Universidade Federal de Uberlândia
Faculdade de Matemática

Relatório Final

PROGRAMA DE EDUCAÇÃO TUTORIAL - PET

Aldenir Martins da Silva Junior

Apresentado como requisito final para a obtenção de certificado de pesquisa individual no âmbito do Programa de Educação Tutorial da UFU desenvolvido no Projeto: *Fundamentos matemáticos aplicados à Estatística: teoria dos conjuntos.*

Orientado por Dylene Agda Souza de Barros.

Outubro - 2020

Dados de Identificação

Do Bolsista:

Nome: Aldenir Martis da Silva Junior

CPF: 488.664.478-38

Do Projeto:

Fundamentos matemáticos aplicados à Estatística: teoria dos conjuntos.

Da Orientadora:

Nome: Dylene Agda Souza de Barros

Unidade Acadêmica: Faculadade de Matemática

Introdução

É desnecessário falar sobre a importância do entendimento de Probabilidade para um bom estatístico. Por isso estudamos conceitos sobre teoria elementar de conjuntos, σ-álgebra e medida para estudarmos axiomas de probabilidade.

Desenvolvimento

Período de abrangência do Relatório Final

A princípio, a pesquisa individual do bolsista abrange o período de junho de 2019 a maio de 2020. Devido ao isolamento social dado pela Pandemia de COVID-19, houve atrasos no desenvolvimento da pesquisa, resultando no fim das atividades em agosto de 2020.

Atividades previstas e desenvolvidas

Das atividades previstas e desenvolvidas, destacamos os seguintes assuntos estudados:

1. Aritmética de conjuntos: união, interseção, diferença, diferença simétrica.

2. Partes de um conjunto.
3. σ-álgebras.
4. Medida.
5. Axiomas de probabilidade.

Autoavaliação do bolsista

Foi uma satisfação muito grande ter tido essa primeira experiência de uma iniciação científica ao lado de uma excelente professora, que é a Dylene. Da minha parte só tenho a agradecer e fico muito feliz e satisfeito por esse período de grande aprendizado e trabalho!

Assinatura do bolsista: Aldenir Junior

Avaliação da orientadora

Assinatura da orientadora:

Uberlândia, 28 de setembro de 2020

Anexo: Referencial Teórico

Aqui apresentamos de maneira detalhada os assuntos da pesquisa individual estudados:

Conjuntos

Definição 1. *Dizemos que os cojuntos X e Y são iguais se eles possuem os mesmos elementos.*

Proposição 1. *Os conjuntos X e Y são iguais se, somente se,*

$$X \subset Y \quad e \quad Y \subset X.$$

Definição 2. *Dados os conjuntos X e Y definimos a união de X e Y pelo conjunto*

$$X \cup Y\{a; a \in X \quad ou \quad a \in Y\}.$$

Definição 3. *Dados os conjuntos W e Z dizemos que um par ordenado (x, y) não pertence ao plano cartesiano se, e somente se,*

$$(x, y) \notin WxZ \iff x \notin W \quad ou \quad y \notin Z$$

Definição 4. *Sejam os conjuntos A e B. A diferença simétrica dos conjuntos A e B é dada por:*

$$A\Delta B = (A \cup B) - (A \cap B)$$

Definição 5. *Dados dois conjuntos A e B, chama-se diferença entre A e B, o conjunto formado pelos elementos de A que não pertencem a B, tais que:*

$$A - B = \{x \in A | x \notin B\}$$

Definição 6. *Sejam os conjuntos A, B e C. Dizemos que $A \subseteq C$ se, e somente se:*

$$(A \subseteq BeB \subseteq C) \iff A \subseteq C$$

Definição 7. *Sendo A, B e C conjuntos quaisquer, valem as seguintes propriedades:*

$$A \cap A = A \quad (idempotente)$$

$$A \cap U = A \quad \textit{(elemento neutro)}$$

$$A \cap B = B \cap A \quad \textit{(comutativa)}$$

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C \quad \textit{(associativa)}$$

Definição 8. *Sendo A, B e C conjuntos quaisquer, valem as seguintes propriedades, que inter-relacionam a reunião e a interseção de conjuntos:*

$$A \cup (A \cap B) = A$$

$$A \cap (A \cup B) = A$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

σ-álgebras e medidas

Definição 9. *Dado um conjunto A, chama-se conjunto das partes de A aquele que é formado por todos os subconjuntos de A, tais que: P(a)=* $\{X—X \subseteq A\}$.

