Filtro de Kalman

Formulación Teórica

Febrero 2026

Alejandro Gómez

Contents

1 Modelo del Sistema

Espacio de Estados

Ecuación de estado:

$$\boldsymbol{X}_k = \boldsymbol{A}_{k-1}\boldsymbol{X}_{k-1} + \boldsymbol{B}_{k-1}\boldsymbol{U}_{k-1} + \boldsymbol{W}_{k-1}$$

Ecuación de medición:

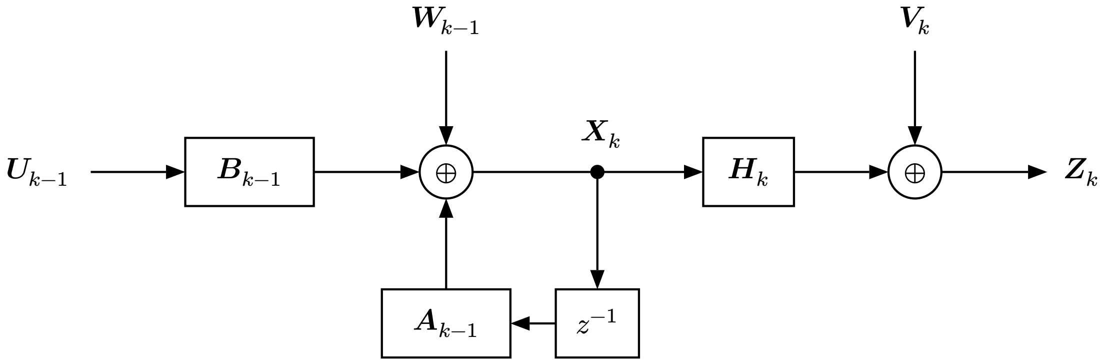
$$\boldsymbol{Z}_k = \boldsymbol{H}_k\boldsymbol{X}_k + \boldsymbol{V}_k$$

Donde:

- $\boldsymbol{X}_k \in \mathbb{R}^n$: vector de estado
- $\boldsymbol{U}_k \in \mathbb{R}^m$: entrada de control
- $\boldsymbol{Z}_k \in \mathbb{R}^p$: vector de medición
- $\boldsymbol{W}_k \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \boldsymbol{Q}_k)$: ruido del proceso
- $\boldsymbol{V}_k \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \boldsymbol{R}_k)$: ruido de medición
- $\boldsymbol{W}_k$ y $\boldsymbol{V}_k$ son mutuamente independientes

Diagrama de Bloques

z^{-1}: operador de retardo unitario (transformada Z). $\quad z^{-1}\boldsymbol{X}_k = \boldsymbol{X}_{k-1}$



2 Distribución de Probabilidad y Covarianza

Distribución Gaussiana

Univariada:

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

Multivariada:

$$p(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}\,|\boldsymbol{\Sigma}|^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})\right)$$

Notación compacta: $\boldsymbol{x} \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$, con $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^n$ y $\boldsymbol{\Sigma} \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

Matriz de Covarianza

La matriz de covarianza cuantifica la incertidumbre del vector de estado:

$$\boldsymbol{P} = \mathbb{E}\left[(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{\mu})(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{\mu})^T\right] = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \dots & \sigma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \dots & \sigma_n^2 \end{pmatrix}$$

- Diagonal σ_i^2: varianza de cada variable de estado
- Fuera de diagonal $\sigma_{ij} = \mathbb{E}\left[(X_i - \mu_i)\left(X_j - \mu_j\right)\right]$: covarianza cruzada
- Propiedades: $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}^T$ y $\boldsymbol{P} \geq 0$

En el filtro de Kalman, $\boldsymbol{P}$ es la incertidumbre asociada a la estimación $\hat{\boldsymbol{X}}$.

Transformación Lineal de Gaussianas

Si $\boldsymbol{x} \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ y se aplica $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}$:

$$\boldsymbol{y} \sim \mathcal{N}\left(\boldsymbol{A}\boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{A}^T\right)$$

Con ruido aditivo independiente $\boldsymbol{w} \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{Q})$:

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{w} \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{y} \sim \mathcal{N}\left(\boldsymbol{A}\boldsymbol{\mu},\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{A}^T + \boldsymbol{Q}\right)$$

Esta propiedad da origen directo a la **etapa de predicción** del filtro.

