Slides: https://tkeshwrf.gensparkspace.com/

Unidad 2: Solución de Ecuaciones No Lineales - Clase 3

En esta clase, exploraremos cómo encontrar las raíces de ecuaciones no lineales, es decir, los valores de x para los cuales una función f(x) es igual a cero (f(x)=0). Discutiremos conceptos fundamentales como la **convergencia** y **estabilidad** de los métodos numéricos, y luego nos adentraremos en métodos específicos, clasificándolos en **métodos de intervalo** y **métodos abiertos**.

Conceptos de Convergencia y Estabilidad de Métodos

Cuando utilizamos métodos numéricos para encontrar la solución a un problema, es crucial entender si el método se acercará a la respuesta correcta y si será robusto ante pequeñas perturbaciones.

- **Convergencia**: Se refiere a la propiedad de un método numérico de que sus iteraciones sucesivas se aproximen cada vez más a la solución verdadera del problema. En el contexto de encontrar raíces, un método converge si la secuencia de aproximaciones x0,x1,x2,… se acerca al valor de la raíz r a medida que el número de iteraciones k tiende a infinito, es decir, limk→∞xk=r. La **velocidad de convergencia** indica qué tan rápido se acerca la aproximación a la solución.
    - **Convergencia Lineal**: El error en una iteración es proporcional al error de la iteración anterior.
    - **Convergencia Cuadrática**: El error en una iteración es proporcional al cuadrado del error de la iteración anterior, lo que significa una convergencia mucho más rápida.
- **Estabilidad**: Se refiere a la sensibilidad del método numérico a pequeñas variaciones en los datos de entrada o a errores de redondeo durante los cálculos. Un método es **estable** si pequeños cambios en la entrada producen solo pequeños cambios en la salida. Si un pequeño cambio en la entrada puede llevar a un gran cambio en la salida, el método es **inestable**. La estabilidad es crucial para garantizar que los resultados obtenidos sean fiables y no estén excesivamente influenciados por imprecisiones inherentes a la aritmética de punto flotante.

Métodos de Intervalo

Los métodos de intervalo requieren que se especifique un intervalo [a,b] donde se sabe que la raíz existe (es decir, f(a) y f(b) tienen signos opuestos, lo que implica que la función cruza el eje x dentro del intervalo, si f es continua). Estos métodos garantizan la convergencia, aunque a menudo de forma más lenta.

Método de Bisección

El **método de bisección** es el más simple y robusto de los métodos de intervalo. Se basa en el Teorema del Valor Intermedio. Si una función continua f(x) tiene signos opuestos en los extremos de un intervalo [a,b], entonces existe al menos una raíz en ese intervalo. El método consiste en dividir repetidamente el intervalo a la mitad y seleccionar el subintervalo donde la función cambia de signo.

Formulación Matemática: Dado un intervalo [a,b] tal que $f(a)\cdot f(b)<0$:

1. Calcula el punto medio: $c=2a+b$.
2. Evalúa f(c).
3. Si $f(a)\cdot f(c)<0$, la raíz está en [a,c]. Haz $b=c$.
4. Si $f(c)\cdot f(b)<0$, la raíz está en [c,b]. Haz $a=c$.
5. Si $f(c)=0$, c es la raíz.

El proceso se repite hasta que el tamaño del intervalo sea menor que una tolerancia predefinida o hasta alcanzar un número máximo de iteraciones.

Pseudocódigo:

```
FUNCION Biseccion(f, a, b, tol, max_iter):
  SI f(a) * f(b) >= 0 ENTONCES
    RETORNAR "El método de bisección puede no encontrar una raíz en este intervalo."
  FIN SI

  iter = 0
  m = 0

  MIENTRAS (b - a) / 2 > tol Y iter < max_iter HACER
    m = (a + b) / 2
    SI f(m) == 0 ENTONCES
      RETORNAR m
    FIN SI
    SI f(a) * f(m) < 0 ENTONCES
      b = m
    SINO
      a = m
    FIN SI
    iter = iter + 1
  FIN MIENTRAS
  RETORNAR (a + b) / 2
FIN FUNCION
```

Ejercicio de Aplicación (Ejemplo): Encuentra la raíz de $f(x)=x3-x-1$ en el intervalo [1,2] con una tolerancia de 0.05.

