Apuntes de Procesos Estocásticos

1 Datos del curso

- **Profesor:** Nicolás Moreno
- **Correo:** `namorenor@eafit.edu.co`
- **Oficina:** 19-604

- **Horario de atención:** Jueves 10:00 a 13:00

Contenido

1. Cadenas de Markov en tiempo discreto.
2. Procesos de Poisson.
3. Cadenas de Markov en tiempo continuo.
4. Teoría de filas.
5. Martingalas.

Parciales

- Parcial 1: Semana 5 (21 de agosto) (25%)
- Parcial 2: Semana 11 (22 de septiembre) (25%)
- Parcial 3: Semana 17 (10 de noviembre) (25%)

Talleres de seguimiento

- Taller: Semana 5 (5%)
- Taller: Semana 11 (5%)

Bibliografía

- Durrett, R. *Essentials of Stochastic Processes.*
- Ross, S. *Stochastic Processes.*

2 ¿Qué es un proceso estocástico?

Definición: Un **proceso estocástico** es una colección de variables aleatorias

$$\{X_t\}_{t \in T},$$

donde T puede ser finito, numerable o no numerable.

- Si T es finito o numerable, el proceso es **discreto**.
- Si T es no numerable, el proceso es **continuo**.

El conjunto de posibles valores de X_t se denota por S y se llama **espacio de estados**. Al igual que T, S puede ser discreto o continuo.

Ejemplo: Artículos defectuosos

1. Número de artículos defectuosos producidos por una máquina cada hora:

$$T: \text{ discreto}, \qquad S: \text{ discreto}.$$

2. Nivel de agua en una represa:

$$T: \text{ continuo}, \qquad S: \text{ continuo}.$$

3. Número de clientes haciendo fila:

$$T: \text{ continuo}, \qquad S: \text{ discreto}.$$

4. Tiempos entre llegadas de clientes

$$\begin{aligned} X_1 &: \text{tiempo hasta la primera llegada}, \\ X_2 &: \text{tiempo entre las llegadas 1 y 2}, \\ X_3 &: \text{tiempo entre las llegadas 2 y 3}, \ \ldots \end{aligned}$$

$$T: \text{ discreto}, \qquad S: \text{ continuo}.$$

Definición: Un proceso estocástico puede verse como una función

$$X: \ \Omega \times T \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad (\omega, t) \mapsto X(\omega, t).$$

- Si t es fijo, $\omega \mapsto X(\omega, t)$ es una variable aleatoria.
- Si ω es fijo, $t \mapsto X(\omega, t)$ es una trayectoria.

1. Espacio de probabilidad:

- Ω es el conjunto de todos los posibles resultados (espacio muestral).

- Cada elemento $\omega \in \Omega$ representa un **experimento completo** o un **escenario particular**.

2. Proceso estocástico como función:
Formalmente, un proceso estocástico es una función de dos variables:

$$X : \Omega \times T \to \mathbb{R}$$

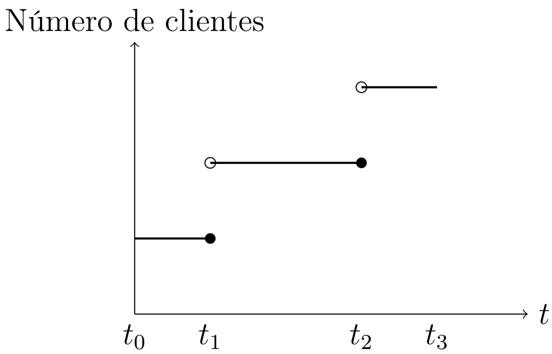
donde:

- Ω captura la aleatoriedad (cada ω es un "universo" posible).
- T es el conjunto de tiempos (índice temporal).
- El valor $X(\omega, t)$ es el **estado** que el proceso tiene en el tiempo t en el escenario ω.

3. Interpretación práctica:

- Fija un ω: obtienes una **trayectoria** o **realización** del proceso en todo t.
- Fija un t: obtienes una **variable aleatoria** $X_t(\omega) = X(\omega, t)$ que describe el estado en ese instante, pero depende del azar.

Ejemplo: Clientes en fila



3 Cadenas de Markov en tiempo discreto

Definición: Un proceso $\{X_n\}_{n\geq 0}$ con espacio de estados S es una **cadena de Markov** si para todo $i, j, i_0, \ldots, i_{n-1} \in S$ y $n = 0, 1, 2, \ldots$,

$$P(X_{n+1} = j \mid X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, X_0 = i_0) = P(X_{n+1} = j \mid X_n = i).$$

Probabilidad de transición

La probabilidad

$$P(X_{n+1} = j \mid X_n = i)$$

se llama **probabilidad de transición** del estado i al estado j en un paso.

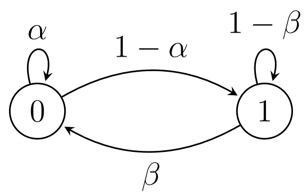
Cadena homogénea y matriz de transición

Si $P(X_{n+1} = j \mid X_n = i)$ no depende de n, la cadena es **homogénea** y se escribe

$$P(X_{n+1} = j \mid X_n = i) = P_{ij}.$$

Las probabilidades P_{ij} se organizan en la **matriz de transición** $P = (P_{ij})$, cuyas filas verifican $\sum_j P_{ij} = 1$ y $P_{ij} \geq 0$.
Ejemplo: Matriz 2×2 y grafo

$$P = \begin{pmatrix} \alpha & 1-\alpha \\ \beta & 1-\beta \end{pmatrix}$$

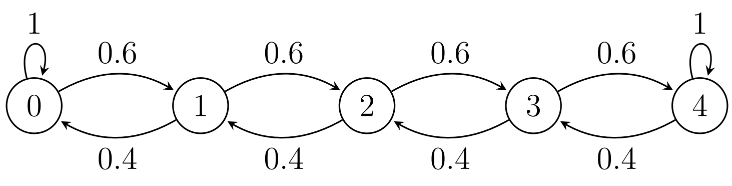


Ejemplo (modelo de lluvia): Estados 0 =lluvia, 1 =no lluvia. Con parámetros α, β:

$$P(X_{n+1} = 0 \mid X_n = 0) = \alpha, \qquad P(X_{n+1} = 0 \mid X_n = 1) = \beta.$$

Ejemplo (juego de apuestas): En cada juego se gana 1 con probabilidad 0.6 y se pierde 1 con probabilidad 0.4. El jugador se retira al llegar a 0 o 4. Sea X_n la cantidad de dinero al tiempo n.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.4 & 0 & 0.6 & 0 & 0 \\ 0 & 0.4 & 0 & 0.6 & 0 \\ 0 & 0 & 0.4 & 0 & 0.6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

