

# Repaso Conceptos de Probabilidad

Alejandro Daniel José Gómez Flórez

Este documento y más se encuentra disponible en:  
<https://github.com/alda92/NotasProcesosEstocasticos>

## 1 Espacio muestral

Consideremos el experimento de lanzar tres monedas. Cada moneda puede dar **cara** (1) o **sello** (0). Por lo tanto, el número total de resultados posibles es

$$|\Omega| = 2^3 = 8.$$

El espacio muestral es:

$$\Omega = \{(0, 0, 0), (0, 0, 1), (0, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 0), (1, 0, 1), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}.$$

### 1.1 Eventos

Un **evento** es cualquier subconjunto del espacio muestral  $\Omega$ . En nuestro ejemplo:

- **Evento elemental:** Un resultado específico, por ejemplo  $A = \{(1, 1, 0)\}$
- **Evento compuesto:** Múltiples resultados, por ejemplo  $B = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$  (exactamente una cara)
- **Evento seguro:** Todo el espacio muestral,  $E = \Omega$
- **Evento imposible:** El conjunto vacío,  $F = \emptyset$

## 2 $\sigma$ -álgebra

Un  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{F}$  sobre  $\Omega$  es una colección de subconjuntos de  $\Omega$  que cumple:

- $\Omega \in \mathcal{F}$ ,
- Si  $A \in \mathcal{F}$ , entonces  $A^c \in \mathcal{F}$ ,
- Si  $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$ , entonces  $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$ .

En espacios finitos, el  $\sigma$ -álgebra más común es el conjunto de partes de  $\Omega$ :

$$\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega).$$

Como  $|\Omega| = 8$ , se tiene  $|\mathcal{F}| = 2^8 = 256$ .

## 3 Variable aleatoria

Una variable aleatoria es una función medible:

$$X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}.$$

Ejemplo: Definimos  $X$  como el número de caras en los tres lanzamientos. Entonces:

$$X(\omega) \in \{0, 1, 2, 3\}.$$

Ejemplos de asignación:

$$X(0, 0, 0) = 0, \quad X(1, 0, 0) = 1, \quad X(1, 1, 0) = 2, \quad X(1, 1, 1) = 3.$$

### 3.1 ¿Es una variable aleatoria válida?

Sí, porque:

- El **dominio** es  $\Omega$  (el espacio muestral de los tres lanzamientos).
- El **rango** está en  $\mathbb{R}$  (números enteros entre 0 y 3).
- Para cualquier conjunto de valores  $A \subseteq \{0, 1, 2, 3\}$ , la preimagen

$$X^{-1}(A) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in A\}$$

es un subconjunto de  $\Omega$ , por lo tanto pertenece a  $\mathcal{P}(\Omega)$ , el  $\sigma$ -álgebra.

Esta última propiedad garantiza que  $X$  es una función medible, lo cual es requisito fundamental para ser una variable aleatoria.

## 4 Distribución de probabilidad de $X$

Cada resultado elemental tiene probabilidad  $1/8$ . El número de caras en tres lanzamientos sigue una **distribución binomial**:

$$X \sim \text{Binomial}(n = 3, p = 0.5).$$

La función de probabilidad (pmf) es:

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{3}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^3, \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

Valores explícitos:

$$\mathbb{P}(X = 0) = \frac{1}{8}, \quad \mathbb{P}(X = 1) = \frac{3}{8}, \quad \mathbb{P}(X = 2) = \frac{3}{8}, \quad \mathbb{P}(X = 3) = \frac{1}{8}.$$

## 5 Variable aleatoria: codificación

Podemos definir otra variable aleatoria  $Y$  que codifica cada resultado como un número entre 0 y 7:

$$(0, 0, 0) \mapsto 0, \quad (0, 0, 1) \mapsto 1, \quad \dots, \quad (1, 1, 1) \mapsto 7.$$

En este caso, estamos construyendo una función:

$$Y : \Omega \rightarrow \{0, 1, \dots, 7\}.$$

### 5.1 ¿Es una variable aleatoria válida?

Sí, porque:

- El **dominio** sigue siendo  $\Omega$  (el espacio muestral original).
- El **rango** está en  $\mathbb{R}$  (en este caso, números enteros entre 0 y 7).
- Para cualquier conjunto de valores  $A \subseteq \{0, \dots, 7\}$ , la preimagen

$$Y^{-1}(A) = \{\omega \in \Omega : Y(\omega) \in A\}$$

es un subconjunto de  $\Omega$ , por lo tanto pertenece a  $\mathcal{P}(\Omega)$ , el  $\sigma$ -álgebra.

