > k$
- ha $f(v_i v_k) \neq 3$ valamely élre $i < k$ esetén, akkor vagy $f(v_i v_k) = 2$ és $f(v_i) = w(v_i)$, vagy $f(v_i v_k) = 4$ és $f(v_i) = w(v_i) + 2$.

Ha $v_i v_k \in E$ valamely $i < k$-ra, akkor $f(v_i v_k)$-t 2-vel növelhetjük vagy csökkenthetjük úgy, hogy $f(v_i) \in W(v_i)$ maradjon. Amennyiben v_k-nak d ilyen szomszédja van, úgy ez $d + 1$ lehetséges értéket jelent $f(v_k)$ számára, melyek mind azonos paritásúak. Ezen felül megengedjük még, hogy az $f(v_k v_j)$ súlyt 1-gyel módosítsuk, ahol $j > k$ a legkisebb index, melyre $v_k v_j \in E$. Ezáltal $f(v_k)$ egy $[a, a + 2d + 2]$ intervallum minden egész értékét felveheti. Úgy szeretnénk módosítani a súlyokat és meghatározni $w(v_k)$-t, hogy

1. $f(v_i) \in W(v_i)$, ahol $1 \leq i \leq k$
2. $v_i v_k \in E$ esetén $w(v_i) \neq w(v_k)$, ahol $i < k$
3. vagy $f(v_k) = w(v_k)$ és $f(v_k v_j) \in \{2, 3\}$ vagy $f(v_k) = w(v_k) + 2$ és $f(v_k v_j) \in \{3, 4\}$

teljesüljön. A második feltétel legfeljebb $2d$ értéket zárhat ki az $[a, a + 2d + 2]$ intervallumból, míg a harmadik feltétel csak az a és $a + 2d + 2$ értékeket, hiszen minden más $f(v_k)$ értékre $f(v_k v_j) \neq 3$ esetén lehetőségünk van választani $f(v_k v_j) = 2$ és $f(v_k v_j) = 4$ között. Így legalább egy érték szabadon marad $f(v_k)$ számára.

Ilyen módon lépésről lépésre, konfliktus nélkül meghatározhatjuk a $W(v_k)$ halmazokat minden $k \leq n - 1$-re. Vegyük észre, hogy amikor az $f(v_k)$ érték először változik meg egy $v_k v_i$, $i > k$ él módosítása miatt, akkor $i = j$, vagyis nem okoznak problémát a 2 vagy 4 súlyú élek.

Utolsó lépésként találnunk kell egy szabad értéket v_n-nek. Ez alkalommal nem áll rendelkezésünkre egy $v_n v_j$ segédél, de nem is kell későbbi csúcsok miatt aggódnunk. Az előzőekhez hasonlóan, ha $v_i v_n \in E$ valamely $i < n$-re, akkor $f(v_i v_n)$-t 2-vel növelhetjük vagy csökkenthetjük úgy, hogy $f(v_i) \in W(v_i)$ maradjon. Ezek a módosítások összesen

$d(v_n) + 1 \geq 3$, azonos paritású lehetőséget jelentenek $f(v_n)$ értékének. Így, ha a legkisebb ilyen lehetséges a értékre $a \in \{2,3\}$ mod 4, akkor minden v_n-re illeszkedő élen a kisebb értéket választva a csúcsok egy helyes színezését kapjuk. Ha $a \in \{0,1\}$ mod 4, és létezik olyan $v_i \in N(v_n)$ csúcs, melyre $w(v_i) \neq a$, akkor a $v_i v_n$ élen a nagyobb, minden más élen pedig a kisebb súlyt választva $f(v_n) = a + 2$, ami szintén helyes színezéshez vezet. Végezetül, amennyiben $a \in \{0,1\}$ mod 4 és $w(v_i) = a$ minden $v_i \in N(v_n)$-re, akkor legalább két élen a nagyobb súlyt választva kapunk helyes színezést. Ezzel a tétel állítását beláttuk. □

2.3 Csúcs-színező 3-élsúlyozás irányított gráfokra

Az eddigiekben irányítatlan gráfok élsúlyozásait vizsgáltuk, de joggal merülhet fel a kérdés, hogy vajon mit tudunk mondani az irányított esetről. Itt két lehetőségünk van egy csúcs színének meghatározására.

Az első esetben a kimenő élek összsúlyából kivonjuk a bemenő élek összsúlyát. Erről a változatról Bartnicki, Grytczuk, és Niwczyk [3] bebizonyították, hogy a súlyokat tetszőleges kételemű listákról választva is létezik csúcs-színező élsúlyozás.

A második esetben egy csúcs színét csak a kimenő éleken vett súlyok összege, azaz a csúcs súlyozott kifoka határozza meg. A továbbiakban ezzel az esettel fogunk foglalkozni.

Könnyen látható, hogy léteznek olyan digráfok, például a 3 hosszú irányított kör, amelyek helyes színezéséhez nem elegendőek az $\{1,2\}$ élsúlyok. A következő tétel azt mondja ki, hogy minden irányított gráfnak van csúcs-színező 3-élsúlyozása. Ez abból következik, hogy minden digráfnak van egy alkalmas csúcsa, amely a szomszédai számához képest sok lehetséges súlyozott kifok-értéket vehet fel. Egy ilyen csúcs létezése teljes indukció használatát teszi lehetővé, továbbá a bizonyítás polinomiális idejű algoritmust is eredményez egy csúcs-színező 3-élsúlyozás megtalálására.

2.3.1 Tétel (Baudon, Bensmail, és Sopena [4])**.** *Minden D digráfra $\chi_e(D) \leq 3$.*

Bizonyítás. A bizonyítás D élszáma szerinti indukcióval történik. Az állítás nyilvánvaló 0 vagy 1 élű digráf esetén. Tegyük fel, hogy legfeljebb $m-1$ élre már igazoltuk a tételt, és legyen $D = (V, A)$ egy $m \geq 2$ élű digráf.

Figyeljük meg, hogy D-nek létezik egy olyan v csúcsa, melyre $\delta(v) > 0$ és $\delta(v) > \varrho(v)$, hiszen különben $\sum\limits_{v \in V} \varrho(v) \neq \sum\limits_{v \in V} \delta(v)$ lenne. Első lépésként töröljünk minden v-ből kilépő élet. Ekkor az indukciós feltevés miatt a fennmaradó digráfnak létezik egy w csúcs-színező 3-élsúlyozása. Tegyük vissza a kitörölt éleket, és terjesszük ki ezekre w-t oly módon, hogy v súlyozott kifoka különbözzön mind a $\delta(v) + \varrho(v)$ szomszédjáétól. Ez megtehető, hiszen $2\delta(v) + 1$ érték közül választhatunk, nevezetesen a $\{\delta(v), \delta(v) + 1, \ldots, 3\delta(v)\}$ halmazból, míg a tiltott értékek száma v választása miatt legfeljebb $\varrho(v) +$

$\delta(v) < 2\delta(v)+1$. Mivel ezen élsúlyok kizárólag a v csúcs súlyozott kifokát befolyásolják, ezért az így kapott kiterjesztett súlyozás a D digráf egy csúcs-színező 3-élsúlyozása. □

Ebben a bizonyításban azt használtuk ki, hogy egy d-edfokú csúcs lehetséges súlyozott kifokainak száma kellően nagy, pontosabban legalább $2d+1$, amennyiben az éleket az $\{1,2,3\}$ számokkal súlyozzuk. Most megmutatjuk, hogy ez a tulajdonság tetszőleges $\{a,b,c\}$ súlyok esetén fennáll, és így egy erősebb tétel is igaz.

2.3.2 Lemma. *Legyen egy D digráfnak v egy legalább d-edfokú csúcsa, valamint a, b és c három valós szám. Ekkor v súlyozott kifoka legalább $2d+1$ különböző értéket vehet fel D egy tetszőleges élsúlyozásában, amelyben a v-ből kimenő élek súlyai az $\{a,b,c\}$ halmazból kerülnek ki.*

Bizonyítás. A bizonyítás d szerinti indukcióval történik. Amennyiben $d=1$, úgy a v-ből kilépő él súlya a,b vagy c lehet. Mivel ezek különbözőek, ezért v súlyozott kifokának is 3 különböző értéke lehet.

Tegyük fel, hogy $d \leq i-1$ esetén már igazoltuk az állítást, és legyen $d=i$. Jelölje D' azt a digráfot, amelyet egy v-ből kilépő vu él elhagyásával kapunk D-ből. Ekkor az indukciós feltevés szerint v súlyozott kifoka legalább $2(d-1)+1$ lehetséges értéket vehet fel D egy tetszőleges élsúlyozásában, amely a v-ből kilépő éleket az $\{a,b,c\}$ számokkal súlyozza. Legyen F' ezen lehetséges értékek halmaza, valamint k és n rendre a legkisebb, illetve legnagyobb eleme F'-nek, továbbá w_K és w_N két élsúlyozása D'-nek, melyekre a v csúcs súlyozott kifoka rendre K, illetve N.

Tegyük fel, hogy $a<b<c$. Amennyiben az állítás igaz az $\{a,b,c\}$ számokra, úgy igaz a $\{-a,-b,-c\}$ számokra is, ezért két eset lehetséges:

1. $0 \leq a < b < c$
2. $a < 0 \leq b < c$

Az első esetben terjesszük ki a D' minden élsúlyozását a D digráfra úgy, hogy a vu élre a súlyt írunk. Ekkor azt kapjuk, hogy az $F=\{x+a : x \in F'\}$ halmaz a v csúcs lehetséges súlyozott kifokainak $2(d-1)+1$ elemű halmaza. A fennmaradó két lehetőséget úgy kapjuk, hogy a w_N súlyozást b vagy c értékkel kiterjesztjük a vu élre. Ekkor ugyanis $N+b$ és $N+c$ két újabb lehetséges érték, hiszen $a<b<c$ miatt ezek nincsenek F-ben. Tehát létezik legalább $2d+1$ választás v súlyozott kifokára.

