

# Planteamiento de control predictivo para la altura y dirección de un *Quadcopter*.

Alejandro D.J Gomez F.

Facultad de Minas, Universidad Nacional de Colombia, Sede Medellin

Email: ajgomezf@unal.edu.co

**Resumen**—En este trabajo se presenta el modelo y análisis del sistema dinámico que representa un *quadcopter* para posteriormente desarrollar un controlador que logre estabilizar la altura y la dirección bajo una referencia asignada. Lo análisis y pruebas del modelo se realizan con el software *Matlab*.

**Keywords**—*Quadcopter, Control, Drone.*

## I. INTRODUCCIÓN

El desarrollo de Drones en la actualidad tiene una gran variedad de aplicaciones en el marco industrial. La necesidad por dominar el espacio aéreo ha llevado a desarrollar diversos dispositivos capaces para movilizarse por este medio generando una gran variedad de aplicaciones.

Los sistemas de vuelo, se caracterizan por presentar diferentes configuraciones que permiten desplazarse en el espacio aéreo, presentando diversas ventajas y desventajas. Una de las grandes necesidades de estos sistemas, es lograr mantener los actuadores o motores que permiten el desplazamiento de los mismos a las velocidades idóneas para lograr controlar las direcciones de vuelo. En nuestro caso, presentamos el desarrollo de un *quadcopter*, un tipo de *Dron* que se caracteriza por su movimiento omnidireccional en el espacio aéreo, conformado por 4 rotores con hélices que le permiten realizar diferentes trayectorias. Nuestro enfoque es desarrollar un controlador predictivo, que permita garantizar el desplazamiento de vuelo y evitar las perturbaciones sobre el sistema.

Basado en [1] y [2] se realiza el modelado matemático de las dinámicas presentes en un *quadcopter*. Se realiza una serie de pruebas con el software *Matlab* para verificar el comportamiento de este sistema.

### A. Modelado del sistema Dinámico

La estructura de un *quadcopter* se presenta en la Figura (1) donde se ilustra las variables de posición en el marco de referencia del cuerpo que hacen parte del sistema [2]. Se define  $\xi$  y  $v$  como los vectores de posición cartesiana del centro de masa y de posición angular respectivamente:

$$\xi = [x \ y \ z]^T \quad v = [\phi \ \theta \ \psi]^T \quad (1)$$

El punto de origen en el marco de referencia del cuerpo del *quadcopter* es el centro de masa del mismo. La posición absoluta respecto a un marco de referencia inercial es definida de la siguiente manera:

$$X = [X \ Y \ Z]^T \quad (2)$$

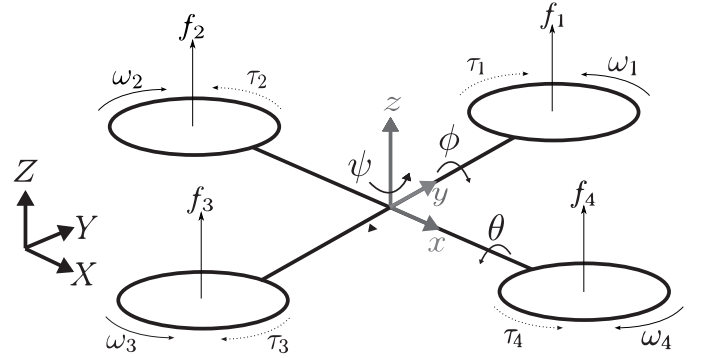


Figura 1: Estructura y variables físicas de un *quadcopter*

En el marco inercial del cuerpo, las velocidades lineales son representadas por  $\dot{\xi}$  y las velocidades angulares por  $\dot{v}$ . La orientación del *quadcopter* en el espacio es descrito por la matriz de rotación que relaciona el marco de referencia del cuerpo con el marco inercial de referencia:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} c_\theta c_\psi & s_\phi s_\theta c_\psi - c_\phi s_\psi & c_\phi s_\theta c_\psi + s_\phi s_\psi \\ c_\theta s_\psi & s_\phi s_\theta s_\psi + c_\phi c_\psi & c_\phi s_\theta s_\psi - s_\phi c_\psi \\ -s_\theta & s_\phi c_\theta & c_\phi c_\theta \end{bmatrix} \quad (3)$$

Donde  $c_\alpha = \cos(\alpha)$  y  $s_\alpha = \sin(\alpha)$ .

Se asume que el *quadcopter* posee una estructura simétrica de cuatro brazos alineados en el eje  $x$  y el eje  $y$  en el marco de referencia del cuerpo [3]. Por lo tanto la matriz de inercia del cuerpo rígido  $\mathbf{I}$  se define como:

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix} \quad (4)$$

En cuyo caso  $I_{xx} = I_{yy}$  [1].

La velocidad angular  $\omega_i$  del motor  $i$  genera una fuerza de empuje  $f_i$  en la dirección del eje de rotación. La velocidad angular y aceleración angular también generan torques  $\tau_i$  alrededor del eje de rotación del motor:

$$f_i = k\omega_i^2 \quad \tau_i = b\dot{\omega}_i^2 + I_M\dot{\omega}_i \quad (5)$$

Donde  $k$  es la constante de empuje,  $b$  es la constante de arrastre, e  $I_M$  es la inercia del motor. Usualmente los efectos de  $\dot{\omega}_i$  son muy pequeños y por lo tanto son despreciados.

La fuerza combinada de los motores generan una fuerza total  $F$  en la dirección  $z$  del cuerpo. Los torques  $\tau_i$  torques totales  $\tau_B$  en cada una de las direcciones angulares en el marco de referencia del cuerpo:

$$F = \sum_{i=1}^4 f_i = k \sum_{i=1}^4 \omega_i^2 \quad \mathbf{F}_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ F \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$\boldsymbol{\tau}_B = \begin{bmatrix} \tau_\phi \\ \tau_\theta \\ \tau_\psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} lk(-\omega_2^2 + \omega_4^2) \\ lk(-\omega_1^2 + \omega_3^2) \\ \sum_{i=1}^4 \tau_i \end{bmatrix} \quad (7)$$

Donde  $l$  representa la distancia entre el motor y el centro de masa del *quadcopter*. El *quadcopter* puede ser asumido como un cuerpo rígido [4] y de esta manera las Ecuaciones de Newton-Euler pueden ser usadas para describir su dinámica de posición y movimiento. En el cuerpo rígido, la fuerza requerida para la aceleración de la masa, la fuerza centrífuga, la fuerza de gravedad y el empuje total sobre el cuerpo rígido se establecen en (8):

$$m\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{v} \times (m\dot{\mathbf{x}}) = \mathbf{R}^T \mathbf{G} + \mathbf{F}_B \quad (8)$$

Siendo  $m$  la masa del *quadcopter* y  $\mathbf{G}$  el vector de gravedad. En el marco de referencia del cuerpo, la aceleración angular de inercia, la fuerza centrípeta, y  $\mathbf{\Gamma}$  la fuerza giroscópica son iguales al torque total externo:

$$\mathbf{I}\ddot{\mathbf{v}} + \dot{\mathbf{v}} \times (\mathbf{I}\mathbf{v}) + \mathbf{\Gamma} = \boldsymbol{\tau}_B \quad (9)$$

De las ecuaciones (8) y (9) se desprenden el conjunto de ecuaciones (10) y (11) que definen la dinámica de la velocidad lineal y velocidad angular del sistema respectivamente:

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= \frac{F}{m}(c_\phi s_\theta c_\psi + s_\phi s_\psi) \\ \ddot{y} &= \frac{F}{m}(c_\phi s_\theta s_\psi - s_\phi c_\psi) \\ \ddot{z} &= \frac{F}{m}(c_\phi c_\theta) - g \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\phi} &= \frac{\tau_\phi}{I_{yy}} + \frac{J_R \omega_\Gamma \dot{\theta}}{I_{xx}} + \dot{\theta} \dot{\psi} \left( \frac{I_{yy} - I_{zz}}{I_{xx}} \right) \\ \ddot{\theta} &= \frac{\tau_\theta}{I_{yy}} + \frac{J_R \omega_\Gamma \dot{\phi}}{I_{yy}} + \dot{\phi} \dot{\psi} \left( \frac{I_{zz} - I_{xx}}{I_{yy}} \right) \\ \ddot{\psi} &= \frac{\tau_\psi}{I_{zz}} + \dot{\phi} \dot{\theta} \left( \frac{I_{xx} - I_{yy}}{I_{zz}} \right) \end{aligned} \quad (11)$$

Donde  $J_R$  es el momento de inercia del motor, y  $\omega_\Gamma$  esta definida definida por:

$$\omega_\Gamma = \omega_1 - \omega_2 + \omega_3 - \omega_4 \quad (12)$$

## II. LINEALIZACIÓN Y PUNTO DE EQUILIBRIO

### A. Representación en Variables de Estado

Se observa que el conjunto de ecuaciones (9) y (10) representan un sistema de segundo orden respecto a la posición cartesiana y angular del *quadcopter*. Para el desarrollo del modelo en variables de estado, es necesario tener presente que el conjunto de ecuaciones (9) y (10) no son lineales. Es por ello que se recurre a la linealización para expresar el sistema en la forma:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{X}} &= \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{B}\mathbf{U} \\ \mathbf{Y} &= \mathbf{C}\mathbf{X} \end{aligned} \quad (13)$$

Siendo  $\mathbf{X}$  los estados del sistema y  $\mathbf{U}$  las entradas del mismo. Los estados del sistema están representados por (14) y las entradas por (15):

$$\mathbf{X} = [\xi \quad \mathbf{v} \quad \dot{\xi} \quad \dot{\mathbf{v}}]^T \quad (14)$$

$$\mathbf{U} = [\omega_1 \quad \omega_2 \quad \omega_3 \quad \omega_4]^T \quad (15)$$

En la siguiente tabla se muestra los parámetros para el modelo del *quadcopter* seleccionado:

Parámetro	Valor
$m$	3,5 Kg.
$l$	0,225 m.
$k$	$5,980 \cdot 10^{-5} \text{ Kg} \cdot \text{m}.$
$b$	$1,140 \cdot 10^{-7} \text{ Kg} \cdot \text{m}^2$
$I_M$	$3,357 \cdot 10^{-5} \text{ Kg} \cdot \text{m}^2.$
$I_{xx} = I_{yy}$	$4,856 \cdot 10^{-3} \text{ Kg} \cdot \text{m}^2.$
$I_{zz}$	$8,801 \cdot 10^{-3} \text{ Kg} \cdot \text{m}^2.$
$J_R$	$0,5 \cdot 10^{-5} \text{ Kg} \cdot \text{m}^2.$
$g$	$9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

Adicionalmente es necesario seleccionar un punto de operación específico para la linealización. Por tal razón, al igualar el conjunto de ecuaciones (9) y (10) al vector cero, se identifican los puntos estacionarios o de equilibrio del sistema, obteniendo así las condiciones (16) y (17).

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 0 & \dot{y} &= 0 & \dot{z} &= 0 \\ \phi &= 0 & \theta &= 0 \\ \dot{\phi} &= 0 & \dot{\theta} &= 0 & \dot{\psi} &= 0 \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^4 \omega_i^2 &= \frac{mg}{k} \\ \omega_1 &= \omega_2 = \omega_3 = \omega_4 \end{aligned} \quad (17)$$

De esta manera se interpreta que el *quadcopter* estará en una posición fija si la entrada del sistema posee la misma velocidad y logran compensar la fuerza gravitacional que se ejerce sobre este, sin importar la posición cartesiana del centro de masa y su posición angular  $\psi$ . De (17) Se debe cumplir para cada entrada  $\omega_i$  el valor resultante de (18).