Iteración	a	b	c=(a+b)/2	f(a)	f(b)	f(c)	Nuevo Intervalo
0	1.0000	2.0000	-	-1.0000	5.0000	-	[1.0000,2.0000]
1	1.0000	2.0000	1.5000	-1.0000	5.0000	0.8750	[1.0000,1.5000]
2	1.0000	1.5000	1.2500	-1.0000	0.8750	-0.2969	[1.2500,1.5000]
3	1.2500	1.5000	1.3750	-0.2969	0.8750	0.2246	[1.2500,1.3750]
4	1.2500	1.3750	1.3125	-0.2969	0.2246	-0.05156	[1.3125,1.3750]

Exportar a Hojas de cálculo

El tamaño del intervalo en la iteración 4 es $(1.3750-1.3125)/2=0.03125$, que es menor que la tolerancia de 0.05. La raíz aproximada es 1.34375 (punto medio del último intervalo). La raíz real es aproximadamente 1.3247.

Método de la Falsa Posición (Regula Falsi)

El **método de la falsa posición** es una mejora del método de bisección. En lugar de simplemente tomar el punto medio, utiliza una línea recta que une los puntos $(a,f(a))$ y $(b,f(b))$ y encuentra la intersección de esta línea con el eje x. Este punto de intersección se utiliza como la nueva aproximación de la raíz. Generalmente, converge más rápido que la bisección, pero aún mantiene la garantía de convergencia al ser un método de intervalo.

Formulación Matemática: Dado un intervalo $[a,b]$ tal que $f(a)\cdot f(b)<0$:

1. Calcula la nueva aproximación c usando la fórmula: $c=b-f(b)-f(a)f(b)(b-a)$ (Esta fórmula se obtiene al encontrar la intersección con el eje X de la recta que pasa por $(a,f(a))$ y $(b,f(b))$).
2. Si $f(a)\cdot f(c)<0$, la raíz está en $[a,c]$. Haz $b=c$.
3. Si $f(c)\cdot f(b)<0$, la raíz está en $[c,b]$. Haz $a=c$.
4. Si $f(c)=0$, c es la raíz.

El proceso se repite hasta que $|f(c)|$ sea menor que una tolerancia o hasta alcanzar un número máximo de iteraciones.

Pseudocódigo:

```
FUNCION FalsaPosicion(f, a, b, tol, max_iter):
   SI f(a) * f(b) >= 0 ENTONCES
      RETORNAR "El método de falsa posición puede no encontrar una raíz en este
intervalo."
   FIN SI
```

```
  iter = 0
  m = 0

  MIENTRAS iter < max_iter HACER
    m = b - (f(b) * (b - a)) / (f(b) - f(a))
    SI ABS(f(m)) < tol ENTONCES
      RETORNAR m
    FIN SI
    SI f(a) * f(m) < 0 ENTONCES
      b = m
    SINO
      a = m
    FIN SI
    iter = iter + 1
  FIN MIENTRAS
  RETORNAR m
FIN FUNCION
```

Ejercicio de Aplicación (Ejemplo): Encuentra la raíz de f(x)=x3−x−1 en el intervalo [1,2] con una tolerancia para f(x) de 0.001.

Iteración	a	b	f(a)	f(b)	c=b−f(b)−f(a)f(b)(b−a)	f(c)	Nuevo Intervalo
0	1.0000	2.0000	-1.0000	5.0000	-	-	[1.0000,2.0000]
1	1.0000	2.0000	-1.0000	5.0000	1.1667	-0.5787	[1.1667,2.0000]
2	1.1667	2.0000	-0.5787	5.0000	1.2531	-0.2289	[1.2531,2.0000]
3	1.2531	2.0000	-0.2289	5.0000	1.2995	-0.0827	[1.2995,2.0000]
4	1.2995	2.0000	-0.0827	5.0000	1.3168	-0.0290	[1.3168,2.0000]
5	1.3168	2.0000	-0.0290	5.0000	1.3229	-0.0101	[1.3229,2.0000]
6	1.3229	2.0000	-0.0101	5.0000	1.3245	-0.0035	[1.3245,2.0000]
7	1.3245	2.0000	-0.0035	5.0000	1.3250	-0.0012	[1.3250,2.0000]

Exportar a Hojas de cálculo

La aproximación es 1.3250, y ∣f(1.3250)∣≈0.0012, que es cercano a la tolerancia.

