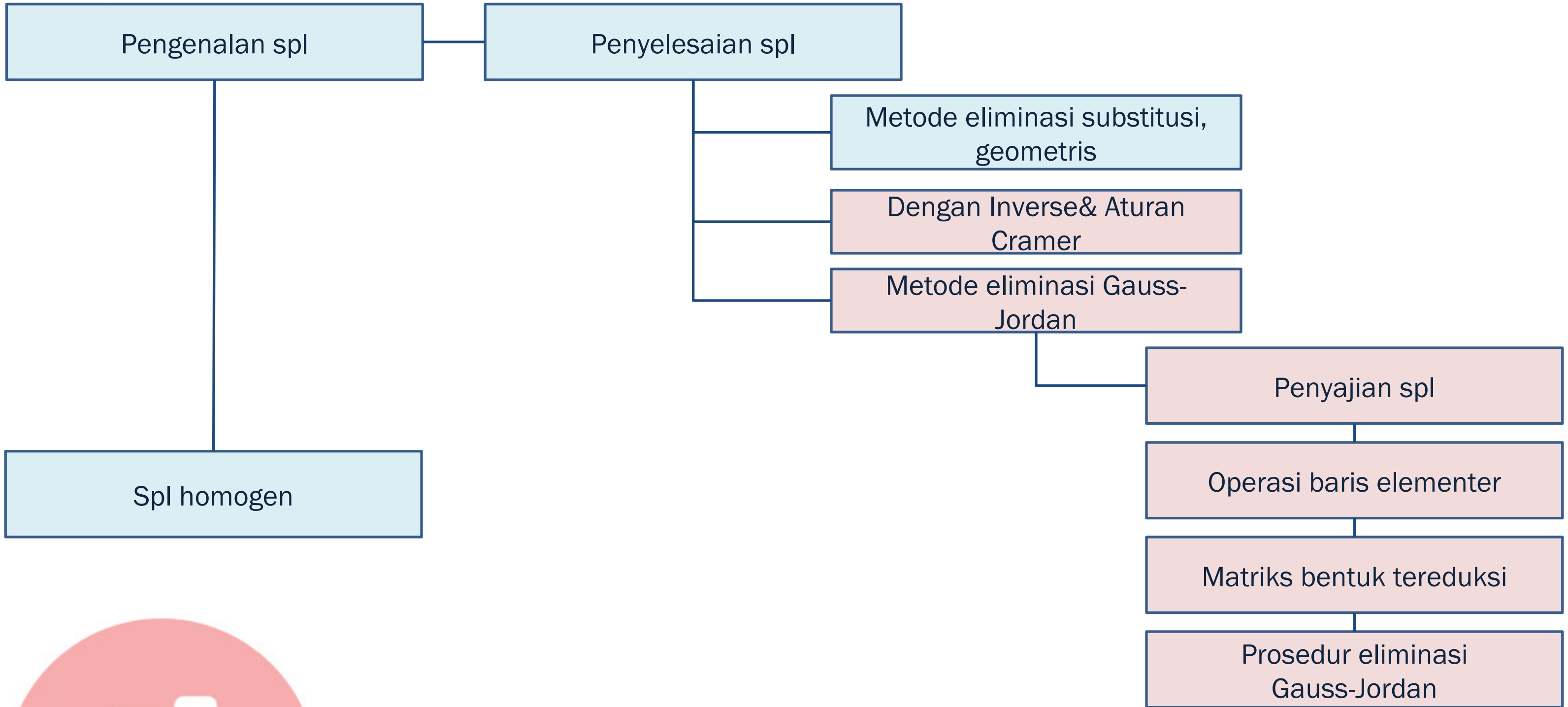
Sistem Persamaan Linear (Bagian 2)

MODUL E-LEARNING ALJABAR LINIER

FAKULTAS ILMU KOMPUTER, UNIVERSITAS INDONESIA

DR. Kasiyah Junus, MSc
DR.Eng Lia Sadita



Metode dengan Inverse, Aturan Cramer Eliminasi Gauss -Jordan

- Pengenalan spl
  - Materi pengayaan: spl homogen
- Penyelesaian spl
  - Metode eliminasi substitusi metode geometris
  - Metode dengan Inverse Aturan Cramer Metode eliminasi Gauss-Jordan
    - Penyajian spl
    - Operasi baris elementer
    - Matriks bentuk tereduksi
    - Prosedur eliminasi Gauss-Jordan

1.2 Penyajian spl

Penyajian spl dengan persamaan matriks

Spl umum:

$$
\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\
&\vdots \\
&a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m
\end{aligned}
$$

Persamaan matriks: $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$

$$
A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_m \end{pmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_m \end{pmatrix}
$$

matriks koefisien

x dan **b** adalah matriks terdiri dari satu kolom: matriks kolom

Perhatikan notasi matriks kolom **x** dan **b** (huruf kecil tebal)

Penyajian spl sebagai matriks diperbesar (*augmented*)

Spl bentuk umum:

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
\vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m
\end{aligned}
$$

Matriks *augmented*

$$
A = \left(\begin{array}{ccccc:c}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\
\vdots & & & & & \vdots \\
a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} & b_3
\end{array}\right)
$$

m : banyaknya persamaan,
n : banyaknya *unknown*, maka matriks *augmented* berordo *m* x (*n*+1) dan matriks koefisiean berordo *m* x *n*.

Contoh 5: Penyajian spl dengan persamaan matriks

- Diberikan spl:
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 6 \\ -x_2 + x_3 &= 1 \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 &= 4 \end{aligned}$$

Matriks koefisien

$$\begin{pmatrix} 1.x_1 + 2x_2 + 1.x_3 \\ 0.x_1 + -1.x_2 + 1.x_3 \\ 4.x_1 + 2x_2 + 1.x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Spl dalam bentuk persamaan matriks

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 6 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Matriks *augmented*

Spl disajikan sebagai matriks *augmented*

Persamaan matriks dan kombinasi linear

Persamaan matriks

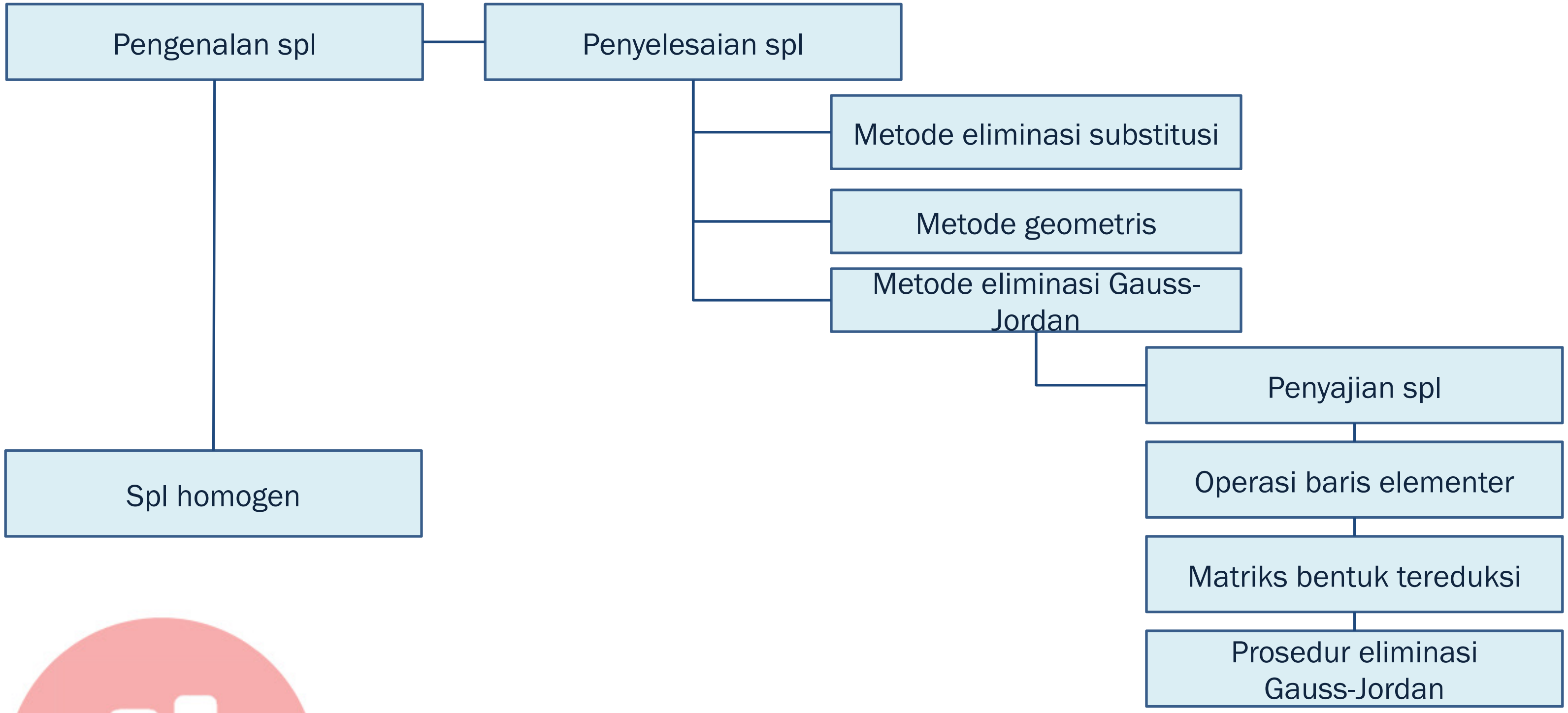
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} x_2 + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} x_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Kombinasi linear kolom-kolom matriks koefisien

Penyajian spl

- Sebagai kumpulan persamaan-persamaan
- Persamaan matriks
- Matriks diperbesar (*augmented*)
- Kombinasi linear kolom-kolom matriks koefisien

Latihan: buatlah satu spl sebagai himpunan persamaan-persamaan, kemudian sajikan spl tersebut dalam persamaan matriks, dan matriks diperbesar.



1.3 Operasi baris elementer

Spl-spl ekuivalen

Dua spl dikatakan **ekuivalen** jika memiliki **himpunan penyelesaian** yang **sama**

Spl (1) (2) (3) dan (4) ekuivalen. Perhatikan operasi yang diterapkan untuk mengubah spl ekuivalen.

(1)
$$\begin{array}{rcrcrl} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = 10 \\ x_1 & + & & & x_3 & = 5 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & = 15 \end{array}$$
$\longrightarrow$ Himpunan penyelesaian {(5,5,0)}

(2)
$$\begin{array}{rcrcrl} 10x_1 & + & 10x_2 & + & 10x_3 & = 100 \\ x_1 & + & & & x_3 & = 5 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & = 15 \end{array}$$
$\longrightarrow$ Himpunan penyelesaian {(5,5,0)}

Persamaan (1) dikalikan 10

(3)
$$\begin{array}{rcrcrl} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = 10 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & = 15 \\ x_1 & + & & & x_3 & = 5 \end{array}$$
$\longrightarrow$ Himpunan penyelesaian {(5,5,0)}

Persamaan (2) dan (3) ditukar tempat

(4)
$$\begin{array}{rcrcrl} 3x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & = 20 \\ x_1 & + & & & x_3 & = 5 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & = 15 \end{array}$$
$\longrightarrow$ Himpunan penyelesaian {(5,5,0)}

Persamaan (1) dijumlahkan dengan 2x persamaan (2), persamaan kedua tetap

Operasi tidak mengubah solusi

Operasi ini jika dilakukan pada spl, maka menghasilkan spl lain yang ekuivalen, atau tidak mengubah solusi:

1. Menukar posisi (urutan) dua persamaan
2. Mengalikan persamaan dengan konstanta **tidak nol**.
3. Menjumlahkan sebuah persamaan dengan kelipatan skalar persamaan yang lain.

Apabila spl disajikan dalam matriks *augmented*, maka operasipada persamaan diganti dengan operasi pada baris karena setiap baris menyajikan persamaan, disebut operasi baris elementer.

Operasi baris elementer (obe)

Menerapkan obe pada spl tidak mengubah solusi spl tersebut.

Ada 3 jenis operasi baris elementer:

1. Mengalikan persamaan dengan konstanta tidak nol
2. Menukar posisi dua persamaan
3. Persamaan ditambah dengan hasil kali skalar dengan persamaan lain

Pertanyaan:

1. Mengapa skalar (konstanta) pengali persamaan tidak boleh nol?
2. Jika persamaan ke -2 dijumlahkan dengan *k* kali persamaan ke-3, apakah persamaan ke-3 dihilangkan dari spl?
3. Jika spl disajikan dalam matriks augmented, bagaimana operasi di atas dilakukan?

Contoh: Operasi baris elementer

Diperikan spl

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 10 \\ x_1 + \quad\;\; x_3 &= 5 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 &= 15 \end{aligned} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 10 \\ 1 & 0 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 15 \end{bmatrix}$$

1. $R_1 \leftarrow 10R_1$

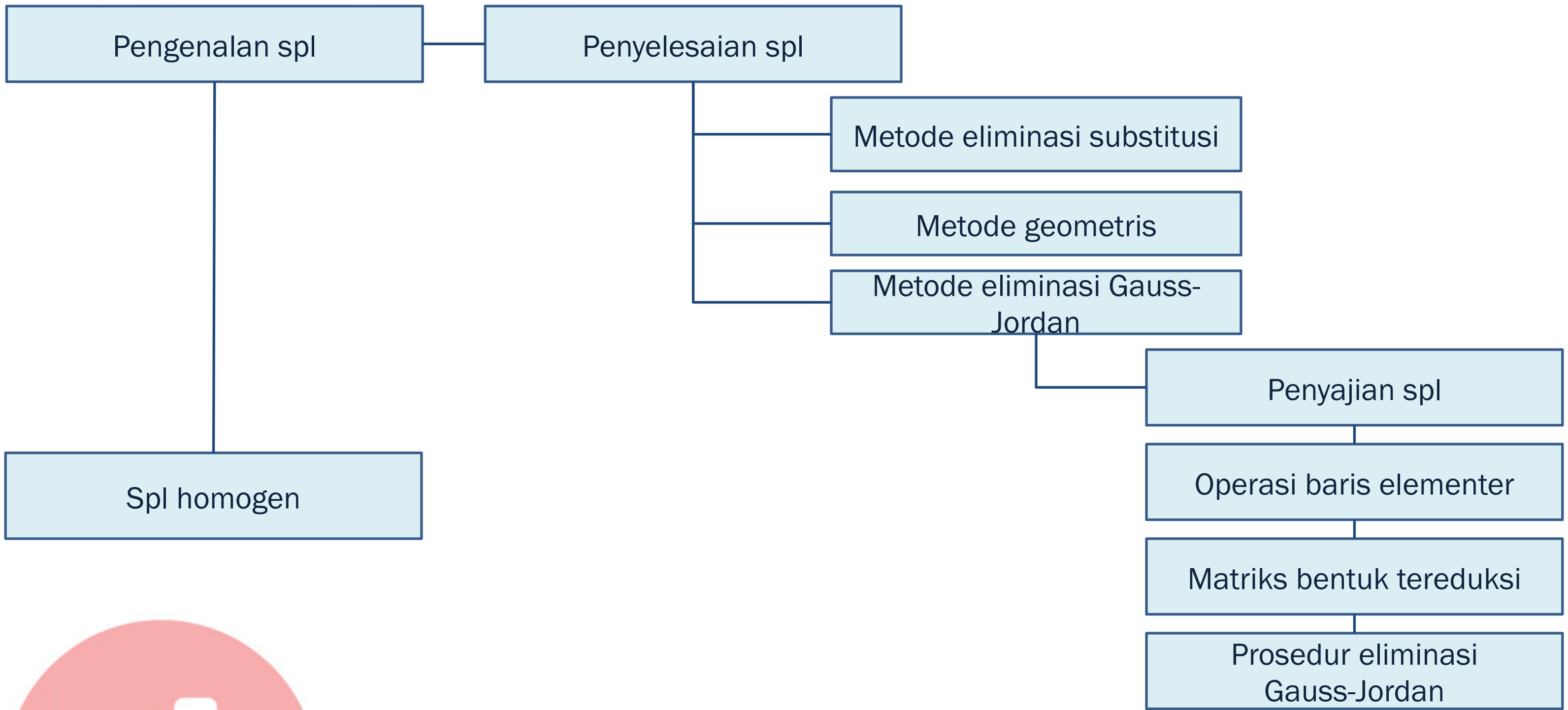
$$\begin{aligned} 10x_1 + 10x_2 + 10x_3 &= 100 \\ x_1 + \quad\;\; x_3 &= 5 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 &= 15 \end{aligned} \qquad \begin{bmatrix} 10 & 10 & 10 & 100 \\ 1 & 0 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 15 \end{bmatrix}$$

2. $R_1 \leftrightarrow R_3$

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 3x_3 &= 15 \\ x_1 + \quad\;\; x_3 &= 5 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 10 \end{aligned} \qquad \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 15 \\ 1 & 0 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 10 \end{bmatrix}$$

3. $R_1 \leftarrow R_1 + 2R_2$

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 + 3x_3 &= 20 \\ x_1 + \quad\;\; x_3 &= 5 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 &= 15 \end{aligned} \qquad \begin{bmatrix} 3 & 1 & 3 & 20 \\ 1 & 0 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 15 \end{bmatrix}$$



1.4 Matriks berbentuk eselon baris tereduksi (ebt)

Spl yang mudah dilihat solusinya

Perhatikan ketiga spl dalam bentuk matriks diperbesar berikut:

1. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 8 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

Bagaimana penyelesaian SPL 1, 2 dan 3?

Karakteristik tiga spl:

1. elemen pertama tak nol adalah 1 (dinamakan **satu utama**)
2. satu utama baris berikutnya berada lebih kanan
3. jika ada baris nol, ada di bagian bawah
4. elemen yang satu kolom dengan **satu utama** nol semua

Bagaimana karakteristik bentuk matriks-matriks diperbesar di atas?

Satu utama

Satu utama adalah **elemen tidak nol pertama** pada baris

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

1 utama

bukan 1 utama

Syarat kondisi dan contoh matriks

	Ya ✔	Tidak ✘
1) Elemen pertama tidak nol adalah 1 (**satu utama**)	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
2) Satu utama baris berikutnya berada **lebih kanan** dari baris sebelumnya	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
3) Baris nol berada di paling **bawah**	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}$
4) Elemen di **atas satu utama nol** semua	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Matriks bentuk eselon baris (eb): memenuhi 3 syarat berikut

1) Elemen pertama tidak nol adalah 1 (**satu utama**)

2) Satu utama baris berikutnya berada **lebih kanan** dari baris sebelumnya

3) **Baris nol** berada di paling **bawah**

Ya

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Tidak

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

Matriks bentuk eselon baris tereduksi (ebt): memenuhi 4 syarat

1) Elemen pertama tidak nol adalah 1 (**satu utama**)

2) Satu utama baris berikutnya berada **lebih kanan** dari baris sebelumnya

3) Baris nol berada di paling **bawah**

4) Elemen di **atas satu utama nol** semua

Ya

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Tidak

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Matriks berbentuk eb dan ebt

Matriks yang memenuhi kondisi (1), (2), (3) disebut matriks berbentuk **eselon baris.**

Jika matriks memenuhi kondisi (1), (2), (3), dan **(4)**, maka matriks dalam bentuk **eselon baris tereduksi**.

$$\begin{pmatrix} 1 & * & * & * \\ 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & * & * & * \\ 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & * \\ 0 & 1 & 0 & * \\ 0 & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$*$ $\rightarrow$ nilai bisa berapa saja

1 = satu utama

0 $\rightarrow$ nilai harus nol

eselon baris.

eselon baris tereduksi

Latihan1

- Tentukan apakah matriks A dalam bentuk eselon baris, eselon baris tereduksi atau tidak keduanya.

$$1. A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$2. A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$3. A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$4. A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$5. A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$6. A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Bentuk eb tidak ebt

Bentuk ebt

Bukan eb maupun ebt

Bentuk-bentuk eselon baris matriks persegi

- Matriks 2x2:

3 kemungkinan bentuk EB

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix};\begin{bmatrix} 1 & * \\ 0 & 0 \end{bmatrix};\begin{bmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3 kemungkinan bentuk EBT

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix};\begin{bmatrix} 1 & * \\ 0 & 0 \end{bmatrix};\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Matriks 3x3

* : bisa berapa saja

8 kemungkinan bentuk EB

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};\begin{bmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};\begin{bmatrix} 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};\begin{bmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};\begin{bmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};\begin{bmatrix} 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};\begin{bmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

8 kemungkinan bentuk EBT

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};\begin{bmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};\begin{bmatrix} 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};\begin{bmatrix} 1 & 0 & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};\begin{bmatrix} 1 & * & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

Contoh spl dengan matriks bentuk ebt

Matriks diperbesar spl dalam bentuk ebt

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Dari matriks bentuk ebt di atas, spl dapat disajikan

$$x_1 = -5$$
$$x_2 = 0$$
$$x_3 = 1$$

Spl di atas sudah menunjukkan penyelesaiannya. Terlihat bahwa terdapat tepat satu penyelesaian

Jika matriks diperbesar dalam bentuk ebt, maka solusinya mudah ditentukan.

SPL dengan tak hingga banyak penyelesaian

Matriks *augmented spl* dalam bentuk ebt $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 8 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

Jika matriks augmented dalam bentuk ebt, maka solusinya mudah ditentukan

Latihan: sajikan dalam bentuk spl biasa.

Spl mempunyai takhingga banyak penyelesaian.

$$\text{jika } x_4 = t, \text{ maka} \\ x_1 = 2 - 8t \\ x_2 = -3t \\ x_3 = 4 - 2t$$

penyelesaian umum

jika diambil t =2, maka

$$x_1 = -14 \\ x_2 = -6 \\ x_3 = 0$$

penyelesaian khusus

x_1, x_2, x_3 disebut **parameter utama**, x_4 disebut **parameter bebas**

Parameter utama dan bebas

Diberikan spl $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ dan A berordo mxn.

Maka matriks diperbesar C *berordo* m x $(n+1)$

- **Parameter utama** adalah *unknown* yang bersesuaian dengan satu utama pada bentuk ebt dari C
- **Parameter bebas** adalah *unknown* yang bersesuaian dengan bukan satu utama.

Jika C berordo mxn, maka banyaknya *unknown* adalah n (sama dengan banyaknya kolom pada matriks koefisian):

(banyaknya parameter bebas) + (banyaknya parameter utama) =n

Spl tidak konsisten

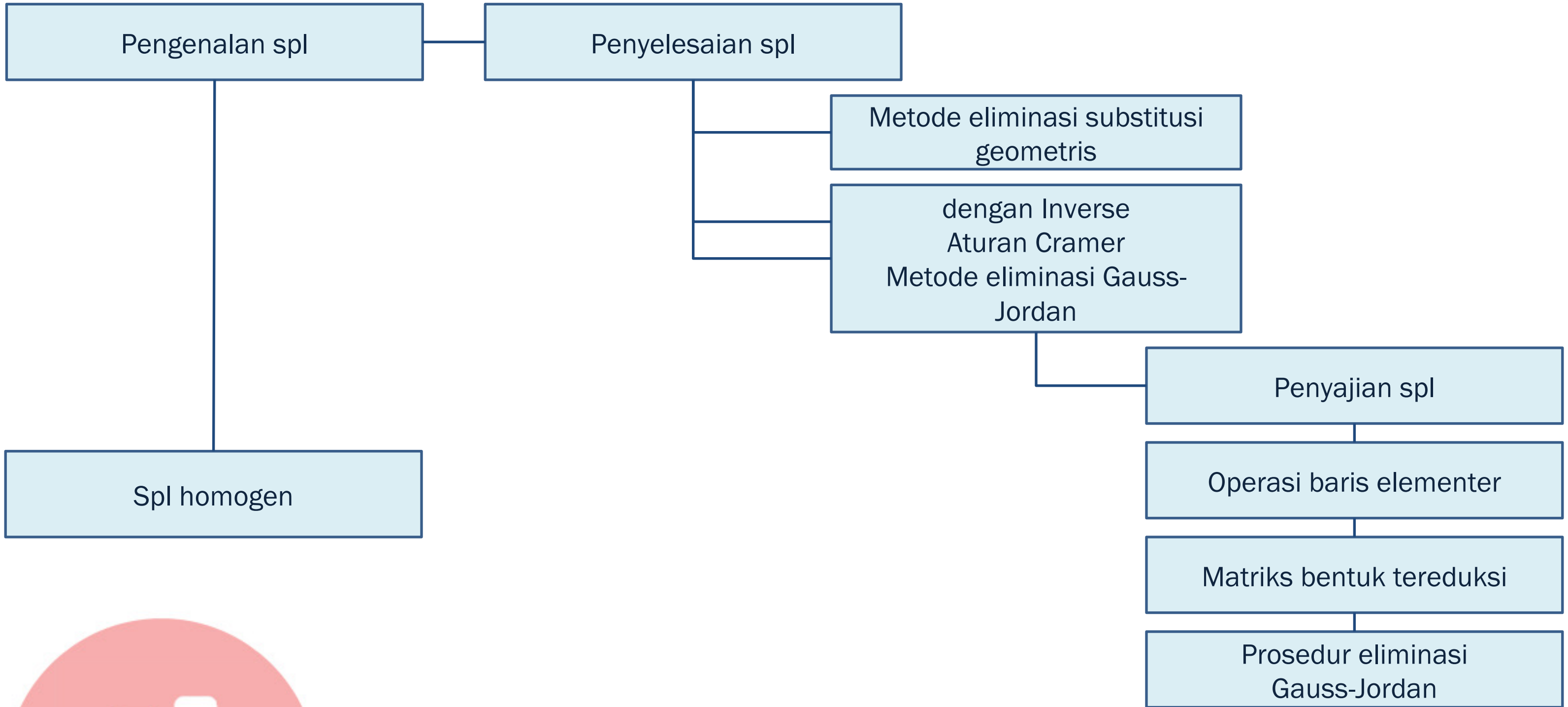
Matriks *augmented spl* dalam bentuk ebt

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 8 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Jika matriks augmented dalam bentuk ebt, maka solusinya mudah ditentukan

Latihan: sajikan dalam bentuk spl biasa.

Spl tidak mempunyai penyelesaian. Cermati persamaan ke tiga (baris ke-3 matriks di atas: $0x + 0y + 0z = 1$. Tidak ada nilai yang jika disubstitusikan ke x, y, z membuat persamaan dipenuhi.



1.6a Metode dengan Inverse

Mencari solusi dengan inverse

Metode ini dapat diterapkan pada spl $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ dengan A mempunyai inverse.

$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ (kalikan ruas kiri dan kanan dengan A^{-1})

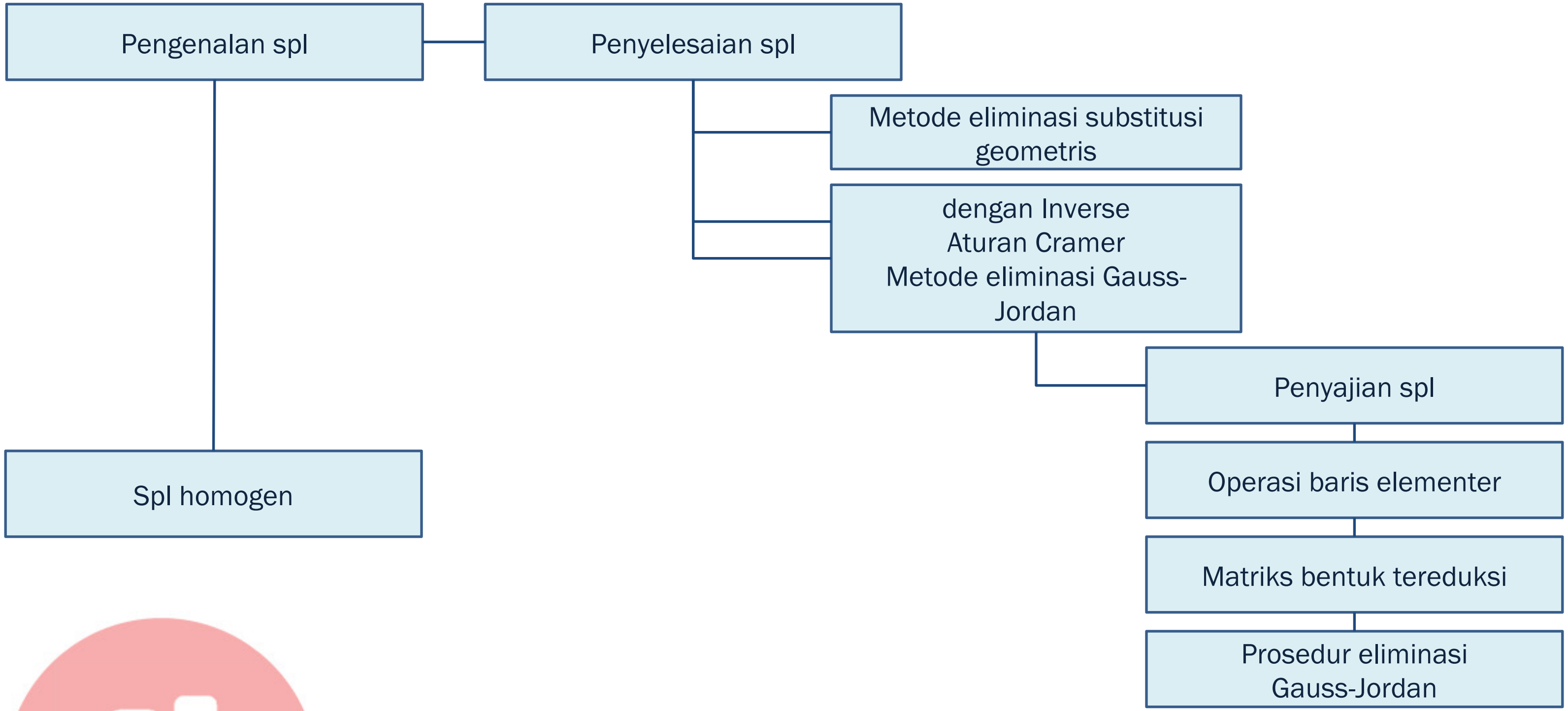
$A^{-1}A\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$

$\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$ (solusi spl)

Soal: mencari solusi dengan inverse

- Berikan contoh spl dengan matriks koefisien berordo 3x3 yang mempunyai tepat satu solusi. Selesaikan dengan menggunakan inverse.

Catatan: Inverse matriks akan dibahas pada Bab 2



1.6b Aturan Cramer

Mencari solusi dengan Aturan Cramer

- Metode ini dapat diterapkan pada spl $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ dengan A mempunyai inverse.

- Solusi

  $x_i = \det(A_i)/\det(A)$

  Det(A) : determinan matriks A

  A_i matriks yang diperoleh dari A dengan mengganti kolom ke-i dengan b.

Mencari solusi dengan Aturan Cramer

Berikan contoh menentukan penyelesaian spl dengan menerapkan Aturan Cramer.

Perhatikan syarat agar Aturan Cramer dapat diterapkan.

Catatan: Penurunan Aturan Cramer akan dibahas pada Bab 3

Pengenalan spl

Penyelesaian spl

Metode eliminasi substitusi geometris

dengan Inverse
Aturan Cramer
Metode eliminasi Gauss-Jordan

Penyajian spl

Operasi baris elementer

Matriks bentuk tereduksi

Prosedur eliminasi Gauss-Jordan

Spl homogen

1.6c Prosedur Eliminasi Gauss -Jordan

Spl-spl ekuivalen

Dua spl dikatakan ekuivalen jika memiliki penyelesaian yang sama.

Contoh: spl a, b, c, d saling ekuivalen karena solusinya sama.

a.
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 16 \\ 2x_1 + 2x_2 &= 14 \\ 2x_1 + x_3 &= 8 \end{aligned}$$

b.
$$\begin{aligned} 10x_1 + 20x_2 + 10x_3 &= 160 \\ 2x_1 + 2x_2 &= 14 \\ 2x_1 + x_3 &= 8 \end{aligned}$$

c.
$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 &= 14 \\ 2x_1 + x_3 &= 8 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 &= 16 \end{aligned}$$

d.
$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 &= 14 \\ 2x_1 + x_3 &= 8 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 24 \end{aligned}$$

Spl yang paling mudah dilihat solusinya

Diberikan spl dengan matriks diperbesar: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ dalam bentuk ebt

Dari matriks bentuk ebt di atas, spl dapat disajikan:

$$\begin{aligned} x_1 &= -5 \\ x_2 &= 0 \\ x_3 &= 1 \end{aligned}$$

Spl di atas sudah menunjukkan penyelesaiannya.

Jika matriks augmented dalam bentuk ebt, maka solusi spl mudah ditentukan.

Contoh spl ekuivalen & solusi

(a)

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 8x_3 &= 3 \\ x_1 + x_2 &= -5 \\ 2x_1 + 2x_3 &= -8 \end{aligned}$$

ekuivalen dengan

(b)

$$\begin{aligned} x_1 &= -5 \\ x_2 &= 0 \\ x_3 &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 8 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & -5 \\ 2 & 2 & 0 & -8 \end{pmatrix}$$

ekuivalen <u>baris</u> dengan

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Matriks *augmented* dalam bentuk ebt

Spl mudah ditentukan penyelesaiannya jika dalam bentuk ebt.

Bagaimana mengubah spl (dalam bentuk matriks *augmented*) ke spl lain yang ekuivalen baris dan dalam bentuk ebt?

Prinsip metode eliminasi Gauss-Jordan

- Metode eliminasi Gauss-Jordan: mengubah matriks *augmented* spl ke dalam SPL lain yang ekuivalen (penyelesaiannya sama) dan penyelesaiannya mudah dilihat, yaitu matriks *augmented*nya dalam bentuk eselon baris tereduksi.

- Untuk menjamin bahwa SPL yang diperoleh ekuivalen dengan spl semula, maka digunakan operasi baris elementer.

- *Eliminasi Gauss-Jordan*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{operasi-operasi baris elementer}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & b_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & b_2 \\ & \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & b_m \end{pmatrix}$$

matriks augmented A ebt(A)

Prinsip eliminasi Gauss Jordan

- Diberikan spl *A*

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

- Eliminasi Gauss Jordan:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_n \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{obe}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & b_1' \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & b_2' \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & b_n' \end{pmatrix}$$

$R_i \leftarrow k * R_i$

$R_i \leftrightarrow R_j$

$R_i \leftarrow R_i + k * R_j$

Spl *A*
(dalam bentuk matriks augmented)

ebt(*A*) **:** matriks **ekuivalen** *A* berbentuk **ebt**

Prosedur eliminasi Gauss Jordan

1. Tentukan **kolom pertama** dari *A* yang memuat kolom **tak nol.**
2. Jika entry paling atas pada kolom ini adalah **nol**, lakukan **tukar baris** dengan baris lain yang entri pada kolom ini tidak nol.
3. Sekarang elemen pertama pada kolom adalah tidak nol. **Gantikan** semua **entry** di **bawahnya** dengan **0** dengan cara jumlahan baris yang memuatnya dengan kelipatan skalar baris pertama.
4. Setelah langkah 1-3 akan diperoleh matriks A_1
5. Lakukan langkah 1-3 pada matriks A_1.
6. **Ulangi** cycle langkah-langkah di atas sehingga diperoleh bentuk **matriks segitiga atas.**

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 4 \\ 4x_1 + 4x_2 + 2x_3 &= 4 \\ 10x_1 + 10x_2 + 10x_3 &= 40 \\ 2x_2 &= 4 \end{aligned}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 4 \\ 10 & 10 & 10 & 40 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Prosedur eliminasi Gauss Jordan

1. Tentukan **kolom pertama** dari A yang memuat kolom **tak nol.**
2. Jika entry paling atas pada kolom ini adalah **nol**, lakukan **tukar baris** dengan baris lain yang entri pada kolom ini tidak nol.
3. Sekarang elemen pertama pada kolom adalah tidak nol. **Gantikan** semua **entry** di **bawahnya** dengan **0** dengan cara jumlahan baris yang memuatnya dengan kelipatan skalar baris pertama.
4. Setelah langkah 1-3 akan diperoleh matriks A_1
5. Lakukan langkah 1-3 pada matriks A_1.
6. **Ulangi** cycle langkah-langkah di atas sehingga diperoleh bentuk **matriks segitiga atas.**

Bukan nol

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 4 \\ 10 & 10 & 10 & 40 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Prosedur eliminasi Gauss Jordan

1. Tentukan **kolom pertama** dari A yang memuat kolom **tak nol.**
2. Jika entry paling atas pada kolom ini adalah **nol**, lakukan **tukar baris** dengan baris lain yang entri pada kolom ini tidak nol.
3. Sekarang elemen pertama pada kolom adalah tidak nol. **Gantikan** semua **entry** di **bawahnya** dengan **0** dengan cara jumlahan baris yang memuatnya dengan kelipatan skalar baris pertama.
4. Setelah langkah 1-3 akan diperoleh matriks A_1
5. Lakukan langkah 1-3 pada matriks A_1.
6. **Ulangi** cycle langkah-langkah di atas sehingga diperoleh bentuk **matriks segitiga atas.**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 4 \\ 10 & 10 & 10 & 40 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_3 \leftarrow R_3 + (-10)*R_1]{R_2 \leftarrow R_2 + (-4)*R_1}$$

$$\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 1 & 1 & 4 \\ \hline 0 & -3 & -2 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \end{array}\right)$$

A_1

Prosedur eliminasi Gauss Jordan

1. Tentukan **kolom pertama** dari *A* yang memuat kolom **tak nol.**
2. Jika entry paling atas pada kolom ini adalah **nol,** lakukan **tukar baris** dengan baris lain yang entri pada kolom ini tidak nol.
3. Sekarang elemen pertama pada kolom adalah tidak nol. **Gantikan** semua **entry** di **bawahnya** dengan **0** dengan cara jumlahan baris yang memuatnya dengan kelipatan skalar baris pertama.
4. Setelah langkah 1-3 akan diperoleh matriks A_1
5. **Lakukan langkah 1-3 pada matriks A_1.**
6. **Ulangi** cycle langkah-langkah di atas sehingga diperoleh bentuk **matriks segitiga atas.**

$$A = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 1 & 1 & 4 \\ \hline 0 & -3 & -2 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \end{array}\right), \text{dengan } A_1 = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -12 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Bukan nol

1

2

3

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -3 & -2 & -12 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \end{array}\right), \xrightarrow{R_4 \leftarrow 3R_4 + 2 * R_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -3 & -2 & -12 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -12 \end{array}\right)$$

Prosedur eliminasi Gauss Jordan

1. Tentukan **kolom pertama** dari A yang memuat kolom **tak nol**.
2. Jika entry paling atas pada kolom ini adalah **nol**, lakukan **tukar baris** dengan baris lain yang entri pada kolom ini tidak nol.
3. Sekarang elemen pertama pada kolom adalah tidak nol. **Gantikan** semua **entry** di **bawahnya** dengan **0** dengan cara jumlahan baris yang memuatnya dengan kelipatan skalar baris pertama.
4. Setelah langkah 1-3 akan diperoleh matriks A_1
5. Lakukan langkah 1-3 pada matriks A_1.
6. **Ulangi cycle langkah-langkah di atas sehingga diperoleh bentuk matriks segitiga atas.**

$$A = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -3 & -2 & -12 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -12 \end{array}\right), \text{dengan } A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -4 & -12 \end{pmatrix}$$

