Entregable 01 - Procesos Estocásticos

Nombre del Estudiante

6 de octubre de 2025

Problema 1

Los métodos de Cadenas de Markov Monte Carlo (MCMC) son utilizados para simular valores de cierta densidad objetivo f cuya forma cerrada no sea conocida o simplemente no la podemos simular fácilmente. La estrategia de muestreo detrás del MCMC, es construir una cadena de Markov irreducible y aperiódica cuya distribución estacionaria sea la función objetivo f. Esto es, para un t suficientemente grande, una realización X_t de esta cadena tendrá una distribución cercana a f y además

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} h(X_i) = \mathbf{E}_f(h(X))$$

lo cual obviamente nos permite aproximar integrales (por eso Monte Carlo en el nombre del método).

Para ejemplificar esto, defina la siguiente cadena de Markov $x_t = \beta x_{t-1} + \varepsilon_t$, donde ε_t es una secuencia iid con distribución normal$(0, 1)$. Realice simulaciones de x_t con $\beta = 0.1$ para obtener que la distribución estacionaria es normal$(0, 1/(1-\beta^2))$. Justifique muy bien la conclusión anterior, utilizando métodos gráficos y test.

Solución:
Se considera la cadena de Markov definida por

$$X_t = \beta X_{t-1} + \varepsilon_t, \qquad \varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0, 1), \quad \beta = 0.1$$

En primer lugar se estudia la media. Si se define m_t como la esperanza de X_t en el tiempo t, entonces $m_t = \mathbb{E}[X_t]$. Al aplicar la esperanza a la ecuación de la cadena se tiene

$$m_t = \mathbb{E}[X_t] = \mathbb{E}[\beta X_{t-1} + \varepsilon_t] = \beta \mathbb{E}[X_{t-1}] = \beta m_{t-1}$$
$$m_{t-1} = \mathbb{E}[X_{t-1}] = \mathbb{E}[\beta X_{t-2} + \varepsilon_{t-1}] = \beta m_{t-2}$$

Reemplazando:

$$m_t = \beta^2 m_{t-2}$$

Repitiendo la relación se obtiene $m_t = \beta^t m_0$. Como $|\beta| < 1$, el producto β^t tiende a cero cuando $t \to \infty$, por lo que la media de la cadena converge a 0 independientemente de la condición inicial.

En segundo lugar se analiza la varianza $v_t = \mathrm{Var}(X_t)$. Usando la independencia de X_{t-1} y ε_t, se cumple

$$v_t = \mathrm{Var}(\beta X_{t-1} + \varepsilon_t) = \beta^2 v_{t-1} + 1,$$

ya que la varianza del ruido es igual a 1. Si la varianza se estabiliza en un valor v, entonces debe cumplirse

$$v = \beta^2 v + 1 \quad \Longrightarrow \quad v = \frac{1}{1-\beta^2}.$$

Sustituyendo $\beta = 0.1$, resulta

$$v = \frac{1}{1-0.01} = \frac{1}{0.99} \approx 1.0101.$$

Finalmente, al expandir recursivamente la definición de X_t se obtiene

$$X_t = \beta^t X_0 + \varepsilon_t + \beta\varepsilon_{t-1} + \beta^2\varepsilon_{t-2} + \cdots + \beta^{t-1}\varepsilon_1.$$

Esto corresponde a una suma de variables normales independientes, y por lo tanto X_t es también normal. Considerando los resultados anteriores, se concluye que para t grande

$$X_t \sim \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{1-\beta^2}\right).$$

En consecuencia, para el caso $\beta = 0.1$, la cadena converge a una distribución normal con media 0 y varianza aproximadamente 1.01.

Verificación mediante simulación

Para verificar los resultados teóricos, se realizó una simulación de la cadena de Markov con los siguientes parámetros:

- $\beta = 0.1$
- $n_{total} = 50,000$ pasos
- Período transitorio descartado: 1,000 pasos iniciales
- Muestra efectiva analizada: 49,000 valores

La Figura 1 muestra un excelente ajuste entre la distribución empírica de los datos simulados (barras azules) y la curva teórica normal (línea roja). La coincidencia visual confirma que la cadena ha convergido a la distribución estacionaria esperada.

El gráfico Q-Q (Figura 2) muestra que los puntos se alinean casi perfectamente con la recta diagonal, indicando que los datos siguen una distribución normal. Las pequeñas desviaciones en los extremos son esperables en muestras finitas.

La función de autocorrelación (Figura 3) muestra:

- ACF(1) $\approx 0.1 = \beta$, confirmando la estructura de dependencia de primer orden
- ACF(k) $\approx \beta^k$ para $k > 1$, mostrando el decaimiento exponencial esperado
- La dependencia temporal se vuelve despreciable después de pocos lags

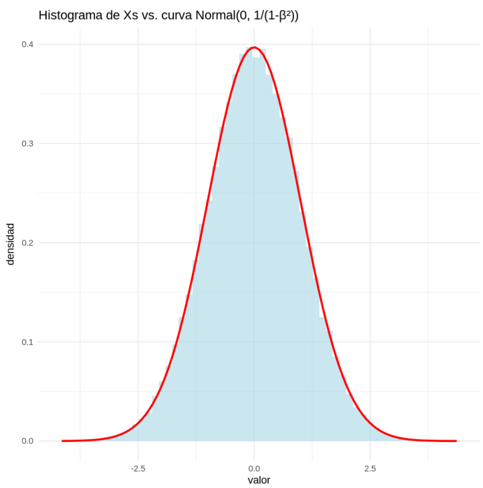

Figura 1: Histograma de la cadena simulada vs. curva teórica $\mathcal{N}(0, 1/(1-\beta^2))$