A második esetben terjesszük ki a D' minden élsúlyozását a D digráfra úgy, hogy a vu élre b súlyt írunk. Ekkor azt kapjuk, hogy az $F=\{x+b : x \in F'\}$ halmaz a v csúcs lehetséges súlyozott kifokainak $2(d-1)+1$ elemű halmaza. A fennmaradó két lehetőséget úgy kapjuk, hogy a w_N és w_K súlyozásokat rendre a, illetve c értékkel kiterjesztjük a vu élre. Ezekből azt kapjuk, hogy $K+a$ és $N+c$ két újabb lehetséges érték, amely nem szerepel F-ben a súlyokra vonatkozó feltevés miatt. Ezzel az állítást beláttuk. □

A lemma következményeként azt kapjuk, hogy az előző tétel bizonyításában nem számít, hogy egy csúcsnál mely három súlyt írhatjuk a kimenő élekre. Ez a megfigyelés az alábbi listaszínezési tételhez vezet.

2.3.3 Tétel. *Legyen adott egy D digráf minden v csúcsára egy három valós számból álló $L(v)$ lista. Ekkor D-nek van olyan csúcs-színező élsúlyozása, amelyben minden v csúcsra a kimenő élek súlyai $L(v)$-ből kerülnek ki.*

A probléma egyfajta kiterjesztéseként megkérdezhetjük, hogy melyik az a legkisebb $k \in \{1, 2, 3\}$, melyre minden irányított gráfnak létezik olyan irányítása, amelynek van csúcs-színező k-élsúlyozása. Tudjuk, hogy egy digráfnak pontosan akkor létezik csúcs-színező 1-élsúlyozása, ha bármely két szomszédos pont kifoka különböző. A következő lemma azt mondja ki, hogy minden gráfnak létezik olyan irányítása, amelyre ez teljesül.

2.3.4 Lemma. *Minden G gráfnak létezik olyan irányítása, amelyben bármely két szomszédos csúcs kifoka különböző.*

Bizonyítás. A bizonyítás G pontszáma szerinti indukcióval történik. Az állítás $n \leq 2$ esetén nyilvánvaló. Tegyük fel, hogy legfeljebb $i - 1$ csúcsra már igaz a lemma, és legyen G egy $n = i$ pontú gráf. Jelölje v a legnagyobb fokszámú csúcsot G-ben. Az indukciós feltevés szerint $G' = G - v$ megirányítható úgy, hogy bármely két szomszédos csúcs kifoka különböző legyen. Jelölje az így kapott digráfot D'. Figyeljük meg, hogy v választása miatt D'-ben minden v-vel szomszédos csúcs kifoka legfeljebb $d(v) - 1$. Legyen D a G gráf azon irányítása, amelyet a D' irányításból kapunk oly módon, hogy a v-re illeszkedő éleket mind kifelé irányítjuk. Mivel így v kifoka a D digráfban $d(v)$, és a szomszédos csúcsok kifoka nem változott, ezért a kapott irányítás továbbra is teljesíti a lemma feltételét. □

Ezen lemma ismeretében és a korábbi megfigyelésünk alapján az alábbi tételt fogalmazhatjuk meg:

2.3.5 Tétel. *Minden irányítatlan gráfnak létezik olyan irányítása, amelynek van csúcs-színező 1-élsúlyozása.*

3. Teljes-súlyozások és az 1-2-sejtés

A sejtést felvető cikkükben Przybylo és Wozniak a $\chi_t(G) \le \left\lfloor \frac{\chi(G)}{2} \right\rfloor + 1$, valamint a $\chi_t(G) \le 11$ korlátot bizonyították. Mostani tudásunkkal azonban ez utóbbinál pontosabb korlátokat is tudunk mondani. Először is figyeljük meg, hogy ha egy gráfnak létezik csúcs-színező k-élsúlyozása, akkor létezik csúcs-színező k-teljes-súlyozása is, hiszen a csúcsok súlyát azonosan 1-nek választva jó súlyozást kapunk. Ebből, és a korábbi megfigyeléseinkből következik, hogy minden G gráfra $\chi_t(G) \le 5$. A jelenleg ismert legjobb eredmény szerint $\chi_t(G) \le 3$, amely következik például a 2.1.2 lemmából. Az alábbiakban Przybylo és Wozniak két korlátjának bizonyításával ismerkedünk meg, majd pedig egy olyan eredményt vizsgálunk meg, amely az általunk vizsgát két sejtés listaszínezési változataival kapcsolatos.

3.1 Csúcs-színező $\left(\left\lfloor \frac{\chi(G)}{2} \right\rfloor + 1\right)$-teljes-súlyozás

Először nézzük a kromatikus számmal kapcsolatos eredményt. Ahogyan az élsúlyozások esetében is, úgy a teljes-súlyozásoknál is természetesen adódik az efféle korlátok vizsgálata. A továbbiakban feltesszük, hogy minden gráf összefüggő, különben komponensenként érvelhetünk. Jelölje $c(v)$ a v csúcs összsúlyát. Meglepően könnyen bizonyíthatjuk az alábbi állítást:

3.1.1 Állítás. *Minden G páros gráfra $\chi_t(G) \le 2$.*

Bizonyítás. Rendeljük a gráf éleihez az $1,\ 2$ súlyokat tetszőleges módon. Ezután válasszuk meg a csúcsok súlyát úgy, hogy az egyik színosztályban minden csúcs összsúlya páros, a másik színosztályban pedig páratlan legyen. □

Hasonló gondolatmenettel kapjuk az alábbi, általánosabb megfigyelésünket is:

3.1.2 Állítás. *Legyen adott a G gráf és minden $v \in V(G)$ csúcsra egy t_v szín. Ekkor G-nek létezik olyan 2-teljes-súlyozása, hogy $c(v) \equiv t_v \pmod 2$ minden $v \in V(G)$-re.*

A következőkben egy még általánosabb állítást fogunk igazolni, amelynek segítségével felülről tudjuk majd becsülni $\chi_t(G)$-t a G gráf kromatikus számával.

3.1.3 Lemma. *Legyen adott egy C kör, minden $v \in V(C)$ csúcsra egy t_v szín, és $p \geq 3$ egész. Ekkor C-nek létezik olyan $\left(\left\lfloor \frac{p}{2} \right\rfloor + 1\right)$-teljes-súlyozása, hogy $c(v) \equiv t_v \pmod p$ minden $v \in V(C)$-re.*

Bizonyítás. Legyenek C csúcsai sorban $v_1, v_2, \ldots, v_n$, ahol $n = |C|$. Feltehetjük, hogy minden i-re $t_{v_i} \in [3, p+2]$. Legyen $V(C) = S \cup L$, ahol $v_i \in S$, ha $t_{v_i} \in [3, \left\lfloor \frac{p}{2} \right\rfloor + 2]$, valamint $v_i \in L$, ha $t_{v_i} \in [\left\lfloor \frac{p}{2} \right\rfloor + 3, p+2]$. Jelölje a t_{v_i} színt s_i, ha $v_i \in S$, illetve l_i, ha $v_i \in L$, és legyen $h = \left\lfloor \frac{p}{2} \right\rfloor + 1$. A továbbiakban csak az $1, 2, \ldots, h$ súlyokat fogjuk használni.

Először is figyeljük meg, hogy ha $|L|$ páros, akkor könnyedén megkaphatjuk a kívánt súlyozást. Ehhez elég csak az $1, h$ súlyokat használni az éleken. Kezdetnek legyen $w(v_n v_1) = 1$, és ezután sorban rendeljük hozzá az $1, h$ súlyokat az élekhez oly módon, hogy a v_i-re illeszkedő két él súlya azonos legyen, ha $v_i \in S$, illetve különböző, ha $v_i \in L$. Így a jelenlegi összsúlyok értéke $\mathrm{mod}\ p$ az S-beli csúcsok esetén 1 vagy 2 (p paritásától függően), illetve $\left\lfloor \frac{p}{2} \right\rfloor + 2$ az L-beli csúcsokra. Innen már könnyedén befejezhető a súlyozás a csúcsok súlyainak megválasztásával.

Legyen $|L|$ páratlan, és legyen $v_2 \in L$ egy olyan csúcs, melynek szomszédai, v_1 és v_3, S-beliek. Ha $s_1 - 2 + s_3 - 2 \geq l_2 - h$, akkor létezik $s_1' \in [1, s_1 - 2]$ és $s_3' \in [1, s_3 - 2]$ úgy, hogy $s_1' + s_3' = l_2 - h$. Legyen $w(v_1 v_2) = s_1'$, $w(v_2) = h$ és $w(v_2 v_3) = s_3'$, így elérve, hogy $c(v_2) = l_2$ legyen. Ezután folytassuk a súlyozást a $w(v_n v_1) = w(v_3 v_4) = 1$ választással. Ez megtehető, hiszen $v_n v_1 = v_3 v_4$, amennyiben $C = C_3$. Mivel páros számú súlyozatlan csúcs maradt L-ben, ezért az előbbiekben leírt módszert követve a kívánt súlyozáshoz jutunk. Ha $p + s_1 - 2h + p + s_3 - 2h \leq l_2 - 1$, akkor létezik $s_1' \in [p + s_1 - 2h, h]$ és $s_3' \in [p + s_3 - 2h, h]$ úgy, hogy $s_1' + s_3' = l_2 - 1$. A fentiekhez hasonlóan legyen $w(v_1 v_2) = s_1'$, $w(v_2) = 1$ és $w(v_2 v_3) = s_3'$, amiből kapjuk, hogy $c(v_2) = l_2$. Ezután legyen $w(v_n v_1) = w(v_3 v_4) = h$, és kövessük a fentebb említett módszert, hogy eljussunk a kívánt súlyozáshoz.

