2. Aljabar Matriks (Bagian 1)

MODUL E-LEARNING ALJABAR LINIER
FAKULTAS ILMU KOMPUTER, UNIVERSITAS INDONESIA

Prof. DR. Kasiyah Junus, MSc
DR.Eng Lia Sadita

Sasaran pemelajaran

Setelah mempelajari modul ini, mahasiswa mampu:

1. melakukan operasi aritmetika matriks secara tepat
2. menentukan invers matriks dengan menggunakan operasi baris elementer secara efektif
3. menggunakan invers matriks untuk mencari solusi system persamaan linear

Cakupan materi

- Pengenalan matriks
  - Operasi-operasi pada matriks
    - Kesamaan matriks
    - Jumlahan matriks
    - Perkalian matriks dengan skalar
    - Perkalian dua matriks
    - Transpose matriks
    - Sifat-sifat operasi matriks
  - Inverse matriks
    - Matriks elementer
    - Prosedur mencari inverse menggunakan matriks elementer
  - Aljabar matriks dan spl

Materi prasyarat

Untuk dapat mengikuti pembelajaran pokok bahasan ini,

Anda diharapkan sudah menguasai materi tentang:

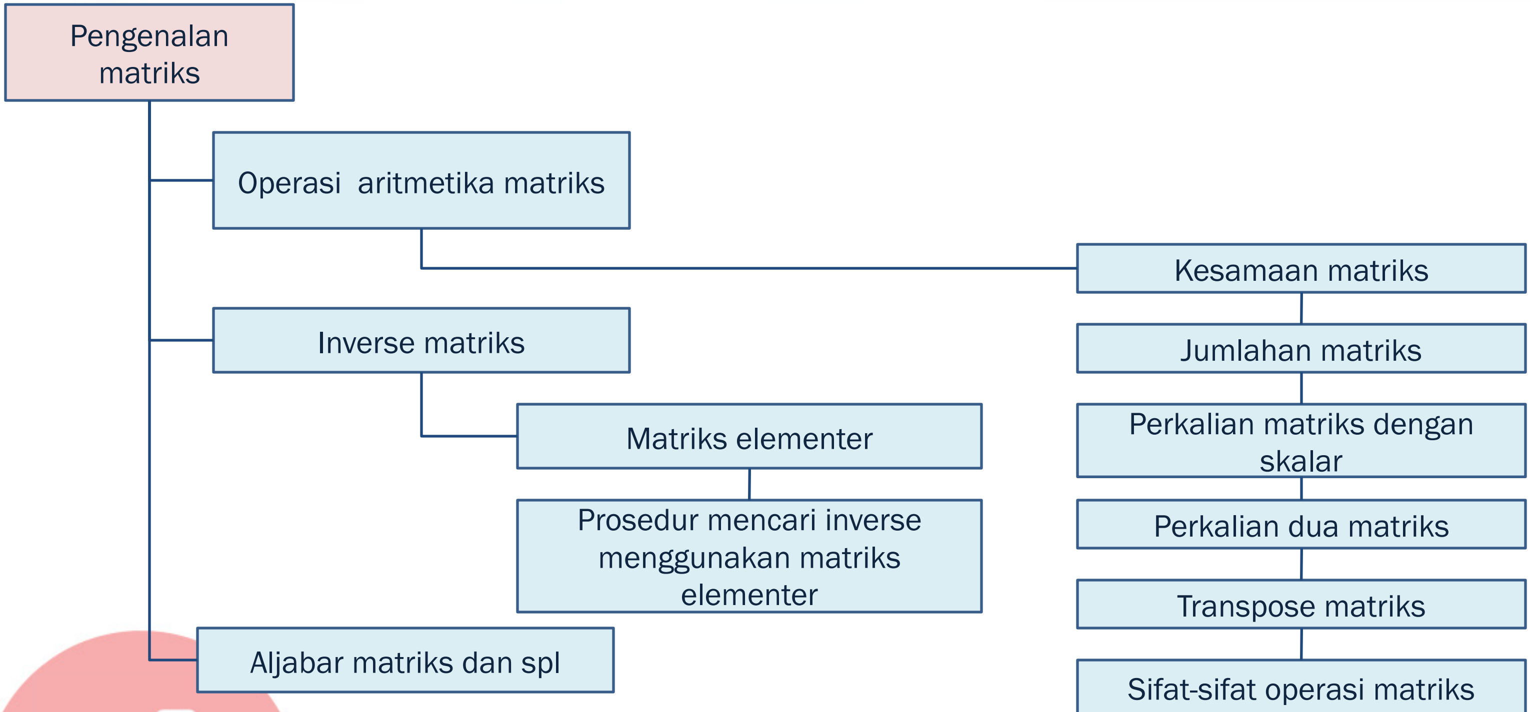
1. sistem persamaan linier
2. operasi baris elementer