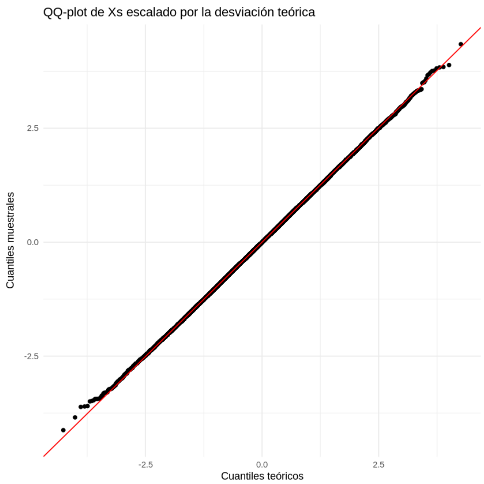

Figura 2: Q-Q plot de los datos escalados por la desviación teórica

La trayectoria de la cadena (Figura 4) muestra el comportamiento típico de un proceso estacionario:

- Fluctuaciones alrededor de la media cero
- Variabilidad constante a lo largo del tiempo
- Ausencia de tendencias o cambios estructurales

Estadístico	**Valor teórico**	**Valor muestral**
Media	0.0000	-0.0023
Varianza	1.0101	1.0099
Desviación estándar	1.0050	1.0049
Correlación lag 1	0.1000	0.0966

Se aplicaron tres tests estadísticos para verificar la normalidad:

- Test de Shapiro-Wilk: p-valor $= 0.3396$
- Test de Kolmogorov-Smirnov: p-valor $= 0.9535$

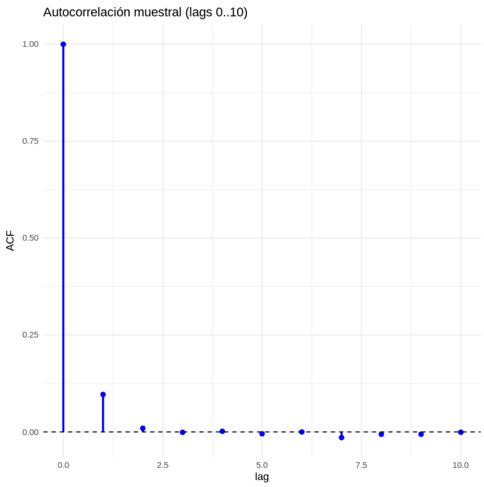

Figura 3: Función de autocorrelación muestral (ACF) para lags 0 a 10

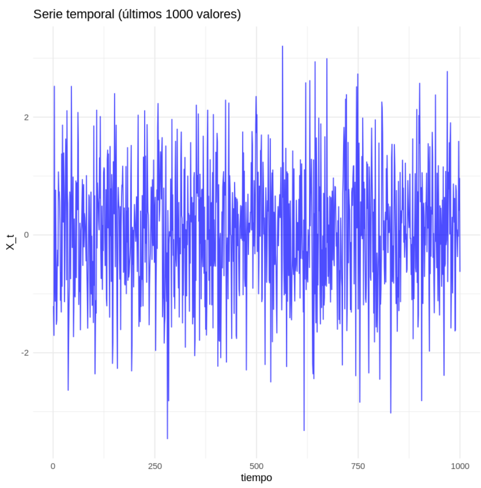

Figura 4: Evolución temporal de la cadena (últimos 1000 valores)

- Test de Anderson-Darling: p-valor $= 0.8627$

Todos los p-valores son suficientemente altos (mayores a 0.05), por lo que no se rechaza la hipótesis de normalidad.

La simulación confirma que:

1. La cadena de Markov $X_t = \beta X_{t-1} + \varepsilon_t$ con $\beta = 0.1$ converge a una distribución estacionaria
2. Esta distribución es $\mathcal{N}(0, 1/(1-\beta^2)) = \mathcal{N}(0, 1.0101)$
3. Los métodos gráficos (histograma, Q-Q plot, ACF) validan visualmente la convergencia
4. Los tests estadísticos confirman formalmente la normalidad
5. La estructura de dependencia temporal coincide con la esperada teóricamente

Problema 2

Existen varias estrategias para construir la cadena de Markov cuya distribución estacionaria coincida con f, una de ellas es el algoritmo de Metropolis-Hasting. Dada una función objetivo f, se le asocia una densidad $q(x|y)$ la cual, en la práctica, sea más fácil de simular. El soporte de la función $q(\cdot|y)$ debe contener el soporte de f.

Algoritmo 1: Metropolis-Hasting

1. Simule $Y_t \sim q(y|x_t)$
2. Tome

$$X_{t+1} = \begin{cases} Y_t & \text{con probabilidad} \quad \rho(x_t, Y_t) \\ x_t & \text{con probabilidad} \quad 1 - \rho(x_t, Y_t) \end{cases}$$

donde $\rho(x, y) = \text{mín}\left\{\frac{f(y)q(x|y)}{f(x)q(y|x)}, 1\right\}$

Solución: