Procesos de Poisson

Consideremos, para cada $t \geq 0$, el número de eventos que ocurren hasta el tiempo t, y lo denotamos por $N(t)$.
Definición: Un incremento es

$$N(t) - N(s)$$

donde $t > s$.
Definición: $N(t)$ tiene incrementos estacionarios si para todo $h \geq 0$; $t_1, t_2, s \in \mathbb{R}_0^+$ y $t_1 \leq t_2$.

$$\mathbb{P}\big(N(t_2) - N(t_1) = n\big) = \mathbb{P}\big(N(t_2 + s) - N(t_1 + s) = n\big)$$

Definición: $N(t)$ tiene incrementos independientes. Si $t_0 < t_1 < \cdots < t_n$ entonces las variables aleatorias

$$N(t_1) - N(t_0), \quad N(t_2) - N(t_1), \quad \ldots, \quad N(t_n) - N(t_{n-1})$$

son independientes.
Definición: Un proceso $\{N(t)\}_{t \geq 0}$ es un **proceso de Poisson** de tasa $\lambda > 0$ si cumple:

1. $N(0) = 0$.

2. El proceso $N(t)$ tiene incrementos independientes.

3. El proceso $N(t)$ tiene incrementos estacionarios con distribución Poisson:

$$\mathbb{P}\big(N(t+s) - N(s) = n\big) = e^{-\lambda t}\,\frac{(\lambda t)^n}{n!}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Ejemplo: En cierto cruce, el número de infracciones que ocurren sigue un proceso de Poisson con tasa de 5 accidentes/día. Determine la probabilidad de que haya al menos 2 infracciones en las siguientes 6 horas.
Solución:

Sea $N(t)$: número de accidentes hasta el tiempo t. Como obtener

$$\mathbb{P}\big(N(1/4) \geq 2\big) \ ?$$

$$N(1/4) = N(1/4) - N(0) \sim \text{Poisson}\big(5 \cdot \tfrac{1}{4}\big) = \text{Poisson}\big(\tfrac{5}{4}\big)\ ,$$

entonces

$$\mathbb{P}\big(N(1/4) \geq 2\big) = 1 - \mathbb{P}\big(N(1/4) < 2\big) = 1 - \mathbb{P}\big(N(1/4) = 1\big) - \mathbb{P}\big(N(1/4) = 0\big).$$

$$\mathbb{P}\big(N(1/4) \geq 2\big) = 1 - e^{-5/4}\frac{(5/4)^1}{1!} - e^{-5/4}\frac{(5/4)^0}{0!}$$

$$= 1 - e^{-5/4} \cdot \tfrac{5}{4} - e^{-5/4}$$

$$= 0.36$$

Ejemplo: Los clientes llegan a una taquilla de acuerdo a un proceso de Poisson (PP) con tasa 0.1 clientes/seg.
Determine la probabilidad de que, después de que la taquilla abre, 5 clientes lleguen durante el primer minuto y otros 5 clientes lleguen durante el segundo minuto.
Solución:
Sea $N(t)$: número de clientes que llegan a la taquilla hasta el tiempo t.

$$\mathbb{P}\big(N(60) = 5,\ N(120) - N(60) = 5\big) \ ?$$

$$\mathbb{P}\big(N(60) - N(0) = 5,\ N(120) - N(60) = 5\big)$$

Por independencia de incrementos:

$$= \mathbb{P}\big(N(60) - N(0) = 5\big) \times \mathbb{P}\big(N(120) - N(60) = 5\big)$$
$$= \mathbb{P}\big(N(60) - N(0) = 5\big) \times \mathbb{P}\big(N(60) - N(0) = 5\big)$$

$$= \mathbb{P}\big(N(60) - N(0) = 5\big)^2$$

Además,
$$N(60) - N(0) \sim \text{Poisson}(0.1 \times 60) = \text{Poisson}(6).$$

$$= \left(\frac{e^{-6}\, 6^5}{5!} \right)^2 = 0.026$$

Ejemplo: Suponga que por un punto de una autopista pasan en promedio 50 carros cada 5 minutos.
¿Cuál es la probabilidad de que pasen 20 carros en el primer minuto y 30 en los siguientes 4 minutos?
Solución:
Sea $N(t) := \#$ de carros que pasan por un punto hasta el tiempo t.

