

# Apuntes de Procesos Estocásticos: Parte 1

Nicolás Moreno (Docente) | Alejandro Daniel José Gómez Flórez (Estudiante)

Este documento y más se encuentra disponible en:  
<https://github.com/aldajo92/NotasProcesosEstocasticos>

## 1 Datos del curso

- **Profesor:** Nicolás Moreno
- **Correo:** `namorenor@eafit.edu.co`
- **Oficina:** 19-604
- **Horario de atención:** Jueves 10:00 a 13:00

## Contenido

1. Cadenas de Markov en tiempo discreto.
2. Procesos de Poisson.
3. Cadenas de Markov en tiempo continuo.
4. Teoría de filas.
5. Martingalas.

## Parciales

- Parcial 1: Semana 5 (21 de agosto) (25%)
- Parcial 2: Semana 11 (22 de septiembre) (25%)
- Parcial 3: Semana 17 (10 de noviembre) (25%)

## Talleres de seguimiento

- Taller: Semana 5 (5%)
- Taller: Semana 11 (5%)

## Bibliografía

- Durrett, R. *Essentials of Stochastic Processes*.
- Ross, S. *Stochastic Processes*.

## 2 ¿Qué es un proceso estocástico?

**Definición:** Un **proceso estocástico** es una colección de variables aleatorias

$$\{X_t\}_{t \in T},$$

donde  $T$  puede ser finito, numerable o no numerable.

- Si  $T$  es finito o numerable, el proceso es **discreto**.
- Si  $T$  es no numerable, el proceso es **continuo**.

El conjunto de posibles valores de  $X_t$  se denota por  $S$  y se llama **espacio de estados**. Al igual que  $T$ ,  $S$  puede ser discreto o continuo.

**Ejemplo:** Artículos defectuosos

1. Número de artículos defectuosos producidos por una máquina cada hora:

$$T : \text{discreto}, \quad S : \text{discreto}.$$

2. Nivel de agua en una represa:

$$T : \text{continuo}, \quad S : \text{continuo}.$$

3. Número de clientes haciendo fila:

$$T : \text{continuo}, \quad S : \text{discreto}.$$

4. Tiempos entre llegadas de clientes

$$\begin{aligned} X_1 &: \text{tiempo hasta la primera llegada,} \\ X_2 &: \text{tiempo entre las llegadas 1 y 2,} \\ X_3 &: \text{tiempo entre las llegadas 2 y 3, } \dots \end{aligned}$$

$$T : \text{discreto}, \quad S : \text{continuo}.$$

**Definición:** Un proceso estocástico puede verse como una función

$$X : \Omega \times T \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (\omega, t) \mapsto X(\omega, t).$$

- Si  $t$  es fijo,  $\omega \mapsto X(\omega, t)$  es una variable aleatoria.
- Si  $\omega$  es fijo,  $t \mapsto X(\omega, t)$  es una trayectoria.

### 1. Espacio de probabilidad:

- $\Omega$  es el conjunto de todos los posibles resultados (espacio muestral).

- Cada elemento  $\omega \in \Omega$  representa un **experimento completo** o un **escenario particular**.

## 2. Proceso estocástico como función:

Formalmente, un proceso estocástico es una función de dos variables:

$$X : \Omega \times T \rightarrow \mathbb{R}$$

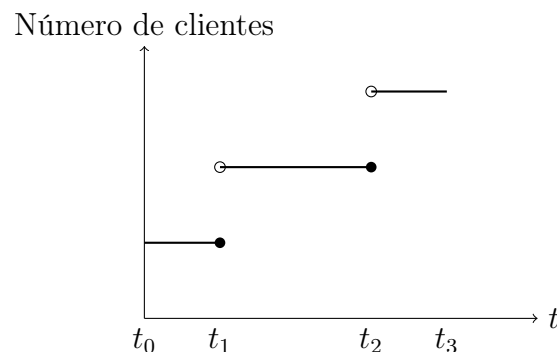
donde:

- $\Omega$  captura la aleatoriedad (cada  $\omega$  es un "universo" posible).
- $T$  es el conjunto de tiempos (índice temporal).
- El valor  $X(\omega, t)$  es el **estado** que el proceso tiene en el tiempo  $t$  en el escenario  $\omega$ .

## 3. Interpretación práctica:

- Fija un  $\omega$ : obtienes una **trayectoria** o **realización** del proceso en todo  $t$ .
- Fija un  $t$ : obtienes una **variable aleatoria**  $X_t(\omega) = X(\omega, t)$  que describe el estado en ese instante, pero depende del azar.

**Ejemplo:** Clientes en fila



## 3 Cadenas de Markov en tiempo discreto

**Definición:** Un proceso  $\{X_n\}_{n \geq 0}$  con espacio de estados  $S$  es una **cadena de Markov** si para todo  $i, j, i_0, \dots, i_{n-1} \in S$  y  $n = 0, 1, 2, \dots$ ,

$$P(X_{n+1} = j \mid X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_0 = i_0) = P(X_{n+1} = j \mid X_n = i).$$

### Probabilidad de transición

La probabilidad

$$P(X_{n+1} = j \mid X_n = i)$$

se llama **probabilidad de transición** del estado  $i$  al estado  $j$  en un paso.

## Cadena homogénea y matriz de transición

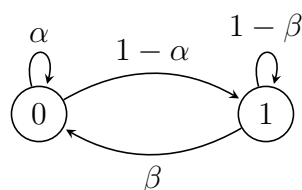
Si  $P(X_{n+1} = j \mid X_n = i)$  no depende de  $n$ , la cadena es **homogénea** y se escribe

$$P(X_{n+1} = j \mid X_n = i) = P_{ij}.$$

Las probabilidades  $P_{ij}$  se organizan en la **matriz de transición**  $P = (P_{ij})$ , cuyas filas verifican  $\sum_j P_{ij} = 1$  y  $P_{ij} \geq 0$ .

**Ejemplo:** Matriz  $2 \times 2$  y grafo

$$P = \begin{pmatrix} \alpha & 1 - \alpha \\ \beta & 1 - \beta \end{pmatrix}$$

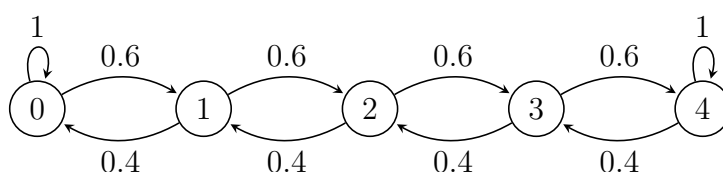


**Ejemplo (modelo de lluvia):** Estados 0 =lluvia, 1 =no lluvia. Con parámetros  $\alpha, \beta$ :

$$P(X_{n+1} = 0 \mid X_n = 0) = \alpha, \quad P(X_{n+1} = 0 \mid X_n = 1) = \beta.$$

**Ejemplo (juego de apuestas):** En cada juego se gana 1 con probabilidad 0.6 y se pierde 1 con probabilidad 0.4. El jugador se retira al llegar a 0 o 4. Sea  $X_n$  la cantidad de dinero al tiempo  $n$ .

