LK 2

2206028923
ALDEN LUTHFI
ALIN - A
KYU

Ⓐ① ⓐ matriks dinyatakan sama jika berordo sama dan elemen-elemen yang bersesuaian sama

ⓑ Matriks nol adalah matriks yang semua elemenya 0

ⓒ matriks Identitas atau I adalah matriks yang elemen pada diagonal utamanya bernilai 1 dan semua elemen lain diluar diagonal utama bernilai 0

ⓓ matriks persegi adalah matriks yang jumlah baris dan kolomnya sama. Trace adalah jumlahan dari semua elemen pada diagonal utamanya

ⓔ Syarat penjumlahan 2 Matriks adalah harus berordo sama. penjumlahan matriks bersifat komutatif dan asosiatif. penjumlahan matriks dilakukan dengan menjumlahkan elemen-elemen yang bersesuaian

ⓕ Perkalian dengan konstanta dan Matriks dilakukan dengan mengalikan semua elemen pada matriks dengan konstanta tersebut.

ⓖ Syarat perkalian 2 Matriks A dan B adalah jumlah kolom A sama dengan jumlah Baris B. perkalian matriks bersifat asosiatif namun tidak komutatif. perkalian matriks dilakukan dengan menjumlahkan perkalian elemen A baris pertama dengan elemen B kolom pertama, Baris A baris pertama dengan B kolom kedua, dst.

ⓗ Matriks A_{nxn} dinyatakan simetris jika dan hanya jika $a_{ij} = a_{ji}$ dengan $i,j \leq n$

Contoh :

ⓐ $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

∴ A dan B sama $(A = B)$

ⓑ $R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

R adalah matriks 0

ⓒ $R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$R = I$ (identitas)

ⓓ $R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow$ trace $= 3$

ⓔ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

$A + B = \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 5 \end{bmatrix}$

ⓕ $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $k = 5$

$kA = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$

ⓖ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

$AB = \begin{bmatrix} 4+4 & 3+2 \\ 12+8 & 9+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 20 & 13 \end{bmatrix}$

ⓗ $R = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

R simetris

Ⓑ ① ⓐ A + B tidak terdefinisi karena A dan B berordo beda

ⓑ $A + D = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 8 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

ⓒ AB tidak terdefinisi karena jumlah kolom A ≠ jumlah baris B

ⓓ $CD = \begin{bmatrix} 1+0 & 2+1 & 6-5 \\ -1+0 & -2-2 & -6+10 \\ 1+0 & 2+4 & 6-20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & -4 & 4 \\ 1 & 6 & -14 \end{bmatrix}$

ⓔ AD tidak terdefinisi karena jumlah kolom A ≠ jumlah baris D

ⓔ $ACD = A(CD)$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -4 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & -4 & 4 \\ 1 & 6 & -14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+4+2 & 6+16+12 & 2-16-28 \\ 1-1-3 & 4-4-18 & 1+4+42 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 8 & 34 & -42 \\ -3 & -19 & 47 \end{bmatrix}$$

(i) Syarat penjumlahan matrik A dan B :
↳ A dan B harus berordo sama

(ii) Syarat perkalian Matriks A dan B :
↳ jumlah baris B = jumlah kolom A

(iii) tidak, counter example $A_{2\times3} \times B_{3\times4}$ dimana $AB_{2\times4}$ namun BA tidak terdefinisi (AB ≠ BA)

(iiii) ya, perkalian matriks bersifat asosiatif

② $A^T = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 6 \\ -2 & 0 & 7 \end{bmatrix}$ $B^T = \begin{bmatrix} 7 & -2 & 0 \end{bmatrix}$

$C^T = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$

ⓒ ① $\det(A) = -9.16 + (12.12) = 0$ → tidak memiliki invers

$\det(B) = 100 + 30 - (30 + 100)$

$= 0$ → tidak memiliki invers

C memiliki baris 0 sehingga tidak memiliki inverse

$$EBT(B) \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 5 & -2 \\ -5 & 0 & 10 \\ 2 & 3 & -4 \end{bmatrix} R_2 \leftarrow R_2 + 5R_1 \begin{bmatrix} 1 & 5 & -2 \\ 0 & 25 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} R_2 \leftarrow \frac{1}{25} R_2 \begin{bmatrix} 1 & 5 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -4 \end{bmatrix}$$

$$R_3 \leftarrow R_3 - 2R_1 \begin{bmatrix} 1 & 5 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & 0 \end{bmatrix} R_3 \leftarrow R_3 + 7R_2 \begin{bmatrix} 1 & 5 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

→ punya baris 0 sehingga tidak memiliki invers

ⓐ

② $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

ⓑ $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ $B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

ⓒ !→ jika A memiliki invers maka $EBT(A) = I$

① sehingga jika diberikan A gunakan $[A \vdots I]$ karena $EBT([A \vdots I]) = [I \vdots A^{-1}]$