Pre-test Modul

Pre-test

- Untuk membangkitkan kembali pengetahuan awal tentang matriks, jawablah pertanyaan berikut ini:

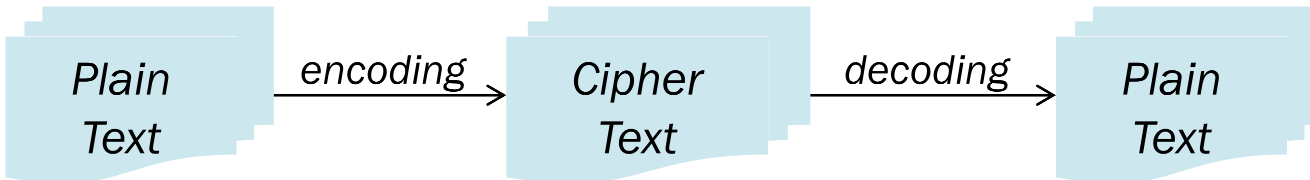
1. Berikan contoh dua matriks kemudian jumlahkan. Apakah ordonya sama?
2. Berikan contoh matriks persegi.
3. Berikan contoh spl dengan 3 unknown 5 persamaan, sajikan dalam bentuk persamaan matriks. Bagaimana perkalian matriks dilakukan?
4. Berikan contoh data yang disajikan dalam bentuk matriks.
5. Apa yang Anda ketahui tentang inverse matriks 2x2?



2.1 Pengenalan matriks

Contoh 1: penggunaan matriks

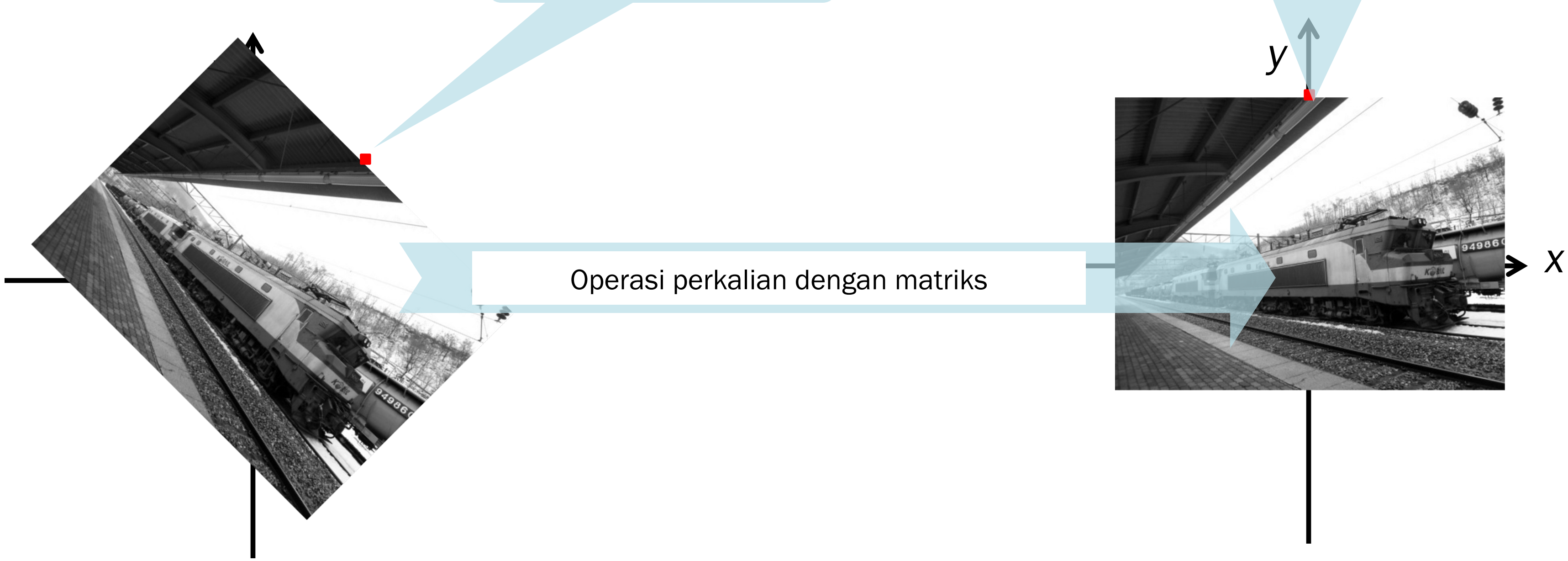
- Kriptografi
  - Membuat *encoding* sederhana pada suatu *text* dan *decoding* dari *ciphertext*