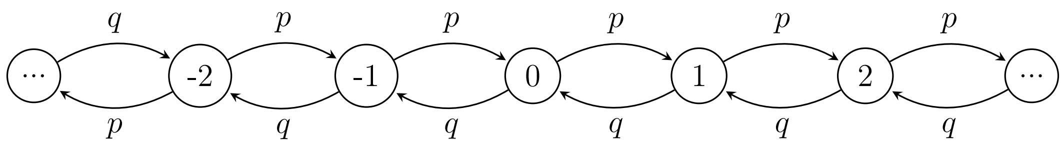


Ejemplo (paseo aleatorio): Considere un proceso $\{X_n\}_{n\geq 0}$ con espacio de estados $S = \mathbb{Z}$ y sus probabilidades de transición están dadas por:

$$\begin{aligned} P(i, i+1) &= p \\ P(i, i-1) &= q \end{aligned}$$

De forma más general:

$$P(i,j) = \begin{cases} p, & \text{si } j = i+1, \\ q, & \text{si } j = i-1, \\ r, & \text{si } j = i \end{cases} \qquad p + q + r = 1.$$



Ejemplo (ramificación): Supóngase que un organismo tiene j hijos con probabilidad α_j:

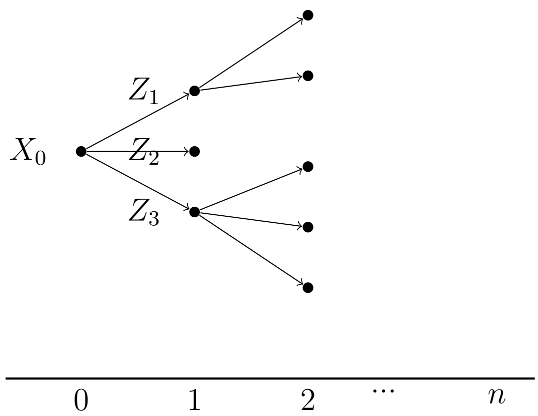
$$P(Z=j)=\alpha_j$$

donde Z es el número de hijos de un individuo.

- X_0: número de individuos en la generación 0.
- X_1: número de individuos en la generación 1.
- X_2: número de individuos en la generación 2, etc.

$$P(X_{n+1}=j \mid X_n=i)=\begin{cases} 0, & i=0,\ j>0, \\ 1, & i=0,\ j=0, \\ P\left(\sum_{k=1}^{i} Z_k=j\right), & i>0,\ j\geq 0, \end{cases}$$

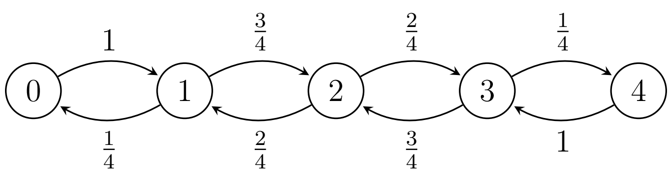
donde Z_k son independientes con la misma ley que Z.



Ejemplo (urna de Ehrenfest): Suponga que hay N bolas numeradas de 1 a N y distribuidas en 2 urnas. En el tiempo n se selecciona al azar una bola del conjunto $\{1,2,\dots,N\}$.

- Si la bola corresponde a una de la urna 1, se pasa a la urna 2.
- Si la bola corresponde a una de la urna 2, se pasa a la urna 1.

Sea X_n el número de bolas en la urna 1 en el tiempo n. El diagrama de estados es:



La matriz de transición P para N bolas es:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \frac{1}{N} & 0 & \frac{N-1}{N} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{N} & 0 & \frac{N-2}{N} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{N} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{N} & 0 \end{pmatrix}$$

donde:

- X_0: número de bolas en la urna 1 en el tiempo inicial.
- X_1: número de bolas en la urna 1 en el siguiente paso.

Las probabilidades de transición son:

$$P(X_{n+1} = j \mid X_n = i) = \begin{cases} \frac{N-i}{N}, & \text{si } j = i+1 \text{ (se transfiere de urna 2 a urna 1)}, \\ \frac{i}{N}, & \text{si } j = i-1 \text{ (se transfiere de urna 1 a urna 2)}, \\ 0, & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases}$$

Problema: Sea X_n el clima en el día n. Suponga que un modelo para este proceso es una **cadena de Markov** con matriz de transición dada por

$$P = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.6 & 0.0 \\ 0.2 & 0.5 & 0.3 \\ 0.1 & 0.7 & 0.2 \end{pmatrix}$$

donde los estados son:

$$1 = \text{Lluvia}, \quad 2 = \text{Nublado}, \quad 3 = \text{Sol}.$$

Hoy es lunes y está nublado. ¿Cuál es la probabilidad de que el martes esté soleado y el miércoles esté lloviendo?
Un proceso estocástico $\{X_n\}$ cumple que:

$$P(X_n = j \mid X_{n-1} = i, X_{n-2} = i_{n-2}, \ldots, X_0 = i_0) = P(X_n = j \mid X_{n-1} = i) = P_{ij}.$$

Solución:
Se busca:

$$P(X_2 = 1,\, X_1 = 3 \mid X_0 = 2).$$

Por la propiedad de Markov:

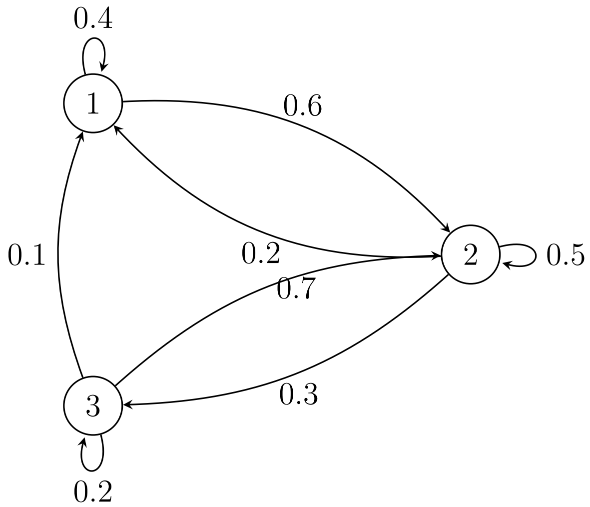
$$P(X_2 = 1,\, X_1 = 3 \mid X_0 = 2) = P(2,3) \cdot P(3,1).$$

