Ejercicios Taller 6

Enunciado del Problema

Los clientes llegan a una estación de servicio con una bomba a una tasa de 20 automóviles por hora. Sin embargo, los clientes irán a otra estación si hay al menos dos autos en la estación, es decir, uno siendo servido y otro esperando. Supongamos que el tiempo de servicio para los clientes es exponencial con media de seis minutos.

a) Formule el modelo de cadena de Markov para el número de coches en la estación de servicio y encuentre su distribución estacionaria.

b) En promedio, ¿cuántos clientes reciben servicio por hora?

c) Resuelva el problema anterior para una estación de servicio de dos bombas bajo el supuesto que los clientes irán a otra estación si hay al menos cuatro coches en la estación, es decir, dos siendo servidos y dos esperando.

Solución

Parámetros del sistema

- Tasa de llegada: $\lambda = 20$ autos/hora
- Tiempo medio de servicio: 6 minutos $\Rightarrow \mu = 10$ autos/hora

a) Modelo de una bomba (máx. 2 coches en sistema)

Estados:

- 0: estación vacía
- 1: un auto en servicio
- 2: un auto en servicio y uno esperando

Matriz de transición Q (tasas infinitesimales):

$$Q = \begin{bmatrix} -20 & 20 & 0 \\ 10 & -30 & 20 \\ 0 & 10 & -10 \end{bmatrix}$$

Distribución estacionaria: Usamos relaciones recursivas:

$$\pi_1 = \frac{\lambda}{\mu}\pi_0 = 2\pi_0, \quad \pi_2 = \frac{\lambda}{\mu}\pi_1 = 2\pi_1 = 4\pi_0$$

$$\pi_0 + \pi_1 + \pi_2 = 7\pi_0 = 1 \Rightarrow \pi_0 = \frac{1}{7}$$

$$\boxed{\pi_0 = \frac{1}{7}, \quad \pi_1 = \frac{2}{7}, \quad \pi_2 = \frac{4}{7}}$$

b) Clientes servidos por hora (una bomba)

$$\mathbb{E}[\text{servidos}] = \pi_1 \cdot 1 + \pi_2 \cdot 1 = \frac{2}{7} + \frac{4}{7} = \frac{6}{7}$$
$$\text{Clientes/hora} = \frac{6}{7} \cdot 10 = \boxed{\frac{60}{7} \approx 8{,}57}$$

c) Modelo con dos bombas (máx. 4 autos en sistema)

Estados: $0, 1, 2, 3, 4$
Tasa de servicio: $\mu_i = \text{mín}(i, 2) \cdot \mu$
Matriz de transición Q:

$$Q = \begin{bmatrix} -20 & 20 & 0 & 0 & 0 \\ 10 & -30 & 20 & 0 & 0 \\ 0 & 20 & -40 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 20 & -40 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 20 & -20 \end{bmatrix}$$

Distribución estacionaria:

$$\pi_1 = 2\pi_0, \quad \pi_2 = 2\pi_0, \quad \pi_3 = 2\pi_0, \quad \pi_4 = 2\pi_0$$

$$\pi_0 + 2\pi_0 + 2\pi_0 + 2\pi_0 + 2\pi_0 = 9\pi_0 = 1 \Rightarrow \pi_0 = \frac{1}{9}$$

$$\boxed{\pi_0 = \frac{1}{9}, \quad \pi_1 = \pi_2 = \pi_3 = \pi_4 = \frac{2}{9}}$$

Clientes servidos por hora:

$$\mathbb{E}[\text{servidos}] = \pi_1(1) + (\pi_2 + \pi_3 + \pi_4)(2) = \frac{2}{9} + \frac{6}{9} \cdot 2 = \frac{14}{9}$$
$$\text{Clientes/hora} = \frac{14}{9} \cdot 10 = \boxed{\frac{140}{9} \approx 15{,}56}$$

Enunciado del Problema

$$f'(t) = -\alpha f(t) + g(t)$$

entonces

$$f(t) = f(0) + \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} g(s)\, ds, \quad \text{para } t > 0.$$

Usando el resultado anterior y las ecuaciones de Kolmogorov, determine las probabilidades de transición para:

(a) Proceso de Poisson.

(b) Proceso de Yule.

Pista: Use inducción.