Métodos Abiertos

Los métodos abiertos no requieren un intervalo que encierre la raíz, sino una o más **aproximaciones iniciales** a la raíz. Estos métodos pueden converger mucho más rápido que los métodos de intervalo, pero **no garantizan la convergencia**; pueden divergir si la aproximación inicial no es lo suficientemente cercana a la raíz.

Método de Iteración de Punto Fijo

El **método de iteración de punto fijo** (o iteración simple) transforma la ecuación $f(x)=0$ en una forma equivalente $x=g(x)$. La raíz de $f(x)=0$ es un **punto fijo** de $g(x)$. El método consiste en tomar una aproximación inicial $x0$ y generar una secuencia de aproximaciones usando $xk+1=g(xk)$.

Formulación Matemática: Dada una función $f(x)=0$, reescribe como $x=g(x)$. La iteración es $xk+1=g(xk)$. **Criterio de Convergencia:** El método converge si $|g'(x)|<1$ en un intervalo que contiene la raíz y la aproximación inicial. Cuanto menor sea $|g'(x)|$, más rápida será la convergencia.

Pseudocódigo:

```
FUNCION PuntoFijo(g, x0, tol, max_iter):
    iter = 0
    x_anterior = x0
    x_actual = 0

    MIENTRAS iter < max_iter HACER
        x_actual = g(x_anterior)
        SI ABS(x_actual - x_anterior) < tol ENTONCES
            RETORNAR x_actual
        FIN SI
        x_anterior = x_actual
        iter = iter + 1
    FIN MIENTRAS
    RETORNAR x_actual
FIN FUNCION
```

Ejercicio de Aplicación (Ejemplo): Encuentra la raíz de $f(x)=x3-x-1=0$. Podemos reescribir esta ecuación de varias formas, por ejemplo:

1. $x=x3-1 \Rightarrow g1(x)=x3-1$
2. $x=x2-11 \Rightarrow g2(x)=x2-11$
3. $x=3x+1$ $\Rightarrow g3(x)=3x+1$

Probemos con $g3(x)=3x+1$ y $x0=1.5$ con una tolerancia de 0.001. (Notar que para $x\approx1.32$, $|g3'(x)|=|3(x+1)2/31|\approx0.16<1$, lo que sugiere convergencia).

Iteración	xk	xk+1=3xk+1	∣xk+1−xk∣
0	1.500000	-	-
1	1.500000	1.357209	0.142791
2	1.357209	1.331003	0.026206
3	1.331003	1.326085	0.004918
4	1.326085	1.325164	0.000921

La aproximación es 1.325164. El error es menor a 0.001.

Método de Newton-Raphson

El **método de Newton-Raphson** es uno de los métodos abiertos más potentes y ampliamente utilizados debido a su rápida convergencia (cuadrática, bajo ciertas condiciones). Requiere el cálculo de la derivada de la función.

Formulación Matemática: La fórmula de iteración se deriva de la aproximación de la función por su tangente en un punto dado: xk+1=xk−f′(xk)f(xk) Donde f′(xk) es la derivada de f(x) evaluada en xk.

Criterio de Convergencia: Converge rápidamente si la aproximación inicial x0 está lo suficientemente cerca de la raíz y f′(x) no es cero o muy pequeño cerca de la raíz.

Pseudocódigo:

```
FUNCION NewtonRaphson(f, df, x0, tol, max_iter):
   iter = 0
   x_actual = x0

   MIENTRAS iter < max_iter HACER
      fx = f(x_actual)
      dfx = df(x_actual)

      SI ABS(dfx) < 1e-9 ENTONCES  // Evitar división por cero o por un número muy
pequeño
         RETORNAR "Error: Derivada cercana a cero. Posible problema de convergencia."
      FIN SI

      x_siguiente = x_actual - fx / dfx

      SI ABS(x_siguiente - x_actual) < tol ENTONCES
         RETORNAR x_siguiente
      FIN SI

      x_actual = x_siguiente
      iter = iter + 1
   FIN MIENTRAS
```

```
    RETORNAR x_actual
FIN FUNCION
```

Ejercicio de Aplicación (Ejemplo): Encuentra la raíz de $f(x)=x^3-x-1=0$ usando Newton-Raphson. Entonces $f'(x)=3x^2-1$. Usa $x_0=1.5$ y una tolerancia de 0.001.

