Fundamentos Matemáticos aplicados à Estatística: Teoria dos Conjuntos

Aldenir Martins da Silva Junior, Dylene Agda Souza de Barros
Faculdade de Matemática - Universidade Federal de Uberlândia
aldenir_ju@hotmail.com, dylene@ufu.br

Objetivo

O objetivo do trabalho foi abordar conceitos da teoria elementar dos conjuntos, assim como de sigma-álgebra e medidas e aplicá-los à estatística, em axiomas de probabilidade . Durante um ano, analisou-se classe de funções com valores reais definidas num espaço mensurável, relações entre conjuntos e funções, a Algebra de Borel e análise combinatória. Verificou-se uma forte relação entre as elementos estudados.

Metodologia

A metodologia aplicada baseou-se no estudo da bibliografia pelo orientando dos livros (Curso de análise e A first course in probability) juntamente com anotações e realização de exercícios expositivos no quadro durante as reuniões semanais com o professor orientador e o esclarecimento de dúvidas.

(A partir de Abril/20 os encontros passaram a ser de forma online em razão da pandemia)

Acrescentar livros

9

Resultados

Na parte de conjuntos, verificamos a igualdade entre 2 conjuntos quaisquer X=Y:

$$X = Y \iff X \subseteq Y e Y \subseteq X$$

E algumas propriedades:

$$(x, y) \notin WxZ \iff x \notin W \quad \text{ou} \quad y \notin Z$$

$$A\Delta B = (A \cup B) - (A \cap B)$$

$$A - B = \{x \in A | x \notin B\}$$

$$(A \subseteq B e B \subseteq C) \iff A \subseteq C$$

Propriedades de interseção:

$$A \cap A = A \quad \text{(idempotente)}$$

$$A \cap U = A \quad \text{(elemento neutro)}$$

$$A \cap B = B \cap A \quad \text{(comutativa)}$$

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C \quad \text{(associativa)}$$

Propriedades que relacionam união e interseção:

$$A \cup (A \cap B) = A$$

$$A \cap (A \cup B) = A$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

Conjunto de partes: Dado um conjunto A, chama-se conjunto das partes de A aquele que é formado por todos os subconjuntos de A, com a notação çP(a)= $\{$X—X $\subseteq A\}$

Uma forma de aplicação dos conjuntos é analisando funções

O gráfico de uma função $f : A \to B$ é o subconjunto G(f) do produto cartesiano AxB formado pelos pares ordenados (x,(fx)), ou seja: G(f) = $(x, y) \in AxB; y = f(x)$ Pela definição de igualdade entre funçoes, duas funções são iguais se, e somente se, possuem o mesmo gráfico.

Para que um subconjunto $G \subseteq AxB$ seja o gráfico de uma função f: AB, é necessário que para cada $X \in A$, exista um único ponto $(x, y) \in G$ cuja primeira coordenada seja x

1.

Def: Diz-se que uma família **X** de subconjuntos de um conjunto X é uma σ-algebra no caso de:

i) $\emptyset$ e X pertencem a **X**;

ii) Se A pertence a **X** , então o complementar $w(A) = X - A$ pertence a **X**;

iii) Se A_n for uma sequência de conjuntos em **X**, a união $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ pertence a **X**

Leis de Morgan que complementam as operações entre união, interseção e complentar

$$1) \quad (\bigcup_{i=1}^{n} E_i)^c = \bigcap_{i=1}^{n} (E_i^c).$$

p/ dois eventos E e F: $(E \cup F)^c = E^c \cap F^c$

$$2) \quad (\bigcap_{i=1}^{n} (E_i)^c = (\bigcup_{i=1}^{n} E_i^c)$$

p/ dois eventos E e F: $(E \cap F)^c = E^c \cup F^c$

Uma das maneiras de definir probabilidade de um evento é analisando sua frequência relativa. Para cada evento E do espaço amostral S, nós definimos n(E) sendo o número de vezes na primeira n repetição do experimento que o evento E ocorreu. Então a probabilidade do evento E ocorrer é dada por:

$P(E) = \lim_{n\to\infty} \dfrac{n(E)}{n}$

Axiomas de probabilidade

Axioma 1: $0 \leq P(E) \leq 1$

Axioma 2: P(S) = 1

Axioma 3: para uma sequencia de eventos exclusivos E1, E2... (onde Ei $\cap Ej = \varnothing) : P(\bigcup_{n=1}^{\infty} Ei) = \sum_{i=1}^{n} P(Ei)$

Sendo E $\in E^c$ eventos mutuamente exclusivos eE $\cup E^c = S, então temos os axiomas 2 e 3$: 1 = P(S) = P(E $\cup E^c) = P(E) + P(E^c)$

Proposição: P(E1

$\cup E2 \cup ...En) = \sum_{i=1}^{n} P(Ei) - \sum_{i=1}^{n} P(Ei1 \cap Ei2) + ...(-1)^r + 1 \sum_{i=1}^{n} P(Ei \cap Ei2...Eir) + (-1)^n + 1P(E1 \cap E2...En)$

Algumas proposições simples

Em primeiro lugar note que E e E^c sempre serão mutuamente exclusivos e $E \cup E^c = S$, então temos os axiomas 2 e 3,

$1 = P(S) = P(E \cup E^c) = P(E) + P(E^c)$ e equivalentemente temos: P(E^c) $= 1 - P(E)$

Resumidamente, dizemos que a probabilidade de um evento não ocorrer é 1 menos a probabilidade dele ocorrer. Por exemplo, se a probabilidade de obter cara num lançamento de dado for 3/8, então a probabilidade de obter coroa será de 5/8

Espaços amostrais com resultados igualmente prováveis

Em muitos experimentos é natural que todos os resultados do espaço amostral sejam igualmente prováveis de ocorrer. Isto é, considerando um experimento onde S é umm conjunto finito S = 1,2,...,w. Então podemos dizer que: P(1) = P(2) = ... = P(W), o que implica pelos axiomas 2 e 3 que P(i) = 1/w, i = 1,2,...,w. Por esta equação e por meio do axioma 3, para algum evento E, $P(E) = \frac{\text{n}^{\text{o}} \text{ de resultados em E}}{\text{n}^{\text{o}} \text{ de resultados em S}}$

Conclusão

Notou-se uma grande relação entre os conteúdos estudados. Verificou-se que em Algebra de Borel há muitos elementos da teoria de conjuntos e funções, estando presentes até mesmo nas definições. Os conjuntos se incluem também nos 3 axiomas de probabilidade, e até mesmo nos problemas práticos de probabilidade, utilizados pelo Diagrama de Venn para resolução dos exercícios. Portanto, é necessário cada vez mais que se façam estudos abordando a área da Matemática e da Estatística.

Referências

[Pf] PFLUGFELDER, H. O.,Quasigroups and loops: introduction, Sigma Series in Pure Mathematics, 1990, Heldermann Verlag Berlin.

[GJM] GOODAIRE, E.G., JESPERS, E., MILIES, C.P., Alternative loop Rings, Mathe- matics Studies, 184, North Holland.

[3] BRUCK, R. H., Contribuctions to the Theory of Loops, Transactions of American Mathematical Society, Vol. 60, No. 02, 1946, pp.245-354.