③ ⓐ ⓘ $$\left[\underbrace{\begin{array}{ccc}1&3&1\\2&2&-2\\2&3&-1\end{array}}_{A}\middle|\begin{array}{ccc}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{array}\right] \quad R_2 \leftarrow R_2 - 2R_1 \begin{bmatrix}1&3&1&1&0&0\\0&-4&-4&-2&1&0\\2&3&-1&0&0&1\end{bmatrix}$$

$$R_3 \leftarrow R_3 - 2R_1 \begin{bmatrix}1&3&1&1&0&0\\0&-4&-4&-2&1&0\\0&-3&-3&-2&0&1\end{bmatrix} \quad R_3 \leftarrow -\frac{1}{3}R_3 + \frac{1}{4}R_2 \left[\begin{array}{cccccc}1&3&1&1&0&0\\0&-4&-4&-2&1&0\\\multicolumn{3}{c}{\underbrace{0\quad 0\quad 0}_{!!}}&\cdots&\cdots&\cdots\end{array}\right]$$

(!!) karena A ekivalen baris dengan matriks yang memiliki baris 0 maka A tidak mempunyai invers

ⓘⓘ $$\left[\underbrace{\begin{array}{ccc}1&2&-1\\0&2&2\\1&3&1\end{array}}_{B}\middle|\begin{array}{ccc}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{array}\right] \quad R_1 \leftarrow R_1 - R_2 \begin{bmatrix}1&0&-3&1&-1&0\\0&2&2&0&1&0\\1&3&1&0&0&1\end{bmatrix}$$

$$R_3 \leftarrow R_3 - R_1 \begin{bmatrix}1&0&-3&1&-1&0\\0&2&2&0&1&0\\0&3&4&-1&1&1\end{bmatrix} \quad R_3 \leftarrow 2R_3 - 3R_2 \begin{bmatrix}1&0&-3&1&-1&0\\0&2&2&0&1&0\\0&0&2&-2&-1&2\end{bmatrix}$$

$$R_2 \leftarrow R_2 - R_3 \begin{bmatrix}1&0&-3&1&-1&0\\0&2&0&2&2&-2\\0&0&2&-2&-1&2\end{bmatrix} \quad R_1 \leftarrow 2R_1 + 3R_3 \begin{bmatrix}2&0&0&-4&5&6\\0&2&0&2&2&-2\\0&0&2&-2&-1&2\end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{l}R_1 \leftarrow \frac{1}{2}R_1\\ R_2 \leftarrow \frac{1}{2}R_2\\ R_3 \leftarrow \frac{1}{2}R_3\end{array} \left[\begin{array}{ccc}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{array}\middle|\underbrace{\begin{array}{ccc}-2&\frac{5}{2}&3\\1&1&-1\\-1&-\frac{1}{2}&1\end{array}}_{B^{-1}}\right] \rightarrow B^{-1} = \begin{bmatrix}-2&\frac{5}{2}&3\\1&1&-1\\-1&-\frac{1}{2}&1\end{bmatrix}$$

ⓑ $A\bar{x} = b \rightarrow \bar{x} = A^{-1}b$

$$\bar{x} = \begin{bmatrix}-2&-\frac{5}{2}&3\\1&1&-1\\-1&-\frac{1}{2}&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\-2\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4\\-1\\0\end{bmatrix}$$

Ⓓ ① Salah, jumlahan matriks juga bersifat komutatif

② Salah, Counter example : $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$

$AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

③ Benar, karena transpose tidak merubah diagonal utama

sehingga kelipatan baris tidak terpengaruh, dan karena elemen pada diagonal utama memiliki posisi kolom dan baris yang sama, penjumlahan baris dan penukaran baris juge tidak terpengaruh

④ Salah, karena jika matriks augmented A tidak konsisten maka jika SPL A memiliki n persamaan dan n-1 unknown maka matriks augmented SPL tersebut adalah matriks persegi dan bisa saja EBT matriks yang tidak konsisten tersebut berbentuk I sehingga memiliki invers

⑤ Perkalian matriks asosiatif. Benar,
Perkalian matriks diagonal komutatif, $D_1D_2 = D_2D_1$
$AB = BA$

$$
\begin{aligned}
(CD_1C^{-1})(CD_2C^{-1}) &= (CD_2C^{-1})(CD_1C^{-1}) \\
CD_1(C^{-1}C)D_2C^{-1} &= CD_2(C^{-1}C)D_1C^{-1} \\
CD_1(I D_2)C^{-1} &= CD_2(ID_1)C^{-1} \\
CD_1D_2C^{-1} &= CD_2D_1C^{-1} \\
CD_1D_2(C^{-1}C) &= CD_2D_1(C^{-1}C) \rightarrow \text{kali } C \\
& \qquad \rightarrow \text{kali } C^{-1} \\
CD_1D_2 &= CD_2D_1 \\
(C^{-1}C)D_1D_2 &= (C^{-1}C)D_2D_1 \\
D_1D_2 &= D_2D_1 \rightarrow \text{terbukti } AB = BC
\end{aligned}
$$

⑥ Benar karena jika A persegi dan memiliki invers maka EBT (A) = I

dan bentuk contoh

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{Ax = 0}$$

hanya memiliki solusi trivial

⑦ benar karena transpose tidak mengubah diagonal utama sehingga EBT (A) = I maka EBT (A^T) = I juga

Ⓔ Refleksi

① Bahwa aljabar Matriks sangat bersangkutan dengan penyelesaian SPL

② Banyak jalan menuju Roma, kita tidak perlu mencari determinan untuk menentukan apakah matriks memiliki invers. Bisa dengan cara lain

③ Banyak hal yang bisa kita simpulkan dengan hanya memperhatikan ciri matriks. seperti apakah 2 matriks bisa di kali, di tambahkan, di invers