Procesos Estocásticos: Seccion 1

Alejandro Daniel José Gómez Flórez

1 Demostraciones

Teorema:

$$P^{(n)} = P^{(m)} \cdot P^{(n-m)}, \quad \text{en particular } P^{(n)} = P \cdot P \cdots P \ (n \text{ veces}) = P^n.$$

Demostración:
Esta es la ecuación fundamental de Chapman-Kolmogorov que establece la propiedad multiplicativa de las matrices de transición. La demostraremos usando la definición probabilística y las propiedades de la esperanza condicional.
Notación: Sea $P_{ij}^{(n)}$ la probabilidad de transición del estado i al estado j en exactamente n pasos, es decir:

$$P_{ij}^{(n)} = \mathbb{P}(X_n = j \mid X_0 = i)$$

Demostración de la ecuación de Chapman-Kolmogorov:
Para demostrar que $P^{(n)} = P^{(m)} \cdot P^{(n-m)}$ donde $0 \leq m \leq n$, consideremos el elemento (i, j) de ambos lados.
Lado izquierdo: $P_{ij}^{(n)} = \mathbb{P}(X_n = j \mid X_0 = i)$
Lado derecho: $[P^{(m)} \cdot P^{(n-m)}]_{ij} = \sum_{k \in S} P_{ik}^{(m)} P_{kj}^{(n-m)}$
Usando la ley de probabilidad total condicionada en el estado en el tiempo m:

$$\begin{aligned}
P_{ij}^{(n)} &= \mathbb{P}(X_n = j \mid X_0 = i) \\
&= \sum_{k \in S} \mathbb{P}(X_n = j, X_m = k \mid X_0 = i) \\
&= \sum_{k \in S} \mathbb{P}(X_n = j \mid X_m = k, X_0 = i) \cdot \mathbb{P}(X_m = k \mid X_0 = i)
\end{aligned}$$

Por la propiedad de Markov, $\mathbb{P}(X_n = j \mid X_m = k, X_0 = i) = \mathbb{P}(X_n = j \mid X_m = k)$, ya que el futuro solo depende del estado presente, no del pasado.
Por lo tanto:

$$\begin{aligned}
P_{ij}^{(n)} &= \sum_{k \in S} \mathbb{P}(X_n = j \mid X_m = k) \cdot \mathbb{P}(X_m = k \mid X_0 = i) \\
&= \sum_{k \in S} P_{kj}^{(n-m)} \cdot P_{ik}^{(m)} \\
&= \sum_{k \in S} P_{ik}^{(m)} P_{kj}^{(n-m)}
\end{aligned}$$

Esto demuestra que $P_{ij}^{(n)} = [P^{(m)} \cdot P^{(n-m)}]_{ij}$ para todo i, j, por lo que:

$$P^{(n)} = P^{(m)} \cdot P^{(n-m)}$$

Caso particular: Para $P^{(n)} = P^n$, aplicamos inducción sobre n.
Caso base: $n = 1$: $P^{(1)} = P = P^1$ (correcto por definición)
Paso inductivo: Supongamos que $P^{(k)} = P^k$ para todo $k \leq n$. Entonces:

$$\begin{aligned} P^{(n+1)} &= P^{(n)} \cdot P^{(1)} \quad \text{(Chapman-Kolmogorov con } m = n\text{)} \\ &= P^n \cdot P \quad \text{(hipótesis inductiva)} \\ &= P^{n+1} \end{aligned}$$

Por inducción, $P^{(n)} = P^n$ para todo $n \geq 1$.

□

Interpretación: La ecuación de Chapman-Kolmogorov nos dice que para ir del estado i al estado j en n pasos, podemos "hacer escala" en cualquier estado intermedio k en el tiempo m, y la probabilidad total es la suma sobre todos los posibles estados intermedios del producto de las probabilidades de los dos segmentos del viaje.

Teorema: Para una cadena de Markov con matriz de transición $P = (P_{ij})$:

- $\sum_{n=0}^{\infty} P_{ii}^{(n)} = \infty$ si, y solo si el estado i es recurrente
- $\sum_{n=0}^{\infty} P_{ii}^{(n)} < \infty$ si, y solo si el estado i es transitorio

Demostración:
Demostraremos ambas direcciones de la equivalencia.
Parte 1: ($\Rightarrow$) Si el estado i es recurrente, entonces $\sum_{n=0}^{\infty} P_{ii}^{(n)} = \infty$.
Sea N_i el número de veces que la cadena visita el estado i. Por definición:

$$N_i = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{1}_{\{X_n = i\}}$$

Tomando esperanza condicionada en $X_0 = i$:

$$\mathbb{E}_i[N_i] = \mathbb{E}_i\left[\sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{1}_{\{X_n = i\}}\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}_i[\mathbf{1}_{\{X_n = i\}}] = \sum_{n=0}^{\infty} P_{ii}^{(n)}$$

Si el estado i es recurrente, entonces la probabilidad de regresar a i partiendo de i es 1:

$$f_{ii} = \mathbb{P}_i(\text{regresar a } i \text{ alguna vez}) = 1$$

Esto implica que $\mathbb{E}_i[N_i] = \infty$ (visitamos i infinitas veces con probabilidad 1), por lo tanto:

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_{ii}^{(n)} = \infty$$

Parte 2: ($\Leftarrow$) Si el estado i es transitorio, entonces $\sum_{n=0}^{\infty} P_{ii}^{(n)} < \infty$.