Usando la matriz de transición:

$$P(2,3) = 0.3, \quad P(3,1) = 0.1,$$

entonces:

$$P(X_2 = 1,\, X_1 = 3 \mid X_0 = 2) = 0.3 \times 0.1 = 0.03.$$



Probabilidades de transición en n pasos

Definición: Las probabilidades de transición en n pasos del estado i al estado j se denotan por:

$$p_{ij}^{(n)} = P(X_n = j \mid X_0 = i), \quad n \geq 0,\ i, j \in S.$$

En particular:

$$p_{ij}^{(1)} = P_{ij}, \quad p_{ij}^{(0)} = \delta_{ij}$$

donde δ_{ij} es el delta de Kronecker. Se organiza en la matriz:

$$P^{(n)} = \begin{pmatrix} p_{11}^{(n)} & p_{12}^{(n)} & p_{13}^{(n)} \\ p_{21}^{(n)} & p_{22}^{(n)} & p_{23}^{(n)} \\ p_{31}^{(n)} & p_{32}^{(n)} & p_{33}^{(n)} \end{pmatrix}$$

Propiedades:

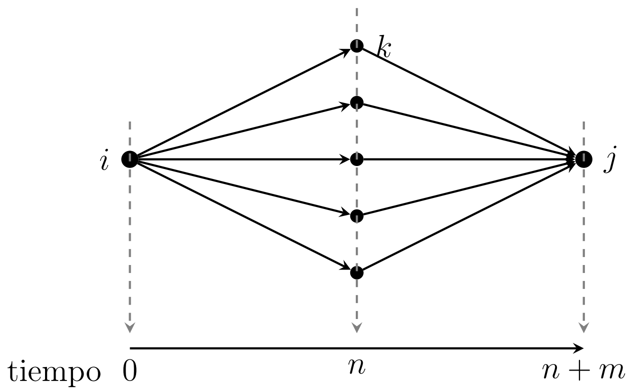
- $P^{(0)} = I$ (matriz identidad).
- $P^{(1)} = P$ (matriz de transición de un paso).

Teorema:

$$P^{(n)} = P^{(m)} \cdot P^{(n-m)}, \quad \text{en particular } P^{(n)} = P \cdot P \cdots P \ (n \text{ veces}) = P^n.$$

Ecuaciones de Chapman–Kolmogorov

Las **ecuaciones de Chapman–Kolmogorov** calculan las probabilidades de transición en múltiples pasos. Estas ecuaciones establecen que la probabilidad de transición del estado i al estado j en $n + m$ pasos puede descomponerse como la suma de todas las posibles transiciones intermedias a través de estados k en el paso n.



$$P_{ij}^{n+m} = \sum_{k \in S} P_{ik}^{n} \, P_{kj}^{m}$$

Demostración:

$$\begin{aligned}
P_{ij}^{n+m} &= P(X_{n+m} = j \mid X_0 = i) \\
&= \frac{P(X_{n+m} = j, X_0 = i)}{P(X_0 = i)} \\
&= \frac{P(X_{n+m} = j, \bigcup_{k \in S}\{X_n = k\}, X_0 = i)}{P(X_0 = i)} \\
&= \frac{\sum_{k \in S} P(X_{n+m} = j, X_n = k, X_0 = i)}{P(X_0 = i)} \\
&= \sum_{k \in S} \frac{P(X_{n+m} = j, X_n = k, X_0 = i)}{P(X_0 = i)} \cdot \frac{P(X_n = k, X_0 = i)}{P(X_n = k, X_0 = i)} \\
&= \sum_{k \in S} P(X_{n+m} = j \mid X_n = k, X_0 = i) \cdot P(X_n = k \mid X_0 = i) \\
&= \sum_{k \in S} P(X_m = j \mid X_0 = k) \cdot P(X_n = k \mid X_0 = i) \\
&= \sum_{k \in S} P^m(k, j) \cdot P^n(i, k) \\
&= \sum_{k \in S} P^n(i, k) \cdot P^m(k, j)
\end{aligned}$$

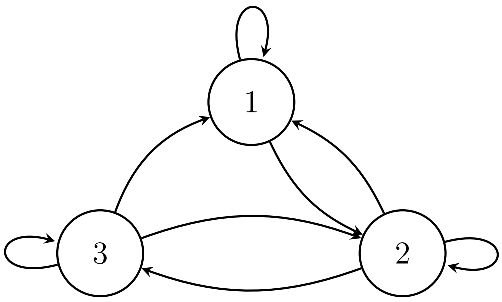
Propiedad de Markov:

$$P(X_{n+m} = j \mid X_n = k, X_0 = i) = P(X_{n+m} = j \mid X_n = k)$$

Definición de probabilidades de transición:

$$P^n(i, k) = P(X_n = k \mid X_0 = i), \quad P^m(k, j) = P(X_m = j \mid X_0 = k)$$

Distribución inicial y probabilidades marginales



$q(1)$	$q(2)$	$q(3)$
$(0.3,$	$0.4,$	$0.3)$

Definición: La medida $q(i) = P(X_0 = i)$ definida para todo $i \in S$ se conoce como **distribución inicial** de la cadena.

Propiedades:

1. $0 \leq q(i)$ para $i \in S$.
2. $\sum_{i \in S} q(i) = 1$.
3. $P(X_n = j)$:

$$\begin{aligned}
P(X_n = j) &= \sum_{i \in S} P(X_n = j, X_0 = i) \\
&= \sum_{i \in S} P(X_n = j, X_0 = i) \cdot \frac{P(X_0 = i)}{P(X_0 = i)} \\
&= \sum_{i \in S} P(X_n = j \mid X_0 = i) \cdot P(X_0 = i) \\
&= \sum_{i \in S} P^n(i, j) \cdot q(i)
\end{aligned}$$

Nota: $P(X_n = j)$ es la multiplicación del vector q con la columna j de la matriz $P^{(n)}$.
Problema: Considere una máquina que al inicio del día está funcionando o está dañada.

- Estado 0 = Dañada
- Estado 1 = En buen estado

Suponga que el 20% de los días la máquina amanece dañada, y tiene una matriz de transición:

$$P = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.7 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix}$$

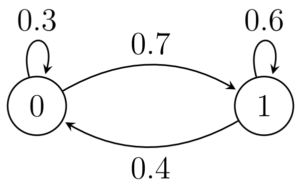
Determinar:

1. $P(X_2 = 0, X_1 = 1, X_0 = 0) = q(0)P(0,1)P(1,0)$

2. $P(X_1 = 0)$

3. $P(X_2 = 0)$

Solución:
$q = (0.2, 0.8)$ donde $q(0) = P(X_0 = 0)$



1) $P(X_2 = 0, X_1 = 1, X_0 = 0)$:
Por la propiedad de Markov:

$$\begin{aligned} P(X_2 = 0, X_1 = 1, X_0 = 0) &= P(X_2 = 0 \mid X_1 = 1)P(X_1 = 1 \mid X_0 = 0)P(X_0 = 0) \\ &= P(1,0) \times P(0,1) \times q(0) \\ &= 0.4 \times 0.7 \times 0.2 = 0.056 \end{aligned}$$

2) $P(X_1 = 0) = q(0)P(0,0) + q(1)P(1,0) = 0.2 \times 0.3 + 0.8 \times 0.4 = 0.38$
3) $P(X_2 = 0) = P(X_2 = 0, X_1 = 0) + P(X_2 = 0, X_1 = 1)$

$$\begin{aligned} &= P(X_2 = 0 \mid X_1 = 0)P(X_1 = 0) + P(X_2 = 0 \mid X_1 = 1)P(X_1 = 1) \\ &= P(0,0)P(X_1 = 0) + P(1,0)P(X_1 = 1) \\ &= 0.3 \times 0.38 + 0.4(1 - P(X_1 = 0)) \\ &= 0.3 \times 0.38 + 0.4 \times 0.62 = 0.36 \end{aligned}$$

Clasificación de estados de una cadena de Markov

Definición: Un estado j es **accesible** desde un estado i si existe $n \geq 0$ tal que

$$P_{ij}^{(n)} > 0$$

y lo denotamos por $i \to j$.