Végezetül, legyen továbbra is $|L|$ páratlan, és legyen v_2 és v_3 két egymást követő csúcs L-ben, melyekre $l_2 \leq l_3$. Ekkor $h + l_2 - l_3,\ l_3 - h - 1 \in \{1, 2, \ldots, h\}$, ezért elegendő a súlyokat úgy megválasztani, hogy $w(v_1 v_2) = 1, w(v_2) = h + l_2 - l_3, w(v_2 v_3) = l_3 - h - 1$, $w(v_3) = 1$ és $w(v_3 v_4) = h$, illetve ezáltal $c(v_2) = l_2$ és $c(v_3) = l_3$ legyen. Ezúttal páratlan számú súlyozatlan csúcs marad L-ben, azonban a $v_1 v_2$ és $v_3 v_4$ élek súlyainak köszönhetően ismét be tudjuk fejezni a súlyozást a fentebb említett módszerrel. □

3.1.4 Lemma. *Legyen adott egy G gráf, egy $u \in V(G)$ kijelölt csúcs, minden $v \in V(C)$ csúcsra egy t_v szín, és $p \geq 3$ egész. Ekkor G-nek létezik olyan $\left(\left\lfloor \frac{p}{2} \right\rfloor + 1\right)$-teljes-súlyozása, hogy $c(v) \equiv t_v \pmod p$ minden $v \in V(G) \setminus \{u\}$-ra.*

Bizonyítás. Kezdetben minden csúcs és él súlya legyen 1. Ha létezik olyan $v \in V(G) \setminus \{u\}$ csúcs, melynek színe $\mathrm{mod}\ p$ nem megfelelő, akkor válasszunk egy v-ből u-ba menő utat. A v csúcs és az úton rá illeszkedő él súlyát alkalmasan megválasztva elérhetjük, hogy $c(v) \equiv t_v \pmod p$ teljesüljön. Ezután haladjunk végig az úton, minden lépésben egy csúcs és a rákövetkező él súlyát módosítva úgy, hogy végül az út minden u-tól különböző csúcsának megfelelő legyen a színe $\bmod p$. Figyeljük meg, hogy eközben az úthoz nem tartozó csúcsok összsúlya nem változik. Így eggyel csökkentettük a $V(G) \setminus \{u\}$-beli hibás csúcsok számát, tehát az eljárást ismételve a kívánt súlyozáshoz jutunk. $\square$

3.1.5 Tétel (Przybylo és Wozniak [10]). *Legyen adott egy G összefüggő, nem fa gráf, minden $v \in V(G)$ csúcsra egy t_v szín, és $p \geq 3$ egész. Ekkor G-nek létezik olyan $\left(\left\lfloor \frac{p}{2} \right\rfloor + 1\right)$-teljes-súlyozása, hogy $c(v) \equiv t_v \pmod p$ minden $v \in V(G)$-re.*

Bizonyítás. Mivel G nem fa, ezért tartalmaz egy C kört. Legyen u ennek egy tetszőleges csúcsa. Az előző lemma alapján tudunk találni olyan súlyozást, amelyben minden $v \in V(G) \setminus \{u\}$ csúcs összsúlya megfelelő. Változtassuk meg C minden élének és csúcsának a súlyát 0-ra, és jelölje az így kapott súlyozásban a $v \in V(C)$ csúcs összsúlyát s_v. Innen a 3.1.3 lemmát a $t_v - s_v$ színekre alkalmazva adódik a kívánt súlyozás. $\square$

3.1.6 Következmény. *Minden G gráfra $\chi_t(G) \leq \left\lfloor \frac{\chi(G)}{2} \right\rfloor + 1$.*

Ebből azt is megkaptuk, hogy 3-színezhető gráfokra igaz az 1-2-sejtés.

3.2 Csúcs-színező 11-teljes-súlyozás

Addario-Berry, Dalal, és Reed [1] cikkükben az alábbi tételt bizonyították:

3.2.1 Tétel. *Legyen $G = (V, E)$ egy páros gráf, ahol $V = X \cup Y$. Minden $v \in X$-re legyen $a_v^- = \left\lfloor \frac{d(v)}{2} \right\rfloor$ és legyen $a_v^+ = a_v^- + 1$. Minden $v \in Y$-ra legyen a_v^- és a_v^+ olyan, hogy $a_v^- \leq \left\lfloor \frac{d(v)}{2} \right\rfloor \leq a_v^+$ és $a_v^+ \leq \min\left(\frac{d(v)+a_v^-}{2} + 1,\ 2a_v^- + 1\right)$. Ekkor létezik G-nek egy olyan H feszítő részgráfja, melyre $d_H(v) \in \{a_v^-, a_v^+\}$ minden $v \in V$-re.*

Ezt az eredményt és a cikkben leírt konstrukciót használva belátjuk a következő tételt:

3.2.2 Tétel (Przybylo és Wozniak [10]). *Minden G gráfra $\chi_t(G) \leq 11$.*

Bizonyítás. Legyen G egy összefüggő gráf. A csúcsok egy tetszőleges sorrendjére legyen $F(v_i) = \{v_j \mid v_j \in N(v_i) \text{ és } j > i\}$ és $B(v_i) = \{v_j \mid v_j \in N(v_i) \text{ és } j < i\}$. Nevezzük ezeket rendre a v_i csúcs előre- illetve hátra-szomszédainak. Válasszunk egy olyan sorrendet, amelyre $k = \max\{j : |F(v_i)| > |B(v_i)|,\ i \leq j\}$ maximális. Legyen V_1 az első k csúcs halmaza, a T ideiglenes halmaz pedig álljon a többi csúcsból. Figyeljük meg, hogy k értéke nem csökken, akárhogyan is változtatjuk meg a T csúcsainak sorrendjét. Ezen felül minden $v \in T$ csúcsra $d_T(v) \leq d_{V_1}(v)$, különben v-t a $(k+1)$-edik helyre rakva jobb sorrendet kapnánk.

Ezután alkalmazzuk a fenti eljárást a $G[T]$ gráfra is, egy $V_2 \subseteq T$ halmazhoz és a T csúcsainak egy új sorrendjéhez jutva. Hagyjuk el V_2 csúcsait T-ből, és ismételjük meg az eljárást még kétszer, a V_3 és V_4 halmazokat kapva. Legyen $V_5 = V(G) \setminus (V_1 \cup V_2 \cup V_3 \cup V_4)$. Figyeljük meg, hogy minden $v \in V_i$, $i = 1, 2, 3, 4$ csúcsnak szigorúan kevesebb hátra-szomszédja van, mint előre-szomszédja. A korábbi megfigyelésünk alapján, minden $v \in V_5$ csúcsra $d_{V_2}(v) + d_{V_3}(v) + d_{V_4}(v) + d_{V_5}(v) = d_{V_2 \cup V_3 \cup V_4 \cup V_5}(v) \le d_{V_1}(v)$. Hasonlóan kapjuk, hogy $d_{V_3}(v) + d_{V_4}(v) + d_{V_5}(v) \le d_{V_2}(v)$, $d_{V_4}(v) + d_{V_5}(v) \le d_{V_3}(v)$ valamint $d_{V_5}(v) \le d_{V_4}(v)$, és így $8d_{V_5}(v) \le d_{V_1}(v)$ minden $v \in V_5$-re.

Tekintsük a V_5 és V_1 közötti éleket. Mivel minden $v \in V_5$ csúcsból legalább $8d_{V_5}(v)$ él megy V_1-be, ezért ki tudunk választani ezekből egy olyan részgráfot, amelyben minden $v \in V_5$ csúcsból pontosan $8d_{V_5}(v)$ él megy V_1-be. Jelölje B az így kapott páros gráfot.

Legyen minden $e \in E(G)$-re $w(e) = 2$. Ezután válasszuk meg a csúcsok súlyát úgy, hogy minden $v \in V(G)$-re $3 \le w(v) \le 10$, valamint a csúcsok összsúlya mod 8 az alábbiaknak megfelelő legyen:

V_1	V_2	V_3	V_4	V_5
1	3	5	7	0, 2, 4 vagy 6

Ezt a súlyozást fogjuk módosítani úgy, hogy a szomszédos csúcsok összsúlyai különbözőek legyenek, de továbbra is a kijelölt maradékosztályokba essenek.

Vegyük sorra a $V_1 \cup V_2 \cup V_3 \cup V_4$ csúcsait a korábban rögzített sorrend szerint. Egy $v \in V_i$ csúcsra növeljük meg 8-cal néhány előre-élének súlyát, hogy a v összsúlya különbözzön a V_i-beli hátra-szomszédainak összsúlyától. Ez mindig megoldható, hiszen v-nek legalább eggyel több előre-szomszédja van (nem szükségképpen V_i-ben), mint hátra-szomszédja a V_i halmazban.

Miután sorra vettük a $V_1 \cup V_2 \cup V_3 \cup V_4$ csúcsait, minden $e \in E(G)$ élre és $v \in V(G)$ csúcsra $w(e) \in \{2, 10\}$ illetve $3 \le w(v) \le 10$, továbbá a csúcsok összsúlyai a kijelölt maradékosztályokba tartoznak. Ezen felül minden $V_1 \cup V_2 \cup V_3 \cup V_4$-beli két szomszédos csúcsnak eltérő az összsúlya. A végső lépésben a B éleinek súlyát módosítjuk úgy, hogy a V_5-beli szomszédos csúcsok összsúlya különböző legyen. Először a 3.2.1 tételt az $X = V_1 \cap V(B)$ és $Y = V_5 \cap V(B)$ választással alkalmazva meghatározzuk B egy H részgráfját. Ezután minden $e \in E(B)$ él súlyát megnöveljük 1-gyel, ha $e \in E(H)$, különben csökkentjük 1-gyel. Ez lehetséges, hiszen $w(e) \in \{2, 10\}$. Végül úgy módosítjuk a V_1 csúcsainak súlyát, hogy az összsúlyuk az előző lépéshez képest változatlan maradjon.

Legyen minden $v \in X$-re $a_v^- = \left\lfloor \frac{d_B(v)}{2} \right\rfloor$ és $a_v^+ = a_v^- + 1$, Y csúcsaira pedig válasszuk meg ezeket a következő módon. Haladjunk végig az Y csúcsain tetszőleges sorrendben. Minden $v \in Y$-ra legyen $a_v^- \in \left[\frac{d_B(v)}{4}, \frac{d_B(v)}{2} \right]$ (az intervallum végpontjai egészek, hiszen $d_B(v)$ osztható 8-cal), és legyen $a_v^+ = a_v^- + \frac{d_B(v)}{4} + 1$. Itt olyan értéket válasszunk, hogy v minden már feldolgozott $u \in V_5$ szomszédjára, minden $a_v \in \{a_v^-, a_v^+\}$-ra és minden $a_u \in \{a_u^-, a_u^+\}$-ra $c(v) + a_v - (d_B(v) - a_v) \ne c(u) + a_u - (d_B(u) - a_u)$, ahol $c(v)$ a v csúcs összsúlya ($c(v) + a_v - (d_B(v) - a_v)$ pedig a v összsúlya az eljárás végén). Ez megvalósítható, mivel v minden korábban feldolgozott szomszédja legfeljebb két lehetséges értéket zárhat ki a_v^- számára, és összesen $2d_{V_5}(v)+1$ választásunk van.

