Procesos Estocásticos: Seccion 1

Alejandro Daniel José Gómez Flórez

1 Demostraciones

Teorema:

$$P^{(n)} = P^{(m)} \cdot P^{(n-m)}, \quad \text{en particular } P^{(n)} = P \cdot P \cdots P \ (n \text{ veces}) = P^n.$$

Demostración:
Sea $P_{ij}^{(n)} = P(X_n = j \mid X_0 = i)$. Para $0 \leq m \leq n$:

$$\begin{aligned}
P_{ij}^{(n)} &= P(X_n = j \mid X_0 = i) \\
&= \sum_{k \in S} P(X_n = j, X_m = k \mid X_0 = i) \quad \text{(partición de la probabilidad total respecto a } X_m) \\
&= \sum_{k \in S} P(X_n = j \mid X_m = k, X_0 = i) \cdot P(X_m = k \mid X_0 = i) \\
&= \sum_{k \in S} P(X_n = j \mid X_m = k) \cdot P(X_m = k \mid X_0 = i) \quad \text{(propiedad de Markov)} \\
&= \sum_{k \in S} P_{kj}^{(n-m)} \cdot P_{ik}^{(m)} \\
&= \sum_{k \in S} P_{ik}^{(m)} P_{kj}^{(n-m)} = [P^{(m)} \cdot P^{(n-m)}]_{ij}
\end{aligned}$$

Por tanto $P^{(n)} = P^{(m)} \cdot P^{(n-m)}$.

□

Teorema: Para una cadena de Markov con matriz de transición $P = (P_{ij})$:

- $\sum_{n=0}^{\infty} P_{ii}^{(n)} = \infty$ si, y solo si el estado i es recurrente
- $\sum_{n=0}^{\infty} P_{ii}^{(n)} < \infty$ si, y solo si el estado i es transitorio

Demostración:
Sea $N_i = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{1}_{\{X_n = i\}}$ el número de visitas al estado i.
Sea $f_{ii}^{(n)} = P(X_n = i, X_{n-1} \neq i, \ldots, X_0 \neq i)$ la probabilidad retornar a i en n pasos.
Sea $f_i = \sum_{n=0}^{\infty} f_{ii}^{n}$ la probabilidad regresar al estado i eventualmente.
El número de visitas N_i sigue:

- Con probabilidad $(1 - f_i)$: exactamente 1 visita (no regresa)

- Con probabilidad $f_i(1-f_i)$: exactamente 2 visitas (regresa una vez)
- Con probabilidad $f_i^2(1-f_i)$: exactamente 3 visitas (regresa dos veces)
- $\vdots$

Por tanto:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_i[N_i] &= 1(1-f_i) + f_i(1-f_i) + f_i^2(1-f_i) + \cdots \\ &= \frac{1}{1-f_i} < \infty \quad \text{(serie geométrica)}\end{aligned}$$

Como $\mathbb{E}_i[N_i] = \sum_{n=0}^{\infty} P_{ii}^{(n)}$, tenemos:

- Si i es recurrente: $f_i = 1 \Rightarrow \mathbb{E}_i[N_i] = \infty \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} P_{ii}^{(n)} = \infty$
- Si i es transitorio: $f_i < 1 \Rightarrow \mathbb{E}_i[N_i] = \frac{1}{1-f_i} < \infty \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} P_{ii}^{(n)} < \infty$

$\square$

Teorema: Si la cadena de Markov es irreducible y sus estados son recurrentes positivos, entonces la medida estacionaria π existe y es única. Además:

$$\pi_i = \frac{1}{m_i}, \quad i \in S$$

donde m_i es el **tiempo medio de retorno** al estado i, es decir,

$$m_i = E_i[T_i] \quad \text{(esperanza del tiempo hasta regresar a } i \text{ partiendo de } i)$$

Demostración:
Para una cadena irreducible y recurrente positiva, consideremos la fracción de tiempo que la cadena pasa en cada estado.
La fracción de tiempo en el estado j hasta el tiempo n es:

