## Sistemas de inventario

Co Costo de ordenar

Cp Costo unitario de compra

Ch Costo de mantener unidades en inventario (oportunidad)

D número de unidades demandadas

Q número de unidades

D demanda anual

### Modelo EOQ

CT(Q) = costo de ordenar + costo de compra + costo de mantención de inventario

$$\frac{\text{costo de ordenar}}{\text{año}} = \left(\frac{\text{costo de ordenar}}{\text{orden}}\right)\left(\frac{\text{órdenes}}{\text{año}}\right) = c_0\frac{D}{Q}$$

$$\frac{\text{costo de compra}}{\text{año}} = \left(\frac{\text{costo de compra}}{\text{unidad}}\right)\left(\frac{\text{unidades compradas}}{\text{año}}\right) = c_pD$$

$$\frac{\text{costo de mantención de inventario}}{\text{año}} = \frac{Q^2c_h}{2D}\frac{D}{Q} = \frac{c_hQ}{2}$$

$$\boxed{CT(Q) = \frac{c_oD}{Q} + c_pD + \frac{c_hQ}{2}}$$

$$CT(Q) = \frac{c_oD}{Q} + c_pD + \frac{c_hQ}{2}$$

Para obtener el óptimo basta derivar respecto de la única variable $Q$:

$$\frac{dCT}{dQ} = -\frac{c_oD}{Q^2} + \frac{c_h}{2} = 0 \quad \rightarrow \quad Q = \pm\sqrt{\frac{2c_oD}{c_h}}$$

Debido a que se está hablando de cantidades, sólo interesa la solución positiva:

$$Q^* = \sqrt{\frac{2c_oD}{c_h}}$$

Para demostrar que es mínimo, basta considerar la segunda derivada:

$$\frac{d^2CT}{dQ^2} = \frac{2c_0D}{Q^3} \geq 0 \;\; \forall\, Q$$

Luego, la función es convexa y efectivamente se trata de un mínimo.

### Modelo EOQ con producción

$Q_p$ = número de unidades producidas por corrida de producción
$c_c$ = costo de cada corrida de producción
$c_h$ = costo de mantener una unidad en inventario por un año
$D$ = demanda anual por el producto
$d$ = demanda por unidad de tiempo

$$\text{costo producción} = (\text{costo por corrida}) \times (\text{número de corridas}) = c_c\frac{D}{Q_p} \tag{2.18}$$

El costo de inventario puede ser calculado según el nivel de inventario medio, en otras palabras el área bajo la curva divida por el tiempo transcurrido:

$$\text{costo de inventario} = c_h\frac{\frac{1}{2}t_1(p-d)(t_1+t_2)}{t_1+t_2} = c_h\frac{1}{2}t_1(p-d) \tag{2.19}$$

El intervalo de tiempo $t_1$ describe la duración del período de producción por ciclo, por lo tanto:

$$Q_p = t_1p \quad \rightarrow \quad t_1 = \frac{Q_p}{p} \tag{2.20}$$

Reemplazando (2.20) en (2.19) se obtiene:

$$\text{costo de inventario} = \frac{c_h(p-d)Q_p}{2p} \tag{2.21}$$

$$Q_p^* = \sqrt{\frac{2c_cDp}{c_h(p-d)}}$$

Números de corridas n= d/Qp

**Líneas de espera**

Dist. de llegadas

$$P_{(n)} = \frac{(\lambda T)^n}{n!} e^{\lambda T} \qquad \text{para } n = 0, 1, 2, \ldots$$

donde: $P_{(n)}$ = probabilidad de $n$ llegadas en $T$ periodos de tiempo
$\lambda$ = número promedio de llegadas de clientes por periodo
$e = 2{,}7183$

**La función de probabilidad:**

$$P(x = k) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}$$

**La media y la varianza son:**

$$E\{x\} = \lambda$$

$$Var\{x\} = \lambda$$

Características de servicio

**La función de distribución es**

$$f(t) = \mu e^{-\mu t} \qquad t \rangle 0$$

**Probabilidad**

$$P(x > t) = e^{-\mu t}$$

**La media y la varianza**

$$E\{t\} = \frac{1}{\mu} \qquad Var\{t\} = \frac{1}{\mu^2}$$

$$P_{(t \leqslant T)} = 1 - e^{-\mu T}$$

donde: $\mu$ = número medio de clientes que completan el servicio en cada periodo
$t$ = tiempo de servicio del cliente
$T$ = tiempo de servicio propuesto como objetivo

Medidas de desempeño M/M/n

**Número medio de unidades en cola:** $L_s = \dfrac{\lambda}{\mu - \lambda}$

**Tiempo medio en el sistema:** $W_s = \dfrac{1}{\mu - \lambda}$

**Número medio de unidades en cola:** $L_q = \dfrac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)}$

**Tiempo medio en cola:** $W_q = \dfrac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)}$

**Utilización del sistema:** $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu}$

$$P_n = (1-\rho)\rho^n \qquad P(L_s > n) = \rho^{n+1}$$

$$P(W_s > t) = e^{-\mu(1-\rho)t} \qquad P(W_q > t) = \rho e^{-\mu(1-\rho)t}$$

$$t \geq 0, \rho < 1$$

p<=1

Modelo M/G/1

$$L_s = L_q + \rho \qquad L_q = \frac{\lambda^2 \sigma^2 + \rho^2}{2(1-\rho)}$$

$$W_s = W_q + \frac{1}{\mu} \qquad W_q = \frac{L_q}{\lambda}$$

$$P_0 = 1 - \rho \qquad P_w = \rho$$

$$\rho < 1$$

Modelo M/D/1

$$L_s = \lambda W_s \qquad L_q = \frac{\rho^2}{2(1-\rho)}$$

$$W_s = W_q + \frac{1}{\mu} \qquad W_q = \frac{L_q}{\lambda}$$

$$\rho < 1$$