Definición: Si $i \to j$ y $j \to i$ entonces se dice que i y j se comunican, y denotamos por $i \leftrightarrow j$.

- **Reflexiva:** Para todo $i \in S$, $i \to i$. $P_{ii}^{(0)} = 1 > 0$.
- **Simétrica:** Si $i \leftrightarrow j$ entonces $j \leftrightarrow i$.
- **Transitiva:** Si $i \leftrightarrow k$ y $k \leftrightarrow j$ entonces $i \leftrightarrow j$.

Observación: La relación $\leftrightarrow$ es de equivalencia.
Demostración: $i \leftrightarrow k$; existe $n \geq 0$ tal que $P_{ik}^{(n)} > 0$
$k \leftrightarrow j$; existe $m \geq 0$ tal que $P_{kj}^{(m)} > 0$.

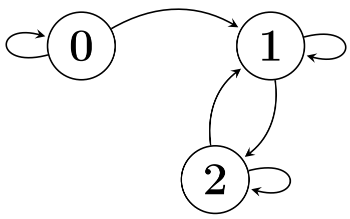
$$P_{ij}^{(n+m)} = \sum_{l \in S} P_{il}^{(n)} P_{lj}^{(m)} \geq P_{ik}^{(n)} P_{kj}^{(m)} > 0.$$

Las clases de equivalencia en una cadena de Markov (o en cualquier relación de equivalencia en matemáticas) forman una partición del espacio de estados. Eso significa:

- Cada estado pertenece a una sola clase.
- Las clases son disjuntas entre sí.
- La unión de todas las clases cubre todos los estados.

Problema: Determine las clases de Equivalencia

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$



$$\begin{aligned} 1 &\leftrightarrow 2 \\ 0 &\leftrightarrow 0 \\ C_A &= \{1, 2\} \\ C_B &= \{0\} \end{aligned}$$

En resumen:

- Espacio de estados: $S = \{0, 1, 2\}$
- Clases de equivalencia encontradas: $C_A = \{1, 2\}$ y $C_B = \{0\}$
- Son disjuntas: $\{1, 2\} \cap \{0\} = \emptyset$
- Cubren todo el espacio de estados: $\{1, 2\} \cup \{0\} = \{0, 1, 2\}$

Definición: Se dice que una cadena de Markov es irreducible si existe una única clase, es decir, todos los estados se comunican entre sí.

Estados transitorios y recurrentes.

Definición: Sea

$$f_{ii}^{(n)} = P(X_n = i, X_{n-1} \neq i, \ldots, X_1 \neq i | X_0 = i)$$

La probabilidad de primer retorno al estado i en n pasos, dado que se inició en i, se define como:

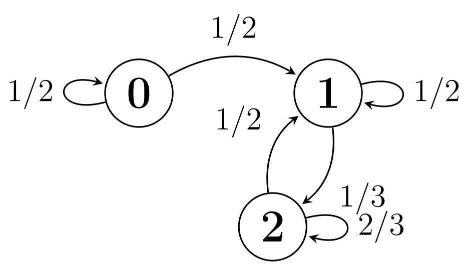
$$f_i = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ii}^{(n)} \quad \text{probabilidad de que regrese al estado i eventualmente}$$

Diremos que el estado i es:

- **Recurrente:** si $f_i = 1 \iff 1 - f_i = 0$
- **Transitorio:** si $f_i < 1 \iff 1 - f_i > 0$

Ejemplo: Sea la cadena de Markov con matriz de transición:

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$



Se procede a calcular f_0:

$$f_{00}^{(1)} = P(X_1 = 0 \mid X_0 = 0) = 1/2$$
$$f_{00}^{(2)} = P(X_2 = 0, X_1 \neq 0 \mid X_0 = 0) = P(0,1) \cdot P(1,0) = \frac{1}{2} \cdot 0 = 0$$
$$f_{00}^{(3)} = P(X_3 = 0, X_2 \neq 0, X_1 \neq 0 \mid X_0 = 0) = P(0,1) \cdot P(1,2) \cdot P(2,0) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 0 = 0$$

Para $n \geq 4$, observamos que $f_{00}^{(n)} = 0$ porque desde el estado 0 no podemos regresar sin pasar por el estado 1, y desde el estado 1 no podemos regresar al estado 0 (ya que $P(1,0) = 0$). Por lo tanto:

$$f_{00}^{(n)} = \begin{cases} 1/2 & \text{si } n = 1 \\ 0 & \text{si } n \geq 2 \end{cases}$$

$$f_0 = \sum_{n=1}^{\infty} f_{00}^{(n)} = \frac{1}{2} + 0 + 0 + \cdots = \frac{1}{2} < 1$$

El estado 0 es **transitorio**.
Se procede a calcular f_1.

$$f_{11}^{(1)} = P(X_1 = 1 \mid X_0 = 1) = 1/2$$
$$f_{11}^{(2)} = P(X_2 = 1, X_1 \neq 1 \mid X_0 = 1) = P(1,2) \cdot P(2,1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$
$$f_{11}^{(3)} = P(X_3 = 1, X_2 \neq 1, X_1 \neq 1 \mid X_0 = 1) = P(1,2) \cdot P(2,2) \cdot P(2,1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$$

$$\begin{aligned} f_{11}^{(4)} &= P(X_4 = 1, X_3 \neq 1, X_2 \neq 1, X_1 \neq 1 \mid X_0 = 1) \\ &= P(1,2) \cdot P(2,2) \cdot P(2,2) \cdot P(2,1) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{27} \end{aligned}$$

En general, para $n \geq 2$:

$$f_{11}^{(n)} = P(1,2) \cdot [P(2,2)]^{n-2} \cdot P(2,1) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}$$