$$\lambda = 10 \text{ carros/minuto.}$$

$$\mathbb{P}\big(N(1) = 20,\ N(5) - N(1) = 30\big)\ ?$$

Por independencia de incrementos:

$$\mathbb{P}\big(N(1) = 20,\ N(5) - N(1) = 30\big) = \mathbb{P}\big(N(1) = 20\big) \cdot \mathbb{P}\big(N(5) - N(1) = 30\big).$$

$$= \frac{e^{-10}\, 10^{20}}{20!} \times \frac{e^{-40}\, 40^{30}}{30!} = 3.4 \times 10^{-5}.$$

Definición 1:

1. $N(0)$
2. Incrementos independientes y estacionarios
3. Los incrementos tienen distribución Poisson

Procesos de Conteo
Definición: Se dice que $\{N(t)\}_{t \geq 0}$ es un proceso de conteo si $N(t)$ representa el número de eventos que han ocurrido hasta el tiempo t.
Propiedades:

1. $N(t) \geq 0$.

2. $N(t) \in \mathbb{Z}_0^+$.

3. Si $s < t$ entonces $N(t) \geq N(s)$.

4. $N(t) - N(s)$ es el número de eventos en el intervalo $(s, t]$.

Definición: Una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es $o(h)$ si

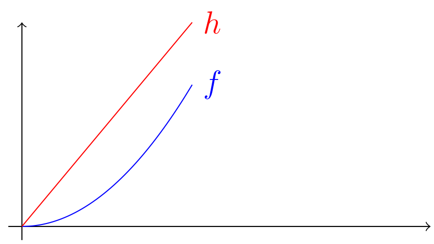
$$\lim_{h \to 0} \frac{f(h)}{h} = 0.$$

Si una función f es $o(h)$, se escribe

$$f(h) = o(h).$$

Ejemplo: Para $r > 1$, $f(x) = x^r$. ¿Es $f = o(h)$?

$$\lim_{h \to 0} \frac{h^r}{h} = \lim_{h \to 0} h^{r-1} = 0.$$



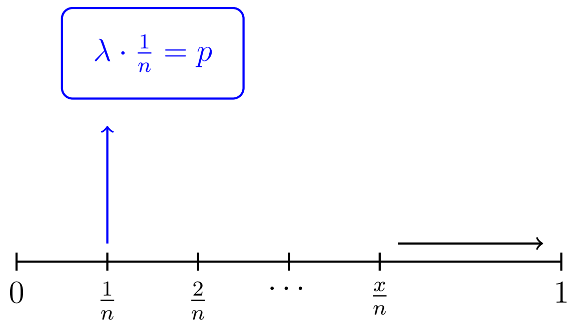
Ejemplo: Para $r \leq 1$, $f(x) = x^r$. ¿Es $f = o(h)$?
Definición 2:
Se dice que un proceso de conteo $\{N(t)\}_{t \geq 0}$ es un **proceso de Poisson** con tasa $\lambda > 0$, si cumple:

1. $N(0) = 0$,

2. El proceso tiene incrementos estacionarios e independientes,

3. $\mathbb{P}(N(h) = 1) = \lambda h + o(h)$,

4. $\mathbb{P}(N(h) \geq 2) = o(h)$.



$$\mathbb{P}(X = x) = \mathrm{Bin}(n, p = \tfrac{\lambda}{n})$$

Teorema:

$$\boxed{\mathrm{Bin}(n, p(n)) \quad \longrightarrow \quad \mathrm{Poisson}(\lambda)}$$

cuando

$$n\,p(n) \quad \longrightarrow \quad \lambda.$$

Teorema: Las definiciones (1) y (2) son equivalentes:

- $N(0) = 0$
- Incrementos estacionarios e independientes; los incrementos tienen distribución Poisson

Demostración:
empezamos por demostrar que (2) => (1)

$$P_n(t) = \mathbb{P}(N(t) = n) \quad \longleftarrow \quad \text{distribución Poisson}(t\lambda)$$

$$P_n'(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{P_n(t+\varepsilon) - P_n(t)}{\varepsilon}$$

$$\frac{P_n(t+\varepsilon) - P_n(t)}{\varepsilon} = \frac{\mathbb{P}(N(t+\varepsilon) = n) - \mathbb{P}(N(t) = n)}{\varepsilon}\ ?$$

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(N(t+\varepsilon)=n) &= \mathbb{P}(N(t)=n,\ N(t+\varepsilon)-N(t)=0) \\
&\quad + \mathbb{P}(N(t)=n-1,\ N(t+\varepsilon)-N(t)=1) \\
&\quad + \mathbb{P}(N(t)\leq n-2,\ N(t+\varepsilon)-N(t)\geq 2) \\
&= \mathbb{P}(N(t)=n)\cdot\mathbb{P}(N(t+\varepsilon)-N(t)=0) \\
&\quad + \mathbb{P}(N(t)=n-1)\cdot\mathbb{P}(N(t+\varepsilon)-N(t)=1) \\
&\quad + \mathbb{P}(N(t)\leq n-2)\cdot\mathbb{P}(N(t+\varepsilon)-N(t)\geq 2) \\
&= P_n(t)P_0(\varepsilon)+P_{n-1}(t)P_1(\varepsilon)+o(\varepsilon).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P_0(\varepsilon) &= \mathbb{P}(N(\varepsilon)=0) = 1-\mathbb{P}(N(\varepsilon)\geq 1) \\
&= 1-\mathbb{P}(N(\varepsilon)=1)-\mathbb{P}(N(\varepsilon)\geq 2) \\
&= 1-\lambda\varepsilon+o(\varepsilon)+o(\varepsilon) \\
&= 1-\lambda\varepsilon+o(\varepsilon)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P_1(\varepsilon) &= \mathbb{P}(N(\varepsilon)=1) \\
&= \lambda\varepsilon+o(\varepsilon)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P_n(t+\varepsilon) &= P_n(t)\left(1-\lambda\varepsilon+o(\varepsilon)\right)+P_{n-1}(t)\left(\lambda\varepsilon+o(\varepsilon)\right)+o(\varepsilon) \\
&= P_n(t)-\lambda\varepsilon P_n(t)+o(\varepsilon)P_n(t) \\
&\quad + \lambda\varepsilon P_{n-1}(t)+o(\varepsilon)P_{n-1}(t)+o(\varepsilon)
\end{aligned}
$$

$$
P_n(t+\varepsilon) = P_n(t)+\lambda\varepsilon(P_{n-1}(t)-P_n(t))+o(\varepsilon)
$$

Así:

$$
\begin{aligned}
\frac{P_n(t+\varepsilon)-P_n(t)}{\varepsilon} &= \frac{P_n(t)+\lambda\varepsilon(P_{n-1}(t)-P_n(t))+o(\varepsilon)-P_n(t)}{\varepsilon} \\
&= \lambda(P_{n-1}(t)-P_n(t))+\frac{o(\varepsilon)}{\varepsilon}
\end{aligned}
$$

Tomando el límite cuando $\varepsilon \to 0$:

$$P_n'(t) = \lambda(P_{n-1}(t) - P_n(t))$$

$$\begin{aligned} P_n'(t) + \lambda P_n(t) &= \lambda P_{n-1}(t) \\ e^{\lambda t} P_n'(t) + e^{\lambda t} \lambda P_n(t) &= e^{\lambda t} \lambda P_{n-1}(t) \\ \left(e^{\lambda t} P_n(t)\right)' &= \lambda e^{\lambda t} P_{n-1}(t) \end{aligned}$$

Inducción en n:
Para $n = 1$:

$$\begin{aligned} \left(e^{\lambda t} P_1(t)\right)' &= \lambda e^{\lambda t} P_0(t) \\ &= \lambda e^{\lambda t} e^{-\lambda t} \\ &= \lambda \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_0(t) &= e^{-\lambda t} \\ \left(e^{\lambda t} P_1(t)\right)' &= \lambda \\ e^{\lambda t} P_1(t) - e^{\lambda \cdot 0} P_1(0) &= \lambda t \\ e^{\lambda t} P_1(t) &= \lambda t \\ P_1(t) &= e^{-\lambda t} \lambda t \end{aligned}$$

Hipótesis de inducción:

$$P_{n-1}(t) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}$$

Por demostrar:

$$P_n(t) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}$$

Ahora se va a demostrar que (1) => (2)
Si $N(t) \sim \text{Poisson}(\lambda t)$ entonces:

1. $P(N(h) = 1) = e^{-\lambda h}\lambda h$
2. $P(N(h) \geq 2) = o(h)$

Demostración de 1):

$$\begin{aligned} P(N(h) = 1) &= e^{-\lambda h}\lambda h \\ &= (1 - \lambda h + o(h))\lambda h \\ &= \lambda h - \lambda^2 h^2 + o(h)\lambda h \\ &= \lambda h + o(h) \end{aligned}$$

Demostración de 2):

$$\begin{aligned} P(N(h) \geq 2) &= 1 - P(N(h) = 0) - P(N(h) = 1) \\ &= 1 - e^{-\lambda h} - e^{-\lambda h}\lambda h \\ &= 1 - (1 - \lambda h + o(h)) - (\lambda h + o(h)) \\ &= 1 - 1 + \lambda h - o(h) - \lambda h - o(h) \\ &= o(h) \end{aligned}$$

Por lo tanto, se ha demostrado que las definiciones (1) y (2) son equivalentes.

Lema

$N(s)$ tiene distribución Poisson(λs).

Idea de la demostración:

Nota: $\int_0^\infty \lambda(\lambda x)^{n-1} \frac{e^{-\lambda x}}{(n-1)!} dx = 1 - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$

$$\{N(t) < n\} \Leftrightarrow \{T_n \geq t\}$$

$$\mathbb{P}(N(t) < n) = \mathbb{P}(T_n \geq t), \quad T_n \sim \text{Gamma}(n, \lambda)$$

$$= \int_t^\infty \frac{\lambda(\lambda x)^{n-1} e^{-\lambda x}}{(n-1)!} dx = 1 - \int_0^t \frac{\lambda(\lambda x)^{n-1} e^{-\lambda x}}{(n-1)!} dx$$

$$= 1 - 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$$

Luego:

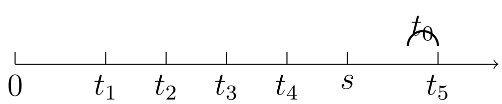
$$\mathbb{P}(N(t) = n) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$$

$$\Rightarrow N(t) \sim \text{Poisson}(\lambda t).$$

Lema

$N(t+c) - N(c)$, $t \geq 0$ es un proceso de Poisson con tasa λ e independiente de $N(r)$; $0 \leq r \leq s$.

Idea de la demostración



$$\mathbb{P}(t_5 > x + t \mid t_5 > x) = \mathbb{P}(t_5 > t) = \exp(\lambda)$$

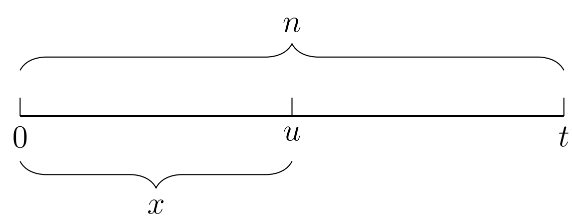
Tarea: Definición (1) $\longrightarrow$ Definición (3)

Características de un Proceso de Poisson

Teorema: Sea $\{N(t)\}_{t \geq 0}$ un PP(λ).
Suponga que para un $t > 0$ fijo, $N(t) = n$.
Entonces para $0 \leq u < t$, el número de eventos que han ocurrido antes de u es una v.a. Bin($n, \frac{u}{t}$), es decir:

$$\mathbb{P}(N(u) = x \mid N(t) = n) = \binom{n}{x} \left(\frac{u}{t}\right)^x \left(1 - \frac{u}{t}\right)^{n-x}$$

Demostración:



$$\mathbb{P}(N(u) = x \mid N(t) = n) = \frac{\mathbb{P}(N(u) = x, N(t) = n)}{\mathbb{P}(N(t) = n)}$$
$$= \frac{\mathbb{P}(N(u) = x, N(t) - N(u) = n - x)}{\mathbb{P}(N(t) = n)}$$