Ezen fokszámok kielégítik a 3.2.1 tétel feltételeit. Ez könnyedén látszik az X halmaz csúcsainak esetében. Szintén világos, hogy minden $v \in Y$-ra $a_v^- \leq \left\lfloor \frac{d_B(v)}{2} \right\rfloor \leq a_v^+$, tehát csak azt kell megmutatni, hogy minden $v \in Y$-ra $a_v^+ \leq \min\left(\frac{d_B(v)+a_v^-}{2}+1,\ 2a_v^-+1\right)$. Mivel $a_v^- \leq \frac{d_B(v)}{2}$, ezért $a_v^+ = a_v^- + \frac{d_B(v)}{4} + 1 = \frac{d_B(v)}{4} + \frac{a_v^-}{2} + \frac{a_v^-}{2} + 1 \leq \frac{d_B(v)}{2} + \frac{a_v^-}{2} + 1$. Másrészről, mivel $a_v^- \geq \frac{d_B(v)}{4}$, ezért $a_v^+ = a_v^- + \frac{d_B(v)}{4} + 1 = 2a_v^- + 1$. Tehát B-nek létezik olyan H részgráfja, hogy a B gráf élein elvégezve a korábban említett módosításokat a V_5-beli szomszédos csúcsok összsúlya különböző lesz. Vegyük észre, hogy ezek a változások módosíthatják a V_1-beli csúcsok összsúlyát, 1-gyel vagy 2-vel növelve, vagy 1-gyel csökkentve azt ($d_B(v)$ paritásától és a_v^- vagy a_v^+ választásától függően). Ez azonban könnyedén ellensúlyozható $w(v)$ ennek megfelelően történő növelésével vagy csökkentésével, hiszen minden $v \in V_1$-re $3 \leq w(v) \leq 10$.

Vegyük észre, hogy V_5 csúcsainak összsúlya $\bmod 8$ a korábban előírtaknak megfelelő, azaz páros marad, továbbá minden $v \in V)G$-re és $e \in E(G)$-re $w(v),\ w(e) \in \{1,\dots,11\}$, tehát egy csúcs-színező 11-teljes-súlyozást kaptunk. □

3.3 Minden gráf (2, 3)-választható

A következőkben egy teljes-súlyozásokra vonatkozó eredménnyel ismerkedünk meg, amely a 6-élsúlyozási tétel bizonyításához felhasznált 2.1.2 lemma egy listasúlyozási változata, amely Wong és Zhu [12] cikkében jelent meg.

Legyen egy G gráfra $\psi : V(G) \cup E(G) \to \{1,2,\dots\}$. Azt mondjuk, hogy L egy ψ-lista hozzárendelés, ha minden $z \in V(G) \cup E(G)$-re $L(z)$ valós számoknak egy $\psi(z)$ elemű listája. Azt mondjuk, hogy a G gráf ψ-választható, ha tetszőleges ψ-lista hozzárendelésre G-nek létezik olyan ϕ csúcs-színező teljes-súlyozása, melyre $\phi(z) \in L(z)$ minden $z \in V(G) \cup E(G)$ esetén. Amennyiben minden $v \in V)G$-re $\psi(v) = k$ és minden $e \in E(G)$-re $\psi(e) = l$, úgy a G gráfot (k,l)-választhatónak nevezzük.

Az 1-2-3- illetve 1-2-sejtés erősítéseként felmerült az a feltételezés, miszerint minden gráf $(1,3)$-, valamint $(2,2)$-választható. Wong és Zhu cikke előtt azonban nem volt ismert olyan k és l konstans, melyekre minden gráf (k,l)-választható lenne. Az viszont továbbra is nyitott kérdés, hogy létezik-e olyan k illetve l konstans, melyekre minden gráf $(1,l)$- illetve $(k,2)$-választható.

Az alábbiakban azt fogjuk belátni, hogy minden gráf $(2,3)$-választható. A bizonyításhoz algebrai eszközöket fogunk használni, valamint az Alon-féle kombinatorikus nullhelytételt.

Rendeljünk minden $z \in V \cup E$-hez egy x_z változót, és legyen D egy tetszőleges irányítása G-nek. Tekintsük az alábbi polinomot:

$$P_G(\{x_z : z \in V \cup E\}) = \prod_{e=uv \in E(D)} \left(\left(\sum_{e \in E(u)} x_e + x_u \right) - \left(\sum_{e \in E(v)} x_e + x_v \right) \right) \tag{3.1}$$

Legyen x_z értéke $\phi(z)$, és tekintsünk erre z súlyaként. Jelölje a fenti polinom értékét az $x_z = \phi(z)$ behelyettesítésnél $P_G(\phi)$. Így ϕ a G gráf egy helyes teljes-súlyozása pontosan akkor, ha $P_G(\phi) \neq 0$.

A G egy indexfüggvénye egy olyan η leképezés, amely a gráf minden z éléhez és csúcsához egy $\eta(z)$ nemnegatív egész számot rendel. Egy η indexfüggvény érvényes, ha $\sum_{z \in V \cup E} \eta(z) = |E|$. Vegyük észre, hogy $|E|$ épp a P_G polinom foka. Egy η érvényes indexfüggvényre legyen c_η a $\prod_{z \in V \cup E} x_z^{\eta(z)}$ monom együtthatója P_G kifejtésében. A kombinatorikus nullhelytétel ismeretében tudjuk, hogy ha $c_\eta \neq 0$, és $L(z)$ minden $z \in V \cup E$-re valós számok egy $\eta(z) + 1$ elemű listája, akkor létezik egy olyan ϕ hozzárendelés, hogy minden z-re $\phi(z) \in L(z)$ és $P_G(\phi) \neq 0$.

Egy η indexfüggvény nem-szinguláris, ha létezik egy olyan $\eta' \leq \eta$ (azaz $\eta'(z) \leq \eta(z)$ minden z-re) érvényes indexfüggvény, melyre $c_{\eta'} \neq 0$. A következő tétel a problémakör fő eredménye:

3.3.1 Tétel. *Minden $G = (V, E)$ gráfnak létezik olyan nem-szinguláris η indexfüggvénye, melyre $\eta(v) \leq 1$ $\forall v \in V$ és $\eta(e) \leq 2$ $\forall e \in E$.*

A fentiek alapján ebből a tételből következik, hogy minden gráf $(2, 3)$-választható. Írjuk fel a P_G polinomot az alábbi alakban:

$$P_G(\{x_z : z \in V \cup E\}) = \prod_{e \in E(D)} \sum_{z \in V \cup E} A_G[e, z] x_z \tag{3.2}$$

Könnyen ellenőrizhető, hogy ekkor $e = (u, v) \in E$ és $z \in V \cup E$ esetén

$$A_G[e, z] = \begin{cases} 1 & \text{ha } z = u \text{, vagy } z \neq e \text{ egy } u\text{-ra illeszkedő él} \\ -1 & \text{ha } z = v \text{, vagy } z \neq e \text{ egy } v\text{-re illeszkedő él} \\ 0 & \text{különben} \end{cases} \tag{3.3}$$

Itt A_G egy mátrix, amelynek sorait G éleivel, az oszlopait pedig G csúcsaival és éleivel indexeljük. Legyen $z \in V \cup E$ esetén $A_G(z)$ az A_G mátrix z által indexelt oszlopa. A G gráf egy η indexfüggvényére legyen $A_G(\eta)$ az a mátrix, amely minden $A_G(z)$ oszlopból $\eta(z)$ darabot tartalmaz. Tudjuk, hogy egy η érvényes indexfüggvényre $c_\eta \neq 0$ akkor és csak akkor, ha $\mathrm{per}(A_G(\eta)) \neq 0$, ahol $\mathrm{per}(A)$ az A négyzetes mátrix permanensét jelöli. Ez azt jelenti, hogy η pontosan akkor nem-szinguláris, ha $\mathrm{per}(A_G(\eta)) \neq 0$.

Egy $m \times m$-es A mátrixra $\mathrm{per}(A) = \sum_{\sigma \in S_m} A[i, \sigma(i)]$, ahol S_m az m-edrendű szimmetrikus csoport. A definícióból következik, hogy egy mátrix permanense multi-lineáris az oszlopvektorain és a sorvektorain is. Ha C az A mátrix egy oszlopa, amely $C = \alpha C' + \beta C''$ alakban áll elő, továbbá az A' és A'' mátrixok a C oszlop C'-re illetve C''-re cserélésével adódnak A-ból, akkor $\mathrm{per}(A) = \alpha\mathrm{per}(A') + \beta\mathrm{per}(A'')$.

Tegyük fel, hogy A egy négyzetes mátrix, amelynek oszlopai az A_G oszlopainak lineáris kombinációi. Legyen $\eta_A(z)$ az az indexfüggvény, amely minden $z \in V \cup E$-hez A azon oszlopainak számát rendeli, amelyek előállításában $A_G(z)$ nem-nulla együtthatóval szerepel. Vegyük észre, hogy A_G oszlopvektorai nem lineárisan függetlenek. Mivel A oszlopai többféleképpen is felírhatóak A_G oszlopainak lineáris kombinációjaként, ezért az A mátrix nem határozza meg egyértelműen a η_A indexfüggvényt. A továbbiakban azonban minden esetben, amikor ezt a jelölést használjuk, az A mátrix oszlopainak egy adott előállítására utalunk, amely a szövegkörnyezetből nyilvánvaló.

A fenti tétel bizonyításához elég egy olyan A négyzetes mátrixot találni, amelynek az oszlopai oly módon állnak elő, hogy minden v csúcsra $\eta_A(v) \leq 1$ és minden e élre $\eta_A(e) \leq 2$.