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.4 & 0 & 0.6 & 0 & 0 \\ 0 & 0.4 & 0 & 0.6 & 0 \\ 0 & 0 & 0.4 & 0 & 0.6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

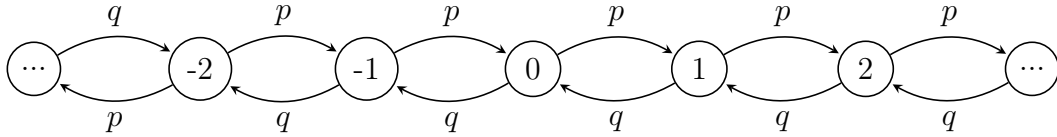


**Ejemplo (paseo aleatorio):** Considere un proceso  $\{X_n\}_{n \geq 0}$  con espacio de estados  $S = \mathbb{Z}$  y sus probabilidades de transición están dadas por:

$$\begin{aligned} P(i, i+1) &= p \\ P(i, i-1) &= q \end{aligned}$$

De forma más general:

$$P(i, j) = \begin{cases} p, & \text{si } j = i + 1, \\ q, & \text{si } j = i - 1, \\ r, & \text{si } j = i \end{cases} \quad p + q + r = 1.$$



**Ejemplo (ramificación):** Supóngase que un organismo tiene  $j$  hijos con probabilidad  $\alpha_j$ :

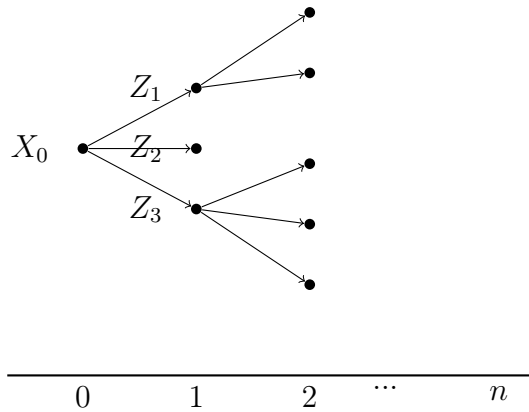
$$P(Z = j) = \alpha_j$$

donde  $Z$  es el número de hijos de un individuo.

- $X_0$ : número de individuos en la generación 0.
- $X_1$ : número de individuos en la generación 1.
- $X_2$ : número de individuos en la generación 2, etc.

$$P(X_{n+1} = j \mid X_n = i) = \begin{cases} 0, & i = 0, j > 0, \\ 1, & i = 0, j = 0, \\ P\left(\sum_{k=1}^i Z_k = j\right), & i > 0, j \geq 0, \end{cases}$$

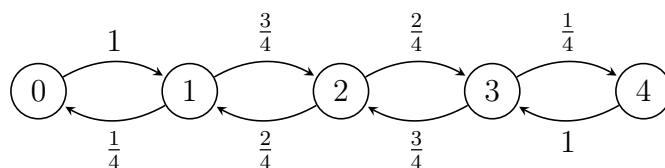
donde  $Z_k$  son independientes con la misma ley que  $Z$ .



**Ejemplo (urna de Ehrenfest):** Suponga que hay  $N$  bolas numeradas de 1 a  $N$  y distribuidas en 2 urnas. En el tiempo  $n$  se selecciona al azar una bola del conjunto  $\{1, 2, \dots, N\}$ .

- Si la bola corresponde a una de la urna 1, se pasa a la urna 2.
- Si la bola corresponde a una de la urna 2, se pasa a la urna 1.

Sea  $X_n$  el número de bolas en la urna 1 en el tiempo  $n$ . El diagrama de estados es:



La matriz de transición  $P$  para  $N$  bolas es:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \frac{1}{N} & 0 & \frac{N-1}{N} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{N} & 0 & \frac{N-2}{N} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{N} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{N} & 0 \end{pmatrix}$$

donde:

- $X_0$ : número de bolas en la urna 1 en el tiempo inicial.
- $X_1$ : número de bolas en la urna 1 en el siguiente paso.

Las probabilidades de transición son:

$$P(X_{n+1} = j \mid X_n = i) = \begin{cases} \frac{N-i}{N}, & \text{si } j = i + 1 \text{ (se transfiere de urna 2 a urna 1),} \\ \frac{i}{N}, & \text{si } j = i - 1 \text{ (se transfiere de urna 1 a urna 2),} \\ 0, & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases}$$

**Problema:** Sea  $X_n$  el clima en el día  $n$ . Suponga que un modelo para este proceso es una **cadena de Markov** con matriz de transición dada por

$$P = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.6 & 0.0 \\ 0.2 & 0.5 & 0.3 \\ 0.1 & 0.7 & 0.2 \end{pmatrix}$$

donde los estados son:

$$1 = \text{Lluvia}, \quad 2 = \text{Nublado}, \quad 3 = \text{Sol}.$$

Hoy es lunes y está nublado. ¿Cuál es la probabilidad de que el martes esté soleado y el miércoles esté lloviendo?

Un proceso estocástico  $\{X_n\}$  cumple que:

$$P(X_n = j \mid X_{n-1} = i, X_{n-2} = i_{n-2}, \dots, X_0 = i_0) = P(X_n = j \mid X_{n-1} = i) = P_{ij}.$$

**Solución:**

Se busca:

$$P(X_2 = 1, X_1 = 3 \mid X_0 = 2).$$

Por la propiedad de Markov:

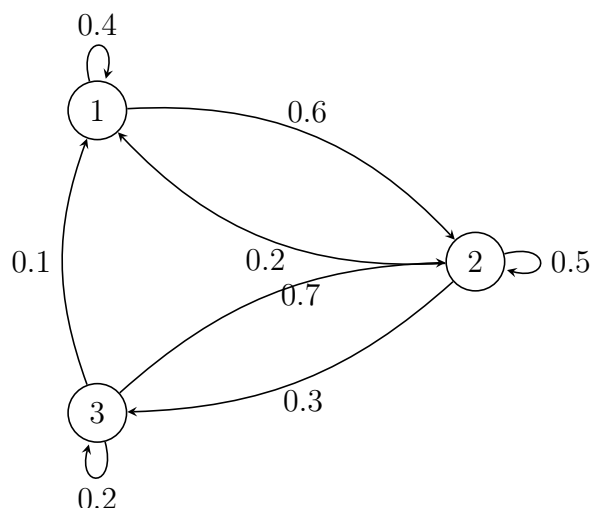
$$P(X_2 = 1, X_1 = 3 \mid X_0 = 2) = P(2, 3) \cdot P(3, 1).$$

Usando la matriz de transición:

$$P(2, 3) = 0.3, \quad P(3, 1) = 0.1,$$

entonces:

$$P(X_2 = 1, X_1 = 3 \mid X_0 = 2) = 0.3 \times 0.1 = 0.03.$$



## Probabilidades de transición en $n$ pasos

**Definición:** Las probabilidades de transición en  $n$  pasos del estado  $i$  al estado  $j$  se denotan por:

$$p_{ij}^{(n)} = P(X_n = j \mid X_0 = i), \quad n \geq 0, \quad i, j \in S.$$

En particular:

$$p_{ij}^{(1)} = P_{ij}, \quad p_{ij}^{(0)} = \delta_{ij}$$

donde  $\delta_{ij}$  es el delta de Kronecker. Se organiza en la matriz:

$$P^{(n)} = \begin{pmatrix} p_{11}^{(n)} & p_{12}^{(n)} & p_{13}^{(n)} \\ p_{21}^{(n)} & p_{22}^{(n)} & p_{23}^{(n)} \\ p_{31}^{(n)} & p_{32}^{(n)} & p_{33}^{(n)} \end{pmatrix}$$

**Propiedades:**

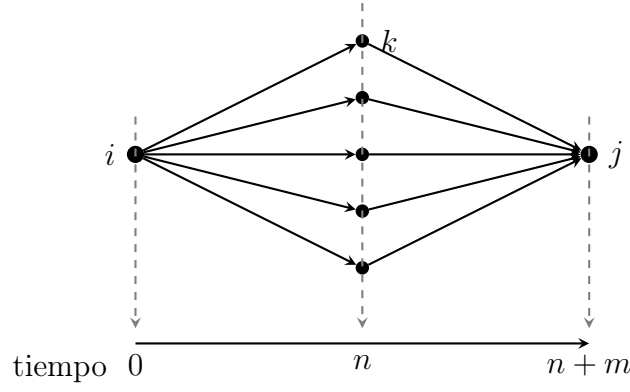
- $P^{(0)} = I$  (matriz identidad).
- $P^{(1)} = P$  (matriz de transición de un paso).