Por independencia de incrementos:

$$= \frac{\mathbb{P}(N(u) = x) \cdot \mathbb{P}(N(t) - N(u) = n - x)}{\mathbb{P}(N(t) = n)}$$

$$= \frac{\frac{e^{-\lambda u}(\lambda u)^x}{x!} \cdot \frac{e^{-\lambda(t-u)}(\lambda(t-u))^{n-x}}{(n-x)!}}{\frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^n}{n!}}$$

$$= \frac{n!}{x!(n-x)!} \cdot \frac{(\lambda u)^x(\lambda(t-u))^{n-x}}{(\lambda t)^n(\lambda t)^{n-x}}$$

$$= \binom{n}{x}\frac{(\lambda u)^x(\lambda(t-u))^{n-x}}{(\lambda t)^x(\lambda t)^{n-x}}$$

$$= \binom{n}{x}\left(\frac{\lambda u}{\lambda t}\right)^x\left(\frac{\lambda(t-u)}{\lambda t}\right)^{n-x}$$

$$= \binom{n}{x}\left(\frac{u}{t}\right)^x\left(\frac{t-u}{t}\right)^{n-x}$$

$$= \binom{n}{x}\left(\frac{u}{t}\right)^x\left(1 - \frac{u}{t}\right)^{n-x}$$

Teorema: Sean $N_1, N_2, \ldots, N_k$ procesos de Poisson independientes con intensidades $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ entonces:

$$N = N_1 + N_2 + \cdots + N_k$$

es un proceso de Poisson con tasa $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_k$.
Demostración: $k = 2$

- $N(0) = 0$

  Porque: $N_1(0) = 0,\ N_2(0) = 0$

- $t_1 < t_2 < t_3$

  $*N_1(t_3) - N_1(t_2)$ ind $N_1(t_2) - N_1(t_1)$

  $*N_2(t_3) - N_2(t_2)$ ind $N_2(t_2) - N_2(t_1)$

  $N(t_3) - N(t_2) = N_1(t_3) + N_2(t_3) - N_1(t_2) - N_2(t_2)$

  $= N_1(t_3) - N_1(t_2) + N_2(t_3) - N_2(t_2)$

  es independiente de

  $N_1(t_2) - N_1(t_1) + N_2(t_2) - N_2(t_1)$

  $= N(t_2) - N(t_1)$.

- $N(t+s) - N(s) = N_1(t+s) + N_2(t+s) - N_1(s) - N_2(s)$

  $= N_1(t+s) - N_1(s) + N_2(t+s) - N_2(s)$

  $\sim$ Poisson$(\lambda_1 t)$ ind Poisson$(\lambda_2 t)$

  $\sim$ Poisson$((\lambda_1 + \lambda_2)t)$.

$$= \frac{\mathbb{P}(N(u) = x) \cdot \mathbb{P}(N(t) - N(u) = n - x)}{\frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^n}{n!}}$$

$$= \frac{\frac{e^{-\lambda u}(\lambda u)^x}{x!} \cdot \frac{e^{-\lambda(t-u)}(\lambda(t-u))^{n-x}}{(n-x)!}}{\frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^n}{n!}}$$

$$= \frac{n!}{x!(n-x)!} \cdot \frac{(\lambda u)^x (\lambda(t-u))^{n-x}}{(\lambda t)^x (\lambda t)^{n-x}}$$

$$= \binom{n}{x} \left(\frac{\lambda u}{\lambda t}\right)^x \left(\frac{\lambda(t-u)}{\lambda t}\right)^{n-x}$$

