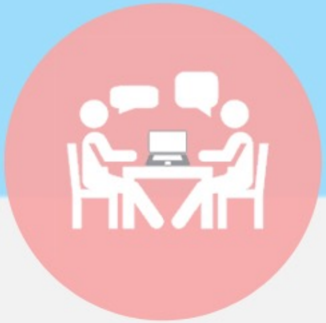
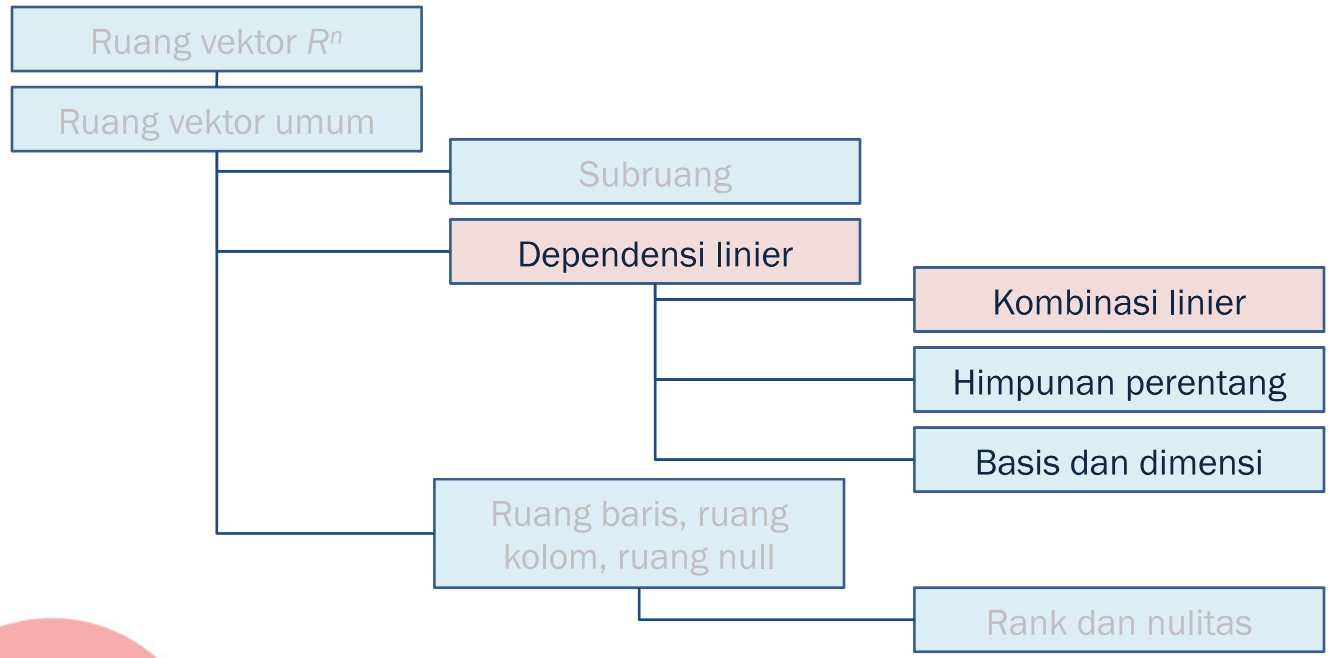


5. Ruang Vektor Umum (Bagian 2)

MODUL E-LEARNING ALJABAR LINIER

FAKULTAS ILMU KOMPUTER, UNIVERSITAS INDONESIA

Prof. Dr. Kasiyah Junus, MSc



5.3 Dependensi linear

MODUL E-LEARNING ALJABAR LINIER
FAKULTAS ILMU KOMPUTER, UNIVERSITAS INDONESIA

Capaian pemelajaran

Setelah mempelajari modul ini, mahasiswa mampu:

1. menentukan hubungan dependensi linier antara vektor-vektor
2. menentukan basis dan dimensi ruang vektor ruang vektor berdimensi hingga,
3. menentukan basis ruang kolom, ruang baris, ruang null suatu matriks

Kombinasi linear

$\mathcal{D}$efinisi 5.3: Kombinasi linear

Vektor **w** disebut kombinasi linier vektor $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r$ jika **w** dapat dinyatakan sebagai : $\mathbf{w} = k_1 \mathbf{v}_1 + k_2 \mathbf{v}_2 + \ldots + k_r \mathbf{v}_r$

Contoh 15:

$\mathbf{u}_1 = (3,2), \mathbf{u}_2 = (1,2), \mathbf{u}_3 = (1,0)$ $\quad$ $\mathbf{a} = (2,2)$ $\quad$ $\mathbf{a} = 0.\mathbf{u}_1 + 1.\mathbf{u}_2 + 1.\mathbf{u}_3$

$\mathbf{v}_1 = (3,2,1), \mathbf{v}_2 = (1,2,1), \mathbf{v}_3 = (1,0,0)$ $\quad$ $\mathbf{b} = (3,2,1)$ $\quad$ $\mathbf{b} = 0.\mathbf{v}_1 + 1.\mathbf{v}_2 + 2.\mathbf{v}_3$

$\mathbf{w}_1 = x^2 + 4, \mathbf{w}_2 = 2x + 2, \mathbf{w}_3 = x^2$ $\quad$ $\mathbf{c} = 3x^2 - 2x + 2$ $\quad$ $\mathbf{c} = 1.\mathbf{w}_1 - 1.\mathbf{w}_2 + 2.\mathbf{w}_3$

Latihan 3: Kombinasi linear

- Apakah **u** = (1, 2) merupakan kombinasi linier **v** =(2, 3) dan **w** = (1, 1)?

Jawab: BENAR

$$\mathbf{u} = k_1\mathbf{v} + k_2\mathbf{w}$$
$$(1,2) = k_1(2,3) + k_2(1,1)$$
$$2k_1 + 1k_2 = 1$$
$$3k_1 + k_2 = 2$$

$$k_2 = 2 - 3k_1$$
$$2k_1 + 1(2 - 3k_1) = 1$$
$$-k_1 = -1$$
$$k_1 = 1$$
$$k_2 = -1$$

$$\mathbf{u} = 1.\mathbf{v} + (-1).\mathbf{w}$$

- Apakah setiap vektor di R^3 merupakan kombinasi linier **i**, **j**, dan **k**?

Jawab: BENAR

Ambil sembarang vektor di R^3, misalnya **u** = (a, b, c), maka

$$\mathbf{u} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$$

Apa kaitan antara kombinasi linier dan operasi baris elementer?

$$\mathbf{v} = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \alpha_3 \mathbf{v}_3 + \ldots + \alpha_n \mathbf{v}_n$$

$\mathbf{v}$ kombinasi linear $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, ..., $\mathbf{v}_n$. Kombinasi linear vektor-vektor melibatkan **jumlahan** vektor dan **perkalian dengan skalar.**

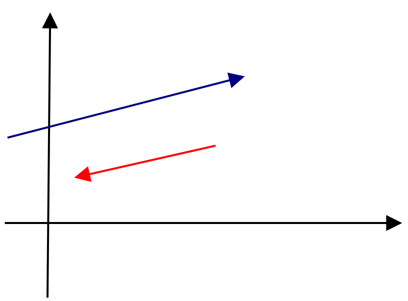
Operasi baris elementer:

1. Tukar baris
2. Kalikan baris dengan konstanta tak nol
3. Jumlahkan baris dengan kelipatan skalar baris yang lain

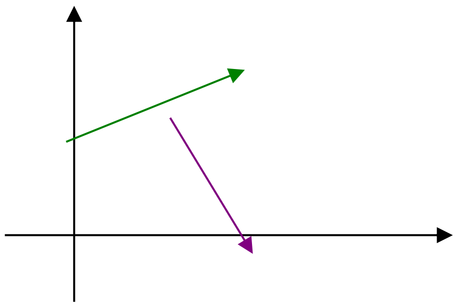
OBE melibatkan **jumlahan** baris-baris (vektor) dan **perkalian** baris (vektor) **dengan skalar.**

Dependensi linier (1)

- **Dua vektor bebas linier** jika dan hanya jika vektor yang satu tidak dapat dinyatakan sebagai kombinasi linier vektor yang lain



dua vektor sejajar: bergantung linier



dua vektor bebas linier

- **Himpunan *S* bebas linier** jika setiap vektor di *S* tidak dapat dinyatakan sebagai kombinasi linier vektor-vektor lain di *S*.

Dependensi linear (2)

Definisi 5.4: Bebas linear

$S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r\}$. Himpunan S bebas linear jika setiap vektor di S tidak dapat dinyatakan sebagai kombinasi linear vektor-vektor lain di S.
$k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + \ldots + k_r\mathbf{v}_r = \mathbf{0}$ pasti mempunyai solusi, salah satunya solusi trivial $k_1 = k_2 = \ldots = k_r = 0$.

Jika terdapat solusi lain, k_i dan k_j tidak nol, maka S bergantung linear; artinya jika solusi trivial adalah satu-satunya solusi, maka S bebas linear.

Definisi 5.5: Bebas linear

$S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r\}$
S bebas linier jika $k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + \ldots + k_r\mathbf{v}_r = \mathbf{0}$ mempunyai tepat satu solusi trivial.

Apakah himpunan berikut ini bebas linea?

$S = \{ \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$,

$\mathbf{v}_1 = (2, 1, 0)$, $\mathbf{v}_2 = (1, 1, 1)$, $\mathbf{v}_3 = (2, 1, 1)$

Prosedur menjawab pertanyaan:

- Dibentuk spl homogen dengan matriks koefisien *A.*
- Kolom-kolom *A* adalah vektor-vektor $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$

- Selesaikan spl homogen tersebut

  Apabila spl memiliki tepat satu solusi, maka *S* bebas linear

  Apabila memiliki tak hingga banyak solusi, maka *S* **bergantung linear**

Apakah himpunan berikut ini bebas linear?

- Dibentuk spl homogen dengan matriks koefisien *A*.

$$\alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + \alpha_3\mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$$
$$\alpha_1(2,1,0) + \alpha_2(1,1,1) + \alpha_3(2,1,1) = \mathbf{0}$$
$$2\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 = 0$$
$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0$$
$$\alpha_2 + \alpha_3 = 0$$

- Kolom-kolom *A* adalah vektor-vektor $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}}_{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{b}}$$

- Selesaikan spl homogen tersebut

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (0,0,0)$$

spl memiliki tepat satu solusi, maka *S* bebas linear

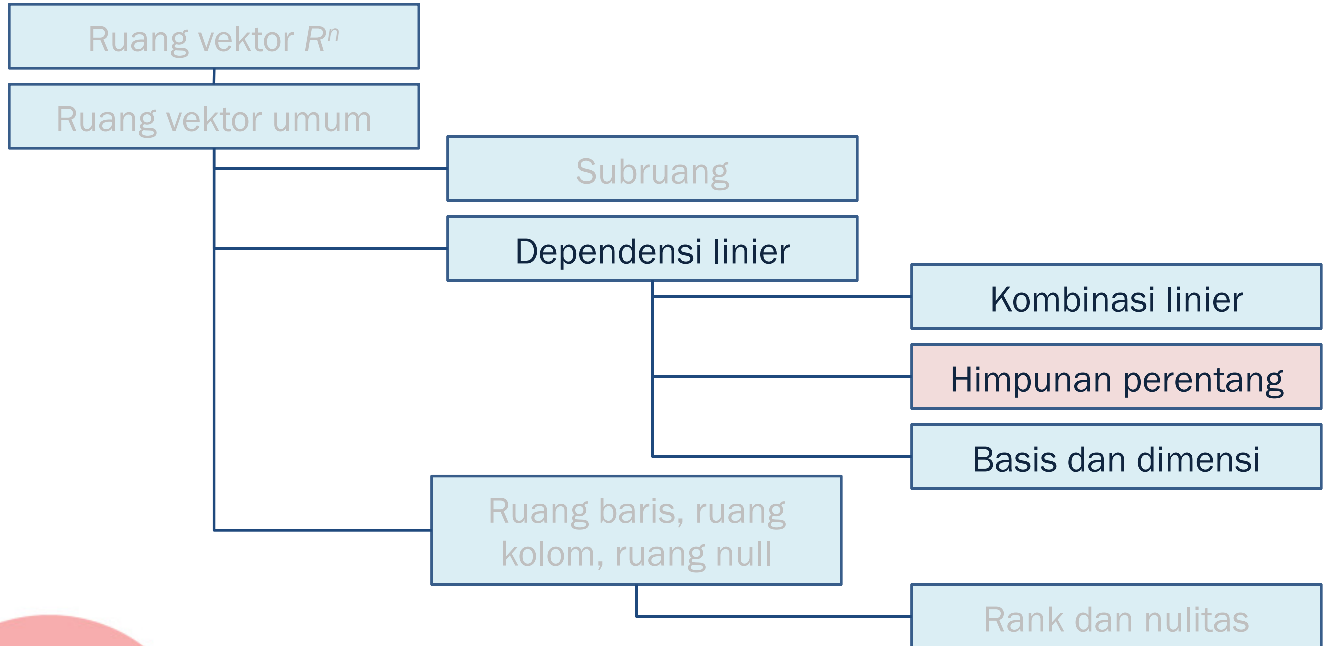
n+1 vektor di R^n

Diberikan 4 vektor di di R^3.

Untuk memeriksa apakah himpunan H yang terdiri dari 4 vektor di atas bebas atau bergantung linier, maka dibentuk spl dengan matriks koefisiennya 3x4.

- Ada 4 *unknown*, dan paling banyak ada 3 parameter utama. Jadi minimal ada satu parameter bebas.
- Dengan demikian, spl tersebut memiliki tak hingga banyak solusi. Kesimpulannya: H bergantung linear.

- Setiap himpunan terdiri dari (n+1) atau lebih vektor di R^n pasti bergantung linear.
- Himpunan n (atau kurang dari n) vektor di R^n bisa bebas, bisa juga bergantung linear.



5.4 Himpunan perentang

Membentuk subruang

𝒟efinisi 5.6: Himpunan perentang

Diberikan $S = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ subhimpunan vektor-vektor dari ruang vektor *V*, maka span(S) menyatakan himpunan semua kombinasi linier vektor-vektor pada *S*.

$T = \{ (1, 0, 0), (0, 1, 0) \}$

Span(*T*) adalah himpunan semua kombinasi linier vektor-vektor *S*.

$\text{Span}(T) = \{ (a, b, 0) \mid a, b \in R \}$

Contoh himpunan perentang (1)

S = { (0, 0, 2), (0, 1, 0) }

Span(S) adalah himpunan semua kombinasi linier vektor-vektor S.

Span(S) ={ (0, a, b) | a, $b \in R$}

Contoh vektor dalam dan di luar Span(S):

$$(0,1,7) \in \text{span}(S)$$
$$(1,1,7) \notin \text{span}(S)$$

Apakah Span(S) subruang R^3?

Contoh himpunan perentang (2)

S = { (0, 0, 2), (0, 1, 0), (4, 0, 0) }

Span(S) adalah himpunan semua kombinasi linier vektor-vektor S

Span(S) = $\{(a, b, c) \mid a, b, c \in R\}$

$$(0,1,7) \in \text{span}(S)$$

$$(1,1,7) \in \text{span}(S)$$

Adakah vektor di R^3 yang tidak dalam Span(S)?

Span(S) = R^3 = $\{(a, b, c) \mid a, b, c \in R\}$

Contoh himpunan perentang (3)

S = { (0, 0, 1), (0, 1, 0), (1, 0, 0), (1, 2, 3) }

Span(S) adalah himpunan semua kombinasi linier vektor-vektor S

Tiga vektor pertama dalam S sudah merentang R^3.

Subset S merentang R^3, maka S pasti merentang R^3.

Span(S) = $\{(a, b, c) \mid a, b, c \in R\}$

Span(S) = R^3

Jika S memuat himpunan perentang ruang vektor V, maka S perentang V.

Contoh himpunan perentang (3)

$T = \{ 2, x^2 \}$

Span(S) adalah himpunan semua kombinasi linier vektor-vektor T

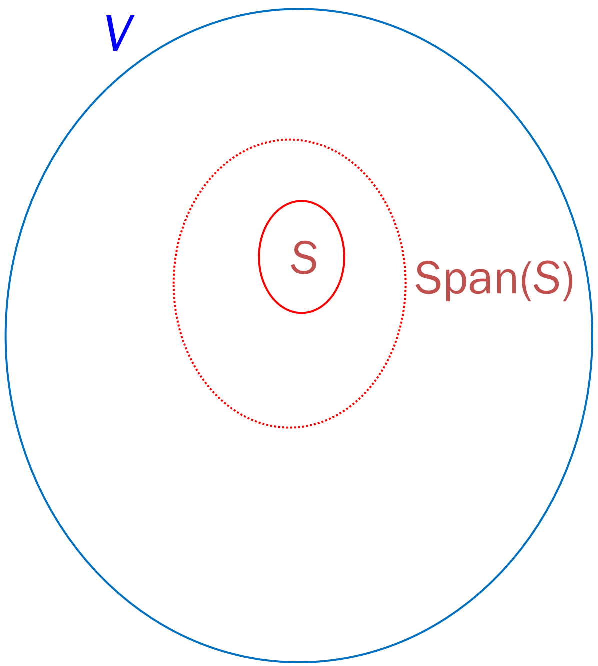
Vektor dalam dan di luar Span(T)

$$x^2 \in \text{span}(T)$$
$$0 \in \text{span}(T)$$
$$1 + 5x^2 \in \text{span}(T)$$
$$1 + 2x \notin \text{span}(T)$$

Span(T) = $\{ a + bx^2 \mid a, b \in R \}$

Span(T) subruang P^3.

Himpunan perentang (4)



$\mathcal{T}$eorema 5.2: Himpunan Perentang

Span(S) adalah subruang terkecil yang memuat *S*.

- Ruang vektor R^n
- Ruang vektor umum
  - Subruang
  - Dependensi linier
    - Kombinasi linier
    - Himpunan perentang
    - Basis dan dimensi
  - Ruang baris, ruang kolom, ruang null
    - Rank dan nulitas

5.5 Basis dan dimensi

Basis dan dimensi ruang vektor

Definisi 5.7: Basis

Diberikan ruang vektor *V* dan $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ subhimpunan vektor-vektor dari ruang vektor *V*, maka *B* adalah basis, jika dua kondisi berikut terpenuhi:

1. *B* bebas linier
2. *B* merentang *V*

Definisi 5.8: Dimensi

Dimensi ruang vektor *V* (dim(*V*)) adalah jumlah vektor dalam basis *V*.

Contoh 16:

a. Basis R^3: $A = \{(0, 0, 1), (0, 1, 0), (1, 0, 0)\}$

   $\dim(R^3) = 3$

b. Basis P^2: $B = \{(1, x, x^2)\}$

   $\dim(P^3) = 3$

Basis ruang vektor

- Basis adalah himpunan bebas linier maksimal

  Setiap 3 vektor bebas linier di R^3 membentuk basis.

  4 atau lebih vektor-vektor di R^3 pasti bergantung linier.

- Basis adalah perentang minimal

  2 vektor tidak cukup untuk merentang R^3

  Untuk merentang R^3 diperlukan minimal 3 vektor. Himpunan 3 vektor merentang R^3 asalkan bebas linier.

Latihan 4: Basis ruang vektor

Basis dari ruang vektor pada umumnya *V* tidak tunggal

- Berikan contoh tiga basis berbeda dari R^2
- Berikan contoh lima basis berbeda dari R^3
- Berikan basis P^3, M^{2x3}
- Jumlah vektor dalam basis ruang vektor *V* adalah sama dan disebut dimensi
- Tentukan dimensi P^n, M^{mxn}, R^n

Contoh jawaban latihan

Basis dari ruang vektor V tidak tunggal

- Himpunan T_1, T_2, T_3 merupakan tiga basis berbeda dari R^2

$$T_1 = \{(0, 1), (1, 0)\},\ T_2 = \{(2, 0), (1, 1)\},\ T_3 = \{(5, 1), (8, 0)\}$$

- Himpunan S_1, S_2, S_3, S_4, S_5 merupakan contoh lima basis berbeda dari R^3

$S_1 = \{(0, 1, 0), (1, 0, 0), (0, 0, 1)\}$, $S_2 = \{(0, 0, 1), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$, $S_3 = \{(0, 5, 0), (5, 0, 0), (0, 0, 5)\}$,
$S_4 = \{(0, 1, 0), (1, 0, 0), (1, 1, 1)\}$, $S_5 = \{(1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1)\}$

- Himpunan R_1, R_2 merupakan contoh basis P^3

$$R_1 = \{1, x, x^2, x^3\},$$
$$R_2 = \{1, x, 2x^2, x^3+x^2+2x+1\}$$

- Contoh basis di M^{2x3}:

$$\left\{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right\}$$

Jumlah vektor dalam basis ruang vektor V adalah sama dan disebut **dimensi.**

$\dim(R^n) = n$ $\dim(P^n) = n+1$ $\dim(M^{mxn}) = m \times n$

Penyajian vektor dengan basis

$B = \{ \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ basis dari V

Setiap vektor **a** pada V dapat dinyatakan secara tunggal sebagai kombinasi linier vektor-vektor basis B.

$$\mathbf{a} = a_1 \mathbf{v}_1 + a_2 \mathbf{v}_2 + a_3 \mathbf{v}_3 + \ldots + a_n \mathbf{v}_n$$

Disajikan :

$[\mathbf{a}]_B = (a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)$ koordinat **a** relatif terhadap basis B.

Matriks koordinat

- Diberikan dua basis berbeda dari R^3: B_1, B_2

$$B_1 = \{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\} \qquad B_2 = \{(0,0,1), (0,1,0), (1,1,1)\}$$

- Nyatakan **a** = (1, 2, 3) sebagai kombinasi linier vektor-vektor basis

$$\mathbf{a} = \beta_1 \mathbf{i} + \beta_2 \mathbf{j} + \beta_3 \mathbf{k} \qquad \mathbf{a} = k_1 \mathbf{v}_1 + k_2 \mathbf{v}_2 + k_3 \mathbf{v}_3$$

- Nyatakan matriks koordinat **a** relatif terhadap dua basis tersebut.

