Procesos de Poisson y Cadenas de Markov en Tiempo Continuo

1 Procesos de Poisson

Consideremos, para cada $t \geq 0$, el número de eventos que ocurren hasta el tiempo t, y lo denotamos por $N(t)$.

Definición: Un incremento es

$$N(t) - N(s)$$

donde $t > s$.

Definición: $N(t)$ tiene incrementos estacionarios si para todo $h \geq 0$; $t_1, t_2, s \in \mathbb{R}_0^+$ y $t_1 \leq t_2$.

$$P\big(N(t_2) - N(t_1) = n\big) = P\big(N(t_2 + s) - N(t_1 + s) = n\big)$$

Definición: $N(t)$ tiene incrementos independientes. Si $t_0 < t_1 < \cdots < t_n$ entonces las variables aleatorias

$$N(t_1) - N(t_0), \quad N(t_2) - N(t_1), \quad \ldots, \quad N(t_n) - N(t_{n-1})$$

son independientes.

Definición: Un proceso $\{N(t)\}_{t \geq 0}$ es un **proceso de Poisson** de tasa $\lambda > 0$ si cumple:

1. $N(0) = 0$.
2. El proceso $N(t)$ tiene incrementos independientes.
3. El proceso $N(t)$ tiene incrementos estacionarios con distribución Poisson:

$$P\big(N(t+s) - N(s) = n\big) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Ejemplo: En cierto cruce, el número de infracciones que ocurren sigue un proceso de Poisson con tasa de 5 accidentes/día. Determine la probabilidad de que haya al menos 2 infracciones en las siguientes 6 horas.
Solución:
Sea $N(t)$: número de accidentes hasta el tiempo t. ¿Cómo obtener $P\big(N(1/4) \geq 2\big)$?

$$N(1/4) = N(1/4) - N(0) \sim \text{Poisson}\big(5 \cdot \tfrac{1}{4}\big) = \text{Poisson}\big(\tfrac{5}{4}\big)\,,$$

entonces

$$P\big(N(1/4) \geq 2\big) = 1 - P\big(N(1/4) < 2\big) = 1 - P\big(N(1/4) = 1\big) - P\big(N(1/4) = 0\big).$$

Como $N(1/4) \sim \text{Poisson}(5/4)$, tenemos:

$$P\big(N(1/4) = 0\big) = e^{-5/4}\frac{(5/4)^0}{0!} = e^{-5/4}$$
$$P\big(N(1/4) = 1\big) = e^{-5/4}\frac{(5/4)^1}{1!} = e^{-5/4} \cdot \tfrac{5}{4}$$

Por lo tanto,

$$P\big(N(1/4) \geq 2\big) = 1 - e^{-5/4}\frac{(5/4)^1}{1!} - e^{-5/4}\frac{(5/4)^0}{0!}$$

$$= 1 - e^{-5/4} \cdot \tfrac{5}{4} - e^{-5/4}$$

$$= 0.36$$

Ejemplo: Los clientes llegan a una taquilla de acuerdo a un proceso de Poisson (PP) con tasa 0.1 clientes/seg.
Determine la probabilidad de que, después de que la taquilla abre, 5 clientes lleguen durante el primer minuto y otros 5 clientes lleguen durante el segundo minuto.
Solución:
Sea $N(t)$: número de clientes que llegan a la taquilla hasta el tiempo t.

$$P\big(N(60) = 5,\ N(120) - N(60) = 5\big)\ ?$$

$$P\big(N(60) - N(0) = 5,\ N(120) - N(60) = 5\big)$$

Por independencia de incrementos:

$$= P\big(N(60) - N(0) = 5\big) \times P\big(N(120) - N(60) = 5\big)$$
$$= P\big(N(60) - N(0) = 5\big) \times P\big(N(60) - N(0) = 5\big)$$

$$= P\big(N(60) - N(0) = 5\big)^2$$

Además,

$$N(60) - N(0) \sim \text{Poisson}(0.1 \times 60) = \text{Poisson}(6).$$

$$= \left(\frac{e^{-6}\, 6^5}{5!} \right)^2 = 0.026$$

Ejemplo: Suponga que por un punto de una autopista pasan en promedio 50 carros cada 5 minutos.
¿Cuál es la probabilidad de que pasen 20 carros en el primer minuto y 30 en los siguientes 4 minutos?
Solución:
Sea $N(t) := \#$ de carros que pasan por un punto hasta el tiempo t.

$$\lambda = 10 \text{ carros/minuto}.$$

$$P\big(N(1) = 20,\ N(5) - N(1) = 30\big) \text{ ?}$$

Por independencia de incrementos:

$$P\big(N(1) = 20,\ N(5) - N(1) = 30\big) = P\big(N(1) = 20\big) \cdot P\big(N(5) - N(1) = 30\big).$$

$$= \frac{e^{-10}\, 10^{20}}{20!} \times \frac{e^{-40}\, 40^{30}}{30!} = 3.4 \times 10^{-5}.$$

1.1 Procesos de Conteo

Definición: (1):

- $N(0)$
- El proceso tiene incrementos independientes y estacionarios
- Los incrementos tienen distribución Poisson

Definición: Se dice que $\{N(t)\}_{t \geq 0}$ es un proceso de conteo si $N(t)$ representa el número de eventos que han ocurrido hasta el tiempo t.

Propiedades:

1. $N(t) \geq 0$.
2. $N(t) \in \mathbb{Z}_0^+$.
3. Si $s < t$ entonces $N(t) \geq N(s)$.
4. $N(t) - N(s)$ es el número de eventos en el intervalo $(s, t]$.

Definición: Una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es $o(h)$ si

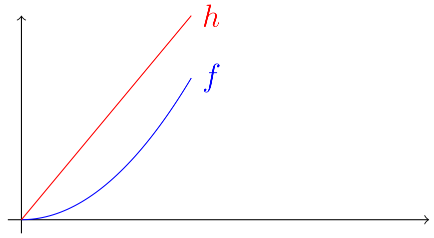
$$\lim_{h \to 0} \frac{f(h)}{h} = 0.$$

Si una función f es $o(h)$, se escribe

$$f(h) = o(h).$$

Ejemplo: Para $r > 1$, $f(x) = x^r$. ¿Es $f = o(h)$?

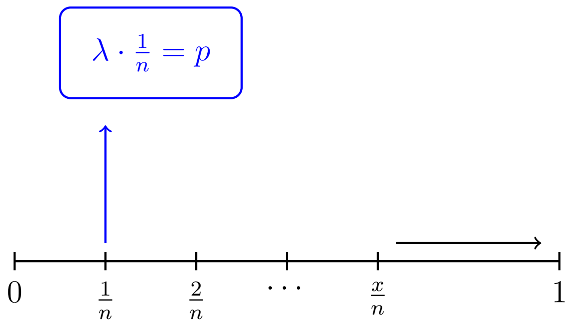
$$\lim_{h\to 0} \frac{h^r}{h} = \lim_{h\to 0} h^{r-1} = 0.$$



Ejemplo: Para $r \leq 1$, $f(x) = x^r$. ¿Es $f = o(h)$?