- Pesan asli dikonversi menjadi angka-angka dan disajikan dalam bentuk matriks *A*. *A* dikalikan matriks lain *B* (mempunyai invers) menjadi *cipher text AB*. *Cipher text AxB* dikirim, penerima membaca setelah dikalikan invers: $A \times B \times B^{-1} = A$.

Contoh 2: penggunaan matriks (lanjutan)

- Pengolahan Citra



- Posisi setiap piksel gambar direpresentasikan dalam bentuk matriks angka-angka *A*. *A* dikali dengan suatu matriks koordinat *B* untuk memperbaiki posisi gambar.

Matriks

Definisi 2.1: Matriks

Matriks adalah susunan bilangan-bilangan yang terdiri atas baris-baris dan kolom-kolom

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

baris

kolom

Matriks A dapat ditulis sebagai $[a_{ij}]$.

a_{ij} adalah **elemen** atau **entri** baris ke-*i*, kolom ke-*j*. a_{ij} dapat ditulis sebagai $(A)_{ij}$

Banyaknya **baris** A adalah m.
Banyaknya **kolom** A adalah n.
Ordo A adalah m x n.

Matriks persegi

Definisi 2.2: Matriks persegi

Matriks persegi (bujur sangkar) adalah matriks yang jumlah baris dan jumlah kolom sama.

Contoh 3:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

diagonal utama

Definisi 2.3: Trace

Trace dari matriks adalah jumlahan elemen-elemen diagonal utama.

Contoh 4:

$$Trace(A) = 1 + 5 + 9 = 15$$

Matriks segitiga

Diberikan beberapa matriks berikut:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

Matriks segitiga **atas**

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

Matriks segitiga **bawah**

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

Matriks **diagonal**

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

Matriks **diagonal**

Matriks nol dan identitas

Definisi: 2.4 Matriks nol

Matriks nol adalah matriks yang semua elemennya nol.