Por lo tanto:

$$f_{11}^{(n)} = \begin{cases} 1/2 & \text{si } n = 1 \\ \frac{1}{6}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2} & \text{si } n \geq 2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} f_1 &= \sum_{n=1}^{\infty} f_{11}^{(n)} \\ &= 1/2 + \sum_{n=2}^{\infty} 1/6(2/3)^{n-2} \\ &= 1/2 + 1/6 \sum_{k=0}^{\infty} (2/3)^k \\ &= 1/2 + 1/6\left(\frac{1}{1-2/3}\right) \\ &= 1/2 + 1/6 \cdot 3 \\ &= 1/2 + 1/2 = 1 \end{aligned}$$

Por lo tanto, el estado 1 es **recurrente**.
Se procede a calcular f_2.

$$f_{22}^{(1)} = P(X_1 = 2 \mid X_0 = 2) = 2/3$$
$$f_{22}^{(2)} = P(X_2 = 2, X_1 \neq 2 \mid X_0 = 2) = P(2,1) \cdot P(1,2) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$
$$f_{22}^{(3)} = P(X_3 = 2, X_2 \neq 2, X_1 \neq 2 \mid X_0 = 2) = P(2,1) \cdot P(1,1) \cdot P(1,2) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$$

En general, para $n \geq 2$:

$$f_{22}^{(n)} = P(2,1) \cdot [P(1,1)]^{n-2} \cdot P(1,2) = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$$

Por lo tanto:

$$f_{22}^{(n)} = \begin{cases} 2/3 & \text{si } n = 1 \\ \frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} & \text{si } n \geq 2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} f_2 &= \sum_{n=1}^{\infty} f_{22}^{(n)} \\ &= \frac{2}{3} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} \\ &= \frac{2}{3} + \frac{1}{6}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{k} \\ &= \frac{2}{3} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{1-1/2} \\ &= \frac{2}{3} + \frac{1}{6} \cdot 2 \\ &= \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 1 \end{aligned}$$

El estado 2 es **recurrente**.

Recordemos que: $\forall i \in S$

$$f_{ii}^{(n)} = P(X_n = i, X_{n-1} \neq i, \ldots, X_1 \neq i \mid X_0 = i) \tag{1}$$

$$f_i = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ii}^{(n)} \tag{2}$$

$f_i < 1$ - i transitorio
$f_i = 1$ - i recurrente

Teorema: Para una cadena de Markov con matriz de transición $P = (P_{ij})$:

- $\sum_{n=0}^{\infty} P_{ii}^{(n)} = \infty$ si, y solo si el estado i es recurrente
- $\sum_{n=0}^{\infty} P_{ii}^{(n)} < \infty$ si, y solo si el estado i es transitorio

Demostración: Tarea.
Propiedad: Sean j y k estados de una cadena de Markov entonces:

1. Si j es recurrente y $j \leftrightarrow k$ entonces k es recurrente
2. Si j es transitorio y $j \leftrightarrow k$ entonces k es transitorio

Demostración: Sea j recurrente y $j \leftrightarrow k$.

- j recurrente $\leftrightarrow \sum_{t=0}^{\infty} P_{jj}^{(t)} = \infty$

- $j \leftrightarrow k \leftrightarrow$ existen m, n tales que $P_{jk}^{(n)} > 0$ y $P_{kj}^{(m)} > 0$

$$P_{kk}^{n+m+t} \geq P_{kj}^{(m)} P_{jj}^{(t)} P_{jk}^{(n)}$$

$$\sum_{t=0}^{\infty} P_{kk}^{n+m+t} \geq P_{kj}^{(m)} P_{jk}^{(n)} \sum_{t=0}^{\infty} P_{jj}^{(t)} = \infty$$

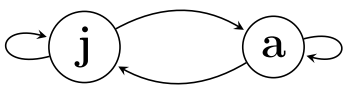
Por teorema presentado anteriormente k es recurrente.
Nota: La demostración del caso transitorio es análoga.
Propiedad: Sea X_n una cadena de Markov y j uno de sus estados. El estado j es recurrente, si y solo si el número esperado de visitas al estado j es infinito, comenzando en j.
Demostración: Iniciamos por:

$$E(I_n) = P(X_n = j)$$

Sea I_n la variable aleatoria que indica cuantas veces la cadena pasa por el estado j:

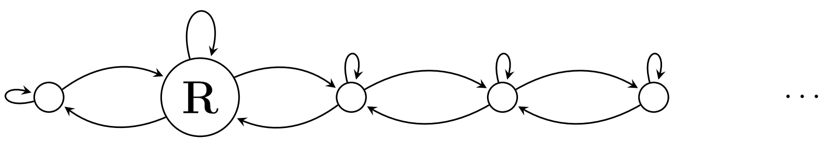
$$I_n = \begin{cases} 1 & \text{si } X_n = j \\ 0 & \text{si } X_n \neq j \end{cases}$$

$P(X_1 = j \mid X_0 = j)$
$P(X_2 = j \mid X_0 = j)$



$\sum_{n=0}^{\infty} I_n :=$ número de visitas al estado j

$$\begin{aligned} E\left(\sum_{n=0}^{\infty} I_n \mid X_0 = j\right) &= \sum_{n=0}^{\infty} E(I_n \mid X_0 = j) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} P(X_n = j \mid X_0 = j) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} P_{jj}^{(n)} = \infty \end{aligned}$$



Definición: Sea

$$\tau_i = \min\{n \geq 1 : X_n = i\}$$

el tiempo de retorno al estado i.

$$E(\tau_i \mid X_0 = i)$$

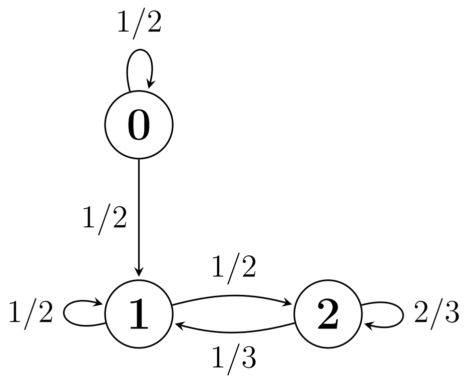
es el tiempo esperado de retorno al estado i.

$$m_i = E(\tau_i \mid X_0 = i) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot f_{ii}^{(n)}$$

Definición: Se dice que un estado recurrente es:

1. recurrente positivo si $m_i < \infty$.
2. recurrente nulo si $m_i = \infty$.