**Teorema:**

$$P^{(n)} = P^{(m)} \cdot P^{(n-m)}, \quad \text{en particular } P^{(n)} = P \cdot P \cdots P \text{ (} n \text{ veces)} = P^n.$$

## Ecuaciones de Chapman–Kolmogorov

Las **ecuaciones de Chapman–Kolmogorov** calculan las probabilidades de transición en múltiples pasos. Estas ecuaciones establecen que la probabilidad de transición del estado  $i$  al estado  $j$  en  $n + m$  pasos puede descomponerse como la suma de todas las posibles transiciones intermedias a través de estados  $k$  en el paso  $n$ .



$$P_{ij}^{n+m} = \sum_{k \in S} P_{ik}^n P_{kj}^m$$

**Demostración:**

$$\begin{aligned}
P_{ij}^{n+m} &= P(X_{n+m} = j \mid X_0 = i) \\
&= \frac{P(X_{n+m} = j, X_0 = i)}{P(X_0 = i)} \\
&= \frac{P(X_{n+m} = j, \bigcup_{k \in S} \{X_n = k\}, X_0 = i)}{P(X_0 = i)} \\
&= \frac{\sum_{k \in S} P(X_{n+m} = j, X_n = k, X_0 = i)}{P(X_0 = i)} \\
&= \sum_{k \in S} \frac{P(X_{n+m} = j, X_n = k, X_0 = i)}{P(X_0 = i)} \cdot \frac{P(X_n = k, X_0 = i)}{P(X_n = k, X_0 = i)} \\
&= \sum_{k \in S} P(X_{n+m} = j \mid X_n = k, X_0 = i) \cdot P(X_n = k \mid X_0 = i) \\
&= \sum_{k \in S} P(X_m = j \mid X_0 = k) \cdot P(X_n = k \mid X_0 = i) \\
&= \sum_{k \in S} P^m(k, j) \cdot P^n(i, k) \\
&= \sum_{k \in S} P^n(i, k) \cdot P^m(k, j)
\end{aligned}$$

**Propiedad de Markov:**

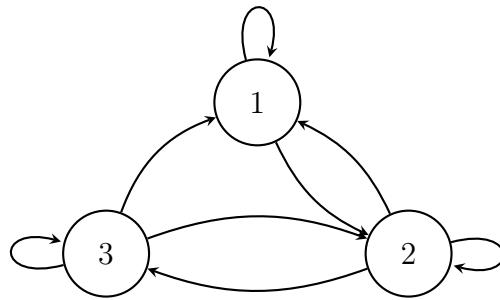
$$P(X_{n+m} = j \mid X_n = k, X_0 = i) = P(X_{n+m} = j \mid X_n = k)$$

**Definición de probabilidades de transición:**

$$P^n(i, k) = P(X_n = k \mid X_0 = i), \quad P^m(k, j) = P(X_m = j \mid X_0 = k)$$



## Distribución inicial y probabilidades marginales



$$\begin{matrix} q(1) & q(2) & q(3) \\ (0.3, & 0.4, & 0.3) \end{matrix}$$

**Definición:** La medida  $q(i) = P(X_0 = i)$  definida para todo  $i \in S$  se conoce como **distribución inicial** de la cadena.

**Propiedades:**

1.  $0 \leq q(i)$  para  $i \in S$ .
2.  $\sum_{i \in S} q(i) = 1$ .
3.  $P(X_n = j)$ :

$$\begin{aligned} P(X_n = j) &= \sum_{i \in S} P(X_n = j, X_0 = i) \\ &= \sum_{i \in S} P(X_n = j, X_0 = i) \cdot \frac{P(X_0 = i)}{P(X_0 = i)} \\ &= \sum_{i \in S} P(X_n = j \mid X_0 = i) \cdot P(X_0 = i) \\ &= \sum_{i \in S} P^n(i, j) \cdot q(i) \end{aligned}$$

**Nota:**  $P(X_n = j)$  es la multiplicación del vector  $q$  con la columna  $j$  de la matriz  $P^{(n)}$ .

**Problema:** Considere una máquina que al inicio del día está funcionando o está dañada.

- Estado 0 = Dañada
- Estado 1 = En buen estado

Suponga que el 20% de los días la máquina amanece dañada, y tiene una matriz de transición:

$$P = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.7 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix}$$

Determinar:

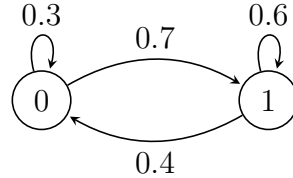
1.  $P(X_2 = 0, X_1 = 1, X_0 = 0) = q(0)P(0, 1)P(1, 0)$

2.  $P(X_1 = 0)$

3.  $P(X_2 = 0)$

**Solución:**

$q = (0.2, 0.8)$  donde  $q(0) = P(X_0 = 0)$



1)  $P(X_2 = 0, X_1 = 1, X_0 = 0)$ :

Por la propiedad de Markov:

$$\begin{aligned}
 P(X_2 = 0, X_1 = 1, X_0 = 0) &= P(X_2 = 0 \mid X_1 = 1)P(X_1 = 1 \mid X_0 = 0)P(X_0 = 0) \\
 &= P(1, 0) \times P(0, 1) \times q(0) \\
 &= 0.4 \times 0.7 \times 0.2 = 0.056
 \end{aligned}$$

2)  $P(X_1 = 0) = q(0)P(0, 0) + q(1)P(1, 0) = 0.2 \times 0.3 + 0.8 \times 0.4 = 0.38$

3)  $P(X_2 = 0) = P(X_2 = 0, X_1 = 0) + P(X_2 = 0, X_1 = 1)$

$$\begin{aligned}
 &= P(X_2 = 0 \mid X_1 = 0)P(X_1 = 0) + P(X_2 = 0 \mid X_1 = 1)P(X_1 = 1) \\
 &= P(0, 0)P(X_1 = 0) + P(1, 0)P(X_1 = 1) \\
 &= 0.3 \times 0.38 + 0.4(1 - P(X_1 = 0)) \\
 &= 0.3 \times 0.38 + 0.4 \times 0.62 = 0.36
 \end{aligned}$$

## Clasificación de estados de una cadena de Markov

**Definición:** Un estado  $j$  es **accesible** desde un estado  $i$  si existe  $n \geq 0$  tal que

$$P_{ij}^{(n)} > 0$$

y lo denotamos por  $i \rightarrow j$ .

**Definición:** Si  $i \rightarrow j$  y  $j \rightarrow i$  entonces se dice que  $i$  y  $j$  se comunican, y denotamos por  $i \leftrightarrow j$ .

- **Reflexiva:** Para todo  $i \in S$ ,  $i \rightarrow i$ .  $P_{ii}^{(0)} = 1 > 0$ .
- **Simétrica:** Si  $i \leftrightarrow j$  entonces  $j \leftrightarrow i$ .
- **Transitiva:** Si  $i \leftrightarrow k$  y  $k \leftrightarrow j$  entonces  $i \leftrightarrow j$ .

**Observación:** La relación  $\leftrightarrow$  es de equivalencia.

**Demostración:**  $i \leftrightarrow k$ ; existe  $n \geq 0$  tal que  $P_{ik}^{(n)} > 0$

$k \leftrightarrow j$ ; existe  $m \geq 0$  tal que  $P_{kj}^{(m)} > 0$ .

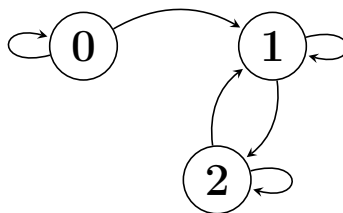
$$P_{ij}^{(n+m)} = \sum_{l \in S} P_{il}^{(n)} P_{lj}^{(m)} \geq P_{ik}^{(n)} P_{kj}^{(m)} > 0.$$

Las clases de equivalencia en una cadena de Markov (o en cualquier relación de equivalencia en matemáticas) forman una partición del espacio de estados. Eso significa:

- Cada estado pertenece a una sola clase.
- Las clases son disjuntas entre sí.
- La unión de todas las clases cubre todos los estados.

**Problema:** Determine las clases de Equivalencia

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$



$$1 \leftrightarrow 2$$

$$0 \leftrightarrow 0$$

$$C_A = \{1, 2\}$$

$$C_B = \{0\}$$

En resumen:

- Espacio de estados:  $S = \{0, 1, 2\}$
- Clases de equivalencia encontradas:  $C_A = \{1, 2\}$  y  $C_B = \{0\}$
- Son disjuntas:  $\{1, 2\} \cap \{0\} = \emptyset$
- Cubren todo el espacio de estados:  $\{1, 2\} \cup \{0\} = \{0, 1, 2\}$

**Definición:** Se dice que una cadena de Markov es irreducible si existe una única clase, es decir, todos los estados se comunican entre sí.

**Estados transitorios y recurrentes.**

**Definición:** Sea

$$f_{ii}^{(n)} = P(X_n = i, X_{n-1} \neq i, \dots, X_1 \neq i | X_0 = i)$$

La probabilidad de primer retorno al estado  $i$  en  $n$  pasos, dado que se inició en  $i$ , se define como:

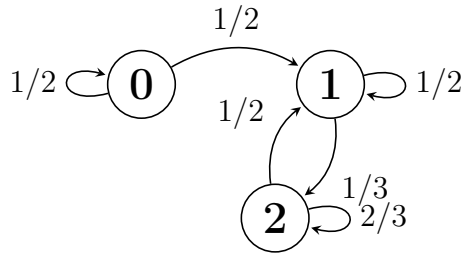
$$f_i = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ii}^{(n)} \quad \text{probabilidad de que regrese al estado } i \text{ eventualmente}$$

Diremos que el estado  $i$  es:

- **Recurrente:** si  $f_i = 1 \iff 1 - f_i = 0$
- **Transitorio:** si  $f_i < 1 \iff 1 - f_i > 0$

**Ejemplo:** Sea la cadena de Markov con matriz de transición:

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$



Se procede a calcular  $f_0$ :

$$f_{00}^{(1)} = P(X_1 = 0 | X_0 = 0) = 1/2$$

$$f_{00}^{(2)} = P(X_2 = 0, X_1 \neq 0 | X_0 = 0) = P(0, 1) \cdot P(1, 0) = \frac{1}{2} \cdot 0 = 0$$

$$f_{00}^{(3)} = P(X_3 = 0, X_2 \neq 0, X_1 \neq 0 | X_0 = 0) = P(0, 1) \cdot P(1, 2) \cdot P(2, 0) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 0 = 0$$

Para  $n \geq 4$ , observamos que  $f_{00}^{(n)} = 0$  porque desde el estado 0 no podemos regresar sin pasar por el estado 1, y desde el estado 1 no podemos regresar al estado 0 (ya que  $P(1, 0) = 0$ ). Por lo tanto:

$$f_{00}^{(n)} = \begin{cases} 1/2 & \text{si } n = 1 \\ 0 & \text{si } n \geq 2 \end{cases}$$

$$f_0 = \sum_{n=1}^{\infty} f_{00}^{(n)} = \frac{1}{2} + 0 + 0 + \dots = \frac{1}{2} < 1$$

El estado 0 es **transitorio**.

Se procede a calcular  $f_1$ .

$$f_{11}^{(1)} = P(X_1 = 1 \mid X_0 = 1) = 1/2$$

$$f_{11}^{(2)} = P(X_2 = 1, X_1 \neq 1 \mid X_0 = 1) = P(1, 2) \cdot P(2, 1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

$$f_{11}^{(3)} = P(X_3 = 1, X_2 \neq 1, X_1 \neq 1 \mid X_0 = 1) = P(1, 2) \cdot P(2, 2) \cdot P(2, 1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$$

$$\begin{aligned} f_{11}^{(4)} &= P(X_4 = 1, X_3 \neq 1, X_2 \neq 1, X_1 \neq 1 \mid X_0 = 1) \\ &= P(1, 2) \cdot P(2, 2) \cdot P(2, 2) \cdot P(2, 1) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{27} \end{aligned}$$

En general, para  $n \geq 2$ :

$$f_{11}^{(n)} = P(1, 2) \cdot [P(2, 2)]^{n-2} \cdot P(2, 1) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}$$

Por lo tanto:

$$f_{11}^{(n)} = \begin{cases} 1/2 & \text{si } n = 1 \\ \frac{1}{6} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2} & \text{si } n \geq 2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} f_1 &= \sum_{n=1}^{\infty} f_{11}^{(n)} \\ &= 1/2 + \sum_{n=2}^{\infty} 1/6 (2/3)^{n-2} \\ &= 1/2 + 1/6 \sum_{k=0}^{\infty} (2/3)^k \\ &= 1/2 + 1/6 \left( \frac{1}{1 - 2/3} \right) \\ &= 1/2 + 1/6 \cdot 3 \\ &= 1/2 + 1/2 = 1 \end{aligned}$$

Por lo tanto, el estado 1 es **recurrente**.

Se procede a calcular  $f_2$ .

$$f_{22}^{(1)} = P(X_1 = 2 \mid X_0 = 2) = 2/3$$

$$f_{22}^{(2)} = P(X_2 = 2, X_1 \neq 2 \mid X_0 = 2) = P(2, 1) \cdot P(1, 2) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

$$f_{22}^{(3)} = P(X_3 = 2, X_2 \neq 2, X_1 \neq 2 \mid X_0 = 2) = P(2, 1) \cdot P(1, 1) \cdot P(1, 2) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$$

En general, para  $n \geq 2$ :

$$f_{22}^{(n)} = P(2, 1) \cdot [P(1, 1)]^{n-2} \cdot P(1, 2) = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$$

Por lo tanto:

$$f_{22}^{(n)} = \begin{cases} 2/3 & \text{si } n = 1 \\ \frac{1}{6} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} & \text{si } n \geq 2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} f_2 &= \sum_{n=1}^{\infty} f_{22}^{(n)} \\ &= \frac{2}{3} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{6} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} \\ &= \frac{2}{3} + \frac{1}{6} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k \\ &= \frac{2}{3} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{1 - 1/2} \\ &= \frac{2}{3} + \frac{1}{6} \cdot 2 \\ &= \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 1 \end{aligned}$$

El estado 2 es **recurrente**.

Recordemos que:  $\forall i \in S$

$$f_{ii}^{(n)} = P(X_n = i, X_{n-1} \neq i, \dots, X_1 \neq i \mid X_0 = i) \quad (1)$$

$$f_i = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ii}^{(n)} \quad (2)$$

---

$f_i < 1$  -  $i$  transitorio

$f_i = 1$  -  $i$  recurrente

**Teorema:** Para una cadena de Markov con matriz de transición  $P = (P_{ij})$ :

- $\sum_{n=0}^{\infty} P_{ii}^{(n)} = \infty$  si, y solo si el estado  $i$  es recurrente
- $\sum_{n=0}^{\infty} P_{ii}^{(n)} < \infty$  si, y solo si el estado  $i$  es transitorio

**Demostración:** Tarea.

**Propiedad:** Sean  $j$  y  $k$  estados de una cadena de Markov entonces:

1. Si  $j$  es recurrente y  $j \leftrightarrow k$  entonces  $k$  es recurrente
2. Si  $j$  es transitorio y  $j \leftrightarrow k$  entonces  $k$  es transitorio

**Demostración:** Sea  $j$  recurrente y  $j \leftrightarrow k$ .

- $j$  recurrente  $\leftrightarrow \sum_{t=0}^{\infty} P_{jj}^{(t)} = \infty$

- $j \leftrightarrow k \leftrightarrow$  existen  $m, n$  tales que  $P_{jk}^{(n)} > 0$  y  $P_{kj}^{(m)} > 0$

$$P_{kk}^{n+m+t} \geq P_{kj}^{(m)} P_{jj}^{(t)} P_{jk}^{(n)}$$

$$\sum_{t=0}^{\infty} P_{kk}^{n+m+t} \geq P_{kj}^{(m)} P_{jk}^{(n)} \sum_{t=0}^{\infty} P_{jj}^{(t)} = \infty$$

Por teorema presentado anteriormente  $k$  es recurrente.

**Nota:** La demostración del caso transitorio es análoga.

**Propiedad:** Sea  $X_n$  una cadena de Markov y  $j$  uno de sus estados. El estado  $j$  es recurrente, si y solo si el número esperado de visitas al estado  $j$  es infinito, comenzando en  $j$ .

**Demostración:** Iniciamos por:

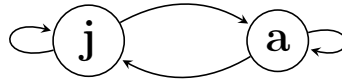
$$E(I_n) = P(X_n = j)$$

Sea  $I_n$  la variable aleatoria que indica cuantas veces la cadena pasa por el estado  $j$ :

$$I_n = \begin{cases} 1 & \text{si } X_n = j \\ 0 & \text{si } X_n \neq j \end{cases}$$

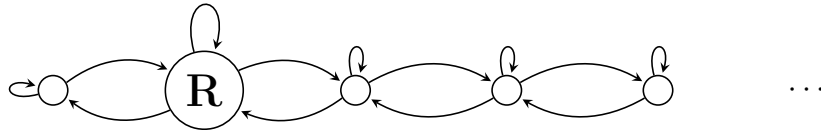
$$P(X_1 = j \mid X_0 = j)$$

$$P(X_2 = j \mid X_0 = j)$$



$\sum_{n=0}^{\infty} I_n :=$  número de visitas al estado  $j$

$$\begin{aligned} E\left(\sum_{n=0}^{\infty} I_n \mid X_0 = j\right) &= \sum_{n=0}^{\infty} E(I_n \mid X_0 = j) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} P(X_n = j \mid X_0 = j) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} P_{jj}^{(n)} = \infty \end{aligned}$$



**Definición:** Sea

$$\tau_i = \min\{n \geq 1 : X_n = i\}$$

el tiempo de retorno al estado  $i$ .

$$E(\tau_i \mid X_0 = i)$$

es el tiempo esperado de retorno al estado  $i$ .

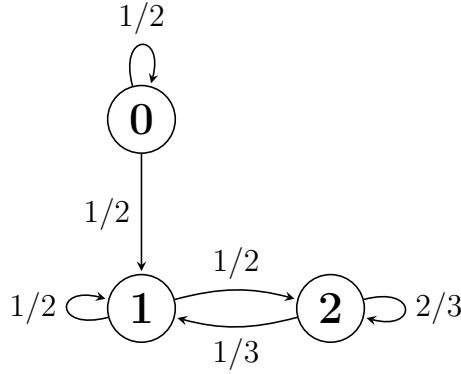
$$m_i = E(\tau_i \mid X_0 = i) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot f_{ii}^{(n)}$$

**Definición:** Se dice que un estado recurrente es:

1. recurrente positivo si  $m_i < \infty$ .
2. recurrente nulo si  $m_i = \infty$ .

**Observación:** Si el espacio de estados  $S$  es finito todo estado recurrente es recurrente positivo. Si además  $j$  es recurrente positivo (nulo) y  $j \leftrightarrow k$  entonces  $k$  es recurrente positivo (nulo).

**Ejemplo:**



$$f_{11}^{(n)} = \begin{cases} 1/2 & \text{Para } n = 1 \\ 1/6(2/3)^{n-2} & \text{para } n > 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 m_1 &= \sum_{n=1}^{\infty} n f_{11}^{(n)} = \frac{1}{2} + \sum_{n=2}^{\infty} n \frac{1}{6} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2} \\
 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \sum_{k=0}^{\infty} (k+2) \left(\frac{2}{3}\right)^k \\
 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \left( \sum_{k=0}^{\infty} k \left(\frac{2}{3}\right)^k + 2 \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^k \right) \\
 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \left( \sum_{k=0}^{\infty} k \left(\frac{2}{3}\right)^k + 2 \left( \frac{1}{1 - 2/3} \right) \right) \\
 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \left( \sum_{k=0}^{\infty} k \left(\frac{2}{3}\right)^k + 6 \right) \\
 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \sum_{k=0}^{\infty} k \left(\frac{2}{3}\right)^k + 1.
 \end{aligned}$$



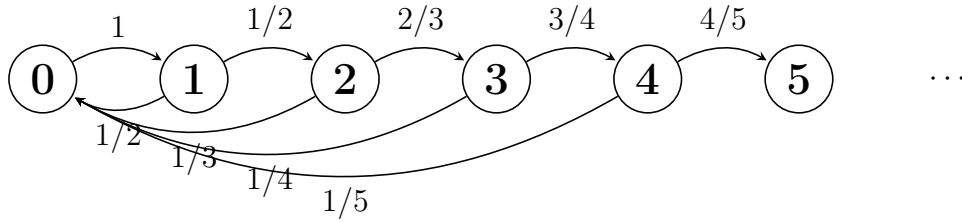
$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{6} \times \frac{3}{2} \sum_{k=1}^{\infty} k \left(\frac{2}{3}\right)^k \quad \text{geom}(2/3) \\
&= \frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{6} \times \frac{3}{2} \left(\frac{2/3}{1-2/3}\right) \\
&= \frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{6} \times 3 \times \frac{2}{3} = \frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{3} = \frac{11}{6}
\end{aligned}$$

El 1 es recurrente positivo; pues  $m_1 = \frac{11}{6} < \infty$ .

Y como  $1 \leftrightarrow 2$  entonces 2 es recurrente positivo.

**Ejemplo:** Consideremos la siguiente cadena de Markov.

$$P_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = 0, j = 1 \\ \frac{i}{i+1} & \text{si } i \geq 1, j = i+1 \\ \frac{1}{i+1} & \text{si } i \geq 1, j = 0 \\ 0 & \text{e.o.c.} \end{cases}$$



¿D es recurrente? y ¿0 es positivo o nulo?

