Hasil kali silang, persamaan garis dan bidang

Dr. Dra. Kasiyah, M.Sc.

MODUL E-LEARNING ALJABAR LINIER
FAKULTAS ILMU KOMPUTER, UNIVERSITAS INDONESIA

- Pengenalan vektor
  - Jenis-jenis vektor
  - Vektor nol dan kesamaan vektor
  - Operasi pada vektor
    - Panjang vektor; aritmetika vektor
    - Hasil kali titik; proyeksi
    - Hasil kali silang
  - Persamaan garis dan bidang

4.6 Hasil kali silang

Sasaran pemelajaran

Setelah mempelajari modul ini, mahasiswa mampu:

- menjelaskan hasil kali silang dan sifat-sifatnya
- menentukan persamaan garis dan bidang menggunakan vektor.

Hasil kali silang: u x v

$$\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3), \qquad \mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$$

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (u_2 v_3 - u_3 v_2)\mathbf{i} + (u_3 v_1 - u_1 v_3)\mathbf{j} + (u_1 v_2 - u_2 v_1)\mathbf{k}$$

$$= \left(\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \right)$$

Prosedur menentukan **u** x **v**:

1. Tentukan matriks $\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix}$

2. Komponen pertama dari **u** x **v** adalah: determinan matriks di atas setelah kolom pertama dihapus

$$\left(\begin{array}{c|cc|} \cdots & u_2 & u_3 \\ \cdots & v_2 & v_3 \end{array} \right) \qquad \det \begin{pmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{pmatrix}$$

Komponen pertama

Hasil kali silang (lanjutan)

- Komponen kedua: $\det\begin{pmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{pmatrix}$

- Komponen ketiga: $\det\begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{pmatrix}$

- Contoh 3: hitung **v** x **w** dengan **v** = (1, 4, -4) dan **w** = (0, 3, 2)

$$\mathbf{v}\times\mathbf{w} = \left(\begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} \right)$$

$$\mathbf{v}\times\mathbf{w} = (20,-2,3) = 20\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$$

Hasil kali silang: v x u

Jika dua baris *A* ditukar tempat maka nilai determinannya dikalikan -1.

Sehingga diperoleh

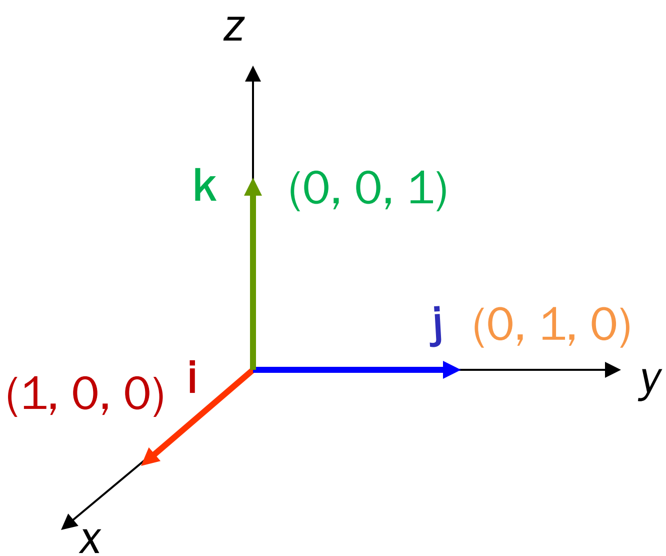
$$\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} v_2 & v_3 \\ u_2 & u_3 \end{vmatrix}$$

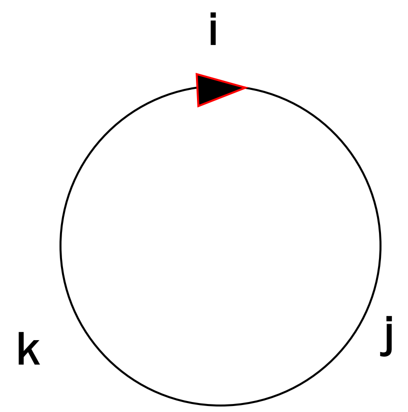
$$\begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} v_1 & v_3 \\ u_1 & u_3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ u_1 & u_2 \end{vmatrix}$$

Terbukti bahwa **u** x **v** = - (**v** x **u**)

Hasil kali silang vektor-vektor satuan standar





$\mathbf{i} \times \mathbf{j} = (0\times0-1\times0)\mathbf{i} - (1\times0 - 0\times0)\mathbf{j} + (1\times1 - 0\times0)\mathbf{k} = \mathbf{k}$

$\mathbf{j} \times \mathbf{j} = -\mathbf{k}$	$\mathbf{k} \times \mathbf{k} = ?$
$\mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}$	$\mathbf{k} \times \mathbf{i} = ?$
$\mathbf{k} \times \mathbf{j} = -\mathbf{i}$	$\mathbf{i} \times \mathbf{k} = ?$

Bentuk determinan dari hasil kali silang

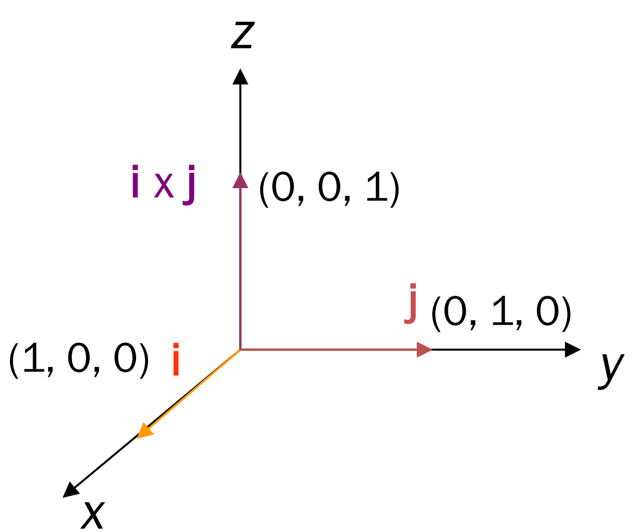
$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix}$$

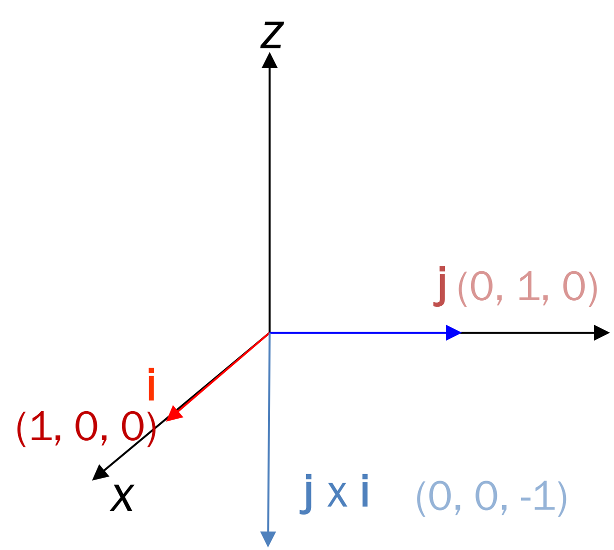
$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \det(A) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} + & + & + \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{array} \right) \begin{array}{cc} \mathbf{i} & \mathbf{j} \\ u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{array} \\ \begin{array}{ccc} - & - & - \end{array} \end{array}$$

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (u_2 v_3 - u_3 v_2)\,\mathbf{i} + (u_3 v_1 - u_1 v_3)\,\mathbf{j} + (u_1 v_2 - u_2 v_1)\,\mathbf{k}$$

Sifat-sifat hasil kali silang

1. **u** x **v** = -**v** x **u**
2. Jika **u** paralel **v** maka **u** x **v = -v** x **u = 0,** akibatnya **u** x **u** = 0
3. (*k***u**) x **v** = **u** x (*k***v**) = *k*(**u** x **v**)
4. **u** x (**v**+**w**) = **u** x **v** + **u** x **w**
5. **u**.(**v** x **w**) = (**u** x **v**).**w** hasil kali tripel skalar (*tunjukkan dengan determinan*)





Perkalian skalar tripel

𝒟efinisi 4.7: Hasil kali skalar tripel

Hasil kali triple skalar didefinisikan:

$$\mathbf{u}.(\mathbf{v}\times\mathbf{w})=\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{u}.(\mathbf{v}\times\mathbf{w})=\mathbf{u}.\begin{vmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{vmatrix}\mathbf{i}-\begin{vmatrix} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3 \end{vmatrix}j+\begin{vmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{vmatrix}k$$

$$=\begin{vmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{vmatrix}\mathbf{u}_1-\begin{vmatrix} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3 \end{vmatrix}\mathbf{u}_2+\begin{vmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{vmatrix}\mathbf{u}_3$$

$$=\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

Contoh 4: hasil kali skalar tripel

Diberikan **a** = 3**i** -2**j** +5**k**, **b** = **i** +4**j** -4**k**, **c** = 3**j** +2**k**, maka

$$\mathbf{a}.(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 1 & 4 & -4 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 79$$

$$\mathbf{c}.(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) = \begin{vmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 3 & -2 & 5 \\ 1 & 4 & -4 \end{vmatrix} = 79$$

$$\mathbf{b}.(\mathbf{c}\times\mathbf{a}) = \begin{vmatrix} 1 & 4 & -4 \\ 0 & 3 & 2 \\ 3 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 79$$