Observación: Si el espacio de estados S es finito todo estado recurrente es recurrente positivo. Si además j es recurrente positivo (nulo) y $j \leftrightarrow k$ entonces k es recurrente positivo (nulo).
Ejemplo:



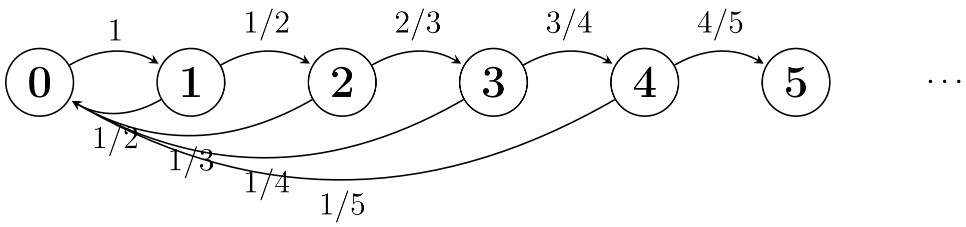
$$f_{11}^{(n)} = \begin{cases} 1/2 & \text{Para } n = 1 \\ 1/6(2/3)^{n-2} & \text{para } n > 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
m_1 = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{11}^{(n)} &= \frac{1}{2} + \sum_{n=2}^{\infty} n \frac{1}{6} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-3} \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \sum_{k=0}^{\infty} (k+2) \left(\frac{2}{3}\right)^k \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \left(\sum_{k=0}^{\infty} k \left(\frac{2}{3}\right)^k + 2 \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^k \right) \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \left(\sum_{k=0}^{\infty} k \left(\frac{2}{3}\right)^k + 2 \left(\frac{1}{1 - 2/3} \right) \right) \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \left(\sum_{k=0}^{\infty} k \left(\frac{2}{3}\right)^k + 6 \right) \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \sum_{k=0}^{\infty} k \left(\frac{2}{3}\right)^k + 1.
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{6} \times \frac{3}{2} \sum_{k=1}^{\infty} k \left(\frac{2}{3}\right)^k \qquad \text{geom}(2/3) \\
&= \frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{6} \times \frac{3}{2} \left(\frac{2/3}{1-2/3}\right) \\
&= \frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{6} \times 3 \times \frac{2}{3} = \frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{3} = \frac{11}{6}
\end{aligned}
$$

El 1 es recurrente positivo; pues $m_1 = \frac{11}{6} < \infty$.
Y como $1 \leftrightarrow 2$ entonces 2 es recurrente positivo.
Ejemplo: Consideremos la siguiente cadena de Markov.

$$
P_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = 0, j = 1 \\ \frac{i}{i+1} & \text{si } i \geq 1, j = i+1 \\ \frac{1}{i+1} & \text{si } i \geq 1, j = 0 \\ 0 & \text{e.o.c.} \end{cases}
$$



¿D es recurrente? y ¿0 es positivo o nulo?
C

$$
\begin{aligned}
f_{00}^{(1)} &= P(X_1 = 0 \mid X_0 = 0) = 0 \\
f_{00}^{(2)} &= P(X_2 = 0, X_1 \neq 0 \mid X_0 = 0) = P(0,1)P(1,0) = 1/2 \\
f_{00}^{(3)} &= P(X_3 = 0, X_2 \neq 0, X_1 \neq 0 \mid X_0 = 0) = P(0,1)P(1,2)P(2,0) = 1 \times 1/2 \times 1/3
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f_{00}^{(4)} &= P(X_4 = 0, X_3 \neq 0, X_2 \neq 0, X_1 \neq 0 \mid X_0 = 0) \\
&= P(0,1)P(1,2)P(2,3)P(3,0) \\
&= 1 \times 1/2 \times 2/3 \times 1/4 = 1/3 \times 1/4
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f_{00}^{(5)} &= P(X_5 = 0, X_4 \neq 0, X_3 \neq 0, X_2 \neq 0, X_1 \neq 0 \mid X_0 = 0) \\
&= P(0,1)P(1,2)P(2,3)P(3,4)P(4,0) \\
&= 1 \times 1/2 \times 2/3 \times 3/4 \times 1/5 = 1/4 \times 1/5
\end{aligned}
$$

$$
f_{00}^{(n)} = \frac{1}{n} \times \frac{1}{n-1} \quad \text{para } n \geq 2 \tag{3}
$$

¿$f_0 = 1$?

$$
\begin{aligned}
f_0 &= \sum_{n=1}^{\infty} f_{00}^{(n)} \\
&= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} \times \frac{1}{n-1} \\
&= \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right)
\end{aligned}
$$

Serie telescópica:

$$1/1 - 1/2 + 1/2 - 1/3 + 1/3 - 1/4 + 1/4 - 1/5 + \cdots + 1/(m-1) - 1/m \tag{4}$$

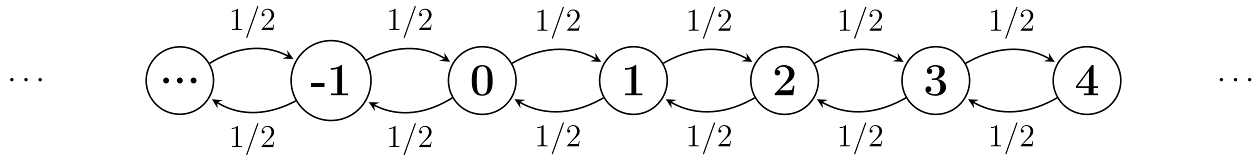
$$
\begin{aligned}
&= 1 - 1/m \\
f_0 &= \lim_{m \to \infty} \left(1 - \frac{1}{m} \right) = 1
\end{aligned}
$$

Ejemplo: Consideremos la siguiente cadena de Markov.

$$
P_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = 0, j = 1 \\ \frac{i}{i+1} & \text{para } i \geq 1, j = i+1 \\ \frac{1}{i+1} & \text{para } i \geq 1, j = 0 \\ 0 & \text{e.o.c.} \end{cases}
$$

$$
\begin{aligned}
m_0 &= \sum_{n=1}^{\infty} n f_{00}^{(n)} \\
&= \sum_{n=2}^{\infty} n \frac{1}{n} \frac{1}{n-1} \\
&= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n-1} \\
&= \infty
\end{aligned}
$$

El estado 0 es recurrente nulo y como $j \leftrightarrow 0$; $j \in S$ entonces todos los estados son recurrentes nulos.



$$
P^n(0,0) = \begin{cases} > 0 & \text{si } n \text{ es par} \\ 0 & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}
$$

Periodicidad de la cadena

Definición: Se dice que el estado i tiene periodo d si

$$d = \text{mcd}\{n : P_{ii}^{(n)} > 0\} \tag{5}$$

- Si $d = 1$ entonces el estado i es aperiódico.
- Si $d > 1$ entonces el estado i es periódico.

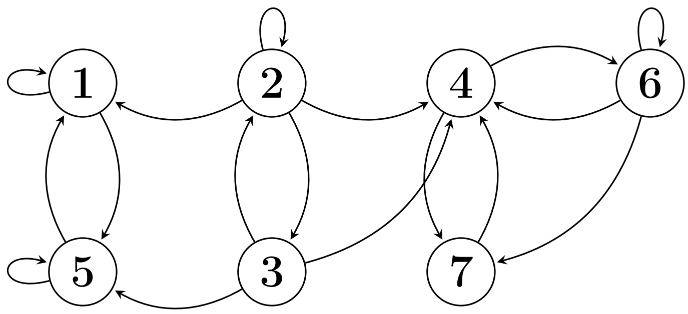
Diremos que la cadena es aperiódica si todos sus estados son aperiódicos.