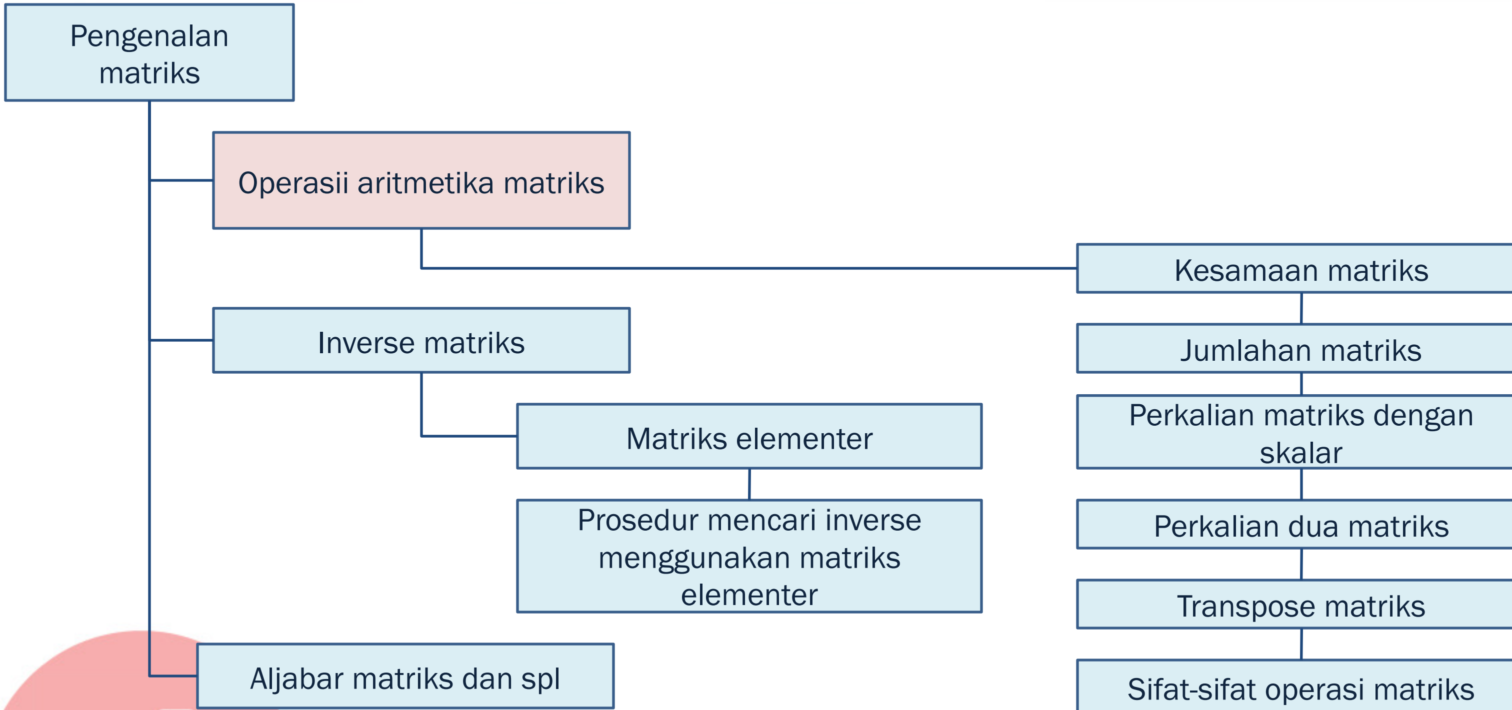
Contoh 5: $\begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Definisi 2.5: Matriks identitas

Matriks identitas adalah matriks persegi yang elemen diagonal utamanya 1 dan elemen lainnya 0.

Contoh 6:

$$\underset{I_2}{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} \quad \underset{I_3}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \quad \underset{I_4}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$



2.2 Operasi aritmetika matriks

Kesamaan dua matriks

Definisi 2.6: Kesamaan dua matriks

Dua matriks sama jika ukuran sama dan setiap elemen yang bersesuaian adalah sama.

Contoh 7:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad A = B$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad C \neq D$$

$$E = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} \boxed{x} & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad E = F, \text{jika } x = 1$$

Jumlahan dan pengurangan dua matriks

Contoh 8: $A = \begin{pmatrix} 10 & 22 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

$$A + B = \begin{pmatrix} 10+2 & 22+2 \\ 1+1 & -1+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 23 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A - B = \begin{pmatrix} 10-2 & 22-2 \\ 1-1 & -1-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 21 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Definisi 2.7: Jumlahan matriks

Diberikan matriks $A = (a_{ij})$ dan $B = (b_{ij})$ keduanya berukuran m x n. Jumlahan $A + B$ adalah matriks m x n yang didefinisikan sebagai

$$(A+B)_{ij} = A_{ij} + B_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

Elemen baris ke-*i* kolom ke-*j* matriks $A + B$ adalah jumlahan elemen baris ke-*i* kolom ke-*j* matriks A dan elemen baris ke-*i* kolom *ke-j matriks B.*

Atau: $A+B = [a_{ij} + b_{ij}]$

Latihan 1

Isilah titik-titik di bawah ini.

$$C = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 1 \\ 7 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 25 & 30 & 5 \\ 35 & 10 & 15 \end{pmatrix}$$

$$K = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -9 \\ 3 & 7 & 0 \\ 5 & 9 & -13 \end{pmatrix} \qquad L = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 1 \\ -2 & 4 & -5 \\ 9 & -4 & 3 \end{pmatrix}$$

$C + D = \ldots \qquad D + C = \ldots.$

$K + L = \ldots \qquad L + K = \ldots$

Apakah jumlahan matriks bersifat komutatif?