Most már készen állunk a tétel bizonyítására, és rögtön egy kicsivel erősebb állítást fogunk igazolni.

3.3.2 Tétel (Wong és Zhu [12])**.** *Legyen $G = (V, E)$ egy összefüggő gráf és F egy feszítőfája. Ekkor létezik egy olyan A mátrix, amelynek az oszlopai A_G oszlopainak olyan lineáris kombinációi, hogy $\mathrm{per}(A) \neq 0$, $\eta_A(v) \leq 1$ minden $v \in V$-re, $\eta_A(e) = 0$ minden $e \in E(F)$-re és $\eta_A \leq 2$ minden $e \in E \setminus E(F)$-re.*

Bizonyítás. Figyeljük meg, hogy ez a tétel ekvivalens azzal az állítással, hogy G-nek létezik olyan η érvényes indexfüggvénye, amelyre

- $\mathrm{per}(A_G(\eta)) \neq 0$
- $\eta(v) \leq 1$ minden $v \in V$-re
- $\eta(e) \leq 2$ minden $e \in E$-re
- $\eta(e) = 0$ minden $e \in E(F)$-re

Tegyük fel, hogy a tétel nem igaz, és legyen G egy minimális ellenpélda. Világos, hogy G összefüggő és $|V| \leq 3$.

Legyen u egy olyan csúcsa a G gráfnak, amely levél F-ben. Legyen továbbá $N(u) = \{u_1, u_2, \dots, u_k\}$ valamint $e_i = uu_i$, $1 \leq i \leq k$. Hagyjuk el az u csúcsot G-ből, és jelöljük az így kapott gráfot G'-vel. A feltevésünk miatt G'-nek létezik olyan η' érvényes indexfüggvénye, melyre $\mathrm{per}(A_{G'}(\eta')) \neq 0$, $\eta'(v) \leq 1$ minden $v \in V(G')$-re, $\eta'(e) \leq 2$ minden $e \in E(G')$-re és $\eta(e) = 0$ minden $e \in E(F - u)$-ra.

Legyen $|E(G)| = m$ és $|E(G')| = m' = m - k$. Tekintsünk η'-re G indexfüggvényeként, $z \in (V(G) \cup E(G)) \setminus (V(G') \cup E(G')$ esetén $\eta'(z) = 0$ választással. Ekkor $A_G(\eta')$ egy $m \times m'$ méretű mátrix A_G oszlopaiból. Legyen $\eta = \eta'$ azzal a különbséggel, hogy $\eta(u) = k$. Így $A_G(\eta)$ egy $m \times m$-es mátrix, amely $A_G(\eta')$-ből az $A_G(u)$

oszlop k másolatának hozzávételével adódik. Ezen új oszlopoknak k sora (amelyek az u-ra illeszkedő élekkel indexeltek) csupa 1-esből áll, a többi elemük pedig mind 0. Ezáltal $\mathrm{per}(A_G(\eta)) = \mathrm{per}(A_{G'}(\eta'))k!$, és így $\mathrm{per}(A_G(\eta)) \neq 0$.

Legyen $M_0 = A_G(\eta)$, és minden $1 \leq i \leq k-1$-re $M_i = M_{i-1}$, ha $\eta'(u_i) = 0$. Amennyiben $\eta'(u_i) = 1$, akkor M_i legyen az a mátrix, amelyet az M_{i-1}-ből az $A_G(u_i)$ oszlop $A_G(e_i)$-re cserélésével kapunk.

3.3.3 Állítás. *Minden* $1 \leq i \leq k$ *esetén* $\mathrm{per}(M_i) = \mathrm{per}(M_{i-1})$.

Bizonyítás. Amennyiben $\eta'(u_i) = 0$, úgy $M_i = M_{i-1}$, és nincs mit bizonyítanunk. Ezért tegyük fel, hogy $\eta'(u_i) = 1$. Legyen M_i' az a mátrix, amelyet az M_{i-1}-ből az $A_G(u_i)$ oszlop $A_G(u)$-ra cserélésével kapunk. Ebben a mátrixban az $A_G(u)$ oszlop $k+1$-szer szerepel. Ezen oszlopok k sora csupa 1-es, minden más elemük 0. Ezáltal $\mathrm{per}(M_i') = 0$. Mivel $A_G(e_i) = A_G(u_i) + A_G(u)$, ezért $\mathrm{per}(M_i) = \mathrm{per}(M_{i-1}) + \mathrm{per}(M_i') = \mathrm{per}(M_{i-1})$. □

Figyeljük meg, hogy $M_{k-1} = A_G(\tau)$ a G gráf minden olyan τ indexfüggvényére, amelyre

- $\tau(u_i) = 0$, $\tau(u) = k$ és $\tau(v) \leq 1$ minden más $v \in V(G)$ csúcsra
- $\tau(e_i) \leq 1$ minden $1 \leq i \leq k-1$-re, $\tau(e) = 0$ minden $e \in F$-re és $\tau(e) \leq 2$ minden más $e \in E(G)$ élre

Cseréljük ki az $A_G(u)$ oszlop $k-1$ másolatát az $A_G(e_i) - A_G(u_i)$ oszlopokra, ahol $1 \leq i \leq k-1$. Jelölje az így kapott mátrixot A. Ez a mátrix megegyezik $A_G(\tau)$-val, hiszen minden $1 \leq i \leq k-1$-re $A_G(u) = A_G(e_i) - A_G(u_i)$. Ebben az új formában azonban $\eta_A(v) \leq 1$ minden $v \in V(G)$-re, $\eta_A(e) \leq 2$ minden $e \in E(G)$-re és $\eta_A(e) = 0$ minden $e \in E(F)$-re. Mivel $\mathrm{per}(A) = \mathrm{per}(A_G(\tau)) = \mathrm{per}(A_G(\eta)) \neq 0$, ezért a tételt beláttuk. □

3.3.4 Következmény. *Minden gráf* $(2,3)$*-választható.*

Ennél egy kicsivel több is igaz. Legyen G egy összefüggő gráf, F pedig egy feszítőfája. Legyen továbbá minden $v \in V(G)$-re $\psi(v) = 2$, minden $e \in E(F)$-re $\psi(e) = 1$ és minden $e \in E(G) \setminus E(F)$-re $\psi(e) = 3$. Ekkor a G gráf ψ-választható.

4. Pontos eredmények speciális gráfokra

Habár egyik általunk vizsgált sejtést sem sikerült még bizonyítani, bizonyos gráfosztályokra már belátták, hogy létezik csúcs-színező 3-élsúlyozásuk, illetve 2-teljes súlyozásuk. A továbbiakban ezeket fogjuk megvizsgálni.

4.1 Csúcs-színező $\chi(G)$-élsúlyozás

Az első ilyen típusú eredmény az 1-2-3-sejtést először felvető cikkből [8] származik. Ez azt mondja ki, hogy egy k-színezhető gráf élei megsúlyozhatóak egy k-adrendű Abel-csoport elemeivel csúcs-színező módon, amennyiben k páratlan. Ebből rögtön következik, hogy minden 3-színezhető gráfra igaz az 1-2-3-sejtés. Az alábbi két tétel ezen eredmény módosítása, melyet Lu, Yu, és Zhang [9] cikkében olvashatunk.

4.1.1 Tétel. *Legyen G egy összefüggő nem-páros gráf és $\Gamma = \{g_1, g_2, \dots, g_k\}$ egy véges Abel-csoport, ahol $k = |\Gamma|$. Legyen továbbá s egy k-színezése a G csúcsainak az $\{U_1, U_2, \dots, U_k\}$ színosztályokkal, ahol $|U_i| = n_i$, $1 \le i \le k$. Ha létezik olyan $h \in \Gamma$, melyre $n_1 g_1 + \dots + n_k g_k = 2h$, akkor létezik olyan élsúlyozás Γ elemeivel, melyre az indukált csúcs-színezés s.*

Bizonyítás. Legyen s egy k-színezés a $g_1, g_2, \dots, g_k$ színekkel és az $\{U_1, U_2, \dots, U_k\}$ színosztályokkal, melyre $n_1 g_1 + \dots + n_k g_k = 2h$.

Tegyünk egy élre h súlyt, a többire pedig 0-t, így a csúcsszínek összege $2h$. A következőkben ezt az élsúlyozást fogjuk módosítani úgy, hogy közben ez az összeg ne változzon, amíg minden U_i-beli csúcs színe g_i nem lesz, $1 \le i \le k$-ra. Tegyük fel, hogy létezik egy $u \in U_i$ csúcs, amelynek a $g \ne g_i$ színe nem megfelelő. Mivel $n_1 g_1 + \dots + n_k g_k = 2h$, ezért szükségképpen létezik egy u-tól különböző v csúcs, amelynek szintén rossz a színe. Válasszunk egy páros hosszú sétát u-ból v-be. Ez mindig megtehető, mivel G nem-páros és $k \ge 3$. Adjuk hozzá a séta éleihez felváltva a $g_i - g$ illetve a $g - g_i$ értéket. Ez az eljárás megtartja a csúcsszínek összegét, valamint minden csúcs színét u és v kivételével, továbbá eggyel növeli a megfelelő színű csúcsok számát. Ennek ismételt alkalmazásával megkaphatjuk a kívánt súlyozást. □

Érdemes megjegyezni, hogy a fenti tételben s tetszőleges színezés lehet, nem csak egy helyes színezése a csúcsoknak.