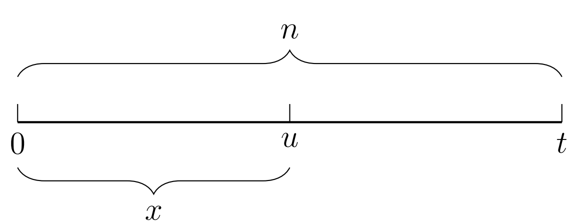
Teorema: Sea N un $\mathrm{PP}(\lambda)$ y N_j número de eventos de tipo j. tal que $\mathbb{P}(\text{tipo } j) = P_j$, $j = 1, \ldots, k$, entonces N_j es un $\mathrm{PP}(\lambda P_j)$.
Demostración: $k = 2$.
$\mathbb{P}(\text{tipo } 1) = p$, $\mathbb{P}(\text{tipo } 2) = 1 - p$.
1) $N_1(0) = 0$, $N_2(0) = 0$.
2) N_1 y N_2 tienen incrementos independientes y estacionarios, por que N los tiene.
3) Sea $X_1 = N_1(t+s) - N_1(s)$
$X_2 = N_2(t+s) - N_2(s)$.
$\mathbb{P}(X_1 = n, X_2 = k) =$
$= \mathbb{P}(X_1 = n, X_2 = k) \cdot \frac{\mathbb{P}(X_1+X_2=n+k)}{\mathbb{P}(X_1+X_2=n+k)}$
$= \mathbb{P}(X_1 = n, X_2 = k \mid X_1 + X_2 = n+k)\mathbb{P}(X_1 + X_2 = n+k)$.
$= \mathbb{P}(X_1 = n, X_2 = k \mid X_1 + X_2 = n+k)\mathbb{P}(X_1 + X_2 = n+k)$.
$= \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^{n+k}}{(n+k)!}\binom{n+k}{n} p^n (1-p)^k$

$$\frac{\mathbb{P}(\overbrace{(X_1 = n, X_2 = k)}^{A}, \overbrace{X_1 + X_2 = n+k}^{B})}{\mathbb{P}(X_1 + X_2 = n+k)}$$

$A \subseteq B$
$A \cap B = A$

$$= \frac{\mathbb{P}(X_1 = n, X_2 = k)}{\mathbb{P}(X_1 + X_2 = n+k)}.$$

$= e^{-\lambda t p} e^{-\lambda t(1-p)} (\lambda t)^n (\lambda t)^k p^n (1-p)^k \frac{(n+k)!}{n! \cdot k!}$
$= e^{-\lambda t p} \frac{(\lambda t p)^n}{n!} e^{-\lambda t(1-p)} \frac{(\lambda t(1-p))^k}{k!}$
$= \text{Poisson}(\lambda t p) \cdot \text{Poisson}(\lambda t(1-p))$
$\mathbb{P}(X_1 = n, X_2 = k) = \text{Poisson}(\lambda t p) \cdot \mathbb{P}(\lambda t(1-p))$



$\text{Bin}(n, \frac{u}{t})$
Teorema: Sea $N(t)$ un proceso de Poisson con tasa λ, y suponga que para $t > 0$ fijo, se sabe que $N(t) = n$. Entonces
$T_1, T_2, \ldots, T_n$ dado $N(t) = n$ tiene densidad
$f(t_1, t_2, \ldots, t_n \mid N(t) = n) = \frac{n!}{t^n}, 0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n$
Demostración: $0 < t_1 < t_2 < t_3 < \ldots < t_n < t$.
$F(t_1, \ldots, t_n \mid N(t) = n) =$
$= \mathbb{P}(T_1 \leq t_1, T_2 \leq t_2, \ldots, T_n \leq t_n \mid N(t) = n).$
$= \frac{\mathbb{P}(T_1 \leq t_1, \ldots, T_n \leq t_n, N(t)=n)}{\mathbb{P}(N(t)=n)}.$
Nota que: $\{T_1 \leq t_1, \ldots, T_n \leq t_n, N(t) = n\}$ es equivalente al evento "un y solo un cliente llega en los intervalos $[0, t_1], [t_1, t_2], \ldots, [t_{n-1}, t_n]$ y ningún cliente llega en $(t_n, t]$.
$P(t_1, \ldots, t_n \mid n) = \frac{e^{-\lambda t_1}\lambda t_1 \cdot e^{-\lambda(t_2-t_1)}\lambda(t_2-t_1)\cdots \times e^{-\lambda(t_n-t_{n-1})}\lambda(t_n-t_{n-1})e^{-\lambda(t-t_n)}}{\frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^n}{n!}}$
$= \frac{e^{-\lambda t}\lambda^n(t_1(t_2-t_1)\cdots(t_n-t_{n-1}))}{\frac{e^{-\lambda t}\lambda^n t^n}{n!}}$
$= \frac{n!(t_1(t_2-t_1)\cdots(t_n-t_{n-1}))}{t^n}$
Luego: $\frac{\partial^n F}{\partial t_1 \partial t_2 \cdots \partial t_n} = \frac{n!}{t^n}.$

Proceso de Poisson compuesto

Sea $X_1, X_2, \ldots$ i.i.d., N entera no negativa.