Propiedades:

1. Si i tiene periodo d y $i \leftrightarrow j$ entonces j tiene periodo d.
2. Si $P_{ii} > 0$ entonces i es aperiódico $(d = 1)$.

Ejemplo: Considere

$$P = \begin{pmatrix} 0.3 & 0 & 0 & 0 & 0.7 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0.2 & 0.3 & 0.4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0 & 0.5 & 0.3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0.6 & 0 & 0 & 0 & 0.4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.4 & 0 & 0.2 & 0.4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



Las siguientes son las clases de equivalencia identificadas:

$$C_1 = \{5, 1\}$$
$$C_2 = \{3, 2\}$$
$$C_3 = \{4, 6, 7\}$$

Para cada estado i, calculamos $d_i = \text{mcd}\{n : P^n(i, i) > 0\}$:

$$
\begin{aligned}
&d_1 = \text{mcd}\{n : P^n(1,1) > 0\} = \text{mcd}\{1,2,3,\dots\} = 1\\
&d_5 = 1\\
&d_3 = \text{mcd}\{n : P^n(3,3) > 0\} = \text{mcd}\{2,3,4,5,\dots\} = 1\\
&d_2 = 1\\
&d_7 = \text{mcd}\{n : P^n(7,7) > 0\} = \text{mcd}\{2,3,4,5,6,\dots\} = 1\\
&d_4 = d_6 = 1
\end{aligned}
$$

Probabilidades Estacionarias

Definición: π es una medida estacionaria si

$$\pi P = \pi \tag{6}$$

donde $\pi P_j = P(X_n = j)$

Ejemplo: Considere la distribución inicial $\pi_0 = (0.2, 0.8)$ y la matriz de transición:

$$P = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.7 \\ 0.1 & 0.9 \end{pmatrix}$$

Calculamos $P(X_1 = 0)$:

$$
\begin{aligned}
P(X_1 = 0) &= 0.3 \times 0.2 + 0.8 \times 0.1\\
&= 0.06 + 0.08\\
&= 0.14
\end{aligned}
$$

Ejemplo: Considere la matriz de transición:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 3/4 & 1/4 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

¿Cuánto vale π?
La distribución estacionaria satisface $\pi P = \pi$:

$$(\pi_1, \pi_2, \pi_3) \begin{pmatrix} 0 & 3/4 & 1/4 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (\pi_1, \pi_2, \pi_3)$$

Esto nos da el sistema de ecuaciones:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\pi_2 + \pi_3 &= \pi_1\\
\frac{3}{4}\pi_1 &= \pi_2\\
\frac{1}{4}\pi_1 + \frac{1}{2}\pi_2 &= \pi_3
\end{aligned}
$$

Con la condición de normalización:

$$\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1 \tag{7}$$

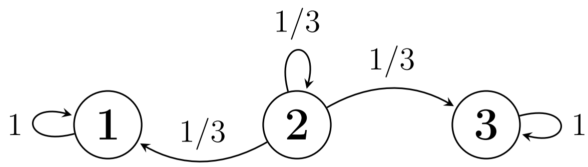
Resolviendo el sistema:

$$\pi_1 = \frac{8}{19}, \quad \pi_2 = \frac{6}{19}, \quad \pi_3 = \frac{5}{19}$$

Por lo tanto, $P(X_{m-1} = 1) = \frac{8}{19}$.
Ejemplo: Considere la matriz de transición:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Determina $\pi = (\pi_1, \pi_2, \pi_3)$.



La distribución estacionaria satisface $\pi P = \pi$:

$$(\pi_1, \pi_2, \pi_3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (\pi_1, \pi_2, \pi_3)$$

Esto nos da el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} \pi_1 + \frac{1}{3}\pi_2 &= \pi_1 \\ \frac{1}{3}\pi_2 &= \pi_2 \\ \frac{1}{3}\pi_2 + \pi_3 &= \pi_3 \end{aligned}$$

De la segunda ecuación: $\frac{1}{3}\pi_2 = \pi_2 \Rightarrow \pi_2 = 0$
De la primera ecuación: $\pi_1 + \frac{1}{3}\pi_2 = \pi_1 \Rightarrow \pi_1 = \pi_1$ (siempre se cumple)
De la tercera ecuación: $\frac{1}{3}\pi_2 + \pi_3 = \pi_3 \Rightarrow \pi_3 = \pi_3$ (siempre se cumple)
Con la condición de normalización: $\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1$
Como $\pi_2 = 0$, tenemos: $\pi_1 + \pi_3 = 1$
Por lo tanto, $\pi = (\alpha, 0, 1 - \alpha)$ donde $\alpha \in (0, 1)$.
Propiedad: La cadena de Markov tiene una única medida estacionaria si es irreducible (recurrencia positiva).
Propiedad: Si π es una medida estacionaria, entonces $X_n \sim \pi$. $P_\pi(X_n = j) = \pi(j)$.
Demostración:

- $\pi P = \pi$

- $\pi P^2 = \pi PP = \pi P = \pi$
- Si $\pi P^n = \pi$ entonces:

  $\pi P^{n+1} = \pi P^n P = \pi P = \pi$

  Por lo tanto, $\pi P^n = \pi$ para todo $n \geq 1$.

Si $X_0 \sim \pi$ entonces $X_n \sim \pi$.

$$P(X_n = j) = \pi(j) \tag{8}$$

Teorema: Si la cadena de Markov es irreducible y sus estados son recurrentes positivos, entonces la medida estacionaria π existe y es única. Además:

$$\pi_i = \frac{1}{m_i}, \quad i \in S$$

donde m_i es el **tiempo medio de retorno** al estado i, es decir,

$$m_i = E_i[T_i] \quad \text{(esperanza del tiempo hasta regresar a } i \text{ partiendo de } i\text{)}$$