Jika komutatif, buktikan secara umum (bukti dengan contoh tidak cukup).

Latihan 1 (lanjutan)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 3 & -8 & 0 \\ 4 & 7 & 2 \\ -1 & 8 & 4 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 2 \\ 5 & 2 & 6 \\ -1 & 8 & 4 \end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 2 \\ 5 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

1. $C + D = \ldots$
2. $C + E = \ldots$
3. $A + B = \ldots$

Dua matriks dapat dijumlahkan jika ordonya sama.

Perkalian matriks dengan skalar

Definisi 2.8: Perkalian matriks dengan skalar

Diberikan matriks $A = [a_{ij}]$ dan skalar k, **perkalian skalar** kA mempunyai entri-entri sebagai berikut: $(kA)_{ij} = k.(A)_{ij} = ka_{ij}$

- Contoh 9: $A = \begin{pmatrix} 10 & 22 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ $\quad H = \begin{pmatrix} 50 & 1100 \\ 50 & -50 \end{pmatrix}$

$$5A = \begin{pmatrix} 5\times 10 & 5\times 22 \\ 5\times 1 & 5\times -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 & 110 \\ 5 & -5 \end{pmatrix}$$

- Apa hubungan antara H dan A? $H = 50A$

Hasil kali skalar dengan matriks (lanjutan)

Diberikan matriks $K_{3 \times 3}$

$$K = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -9 \\ 3 & 7 & 0 \\ 5 & 9 & -13 \end{pmatrix}$$

$$4K = \begin{pmatrix} 4 & 16 & -36 \\ 12 & 28 & 0 \\ 20 & 36 & -52 \end{pmatrix}$$

$$5K = \begin{pmatrix} 5 & 20 & -45 \\ 15 & 35 & 0 \\ 25 & 45 & -65 \end{pmatrix}$$

Latihan 2

Diketahui bahwa cA adalah matriks nol. Apa kesimpulan Anda tentang A dan c?

Jawab:

Kasus 1. Jika $c = 0$ untuk sembarang A, maka cA adalah matriks nol.

Kasus 2. Jika A adalah matriks nol untuk c berapa saja, maka cA juga matriks nol.

Perkalian dua matriks

Definisi 2.9: Perkalian dua matriks

Diberikan matriks $A = (a_{ij})$ berukuran m x n dan $B = (b_{ij})$ berukuran p x q. Jika $n = p$, maka hasil kali AB adalah matriks berukuran m x q yang didefinisikan sebagai berikut:

$$[AB]_{ij} = \sum_{s=1}^{n} a_{is} b_{sj}$$

Apabila $n \neq p$ maka hasil kali AB tidak terdefinisi.

BA tidak terdefinisi

Contoh 10:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2.1+1.3+2.0 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 5 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Perkalian matriks (lanjutan)

$$\underset{m \times n}{\boxed{A}} \qquad \underset{n \times k}{\boxed{B}}$$

$$AB_{mxk}$$

Diberikan *A* dan *B*. *AB* terdefinisi apabila banyaknya kolom *A* sama dengan banyaknya baris *B.*

Jika *A* berordo *m* x *n* dan *B* berordo *n* x *k,* maka *AB* berordo *m* x *k.*

Latihan 3

Hitunglah *AB* dan *BA*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 8 & -7 & 9 & -4 \\ 1 & -5 & 7 & -8 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 7 & -6 \\ 4 & 9 \\ 11 & 3 \end{pmatrix}$$

Jawab:

$$\boldsymbol{AB} = \begin{pmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{pmatrix}$$

BA tidak terdefinisi

Latihan 3: perkalian matriks (lanjutan)

Tentukan hasil kalinya jika terdefinisi.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 7 & 9 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & 6 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -9 & 0 \\ 8 & 0 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 7 & -11 & 4 \\ 3 & 5 & -6 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 9 & 5 & 6 \\ 2 & 5 & 6 & -9 & 0 \\ 0 & -4 & 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

