

Filtro de Kalman

Formulación Teórica

Febrero 2026

Alejandro Gómez

Contents

1	Modelo del Sistema	3
1.a	Espacio de Estados	4
1.b	Diagrama de Bloques	5
2	Distribución de Probabilidad y Covarianza	6
2.a	Distribución Gaussiana	7
2.b	Matriz de Covarianza	8
2.c	Transformación Lineal de Gaussianas	9
3	Estimación Bayesiana	10
3.a	Teorema de Bayes Aplicado a Estimación	11
3.b	Fusión de Gaussianas	12
4	Filtro de Kalman	13
4.a	Predicción	14
4.b	Actualización	15
4.c	Ganancia de Kalman	16
4.d	Algoritmo Completo	17

1 Modelo del Sistema

Espacio de Estados

Ecuación de estado:

$$\mathbf{X}_k = \mathbf{A}_{k-1} \mathbf{X}_{k-1} + \mathbf{B}_{k-1} \mathbf{U}_{k-1} + \mathbf{W}_{k-1}$$

Ecuación de medición:

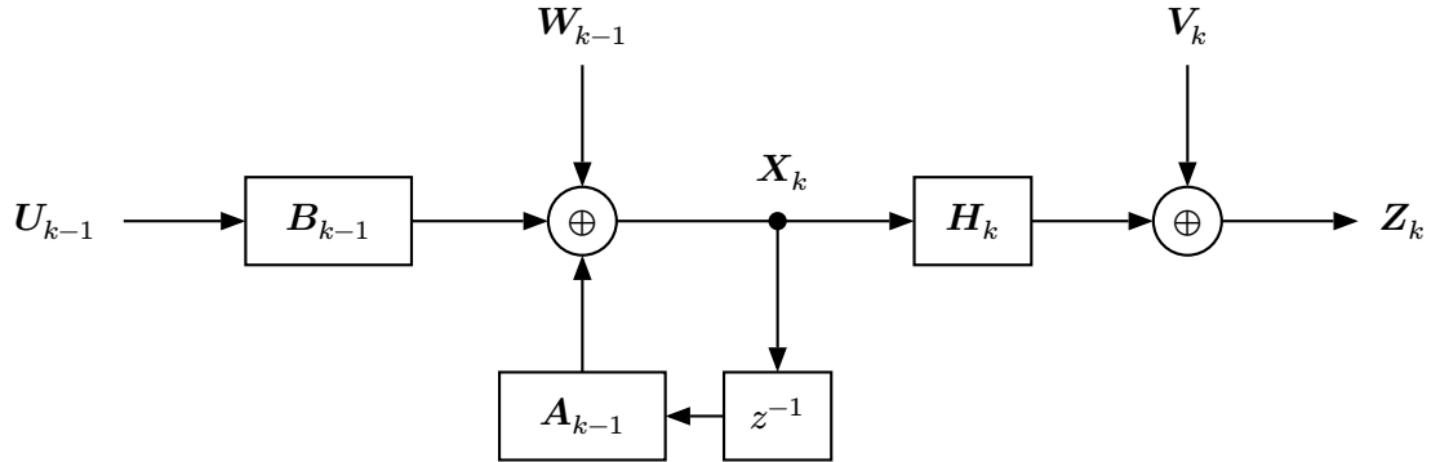
$$\mathbf{Z}_k = \mathbf{H}_k \mathbf{X}_k + \mathbf{V}_k$$

Donde:

- $\mathbf{X}_k \in \mathbb{R}^n$: vector de estado
- $\mathbf{U}_k \in \mathbb{R}^m$: entrada de control
- $\mathbf{Z}_k \in \mathbb{R}^p$: vector de medición
- $\mathbf{W}_k \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{Q}_k)$: ruido del proceso
- $\mathbf{V}_k \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{R}_k)$: ruido de medición
- \mathbf{W}_k y \mathbf{V}_k son mutuamente independientes

Diagrama de Bloques

z^{-1} : operador de retardo unitario (transformada Z). $z^{-1} \mathbf{X}_k = \mathbf{X}_{k-1}$