Demostración:
Sea i un estado fijo. Definimos para cada $j \in S$:

$$\pi_j = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} P^k(i,j)$$

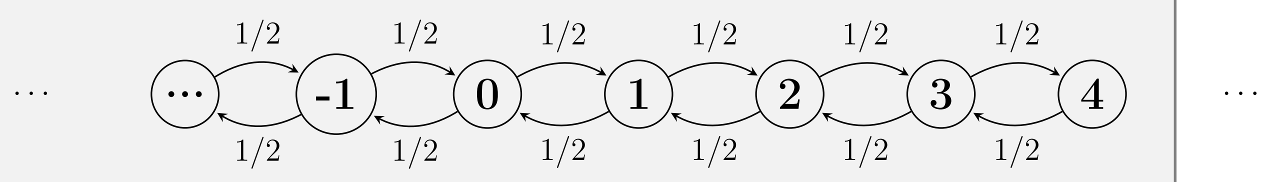
Por el teorema ergódico, este límite existe y vale $\pi_j = \frac{1}{m_j}$.
Para la existencia: $\sum_j \pi_j = \sum_j \frac{1}{m_j} = 1$ por la ley de grandes números.
Para verificar que $\pi P = \pi$: por las ecuaciones de renovación,

$$\sum_{j\in S} \frac{1}{m_j} P_{j\ell} = \frac{1}{m_\ell} = \pi_\ell$$

Para la unicidad: si μ es otra distribución estacionaria, entonces $\mu P^n = \mu$. Tomando límite:

$$\mu_j = \sum_k \mu_k \lim_{n\to\infty} P^n(k,j) = \sum_k \mu_k \pi_j = \pi_j$$

- $\lim_{n\to\infty} P^n(x,y) = \pi(y)$.
- Si el estado y es transitorio; $\sum_{n=1}^{\infty} P^n(x,y) < \infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty} P^n(x,y) = 0$.



$$
\begin{aligned}
P^{2n+1}(0,0) &= 0 \\
P^{2n}(0,0) &> 0.
\end{aligned}
$$

$\lim_{n\to\infty} P^n(0,0)$ no existe!
$\lim_{n\to\infty} P^{dn}(0,0)$ sí existe.

Teorema: Sea X_n una cadena de Markov $\{X_n\}_{n\geq 0}$ cuyos estados son irreducibles; recurrentes positivos y aperiódicos. Entonces:

$$\lim_{n\to\infty} P^n(x,y) = \pi(y)$$

Demostración: Estudio personal.
Observación:

- Si S es finito todos los estados recurrentes son recurrentes positivos
- Si S es finito entonces si es irreducible todos los estados son recurrentes positivos

Si $X_1, X_2, \ldots, X_n$ iid f_i, $E(|X|) < \infty$.
$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{\text{C.S.}} E(X)$.

Ley Fuerte de los Grandes Números

Suponga que $\{X_n\}_{n\geq 1}$ cumplió con las condiciones del teorema anterior y sea $r(\cdot)$ una función tal que:

$$\sum_x |r(x)|\pi(x) < \infty \tag{9}$$

entonces:

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} r(X_k) \xrightarrow{\text{C.S.}} E_\pi(r(X)) = \sum_x r(x)\pi(x) \tag{10}$$

Ejercicio: Sea X_n la cantidad de stock de un determinado producto en una tienda al final del día n y D_{n+1} la demanda del producto en el día $n+1$.
Cuando el stock al final del día es menor o igual a 1 unidad, ordenamos la cantidad necesaria para volver a tener 5 unidades.

$$X_{n+1} = \begin{cases} (X_n - D_{n+1})^+ & \text{si } X_n > 1 \\ (5 - D_{n+1})^+ & \text{si } X_n \leq 1 \end{cases}$$

Sea una cadena de Markov que:

k	0	1	2	3
$P(D_{n+1} = k)$	0.3	0.4	0.2	0.1

Problema 1: Determina la matriz de transición.

$$
\begin{aligned}
&P(0,0) = 0\\
&P(0,1) = 0\\
&P(0,2) = P(D_{n+1} = 3) = 0.1\\
&P(0,3) = 0.2\\
&P(0,4) = 0.4\\
&P(0,5) = 0.3
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P(2,0) &= P(D_{n+1} = 2 \text{ o } D_{n+1} = 3)\\
&= P(D_{n+1} = 2) + P(D_{n+1} = 3)
\end{aligned}
$$

La matriz de transición completa es:

$$
P = \begin{pmatrix}
0 & 0 & 0.1 & 0.2 & 0.4 & 0.3\\
0 & 0 & 0.1 & 0.2 & 0.4 & 0.3\\
0.3 & 0.4 & 0.3 & 0 & 0 & 0\\
0.1 & 0.2 & 0.4 & 0.3 & 0 & 0\\
0 & 0.1 & 0.2 & 0.4 & 0.3 & 0\\
0 & 0 & 0.1 & 0.2 & 0.4 & 0.3
\end{pmatrix}
$$

Problema 2: Suponga que ganamos \$12 mil pesos por cada unidad vendida y tiene un costo de \$2 mil pesos almacenar. ¿Cuál es la ganancia a largo plazo por día?
Calculamos el período de la cadena:

$$d = \text{mcd}\{n : P^n(0,0) > 0\}$$

$$
\begin{aligned}
P(0,0) &= 0\\
P^2(0,0) &> 0\\
P^3(0,0) &> 0
\end{aligned}
$$

$$d = \text{mcd}\{2, 3, 4, 5, \dots\} = 1$$

La distribución estacionaria satisface $\pi P = \pi$:

$$\pi = \frac{1}{9740}(885, 1516, 2250, 2100, 1960, 1029)$$

Demanda esperada por día:

$$E(D_{n+1}) = 0 \times 0.3 + 1 \times 0.4 + 2 \times 0.2 + 3 \times 0.1 = 1.1$$

¿Cuál es la pérdida por falta de stock a largo plazo?
Condición: $X_n = 2$ y $D_{n+1} = 3$

$$\text{PFS} = \begin{cases} 1 & \text{si } X_n = 2; D_{n+1} = 3 \\ 0 & \text{e.o.c.} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} E(\text{PFS}) &= 1 \times P(X_n = 2, D_{n+1} = 3) + 0 \times P(\text{otros casos}) \\ &= P(X_n = 2) \times P(D_{n+1} = 3) \\ &= \pi(2) \times 0.1 \\ &= \frac{2250}{9740} \times 0.1 = 0.0231 \end{aligned}$$

Entrada por día:

$$\text{Entrada} = 12\,\text{mil} \times (1.1 - 0.0231) = 12\,\text{mil} \times 1.0769 = 12.92\,\text{mil}$$

Salida por día (costo de almacenamiento):

$$\begin{aligned} r(X_k) &= 2\,\text{mil} \times X_k \\ E_\pi(r(X)) &= \sum_{x=0}^{5} r(x)\pi(x) \\ &= 2\,\text{mil} \times \sum_{x=0}^{5} x \cdot \pi(x) \\ &= \frac{2\,\text{mil}}{9740} \times (0 \times 885 + 1 \times 1516 + 2 \times 2250 + 3 \times 2100 + 4 \times 1960 + 5 \times 1029) \\ &= \frac{2\,\text{mil}}{9740} \times (0 + 1516 + 4500 + 6300 + 7840 + 5145) \\ &= \frac{2\,\text{mil}}{9740} \times 25301 \\ &= 5.20\,\text{mil} \end{aligned}$$

Ganancia diaria:

$$\text{Ganancia} = 12.92 - 5.20 = 7.72\,\text{mil pesos}$$