C

$$f_{00}^{(1)} = P(X_1 = 0 \mid X_0 = 0) = 0$$

$$f_{00}^{(2)} = P(X_2 = 0, X_1 \neq 0 \mid X_0 = 0) = P(0, 1)P(1, 0) = 1/2$$

$$f_{00}^{(3)} = P(X_3 = 0, X_2 \neq 0, X_1 \neq 0 \mid X_0 = 0) = P(0, 1)P(1, 2)P(2, 0) = 1 \times 1/2 \times 1/3$$

$$\begin{aligned}
f_{00}^{(4)} &= P(X_4 = 0, X_3 \neq 0, X_2 \neq 0, X_1 \neq 0 \mid X_0 = 0) \\
&= P(0, 1)P(1, 2)P(2, 3)P(3, 0) \\
&= 1 \times 1/2 \times 2/3 \times 1/4 = 1/3 \times 1/4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_{00}^{(5)} &= P(X_5 = 0, X_4 \neq 0, X_3 \neq 0, X_2 \neq 0, X_1 \neq 0 \mid X_0 = 0) \\
&= P(0, 1)P(1, 2)P(2, 3)P(3, 4)P(4, 0) \\
&= 1 \times 1/2 \times 2/3 \times 3/4 \times 1/5 = 1/4 \times 1/5
\end{aligned}$$

$$f_{00}^{(n)} = \frac{1}{n} \times \frac{1}{n-1} \quad \text{para } n \geq 2 \quad (3)$$

$$if_0 = 1?$$

$$\begin{aligned} f_0 &= \sum_{n=1}^{\infty} f_{00}^{(n)} \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} \times \frac{1}{n-1} \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} \left( \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) \end{aligned}$$

Serie telescópica:

$$1/1 - 1/2 + 1/2 - 1/3 + 1/3 - 1/4 + 1/4 - 1/5 + \cdots + 1/(m-1) - 1/m \quad (4)$$

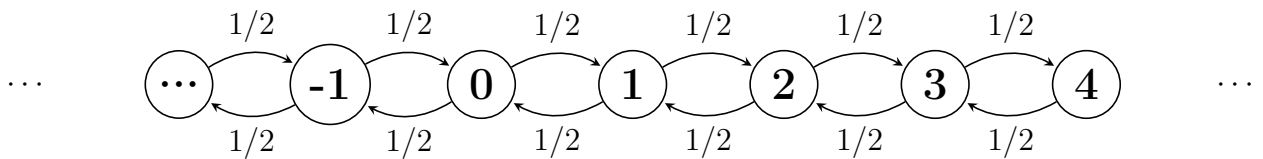
$$\begin{aligned} &= 1 - 1/m \\ f_0 &= \lim_{m \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{1}{m} \right) = 1 \end{aligned}$$

**Ejemplo:** Consideremos la siguiente cadena de Markov.

$$P_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = 0, j = 1 \\ \frac{i}{i+1} & \text{para } i \geq 1, j = i+1 \\ \frac{1}{i+1} & \text{para } i \geq 1, j = 0 \\ 0 & \text{e.o.c.} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} m_0 &= \sum_{n=1}^{\infty} n f_{00}^{(n)} \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} n \frac{1}{n} \frac{1}{n-1} \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n-1} \\ &= \infty \end{aligned}$$

El estado 0 es recurrente nulo y como  $j \leftrightarrow 0$ ;  $j \in S$  entonces todos los estados son recurrentes nulos.



$$P^n(0,0) = \begin{cases} > 0 & \text{si } n \text{ es par} \\ 0 & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

## Periodicidad de la cadena

**Definición:** Se dice que el estado  $i$  tiene periodo  $d$  si

$$d = \text{mcd}\{n : P_{ii}^{(n)} > 0\} \quad (5)$$

- Si  $d = 1$  entonces el estado  $i$  es aperiódico.
- Si  $d > 1$  entonces el estado  $i$  es periódico.

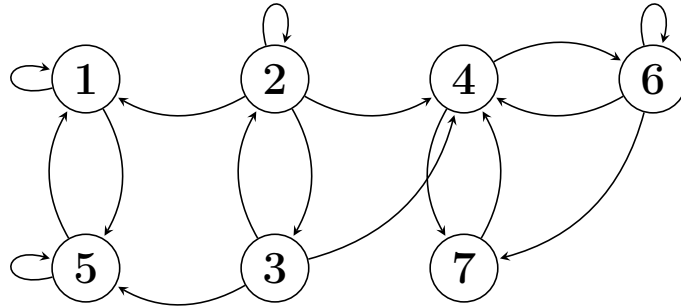
Diremos que la cadena es aperiódica si todos sus estados son aperiódicos.

**Propiedades:**

1. Si  $i$  tiene periodo  $d$  y  $i \leftrightarrow j$  entonces  $j$  tiene periodo  $d$ .
2. Si  $P_{ii} > 0$  entonces  $i$  es aperiódico ( $d = 1$ ).

**Ejemplo:** Considere

$$P = \begin{pmatrix} 0.3 & 0 & 0 & 0 & 0.7 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0.2 & 0.3 & 0.4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0 & 0.5 & 0.3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0.6 & 0 & 0 & 0 & 0.4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.4 & 0 & 0.2 & 0.4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



Las siguientes son las clases de equivalencia identificadas:

$$\begin{aligned} C_1 &= \{5, 1\} \\ C_2 &= \{3, 2\} \\ C_3 &= \{4, 6, 7\} \end{aligned}$$

Para cada estado  $i$ , calculamos  $d_i = \text{mcd}\{n : P^n(i, i) > 0\}$ :

$$\begin{aligned}
d_1 &= \text{mcd}\{n : P^n(1, 1) > 0\} = \text{mcd}\{1, 2, 3, \dots\} = 1 \\
d_5 &= 1 \\
d_3 &= \text{mcd}\{n : P^n(3, 3) > 0\} = \text{mcd}\{2, 3, 4, 5, \dots\} = 1 \\
d_2 &= 1 \\
d_7 &= \text{mcd}\{n : P^n(7, 7) > 0\} = \text{mcd}\{2, 3, 4, 5, 6, \dots\} = 1 \\
d_4 &= d_6 = 1
\end{aligned}$$

## Probabilidades Estacionarias

**Definición:**  $\pi$  es una medida estacionaria si

$$\pi P = \pi \quad (6)$$

donde  $\pi P_j = P(X_n = j)$

**Ejemplo:** Considere la distribución inicial  $\pi_0 = (0.2, 0.8)$  y la matriz de transición:

$$P = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.7 \\ 0.1 & 0.9 \end{pmatrix}$$

Calculamos  $P(X_1 = 0)$ :

$$\begin{aligned}
P(X_1 = 0) &= 0.3 \times 0.2 + 0.8 \times 0.1 \\
&= 0.06 + 0.08 \\
&= 0.14
\end{aligned}$$

**Ejemplo:** Considere la matriz de transición:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 3/4 & 1/4 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

¿Cuánto vale  $\pi$ ?

La distribución estacionaria satisface  $\pi P = \pi$ :

$$(\pi_1, \pi_2, \pi_3) \begin{pmatrix} 0 & 3/4 & 1/4 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (\pi_1, \pi_2, \pi_3)$$

Esto nos da el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\pi_2 + \pi_3 &= \pi_1 \\
\frac{3}{4}\pi_1 &= \pi_2 \\
\frac{1}{4}\pi_1 + \frac{1}{2}\pi_2 &= \pi_3
\end{aligned}$$

Con la condición de normalización:

$$\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1 \quad (7)$$

Resolviendo el sistema:

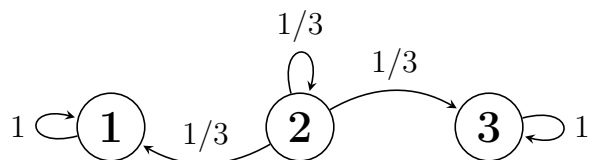
$$\pi_1 = \frac{8}{19}, \quad \pi_2 = \frac{6}{19}, \quad \pi_3 = \frac{5}{19}$$

Por lo tanto,  $P(X_{m-1} = 1) = \frac{8}{19}$ .