Definición: (2) Se dice que un proceso de conteo $\{N(t)\}_{t\geq 0}$ es un **proceso de Poisson** con tasa $\lambda > 0$, si cumple:

1. $N(0) = 0$,
2. El proceso tiene incrementos estacionarios e independientes,
3. $P(N(h) = 1) = \lambda h + o(h)$,
4. $P(N(h) \geq 2) = o(h)$.



$$P(X = x) = \text{Bin}(n, p = \tfrac{\lambda}{n})$$

Teorema: Si $X_n \sim \text{Bin}(n, p(n))$ y $n\,p(n) \to \lambda$ cuando $n \to \infty$, entonces

$$X_n \xrightarrow{d} \text{Poisson}(\lambda)$$

Teorema: Las definiciones (1) y (2) son equivalentes:

- $N(0) = 0$
- Incrementos estacionarios e independientes; los incrementos tienen distribución Poisson

Demostración:
empezamos por demostrar que (2) => (1)

$$P_n(t) = P(N(t) = n) \quad \longleftarrow \quad \text{distribución Poisson}(t\lambda)$$

$$P_n'(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{P_n(t+\varepsilon) - P_n(t)}{\varepsilon}$$

$$\frac{P_n(t+\varepsilon) - P_n(t)}{\varepsilon} = \frac{P(N(t+\varepsilon) = n) - P(N(t) = n)}{\varepsilon} \ ?$$

$$\begin{aligned}
P(N(t+\varepsilon) = n) &= P(N(t) = n,\ N(t+\varepsilon) - N(t) = 0) \\
&\quad + P(N(t) = n-1,\ N(t+\varepsilon) - N(t) = 1) \\
&\quad + P(N(t) \leq n-2,\ N(t+\varepsilon) - N(t) \geq 2) \\
&= P(N(t) = n) \cdot P(N(t+\varepsilon) - N(t) = 0) \\
&\quad + P(N(t) = n-1) \cdot P(N(t+\varepsilon) - N(t) = 1) \\
&\quad + P(N(t) \leq n-2) \cdot P(N(t+\varepsilon) - N(t) \geq 2) \\
&= P_n(t)P_0(\varepsilon) + P_{n-1}(t)P_1(\varepsilon) + o(\varepsilon).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_0(\varepsilon) &= P(N(\varepsilon) = 0) = 1 - P(N(\varepsilon) \geq 1) \\
&= 1 - P(N(\varepsilon) = 1) - P(N(\varepsilon) \geq 2) \\
&= 1 - \lambda\varepsilon + o(\varepsilon) + o(\varepsilon) \\
&= 1 - \lambda\varepsilon + o(\varepsilon)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_1(\varepsilon) &= P(N(\varepsilon) = 1) \\
&= \lambda\varepsilon + o(\varepsilon)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_n(t+\varepsilon) &= P_n(t)\,(1 - \lambda\varepsilon + o(\varepsilon)) + P_{n-1}(t)\,(\lambda\varepsilon + o(\varepsilon)) + o(\varepsilon) \\
&= P_n(t) - \lambda\varepsilon P_n(t) + o(\varepsilon)P_n(t) \\
&\quad + \lambda\varepsilon P_{n-1}(t) + o(\varepsilon)P_{n-1}(t) + o(\varepsilon)
\end{aligned}$$

$$P_n(t+\varepsilon) = P_n(t) + \lambda\varepsilon(P_{n-1}(t) - P_n(t)) + o(\varepsilon)$$

Así:

$$\begin{aligned}\frac{P_n(t+\varepsilon)-P_n(t)}{\varepsilon} &= \frac{P_n(t)+\lambda\varepsilon(P_{n-1}(t)-P_n(t))+o(\varepsilon)-P_n(t)}{\varepsilon}\\ &= \lambda(P_{n-1}(t)-P_n(t))+\frac{o(\varepsilon)}{\varepsilon}\end{aligned}$$

Tomando el límite cuando $\varepsilon \to 0$:

$$P_n'(t) = \lambda(P_{n-1}(t)-P_n(t))$$

$$\begin{aligned}P_n'(t)+\lambda P_n(t) &= \lambda P_{n-1}(t)\\ e^{\lambda t}P_n'(t)+e^{\lambda t}\lambda P_n(t) &= e^{\lambda t}\lambda P_{n-1}(t)\\ \left(e^{\lambda t}P_n(t)\right)' &= \lambda e^{\lambda t}P_{n-1}(t)\end{aligned}$$

Inducción en n:
Para $n = 1$:

$$\begin{aligned}\left(e^{\lambda t}P_1(t)\right)' &= \lambda e^{\lambda t}P_0(t)\\ &= \lambda e^{\lambda t}e^{-\lambda t}\\ &= \lambda\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P_0(t) &= e^{-\lambda t}\\ \left(e^{\lambda t}P_1(t)\right)' &= \lambda\\ e^{\lambda t}P_1(t)-e^{\lambda\cdot 0}P_1(0) &= \lambda t\\ e^{\lambda t}P_1(t) &= \lambda t\\ P_1(t) &= e^{-\lambda t}\lambda t\end{aligned}$$

Hipótesis de inducción:

$$P_{n-1}(t) = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}$$

Por demostrar:

$$P_n(t) = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}$$

Ahora se va a demostrar que (1) => (2)
Si $N(t) \sim \text{Poisson}(\lambda t)$ entonces:

1. $P(N(h)=1) = e^{-\lambda h}\lambda h$
2. $P(N(h)\geq 2) = o(h)$

Demostración de 1):

$$
\begin{aligned}
P(N(h)=1) &= e^{-\lambda h}\lambda h \\
&= (1-\lambda h + o(h))\lambda h \\
&= \lambda h - \lambda^2 h^2 + o(h)\lambda h \\
&= \lambda h + o(h)
\end{aligned}
$$

Demostración de 2):

$$
\begin{aligned}
P(N(h)\geq 2) &= 1 - P(N(h)=0) - P(N(h)=1) \\
&= 1 - e^{-\lambda h} - e^{-\lambda h}\lambda h \\
&= 1 - (1-\lambda h + o(h)) - (\lambda h + o(h)) \\
&= 1 - 1 + \lambda h - o(h) - \lambda h - o(h) \\
&= o(h)
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, se ha demostrado que las definiciones (1) y (2) son equivalentes.