(a) Proceso de Poisson

Sea $P_n(t) = \mathbb{P}(N(t) = n)$ la probabilidad de que haya n eventos hasta el tiempo t, donde $N(t)$ es un proceso de Poisson de tasa $\lambda > 0$.

Las ecuaciones de Kolmogorov hacia adelante son:

$$\begin{cases} P_0'(t) = -\lambda P_0(t), \\ P_n'(t) = -\lambda P_n(t) + \lambda P_{n-1}(t), \quad n \geq 1. \end{cases}$$

Aplicando el resultado dado para resolver la ecuación diferencial, obtenemos para $n = 0$:

$$P_0(t) = P_0(0)e^{-\lambda t} = e^{-\lambda t}.$$

Para $n \geq 1$, usando el resultado con $\alpha = \lambda$ y $g(t) = \lambda P_{n-1}(t)$:

$$P_n(t) = P_n(0) + \int_0^t e^{-\lambda(t-s)} \lambda P_{n-1}(s)\, ds.$$

Como $P_n(0) = 0$ para $n \geq 1$ (comenzamos sin eventos), tenemos:

$$P_n(t) = \int_0^t e^{-\lambda(t-s)} \lambda P_{n-1}(s)\, ds.$$

Demostración por inducción:
Base de inducción: Ya verificamos que $P_0(t) = e^{-\lambda t}$.
Hipótesis de inducción: Supongamos que para todo $k < n$:

$$P_k(t) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!}$$

Paso inductivo: Debemos probar que $P_n(t) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}$.
Sustituyendo la hipótesis de inducción para $P_{n-1}(s)$:

$$\begin{aligned} P_n(t) &= \int_0^t e^{-\lambda(t-s)} \lambda P_{n-1}(s)\, ds \\ &= \int_0^t e^{-\lambda(t-s)} \lambda \cdot e^{-\lambda s} \frac{(\lambda s)^{n-1}}{(n-1)!}\, ds \\ &= \lambda \int_0^t e^{-\lambda t + \lambda s} \cdot e^{-\lambda s} \frac{(\lambda s)^{n-1}}{(n-1)!}\, ds \\ &= \lambda e^{-\lambda t} \int_0^t e^{\lambda s - \lambda s} \frac{(\lambda s)^{n-1}}{(n-1)!}\, ds \\ &= \lambda e^{-\lambda t} \int_0^t \frac{(\lambda s)^{n-1}}{(n-1)!}\, ds \end{aligned}$$

Evaluando la integral:

$$\begin{aligned} \int_0^t \frac{(\lambda s)^{n-1}}{(n-1)!}\, ds &= \frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!} \int_0^t s^{n-1}\, ds \\ &= \frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!} \cdot \frac{s^n}{n}\Big|_0^t \\ &= \frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!} \cdot \frac{t^n}{n} \\ &= \frac{\lambda^{n-1} t^n}{n!} \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned}P_n(t) &= \lambda e^{-\lambda t} \cdot \frac{\lambda^{n-1}t^n}{n!} \\ &= e^{-\lambda t}\frac{\lambda^n t^n}{n!}\end{aligned}$$

Por tanto, la solución general es:

$$\boxed{P_n(t) = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}}.$$

(b) Proceso de Yule

El proceso de Yule es un proceso de nacimiento puro, donde la tasa de transición de $n \to n+1$ es λn. Sea $P_n(t) = \mathbb{P}(X(t) = n)$, con $X(0) = 1$. Las ecuaciones de Kolmogorov hacia adelante son:

$$\begin{cases} P_1'(t) = -\lambda P_1(t), \\ P_n'(t) = -\lambda n P_n(t) + \lambda(n-1)P_{n-1}(t), \quad n \geq 2. \end{cases}$$

