

Desarrollo de un Controlador LQG y DMC para la Altura y Dirección de un *Quadcopter*.

Alejandro D.J Gomez F.

Facultad de Minas, Universidad Nacional de Colombia, Sede Medellin

Email: ajgomezf@unal.edu.co

Resumen—En este trabajo se presenta el modelo y análisis del sistema dinámico que representa un *quadcopter* para posteriormente desarrollar un controlador que logre estabilizar la altura y la dirección bajo una referencia asignada. Lo análisis y pruebas del modelo se realizan con el software *Matlab*.

Keywords—*Quadcopter, Control, Drone.*

I. INTRODUCCIÓN

El desarrollo de Drones en la actualidad tiene una gran variedad de aplicaciones en el marco industrial. La necesidad por dominar el espacio aéreo ha llevado a desarrollar diversos dispositivos capaces para movilizarse por este medio generando una gran variedad de aplicaciones.

Los sistemas de vuelo, se caracterizan por presentar diferentes configuraciones que permiten desplazarse en el espacio aéreo, presentando diversas ventajas y desventajas. Una de las grandes necesidades de estos sistemas, es lograr mantener los actuadores o motores que permiten el desplazamiento de los mismos a las velocidades idóneas para lograr controlar las direcciones de vuelo. En nuestro caso, presentamos el desarrollo de un *quadcopter*, un tipo de Dron que se caracteriza por su movimiento omnidireccional en el espacio aéreo, conformado por 4 hélices que le permiten realizar diferentes trayectorias. Nuestro enfoque es desarrollar un controlador predictivo, que permita garantizar el desplazamiento de vuelo y evitar las perturbaciones sobre el sistema.

Basado en [1] y [2] se realiza el modelado matemático de las dinámicas presentes en un *quadcopter*. Se realiza una serie de pruebas con el software *Matlab* para verificar el comportamiento de este sistema.

A. Modelado del sistema Dinámico

La estructura de un *quadcopter* se presenta en la Figura (1) donde se ilustra las variables de posición en el marco de referencia del cuerpo que hacen parte del sistema [2]. Se define ξ y v como los vectores de posición cartesiana del centro de masa y de posición angular respectivamente:

$$\xi = [x \ y \ z]^T \quad v = [\phi \ \theta \ \psi]^T \quad (1)$$

El punto de origen en el marco de referencia del cuerpo del *quadcopter* es el centro de masa del mismo. La posición absoluta respecto a un marco de referencia inercial es definida de la siguiente manera:

$$X = [X \ Y \ Z]^T \quad (2)$$

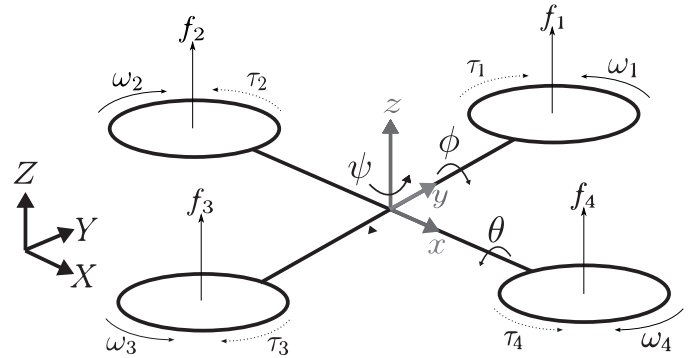


Figura 1: Estructura y variables físicas de un *quadcopter*

En el marco inercial del cuerpo, las velocidades lineales son representadas por $\dot{\xi}$ y las velocidades angulares por \dot{v} . La orientación del *quadcopter* en el espacio es descrito por la matriz de rotación que relaciona el marco de referencia del cuerpo con el marco inercial de referencia:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} c_\theta c_\psi & s_\phi s_\theta c_\psi - c_\phi s_\psi & c_\phi s_\theta c_\psi + s_\phi s_\psi \\ c_\theta s_\psi & s_\phi s_\theta s_\psi + c_\phi c_\psi & c_\phi s_\theta s_\psi - s_\phi c_\psi \\ -s_\theta & s_\phi c_\theta & c_\phi c_\theta \end{bmatrix} \quad (3)$$

Donde $c_\alpha = \cos(\alpha)$ y $s_\alpha = \sin(\alpha)$.