Proceso de Poisson

Definición: (1) Un proceso de Poisson cumple:

1. $N(0) = 0$
2. Tiene incrementos independientes
3. Tiene incrementos estacionarios

$$N(t+s) - N(s) \sim \text{Poisson}(\lambda s)$$

Definición: (2) Se dice que un proceso de conteo $\{N(t)\}_{t\geq 0}$ es un **proceso de Poisson** con tasa $\lambda > 0$, si cumple:

1. $N(0) = 0$,
2. El proceso tiene incrementos estacionarios e independientes,
3. $P(N(h)=1) = \lambda h + o(h)$,
4. $P(N(h)\geq 2) = o(h)$.

Definición: (3) Sean $t_1, t_2, t_3, (iid) \sim \exp(\lambda)$. Y sea $T_n = \sum_{i=1}^{n} t_i$ con $T_0 = 0$, el proceso $N(s) = \max\{n : T_n \leq s\}$ es un proceso de Poisson.

Lema: $N(s)$ tiene distribución Poisson(λs).

Idea de la demostración:
Nota: $\int_0^\infty \lambda(\lambda x)^{n-1}\frac{e^{-\lambda x}}{(n-1)!}dx = 1 - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t}$

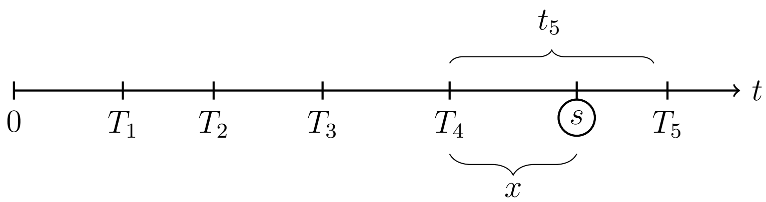
$$\{N(t) < n\} \Leftrightarrow \{T_n \geq t\}$$
$$P(N(t) < n) = P(T_n \geq t), \quad T_n \sim \text{Gamma}(n, \lambda)$$

$$= \int_t^\infty \frac{\lambda(\lambda x)^{n-1}e^{-\lambda x}}{(n-1)!}dx = 1 - \int_0^t \frac{\lambda(\lambda x)^{n-1}e^{-\lambda x}}{(n-1)!}dx$$
$$= 1 - 1 + \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t}$$
$$= \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t}$$

Tarea:
$$P(N(t) = n) = \sum_{k=0}^{n}\frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t} - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t}$$
$$\Rightarrow N(t) \sim \text{Poisson}(\lambda t).$$

Lema: $N(t+c) - N(c)$, $t \geq 0$ es un proceso de Poisson con tasa λ e independiente de $N(r)$; $0 \leq r \leq s$.

Idea de la demostración



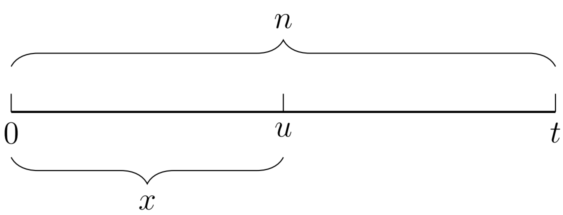
$$P(t_5 > x + t \mid t_5 > x) = P(t_5 > t) = \exp(\lambda)$$

Tarea: Definición (1) $\longleftrightarrow$ Definición (3)

1.2 Características de un Proceso de Poisson

Teorema: Sea $\{N(t)\}_{t\geq 0}$ un proceso de Poisson (λ). Suponga que para un $t > 0$ fijo, $N(t) = n$. Entonces para $0 \leq u < t$, el número de eventos que han ocurrido antes de u es una v.a. $\text{Bin}(n, \frac{u}{t})$, es decir:

$$P(N(u) = x \mid N(t) = n) = \binom{n}{x} \left(\frac{u}{t}\right)^x \left(1 - \frac{u}{t}\right)^{n-x}$$



Demostración:

$$\begin{aligned} P(N(u) = x \mid N(t) = n) &= \frac{P(N(u) = x, N(t) = n)}{P(N(t) = n)} \\ &= \frac{P(N(u) = x, N(t) - N(u) = n - x)}{P(N(t) = n)} \end{aligned}$$

Por independencia de incrementos:

$$= \frac{P(N(u) = x) \cdot P(N(t) - N(u) = n - x)}{P(N(t) = n)}$$

$$= \frac{\frac{e^{-\lambda u}(\lambda u)^x}{x!} \cdot \frac{e^{-\lambda(t-u)}(\lambda(t-u))^{n-x}}{(n-x)!}}{\frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^n}{n!}}$$

$$= \frac{n!}{x!(n-x)!} \cdot \frac{(\lambda u)^x (\lambda(t-u))^{n-x}}{(\lambda t)^n (\lambda t)^{n-x}}$$

$$= \binom{n}{x} \frac{(\lambda u)^x (\lambda(t-u))^{n-x}}{(\lambda t)^x (\lambda t)^{n-x}}$$

$$= \binom{n}{x} \left(\frac{\lambda u}{\lambda t}\right)^x \left(\frac{\lambda(t-u)}{\lambda t}\right)^{n-x}$$

$$= \binom{n}{x} \left(\frac{u}{t}\right)^x \left(\frac{t-u}{t}\right)^{n-x}$$

$$= \binom{n}{x} \left(\frac{u}{t}\right)^x \left(1 - \frac{u}{t}\right)^{n-x}$$

Teorema: Sean $N_1, N_2, \ldots, N_k$ procesos de Poisson independientes con intensidades $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ entonces:

$$N = N_1 + N_2 + \cdots + N_k$$

es un proceso de Poisson con tasa $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_k$.

Demostración: $k = 2$

- $N(0) = 0$

  Porque: $N_1(0) = 0$, $N_2(0) = 0$

- $t_1 < t_2 < t_3$

  $*N_1(t_3) - N_1(t_2)$ ind $N_1(t_2) - N_1(t_1)$

  $*N_2(t_3) - N_2(t_2)$ ind $N_2(t_2) - N_2(t_1)$

  $N(t_3) - N(t_2) = N_1(t_3) + N_2(t_3) - N_1(t_2) - N_2(t_2)$

  $= N_1(t_3) - N_1(t_2) + N_2(t_3) - N_2(t_2)$

  es independiente de

  $N_1(t_2) - N_1(t_1) + N_2(t_2) - N_2(t_1)$

  $= N(t_2) - N(t_1)$.