4.1.2 Tétel. *Legyen G egy rendes, összefüggő páros gráf és $Z_2 = \{0, 1\}$. Legyen továbbá s egy 2-színezése a G csúcsainak az $\{U_0, U_1\}$ színosztályokkal, ahol $|U_i| = n_i$, $i = 0, 1$. Ha n_1 páros, akkor létezik olyan élsúlyozás Z_2 elemeivel, melyre az indukált csúcs-színezés s.*

Bizonyítás. Kövessük az előző bizonyítás gondolatmenetét, és tegyünk egy élre $h = 1$ súlyt. Ha létezik egy $u \in U_i$ csúcs, amelynek nem megfelelő a színe, akkor n_1 párossága miatt szükségképpen létezik egy u-tól különböző v csúcs, amelynek szintén rossz a színe. Mivel G összefüggő, ezért létezik út u-ból v-be. Adjunk hozzá az út minden éléhez 1-et. Ez az eljárás megtartja a csúcsszínek összegét, valamint minden csúcs színét u és v kivételével, továbbá eggyel növeli a megfelelő színű csúcsok számát. Ennek ismételt alkalmazásával megkaphatjuk a kívánt súlyozást. □

Ezzel beláttuk, hogy 3-színezhető gráfnak van csúcs-színező 3-élsúlyozása. Felmerül a kérdés, hogy hasonló állítás igaz-e páros gráfokra. A válasz sajnos nem, ugyanis könnyen ellenőrizhető, hogy például a C_6 vagy C_{10} gráfoknak nincs ilyen súlyozásuk. A második tétel alapján viszont az alábbi állítást fogalmazhatjuk meg:

4.1.3 Állítás. *Legyen $G = (U, V; E)$ egy rendes, összefüggő páros gráf. Ha $|A|$ vagy $|B|$ páros, akkor G-nek létezik csúcs-színező 2-élsúlyozása.*

4.2 Teljes gráfokra $\chi_t(G) = 2$

Most megmutatjuk, hogy teljes gráfoknak létezik csúcs-színező 2-teljes-súlyozásuk.

4.2.1 Állítás. *Minden G teljes gráfra $\chi_t(G) = 2$.*

Bizonyítás. Teljes indukciót használva megadjuk K_n egy olyan teljes-súlyozását az 1, 2 számokkal, melyben a csúcsok összsúlya n egymást követő egész n-től $2n - 1$-ig vagy $n + 1$-től $2n$-ig. $n = 2$ esetén ez triviális.

Legyen $n \geq 3$, és tegyük fel, hogy K_{n-1}-re már találtunk egy ilyen súlyozást. Adjunk hozzá a gráfhoz egy új v csúcsot, minden más csúccsal összekötve. Figyeljük meg, hogy a K_{n-1} csúcsainak összsúlyai egymást követő egészek az $[n-1, 2n-2]$ intervallumban. Amennyiben a legnagyobb közülük $2n-3$, úgy legyen a v csúcs és minden rá illeszkedő él súlya 2. Ezzel a K_n csúcsainak összsúlya n különböző egész az $[n+1, 2n]$ intervallumból. Hasonlóan, ha a K_{n-1} legnagyobb összsúlya $2n-2$, akkor a v csúcs és minden rá illeszkedő él súlyát 1-nek választva szintén megfelelő súlyozást kapunk. □

4.3 4-reguláris gráfokra $\chi_t(G) = 2$

A korábbi eredményeink segítségével 4-reguláris gráfokra is be tudjuk bizonyítani az 1-2-sejtést.

4.3.1 Tétel. *Minden G 4-reguláris gráfra $\chi_t(G) = 2$*

Bizonyítás. Legyen G egy összefüggő, 4-reguláris gráf. Amennyiben $G = K_5$ vagy $\chi(G) \leq 3$, úgy az előző tétel, illetve a 3.1.6 következmény alapján készen vagyunk. Így Brooks tétele miatt feltehetjük, hogy $\chi(G) = 4$. Válasszuk meg úgy az A, B, C, D színosztályokat, hogy A a lehető legnagyobb legyen, ezen belül B is a lehető legnagyobb legyen, ezen belül C is a lehető legnagyobb legyen, végül ezen belül D is a lehető legnagyobb legyen. Ennek következtében minden $B \cup C \cup D$-beli csúcsnak van legalább egy szomszédja A-ban, minden $C \cup D$-beli csúcsnak van legalább egy szomszédja B-ben, és minden D-beli csúcsnak van legalább egy szomszédja C-ben. Legyen $D = D_1 \cup D_2$, ahol $v \in D_i$, ha v-nek pontosan i szomszédja van A-ban. Jelölje továbbá $X, Y \in V(G)$ esetén $E(X, Y)$ az X és Y között húzódó éleket. Definiáljunk egy w súlyozást a következő módon.

Legyen az $E(A, B \cup C \cup D)$-beli élek súlya 2, az $E(D, B \cup C)$-belieké 1, az $A \cup D_2$-beli csúcsoké 2, a D_1-belieké pedig 1. Így a $G[B \cup C]$ részgráf súlyozatlan marad, míg $v \in A$ esetén $c(v) = 10$, $v \in D_1$ esetén $c(v) = 6$ és $v \in D_2$ esetén $c(v) = 8$. Minden $xy \in E(B, C)$ élre, ahol $y \in C$, tegyünk 2 súlyt, ha az y csúcsnak van szomszédja D_1-ben, különben pedig 1-et. Ezután válasszuk meg minden B-beli csúcs súlyát úgy, hogy az összsúlyuk páratlan legyen. Mivel mindegyikre illeszkedik legalább egy $E(B, A)$-beli él 2 súllyal, ezért $c(u) \in \{7, 9\}$ minden $u \in B$-re. Ezzel az $A \cup B \cup D$-beli szomszédos csúcsok már eltérő összsúlyúak.

Figyeljük meg, hogy egy tetszőleges $v \in C$ csúcsra legalább egy ($E(C, A)$-beli) él illeszkedik 2 élsúllyal, és legalább egy, amelynek a súlya 1. Tekintsük a v-re illeszkedő négy élt. Ha közülük háromnak 1 a súlya, azaz $N(v) \cap D_1 = \emptyset$, akkor legyen $w(v) = 1$, és így $c(v) = 6$. Amennyiben legalább kettőnek 2 a súlya, és $N(v) \cap D_2 = \emptyset$, úgy válasszuk meg $w(v)$-t oly módon, hogy $c(v) = 8$ teljesüljön. Végül, ha legalább kettőnek 2 a súlya, és létezik egy $y \in N(v) \cap D_2$ csúcs, akkor a konstrukció miatt $w(y) = 2$, $w(yv) = 1$ és v-nek pontosan egy szomszédja van B-ben, az x csúcs. Sőt, pontosan két v-re illeszkedő él súlya 1. Ha $c(x) = 9$, akkor legyen $w(v) = 1$, és így $c(v) = 7$. Különben, ha $c(x) = 7$, akkor legyen $w(y) = 1$, $w(yv) = 2$ és $w(v) = 2$. Így y összsúlya változatlan marad, míg $c(v) = 9$.

Minden C-beli csúcsot a fentieknek megfelelően súlyozva csúcs-színező súlyozást kapunk. □

4.4 Majdnem minden gráfra $\chi_e(G) = 2$

Tekintsük az alábbi tételt, melyet megtalálunk Addario-Berry, Dalal, és Reed [1] cikkében:

4.4.1 Tétel. *Legyen adott egy $G = (V, E)$ gráf, és minden $v \in V$ csúcsra a_v^-, a_v^+ egészek, melyekre $a_v^- \leq \left\lfloor \frac{d(v)}{2} \right\rfloor \leq a_v^+ < d(v)$ és $a_v^+ \leq \min\left(\frac{d(v)+a_v^-}{2}, 2a_v^- + 3\right)$. Ekkor létezik G-nek egy olyan H feszítő részgráfja, melyre $d_H(v) \in \{a_v^-, a_v^- + 1, a_v^+, a_v^+ + 1\}$ minden $v \in V$-re.*

Ennek segítségével a következő tételhez jutunk, amely azt mondja ki, hogy a legtöbb gráfnak létezik csúcs-színező 2-élsúlyozása.

4.4.2 Tétel (Addario-Berry, Dalal, és Reed [1])**.** *Legyen G egy véletlen gráf $G_{n,p}$ eloszlással, ahol $p \in (0,1)$ konstans. Ekkor G-nek aszimptotikusan majdnem biztosan létezik csúcs-színező 2-élsúlyozása. Valójában G-nek létezik olyan csúcs-színező 2-élsúlyozása, hogy két szomszédos csúcs összsúlya különböző* $\bmod 2\chi(G)$.

Bizonyítás. Legyen G egy véletlen gráf $G_{n,p}$ eloszlással, és legyen $\varepsilon > 0$ adott. Gráfelméletből tudjuk, hogy

- aszimptotikusan majdnem biztosan $\min_v d(v) > (p - \varepsilon)n$
- aszimptotikusan majdnem biztosan $\chi(G) < \dfrac{\log\left(\frac{1}{1-p}\right)}{2-\varepsilon} \cdot \dfrac{n}{\log n}$

Ezekből következik, hogy aszimptotikusan majdnem biztosan $2\chi(G) < \min_v \frac{d(v)}{6}$. Ezt az egyenlőtlenséget feltéve elkészítjük G egy csúcs-színező 2-élsúlyozását.