Sifat perkalian skalar tripel

$$\mathbf{a}.(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=\begin{vmatrix}3 & -2 & 5\\ 1 & 4 & -4\\ 0 & 3 & 2\end{vmatrix}=79$$

Dengan sifat determinan maka

$$\begin{vmatrix}0 & 3 & 2\\ 3 & -2 & 5\\ 1 & 4 & -4\end{vmatrix}$$ (tukar baris 3 dan 2)

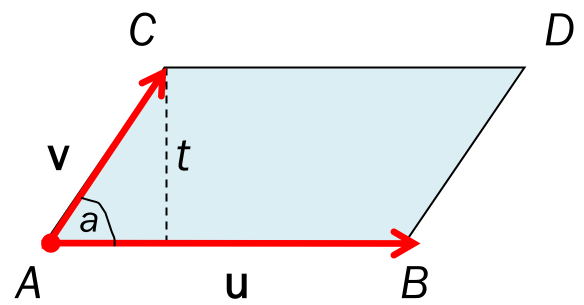
$$\begin{vmatrix}3 & -2 & 5\\ 0 & 3 & 2\\ 1 & 4 & -4\end{vmatrix}$$ (tukar baris 2 dan 1)

Maka **a.**(**b** x **c**) = **c.**(**a** x **b**) = **b.**(**c** x **a**)

Bagaimana dengan **a** x (**b.c**)?

Jawab: *tidak terdefinisi*

Luas jajar genjang



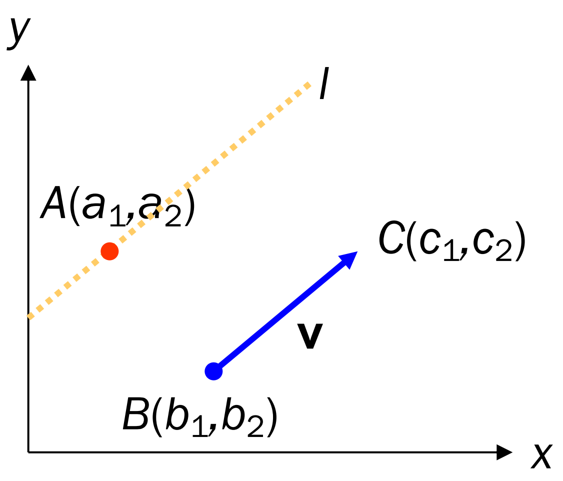
$$
\begin{aligned}
\text{Luas} &= \|AB\|\|AC\|\sin a \\
&= \|AB \times AC\| \\
&= \|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|
\end{aligned}
$$

(luas = alas x tinggi)

- Pengenalan vektor
  - Jenis-jenis vektor
  - Vektor nol dan kesamaan vektor
  - Operasi pada vektor
    - Panjang vektor; aritmetika vektor
    - Hasil kali titik; proyeksi
    - Hasil kali silang
  - Persamaan garis dan bidang

4.7 Persamaan garis dan bidang

Persamaan garis



Persamaan garis l adalah:

$$y - a_2 = \frac{(c_2 - b_2)}{(c_1 - b_1)}(x - a_1)$$

Garis l sejajar dengan vektor **v**, maka arah/gradiennya sama dengan arah **v**. Dengan menggunakan persamaan

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

diperoleh persamaan garisnya.

Contoh 5:

Diberikan $A(1,3)$, $B(3,1)$, dan $C(6,3)$, maka persamaan garis l adalah

$$y - 3 = \frac{3-1}{6-3}(x-1) \quad \Rightarrow \quad y = \frac{2}{3}x - \frac{7}{3}$$

Latihan 5

Tentukan persamaan garis *g* yang melalui $T_1(2, 1)$ dan $T_2(6, 5)$.

Jawab:

Persamaan garis umum: $y - y_* = m(x - x_*)$

Gradien garis *m* yang melalui T_1 dan T_2:

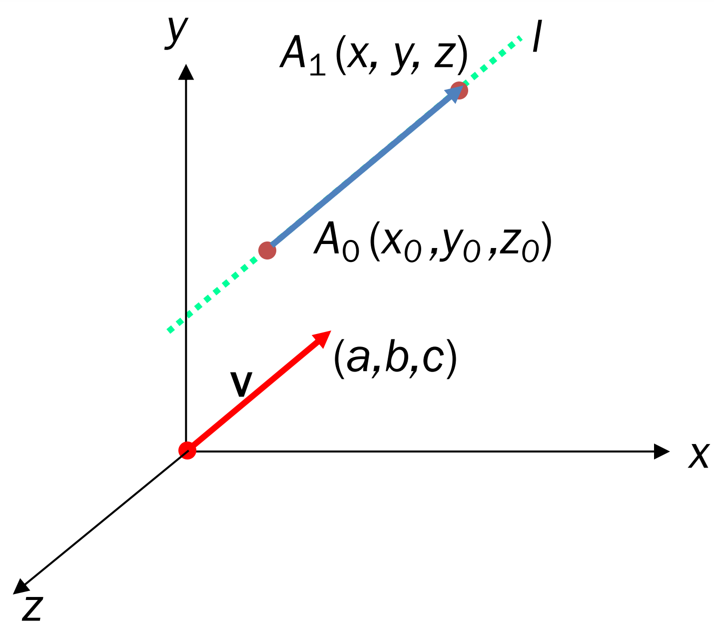
$$m = \frac{(x_2 - x_1)}{(y_2 - y_1)}$$

$$m = \frac{(6-2)}{(5-1)} = \frac{4}{4} = 1$$

Maka persamaan garis *g* adalah: $y - 1 = 1(x - 2)$

$$\boxed{y - x + 1 = 0}$$

Persamaan garis (lanjutan)



$\overrightarrow{A_0 A_1} = t\mathbf{v}$

Dapat dituliskan dalambentuk:

$(x\text{-}x_0,\ y\text{-}y_0,\ z\text{-}z_0) = (ta,\ tb,\ tc)$

Maka diperoleh persamaan parametrik dari garis *l*, yaitu

$$\boxed{x = x_0 + ta,\ y = y_0 + tb,\ z = z_0 + tc}$$

Contoh 6:

Carilah persamaan parametrik dari garis yang melewati titik (1, 2, -3) dan sejajar dengan vektor **v** = (4, 5, -7).

Jawab: Persamaan garis yang ditanyakan adalah

$$x = 1 + 4t,\ y = 2 + 5t,\ z = -3 - 7t \quad (-\infty < t < \infty)$$

Latihan 6

- Carilah persamaan parametrik untuk garis *l* yang melewati titik $P_1(2, 4, 1)$ dan titik P_2 (3, 0, 7).
- Di titik manakah garis *l* memotong bidang-*xy*?

Jawab

- **v** merupakan vektor dari titik P_1 ke titik P_2. $\mathbf{v} = \overrightarrow{P_1P_2} = (1, -4, 6)$
  - ✓ **v** paralel dengan garis *l*,
  - ✓ titik $P_1(2, 4, -1)$ berada pada garis *l*,
  - ✓ maka persamaan garis *l* adalah: $x = (2 + t), y = (4 - 4t), z = (-1 + 6t)$ $(-\infty < t < \infty)$
- Garis *l* berpotongan dengan bidang-xy ketika $z = 0$.
  - ✓ $t = 1/6$
  - ✓ Maka titik perpotongan *l* dan bidang *y* adalah: $(x, y, z) = \left(\frac{13}{6}, \frac{20}{6}, \frac{1}{6}\right)$

Refleksi

- Tulislah 5 hal paling penting yang telah kamu pelajari pada modul ini. Urutkan dari yang paling penting.

- Tuliskan juga 5 hal yang ingin kamu pelajari lebih lanjut.

Ringkasan materi

- Buatlah ringkasan materi yang baru saja kamu pelajari.

- Periksalah hasil ringkasanmu, apakah sudah mencakup semua konsep penting berikut ini?
  - Jenis-jenis vektor
  - Vektor nol, vektor satuan
  - Kesamaan vektor
  - Operasi-operasi pada vektor: jumlahan, perkalian dengan skalar, hasil kali titik, hasil kali silang, perkalian triple scalar dan sifat-sifatnya
  - Panjang vektor
  - Jarak dua vektor
  - Proyeksi ortogonal
  - Persamaan garis dan bidang

Post-test modul

Post-test

Diberikan:

k, m bilangan-bilangan nyata; **a**, **b**, dan **c** vektor di R^3

Tunjukkan bahwa:

1. $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$
2. $\mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c}$
3. $\mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{a} = \mathbf{a}$
4. $\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{0}$
5. $k(m\,\mathbf{a}) = (km)\,\mathbf{a}$
6. $k(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = k\,\mathbf{a} + k\,\mathbf{b}$
7. $(k + m)\,\mathbf{a} = k\mathbf{a} + m\mathbf{a}$

Post-test

Diberikan: $R^4 = R \times R \times R \times R$

k, m bilangan-bilangan nyata; **a**, **b**, dan **c** elemen-elemen di R^4

Selidiki apakah berlaku sifat berikut ini:

1. $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$
2. $\mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c}$
3. $\mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{a} = \mathbf{a}$
4. $\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{0}$
5. $k(m\mathbf{a}) = (km)\mathbf{a}$
6. $k(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = k\mathbf{a} + k\mathbf{b}$
7. $(k + m)\mathbf{a} = k\mathbf{a} + m\mathbf{a}$

Definisikan dot product di R^4.

Selamat, Anda telah menyelesaikan Modul 4.