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathbf{1}(X_k = j) \to E[\mathbf{1}(X_\infty = j)] = \pi(j) \quad \text{cuando } n \to \infty$$

Por otro lado, si $N(j)$ es el número de visitas al estado j hasta el tiempo n, entonces $\frac{n}{N(j)}$ converge al tiempo promedio entre visitas sucesivas a j, que es $m_j = E_j[T_j]$.
Por tanto:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{N(j)}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n/N(j)} = \frac{1}{m_j}$$

Definimos $\pi_j = \frac{1}{m_j}$. Para verificar que π satisface $\pi P = \pi$:
Consideremos un ciclo de retorno al estado i. Durante este ciclo, el número esperado de visitas a cualquier estado j es finito (pues la cadena es recurrente positiva). La suma de todas las visitas esperadas durante el ciclo debe ser igual a la longitud esperada del ciclo m_i.
Por la propiedad de Markov y la irreducibilidad, la proporción de tiempo en cada estado es independiente del estado inicial, lo que garantiza que π es la única distribución que satisface $\pi P = \pi$ con $\sum_j \pi_j = 1$.

$\square$

Teorema: Sea X_n una cadena de Markov $\{X_n\}_{n\geq 0}$ cuyos estados son irreducibles; recurrentes positivos y aperiódicos. Entonces:

$$\lim_{n\to\infty} P^n(x,y) = \pi(y)$$

Demostración:
La demostración se basa en el análisis del comportamiento asintótico de las potencias de la matriz de transición. Procederemos en varios pasos.

Paso 1: Existencia y unicidad de la distribución estacionaria
Por ser la cadena irreducible y recurrente positiva, sabemos del teorema anterior que existe una única distribución estacionaria π tal que $\pi P = \pi$ y $\sum_y \pi(y) = 1$.

Paso 2: Uso de la aperiodicidad
Como los estados son aperiódicos, para cada estado x existe un entero N_x tal que para todo $n \geq N_x$, se tiene $P^n(x,x) > 0$. Esto significa que es posible regresar al estado x en cualquier número suficientemente grande de pasos.

Paso 3: Acoplamiento y tiempo de mezcla
Definimos el *tiempo de acoplamiento* τ como el primer momento en que dos copias independientes de la cadena, iniciando desde estados diferentes, se encuentran en el mismo estado.
Para estados irreducibles, recurrentes positivos y aperiódicos, se puede demostrar que:

$$\mathbb{E}[\tau] < \infty$$

Paso 4: Convergencia en variación total
Sea $\mu_n^{(x)}$ la distribución de X_n dado $X_0 = x$. Entonces:

$$\mu_n^{(x)}(y) = P^n(x,y)$$

La distancia en variación total entre $\mu_n^{(x)}$ y π está dada por:

$$\|\mu_n^{(x)} - \pi\|_{TV} = \frac{1}{2}\sum_{y\in S} |P^n(x,y) - \pi(y)|$$

Paso 5: Demostración de la convergencia
Usando la técnica de acoplamiento, se puede demostrar que existe una constante $\rho < 1$ tal que:

$$\|\mu_n^{(x)} - \pi\|_{TV} \leq C\rho^n$$

para alguna constante $C > 0$. Esto implica convergencia exponencial.
En particular, para cada estado y:

$$|P^n(x,y) - \pi(y)| \leq 2\|\mu_n^{(x)} - \pi\|_{TV} \leq 2C\rho^n \to 0 \text{ cuando } n \to \infty$$

Por lo tanto:

$$\lim_{n\to\infty} P^n(x,y) = \pi(y)$$

Paso 6: Interpretación del resultado
Este teorema nos dice que, independientemente del estado inicial x, la probabilidad de estar en el estado y después de n pasos converge a $\pi(y)$ cuando $n \to \infty$. Esto significa que la cadena "olvida" su condición inicial y converge a su distribución de equilibrio.