Legyen $\{V_1, \dots, V_{\chi(G)}\}$ egy stabil halmazokból álló partíciója $V(G)$-nek. Minden $v \in V_i$-re legyen $a_v^- \in \left[\left\lfloor \frac{d(v)}{3}, \frac{d(v)}{2} \right\rfloor\right]$ és $a_v^+ \in \left[\left\lfloor \frac{d(v)}{2}, 2\frac{d(v)}{3} \right\rfloor\right]$ olyan, hogy $a_v^- + d_G(v) \equiv a_v^+ + d_G(v) \equiv 2i \bmod 2\chi(G)$. Ilyen választás lehetséges, hiszen mindkét intervallum legalább $2\chi(G)$ egymást követő egészt tartalmaz. Ezenkívül a_v^- és a_v^+ választása kielégíti a 4.4.1 tétel feltételeit, azaz létezik olyan H feszítő részgráf, hogy minden $v \in V$-re $d_H(v) \in \{a_v^-, a_v^- + 1, a_v^+, a_v^+ + 1\}$. Legyen $w(e) = 2$, ha $e \in E(H)$, valamint $w(e) = 1$, ha $e \in E(G) - E(H)$. Ekkor $v \in V_i$ esetén $\sum_{e \ni u} w(e) = 2d_H(v) + d_{G-H}(v) = d_G(v) + d_H(v) \in \{2i, 2i+1\} \bmod 2\chi(G)$. Így tehát a különböző partícióosztályokban lévő szomszédos csúcsok különböző maradékosztályokba tartoznak. Mivel minden V_i egy stabil halmaz, ezért G egy csúcs-színező 2-élsúlyozását kaptuk. □

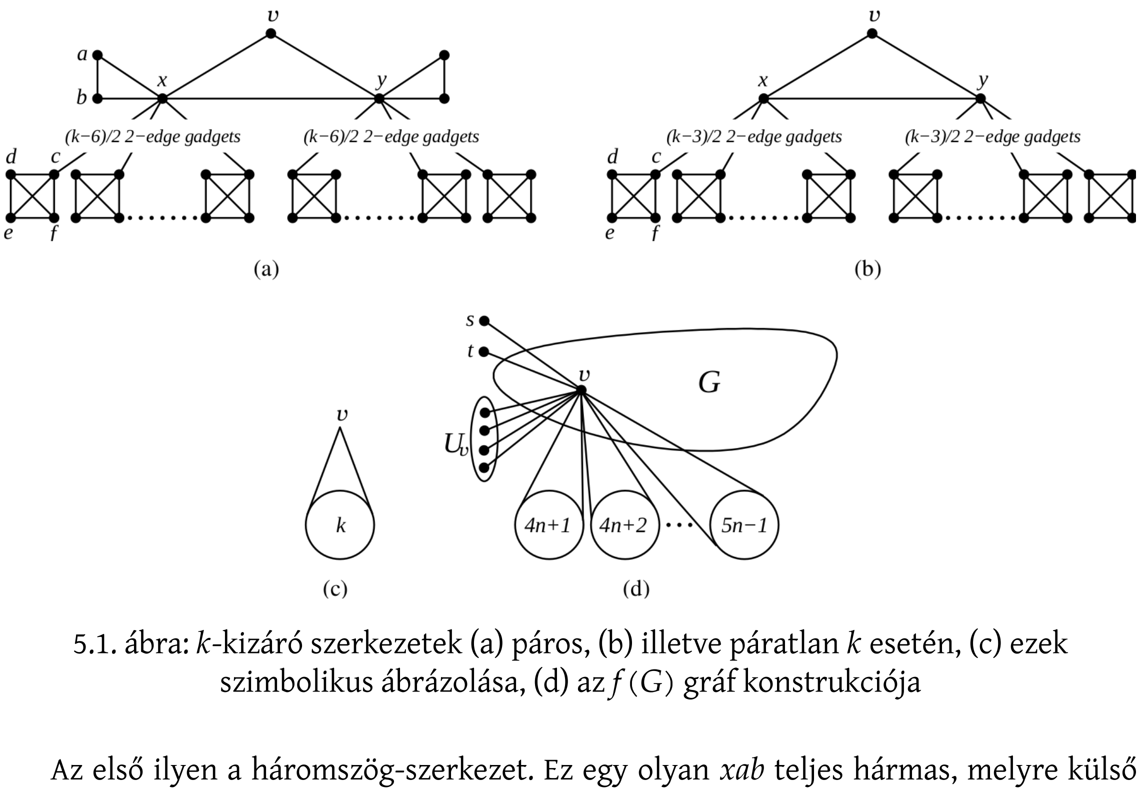
5. Élsúlyozások komplexitása

Addario-Berry, Dalal, és Reed [1] cikkéből tudjuk, hogy majdnem minden gráfnak van csúcs-színező 2-élsúlyozása. Most megmutatjuk, hogy annak eldöntése, hogy egy adott gráfnak van-e helyes élsúlyozása az $1,\ 2$ számokkal, NP-teljes. Jelölje 1-2-SÚLY azon gráfok nyelvét, melyeknek létezik csúcs-színező 2-élsúlyozásuk.

5.1 Az 1-2-SÚLY NP-teljes

5.1.1 Tétel (Dudek és Wajc [5]). *Az 1-2-SÚLY NP-teljes.*

Bizonyítás. Vegyük észre, hogy az 1-2-SÚLY NP-ben van, hiszen polinom időben eldönthető egy gráf egy adott 2-élsúlyozásáról, hogy csúcs-színező-e. Tehát csak azt kell belátnunk, hogy az 1-2-SÚLY NP-nehéz. Ennek érdekében tekintsük a 3-SZÍN problémát, amely közismerten NP-teljes. A következőkben készíteni fogunk egy f polinomiális redukciót, melyre $G \in$ 3-SZÍN akkor és csak akkor, ha $f(G) \in$ 1-2-SÚLY. Előtte azonban definiálunk néhány segédszerkezetet.



5.1. ábra: k-kizáró szerkezetek (a) páros, (b) illetve páratlan k esetén, (c) ezek szimbolikus ábrázolása, (d) az $f(G)$ gráf konstrukciója

Az első ilyen a háromszög-szerkezet. Ez egy olyan xab teljes hármas, melyre külső csúcsból csak x-be, a szerkezet tetejébe vezethet él. Figyeljük meg, hogy egy helyes súlyozásban egy ilyen háromszög pontosan 3-mal járul hozzá az x csúcs összsúlyához.

A következő a 2-él-szerkezet, amely egy $cdef$ teljes négyesből és egy erre illeszkedő xc élből áll. Könnyen ellenőrizhető, hogy egy olyan gráf esetében, amely csak az x csúccsal szomszédos, tetszőleges w helyes súlyozásra $w(xc) = 2$. Az x csúcsot a szerkezet végpontjának nevezzük.

Ezek segítségével definiálunk egy harmadik szerkezetet, amelynek k-kizáró szerkezet a neve. Itt feltesszük, hogy $k \geq 8$. A szerkezetnek van egy vxy fő háromszöge, ahol a v csúcsot gyökérnek nevezzük. Ezenfelül, ha k páratlan, akkor x és y is $\frac{k-3}{2}$ diszjunkt 2-él-szerkezet végpontjai. Amennyiben k páros, úgy x és y is $\frac{k-6}{2}$ diszjunkt 2-él-szerkezet végpontjai és egy-egy háromszög-szerkezet tetejei, amelyek szintén diszjunktak. Figyeljük meg, hogy minden w helyes súlyozásban $w(vx) \neq w(vy)$. Ellenkező esetben, mivel a szerkezetek $k-3$-mal járulnak hozzá x és y összsúlyához, azt kapnánk, hogy $w(x) = w(xv) + w(xy) + k - 3 = w(yv) + w(yx) + k - 3 = w(y)$. Ezért tetszőleges k esetén, ha $w(xy) = 1$, akkor $\{w(x), w(y)\} = \{k-1, k\}$, illetve ha $w(xy) = 2$, akkor $\{w(x), w(y)\} = \{k, k+1\}$. Akárhogy is, v-nek van egy k súlyú szomszédja, ezért $w(v) \neq k$. Ezen felül $\{w(vx), w(vy)\} = \{1, 2\}$, ezért egy ilyen szerkezet 3-mal járul hozzá v összsúlyához.

Most már minden eszközünk megvan a redukció elkészítéséhez. Legyen $G = (V, E)$ egy n pontú gráf, ahol feltehetjük, hogy $n \geq 3$. Az $f(G) = (W, F)$ gráfot a következőképpen kapjuk meg G-ből. Minden $v \in V$-re

- összekötjük v-t két új csúccsal, s_v-vel és t_v-vel
- összekötjük v-t egy új U_v halmaz minden csúcsával, ahol $|U_v| = n - 1 - d(v)$
- felveszünk $n-1$ új, v gyökerű k-kizáró szerkezetet, ahol $k = 4n+1, 4n+2, \ldots, 5n-1$

Világos, hogy $f(G)$ polinom időben kiszámítható.

5.1.2 Állítás. *$f(G)$ bármely w helyes súlyozására az $1,\ 2$ súlyokkal, $w(v) \in \{4n-2, 4n-1, 4n\}$ minden $v \in V$-re.*

Bizonyítás. Válasszunk egy $v \in V$ csúcsot. Mivel $w(vs_v) + w(vt_v) \in \{2, 3, 4\}$, továbbá a v csúcsra $n-1$ darab $V \cup U_v$-be menő él illeszkedik, és $n-1$ darab k-kizáró szerkezetnek a gyökere, ezért

$$w(v) \in \{2, 3, 4\} + \{n-1, \ldots, 2n-2\} + \{3n-3\} = \{4n-2, \ldots, 5n-1\}$$

Figyelembe véve, hogy minden $k \in \{4n+1, 4n+2, \ldots, 5n-1\}$-re a v csúcs gyökere egy k-kizáró szerkezetnek, azt kapjuk, hogy egy w helyes súlyozásban $w(v) \in \{4n-2, 4n-1, 4n\}$. $\square$

Most megmutatjuk, hogy $G \in$ 3-SZÍN akkor és csak akkor, ha $f(G) \in$ 1-2-SÚLY.

Először tegyük fel, hogy $G \in$ 3-SZÍN. Ez azt jelenti, hogy G-nek van egy helyes 3-színezése. Legyen ez $s : V \to \{4n-2, 4n-1, 4n\}$. Definiáljunk egy $w : F \to \{1, 2\}$ súlyozást az $f(G)$ gráfon a következő módon. Minden $e \in E$-re legyen $w(e) = 1$. Minden $e = vu$ élre, ahol $v \in V$ és $u \in U_v$, legyen $w(e) = 1$. Minden $v \in V$ csúcsra $s(v) = 4n-2$ esetén $w(vs_v) = w(vt_v) = 1$, $s(v) = 4n-1$ esetén $w(vs_v) = 1$ és $w(vt_v) = 2$, valamint $s(v) = 4n$ esetén $w(vs_v) = w(vt_v) = 2$. A szerkezetekhez tartozó éleket az alábbi módon súlyozzuk. Egy xab háromszög-szerkezetre, melynek teteje x, legyen $w(xa) = 2$ és $w(xb) = w(ab) = 1$. Egy $xcdef$ 2-él-szerkezetre, melynek végpontja x, legyen $w(xc) = w(cd) = w(ce) = w(de) = w(df) = 2$ és $w(cf) = w(ef) = 1$. Egy v gyökerű és vxy fő háromszögű k-kizáró-szerkezet esetén legyen $w(vx) = w(xy) = 2$ és $w(vy) = 1$, minden más él súlyozása pedig a fentieknek megfelelő. Figyeljük meg, hogy w egy helyes színezése $f(G)$-nek, hiszen $w(v) = s(v)$ minden $v \in V$-re.