- $N(t+s) - N(s) = N_1(t+s) + N_2(t+s) - N_1(s) - N_2(s)$

  $= N_1(t+s) - N_1(s) + N_2(t+s) - N_2(s)$

  $\sim$ Poisson$(\lambda_1 t)$ ind Poisson$(\lambda_2 t)$

  $\sim$ Poisson$((\lambda_1 + \lambda_2)t)$.

$$= \frac{P(N(u) = x) \cdot P(N(t) - N(u) = n - x)}{\frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^n}{n!}}$$

$$= \frac{\frac{e^{-\lambda u}(\lambda u)^x}{x!} \cdot \frac{e^{-\lambda(t-u)}(\lambda(t-u))^{n-x}}{(n-x)!}}{\frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^n}{n!}}$$

$$= \frac{n!}{x!(n-x)!} \cdot \frac{(\lambda u)^x(\lambda(t-u))^{n-x}}{(\lambda t)^x(\lambda t)^{n-x}}$$

$$= \binom{n}{x}\left(\frac{\lambda u}{\lambda t}\right)^x\left(\frac{\lambda(t-u)}{\lambda t}\right)^{n-x}$$

Teorema: Sea N un proceso de Poisson (λ) y N_j número de eventos de tipo j tal que $P(\text{tipo } j) = P_j$, $j = 1, \ldots, k$, entonces N_j es un proceso de Poisson(λP_j).

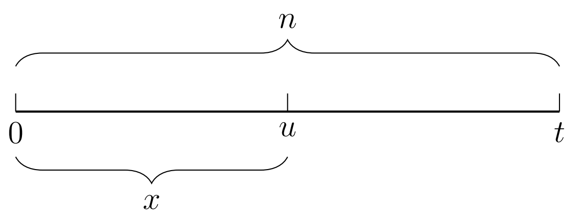
Demostración: $k = 2$.
$P(\text{tipo } 1) = p$, $P(\text{tipo } 2) = 1 - p$.
1) $N_1(0) = 0$, $N_2(0) = 0$.
2) N_1 y N_2 tienen incrementos independientes y estacionarios, por que N los tiene.
3) Sea $X_1 = N_1(t+s) - N_1(s)$
$X_2 = N_2(t+s) - N_2(s)$.
$P(X_1 = n, X_2 = k) =$
$= P(X_1 = n, X_2 = k) \cdot \frac{P(X_1+X_2=n+k)}{P(X_1+X_2=n+k)}$
$= P(X_1 = n, X_2 = k \mid X_1 + X_2 = n+k)P(X_1 + X_2 = n+k)$.
$= P(X_1 = n, X_2 = k \mid X_1 + X_2 = n+k)P(X_1 + X_2 = n+k)$.
$= \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^{n+k}}{(n+k)!}\binom{n+k}{n}p^n(1-p)^k$

$$\frac{P(\overbrace{(X_1 = n, X_2 = k)}^{A}, \overbrace{X_1 + X_2 = n+k}^{B})}{P(X_1 + X_2 = n+k)}$$

$A \subseteq B$
$A \cap B = A$

$$= \frac{P(X_1 = n, X_2 = k)}{P(X_1 + X_2 = n+k)}.$$

$= e^{-\lambda tp} e^{-\lambda t(1-p)} (\lambda t)^n (\lambda t)^k p^n (1-p)^k \frac{(n+k)!}{n! \cdot k!}$
$= e^{-\lambda tp} \frac{(\lambda tp)^n}{n!} e^{-\lambda t(1-p)} \frac{(\lambda t(1-p))^k}{k!}$
$= \text{Poisson}(\lambda tp) \cdot \text{Poisson}(\lambda t(1-p))$
$P(X_1 = n, X_2 = k) = \text{Poisson}(\lambda tp) \cdot P(\lambda t(1-p))$



$\text{Bin}(n, \frac{u}{t})$

Teorema: Sea $N(t)$ un proceso de Poisson con tasa λ, y suponga que para $t > 0$ fijo, se sabe que $N(t) = n$. Entonces $T_1, T_2, \ldots, T_n$ dado $N(t) = n$ tiene densidad

$$f(t_1, t_2, \ldots, t_n \mid N(t) = n) = \frac{n!}{t^n}, \quad 0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n$$

Demostración: $0 < t_1 < t_2 < t_3 < \ldots < t_n < t$.

$$F(t_1, \ldots, t_n \mid N(t) = n) = P(T_1 \leq t_1, T_2 \leq t_2, \ldots, T_n \leq t_n \mid N(t) = n)$$

$$= \frac{P(T_1 \leq t_1, \ldots, T_n \leq t_n, N(t) = n)}{P(N(t) = n)}$$

Nota que: $\{T_1 \leq t_1, \ldots, T_n \leq t_n, N(t) = n\}$ es equivalente al evento "un y solo un cliente llega en los intervalos $[0, t_1], [t_1, t_2], \ldots, [t_{n-1}, t_n]$ y ningún cliente llega en $(t_n, t]$.

$$P(t_1, \ldots, t_n \mid n) = \frac{e^{-\lambda t_1} \lambda t_1 \cdot e^{-\lambda(t_2 - t_1)} \lambda(t_2 - t_1) \cdots e^{-\lambda(t_n - t_{n-1})} \lambda(t_n - t_{n-1}) e^{-\lambda(t - t_n)}}{\frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^n}{n!}}$$

$$= \frac{e^{-\lambda t} \lambda^n (t_1 (t_2 - t_1) \cdots (t_n - t_{n-1}))}{\frac{e^{-\lambda t} \lambda^n t^n}{n!}}$$

$$= \frac{n!(t_1(t_2 - t_1)\cdots(t_n - t_{n-1}))}{t^n}$$

Luego:

$$\frac{\partial^n F}{\partial t_1 \partial t_2 \cdots \partial t_n} = \frac{n!}{t^n}$$

2 Proceso de Poisson compuesto

Sea $X_1, X_2, \ldots$ i.i.d., N variable aleatoria entera no negativa.

$$S_N = \sum_{i=1}^{N} X_i, \quad S_t = \sum_{i=1}^{0} X_i$$

$$\begin{aligned} E(S_N) &= \sum_{i=1}^{N} E(X_i) = NE(X_i), \\ \operatorname{Var}(S_N) &= N \operatorname{Var}(X_i), \\ E(X|Y=y) &= \sum_x x\, P(X=x|Y=y), \\ E(Y) &= \sum_y y\, P(y) \end{aligned}$$

Teorema: (Esperanza total) Para variables aleatorias X e Y,

$$E(X) = E_Y\big(E(X|Y)\big)$$

Demostración:

$$\begin{aligned} E_Y(E(X|Y)) &= E\left(\sum_x x \cdot P(X=x|Y)\right) \\ &= \sum_y \sum_x x \cdot P(X=x|Y=y)P(Y=y) \\ &= \sum_y \sum_x x \cdot \frac{P(X=x, Y=y)}{P(Y=y)} P(Y=y) \\ &= \sum_y \sum_x x \cdot P(X=x, Y=y) \\ &= \sum_x x \sum_y P(X=x, Y=y) \\ &= \sum_x x \cdot P(X=x) \\ &= E(X) \end{aligned}$$

Teorema: Sean $X_1, X_2, \ldots$ i.i.d. con primer y segundo momento finito. Sea N una v.a. independiente y discreta. Consideremos $S_N = \sum_{i=1}^{N} X_i$ con $S_0 = 0$.