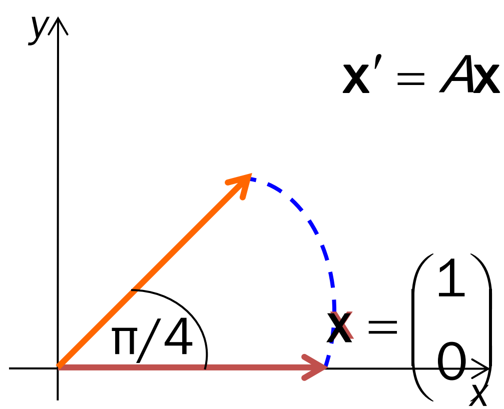
1. $AB = \ldots$
2. $AC = \ldots$
3. $BD = \ldots$
4. $CD = \ldots$
5. $DB = \ldots$

Aplikasi: perkalian matriks sebagai operasi rotasi

Matriks rotasi 45 derajat A dan vektor $\mathbf{x}$

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \qquad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \qquad A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$



Perpangkatan matriks

Definisi 2.11: Perpangkatan matriks

Diberikan matriks persegi $A = [a_{ij}]$ berordo n x n, maka untuk bilangan cacah k didefinisikan $A^k = I$ (matriks identitas n x n) untuk $k = 0$, dan

$$A^k = \underbrace{A\ A\ A \ldots A}_{\text{sebanyak } k \text{ kali}}$$

Contoh 11:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad A^2 = \qquad\qquad A^3 = A^1 A^2 =$$

Jika n dan m bilangan cacah, maka berlaku

$$A^{n+m} = A^n A^m$$

Sifat-sifat aljabar pada matriks

Berdasarkan definisi jumlahan matriks dan perkalian matriks dengan skalar, $(A+B)_{ij}=a_{ij}+b_{ij};(kA)_{ij}=ka_{ij}$, maka:

1. **Jumlahan** matriks bersifat **komutatif**

$$A+B=B+A$$

2. **Jumlahan** matriks bersifat **asosiatif**

$$(A+B)+C=A+(B+C)$$

3. **Jumlahan** matriks *A* dengan matriks nol berordo sama, hasilnya sama dengan *A.*

$$A+0=A$$

4. Setiap matriks *A* memiliki **negatif –*A***, dengan –*A* = (-1)*A*

$$A+(-A)=0$$

5. **Perkalian** matriks dengan skalar bersifat **asosiatif**

$$s(tA)=st(A)$$

6. **Jumlahan dan perkalian matriks dengan skalar** bersifat **distributif**

$$(A+B)C=AC+BC;r(A+B)=rA+rB$$

Transpose

𝒟efinisi 2.12: Transpose matriks

Transpose mariks A adalah matriks A^T kolom-kolomnya adalah baris-baris dari A, baris-barisnya adalah kolom-kolom dari A.

$$[A^T]_{ij} = [A]_{ji}$$

Contoh 12:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 & 7 \\ 5 & 3 & -9 & 7 \end{pmatrix} \longrightarrow A^T = A' = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 3 \\ 6 & -9 \\ 7 & 7 \end{pmatrix}$$

n x m

Jika A adalah matriks m x n, maka matriks A^T berukuran ....

Sifat-sifat transpose matriks

1. $(A^T)^T = A$

$$A \longrightarrow A^T \longrightarrow (A^T)^T = A$$

Contoh 13:

$$\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 3 \\ 6 & -9 \\ 7 & 7 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 & 7 \\ 5 & 3 & -9 & 7 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 3 \\ 6 & -9 \\ 7 & 7 \end{pmatrix}$$

Sifat-sifat transpose matriks

2. $(A+B)^T = A^T + B^T$

$$\boxed{A + B}^T = \boxed{A}^T + \boxed{B}^T$$

Contoh 14:

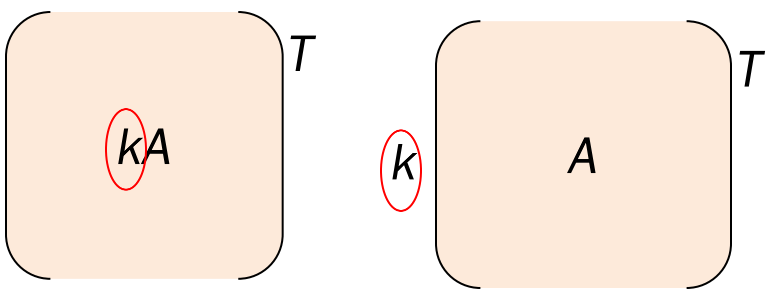
$$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 3 \\ 6 & -9 \\ 7 & 7 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \quad A+B = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 5 & 7 \\ 11 & -3 \\ 14 & 15 \end{pmatrix} \quad (A+B)^T = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 11 & 14 \\ 7 & 7 & -3 & 15 \end{pmatrix}$$

$$A^T = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 & 7 \\ 5 & 3 & -9 & 7 \end{pmatrix} \quad \left(A^T + B^T\right) = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 11 & 14 \\ 7 & 7 & -3 & 15 \end{pmatrix}$$

$$B^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \end{pmatrix}$$

Sifat-sifat transpose matriks

3. $(kA)^T = k(A)^T$ untuk skalar k



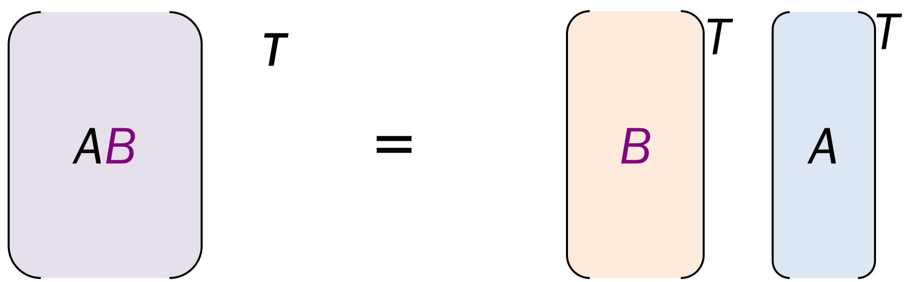
Contoh 15:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 3 \\ 6 & -9 \\ 7 & 7 \end{pmatrix}, k = 10 \qquad kA = \begin{pmatrix} 40 & 50 \\ 20 & 30 \\ 60 & -90 \\ 70 & 70 \end{pmatrix} \qquad (kA)^T = \begin{pmatrix} 40 & 20 & 60 & 70 \\ 50 & 30 & -90 & 70 \end{pmatrix}$$

$$A^T = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 & 7 \\ 5 & 3 & -9 & 7 \end{pmatrix} \qquad k(A^T) = \begin{pmatrix} 40 & 20 & 60 & 70 \\ 50 & 30 & -90 & 70 \end{pmatrix}$$

Sifat-sifat transpose matriks

4. $(AB)^T = B^T A^T$



- Berikan contoh untuk meyakinkan $(AB)^T = B^T A^T$

- $(ABC)^T =$ ......

Matriks simetri

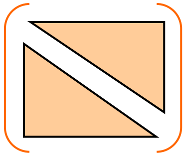
𝒟efinisi 2.13: Matriks simetri

Matriks A disebut simetris jika dan hanya jika $A = A^T$

Contoh 16:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad A^T = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 7 & 0 \\ 3 & 7 & 8 & 2 \\ 4 & 0 & 2 & 9 \end{pmatrix} = B^T$$



A dan B simetri

Post-test

- Untuk mendorong Anda mencari informasi yang berguna dan mengaitkan dengan materi ajar, definisikan konsep berikut dan berikan contoh

1. Matriks nol
2. Matriks persegi
3. Matriks identitas
4. Matriks diagonal
5. Matriks segitiga atas
6. Matriks segitiga bawah
7. Matriks segitiga
8. Matriks simetri
9. Matriks koefisien suatu spl

Lanjutkan pelajari Modul 2 Bagian 2: inverse matriks dan aplikasinya untuk menyelesaikan spl

MODUL E-LEARNING ALJABAR LINIER
FAKULTAS ILMU KOMPUTER, UNIVERSITAS INDONESIA