Se asume que el *quadcopter* posee una estructura simétrica de cuatro brazos alineados en el eje x y el eje y en el marco de referencia del cuerpo [3]. Por lo tanto la matriz de inercia del cuerpo rígido \mathbf{I} se define como:

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix} \quad (4)$$

En cuyo caso $I_{xx} = I_{yy}$ [1].

La velocidad angular ω_i del motor i genera una fuerza de empuje f_i en la dirección del eje de rotación. La velocidad angular y aceleración angular también generan torques τ_i alrededor del eje de rotación del motor:

$$f_i = k\omega_i^2 \quad \tau_i = b\omega_i^2 + I_M\dot{\omega}_i \quad (5)$$

Donde k es la constante de empuje, b es la constante de arrastre, e I_M es la inercia del motor. Usualmente los efectos de $\dot{\omega}_i$ son muy pequeños y por lo tanto son despreciados.

La fuerza combinada de los motores generan una fuerza total F en la dirección z del cuerpo. Los torques τ_i torques totales τ_B en cada una de las direcciones angulares en el marco de referencia del cuerpo:

$$F = \sum_{i=1}^4 f_i = k \sum_{i=1}^4 \omega_i^2 \quad \mathbf{F}_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ F \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$\boldsymbol{\tau}_B = \begin{bmatrix} \tau_\phi \\ \tau_\theta \\ \tau_\psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} lk(-\omega_2^2 + \omega_4^2) \\ lk(-\omega_1^2 + \omega_3^2) \\ \sum_{i=1}^4 \tau_i \end{bmatrix} \quad (7)$$

Donde l representa la distancia entre el motor y el centro de masa del *quadcopter*. El *quadcopter* puede ser asumido como un cuerpo rígido [4] y de esta manera las Ecuaciones de Newton-Euler pueden ser usadas para describir su dinámica de posición y movimiento. En el cuerpo rígido, la fuerza requerida para la aceleración de la masa, la fuerza centrífuga, la fuerza de gravedad y el empuje total sobre el cuerpo rígido se establecen en (8):

$$m\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{v} \times (m\dot{\mathbf{x}}) = \mathbf{R}^T \mathbf{G} + \mathbf{F}_B \quad (8)$$

Siendo m la masa del *quadcopter* y \mathbf{G} el vector de gravedad. En el marco de referencia del cuerpo, la aceleración angular de inercia, la fuerza centrípeta, y $\mathbf{\Gamma}$ la fuerza giroscópica son iguales al torque total externo:

$$\mathbf{I}\ddot{\mathbf{v}} + \dot{\mathbf{v}} \times (\mathbf{I}\mathbf{v}) + \mathbf{\Gamma} = \boldsymbol{\tau}_B \quad (9)$$

De las ecuaciones (8) y (9) se desprenden el conjunto de ecuaciones (10) y (11) que definen la dinámica de la velocidad lineal y velocidad angular del sistema respectivamente:

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= \frac{F}{m}(c_\phi s_\theta c_\psi + s_\phi s_\psi) \\ \ddot{y} &= \frac{F}{m}(c_\phi s_\theta s_\psi - s_\phi c_\psi) \\ \ddot{z} &= \frac{F}{m}(c_\phi c_\theta) - g \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\phi} &= \frac{\tau_\phi}{I_{yy}} + \frac{J_R \omega_\Gamma \dot{\theta}}{I_{xx}} + \dot{\theta} \dot{\psi} \left(\frac{I_{yy} - I_{zz}}{I_{xx}} \right) \\ \ddot{\theta} &= \frac{\tau_\theta}{I_{yy}} + \frac{J_R \omega_\Gamma \dot{\phi}}{I_{yy}} + \dot{\phi} \dot{\psi} \left(\frac{I_{zz} - I_{xx}}{I_{yy}} \right) \\ \ddot{\psi} &= \frac{\tau_\psi}{I_{zz}} + \dot{\phi} \dot{\theta} \left(\frac{I_{xx} - I_{yy}}{I_{zz}} \right) \end{aligned} \quad (11)$$