**Ejemplo:** Considere la matriz de transición:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Determina  $\pi = (\pi_1, \pi_2, \pi_3)$ .



La distribución estacionaria satisface  $\pi P = \pi$ :

$$(\pi_1, \pi_2, \pi_3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (\pi_1, \pi_2, \pi_3)$$

Esto nos da el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} \pi_1 + \frac{1}{3}\pi_2 &= \pi_1 \\ \frac{1}{3}\pi_2 &= \pi_2 \\ \frac{1}{3}\pi_2 + \pi_3 &= \pi_3 \end{aligned}$$

De la segunda ecuación:  $\frac{1}{3}\pi_2 = \pi_2 \Rightarrow \pi_2 = 0$

De la primera ecuación:  $\pi_1 + \frac{1}{3}\pi_2 = \pi_1 \Rightarrow \pi_1 = \pi_1$  (siempre se cumple)

De la tercera ecuación:  $\frac{1}{3}\pi_2 + \pi_3 = \pi_3 \Rightarrow \pi_3 = \pi_3$  (siempre se cumple)

Con la condición de normalización:  $\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1$

Como  $\pi_2 = 0$ , tenemos:  $\pi_1 + \pi_3 = 1$

Por lo tanto,  $\pi = (\alpha, 0, 1 - \alpha)$  donde  $\alpha \in (0, 1)$ .

**Propiedad:** La cadena de Markov tiene una única medida estacionaria si es irreducible (recurrencia positiva).

**Propiedad:** Si  $\pi$  es una medida estacionaria, entonces  $X_n \sim \pi$ .  $P_\pi(X_n = j) = \pi(j)$ .

**Demostración:**

- $\pi P = \pi$

- $\pi P^2 = \pi P P = \pi P = \pi$
- Si  $\pi P^n = \pi$  entonces:  
 $\pi P^{n+1} = \pi P^n P = \pi P = \pi$

Por lo tanto,  $\pi P^n = \pi$  para todo  $n \geq 1$ .

Si  $X_0 \sim \pi$  entonces  $X_n \sim \pi$ .

$$P(X_n = j) = \pi(j) \quad (8)$$

**Teorema:** Si la cadena de Markov es irreducible y sus estados son recurrentes positivos, entonces la medida estacionaria  $\pi$  existe y es única. Además:

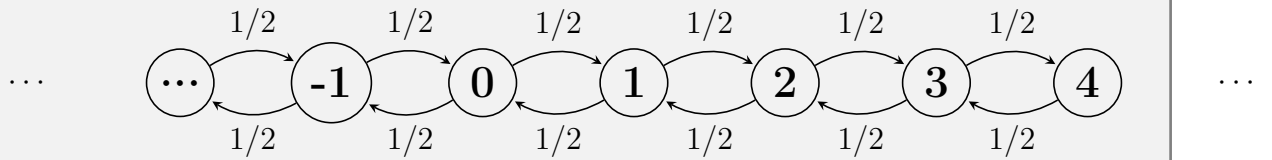
$$\pi_i = \frac{1}{m_i}, \quad i \in S$$

donde  $m_i$  es el **tiempo medio de retorno** al estado  $i$ , es decir,

$$m_i = E(\tau_i \mid X_0 = i) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot f_{ii}^{(n)}$$

(esperanza del tiempo hasta regresar a  $i$  partiendo de  $i$ )

- $\lim_{n \rightarrow \infty} P^n(x, y) = \pi(y)$ .
- Si el estado  $y$  es transitorio;  $\sum_{n=1}^{\infty} P^n(x, y) < \infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} P^n(x, y) = 0$ .



$$P^{2n+1}(0, 0) = 0$$

$$P^{2n}(0, 0) > 0.$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} P^n(0, 0)$  no existe!  
 $\lim_{n \rightarrow \infty} P^{dn}(0, 0)$  sí existe.

**Teorema:** Sea  $X_n$  una cadena de Markov  $\{X_n\}_{n \geq 0}$  cuyos estados son irreducibles; recurrentes positivos y aperiódicos. Entonces:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P^n(x, y) = \pi(y)$$

**Demostración:** Estudio personal.

**Observación:**

- Si  $S$  es finito todos los estados recurrentes son recurrentes positivos
- Si  $S$  es finito entonces si es irreducible todos los estados son recurrentes positivos

Si  $X_1, X_2, \dots, X_n$  iid  $f_i$ ,  $E(|X|) < \infty$ .  
 $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow{\text{C.S.}} E(X)$ .

## Ley Fuerte de los Grandes Números

Suponga que  $\{X_n\}_{n \geq 1}$  cumplió con las condiciones del teorema anterior y sea  $r(\cdot)$  una función tal que:

$$\sum_x |r(x)| \pi(x) < \infty \quad (9)$$

entonces:

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n r(X_k) \xrightarrow{\text{C.S.}} E_\pi(r(X)) = \sum_x r(x) \pi(x) \quad (10)$$

**Ejercicio:** Sea  $X_n$  la cantidad de stock de un determinado producto en una tienda al final del día  $n$  y  $D_{n+1}$  la demanda del producto en el día  $n+1$ .

Cuando el stock al final del día es menor o igual a 1 unidad, ordenamos la cantidad necesaria para volver a tener 5 unidades.

$$X_{n+1} = \begin{cases} (X_n - D_{n+1})^+ & \text{si } X_n > 1 \\ (5 - D_{n+1})^+ & \text{si } X_n \leq 1 \end{cases}$$

Sea una cadena de Markov que:

| $k$              | 0   | 1   | 2   | 3   |
|------------------|-----|-----|-----|-----|
| $P(D_{n+1} = k)$ | 0.3 | 0.4 | 0.2 | 0.1 |

**Problema 1:** Determina la matriz de transición.

$$\begin{aligned} P(0, 0) &= 0 \\ P(0, 1) &= 0 \\ P(0, 2) &= P(D_{n+1} = 3) = 0.1 \\ P(0, 3) &= 0.2 \\ P(0, 4) &= 0.4 \\ P(0, 5) &= 0.3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(2, 0) &= P(D_{n+1} = 2 \text{ o } D_{n+1} = 3) \\ &= P(D_{n+1} = 2) + P(D_{n+1} = 3) \end{aligned}$$

La matriz de transición completa es:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0.1 & 0.2 & 0.4 & 0.3 \\ 0 & 0 & 0.1 & 0.2 & 0.4 & 0.3 \\ 0.3 & 0.4 & 0.3 & 0 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0.2 & 0.4 & 0.3 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0.2 & 0.4 & 0.3 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1 & 0.2 & 0.4 & 0.3 \end{pmatrix}$$

**Problema 2:** Suponga que ganamos \$12 mil pesos por cada unidad vendida y tiene un costo de \$2 mil pesos almacenar. ¿Cuál es la ganancia a largo plazo por día? Calculamos el período de la cadena:

$$d = \text{mcd}\{n : P^n(0,0) > 0\}$$

$$\begin{aligned} P(0,0) &= 0 \\ P^2(0,0) &> 0 \\ P^3(0,0) &> 0 \end{aligned}$$

$$d = \text{mcd}\{2, 3, 4, 5, \dots\} = 1$$

La distribución estacionaria satisface  $\pi P = \pi$ :

$$\pi = \frac{1}{9740}(885, 1516, 2250, 2100, 1960, 1029)$$

Demanda esperada por día:

$$E(D_{n+1}) = 0 \times 0.3 + 1 \times 0.4 + 2 \times 0.2 + 3 \times 0.1 = 1.1$$

¿Cuál es la pérdida por falta de stock a largo plazo?