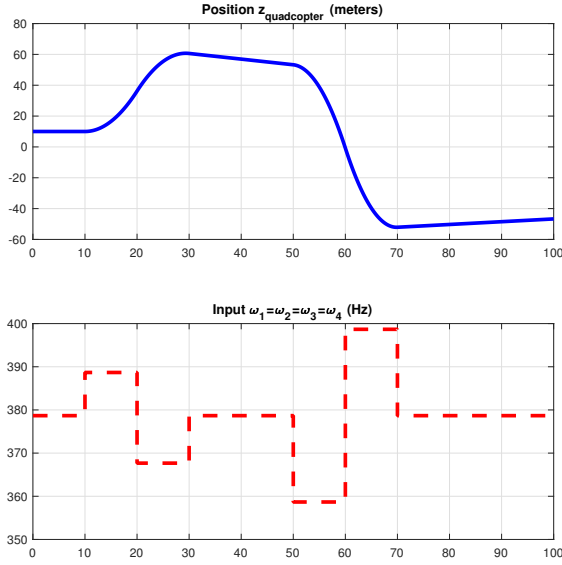


Figura 2: Respuesta del sistema a las variaciones del valor de la entrada  $\omega_i$  para el equilibrio obtenido en la posición  $z$  (altura) del *quadcopter* con  $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = \omega_4$ .

$$\omega_i = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{mg}{k}} \quad i \in \{1, 2, 3, 4\} \quad (18)$$

Debido al interés en conocer y controlar la altura del *quadcopter*, se seleccionan las salidas del sistema: el vector  $\xi$  y la posición angular  $\psi$  con los siguientes valores:

$$\xi = [0 \quad 0 \quad 10]^T; \quad \psi = 0; \quad (19)$$

Se identifica (19) como valores seleccionados para el punto de equilibrio del sistema. En la Figura (2) se presenta la respuesta del sistema a las variaciones de la entrada alrededor del punto de equilibrio. La linealización se realiza con los comandos `jacobian` y `eval` en el software *Matlab* con el punto de equilibrio obtenido a partir de las expresiones (16), (18), (19).

#### B. Restricciones y planteamiento de control predictivo.

Si analizamos el comportamiento del sistema ante la entrada  $U$  definida en (15), podemos observar que en este modelo  $U$  podría calcularse con cualquier valor, algo que no es posible en un modelo real. Es por ello que asignaremos las siguientes restricciones para la entrada teniendo presente las limitaciones del sistema basándonos en el comportamiento de la Figura (5).

Por lo tanto, definiremos que para el sistema, las restricciones presentes serán:

Variable	Restricciones
$\omega_i$	$380Hz < \omega_i < 700Hz$ .
$\Delta\omega_i$	$-50Hz < \Delta\omega_i < 50Hz$ .

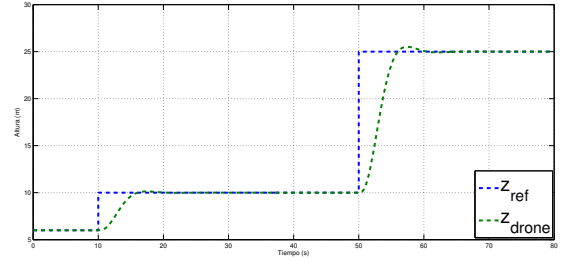


Figura 3: Respuesta del controlador MPC sin restricciones para cambios en  $z$ .

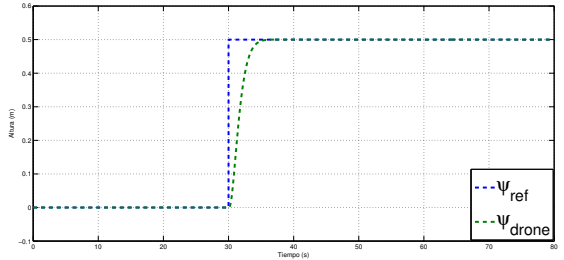


Figura 4: Respuesta del sistema con el controlador LQR en el valor  $\psi$  de la salida.