2 Distribución de Probabilidad y Covarianza

Distribución Gaussiana

Univariada:

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

Multivariada:

$$p(\mathbf{X}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} |\Sigma|^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu})^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu})\right)$$

Notación compacta: $\mathbf{X} \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$, con $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^n$ y $\boldsymbol{\Sigma} \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

Matriz de Covarianza

La matriz de covarianza cuantifica la incertidumbre del vector de estado:

$$\mathbf{P} = \mathbb{E}[(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu})(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu})^T] = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \dots & \sigma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \dots & \sigma_n^2 \end{pmatrix}$$

- Diagonal σ_i^2 : varianza de cada variable de estado
- Fuera de diagonal $\sigma_{ij} = \mathbb{E}[(X_i - \mu_i)(X_j - \mu_j)]$: covarianza cruzada
- Propiedades: $\mathbf{P} = \mathbf{P}^T$ y $\mathbf{P} \geq 0$

En el filtro de Kalman, \mathbf{P} es la incertidumbre asociada a la estimación $\hat{\mathbf{X}}$.

Transformación Lineal de Gaussianas

Si $\mathbf{X} \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ y se aplica $\mathbf{Y} = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{b}$:

$$\mathbf{Y} \sim \mathcal{N}(\mathbf{A}\boldsymbol{\mu} + \mathbf{b}, \mathbf{A}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{A}^T)$$

Con ruido aditivo independiente $\mathbf{W} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{Q})$:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{W} \implies \mathbf{Y} \sim \mathcal{N}(\mathbf{A}\boldsymbol{\mu}, \mathbf{A}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{A}^T + \mathbf{Q})$$

Esta propiedad da origen directo a la **etapa de predicción** del filtro.

3 Estimación Bayesiana

Teorema de Bayes Aplicado a Estimación

El estado \mathbf{X}_k se modela como variable aleatoria. Su distribución posterior dado las mediciones es:

$$p(\mathbf{X}_k \mid \mathbf{Z}_{1:k}) = \frac{p(\mathbf{Z}_k \mid \mathbf{X}_k) \cdot p(\mathbf{X}_k \mid \mathbf{Z}_{1:k-1})}{p(\mathbf{Z}_k \mid \mathbf{Z}_{1:k-1})}$$

Para el modelo lineal con ruido gaussiano:

- **Prior:** $p(\mathbf{X}_k \mid \mathbf{Z}_{1:k-1}) = \mathcal{N}(\hat{\mathbf{X}}_{k|k-1}, \mathbf{P}_{k|k-1})$
- **Verosimilitud:** $p(\mathbf{Z}_k \mid \mathbf{X}_k) = \mathcal{N}(\mathbf{H}_k \mathbf{X}_k, \mathbf{R}_k)$
- **Posterior:** $p(\mathbf{X}_k \mid \mathbf{Z}_{1:k}) = \mathcal{N}(\hat{\mathbf{X}}_{k|k}, \mathbf{P}_{k|k})$

El producto de gaussianas es gaussiano \Rightarrow la posterior tiene forma cerrada.

Fusión de Gaussianas

La posterior se obtiene combinando los exponentes del prior y la verosimilitud:

$$-\frac{1}{2} \left[(\mathbf{X} - \hat{\mathbf{X}}_{k|k-1})^T \mathbf{P}_{k|k-1}^{-1} (\mathbf{X} - \hat{\mathbf{X}}_{k|k-1}) + (\mathbf{Z}_k - \mathbf{H}\mathbf{X})^T \mathbf{R}_k^{-1} (\mathbf{Z}_k - \mathbf{H}\mathbf{X}) \right]$$

Agrupando términos cuadráticos en \mathbf{X} :

Precisión posterior:

$$\mathbf{P}_{k|k}^{-1} = \mathbf{P}_{k|k-1}^{-1} + \mathbf{H}_k^T \mathbf{R}_k^{-1} \mathbf{H}_k$$

Información posterior:

$$\mathbf{P}_{k|k}^{-1} \hat{\mathbf{X}}_{k|k} = \mathbf{P}_{k|k-1}^{-1} \hat{\mathbf{X}}_{k|k-1} + \mathbf{H}_k^T \mathbf{R}_k^{-1} \mathbf{Z}_k$$