O conjunto de partes pode ser escrito da forma 2^n*, sendo n o número de elementos do conjunto.*

Exemplo: Dado o conjunto $X = \{a,b,c,d\}$*, escreva* $P(X)$.

$$P(X) = \{$$

$\emptyset\}$, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{d\}$, $\{a,b\}$, $\{a,c\}$, $\{a,d\}$, $\{b,c\}$, $\{b,d\}$, $\{c,d\}$, $\{a,b,c\}$, $\{a,b,d\}$, $\{b,c,d\}$, $\{a,c,d\}$, $\{a,b,c,d\}$

Uma forma de aplicação dos conjuntos é analisando funções.
O gráfico de uma função $f : A \to B$ *é o subconjunto G(f) do produto cartesiano AxB formado pelos pares ordenados (x,f(x)), ou seja: G(f) =* $(x, y) \in AxB; y = f(x)$ *Pela definição de igualdade entre funçõoes, duas funções são iguais se, e somente se, possuem o mesmo gráfico.*
Para que um subconjunto $G \subseteq AxB$ *seja o gráfico de uma função f: AB, é necessário que para cada* $X \in A$*, exista um único ponto* $(x, y) \in G$ *cuja primeira coordenada seja x.*

Definição: Diz-se que uma família **X** de subconjuntos de um conjunto X é uma σ-algebra no caso de:

i) $\emptyset$ e X pertencem a **X**;

ii) Se A pertence a **X** , então o complementar $w(A) = X - A$ pertence a **X**;

iii) Se A_n for uma sequência de conjuntos em **X**, a união $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ pertence a **X**

Exemplo: Para o mesmo conjunto do exemplo anterior, X = {a,b,c,d}, exibir 3 σ-algebras.

1) X = {$\emptyset$, X, {a,b}, {c,d}}

2) X = {$\emptyset$, X, {a,d}, {b,c}}

3) X = {$\emptyset$, X}

Definição: Uma medida é uma função de valor real estendido μ definida na σ-algebra **X** dos subconjuntos de X:

i) $\mu(\emptyset) = 0$

ii) $\mu(E) \geq 0$ p/ todo E $\in$ **X**

iii) μ é enumeravelmente aditivo no sentido de que se (En) for qualquer sequência disjunta de conjuntos em **X**, então: $\mu(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \mu(En)$;

Desde que permitimos que μ assuma $+\infty$, podemos obsvervar que esse valor $+\infty$ no lado direito da equação significa que $\mu(En)$ =$+\infty$ para algum n ou que a série de termos-negativos no lado direito da equação é divergente. De maneira mais geral, se houver um sequência (En) de conjuntos em **X** com X = $\cup(En)$ de modo que $\mu(En) < +\infty$ p/ todo n, então dizemos que μ é σ-finito.

Exemplo: Seja X = $\mathbb{N}$ = {1,2,3,...} e seja **X** o σ-algebra de todos os subconjuntos de $\mathbb{N}$. Se E $\in$ **X**,$\mu(E)$ sendo igual ao nº de elementos em E se E for um conjunto finito e igual a $+\infty$ se E é um conjunto infinito. Então μ é uma medida e é chamada de medida de contagem em $\mathbb{N}$. Nota-se que μ não é finito, mas é σ-finito

Definição: uma função f em X a R é considerada mensurável por X (ou simlesmente mensurável) se para cada número real α o conjunto $\{x \in X : f(x) > \alpha\}$

Corolário: As declarações a seguir são equivalentes para uma ação em X a R.