Basándonos en la función de costo para el sistema:

$$V(y, \omega_i) = \sum_{i=0}^{H_p} \|Y - Y_{ref}\|_Q^2 + \sum_{i=H_w}^{H_u-1} \|U\|_R^2 \quad (20)$$

obtenemos como resultado el comportamiento representado por la Figura (3) y la Figura (4) implementado sobre el sistema lineal previamente calculado y alrededor del punto de equilibrio y discretizado con un tiempo de muestreo de de 0.1s empleando el `mpcTools` de *MATLAB*. Los parametros del controlador se determinaron de la siguiente manera:

Variable	Valor
$Q$	0,1
$R$	0,0005
$H_p$	10s
$H_w$	0
$H_u$	$H_p$

En la figura (5) se presenta el comportamiento del sistema para un controlador LQG definido, con la finalidad de establecer algunas comparativas respecto al controlador anterior.

#### C. Conclusiones.

De los resultados obtenidos, es claro apreciar que la respuesta obtenida por los controladores LQR, MPC y MPC con restricciones, presentan una respuesta deseada del sistema bajo condiciones específicas. El controlador MPC en sus dos versiones, garantiza un tiempo de respuesta idóneo, siempre y cuando no existan cambios simultáneos entre  $z$  y  $\psi$ . El

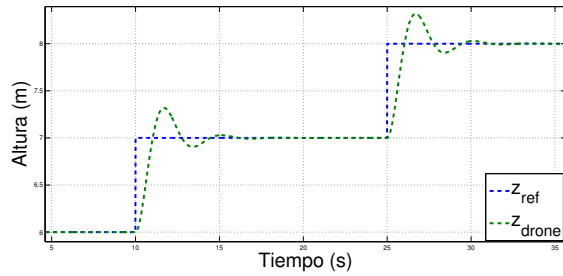


Figura 5: Respuesta del sistema con el controlador LQR en el valor  $z$  de la salida.

inconveniente presente es la cantidad de operaciones que se podrían llevar a cabo para las simulaciones, lo cual podría requerir un tiempo superior al tiempo del muestreo para calcular la correcta entrada, lo cual reduce el tiempo de respuesta de la planta en las posibles perturbaciones y cambios de referencia que podrían afectar en una posible implementación para navegar. Se puede ver que la respuesta del sistema es mejor con controlador MPC pues podría representar menos sobrepicos y una mejor amortiguación en la respuesta ante las perturbaciones y en el tiempo estimado para la simulación.

La finalidad de este estudio es poder continuar con estos resultados en una siguiente fase con una real implementación a través de un sistema embebido, desacoplando la necesidad de un sistema de computo y un entorno de desarrollo como lo es MATLAB, que permita corroborar las simulaciones realizadas sobre un sistema real. El ideal de este trabajo es presentar las bases para establecer los principios de control mínimos y necesarios para garantizar la estabilidad del quadcopter, en su operación alrededor de un punto de equilibrio.

Los retos a enfrentar con una posible continuación de este trabajo, sera los tiempos de calculo para hacer las posibles predicciones propias del controlador MPC inferiores al tiempo de muestreo. Se puede apreciar que la misma implementación del sistema MPC brinda una realimentación de estados mucho mas efectiva que la implementación LQR, lo que puede presentar beneficios sobre las posibles perturbaciones.

#### REFERENCIAS

- [1] S. L. W. G. M. Hoffmann, H. Huang and C. J. Tomlin, "Quadrotor helicopter flight dynamics and control: Theory and experiment," *Proceedings of the AIAA Guidance, Navigation and Control Conference and Exhibit*, 2007.
- [2] P. Adigbli, C. Grand, J.-B. Mouret, and S. Doncieux, "Nonlinear attitude and position control of a micro quadrotor using sliding mode and backstepping techniques," in *7th European Micro Air Vehicle Conference (MAV07)*, Toulouse, 2007, pp. 1–9.
- [3] M. Bangura and R. Mahony, "Nonlinear dynamic modeling for high performance control of a quadrotor," *Australasian conference on robotics and automation*, pp. 1–10, 2012.
- [4] T. Luukkainen, "Modelling and control of quadcopter," *Aalto University, School of Science*, pp. 1–10, August 22, 2011.