Iteración	x_k	$f(x_k)=x_k^3-x_k-1$	$f'(x_k)=3x_k^2-1$	$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$	$\lvert x_{k+1}-x_k\rvert$
0	1.500000	0.875000	5.750000	-	-
1	1.500000	0.875000	5.750000	1.347826	0.152174
2	1.347826	0.100994	4.453303	1.325299	0.022527
3	1.325299	0.002013	4.283307	1.324718	0.000581

La aproximación es 1.324718. El error es menor a 0.001. La convergencia es notablemente más rápida que los métodos anteriores.

Método de la Secante

El **método de la secante** es una alternativa al método de Newton-Raphson cuando es difícil o imposible calcular la derivada de $f(x)$. En lugar de usar la tangente, aproxima la derivada usando una diferencia finita basada en dos puntos anteriores.

Formulación Matemática: La derivada $f'(x_k)$ se aproxima por la pendiente de la secante que une $(x_{k-1},f(x_{k-1}))$ y $(x_k,f(x_k))$: $f'(x_k)\approx\frac{f(x_k)-f(x_{k-1})}{x_k-x_{k-1}}$ Sustituyendo esto en la fórmula de Newton-Raphson, obtenemos: $x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)(x_k-x_{k-1})}{f(x_k)-f(x_{k-1})}$ Este método requiere dos aproximaciones iniciales, x_0 y x_1.

Criterio de Convergencia: La convergencia es superlineal (más rápida que lineal, pero más lenta que cuadrática), generalmente de orden 1.618 (número áureo). Al igual que Newton-Raphson, no garantiza la convergencia y puede divergir si las aproximaciones iniciales no son buenas.

Pseudocódigo:

```
FUNCION Secante(f, x0, x1, tol, max_iter):
    iter = 0
    x_prev = x0
    x_curr = x1
    x_next = 0

    MIENTRAS iter < max_iter HACER
        fx_prev = f(x_prev)
        fx_curr = f(x_curr)

        SI ABS(fx_curr - fx_prev) < 1e-9 ENTONCES // Evitar división por cero o muy pequeño
            RETORNAR "Error: Denominador cercano a cero. Posible problema."
        FIN SI
```

```
        x_next = x_curr - (fx_curr * (x_curr - x_prev)) / (fx_curr - fx_prev)

        SI ABS(x_next - x_curr) < tol ENTONCES
            RETORNAR x_next
        FIN SI

        x_prev = x_curr
        x_curr = x_next
        iter = iter + 1
    FIN MIENTRAS
    RETORNAR x_next
FIN FUNCION
```

Ejercicio de Aplicación (Ejemplo): Encuentra la raíz de f(x)=x3−x−1=0 usando el método de la Secante. Usa x0=1 y x1=2 con una tolerancia de 0.001.

Iteración	xk−1	xk	f(xk−1)	f(xk)	xk+1=xk−f(xk)−f(xk−1)f(xk)(xk−xk−1)	∣xk+1−xk∣
0	1.000000	2.000000	-1.000000	5.000000	-	-
1	1.000000	2.000000	-1.000000	5.000000	1.166667	0.833333
2	2.000000	1.166667	5.000000	-0.578704	1.314815	0.148148
3	1.166667	1.314815	-0.578704	-0.091176	1.324838	0.010023
4	1.314815	1.324838	-0.091176	0.002824	1.324718	0.000120

La aproximación es 1.324718. El error es menor a 0.001. Se puede observar una convergencia casi tan rápida como Newton-Raphson.

Pregunta para reflexionar: ¿Cuáles son las ventajas y desventajas de los métodos de intervalo en comparación con los métodos abiertos para la solución de ecuaciones no lineales? Piensa en términos de garantía de convergencia, velocidad de convergencia y requerimientos de información sobre la función.