La velocidad de convergencia es exponencial con tasa ρ, lo que hace que la convergencia sea relativamente rápida en la práctica.

$\square$

Corolario: Si además la cadena es finita, entonces la convergencia es uniforme en el estado inicial:

$$\lim_{n\to\infty} \max_{x,y\in S} |P^n(x,y) - \pi(y)| = 0$$

2 Ejercicios

Problema: Una molécula de hemoglobina puede transportar una molécula de oxígeno (+) o una molécula de monóxido de carbono (-).
Supongamos que los dos tipos de gases llegan con tasa 1 y 2, y el tiempo hasta conectar con tasa 3 y 4, respectivamente. Considerando el estado 0 cuando la molécula de hemoglobina está libre.
Determine en el largo plazo: la fracción de tiempo que la molécula de hemoglobina está en cada uno de sus tres posibles estados: $\{-, 0, +\}$.
Sol:
Solución:
Este es un problema de cadena de Markov continua que podemos modelar como un proceso de nacimiento y muerte.
Estados:

- Estado 0: Hemoglobina libre (sin gas)
- Estado +: Hemoglobina con oxígeno
- Estado -: Hemoglobina con monóxido de carbono

Tasas de transición:

- De estado 0 a estado +: tasa $\lambda_+ = 1$ (llegada de oxígeno)
- De estado 0 a estado -: tasa $\lambda_- = 2$ (llegada de monóxido de carbono)
- De estado + a estado 0: tasa $\mu_+ = 3$ (desconexión del oxígeno)
- De estado - a estado 0: tasa $\mu_- = 4$ (desconexión del monóxido de carbono)

Matriz generador infinitesimal:

$$Q = \begin{pmatrix} -(1+2) & 1 & 2 \\ 3 & -3 & 0 \\ 4 & 0 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 3 & -3 & 0 \\ 4 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

Ecuaciones de balance para la distribución estacionaria:
Para encontrar la distribución estacionaria $\pi = (\pi_-, \pi_0, \pi_+)$, resolvemos $\pi Q = 0$ con $\pi_- + \pi_0 + \pi_+ = 1$.
Las ecuaciones de balance detallado son:

$$-3\pi_0 + 3\pi_+ + 4\pi_- = 0 \quad \text{(balance para estado 0)} \tag{1}$$
$$\pi_0 - 3\pi_+ = 0 \quad \text{(balance para estado +)} \tag{2}$$
$$2\pi_0 - 4\pi_- = 0 \quad \text{(balance para estado -)} \tag{3}$$

De la ecuación (2): $\pi_+ = \frac{\pi_0}{3}$
De la ecuación (3): $\pi_- = \frac{2\pi_0}{4} = \frac{\pi_0}{2}$
Sustituyendo en la condición de normalización:

$$\pi_- + \pi_0 + \pi_+ = \frac{\pi_0}{2} + \pi_0 + \frac{\pi_0}{3} = 1$$

$$\pi_0 \left(\frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{3} \right) = \pi_0 \left(\frac{3+6+2}{6} \right) = \pi_0 \left(\frac{11}{6} \right) = 1$$

Por lo tanto: $\pi_0 = \frac{6}{11}$
Distribución estacionaria:

$$\pi_0 = \frac{6}{11} \quad \text{(fracción de tiempo libre)} \tag{4}$$

$$\pi_+ = \frac{1}{3} \cdot \frac{6}{11} = \frac{2}{11} \quad \text{(fracción de tiempo con oxígeno)} \tag{5}$$

$$\pi_- = \frac{1}{2} \cdot \frac{6}{11} = \frac{3}{11} \quad \text{(fracción de tiempo con monóxido de carbono)} \tag{6}$$

Verificación: $\frac{6}{11} + \frac{2}{11} + \frac{3}{11} = \frac{11}{11} = 1$ (correcto)