3 Estimación Bayesiana

Teorema de Bayes Aplicado a Estimación

El estado $\boldsymbol{X}_k$ se modela como variable aleatoria. Su distribución posterior dado las mediciones es:

$$p(\boldsymbol{X}_k \mid \boldsymbol{Z}_{1:k}) = \frac{p(\boldsymbol{Z}_k \mid \boldsymbol{X}_k) \cdot p(\boldsymbol{X}_k \mid \boldsymbol{Z}_{1:k-1})}{p(\boldsymbol{Z}_k \mid \boldsymbol{Z}_{1:k-1})}$$

Para el modelo lineal con ruido gaussiano:

- **Prior:** $p(\boldsymbol{X}_k \mid \boldsymbol{Z}_{1:k-1}) = \mathcal{N}\left(\hat{\boldsymbol{X}}_{k|k-1}, \boldsymbol{P}_{k|k-1}\right)$
- **Verosimilitud:** $p(\boldsymbol{Z}_k \mid \boldsymbol{X}_k) = \mathcal{N}(\boldsymbol{H}_k \boldsymbol{X}_k, \boldsymbol{R}_k)$
- **Posterior:** $p(\boldsymbol{X}_k \mid \boldsymbol{Z}_{1:k}) = \mathcal{N}\left(\hat{\boldsymbol{X}}_{k|k}, \boldsymbol{P}_{k|k}\right)$

El producto de gaussianas es gaussiano $\Rightarrow$ la posterior tiene forma cerrada.

Fusión de Gaussianas

La posterior se obtiene combinando los exponentes del prior y la verosimilitud:

$$-\frac{1}{2}\left[\left(\boldsymbol{X}-\hat{\boldsymbol{X}}_{k|k-1}\right)^T \boldsymbol{P}_{k|k-1}^{-1}\left(\boldsymbol{X}-\hat{\boldsymbol{X}}_{k|k-1}\right)+(\boldsymbol{Z}_k-\boldsymbol{H}\boldsymbol{X})^T \boldsymbol{R}_k^{-1}(\boldsymbol{Z}_k-\boldsymbol{H}\boldsymbol{X})\right]$$

Agrupando términos cuadráticos en $\boldsymbol{X}$:

Precisión posterior:

$$\boldsymbol{P}_{k|k}^{-1}=\boldsymbol{P}_{k|k-1}^{-1}+\boldsymbol{H}_k^T\boldsymbol{R}_k^{-1}\boldsymbol{H}_k$$

Información posterior:

$$\boldsymbol{P}_{k|k}^{-1}\hat{\boldsymbol{X}}_{k|k}=\boldsymbol{P}_{k|k-1}^{-1}\hat{\boldsymbol{X}}_{k|k-1}+\boldsymbol{H}_k^T\boldsymbol{R}_k^{-1}\boldsymbol{Z}_k$$

4 Filtro de Kalman

Predicción

Dado $\boldsymbol{X}_{k-1} \mid \boldsymbol{Z}_{1:k-1} \sim \mathcal{N}\left(\hat{\boldsymbol{X}}_{k-1|k-1}, \boldsymbol{P}_{k-1|k-1}\right)$ y el modelo lineal, por la propiedad de transformación de gaussianas:

Media predicha:

$$\hat{\boldsymbol{X}}_{k|k-1} = \boldsymbol{A}_{k-1}\hat{\boldsymbol{X}}_{k-1|k-1} + \boldsymbol{B}_{k-1}\boldsymbol{U}_{k-1}$$

Covarianza predicha:

$$\boldsymbol{P}_{k|k-1} = \boldsymbol{A}_{k-1}\boldsymbol{P}_{k-1|k-1}\boldsymbol{A}_{k-1}^{T} + \boldsymbol{Q}_{k-1}$$

Resultado: $\boldsymbol{X}_{k} \mid \boldsymbol{Z}_{1:k-1} \sim \mathcal{N}\left(\hat{\boldsymbol{X}}_{k|k-1}, \boldsymbol{P}_{k|k-1}\right)$