$$S_N = \sum_{i=1}^{N} X_i, \quad S_t = \sum_{i=1}^{0} X_i$$

$$E(S_N) = \sum_{i=1}^{N} E(X_i) = NE(X_i)$$

$\text{Var}(S_N) = N \ \text{Var}(X_1)$

$$E(X|Y = y) = \sum_{x} xP(X = x|Y = y)$$

$$E(Y) = \sum_{y} yP(y)$$

Lema esperanza total

$$E(X) = E_Y(E(X|Y))$$

Demostración:

$$\begin{aligned}
E_Y(E(X|Y)) &= E\left(\sum_x x \cdot P(X = x|Y)\right) \\
&= \sum_y \sum_x x \cdot P(X = x|Y = y) P(Y = y) \\
&= \sum_y \sum_x x \cdot \frac{P(X = x, Y = y)}{P(Y = y)} P(Y = y) \\
&= \sum_y \sum_x x \cdot P(X = x, Y = y) \\
&= \sum_x x \sum_y P(X = x, Y = y) \\
&= \sum_x x \cdot P(X = x) \\
&= E(X)
\end{aligned}$$

Lema: Sean $X_1, X_2, \ldots$ i.i.d. con primer y segundo momento finito. Sea N una v.a. independiente y discreta. Consideremos $S_N = \sum_{i=1}^N X_i$ con $S_0 = 0$.
1) Si $E(N) < \infty$ entonces $E(S_N) = E(N) \cdot E(X_1)$.
2) Si $E(N^2) < \infty$ entonces

$$\mathrm{Var}(S_N) = E(N)\mathrm{Var}(X_1) + \mathrm{Var}(N)[E(X_1)]^2$$

Demostración:
1) $E(S_N) = E_N(E(S_N|N))$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_n E(S_n|N=n)P(N=n) \\
&= \sum_n E(S_n|N=n) \cdot P(N=n) \\
&= \sum_n E(S_n) \cdot P(N=n) \\
&= \sum_n nE(X_1) \cdot P(N=n) \\
&= E(X_1) \sum_n nP(N=n) \\
&= E(N) \cdot E(X_1)
\end{aligned}
$$

2) $\text{Var}(S_N) = E(S_N^2) - [E(S_N)]^2$
Calculamos $E(S_N^2)$:

$$
\begin{aligned}
E(S_N^2) &= E_N(E(S_N^2|N)) \\
&= \sum_n E(S_n^2|N=n)P(N=n) \\
&= \sum_n E(S_n^2)P(N=n)
\end{aligned}
$$

Donde:

$$
\begin{aligned}
\text{Var}(S_n) &= E(S_n^2) - [E(S_n)]^2 \\
n\text{Var}(X_1) &= E(S_n^2) - n^2[E(X_1)]^2 \\
E(S_n^2) &= n\text{Var}(X_1) + n^2[E(X_1)]^2
\end{aligned}
$$

Entonces:

$$
\begin{aligned}
E(S_N^2) &= \sum_n \left(n\text{Var}(X_1) + n^2[E(X_1)]^2\right) P(N=n) \\
&= \text{Var}(X_1) \sum_n nP(N=n) + [E(X_1)]^2 \sum_n n^2 P(N=n) \\
&= E(N)\text{Var}(X_1) + [E(X_1)]^2 E(N^2)
\end{aligned}
$$

Finalmente:

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(S_N) &= E(N)\mathrm{Var}(X_1) + [E(X_1)]^2 E(N^2) - [E(N)]^2[E(X_1)]^2 \\ &= E(N)\mathrm{Var}(X_1) + [E(X_1)]^2 \left(E(N^2) - [E(N)]^2\right) \\ &= E(N)\mathrm{Var}(X_1) + [E(X_1)]^2 \mathrm{Var}(N)\end{aligned}$$

Obs: Sea $N(t)$ un proceso de Poisson(λ), entonces:
Definimos $S_t = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i$
que es llamado un proceso de Poisson compuesto.