1. Si $E(N) < \infty$ entonces $E(S_N) = E(N) \cdot E(X_1)$.
2. Si $E(N^2) < \infty$ entonces

$$\text{Var}(S_N) = E(N)\text{Var}(X_1) + \text{Var}(N)[E(X_1)]^2$$

Demostración:
1) $E(S_N) = E_N(E(S_N|N))$

$$\begin{aligned}
&= \sum_n E(S_n|N = n)P(N = n) \\
&= \sum_n E(S_n|N = n) \cdot P(N = n) \\
&= \sum_n E(S_n) \cdot P(N = n) \\
&= \sum_n nE(X_1) \cdot P(N = n) \\
&= E(X_1) \sum_n nP(N = n) \\
&= E(N) \cdot E(X_1)
\end{aligned}$$

2) $\text{Var}(S_N) = E(S_N^2) - [E(S_N)]^2$
Calculamos $E(S_N^2)$:

$$\begin{aligned}
E(S_N^2) &= E_N(E(S_N^2|N)) \\
&= \sum_n E(S_n^2|N = n)P(N = n) \\
&= \sum_n E(S_n^2)P(N = n)
\end{aligned}$$

Donde:

$$\begin{aligned}
\text{Var}(S_n) &= E(S_n^2) - [E(S_n)]^2 \\
n\text{Var}(X_1) &= E(S_n^2) - n^2[E(X_1)]^2 \\
E(S_n^2) &= n\text{Var}(X_1) + n^2[E(X_1)]^2
\end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{aligned}
E(S_N^2) &= \sum_n \left(n\text{Var}(X_1) + n^2[E(X_1)]^2\right) P(N = n) \\
&= \text{Var}(X_1) \sum_n nP(N = n) + [E(X_1)]^2 \sum_n n^2 P(N = n) \\
&= E(N)\text{Var}(X_1) + [E(X_1)]^2 E(N^2)
\end{aligned}$$

Finalmente:

$$\begin{aligned}\operatorname{Var}(S_N) &= E(N)\operatorname{Var}(X_1) + [E(X_1)]^2 E(N^2) - [E(N)]^2[E(X_1)]^2 \\ &= E(N)\operatorname{Var}(X_1) + [E(X_1)]^2 \left(E(N^2) - [E(N)]^2\right) \\ &= E(N)\operatorname{Var}(X_1) + [E(X_1)]^2 \operatorname{Var}(N)\end{aligned}$$

Observación: Sea $N(t)$ un proceso de Poisson(λ), entonces definimos

$$S_t = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i$$

que es llamado un proceso de Poisson compuesto.

$$\begin{aligned}E(S_t) &= E(N(t))E(X_1) \\ &= \lambda t E(X_1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{Var}(S_t) &= E(N(t))\operatorname{Var}(X_1) + [E(X_1)]^2 \operatorname{Var}(N(t)) \\ &= \lambda t \operatorname{Var}(X_1) + \lambda t [E(X_1)]^2 \\ &= \lambda t \left(\operatorname{Var}(X_1) + [E(X_1)]^2\right) \\ &= \lambda t E(Y_1^2)\end{aligned}$$

Problema: Un pescador captura truchas siguiendo un proceso de Poisson con una intensidad de 3 pescados por hora. Supongamos que las truchas pesan un promedio de 4 libras con una desviación estándar de 2 libras.
Determinar la media y varianza del peso total de los peces que captura en 2 horas.
Solución:

- $N(t)$: Número de truchas que salen hasta el tiempo t.
- X_i : El peso de la trucha i-ésima.
- $S_t = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i$: Peso total de las truchas sacadas hasta el tiempo t (horas).

$$\begin{aligned}E(S_2) &= E(N(2)) \cdot E(X_1) \\ &= 6 \times 4 = 24 \text{ libras}\end{aligned}$$

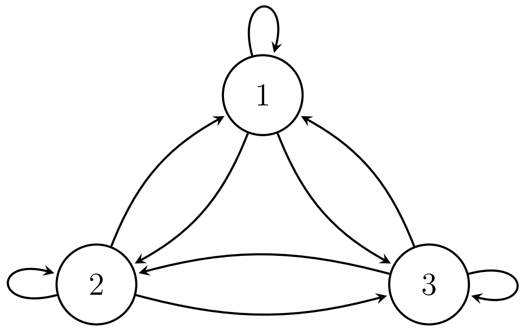
$$\begin{aligned}\operatorname{Var}(S_t) &= \lambda t E(X_1^2) = \lambda t \left(\operatorname{Var}(X_1) + [E(X_1)]^2\right) \\ &= 6(4 + 16) = 120 \text{ libras}^2\end{aligned}$$

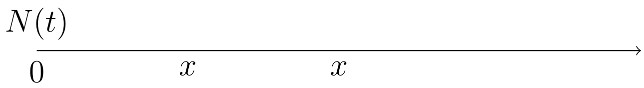
3 Cadenas de Markov en tiempo continuo

Definición: Un proceso en tiempo continuo $\{X_t\}_{t\geq 0}$ es una **cadena de Markov** si, para cualquier $0 \leq s_0 \leq s_1 \leq \cdots \leq s_n \leq s$ y para cualquier conjunto de estados $i_0, i_1, \ldots, i_n, i, j$ se cumple:

$$\mathbb{P}\big(X_{t+s} = j \,\big|\, X_s = i,\, X_{s_n} = i_n,\, \ldots,\, X_{s_0} = i_0\big) = \mathbb{P}\big(X_{t+s} = j \,\big|\, X_s = i\big).$$

Ejemplo: (Transformación de una cadena de Markov a tiempo continuo) Sea $N(t)$ un proceso de Poisson con intensidad λ y sea Y_n una cadena de Markov con matriz de transición $U(i,j)$, $i \neq j$.
Entonces $X_t = Y_{N(t)}$ es una cadena de Markov en tiempo continuo.





Definición: Para $t > 0$ la probabilidad de transición es definida por:

$$P_t(i,j) = P(X_t = j | X_0 = i)$$

Problema: Calcule la probabilidad de transición del proceso $X_t = Y_{N(t)}$.
Solución:

$$\begin{aligned}
P_t(i,j) &= P(X_t = j | X_0 = i) \\
&= P\left(Y_{N(t)} = j \mid Y_0 = i\right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} P\left(Y_{N(t)} = j, N(t) = n \mid Y_0 = i\right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} P\left(Y_n = j \mid Y_0 = i\right) P(N(t) = n) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} U^n(i,j) \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^n}{n!}
\end{aligned}$$

Definición: La tasa de saltos de una cadena de Markov con probabilidades de transición $P_t(i,j)$ está dada por:

$$q(i,j) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{P_\varepsilon(i,j)}{\varepsilon}$$

para $i \neq j$.