Donde J_R es el momento de inercia del motor, y ω_Γ esta definida definida por:

$$\omega_\Gamma = \omega_1 - \omega_2 + \omega_3 - \omega_4 \quad (12)$$

II. LINEALIZACIÓN Y ANÁLISIS

A. Representación en Variables de Estado

Se observa que el conjunto de ecuaciones (9) y (10) representan un sistema de segundo orden respecto a la posición cartesiana y angular del *quadcopter*. Para el desarrollo del modelo en variables de estado, es necesario tener presente que el conjunto de ecuaciones (9) y (10) no son lineales. Es por ello que se recurre a la linealización para expresar el sistema en la forma:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{X}} &= \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{B}\mathbf{U} \\ \mathbf{Y} &= \mathbf{C}\mathbf{X} + \mathbf{D}\mathbf{U} \end{aligned} \quad (13)$$

Siendo \mathbf{X} los estados del sistema y \mathbf{U} las entradas del mismo. Los estados del sistema estan representados por (14) y las entradas por (15):

$$\mathbf{X} = [\xi \quad v \quad \dot{\xi} \quad \dot{v}]^T \quad (14)$$

$$\mathbf{U} = [\omega_1 \quad \omega_2 \quad \omega_3 \quad \omega_4]^T \quad (15)$$

En la siguiente tabla se muestra los parámetros para el modelo del *quadcopter* seleccionado:

Parámetro	Valor
m	1,8 Kg.
l	0,225 m.
k	$2,980 \cdot 10^{-6} \text{ Kg} \cdot \text{m}.$
b	$1,140 \cdot 10^{-7} \text{ Kg} \cdot \text{m}^2$
I_M	$3,357 \cdot 10^{-5} \text{ Kg} \cdot \text{m}^2.$
$I_{xx} = I_{yy}$	$4,856 \cdot 10^{-3} \text{ Kg} \cdot \text{m}^2.$
I_{zz}	$8,801 \cdot 10^{-3} \text{ Kg} \cdot \text{m}^2.$
J_R	$0,5 \cdot 10^{-5} \text{ Kg} \cdot \text{m}^2.$
g	$9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

Adicionalmente es necesario seleccionar un punto de operación específico para la linealización. Por tal razón, al igualar el conjunto de ecuaciones (9) y (10) al vector cero, se identifican los puntos estacionarios o de equilibrio del sistema en los estados y las entradas, para obtener las condiciones (16) y (17) respectivamente.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 0 & \dot{y} &= 0 & \dot{z} &= 0 \\ & & \phi &= 0 & \theta &= 0 \\ \dot{\phi} &= 0 & \dot{\theta} &= 0 & \dot{\psi} &= 0 \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^4 \omega_i^2 &= \frac{mg}{k} \\ \omega_1 &= \omega_2 = \omega_3 = \omega_4 \end{aligned} \quad (17)$$

De esta manera se interpreta que el *quadcopter* estará en una posición fija si la entrada del sistema posee la misma velocidad y logran compensar la fuerza gravitacional que se ejerce sobre este, sin importar la posición cartesiana del centro

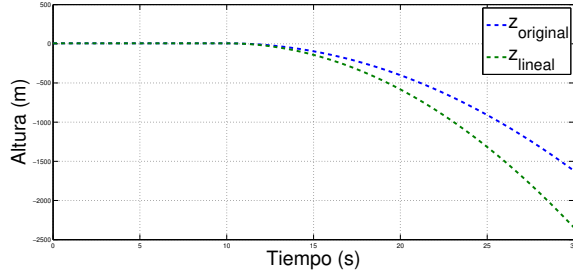


Figura 2: Comparativa entre el modelo lineal y el modelo original para ψ .

de masa y su posición angular ψ . De (17) Se debe cumplir para cada entrada (18).

$$\omega_i = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{mg}{k}} \quad i \in \{1, 2, 3, 4\} \quad (18)$$

Debido al interés en conocer y controlar la altura del *quadcopter* como primer acercamiento, se seleccionan las salidas del sistema: el vector ξ y la posición angular ψ con los siguientes valores:

$$\xi = [0 \quad 0 \quad 10]^T; \quad \psi = 0; \quad (19)$$

Se identifica entonces los valores asignados en (19) como valores seleccionados para el punto de equilibrio del sistema.