Usamos el resultado dado con $\alpha = \lambda n$ y $g(t) = \lambda(n-1)P_{n-1}(t)$.
Demostración por inducción:
Base de inducción: Para $n = 1$, tenemos $P_1'(t) = -\lambda P_1(t)$ con $P_1(0) = 1$, lo que da:

$$P_1(t) = e^{-\lambda t}.$$

Hipótesis de inducción: Supongamos que para todo $k < n$:

$$P_k(t) = e^{-\lambda t}(1 - e^{-\lambda t})^{k-1}$$

Paso inductivo: Para $n \geq 2$, usando el resultado con $P_n(0) = 0$:

$$P_n(t) = \int_0^t e^{-\lambda n(t-s)}\lambda(n-1)P_{n-1}(s)\,ds$$

Sustituyendo la hipótesis de inducción:

$$\begin{aligned}P_n(t) &= \lambda(n-1)\int_0^t e^{-\lambda n(t-s)}e^{-\lambda s}(1 - e^{-\lambda s})^{n-2}\,ds \\ &= \lambda(n-1)e^{-\lambda nt}\int_0^t e^{\lambda ns}e^{-\lambda s}(1 - e^{-\lambda s})^{n-2}\,ds \\ &= \lambda(n-1)e^{-\lambda nt}\int_0^t e^{\lambda(n-1)s}(1 - e^{-\lambda s})^{n-2}\,ds\end{aligned}$$

Haciendo el cambio de variable $u = 1 - e^{-\lambda s}$, entonces $du = \lambda e^{-\lambda s}ds$ y $e^{-\lambda s} = 1 - u$.
Cuando $s = 0$, $u = 0$; cuando $s = t$, $u = 1 - e^{-\lambda t}$.
También $e^{\lambda s} = \frac{1}{1-u}$ y $ds = \frac{du}{\lambda(1-u)}$.
La integral se transforma en:

$$\begin{aligned}\int_0^t e^{\lambda(n-1)s}(1 - e^{-\lambda s})^{n-2}\,ds &= \int_0^{1-e^{-\lambda t}} \frac{1}{(1-u)^{n-1}}u^{n-2} \cdot \frac{du}{\lambda(1-u)} \\ &= \frac{1}{\lambda}\int_0^{1-e^{-\lambda t}} \frac{u^{n-2}}{(1-u)^n}\,du\end{aligned}$$

Evaluando esta integral (que es una integral beta incompleta) y simplificando, obtenemos:

$$\boxed{P_n(t) = e^{-\lambda t}(1 - e^{-\lambda t})^{n-1}, \quad n \geq 1.}$$

Enunciado

Una molécula de hemoglobina puede transportar una molécula de oxígeno o una de monóxido de carbono. Supongamos que los dos tipos de gases llegan con tasas 1 y 2 y se conectan durante un tiempo exponencial con tasas 3 y 4, respectivamente. Formule un modelo de cadena de Markov con espacio de estado $\{+, 0, -\}$ donde $+$ denota un oxígeno conectado, $-$ una molécula de monóxido de carbono conectado, y 0 una molécula de hemoglobina libre, y encuentre la fracción de tiempo, a largo plazo, que la molécula de hemoglobina está en cada uno de sus tres estados.

Modelo

Definimos una cadena de Markov continua con espacio de estados $\{+, 0, -\}$ y tasas de transición:

- $0 \to +$ con tasa $\lambda_1 = 1$
- $0 \to -$ con tasa $\lambda_2 = 2$
- $+ \to 0$ con tasa $\mu_1 = 3$
- $- \to 0$ con tasa $\mu_2 = 4$

La matriz de tasas infinitesimales (matriz generadora Q) es:

$$Q = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 0 \\ 1 & -3 & 2 \\ 0 & 4 & -4 \end{pmatrix}$$

Los estados están ordenados como $(+, 0, -)$.

Distribución Estacionaria

Sea $\pi = (\pi_+, \pi_0, \pi_-)$ la distribución estacionaria. Debe satisfacer:

$$\pi Q = 0 \quad \text{y} \quad \pi_+ + \pi_0 + \pi_- = 1.$$

$$\begin{aligned} \pi_+(-3) + \pi_0(1) + \pi_-(0) = 0 \quad &\Rightarrow \quad -3\pi_+ + \pi_0 = 0 \\ \pi_+(3) + \pi_0(-3) + \pi_-(4) = 0 \quad &\Rightarrow \quad 3\pi_+ - 3\pi_0 + 4\pi_- = 0 \\ \pi_+ + \pi_0 + \pi_- = 1 \end{aligned}$$

De la primera ecuación:

$$\pi_0 = 3\pi_+$$

Sustituyendo en la segunda:

$$3\pi_+ - 3(3\pi_+) + 4\pi_- = 0 \Rightarrow -6\pi_+ + 4\pi_- = 0 \Rightarrow \pi_- = \frac{3}{2}\pi_+$$

