

# Modelamiento de Procesos: Tarea 4.

Alejandro D. J. Gómez Flórez \*

\* Universidad Nacional de Colombia, Sede Medellín, (e-mail: [ajgomezf@unal.edu.co](mailto:ajgomezf@unal.edu.co))

## Resumen

El presente trabajo tiene como objetivo el desarrollo de la cuarta tarea del curso, el cual consiste en el desarrollo y simulación de un bioreactor, empleando el software MATLAB (2020).

*Keywords:* simulación, modelamiento de procesos, Matlab, bioreactor, linealización.

## 1. INTRODUCCIÓN

En un biorreactor bien agitado se lleva a cabo el crecimiento de un microorganismo en fase acuosa, para esto se alimenta continuamente un sustrato que tiene una concentración de 64 gr/lit. Del biorreactor sale continuamente un flujo con microorganismos ( $C_x$  gr/lit) y una concentración de sustrato remanente ( $C_s$  gr/lit), Las ecuaciones de cinética de crecimiento y de consumo de sustrato son los siguientes:

$$r_x = \frac{\mu_M C_s C_x}{K_M + C_s} \quad (1)$$

$$r_s = \frac{r_x}{Y_{xs}} \quad (2)$$

- Construya el modelo que prediga la dinámica de la concentración de microorganismos y de sustrato en el flujo de salida del biorreactor.
- Encuentre los puntos de estado estacionario del sistema dinámico (2 puntos), linealizar sobre estos puntos y evalúe la estabilidad de cada uno de ellos.
- Desarrolle el retrato de fase del sistema lineal, Que puede evidenciar del resultado?

En la Tabla 1 se presentan los parámetros y valores asignados para las simulaciones.

Parámetros	Valor
$\mu_M$ [ $h^{-1}$ ]	0.3
$K_M$ [gr/lit]	22.84
$Y_{xs}$ [gr x/gr s]	0.66
$F$ [lit/h]	60
$V$ [lit]	1000

Tabla 1. Parámetros asignados para las simulaciones.

## 2. DESARROLLO DEL MODELO

A partir del análisis que se nos presenta en Fogler (2016) en la sección 7.4.4, se desarrolla el modelo considerando solo el flujo de entrada para el sustrato, y como flujo de salida, los microorganismos y el sustrato remanente, tal como se especifica en el enunciado del problema. Además,

se asume un nivel de tanque constante, lo cual permite considerar el flujo  $F$  igual para la entrada y la salida.

$$V \frac{dC_s}{dt} = FC_{s0} - FC_s - r_s V \quad (3)$$

$$V \frac{dC_x}{dt} = r_x V - FC_x \quad (4)$$

Después de organizar las ecuaciones para obtener nuestro sistema de ecuaciones diferenciales que representan la dinámica del sistema, se obtiene:

$$\frac{dC_s}{dt} = \frac{FC_{s0}}{V} - \frac{FC_s}{V} - r_s \quad (5)$$

$$\frac{dC_x}{dt} = r_x - \frac{FC_x}{V} \quad (6)$$

Reemplazando las ecuaciones (1) y (2) en (5) y (6) se obtiene:

$$\frac{dC_s}{dt} = \frac{FC_{s0}}{V} - \frac{FC_s}{V} - \frac{\mu_M C_s C_x}{Y_{xs}(K_M + C_s)} \quad (7)$$

$$\frac{dC_x}{dt} = \frac{\mu_M C_s C_x}{K_M + C_s} - \frac{FC_x}{V} \quad (8)$$

## 3. PUNTOS DE EQUILIBRIO

El primer punto de equilibrio se obtiene, igualando a cero las dinámicas y reorganizando las ecuaciones, para analizar los posibles puntos de equilibrio:

$$0 = \frac{FC_{s0}}{V} - \frac{FC_{seq}}{V} - \frac{\mu_M C_{seq} C_{xeq}}{Y_{xs}(K_M + C_{seq})} \quad (9)$$

$$0 = C_{xeq} \left( \frac{\mu_M C_{seq}}{K_M + C_{seq}} - \frac{F}{V} \right) \quad (10)$$