Condición:  $X_n = 2$  y  $D_{n+1} = 3$

$$\text{PFS} = \begin{cases} 1 & \text{si } X_n = 2; D_{n+1} = 3 \\ 0 & \text{e.o.c.} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} E(\text{PFS}) &= 1 \times P(X_n = 2, D_{n+1} = 3) + 0 \times P(\text{otros casos}) \\ &= P(X_n = 2) \times P(D_{n+1} = 3) \\ &= \pi(2) \times 0.1 \\ &= \frac{2250}{9740} \times 0.1 = 0.0231 \end{aligned}$$

Entrada por día:

$$\text{Entrada} = 12 \text{ mil} \times (1.1 - 0.0231) = 12 \text{ mil} \times 1.0769 = 12.92 \text{ mil}$$



Salida por día (costo de almacenamiento):

$$\begin{aligned}
 r(X_k) &= 2 \text{ mil} \times X_k \\
 E_\pi(r(X)) &= \sum_{x=0}^5 r(x) \pi(x) \\
 &= 2 \text{ mil} \times \sum_{x=0}^5 x \cdot \pi(x) \\
 &= \frac{2 \text{ mil}}{9740} \times (0 \times 885 + 1 \times 1516 + 2 \times 2250 + 3 \times 2100 + 4 \times 1960 + 5 \times 1029) \\
 &= \frac{2 \text{ mil}}{9740} \times (0 + 1516 + 4500 + 6300 + 7840 + 5145) \\
 &= \frac{2 \text{ mil}}{9740} \times 25301 \\
 &= 5.20 \text{ mil}
 \end{aligned}$$

Ganancia diaria:

$$\text{Ganancia} = 12.92 - 5.20 = 7.72 \text{ mil pesos}$$

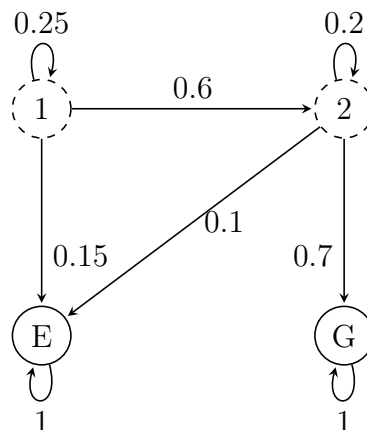
## Probabilidades y tiempos de Absorción

Considere una carrera de 2 años:

- A: Primer año
- 2: Segundo año
- G: Graduado
- E: Expulsado

La matriz de transición es:

$$P = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & G & E \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ G \\ E \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0.25 & 0.6 & 0 & 0.15 \\ 0 & 0.2 & 0.7 & 0.1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$



Preguntas:

- a) ¿Cuál es la probabilidad de que un estudiante eventualmente se gradúe?
- b) ¿Y de que eventualmente sea expulsado?

**Solución:**

Estados transitorios:  $T = \{1, 2\}$

Estados absorbentes:  $A = \{G, E\}$

La matriz se puede reorganizar como:

$$P = \begin{pmatrix} Q & R \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

donde:

$$Q = \begin{pmatrix} 0.25 & 0.6 \\ 0 & 0.2 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 0 & 0.15 \\ 0.7 & 0.1 \end{pmatrix}$$

Calculamos:

$$I - Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0.25 & 0.6 \\ 0 & 0.2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.75 & -0.6 \\ 0 & 0.8 \end{pmatrix}$$

Sea  $h(x)$  la probabilidad de que el estudiante estando en  $x$  eventualmente se gradúe y  $e(x)$  la probabilidad de que eventualmente sea expulsado estando en  $x$ .

Probabilidades a un paso:

$$h(1) = P(1, 1)h(1) + P(1, 2)h(2) + P(1, G)h(G) + P(1, E)h(E)$$

$$h(2) = P(2, 1)h(1) + P(2, 2)h(2) + P(2, G)h(G) + P(2, E)h(E)$$

$$h(1) = 0.25h(1) + 0.6h(2) + 0 \cdot 1 + 0.15 \cdot 0 = 0.25h(1) + 0.6h(2)$$

$$h(2) = 0 \cdot h(1) + 0.2h(2) + 0.7 \cdot 1 + 0.1 \cdot 0 = 0.2h(2) + 0.7$$

Por otro lado:

$$e(1) = P(1, 1)e(1) + P(1, 2)e(2) + P(1, G)e(G) + P(1, E)e(E)$$

$$e(2) = P(2, 1)e(1) + P(2, 2)e(2) + P(2, G)e(G) + P(2, E)e(E)$$

Esto da:

$$e(1) = 0.25e(1) + 0.6e(2) + 0 \cdot 0 + 0.15 \cdot 1 = 0.25e(1) + 0.6e(2) + 0.15$$

$$e(2) = 0 \cdot e(1) + 0.2e(2) + 0.7 \cdot 0 + 0.1 \cdot 1 = 0.2e(2) + 0.1$$

Resolviendo el sistema:

$$h(1) = 0.25h(1) + 0.6h(2) \Rightarrow (1 - 0.25)h(1) - 0.6h(2) = 0$$

$$h(2) = 0.2h(2) + 0.7 \Rightarrow (1 - 0.2)h(2) = 0.7$$

De la segunda ecuación:

$$e(1) = 0.25e(1) + 0.6e(2) + 0.15 \Rightarrow (1 - 0.25)e(1) - 0.6e(2) = 0.15$$

$$e(2) = 0.2e(2) + 0.1 \quad \Rightarrow (1 - 0.2)e(2) = 0.1$$

$$\left( \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0.25 & 0.6 \\ 0 & 0.2 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} h(1) & e(1) \\ h(2) & e(2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0.15 \\ 0.7 & 0.1 \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} Q & R \\ 0 & I_{M \times M} \end{pmatrix}$$

$$(I - Q) \begin{pmatrix} h(1) & e(1) \\ h(2) & e(2) \end{pmatrix} = R$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} h(1) & e(1) \\ h(2) & e(2) \end{pmatrix} = (I - Q)^{-1}R$$

La matriz  $(I - Q)^{-1} = (N - M) \times (N - M)$

La entrada  $(i, j)$  de la matriz  $(I - Q)^{-1}R$  es la probabilidad de que comenzando en el estado  $i$  sea absorbido por el estado  $j$ .

**En general:** Sea  $P$  una matriz de transición con  $N$  estados, de los cuales  $M$  son absorbentes y  $N - M$  son transitorios, entonces siempre la matriz  $P$  se puede arreglar de tal manera que:

$$P = \begin{pmatrix} Q_{(N-M) \times (N-M)} & R_{(N-M) \times M} \\ 0_{M \times (N-M)} & I_{M \times M} \end{pmatrix}$$

La entrada  $(i, j)$  de la matriz  $(I - Q)^{-1}R$  es la probabilidad de que comenzando en el estado  $i$  sea absorbido por el estado  $j$ .

Sea  $g(x)$  el tiempo esperado que un estudiante se gradúe o sea expulsado estando en el estado  $x$ .

Adelantando un paso:

$$\begin{aligned} g(1) &= P(1, 1)g(1) + P(1, 2)g(2) + P(1, G)g(G) + 1 \\ g(2) &= P(2, 2)g(2) + P(2, G)g(G) + P(2, E)g(E) + 1 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 1 - 0.25 & -0.6 \\ 0 & -0.2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g(1) \\ g(2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0.25 & 0.6 \\ 0 & 0.2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g(1) \\ g(2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} g(1) \\ g(2) \end{pmatrix} = (I - Q)^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$