Sustituyendo en la normalización:

$$\pi_+ + 3\pi_+ + \frac{3}{2}\pi_+ = \left(1 + 3 + \frac{3}{2}\right)\pi_+ = \frac{11}{2}\pi_+ = 1 \Rightarrow \pi_+ = \frac{2}{11}$$

Entonces:

$$\boxed{\begin{aligned} \pi_+ &= \frac{2}{11} \\ \pi_0 &= \frac{6}{11} \\ \pi_- &= \frac{3}{11} \end{aligned}}$$

Conclusión

La fracción de tiempo, a largo plazo, que la hemoglobina está en cada uno de los estados es:

- Con oxígeno unido (+): $\boxed{\frac{2}{11}}$
- Libre (0): $\boxed{\frac{6}{11}}$
- Con monóxido unido (−): $\boxed{\frac{3}{11}}$

Problema 5

Una pequeña tienda de informática tiene espacio para mostrar hasta tres computadoras en venta. Los clientes vienen de acuerdo a un proceso de Poisson con una tasa de 2 por semana para comprar una computadora y comprarán una si al menos 1 está disponible. Cuando la tienda solo tiene una computadora, hace un pedido de dos computadoras más. La orden toma un tiempo distribuido exponencialmente con media 1 semana para llegar. Por supuesto, mientras la tienda está esperando la entrega, las ventas pueden reducir el inventario a 1 y luego a 0.

a) Matriz de tasas Q

Definimos los siguientes estados:

- 3: Inventario lleno (3 computadoras)
- 2: 2 computadoras
- 1: 1 computadora, sin pedido
- 1^*: 1 computadora, con pedido en camino
- 0^*: 0 computadoras, con pedido en camino

Las transiciones y tasas son:

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & -2 & 2 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & \end{pmatrix}$$

Los estados están ordenados como $[3, 2, 1, 1^*, 0^*]$.

b) Distribución estacionaria

Sea $\pi = (\pi_3, \pi_2, \pi_1, \pi_{1^*}, \pi_{0^*})$ tal que $\pi\mathbf{Q} = 0$ y $\sum \pi_i = 1$. Resolviendo el sistema:

$$\begin{aligned}
-2\pi_3 + 1\pi_{0^*} &= 0\\
2\pi_3 - 2\pi_2 &= 0\\
2\pi_2 - 2\pi_1 &= 0\\
2\pi_1 - 3\pi_{1^*} &= 0\\
2\pi_{1^*} - 2\pi_{0^*} &= 0
\end{aligned}$$

De estas ecuaciones se obtiene:

$$\begin{aligned}
\pi_2 &= \pi_3\\
\pi_1 &= \pi_2 = \pi_3\\
\pi_{1^*} &= \frac{2}{3}\pi_1 = \frac{2}{3}\pi_3\\
\pi_{0^*} &= \pi_{1^*} = \frac{2}{3}\pi_3
\end{aligned}$$

Usando $\sum \pi_i = 1$:

$$\pi_3 + \pi_3 + \pi_3 + \frac{2}{3}\pi_3 + \frac{2}{3}\pi_3 = 1 \Rightarrow \frac{14}{3}\pi_3 = 1 \Rightarrow \pi_3 = \frac{3}{14}$$

Entonces:

$$\begin{aligned}
\pi_3 = \frac{3}{14}, &\quad \pi_2 = \pi_1 = \frac{3}{14},\\
\pi_{1^*} = \frac{2}{14}, &\quad \pi_{0^*} = \frac{2}{14}
\end{aligned}$$

c) Promedio de computadoras vendidas por semana

En cada estado, las tasas de venta son:

- Estado 3, 2, 1: venta con tasa 2.
- Estado 1*: venta con tasa 2.
- Estado 0*: no hay venta (tasa 0).

El promedio total de ventas por semana:

$$\bar{v} = 2(\pi_3 + \pi_2 + \pi_1 + \pi_{1^*}) + 0 = 2\left(\frac{3}{14} + \frac{3}{14} + \frac{3}{14} + \frac{2}{14}\right) = 2\left(\frac{11}{14}\right) = \frac{22}{14} = \frac{11}{7}$$

Respuesta: En promedio, se venden $\boxed{\frac{11}{7}}$ computadoras por semana.