Como resultado obtenemos dos posibles escenarios a partir de la ecuación (10):

1. El valor de  $C_{xeq} = 0$  y evaluando en (9), se obtiene el punto de equilibrio:

$$C_{seq} = C_{s0}; \quad C_{xeq} = 0 \quad (11)$$

2. El valor de  $C_{xeq} \neq 0$ , dando como resultado en (9) y (10) el punto de equilibrio:

$$C_{seq} = \frac{K_M F}{V \mu_M - F} \quad (12)$$

$$C_{xeq} = \frac{(K_M + C_{seq})(F C_{s0} - F C_{seq}) Y_{xs}}{V \mu_M C_{seq}}$$

Los valores numéricos para los puntos de equilibrio obtenidos, considerando los valores presentados en la Tabla 1, son:

1. Para el primer punto de equilibrio, a partir de la expresión en (11) se obtiene:

$$C_{seq} = 64; \quad C_{xeq} = 0 \quad [gr/lt] \quad (13)$$

2. Para el segundo punto de equilibrio, a partir de la expresión en (12) se obtiene:

$$C_{seq} = 5.71; \quad C_{xeq} = 38.471 \quad [gr/lt] \quad (14)$$

Se realiza la respectiva verificación de ambos puntos en el software MATLAB (2020), creando el *script* disponible en Gomez (2020).

Los resultados de la simulación, empleando las ecuaciones (5) y (6) que representan la dinámica del sistema, se valida el comportamiento de estado estacionario considerando los puntos de equilibrio obtenidos en (13) y (14), y a partir de la simulación empleada en MATLAB (2020), usando el método de solución *ode45*, se obtiene el resultado de la Figura 1 donde se confirma el comportamiento en estado estacionario.

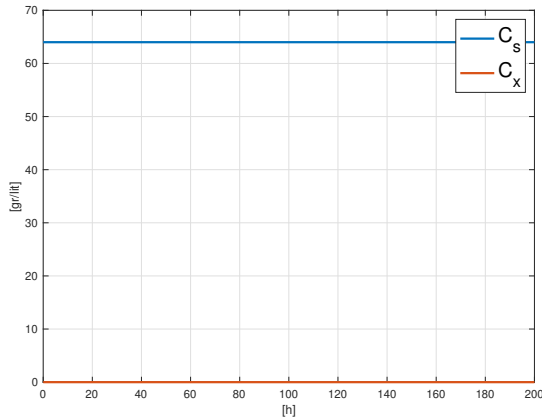


Figura 1. Resultados de simulación considerando el primer punto de equilibrio:  $C_{seq} = 64$ ,  $C_{xeq} = 0$  en  $[gr/lt]$ .

Ahora se considera el punto de equilibrio (14) como condición inicial para la simulación, dando como resultado una dinámica nula, ilustrada en la Figura 2.

Para complementar, se hacen variaciones en las condiciones iniciales, cuyos resultados se aprecian en la Figura 3, Figura 4 y Figura 5 cada una con condiciones diferentes. Se observa que en cada simulación, buscan el punto de equilibrio presentado en (14).

#### 4. LINEALIZACIÓN

Se considera el sistema lineal (15), siendo la matriz  $A$  obtenida a partir del jacobiano obtenido del sistema compuesto por las ecuaciones (5) y (6) y evaluado en el punto

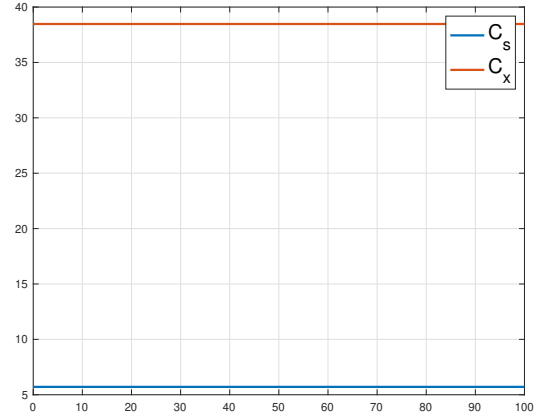


Figura 2. Resultados de simulación considerando el segundo punto de equilibrio:  $C_{seq} = 5.71$ ,  $C_{xeq} = 38.471$  en  $[gr/lt]$ .

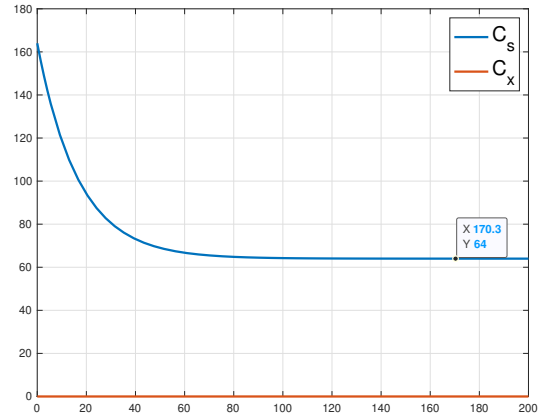


Figura 3. Resultados de simulación considerando las condiciones iniciales  $C_{s0} = 164$ ,  $C_{x0} = 0$  en  $[gr/lt]$ .

de linealización, el cual se considerará como el punto de equilibrio. Las variables o estados  $\hat{C}_s$  y  $\hat{C}_x$  corresponden a los valores medidos, considerando el punto de linealización como el punto de origen.

$$\dot{X} = AX; \quad X = \begin{bmatrix} \hat{C}_s \\ \hat{C}_x \end{bmatrix} \quad (15)$$

Para la linealización, se emplea el comando *jacobian* usando las ecuaciones presentadas en (5) y (6), y con el comando *eval* en los puntos de equilibrio obtenidos previamente.

Se obtiene como resultado, las matrices  $A_{l1}$  y  $A_{l2}$  presentadas en (16) y (17) que corresponden a la matriz del sistema linealizado a partir de los puntos de equilibrio (13) y (14) respectivamente.

$$A_{l1} = \begin{bmatrix} -0.06 & -0.33499 \\ 0 & 0.1611 \end{bmatrix} \quad (16)$$

$$A_{l2} = \begin{bmatrix} -0.55 & -0.090909 \\ 0.3234 & 0 \end{bmatrix} \quad (17)$$

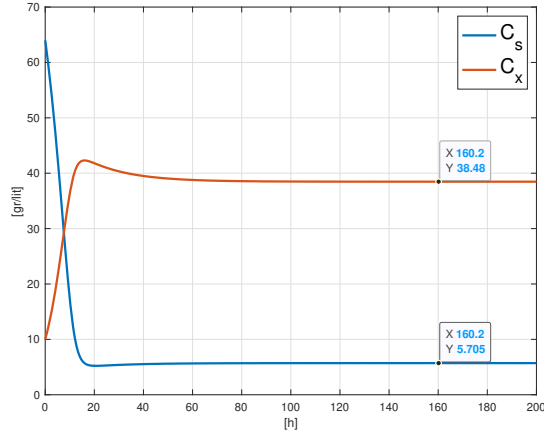


Figura 4. Resultados de simulación considerando las condiciones iniciales  $C_{s0} = 64$ ,  $C_{x0} = 10$  en  $[gr/lt]$ .

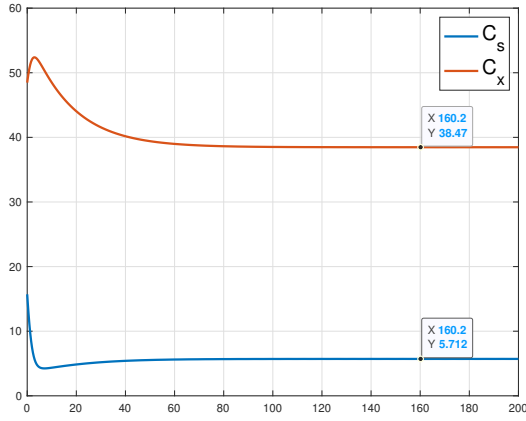


Figura 5. Resultados de simulación considerando las condiciones iniciales  $C_{s0} = 15.71$ ,  $C_{x0} = 48.471$  en  $[gr/lt]$ .

Los valores propios se obtienen empleando el comando `eig` en MATLAB (2020).

Para  $A_{I1}$ , los valores propios son:

$$\sigma_{11} = -0.06; \quad \sigma_{12} = 0.1611 \quad (18)$$

Para la matriz  $A_{I2}$ , los valores propios son:

$$\sigma_{11} = -0.49; \quad \sigma_{12} = -0.06 \quad (19)$$

## 5. RETRATO DE FASE

Se realiza el retrato de fase, empleando el programa `pplane8` en MATLAB (2020), el cual nos da como resultado el gráfico presentado en la Figura 6

## 6. CONCLUSIONES

- A partir de los valores propios presentados en (18) para la matriz  $A_{I1}$ , se observa que el valor de  $\sigma_{12}$  es positivo, lo que implica un equilibrio inestable. Esto refleja que ante una pequeña cantidad positiva

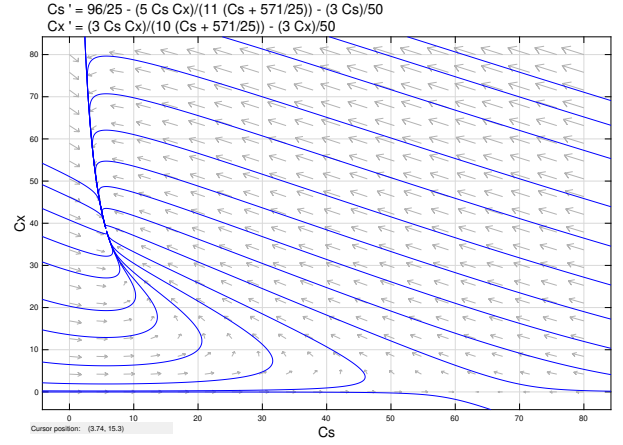


Figura 6. Retrato de fase obtenido con el programa `pplane8` en MATLAB (2020)

de microorganismos, existirá un crecimiento de la población.

- A partir de los valores propios presentados en (19) para la matriz  $A_{I2}$ , se observa que ambos valores propios son negativos, es decir, reflejan un equilibrio asintóticamente estable, lo que explica el comportamiento presentado en las Figuras 4 y Figuras 5. Es decir, cualquier valor empleado para las condiciones iniciales, mayor que cero, presentará una tendencia hacia las concentraciones  $C_{seq} = 5.71$ ,  $C_{xeq} = 38.471$  en  $[gr/lt]$ . Esto a su vez se puede evidenciar en el retrato de fase, donde las líneas que representan la dirección del campo muestran la tendencia hacia el punto  $(C_{seq}, C_{xeq}) = (5.71, 38.471)$ , lo cual refleja y explica los comportamientos obtenidos en las simulaciones y los análisis realizados sobre la linealización y los valores propios asociados.
- En el retrato de fase se puede apreciar que la línea  $C_x = 0$  presenta una inestabilidad, debido a que cualquier cantidad para  $C_x \neq 0$  generan una dinámica en el sistema.
- Para estos resultados no se consideraron los comportamientos para valores negativos en las concentraciones, debido a que no reflejan un caso real para el sistema analizado.

## REFERENCIAS

- Fogler, H. (2016). *Elements of Chemical Reaction Engineering*. Prentice-Hall international series in the physical and chemical engineering sciences. Prentice Hall. URL <https://books.google.com.co/books?id=uQ3rsgeEACAAJ>.
- Gomez, A. (2020). *Simulación bioreactor en matlab, Modelamiento de procesos*. Universidad Nacional de Colombia sede Medellín. URL <https://git.io/JkLNT>.
- MATLAB (2020). *version 9.8.0 (R2020a)*. The MathWorks Inc., Natick, Massachusetts.