Problema: Tasa de saltos de un proceso de Poisson
Nota que:

- $P_\varepsilon(i,j) = 0$ para $j < i$
- $P_\varepsilon(i,j) = P(N(\varepsilon) > 1)$ para $j > i+1$
  $= O(\varepsilon)$
- $P_\varepsilon(i,i+1) = P(N(\varepsilon) = 1)$
  $= \lambda\varepsilon + O(\varepsilon)$

Si $j \neq i$:

$$q(i,j) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{P_\varepsilon(i,j)}{\varepsilon} = 0$$

Si $j > i+1$:

$$q(i,j) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{P_\varepsilon(i,j)}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{O(\varepsilon)}{\varepsilon} = 0$$

Si $j = i+1$:

$$q(i,j) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{P_\varepsilon(i,j)}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\lambda\varepsilon + O(\varepsilon)}{\varepsilon} = \lambda$$

Por lo tanto:

$$q(i,j) = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq i+1 \\ \lambda & \text{si } j = i+1 \end{cases}$$

Problema: Tasa de saltos del proceso $Y_{N(t)} = X_t$

$$P_\varepsilon(i,j) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda\varepsilon}(\lambda\varepsilon)^n}{n!} U^n(i,j)$$

¿Cuál es $q(i,j)$, $i \neq j$?

$$\frac{P_\varepsilon(i,j)}{\varepsilon} = \frac{e^{-\lambda\varepsilon}\lambda\varepsilon U(i,j)}{\varepsilon} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{e^{-\lambda\varepsilon}(\lambda\varepsilon)^n}{n!} \frac{U^n(i,j)}{\varepsilon}$$

$$\xrightarrow{\varepsilon \to 0} \lambda U(i,j)$$

$$q(i,j) = \begin{cases} \lambda U(i,j) & \text{si } i \neq j \\ 0 & \text{e.o.c.} \end{cases}$$

$$i \xrightarrow{q(i,j)} j$$

Si tenemos las tasas, ¿cómo reconstruimos la cadena?

$$\lambda_i = \sum_{j \neq i} q(i,j)$$

1. $\lambda_i = \infty$; no se puede entrar al i.
2. $\lambda_i = 0$; i es absorbente.
3. $0 < \lambda_i < \infty$.

La probabilidad de saltar del estado i al estado j es:

$$r(i,j) = \frac{q(i,j)}{\lambda_i}$$

Simulación: X_t una cadena de Markov en tiempo continuo. $q(i,j)$ las tasas de salto de la cadena y $0 < \lambda_i < \infty$ para todo $i \in S$.

- Se mantiene en el estado i un tiempo $\exp(\lambda_i)$.
- Después salta a un estado j con probabilidad $r(i,j)$.

Ejemplo: Simulación de un Proceso de Poisson.

$$\lambda_i = \sum_{j \neq i} q(i,j) = q(i,i+1) = \lambda$$

$$r(i,j) = \frac{q(i,j)}{\lambda_i} = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq i+1 \\ \frac{\lambda}{\lambda} = 1 & \text{si } j = i+1 \end{cases}$$

Ejemplo: Simulación $X_t = Y_{N(t)}$.

$$q(i,j) = \begin{cases} \lambda U(i,j) & \text{para } i \neq j \\ 0 & \text{e.o.c.} \end{cases}$$

$$\lambda_i = \sum_{j \neq i} q(i,j) = \lambda \sum_{j \neq i} U(i,j) = \lambda$$

$$r(i,j) = \frac{q(i,j)}{\lambda_i} = \frac{q(i,j)}{\lambda} = \begin{cases} \frac{\lambda U(i,j)}{\lambda} = U(i,j) & \text{para } i \neq j \\ 0 & \text{e.o.c.} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} U(i,j) & \text{para } i \neq j \\ 0 & \text{e.o.c.} \end{cases}$$

$$q(i,j) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{P_\varepsilon(i,j)}{\varepsilon} \leftarrow \text{tasa de saltos}$$

- $0 < \lambda_i = \sum_{j \neq i} q(i,j) < \infty$
- En el estado i, me quedo un tiempo $\exp(\lambda_i)$.
- Salto al estado j con probabilidad

$$r(i,j) = \frac{q(i,j)}{\lambda_i}$$

Teorema: (Ecuaciones de Kolmogorov)

- $P_t = P_t Q$ (hacia adelante)
- $P_t' = QP_t$ (hacia atrás)

donde $Q = \begin{cases} q(i,j) & \text{si } i \neq j \\ -\lambda_i & \text{si } i = j \end{cases}$

Teorema: (Ecuaciones de Chapman-Kolmogorov)

$$P_{s+t}(i,j) = \sum_k P_s(i,k) \cdot P_t(k,j)$$

Demostración (Ecuación de Chapman-Kolmogorov):

$$\begin{aligned}
P_{s+t}(i,j) &= P(X_{s+t} = j \mid X_0 = i) \\
&= \sum_k P(X_{s+t} = j, X_s = k, X_0 = i) \cdot \frac{1}{P(X_0 = i)} \\
&= \sum_k \frac{P(X_{s+t} = j, X_s = k, X_0 = i)}{P(X_s = k, X_0 = i)} \cdot \frac{P(X_s = k, X_0 = i)}{P(X_0 = i)} \\
&= \sum_k P(X_{s+t} = j \mid X_s = k, X_0 = i) \cdot P(X_s = k \mid X_0 = i) \\
&= \sum_k P(X_t = j \mid X_s = k) \cdot P(X_s = k \mid X_0 = i) \\
&= \sum_k P_s(i,k) \cdot P_t(k,j)
\end{aligned}$$

Demostración: Ecuaciones de Kolmogorov.

$$\begin{aligned}
P_{t+\varepsilon}(i,j) - P_t(i,j) &= \sum_k P_\varepsilon(i,k) P_t(k,j) - P_t(i,j) \\
&= \sum_{k \neq i} P_\varepsilon(i,k) P_t(k,j) + P_\varepsilon(i,i) P_t(i,j) - P_t(i,j) \\
&= \sum_{k \neq i} P_\varepsilon(i,k) P_t(k,j) - P_t(i,j)(1 - P_\varepsilon(i,i)) \\
&= \sum_{k \neq i} P_\varepsilon(i,k) P_t(k,j) - P_t(i,j) \left(\sum_{k \neq i} P_\varepsilon(i,k) \right)
\end{aligned}$$

Dividiendo entre ε y tomando el límite cuando $\varepsilon \to 0$:

$$\frac{P_{t+\varepsilon}(i,j) - P_t(i,j)}{\varepsilon} = \sum_{k \neq i} \frac{P_\varepsilon(i,k)}{\varepsilon} P_t(k,j) - P_t(i,j) \left(\frac{\sum_{k \neq i} P_\varepsilon(i,k)}{\varepsilon} \right)$$

$$
\begin{aligned}
P_t'(i,j) &= \sum_{k\neq i} q(i,k)P_t(k,j) - P_t(i,j)\left(\sum_{k\neq i} q(i,k)\right) \\
&= \sum_{k\neq i} q(i,k)P_t(k,j) - P_t(i,j)\lambda_i
\end{aligned}
$$