Esta última propiedad garantiza que  $Y$  es una función medible, lo cual es requisito fundamental para ser una variable aleatoria.

## 5.2 Distribución de probabilidad

Como cada elemento de  $\Omega$  es igualmente probable:

$$\mathbb{P}(Y = k) = \frac{1}{8}, \quad k = 0, \dots, 7.$$

Esto corresponde a una **distribución uniforme discreta**.

## 6 Ejemplo de evento

Consideremos el evento “ $X = 1$  y  $X = 2$ ”. Formalmente:

$$\mathbb{P}(X = 1 \text{ y } X = 2) = \mathbb{P}(\{\omega : X(\omega) = 1\} \cap \{\omega : X(\omega) = 2\}) = 0,$$

porque  $X$  no puede tomar dos valores distintos en el mismo experimento.

En cambio, la probabilidad “ $X = 1$  o  $X = 2$ ” es:

$$\mathbb{P}(X = 1 \text{ o } X = 2) = \mathbb{P}(X = 1) + \mathbb{P}(X = 2) = \frac{3}{8} + \frac{3}{8} = \frac{6}{8}.$$

## 7 Variable aleatoria: primera moneda

Podemos definir otra variable aleatoria  $Z$  como el resultado de la primera moneda:

$$Z : \Omega \rightarrow \{0, 1\}.$$

Su distribución es:

$$\mathbb{P}(Z = 0) = \frac{1}{2}, \quad \mathbb{P}(Z = 1) = \frac{1}{2}.$$

Por lo tanto,  $Z \sim \text{Bernoulli}(0.5)$ .

## 8 Relación entre $\Omega$ , $X$ y $X(\Omega)$

- $\Omega$ : espacio muestral, definido independientemente de la variable aleatoria.
- $X$ : función que asigna a cada  $\omega \in \Omega$  un número real.
- $X(\Omega)$ : conjunto de valores posibles de la variable aleatoria (espacio imagen).

## 9 Proceso estocástico

Un **proceso estocástico** es una familia de variables aleatorias indexada por un conjunto de tiempos  $T$ :

$$\{X_t : t \in T\}.$$

Cada  $X_t$  es una variable aleatoria definida sobre el mismo espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ .

### 9.1 Ejemplo con tres monedas

Recordemos la variable aleatoria  $Y$  que codifica cada resultado de los tres lanzamientos como un número entre 0 y 7:

$$Y : \Omega \rightarrow \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}.$$

Si repetimos el experimento de lanzar tres monedas muchas veces, podemos definir una secuencia de variables aleatorias  $\{X_n\}_{n \geq 1}$  como:

$$X_n : \Omega \rightarrow \{0, 1, \dots, 7\}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

donde  $X_n$  corresponde a la codificación del  $n$ -ésimo experimento.

### 9.2 Distribución del proceso

Cada  $X_n$  sigue una distribución uniforme discreta:

$$\mathbb{P}(X_n = k) = \frac{1}{8}, \quad k = 0, 1, \dots, 7.$$

Si suponemos independencia entre los experimentos, la colección  $\{X_n\}_{n \geq 1}$  es una **secuencia de variables aleatorias i.i.d.** (independientes e idénticamente distribuidas).

### 9.3 Interpretación

- $\Omega$ : espacio de todas las secuencias infinitas de lanzamientos de tres monedas.
- $X_n$ : resultado codificado del  $n$ -ésimo experimento.
- $\{X_n\}_{n \geq 1}$ : proceso estocástico que modela la repetición temporal del experimento.