Nol. Maka, tukar baris

1

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -3 & -2 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -4 & -12 \end{array}\right)$$

2

$$\xrightarrow{R_4 \leftrightarrow R_3}$$

Matriks segitiga atas

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -3 & -2 & -12 \\ 0 & 0 & -4 & -12 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Prosedur eliminasi Gauss Jordan

7. Ubah semua **elemen utama menjadi 1 utama** dengan mengalikan baris dengan konstanta tidak nol, sehingga diperoleh bentuk eb.
8. Pergunakan 1 utama untuk **mengubah semua elemen tak nol pada kolom tersebut (di atasnya) menjadi 0** dengan melakukan jumlahan baris dengan kelipatan skalar baris yang memuat 1 utama. Diperoleh matriks **ebt.**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -3 & -2 & -12 \\ 0 & 0 & -4 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_3 \leftarrow (-1/4)*R_3]{R_2 \leftarrow (-1/3)*R_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2/3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Berbentuk eb

Prosedur eliminasi Gauss Jordan

7. Ubah semua **elemen utama menjadi 1 utama** dengan mengalikan baris dengan konstanta tidak nol, sehingga diperoleh bentuk eb.
8. Pergunakan 1 utama untuk **mengubah semua elemen tak nol pada kolom tersebut (di atasnya) menjadi 0** dengan melakukan jumlahan baris dengan kelipatan skalar baris yang memuat 1 utama. Diperoleh matriks **ebt.**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2/3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_1 \leftarrow R_1 + (-1) * R_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1 & 2/3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Prosedur eliminasi Gauss Jordan

7. Ubah semua **elemen utama menjadi 1 utama** dengan mengalikan baris dengan konstanta tidak nol, sehingga diperoleh bentuk eb.
8. Pergunakan 1 utama untuk **mengubah semua elemen tak nol pada kolom tersebut (di atasnya) menjadi 0** dengan melakukan jumlahan baris dengan kelipatan skalar baris yang memuat 1 utama. Diperoleh matriks **ebt.**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2/3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_2 \leftarrow R_2 + \left(-\frac{2}{3}\right)R_3]{R_1 \leftarrow R_1 + (-1)R_3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ekuivalen *A* &
berbentuk ebt

Latihan 2: eliminasi Gauss-Jordan

- Selesaikan spl berikut dengan eliminasi Gauss-Jordan

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 66 \\ x_1 + x_2 &= 39 \\ 2x_1 + 3x_2 &= 105 \\ 2x_1 + x_2 &= 51 \end{aligned} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 66 \\ 1 & 1 & 39 \\ 2 & 3 & 105 \\ 2 & 1 & 51 \end{pmatrix}$$

- Matriks augmented dari spl diatas direduksi untuk menentukan solusinya.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 66 \\ 1 & 1 & 39 \\ 2 & 3 & 105 \\ 2 & 1 & 51 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_4 \leftarrow R_4 + (-2)*R_1]{\substack{R_2 \leftarrow R_2 + (-1)*R_1 \\ R_3 \leftarrow R_3 + (-2)*R_1}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 66 \\ 0 & -1 & -27 \\ 0 & -1 & -27 \\ 0 & 3 & 81 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_2 \leftarrow (-1)*R_2]{\substack{R_3 \leftarrow R_3 + (-1)*R_2 \\ R_4 \leftarrow R_4 + (1)*R_2}}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 66 \\ 0 & 1 & 27 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{Bentuk eb}} \xrightarrow{R_1 \leftarrow R_1 + (-2)*R_2} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 12 \\ 0 & 1 & 27 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{Bentuk ebt}}$$

Penyelesaian $\begin{aligned} x_1 &= 12 \\ x_2 &= 27 \end{aligned}$

Latihan 3: eliminasi Gauss-Jordan

- Tentukan penyelesaian spl berikut ini dengan eliminasi Gauss-Jordan

$$x - 2y = 4$$
$$2x - 4y = 5$$

- Matriks augmented spl direduksi.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 2 & -4 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftarrow R_2 - 2R_1} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftarrow (-1/3)R_1} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ \boxed{0 \quad 0 \quad 1} \end{pmatrix}$$

$$x - 2y = 4$$
$$\boxed{0x - 0y = 1}$$

Spl tidak konsisten

Ciri spl tidak konsisten

- Contoh 6:

$$A=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\quad \begin{matrix}1x_1+0x_2=2\\0x_1+x_2=1\end{matrix}$$

$$B=\begin{pmatrix}1&1&3\\0&1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\quad \begin{matrix}1x_1+1x_2=3\\0x_1+1x_2=1\\\boxed{0x_1+0x_2=1}\end{matrix}$$

$$C=\begin{pmatrix}1&2&1&5\\0&1&1&2\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\quad \begin{matrix}1x_1+2x_2+1x_3=5\\0x_1+1x_2+1x_3=2\\\boxed{0x_1+0x_2+0x_3=1}\end{matrix}$$

- Ciri matriks augmented dalam bentuk eselon baris dari spl tidak konsisten adalah memuat baris bebentuk [0 0 0 ... 0 1]

- Interpretasi baris di atas $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + \ldots + 0x_n = 1$ (tidak konsisten)

Latihan 4: matriks augmented dalam bentuk eselon baris

- Tentukan matriks augmented mana yang menyajikan spl konsisten dengan satu penyelesaian, tak hingga banyak penyelesaian dan tidak konsisten?