$$\mathbf{a} = \beta_1 \mathbf{i} + \beta_2 \mathbf{j} + \beta_3 \mathbf{k}$$

$$(\beta_1, \beta_2, \beta_3)_{B_1} = [\mathbf{a}]_{B_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{a} = \alpha_1(0,0,1) + \alpha_2(0,1,0) + \alpha_3(1,1,1)$$

$$\mathbf{a} = \alpha_1(0,0,1) + \alpha_2(0,1,0) + \alpha_3(1,1,1)$$

$$(1,2,3) = \alpha_1(0,0,1) + \alpha_2(0,1,0) + \alpha_3(1,1,1)$$

$$\begin{aligned} \alpha_3 &= 1 \\ \alpha_2 + \alpha_3 &= 2 \\ \alpha_1 + \alpha_3 &= 3 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \alpha_1 &= 2 \\ \alpha_2 &= 1 \\ \alpha_3 &= 1 \end{aligned}$$

$$(1,2,3)_{B_1} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)_{B_2} = [\mathbf{a}]_{B_2} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Matriks koordinat

- Diberikan dua basis berbeda dari P^3: B_1, B_2

$$B_1 = \{1, x, x^2, x^3\} \qquad B_2 = \{1, x, 2x^2, x^3 + x^2 + 2x + 1\}$$

- Nyatakan **a** = $2x^2+5$ sebagai kombinasi linier vektor-vektor basis

$$\mathbf{a} = k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + k_3\mathbf{v}_3$$

$$\mathbf{a} = \beta_1 + \beta_2 x + \beta_3 x^2 + \beta_4 x^3 \qquad \mathbf{a} = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 (2x^2) + \alpha_4 (x^3 + x^2 + 2x + 1)$$

- Nyatakan matriks koordinat **a** relatif terhadap dua basis tersebut.

$$\mathbf{a} = \beta_1 + \beta_2 x + \beta_3 x^2 + \beta_4 x^3$$

$$[\mathbf{a}]_{B_1} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$2x^2 + 5 = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 (2x^2) + \alpha_4 (x^3 + x^2 + 2x + 1)$$

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 5 \\ \alpha_2 &= 0 \\ \alpha_3 &= 1 \\ \alpha_4 &= 0 \end{aligned}$$

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)_{B_2} = [\mathbf{a}]_{B_2} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Matriks koordinat

Diberikan dua basis berbeda dari M^{2X2}: B_1, B_2

$$B_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\} \quad B_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\} \quad \mathbf{a} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- Nyatakan **a** = (1, 2, 3) sebagai kombinasi linier vektor-vektor basis

$$\mathbf{a} = k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + k_3\mathbf{v}_3$$

$$\mathbf{a} = 2\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{a} = \alpha_1\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \alpha_2\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \alpha_3\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \alpha_4\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

- Nyatakan matriks koordinat **a** relatif terhadap dua basis tersebut.

$$[\mathbf{a}]_{B_1} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftarrow \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1\mathbf{v}_2\mathbf{v}_3\mathbf{v}_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ k_4 \end{bmatrix} = \mathbf{a} \Rightarrow \begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow [\mathbf{a}]_{B_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

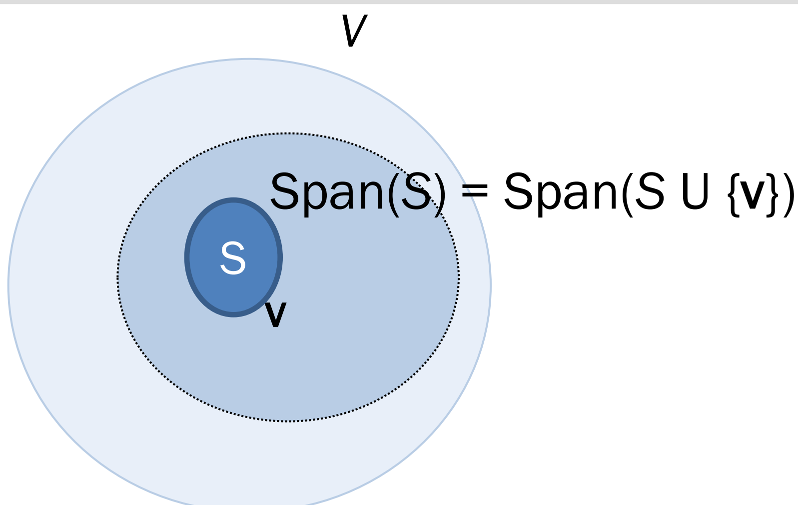
Sifat himpunan perentang

Teorema 5.3: Sifat Himpunan Perentang

S subset tak kosong dari *V*.