4 Filtro de Kalman

Predicción

Dado $\mathbf{X}_{k-1} \mid \mathbf{Z}_{1:k-1} \sim \mathcal{N}\left(\hat{\mathbf{X}}_{k-1|k-1}, \mathbf{P}_{k-1|k-1}\right)$ y el modelo lineal, por la propiedad de transformación de gaussianas:

Media predicha:

$$\hat{\mathbf{X}}_{k|k-1} = \mathbf{A}_{k-1} \hat{\mathbf{X}}_{k-1|k-1} + \mathbf{B}_{k-1} \mathbf{U}_{k-1}$$

Covarianza predicha:

$$\mathbf{P}_{k|k-1} = \mathbf{A}_{k-1} \mathbf{P}_{k-1|k-1} \mathbf{A}_{k-1}^T + \mathbf{Q}_{k-1}$$

Resultado: $\mathbf{X}_k \mid \mathbf{Z}_{1:k-1} \sim \mathcal{N}\left(\hat{\mathbf{X}}_{k|k-1}, \mathbf{P}_{k|k-1}\right)$

Actualización

Aplicando el **lema de inversión matricial (Woodbury)** a la forma de información:

$$\left(\mathbf{P}_{k|k-1}^{-1} + \mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H} \right)^{-1} = \mathbf{P}_{k|k-1} - \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{H}^T \left(\mathbf{H} \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{H}^T + \mathbf{R} \right)^{-1} \mathbf{H} \mathbf{P}_{k|k-1}$$

Se define la **ganancia de Kalman**:

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{H}_k^T \left(\mathbf{H}_k \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k \right)^{-1}$$

Las ecuaciones de actualización resultan:

$$\hat{\mathbf{X}}_{k|k} = \hat{\mathbf{X}}_{k|k-1} + \mathbf{K}_k (\mathbf{Z}_k - \mathbf{H}_k \hat{\mathbf{X}}_{k|k-1})$$

$$\mathbf{P}_{k|k} = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k) \mathbf{P}_{k|k-1}$$

Ganancia de Kalman

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{H}_k^T \left(\mathbf{H}_k \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k \right)^{-1}$$

\mathbf{K}_k balancea la incertidumbre de la predicción ($\mathbf{P}_{k|k-1}$) contra la incertidumbre de la medición (\mathbf{R}_k):

- $\mathbf{R}_k \rightarrow \infty$ (medición ruidosa): $\mathbf{K}_k \rightarrow \mathbf{0}$ → se conserva la predicción
- $\mathbf{P}_{k|k-1} \rightarrow \infty$ (predicción incierta): $\mathbf{K}_k \rightarrow \mathbf{H}^{-1}$ → se sigue la medición

La ganancia \mathbf{K}_k minimiza la traza de $\mathbf{P}_{k|k}$, es decir, minimiza la varianza total del error de estimación.

Algoritmo Completo

Inicialización: $\hat{X}_{0|0} = \mathbb{E}[X_0]$, $P_{0|0} = \mathbb{E}\left[\left(X_0 - \hat{X}_{0|0}\right)\left(X_0 - \hat{X}_{0|0}\right)^T\right]$

Para cada paso $k = 1, 2, 3, \dots$:

Predicción (propagación de la distribución):

$$\begin{aligned}\hat{X}_{k|k-1} &= A_{k-1}\hat{X}_{k-1|k-1} + B_{k-1}U_{k-1} \\ P_{k|k-1} &= A_{k-1}P_{k-1|k-1}A_{k-1}^T + Q_{k-1}\end{aligned}$$

Actualización (fusión bayesiana):

$$\begin{aligned}K_k &= P_{k|k-1}H_k^T \left(H_k P_{k|k-1} H_k^T + R_k \right)^{-1} \\ \hat{X}_{k|k} &= \hat{X}_{k|k-1} + K_k \left(Z_k - H_k \hat{X}_{k|k-1} \right) \\ P_{k|k} &= (I - K_k H_k) P_{k|k-1}\end{aligned}$$