Tegyük most fel, hogy $G \notin$ 3-SZÍN. Ennélfogva minden $s : V \to \{4n-2, 4n-1, 4n\}$-re s nem egy helyes színezés. Ezt összevetve az 5.1.2 állítással azt kapjuk, hogy $f(G)$-nek nem létezik helyes súlyozása, azaz $f(G) \notin$ 1-2-SÚLY.

Ezzel a tételt beláttuk. □

5.2 A 0-1-SÚLY NP-teljes

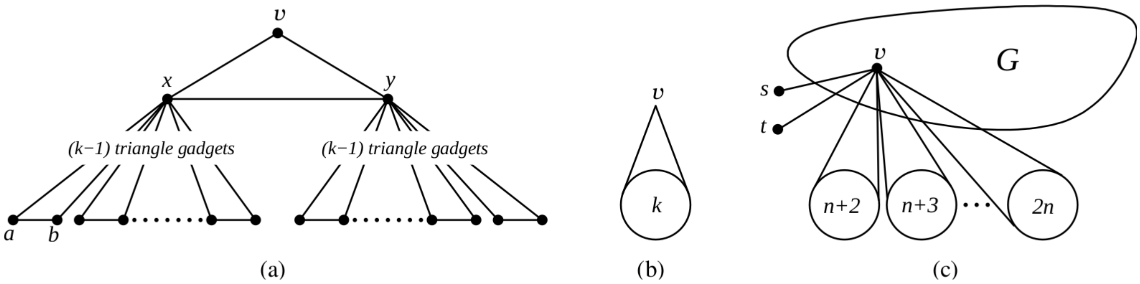
Az előbbiekhez hasonlóan most megmutatjuk, hogy annak eldöntése is NP-teljes, hogy egy gráfnak létezik-e csúcs-színező élsúlyozása a $0,\ 1$ számokkal. Jelölje 0-1-SÚLY azon gráfok nyelvét, melyeknek létezik ilyen súlyozásuk.

5.2.1 Tétel (Dudek és Wajc [5]). *A 0-1-SÚLY NP-teljes.*

Bizonyítás. Vegyük észre, hogy a 0-1-SÚLY NP-ben van, hiszen polinomiális időben eldönthető egy gráf éleinek a $0,\ 1$ számokkal való súlyozásáról, hogy csúcs-színező-e. A továbbiakban azt mutatjuk meg, hogy a 0-1-SÚLY NP-nehéz, a 3-SZÍN probléma segítségével. Ennek érdekében készíteni fogunk egy f polinomiális redukciót, melyre $G \in$ 3-SZÍN akkor és csak akkor, ha $f(G) \in$ 0-1-SÚLY. Ehhez az előzőekhez hasonlóan szükségünk lesz két segédszerkezetre.

Az első a korábban már definiált xab háromszög-szerkezet. Figyeljük meg, hogy egy helyes súlyozásban egy ilyen háromszög pontosan 1-gyel járul hozzá az x csúcs összsúlyához.

A második a k-kizáró-szerkezet, amely felépítését tekintve eltér a korábban definiálttól, a szerepe viszont azonos. A szerkezet egy vxy fő háromszögből áll, ahol v a gyökér, x és y pedig $k-1$ diszjunkt háromszög-szerkezet teteje. Vegyük észre, hogy egy w helyes súlyozásra $w(vx) \neq w(vy)$. Ellenkező esetben, mivel a szerkezetek $k-1$-gyel járulnak hozzá x és y összsúlyához, azt kapnánk, hogy $w(x) = w(xv) + w(xy) + k - 1 =$



5.2. ábra: (a) k-kizáró szerkezet és (b) szimbolikus ábrázolása, (c) az $f(G)$ gráf konstrukciója

$w(yv) + w(yx) + k - 1 = w(y)$. Ezért tetszőleges k esetén, ha $w(xy) = 0$, akkor $\{w(x), w(y)\} = \{k-1, k\}$, illetve ha $w(xy) = 1$, akkor $\{w(x), w(y)\} = \{k, k+1\}$. Akárhogy is, v-nek van egy k súlyú szomszédja, ezért $w(v) \neq k$. Ezen felül $\{w(vx), w(vy)\} = \{0, 1\}$, ezért egy ilyen szerkezet 1-gyel járul hozzá v összsúlyához.

Most már minden eszközünk megvan a redukció elkészítéséhez. Legyen $G = (V, E)$ egy n pontú gráf, ahol feltehetjük, hogy $n \geq 3$. Az $f(G) = (W, F)$ gráfot a következőképpen kapjuk meg G-ből. Minden $v \in V$-re

- összekötjük v-t két új csúccsal, s_v-vel és t_v-vel
- felveszünk $n-1$ új, v gyökerű k-kizáró szerkezetet, ahol $k = n+2, n+3, \ldots, 2n$

Világos, hogy $f(G)$ polinom időben kiszámítható.

5.2.2 Állítás. *$f(G)$ bármely w helyes súlyozására a 0, 1 súlyokkal, $w(v) \in \{n-1, n, n+1\}$ minden $v \in V$-re.*

Bizonyítás. Válasszunk egy $v \in V$ csúcsot. Mivel $w(vs_v) + w(vt_v) \in \{0, 1, 2\}$, továbbá a v csúcsra $d(v) \leq n-1$ darab V-be menő él illeszkedik, és $n-1$ darab k-kizáró szerkezetnek a gyökere, ezért

$$w(v) \in \{0, 1, 2\} + \{0, \ldots, d(v)\} + \{n-1\} \subseteq \{n-1, \ldots, 2n\}$$

Figyelembe véve, hogy minden $k \in \{n+2, n+3, \ldots, 2n\}$-re a v csúcs gyökere egy k-kizáró szerkezetnek, azt kapjuk, hogy egy w helyes súlyozásban $w(v) \in \{n-1, n, n+1\}$. □

Most megmutatjuk, hogy $G \in$ 3-SZÍN akkor és csak akkor, ha $f(G) \in$ 0-1-SÚLY.

Először tegyük fel, hogy $G \in$ 3-SZÍN. Ez azt jelenti, hogy G-nek van egy helyes 3-színezése. Legyen ez $s : V \to \{n-1, n, n+1\}$. Definiáljunk egy $w : F \to \{0, 1\}$ súlyozást az $f(G)$ gráfon a következő módon. Minden $e \in E$-re legyen $w(e) = 0$. Minden $v \in V$-re $s(v) = n-1$ esetén $w(vs_v) = w(vt_v) = 0$, $s(v) = n$ esetén $w(vs_v) = 1$ és $w(vt_v) = 0$, valamint $s(v) = n+1$ esetén $w(vs_v) = w(vt_v) = 1$. A szerkezetekhez tartozó éleket az alábbi módon súlyozzuk. Egy xab háromszög-szerkezetre, melynek teteje x, legyen $w(xa) = 1$ és $w(xb) = w(ab) = 0$. Egy v gyökerű és vxy fő háromszögű k-kizáró-szerkezet esetén legyen $w(vx) = w(xy) = 1$ és $w(vy) = 0$, minden más él súlyozása pedig a fentieknek megfelelő. Figyeljük meg, hogy w egy helyes színezése $f(G)$-nek, hiszen $w(v) = s(v)$ minden $v \in V$-re.

Tegyük most fel, hogy $G \notin$ 3-SZÍN. Ennélfogva minden $s : V \to \{n-1, n, n+1\}$-re s nem egy helyes színezés. Ezt összevetve az 5.2.2 állítással azt kapjuk, hogy $f(G)$-nek nem létezik helyes súlyozása, azaz $f(G) \notin$ 0-1-SÚLY.

Ezzel a tételt beláttuk. $\square$

Irodalomjegyzék

[1] L. Addario-Berry, K. Dalal, és B. Reed. "Degree constrained subgraphs". In: *Discrete Applied Mathematics* 156.7 (2008), pp. 1168–1174.

[2] M. h. Alaeiyan. "The edge-labeling and vertex-colors of K_n". In: *Mathematical Sciences* 6.1 (2012), p. 45.

[3] T. Bartnicki, J. Grytczuk, és S. Niwczyk. "Weight choosability of graphs". In: *Journal of Graph Theory* 60.3 (2009), pp. 242–256.

[4] O. Baudon, J. Bensmail, és E. Sopena. "An oriented version of the 1-2-3 Conjecture". In: *Discussiones Mathematicae Graph Theory* (2014).

[5] A. Dudek és D. Wajc. "On the complexity of vertex-coloring edge-weightings". In: *Discrete Mathematics & Theoretical Computer Science* 13.3 (2011).

[6] M. Kalkowski, M. Karoński, és F. Pfender. "Vertex coloring edge weightings with integer weights at most 6". In: *Rostocker Mathematisches Kolloquium* 64 (2009), pp. 39–43.

[7] M. Kalkowski, M. Karoński, és F. Pfender. "Vertex-coloring edge-weightings: Towards the 1-2-3-conjecture". In: *Journal of Combinatorial Theory, Series B* 100.3 (2010), pp. 347–349.

[8] M. Karoński, T. Łuczak, és A. Thomason. "Edge weights and vertex colours". In: *Journal of Combinatorial Theory, Series B* 91.1 (2004), pp. 151–157.

[9] H. Lu, Q. Yu, és C.-Q. Zhang. "Vertex-coloring 2-edge-weighting of graphs". In: *European Journal of Combinatorics* 32.1 (2011), pp. 21–27.

[10] J. Przybylo és M. Wozniak. "On a 1, 2 Conjecture". In: *Discrete Mathematics & Theoretical Computer Science* 12.1 (2010), pp. 101–108.

[11] B. Seamone. "The 1-2-3 Conjecture and related problems: a survey". In: *ArXiv e-prints* (Nov. 2012). arXiv: 1211.5122.

[12] T.-L. Wong és X. Zhu. "Every graph is (2,3)-choosable". In: *Combinatorica* (2014), pp. 1–7.