$$\begin{aligned}E(S_t) &= E(N(t))E(X_1) \\ &= \lambda t E(X_1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(S_t) &= E(N(t))\mathrm{Var}(X_1) + [E(X_1)]^2 \mathrm{Var}(N(t)) \\ &= \lambda t \mathrm{Var}(X_1) + \lambda t [E(X_1)]^2 \\ &= \lambda t \left(\mathrm{Var}(X_1) + [E(X_1)]^2\right) \\ &= \lambda t E(Y_1^2)\end{aligned}$$

Problema: Un pescador captura truchas siguiendo un proceso de Poisson con una intensidad de 3 pescados por hora. Supongamos que las truchas pesan un promedio de 4 libras con una desviación estándar de 2 libras.
Determinar la media y varianza del peso total de los peces que captura en 2 horas.
Solución:
$N(t) = \#$ truchas que salen hasta el tiempo t.
$X_i =$ el peso de la trucha i-ésima.
$S_t = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i =$ peso total de las truchas sacadas hasta el tiempo t (horas).

$$\begin{aligned}E(S_2) &= E(N(2)) \cdot E(X_1) \\ &= 6 \times 4 = 24 \text{ libras}\end{aligned}$$

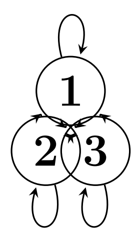
$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(S_t) &= \lambda t E(X_1^2) = \lambda t \left(\mathrm{Var}(X_1) + [E(X_1)]^2\right) \\ &= 6(4 + 16) = 120 \text{ libras}^2\end{aligned}$$

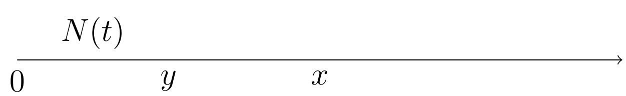
Cadenas de Markov en tiempo continuo

Definición: Un proceso en tiempo continuo $\{X_t\}_{t\geq 0}$ es una cadena de Markov. Si para cualquier $0 \leq S_0 \leq S_1 \leq S_n \leq S$ y estados $i_0, \ldots, i_n, i, j$ se tiene:

$$P\left(X_{t+s} = j \mid X_s = i, X_{s_n} = i_n, \ldots, X_{s_0} = i_0\right) = P(X_{t+s} = j \mid X_s = i)$$

Ejemplo: Transformación de una cadena de Markov a tiempo continuo:
Sea $N(t)$ un proceso de Poisson con intensidad λ y sea Y_n una C.M. con matriz de transición $U(i,j)$, $i \neq j$.
Entonces $X_t = Y_{N(t)}$ es una cadena de Markov en tiempo continuo.





Definición: Para $t > 0$ la probabilidad de transición es definida por:

$$P_t(i,j) = P(X_t = j | X_0 = i)$$

Problema: Calcule la probabilidad de transición del proceso $X_t = Y_{N(t)}$.
Sol:

$$
\begin{aligned}
P_t(i,j) &= P(X_t = j | X_0 = i) \\
&= P\left(Y_{N(t)} = j \mid Y_0 = i\right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} P\left(Y_{N(t)} = j, N(t) = n \mid Y_0 = i\right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} P\left(Y_n = j \mid Y_0 = i\right) P(N(t) = n) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} U^n(i,j) \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^n}{n!}
\end{aligned}
$$

Definición: La tasa de saltos de una cadena de Markov con probabilidades de transición $P_t(i,j)$ está dada por:

$$q(i,j) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{P_\varepsilon(i,j)}{\varepsilon}$$

Para $i \neq j$.
Problema: Tasa de saltos de un proceso de Poisson
Nota que:
• $P_\varepsilon(i,j) = 0$ para $j \neq i$
• $P_\varepsilon(i,j) = P(N(\varepsilon) \geq 1) = j > i + 1 = O(\varepsilon)$
• $P_\varepsilon(i,i+1) = P(N(\varepsilon) = 1) = \lambda\varepsilon + O(\varepsilon)$
Si $j \neq i$:

$$q(i,j) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{P_\varepsilon(i,j)}{\varepsilon} = 0$$

Si $j > i + 1$:

$$q(i,j) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{P_\varepsilon(i,j)}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{O(\varepsilon)}{\varepsilon} = 0$$

Si $j = i + 1$:

$$q(i,j) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{P_\varepsilon(i,j)}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\lambda\varepsilon + O(\varepsilon)}{\varepsilon} = \lambda$$