Por lo tanto:

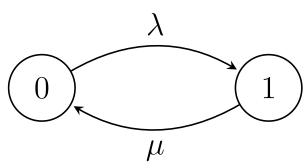
$$P_t' = QP_t$$

donde

$$Q = \begin{cases} q(i,j) & \text{si } i \neq j \\ -\lambda_i & \text{si } i = j \end{cases}$$

Problema: Determinar P_t cuando se conoce

$$Q = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu \end{pmatrix}$$



$$\begin{pmatrix} P_t'(0,0) & P_t'(0,1) \\ P_t'(1,0) & P_t'(1,1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_t(0,0) & P_t(0,1) \\ P_t(1,0) & P_t(1,1) \end{pmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
P_t'(0,0) &= -\lambda P_t(0,0) + \mu P_t(1,0) \\
P_t'(1,0) &= \lambda P_t(0,0) - \mu P_t(1,0)
\end{aligned}
$$

Restando:

$$
\begin{aligned}
P_t'(0,0) - P_t'(1,0) &= -(\mu+\lambda)P_t(0,0) + (\mu+\lambda)P_t(1,0) \\
P_t'(0,0) - P_t'(1,0) &= -(\mu+\lambda)\big(P_t(0,0) - P_t(1,0)\big) \\
\big(P_t(0,0) - P_t(1,0)\big)' &= -(\mu+\lambda)\big(P_t(0,0) - P_t(1,0)\big)
\end{aligned}
$$

Por lo tanto:

$$P_t(0,0) - P_t(1,0) = Ce^{-(\mu+\lambda)t}$$

Reemplazando en (1):

$$P_t'(0,0) = -\lambda e^{-(\mu+\lambda)t}$$

$$\int_0^t P_s'(0,0)ds = \int_0^t -\lambda e^{-(\mu+\lambda)s} ds$$

$$P_t(0,0) - P_0(0,0) = \frac{\lambda}{\mu+\lambda}\left(e^{-(\mu+\lambda)s}\right)\Bigg|_0^t$$

$$\Rightarrow P_t(0,0) = 1 + \frac{\lambda}{\mu+\lambda}\left(e^{-(\mu+\lambda)t} - e^{-(\mu+\lambda)0}\right)$$

$$= 1 - \frac{\lambda}{\mu+\lambda}\left(1 - e^{-(\mu+\lambda)t}\right)$$

$$= 1 - \frac{\lambda}{\mu+\lambda} + \frac{\lambda}{\mu+\lambda}e^{-(\mu+\lambda)t}$$

$$= \frac{\mu}{\mu+\lambda} + \frac{\lambda}{\mu+\lambda}e^{-(\mu+\lambda)t}$$

De manera similar:

$$P_t(1,0) = \frac{\mu}{\mu+\lambda} - \frac{\mu}{\mu+\lambda}e^{-(\mu+\lambda)t}$$

$$P_t(0,1) = 1 - P_t(0,0)$$

$$= \frac{\lambda}{\mu+\lambda} - \frac{\lambda}{\mu+\lambda}e^{-(\mu+\lambda)t}$$

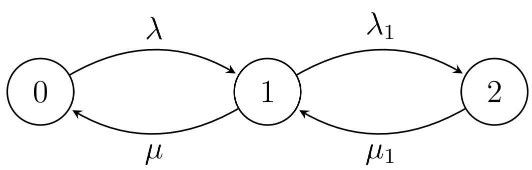
$$P_t(1,1) = 1 - P_t(1,0)$$

$$= \frac{\lambda}{\mu+\lambda} + \frac{\mu}{\mu+\lambda}e^{-(\mu+\lambda)t}$$

Comportamiento límite:

Definición: Una cadena de Markov en tiempo continuo es irreducible si para todo $x, y \in S$, existe una secuencia de estados $x_0 = x, x_1, \ldots, x_n = y$ tal que

$$q(x_{m-1}, x_m) > 0 \quad \text{para } 1 \leq m \leq n.$$



Definición: La medida π sobre S es estacionaria si

$$\pi P_t = \pi.$$

Teorema: π es una medida estacionaria si y solo si

$$\pi Q = 0.$$

Demostración:

- Si π es estacionaria: $\pi P_t = \pi$.

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \pi \frac{dP_t}{dt} &= 0 \\
\Rightarrow \pi P_t Q &= 0 \leftarrow \text{Kolmogorov} \\
\Rightarrow \pi Q &= 0 \leftarrow \text{estacionaria.}
\end{aligned}$$

Si $\pi P_t = \pi$.

$$\frac{d}{dt}\pi P_t = \pi \frac{dP_t}{dt} = \pi Q P_t = 0$$

$\Rightarrow \pi P_t =$ constante.
cuando $t = 0$, $P_t =$ id.
Luego, constante $= \pi$.
Problema: Determinar π cuando

$$Q = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu \end{pmatrix}$$

Solución: $\pi Q = 0$

$$\Rightarrow \quad (\pi_0, \pi_1) \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu \end{pmatrix} = (0, 0)$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow -\lambda \pi_0 + \mu \pi_1 &= 0 \\
\lambda \pi_0 - \mu \pi_1 &= 0 \\
\pi_0 + \pi_1 &= 1
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \pi = \left(\frac{\mu}{\mu + \lambda}, \frac{\lambda}{\mu + \lambda} \right)$$

De la ecuación:

$$\begin{aligned}
-\lambda \pi_0 + \mu(1 - \pi_0) &= 0 \\
-\lambda \pi_0 + \mu - \mu \pi_0 &= 0 \\
\Rightarrow \pi_0 &= \frac{\mu}{\lambda + \mu} \\
\pi_1 &= 1 - \frac{\mu}{\lambda + \mu} = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}
\end{aligned}$$

Teorema: Si $(X_t)_{t \geq 0}$ es una cadena de Markov irreducible y recurrente positiva, entonces