B. Comparación entre el modelo lineal y no lineal.

Realizando la simulación en el software *Matlab* se realiza un *script* para realizar el proceso de linealización con los comandos *jacobian* y *eval*.

C. Modelo IIO.

El modelo IIO (Increment Input Output) es una representación de los sistemas en variables de estado de la forma:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_i(k+1) &= \mathbf{A}_i \mathbf{X}_i(k) + \mathbf{B}_i \Delta \mathbf{U}(k) \\ \mathbf{Y}(k) &= \mathbf{C}_i \mathbf{X}_i(k) \end{aligned} \quad (20)$$

Donde:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_i &= \begin{bmatrix} \mathbf{Y}(k-1) \\ \Delta \mathbf{X}_O(k) \end{bmatrix} \\ \mathbf{A}_i &= \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{C}_O \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_O \end{bmatrix} \quad \mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{B}_O \end{bmatrix} \quad \mathbf{C}_i = [\mathbf{I} \quad \mathbf{C}_O] \end{aligned} \quad (21)$$

D. Observabilidad y Controlabilidad.

Se realiza un análisis de controlabilidad con la ayuda del comando *ctrb*. En este resultado, se observa que el sistema es controlable, dado a que la matriz de controlabilidad tiene el mismo rango de la matriz \mathbf{A} :

$$\text{rank}(\text{ctrb}(\mathbf{A}, \mathbf{B})) = \text{rank}(\mathbf{A}) = 12$$

Para la prueba de observabilidad, se emplea el comando *obsv*. En este resultado, se tiene en cuenta la selección de salidas, que debe incluir la cantidad de estados que no están involucrados para el conjunto de ecuaciones dadas en (10) y (11), para el caso, x , y y z . Se cumple entonces:

$$\text{rank}(\text{obsv}(\mathbf{A}, \mathbf{B})) = \text{rank}(\mathbf{A}) = 12$$

E. Prueba PBH.

Con la prueba PBH se determina los modos controlables y observables del sistema. Se sabe que el par de matrices \mathbf{A} y \mathbf{B} son controlables si y solo si no existe un vector propio $\mathbf{q}_i \neq 0$ de \mathbf{A}^T que sea perpendicular a \mathbf{B} . Se emplea el comando *eig(A')* y se obtiene que sus vectores propios \mathbf{q}_i son diferentes a cero, adicionalmente que ninguno es perpendicular a \mathbf{B} . No existe entonces un vector propio de \mathbf{A}^T que sea perpendicular a \mathbf{B} y por lo tanto todos sus modos son controlables.

Se dice que el par \mathbf{A} y \mathbf{C} es no observable si existe un vector propio $\mathbf{p}_i \neq 0$ de \mathbf{A} tal que $\mathbf{A}\mathbf{p} = \lambda\mathbf{p}$ y $\mathbf{C}\mathbf{p}_i = 0$. Empleando el comando *eig(A)*, se obtiene que los vectores propios \mathbf{q}_i son diferentes de cero, adicionalmente que ninguno satisface $\mathbf{C}\mathbf{p}_i = 0$. Por lo tanto todos sus modos son observables.

REFERENCIAS

- [1] S. L. W. G. M. Hoffmann, H. Huang and C. J. Tomlin, "Quadrotor helicopter flight dynamics and control: Theory and experiment," *Proceedings of the AIAA Guidance, Navigation and Control Conference and Exhibit*, 2007.
- [2] P. Adigbli, C. Grand, J.-B. Mouret, and S. Doncieux, "Nonlinear attitude and position control of a micro quadrotor using sliding mode and backstepping techniques," in *7th European Micro Air Vehicle Conference (MAV07)*, Toulouse, 2007, pp. 1-9.
- [3] M. Bangura and R. Mahony, "Nonlinear dynamic modeling for high performance control of a quadrotor," *Australasian conference on robotics and automation*, pp. 1-10, 2012.
- [4] T. Luukkonen, "Modelling and control of quadcopter," *Aalto University, School of Science*, pp. 1-10, August 22, 2011.