a) Para cada $\alpha \in R$, o conjunto $A\alpha = \{x \in X : f(x) > \alpha\}$ pertence a X

b) Para cada $\alpha \in R$, o conjunto $B\alpha = \{x \in X : f(x) \leq \alpha\}$ pertence a X

c) Para cada $\alpha \in R$, o conjunto $C\alpha = \{x \in X : f(x) \geq \alpha\}$ pertence a X

d) Para cada $\alpha \in R$, o conjunto $D\alpha = \{x \in X : f(x) < \alpha\}$ pertence a X

Axiomas de Probabilidade

Uma das maneiras de definir probabilidade de um evento é analisando sua frequência relativa. Para cada evento E do espaço amostral S, nós definimos n(E) sendo o número de vezes na primeira n repetição do experimento que o evento E ocorreu. Então a probabilidade do evento E ocorrer é dada por: $P(E) = \lim_{n\to\infty} \frac{n(E)}{n}$

Além disso existem algumas operações interessantes envolvendo as Leis de Morgan. Sejam dois eventos E e F.

Leis de Morgan que complementam as operações entre união, interseção e complentar

$$1) \quad (\bigcup_{i=1}^{n} E_i)^c = \bigcap_{i=1}^{n} (E_i^c).$$

p/ dois eventos E e F: $(E \cup F)^c = E^c \cap F^c$

$$2) \quad (\bigcap_{i=1}^{n} (E_i)^c = (\bigcup_{i=1}^{n} E_i^c)$$

p/ dois eventos E e F: $(E \cap F)^c = E^c \cup F^c$

Dentro do universo de probabilidade, existem 3 axiomas importantíssimos:

Axioma 1: $0 \leq P(E) \leq 1$

Axioma 2: P(S) = 1

Axioma 3: para uma sequencia de eventos exclusivos E1, E2... (onde Ei $\cap Ej = \varnothing) : P(\bigcup_{n=1}^{\infty} Ei) = \sum_{i=1}^{n} P(Ei)$

Sendo $E \in E^c$ eventos mutuamente exclusivos e $E \cup E^c = S$, então temos os axiomas 2 e 3: 1 = P(S) = P(E $\cup E^c$) $= P(E) + P(E^c)$

Resumidamente, dizemos que a probabilidade de um evento não ocorrer é 1 menos a probabilidade dele ocorrer. Por exemplo, se a probabilidade de obter cara num lançamento de dado for 3/8, então a probabilidade de obter coroa será de 5/8

Seja a identidade de inclusão-exclusão:

Proposição 2. *P(E1* $\cup E2 \cup$ *...En)* $=$
$\sum_{i=1}^{n} P(Ei) - \sum_{i=1}^{n} P(Ei1 \cap Ei2) + ...(-1)^r + 1 \sum_{i=1}^{n} P(Ei \cap Ei2...Eir) + (-1)^n + 1P(E1 \cap E2...En)$

O somatório Σ $P(Ei1 \cap Ei2...Eir)$ *está em todo o domínio de* $\binom{n}{r}$ *possíveis subconjuntos de tamanho r do conjunto* $\{$*1, 2,...n*$\}$
Resumidamente esta equação toda nos diz que a probabilidade da união de n eventos é igual à soma da probabilidade desses eventos menos a soma da probabilidade desses eventos ocorrerem duas e três vezes ao mesmo tempo (interseções).

Por fim e não mais importante, vale ressaltar que, em muitos experimentos é natural que todos os resultados do espaço amostral sejam igualmente prováveis de ocorrer. Isto é, considerando um experimento onde S é umm conjunto finito S = 1,2,...,w. Então podemos dizer que: P(1) = P(2) = ... = P(W), o que implica pelos axiomas 2 e 3 que P(i) = 1/w, i = 1,2,...,w. Por esta equação e por meio do axioma 3, para algum evento E, $P(E) = \frac{n^o \text{ de resultados em E}}{n^o \text{ de resultados em S}}$

References

[1] *LIMA, E. L.,* Curso de Análise, vol. 1 *Rio de Janeiro: SBM, 1977.*

[2]

[4] *ROSS, S.,* A First Couse in Probability, 9th. edition. *Harlow: Perason, 2014.*