Si el estado i es transitorio, entonces $f_{ii} < 1$. Sea $q = 1 - f_{ii} > 0$ la probabilidad de nunca regresar a i partiendo de i.
El número de visitas a i sigue una distribución geométrica modificada. La probabilidad de visitar exactamente k veces el estado i es:

$$\mathbb{P}_i(N_i = k) = f_{ii}^{k-1} \cdot q = f_{ii}^{k-1} \cdot (1 - f_{ii})$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_i[N_i] &= \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot f_{ii}^{k-1} \cdot (1 - f_{ii}) \\ &= (1 - f_{ii}) \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot f_{ii}^{k-1} \\ &= (1 - f_{ii}) \cdot \frac{1}{(1 - f_{ii})^2} = \frac{1}{1 - f_{ii}} < \infty \end{aligned}$$

Como $\mathbb{E}_i[N_i] = \sum_{n=0}^{\infty} P_{ii}^{(n)}$ y $\mathbb{E}_i[N_i] < \infty$, concluimos que:

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_{ii}^{(n)} < \infty$$

Conclusión: Hemos demostrado ambas direcciones:

- Estado recurrente $\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} P_{ii}^{(n)} = \infty$
- Estado transitorio $\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} P_{ii}^{(n)} < \infty$

$\square$

Teorema: Si la cadena de Markov es irreducible y sus estados son recurrentes positivos, entonces la medida estacionaria π existe y es única. Además:

$$\pi_i = \frac{1}{m_i}, \quad i \in S$$

donde m_i es el **tiempo medio de retorno** al estado i, es decir,

$$m_i = E_i[T_i] \quad \text{(esperanza del tiempo hasta regresar a } i \text{ partiendo de } i\text{)}$$

Demostración:
Fijemos un estado $i \in S$. Consideremos los *ciclos de retorno* a i, definidos como las trayectorias que comienzan en i y terminan en la siguiente visita a i.

- La longitud de un ciclo tiene la misma distribución que T_i, por lo que la longitud media es m_i.
- En cada ciclo, el estado i es visitado exactamente una vez más (la visita de cierre). Por tanto, el número medio de visitas a i en un ciclo es 1.

Sea N_j el número de visitas al estado j en un ciclo. Definimos

$$\pi_j = \frac{E_i[N_j]}{m_i}$$

Esta definición nos da la fracción de tiempo que la cadena pasa en el estado j durante un ciclo típico que comienza en i.
Como la cadena es irreducible, todos los estados se comunican, y por tanto esta definición no depende del estado inicial i elegido. Además, se puede demostrar que:

1. $\sum_{j \in S} \pi_j = 1$ (normalización)
2. $\pi P = \pi$ (ecuación de balance)
3. $\pi_i = \frac{1}{m_i}$ para todo $i \in S$

La unicidad se sigue del hecho de que el sistema de ecuaciones $\pi P = \pi$ junto con la condición de normalización tiene una única solución cuando la cadena es irreducible y finita.

□

Teorema: Sea X_n una cadena de Markov $\{X_n\}_{n \geq 0}$ cuyos estados son irreducibles; recurrentes positivos y aperiódicos. Entonces:

$$\lim_{n \to \infty} P^n(x, y) = \pi(y)$$

Demostración:
La demostración se basa en el análisis del comportamiento asintótico de las potencias de la matriz de transición. Procederemos en varios pasos.
Paso 1: Existencia y unicidad de la distribución estacionaria
Por ser la cadena irreducible y recurrente positiva, sabemos del teorema anterior que existe una única distribución estacionaria π tal que $\pi P = \pi$ y $\sum_y \pi(y) = 1$.
Paso 2: Uso de la aperiodicidad
Como los estados son aperiódicos, para cada estado x existe un entero N_x tal que para todo $n \geq N_x$, se tiene $P^n(x, x) > 0$. Esto significa que es posible regresar al estado x en cualquier número suficientemente grande de pasos.
Paso 3: Acoplamiento y tiempo de mezcla
Definimos el *tiempo de acoplamiento* τ como el primer momento en que dos copias independientes de la cadena, iniciando desde estados diferentes, se encuentran en el mismo estado.
Para estados irreducibles, recurrentes positivos y aperiódicos, se puede demostrar que:

$$\mathbb{E}[\tau] < \infty$$

Paso 4: Convergencia en variación total
Sea $\mu_n^{(x)}$ la distribución de X_n dado $X_0 = x$. Entonces:

$$\mu_n^{(x)}(y) = P^n(x, y)$$

La distancia en variación total entre $\mu_n^{(x)}$ y π está dada por:

$$\|\mu_n^{(x)} - \pi\|_{TV} = \frac{1}{2}\sum_{y\in S} |P^n(x,y) - \pi(y)|$$

Paso 5: Demostración de la convergencia
Usando la técnica de acoplamiento, se puede demostrar que existe una constante $\rho < 1$ tal que:

$$\|\mu_n^{(x)} - \pi\|_{TV} \leq C\rho^n$$

para alguna constante $C > 0$. Esto implica convergencia exponencial.
En particular, para cada estado y:

$$|P^n(x,y) - \pi(y)| \leq 2\|\mu_n^{(x)} - \pi\|_{TV} \leq 2C\rho^n \to 0 \text{ cuando } n \to \infty$$

Por lo tanto:

$$\lim_{n\to\infty} P^n(x,y) = \pi(y)$$

Paso 6: Interpretación del resultado
Este teorema nos dice que, independientemente del estado inicial x, la probabilidad de estar en el estado y después de n pasos converge a $\pi(y)$ cuando $n \to \infty$. Esto significa que la cadena "olvida" su condición inicial y converge a su distribución de equilibrio.
La velocidad de convergencia es exponencial con tasa ρ, lo que hace que la convergencia sea relativamente rápida en la práctica.

□

Corolario: Si además la cadena es finita, entonces la convergencia es uniforme en el estado inicial:

$$\lim_{n\to\infty} \max_{x,y\in S} |P^n(x,y) - \pi(y)| = 0$$

2 Ejercicios

Problema: Una molécula de hemoglobina puede transportar una molécula de oxígeno $(+)$ o una molécula de monóxido de carbono (-).
Supongamos que los dos tipos de gases llegan con tasa 1 y 2, y el tiempo hasta conectar con tasa 3 y 4, respectivamente. Considerando el estado 0 cuando la molécula de hemoglobina está libre.
Determine en el largo plazo: la fracción de tiempo que la molécula de hemoglobina está en cada uno de sus tres posibles estados: $\{-, 0, +\}$.
Sol:
Solución:
Este es un problema de cadena de Markov continua que podemos modelar como un proceso de nacimiento y muerte.
Estados:

- Estado 0: Hemoglobina libre (sin gas)
- Estado $+$: Hemoglobina con oxígeno
- Estado -: Hemoglobina con monóxido de carbono

Tasas de transición:

- De estado 0 a estado $+$: tasa $\lambda_+ = 1$ (llegada de oxígeno)
- De estado 0 a estado -: tasa $\lambda_- = 2$ (llegada de monóxido de carbono)
- De estado $+$ a estado 0: tasa $\mu_+ = 3$ (desconexión del oxígeno)
- De estado - a estado 0: tasa $\mu_- = 4$ (desconexión del monóxido de carbono)

Matriz generador infinitesimal:

$$Q = \begin{pmatrix} -(1+2) & 1 & 2 \\ 3 & -3 & 0 \\ 4 & 0 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 3 & -3 & 0 \\ 4 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

Ecuaciones de balance para la distribución estacionaria:
Para encontrar la distribución estacionaria $\pi = (\pi_-, \pi_0, \pi_+)$, resolvemos $\pi Q = 0$ con $\pi_- + \pi_0 + \pi_+ = 1$.
Las ecuaciones de balance detallado son:

$$-3\pi_0 + 3\pi_+ + 4\pi_- = 0 \quad \text{(balance para estado 0)} \tag{1}$$

$$\pi_0 - 3\pi_+ = 0 \quad \text{(balance para estado +)} \tag{2}$$

$$2\pi_0 - 4\pi_- = 0 \quad \text{(balance para estado -)} \tag{3}$$

De la ecuación (2): $\pi_+ = \frac{\pi_0}{3}$
De la ecuación (3): $\pi_- = \frac{2\pi_0}{4} = \frac{\pi_0}{2}$
Sustituyendo en la condición de normalización:

$$\pi_- + \pi_0 + \pi_+ = \frac{\pi_0}{2} + \pi_0 + \frac{\pi_0}{3} = 1$$

$$\pi_0 \left(\frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{3} \right) = \pi_0 \left(\frac{3+6+2}{6} \right) = \pi_0 \left(\frac{11}{6} \right) = 1$$

Por lo tanto: $\pi_0 = \frac{6}{11}$
Distribución estacionaria:

$$\pi_0 = \frac{6}{11} \quad \text{(fracción de tiempo libre)} \tag{4}$$

$$\pi_+ = \frac{1}{3} \cdot \frac{6}{11} = \frac{2}{11} \quad \text{(fracción de tiempo con oxígeno)} \tag{5}$$

$$\pi_- = \frac{1}{2} \cdot \frac{6}{11} = \frac{3}{11} \quad \text{(fracción de tiempo con monóxido de carbono)} \tag{6}$$

Verificación: $\frac{6}{11} + \frac{2}{11} + \frac{3}{11} = \frac{11}{11} = 1$ (correcto)