Repaso Conceptos de Probabilidad

Alejandro Daniel José Gómez Flórez

1 Espacio muestral

Consideremos el experimento de lanzar tres monedas. Cada moneda puede dar **cara** (1) o **sello** (0). Por lo tanto, el número total de resultados posibles es

$$|\Omega| = 2^3 = 8.$$

El espacio muestral es:

$$\Omega = \{(0,0,0),(0,0,1),(0,1,0),(0,1,1),(1,0,0),(1,0,1),(1,1,0),(1,1,1)\}.$$

1.1 Eventos

Un **evento** es cualquier subconjunto del espacio muestral Ω. En nuestro ejemplo:

- **Evento elemental**: Un resultado específico, por ejemplo $A = \{(1,1,0)\}$
- **Evento compuesto**: Múltiples resultados, por ejemplo $B = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ (exactamente una cara)
- **Evento seguro**: Todo el espacio muestral, $E = \Omega$
- **Evento imposible**: El conjunto vacío, $F = \emptyset$

2 σ-álgebra

Un σ-álgebra $\mathcal{F}$ sobre Ω es una colección de subconjuntos de Ω que cumple:

- $\Omega \in \mathcal{F}$,

- Si $A \in \mathcal{F}$, entonces $A^c \in \mathcal{F}$,
- Si $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$, entonces $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$.

En espacios finitos, el σ-álgebra más común es el conjunto de partes de Ω:

$$\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega).$$

Como $|\Omega| = 8$, se tiene $|\mathcal{F}| = 2^8 = 256$.

3 Variable aleatoria

Una variable aleatoria es una función medible:

$$X : \Omega \to \mathbb{R}.$$

Ejemplo: Definimos X como el número de caras en los tres lanzamientos. Entonces:

$$X(\omega) \in \{0, 1, 2, 3\}.$$

Ejemplos de asignación:

$$X(0,0,0) = 0, \quad X(1,0,0) = 1, \quad X(1,1,0) = 2, \quad X(1,1,1) = 3.$$

3.1 ¿Es una variable aleatoria válida?

Sí, porque:

- El **dominio** es Ω (el espacio muestral de los tres lanzamientos).
- El **rango** está en $\mathbb{R}$ (números enteros entre 0 y 3).
- Para cualquier conjunto de valores $A \subseteq \{0, 1, 2, 3\}$, la preimagen

  $$X^{-1}(A) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in A\}$$

  es un subconjunto de Ω, por lo tanto pertenece a $\mathcal{P}(\Omega)$, el σ-álgebra.

Esta última propiedad garantiza que X es una función medible, lo cual es requisito fundamental para ser una variable aleatoria.

4 Distribución de probabilidad de X

Cada resultado elemental tiene probabilidad 1/8. El número de caras en tres lanzamientos sigue una **distribución binomial**:

$$X \sim \text{Binomial}(n = 3, p = 0.5).$$

La función de probabilidad (pmf) es:

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{3}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^3, \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

Valores explícitos:

$$\mathbb{P}(X = 0) = \tfrac{1}{8}, \quad \mathbb{P}(X = 1) = \tfrac{3}{8}, \quad \mathbb{P}(X = 2) = \tfrac{3}{8}, \quad \mathbb{P}(X = 3) = \tfrac{1}{8}.$$

5 Variable aleatoria: codificación

Podemos definir otra variable aleatoria Y que codifica cada resultado como un número entre 0 y 7:

$$(0, 0, 0) \mapsto 0, \quad (0, 0, 1) \mapsto 1, \quad \dots, \quad (1, 1, 1) \mapsto 7.$$

En este caso, estamos construyendo una función:

$$Y : \Omega \to \{0, 1, \dots, 7\}.$$

5.1 ¿Es una variable aleatoria válida?

Sí, porque:

- El **dominio** sigue siendo Ω (el espacio muestral original).
- El **rango** está en $\mathbb{R}$ (en este caso, números enteros entre 0 y 7).
- Para cualquier conjunto de valores $A \subseteq \{0, \dots, 7\}$, la preimagen

  $$Y^{-1}(A) = \{\omega \in \Omega : Y(\omega) \in A\}$$

  es un subconjunto de Ω, por lo tanto pertenece a $\mathcal{P}(\Omega)$, el σ-álgebra.

Esta última propiedad garantiza que Y es una función medible, lo cual es requisito fundamental para ser una variable aleatoria.

5.2 Distribución de probabilidad

Como cada elemento de Ω es igualmente probable:

$$\mathbb{P}(Y = k) = \tfrac{1}{8}, \quad k = 0, \ldots, 7.$$

Esto corresponde a una **distribución uniforme discreta**.

6 Ejemplo de evento

Consideremos el evento "$X = 1$ y $X = 2$". Formalmente:

$$\mathbb{P}(X = 1 \text{ y } X = 2) = \mathbb{P}(\{\omega : X(\omega) = 1\} \cap \{\omega : X(\omega) = 2\}) = 0,$$

porque X no puede tomar dos valores distintos en el mismo experimento.

En cambio, la probabilidad "$X = 1$ o $X = 2$" es:

$$\mathbb{P}(X = 1 \text{ o } X = 2) = \mathbb{P}(X = 1) + \mathbb{P}(X = 2) = \tfrac{3}{8} + \tfrac{3}{8} = \tfrac{6}{8}.$$

7 Variable aleatoria: primera moneda

Podemos definir otra variable aleatoria Z como el resultado de la primera moneda:

$$Z : \Omega \to \{0, 1\}.$$

Su distribución es:

$$\mathbb{P}(Z = 0) = \tfrac{1}{2}, \quad \mathbb{P}(Z = 1) = \tfrac{1}{2}.$$

Por lo tanto, $Z \sim \text{Bernoulli}(0.5)$.

8 Relación entre Ω, X y $X(\Omega)$

- Ω: espacio muestral, definido independientemente de la variable aleatoria.
- X: función que asigna a cada $\omega \in \Omega$ un número real.
- $X(\Omega)$: conjunto de valores posibles de la variable aleatoria (espacio imagen).

9 Proceso estocástico

Un **proceso estocástico** es una familia de variables aleatorias indexada por un conjunto de tiempos T:

$$\{X_t : t \in T\}.$$

Cada X_t es una variable aleatoria definida sobre el mismo espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

9.1 Ejemplo con tres monedas

Recordemos la variable aleatoria Y que codifica cada resultado de los tres lanzamientos como un número entre 0 y 7:

$$Y : \Omega \to \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}.$$

Si repetimos el experimento de lanzar tres monedas muchas veces, podemos definir una secuencia de variables aleatorias $\{X_n\}_{n\geq 1}$ como:

$$X_n : \Omega \to \{0, 1, \dots, 7\}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

donde X_n corresponde a la codificación del n-ésimo experimento.

9.2 Distribución del proceso

Cada X_n sigue una distribución uniforme discreta:

$$\mathbb{P}(X_n = k) = \tfrac{1}{8}, \quad k = 0, 1, \dots, 7.$$

Si suponemos independencia entre los experimentos, la colección $\{X_n\}_{n\geq 1}$ es una **secuencia de variables aleatorias i.i.d.** (independientes e idénticamente distribuidas).

9.3 Interpretación

- Ω: espacio de todas las secuencias infinitas de lanzamientos de tres monedas.
- X_n: resultado codificado del n-ésimo experimento.
- $\{X_n\}_{n\geq 1}$: proceso estocástico que modela la repetición temporal del experimento.