Span(*S*) adalah subruang dari *V*; memenuhi semua aksioma ruang vektor

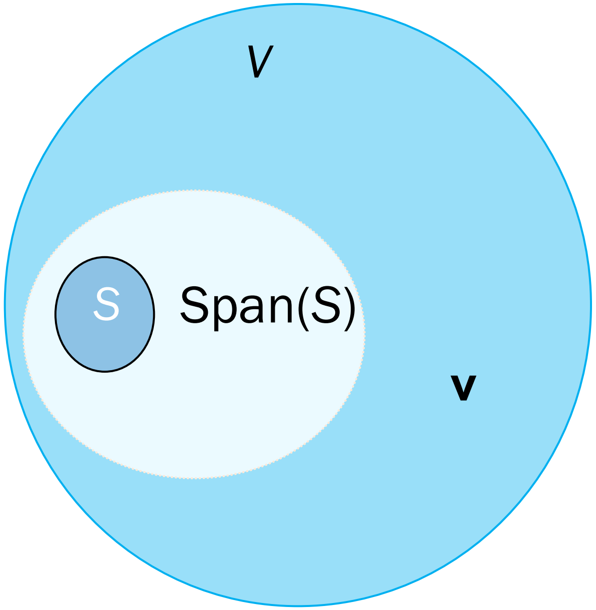
Jika **v** є Span(*S*), maka Span(*S*) = Span(*S* U {**v**})



Sifat himpunan perentang

S adalah subset ruang vektor *V* yang bebas linier

v di luar Span (*S*), maka *S* U {**v**} bebas linier



Sifat himpunan perentang

Contoh 17:

Apabila terdapat **a** = {3, 1, 2}, **b** = {2, 1, 1}, dan **c** = {4, 3, 3} di mana **a**, **b**, dan **c** bebas linier, maka mudah dilihat bahwa **a** dan **b** bebas linier.

Contoh 18:

Diketahui S {**i, j, k**}, di mana **i** = {1, 0, 0}, **j** = {0, 1, 0}, dan **k** = {0, 0, 1} pada R^3. Tentukan apakah *S* bebas linier.

Jawab:

$k_1\mathbf{i} + k_2\mathbf{j} + k_3\mathbf{k} = 0$

Persamaan akan dipenuhi jika $k_1 = 0$, $k_2 = 0$, dan $k_3 = 0$.

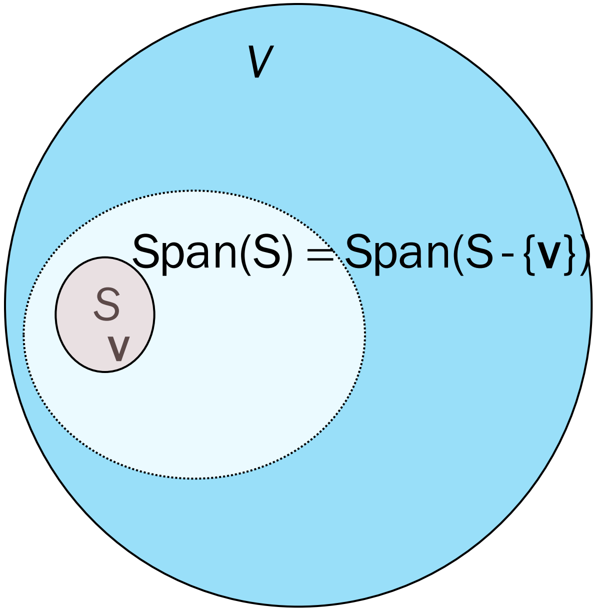
Sehingga, S {**i, j, k**} bebas linier.

Sifat himpunan perentang

S subset tak kosong dari *V*

v di dalam S dan **v** dapat dinyatakan sebagai kombinasi linier

vektor-vektor di *S*, maka: $\mathrm{Span}(S) = \mathrm{Span}(S - \{\mathbf{v}\})$



Teorema Plus-Minus

Teorema 5.4: Plus-Minus

Diberikan *S* himpunan tidak kosong terdiri dari vektor-vektor di ruang vektor *V.*

(a) Jika *S* adalah himpunan yang bebas linier, dan **v** adalah vektor di *V* yang diluar span (*S*), maka himpunan $S \cup \{\mathbf{v}\}$ yang merupakan hasil menambahkan **v** ke dalam *S* tetap bebas linier.