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0&8\\0&1&0&3\\0&0&1&2\end{pmatrix}\quad C=\begin{pmatrix}1&2&4\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\quad E=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\quad G=\begin{pmatrix}1&2&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$B=\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&2&3\\0&0&0&1\end{pmatrix}\quad D=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&3\\0&0&0\end{pmatrix}\quad F=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

Jawaban:

a. Satu penyelesaian

b. tidak konsisten,

c. takhingga banyak penyelesaian

d. satu penyelesaian,

e. tidak mempunyai penyelesaian,

f. tidak mempunyai penyelesaian,

g. tidak mempunyai penyelesaian

- Pengenalan spl
  - Spl homogen
- Penyelesaian spl
  - Metode eliminasi substitusi
  - Metode geometris
  - Metode eliminasi Gauss-Jordan
    - Penyajian spl
    - Operasi baris elementer
    - Matriks bentuk tereduksi
    - Prosedur eliminasi Gauss-Jordan

1.6 Spl homogen

Spl homogen: penyajian geometris dan konsistensi

Definisi 1.4: Spl homogen

Sistem persamaan linier disebut **homogen** jika **konstanta-konstanta** di sebelah **kanan tanda sama dengan** $(b_1, b_2, ..., b_n)$ adalah **nol.**

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n &= 0 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n &= 0 \end{aligned}$$

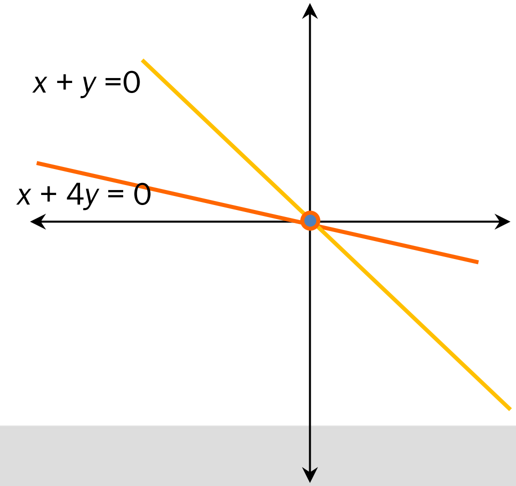
Contoh 7:

$$x + y = 0$$
$$x + 4y = 0$$

Representasi matriks augmented

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} & 0 \end{pmatrix}$$

- Representasi geometris



Penyelesaian spl homogen

- Konsistensi:

  Setiap spl homogen pasti konsisten.

$$
\begin{aligned}
a_{11}.0 + a_{12}.0 + a_{13}.0 + \ldots + a_{1n}.0 &= 0 \\
a_{21}.0 + a_{22}.0 + a_{23}.0 + \ldots + a_{2n}.0 &= 0 \\
&\vdots \\
a_{m1}.0 + a_{m2}.0 + a_{m3}.0 + \ldots + a_{mn}.0 &= 0
\end{aligned}
$$

Substitusi $x_{1,}\, x_{2,\, \ldots,}\, x_n$ dengan 0 (nol): setiap persamaan terpenuhi

- Spl homogen memiliki paling tidak satu penyelesaian, yaitu:

  $(x_{1,}\, x_{2,\, \ldots,}\, x_n) = (0, 0, \ldots, 0)$; disebut **penyelesaian trivial**

Spl homogen dengan tak hingga banyak penyelesaian

- Diberikan spl homogen berikut:

$$
\begin{aligned}
x + y - 3z &= 0\\
2x + y - 4z &= 0\\
4x + 2y - 8z &= 0
\end{aligned}
$$

- Matriks augmentednya berbentuk:

$$
\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & -4 & 0 \\ 4 & 2 & -8 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{obe}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
$$

- Penyelesaian:

$$
\begin{aligned}
x_3 &= a;\\
x_1 &= a;\\
x_2 &= 2a
\end{aligned}
$$

  - Parameter utama: x_1 dan x_2
  - Parameter bebas: x_3

- Sistem persamaan linier homogen mempunyai penyelesaian **nontrivial** bila dan hanya bila mempunyai paling sedikit satu **parameter bebas.**

Latihan 5

Selesaikan spl berikut

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 8 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- Banyaknya unknown > banyaknya persamaan
- Pasti terdapat parameter bebas, maka **tidak mungkin mempunyai tepat satu solusi**
- Mempunyai tak hingga banyak solusi atau tidak konsisten

Spl *under-determined* dan spl *over-determined*

- Spl *under-determined*: spl dengan banyaknya *unknown* > banyaknya persamaan.
  - jika memiliki parameter bebas, maka spl memiliki tak hingga banyak solusi atau tidak konsisten
  - tidak mungkin memiliki tepat satu solusi

- Spl *over-determined*: banyaknya persamaan > banyaknya *unknown*

Latihan 6

Selesaikan SPL berikut

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 10 \\ 2 & 1 & 5 \\ 3 & 3 & 15 \end{bmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 6 & 8 \\ 3 & 9 & 12 \\ 10 & 30 & 40 \end{pmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 6 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Banyaknya *unknown* ≤ banyaknya persamaan

Kemungkinan:
memiliki tepat 1 solusi, memiliki tak hingga banyak solusi atau tidak konsisten

Konsep kunci

Buatlah ringkasan materi yang baru saja kamu pelajari.

Periksalah hasil ringkasanmu, apakah sudah mencakup semua konsep penting berikut ini?

- Persamaan linier
- Sistem persamaan linier
- Penyelesaian spl
- Spl konsisten
- Eliminasi-substitusi
- Parameter bebas dan parameter utama
- Spl ekuivalen
- Matriks koefisien
- Matriks augmented
- Operasi baris elementer
- Eselon baris dan eselon baris tereduksi
- Satu utama
- Eliminasi Gauss-Jordan
- Spl homogen
- Spl over-determined dan under-determined
- Penyelesaian trivial

Post-test Modul

Post-test

- Jawablah pertanyaan berikut ini:

Berikan masing-masing satu contoh spl tidak homogen *under-determined* yang:

a. memiliki tepat 1 solusi
b. memiliki tak hingga banyak solusi
c. tidak konsisten

Berikan masing-masing satu contoh spl homogen *under-determined* yang:

a. memiliki tepat 1 solusi
b. memiliki tak hingga banyak solusi
c. tidak konsisten

Post-test

- Jawablah pertanyaan berikut ini:

Berikan masing-masing satu contoh spl tidak homogen *over-determined* yang:

a. memiliki tepat 1 solusi
b. tidak memiliki solusi
c. memiliki tak hingga banyak solusi

Berikan masing-masing satu contoh spl homogen *over-determined* yang:

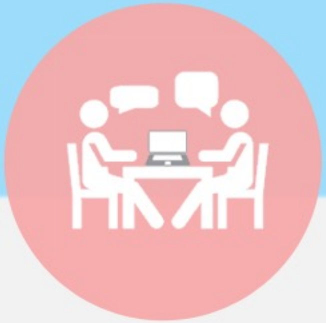
a. memiliki tepat 1 solusi
b. memiliki tak hingga banyak solusi
c. tidak konsisten

Refleksi

- Tulislah
  - 3 hal baru paling menarik yang kamu pelajari dari modul ini.
  - 2 hal terkait yang ingin kamu pelajari lebih lanjut.

- Buatlah *mind-map* pemahaman mengenai spl

Selamat, Anda telah menyelesaikan Modul 1. Bersiaplah untuk modul selanjutnya



MODUL E-LEARNING ALJABAR LINIER
FAKULTAS ILMU KOMPUTER, UNIVERSITAS INDONESIA