Actualización

Aplicando el **lema de inversión matricial (Woodbury)** a la forma de información:

$$\left(\boldsymbol{P}_{k|k-1}^{-1} + \boldsymbol{H}^T \boldsymbol{R}^{-1} \boldsymbol{H}\right)^{-1} = \boldsymbol{P}_{k|k-1} - \boldsymbol{P}_{k|k-1} \boldsymbol{H}^T \left(\boldsymbol{H} \boldsymbol{P}_{k|k-1} \boldsymbol{H}^T + \boldsymbol{R}\right)^{-1} \boldsymbol{H} \boldsymbol{P}_{k|k-1}$$

Se define la **ganancia de Kalman**:

$$\boldsymbol{K}_k = \boldsymbol{P}_{k|k-1} \boldsymbol{H}_k^T \left(\boldsymbol{H}_k \boldsymbol{P}_{k|k-1} \boldsymbol{H}_k^T + \boldsymbol{R}_k\right)^{-1}$$

Las ecuaciones de actualización resultan:

$$\hat{\boldsymbol{X}}_{k|k} = \hat{\boldsymbol{X}}_{k|k-1} + \boldsymbol{K}_k \left(\boldsymbol{Z}_k - \boldsymbol{H}_k \hat{\boldsymbol{X}}_{k|k-1}\right)$$

$$\boldsymbol{P}_{k|k} = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{K}_k \boldsymbol{H}_k) \boldsymbol{P}_{k|k-1}$$

Ganancia de Kalman

$$\boldsymbol{K}_k = \boldsymbol{P}_{k|k-1}\boldsymbol{H}_k^T\left(\boldsymbol{H}_k\boldsymbol{P}_{k|k-1}\boldsymbol{H}_k^T + \boldsymbol{R}_k\right)^{-1}$$

$\boldsymbol{K}_k$ balancea la incertidumbre de la predicción ($\boldsymbol{P}_{k|k-1}$) contra la incertidumbre de la medición ($\boldsymbol{R}_k$):

- $\boldsymbol{R}_k \to \infty$ (medición ruidosa): $\boldsymbol{K}_k \to \mathbf{0}$ → se conserva la predicción
- $\boldsymbol{P}_{k|k-1} \to \infty$ (predicción incierta): $\boldsymbol{K}_k \to \boldsymbol{H}^{-1}$ → se sigue la medición

La ganancia $\boldsymbol{K}_k$ minimiza la traza de $\boldsymbol{P}_{k|k}$, es decir, minimiza la varianza total del error de estimación.

Algoritmo Completo

Inicialización: $\hat{\boldsymbol{X}}_{0|0} = \mathbb{E}[\boldsymbol{X}_0], \quad \boldsymbol{P}_{0|0} = \mathbb{E}\left[\left(\boldsymbol{X}_0 - \hat{\boldsymbol{X}}_{0|0}\right)\left(\boldsymbol{X}_0 - \hat{\boldsymbol{X}}_{0|0}\right)^T\right]$

Para cada paso $k = 1, 2, 3, \ldots$:

Predicción (propagación de la distribución):

$$\hat{\boldsymbol{X}}_{k|k-1} = \boldsymbol{A}_{k-1}\hat{\boldsymbol{X}}_{k-1|k-1} + \boldsymbol{B}_{k-1}\boldsymbol{U}_{k-1}$$
$$\boldsymbol{P}_{k|k-1} = \boldsymbol{A}_{k-1}\boldsymbol{P}_{k-1|k-1}\boldsymbol{A}_{k-1}^T + \boldsymbol{Q}_{k-1}$$

Actualización (fusión bayesiana):

$$\boldsymbol{K}_k = \boldsymbol{P}_{k|k-1}\boldsymbol{H}_k^T\left(\boldsymbol{H}_k\boldsymbol{P}_{k|k-1}\boldsymbol{H}_k^T + \boldsymbol{R}_k\right)^{-1}$$
$$\hat{\boldsymbol{X}}_{k|k} = \hat{\boldsymbol{X}}_{k|k-1} + \boldsymbol{K}_k\left(\boldsymbol{Z}_k - \boldsymbol{H}_k\hat{\boldsymbol{X}}_{k|k-1}\right)$$
$$\boldsymbol{P}_{k|k} = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{K}_k\boldsymbol{H}_k)\boldsymbol{P}_{k|k-1}$$