(b) Jika **v** adalah vektor di *S* yang bisa dinyatakan sebagai kombinasi linier vektor-vektor lain di *S*, dan jika $S - \{\mathbf{v}\}$ merupakan himpunan yang diperoleh dari mengeluarkan **v** dari *S*, maka *S* dan $S - \{\mathbf{v}\}$ merentang ruang yang sama, yaitu:

$$\mathrm{Span}(S) = \mathrm{Span}(S - \{\mathbf{v}\})$$

Contoh 19:

1. Tentukan basis di R^3, jika diberikan $\mathbf{v}_1 = (0,0,1)$ dan $\mathbf{v}_2 = (2,0,1)$
2. Tentukan basis di R^3, jika diberikan $\mathbf{v}_1 = (0,0,1)$, $\mathbf{v}_2 = (1,1,1)$, $\mathbf{v}_3 = (0,1,0)$, dan $\mathbf{v}_4 = (-2,1,0)$

Contoh jawaban

Cari basis di R^3, jika diberikan $\mathbf{v}_1 = (0,0,1)$ dan $\mathbf{v}_2 = (2,0,1)$

Jawaban:

1. Menentukan himpunan yang direntang oleh $\mathbf{v}_1$ dan $\mathbf{v}_2$

   Span({$\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$}) = {(a, 0, b) a, b bilangan real} himp vektor pada bidang-XZ

   Jadi, $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ merentang himp vektor pada bidang-XZ di R^3.

2. Carilah vektor di R^3 yang tidak termasuk dalam himpunan yang direntang oleh $\mathbf{v}_1$ dan $\mathbf{v}_2$, contoh: $\mathbf{v}_3 = (1,1,1)$ sehingga $\mathbf{v}_3$ bukan kombinasi linear dari kedua vektor tersebut.

   $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ merupakan basis R^3.

Contoh jawaban

Cari basis di R^3, jika diberikan $\mathbf{v}_1 = (0,0,1)$, $\mathbf{v}_2 = (1,1,0)$, $\mathbf{v}_3 = (0,1,0)$, dan $\mathbf{v}_4 = (-2,1,0)$

Jawaban:

1. Menentukan apakah ke-empat vektor $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ dan $\mathbf{v}_4$ bebas linier.

$$k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + k_3\mathbf{v}_3 + k_4\mathbf{v}_4 = \mathbf{0}$$

$$[\mathbf{v}_1\mathbf{v}_2\mathbf{v}_3\mathbf{v}_4]\begin{bmatrix} k_1 \\ k_3 \\ k_3 \\ k_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} k_1 \\ k_3 \\ k_3 \\ k_4 \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}} \underbrace{=}_{=} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}}$$

$$\text{ebt}(A) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} k_1 \\ k_3 \\ k_3 \\ k_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2k_4 \\ -3k_4 \\ k_4 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian umum : $(0, 2, -3, 1)t,\ t \in R$

Penyelesaian khusus : $(0, 2, -3, 1)$

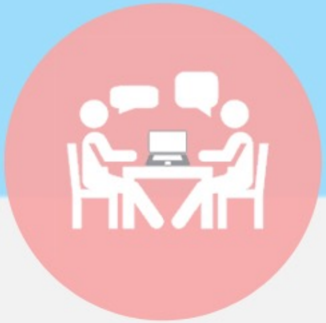
Contoh jawaban

Cari basis di R^3, jika diberikan $\mathbf{v}_1 = (0,0,1)$, $\mathbf{v}_2 = (1,1,0)$, $\mathbf{v}_3 = (0,1,0)$ dan $\mathbf{v}_4 = (-2,1,0)$

Jawaban:

2. Menghilangkan vektor yang bergantung linier (jika ada)
   - Dari penyelesaian spl sebelumnya, terlihat bahwa vektor $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$, dan $\mathbf{v}_4$ bergantung linier. Sehingga, kita boleh menghilangkan salah satu dari ketiga vektor tersebut.
   - Dipilih $\mathbf{v}_4$ untuk dihilangkan dari himpunan basis.
   - Periksa apakah $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ bebas linier dan merentang R^3
     - ✓ $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ bebas linier (tunjukkan sebagai latihan, hint: $k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + k_3\mathbf{v}_3 + k_4\mathbf{v}_4 = \mathbf{0}$)
     - ✓ $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ merentang R^3 (tunjukkan $\mathrm{Span}(\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}) = \{(a,b,c) \mid a,b,c \in R\}$)

Materi berikutnya:
ruang baris, ruang kolom dan ruang null



MODUL E-LEARNING ALJABAR LINIER
FAKULTAS ILMU KOMPUTER, UNIVERSITAS INDONESIA