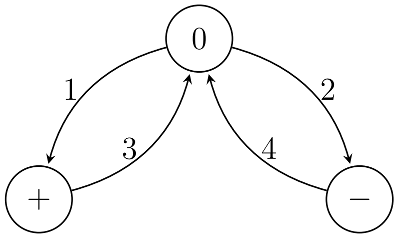
$$P_t(i, j) \to \pi(j).$$

Además: Si $r(i)$ es una recompensa que se gana en el estado i y $\sum_i r(i)\pi(i) < \infty$

entonces

$$\frac{1}{t}\int_0^t r(X_s)ds \to \sum_j r(j)\pi(j).$$

Problema: Una molécula de hemoglobina puede transportar una molécula de oxígeno (+) o una molécula de monóxido de carbono (-).
Supongamos que los dos tipos de gases llegan con tasa 1 y 2 y en el tiempo que se conectan con tasas 3 y 4, respectivamente. Considerando el estado 0 cuando la molécula de hemoglobina está libre. Determinar en el largo plazo, la fracción de tiempo que la molécula de hemoglobina está en cada uno de sus tres estados $(-, 0, +)$.
Sol:



$$Q = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} -3 & 0 & 3 \\ 1 & -4 & 4 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} - \\ 0 \\ + \end{array} \end{array}$$

$$\pi Q = 0$$

$$(\pi(-), \pi(0), \pi(+)) \begin{pmatrix} -4 & 4 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} = (0, 0, 0)$$

$$\begin{aligned} -4\pi(-) + 2\pi(0) &= 0 \\ 4\pi(-) - 3\pi(0) + 3\pi(+) &= 0 \\ \pi(0) - 3\pi(+) &= 0 \\ \pi(-) + \pi(0) + \pi(+) &= 1 \end{aligned}$$

$$\pi(+) = \frac{2}{11}, \quad \pi(0) = \frac{6}{11}, \quad \pi(-) = \frac{3}{11}$$

Procesos de Nacimiento y Muerte

Definición: Un proceso de nacimiento y muerte se define por:

$$\begin{aligned} q(i, i+1) &= \lambda_i \\ q(i, i-1) &= \mu_i \end{aligned}$$

para todo i. $X_t =$ "# de partículas en un sistema en un tiempo t".

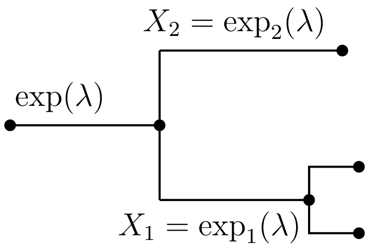
- **Proceso de nacimiento puro:**

$$q(i,i+1) = \lambda_i$$
$$q(i,i-1) = 0$$

- **Proceso de Poisson:**

$$q(i,i+1) = \lambda$$
$$q(i,i-1) = 0$$

- **Proceso de Yule:**



$$\begin{aligned} P\left(\min(X_1, X_2) \geq t\right) &= P(X_1 \geq t, X_2 \geq t) \\ &= P(X_1 \geq t) \cdot P(X_2 \geq t) \\ &= e^{-\lambda t} \cdot e^{-\lambda t} = e^{-2\lambda t} \end{aligned}$$

$$q(i,i+1) = i\lambda$$
$$q(i,i-1) = 0$$

- **Proceso de Ramificación:**

$$q(i,i+1) = i\lambda$$
$$q(i,i-1) = i\mu$$

Determinemos la medida estacionaria de un proceso de nacimiento y muerte.

$$\begin{aligned} q(i,i+1) &= \lambda_i \quad ; \quad i = 0,1,2,\dots \\ q(i,i-1) &= \mu_i \quad ; \quad i = 1,2,\dots \end{aligned}$$

$$Q = \begin{pmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \mu_1 & -(\mu_1+\lambda_1) & \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \mu_2 & -(\mu_2+\lambda_2) & \lambda_2 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \mu_3 & -(\mu_3+\lambda_3) & \lambda_3 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \mu_4 & -(\mu_4+\lambda_4) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

$(\pi_0, \pi_1, \pi_2, \ldots)Q = (0, 0, 0, \ldots)$

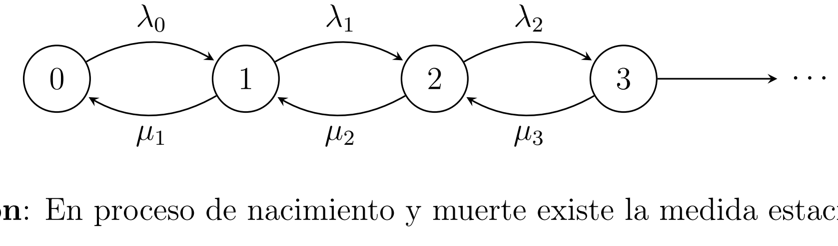
$$\begin{aligned}
\mu_1\pi_1 &= \lambda_0\pi_0 \\
\lambda_0\pi_0 - (\mu_1 + \lambda_1)\pi_1 + \mu_2\pi_2 &= 0 \quad \Rightarrow \lambda_1\pi_1 = \mu_2\pi_2 = \mu_1\pi_1 + \lambda_1\pi_1 \\
\lambda_1\pi_1 + \mu_3\pi_3 &= \mu_2\pi_2 + \lambda_2\pi_2 \\
\lambda_{n-1}\pi_{n-1} + \mu_{n+1}\pi_{n+1} &= \mu_n\pi_n + \lambda_n\pi_n
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\pi_1 &= \frac{\lambda_0}{\mu_1}\pi_0 \\
\Rightarrow \lambda_0\pi_0 - (\mu_1 + \lambda_1)\frac{\lambda_0}{\mu_1}\pi_0 + \mu_2\pi_2 = 0 \\
\lambda_0\pi_0 - \mu_1\frac{\lambda_0}{\mu_1}\pi_0 - \lambda_1\frac{\lambda_0}{\mu_1}\pi_0 + \mu_2\pi_2 = 0 \\
\pi_2 &= \frac{\lambda_0\lambda_1}{\mu_1\mu_2}\pi_0 \\
\lambda_1\frac{\lambda_0}{\mu_1}\pi_0 + \mu_3\pi_3 &= \mu_2\frac{\lambda_0\lambda_1}{\mu_1\mu_2}\pi_0 + \lambda_2\frac{\lambda_0\lambda_1}{\mu_1\mu_2}\pi_0 \\
\pi_3 &= \frac{\lambda_0\lambda_1\lambda_2}{\mu_1\mu_2\mu_3}\pi_0
\end{aligned}$$

$$\pi_n = \frac{\lambda_0\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_{n-1}}{\mu_1\mu_2\mu_3\cdots\mu_n}\pi(0)$$

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty}\pi(n) &= 1 \\
\pi(0) + \pi(1) + \pi(2) + \cdots + \pi(n) + \cdots &= 1 \\
\pi(0) + \frac{\lambda_0}{\mu_1}\pi(0) + \frac{\lambda_0\lambda_1}{\mu_1\mu_2}\pi(0) + \cdots + \frac{\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_{n-1}}{\mu_1\mu_2\cdots\mu_n}\pi(0) + \cdots &= 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_{n-1}}{\mu_1\mu_2\cdots\mu_n}\right)\pi(0) = 1 \\
\pi(0) = \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_{n-1}}{\mu_1\mu_2\cdots\mu_n}\right)^{-1}
\end{aligned}$$



Observación: En proceso de nacimiento y muerte existe la medida estacionaria si

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_{n-1}}{\mu_1\mu_2\cdots\mu_n} < \infty.$$