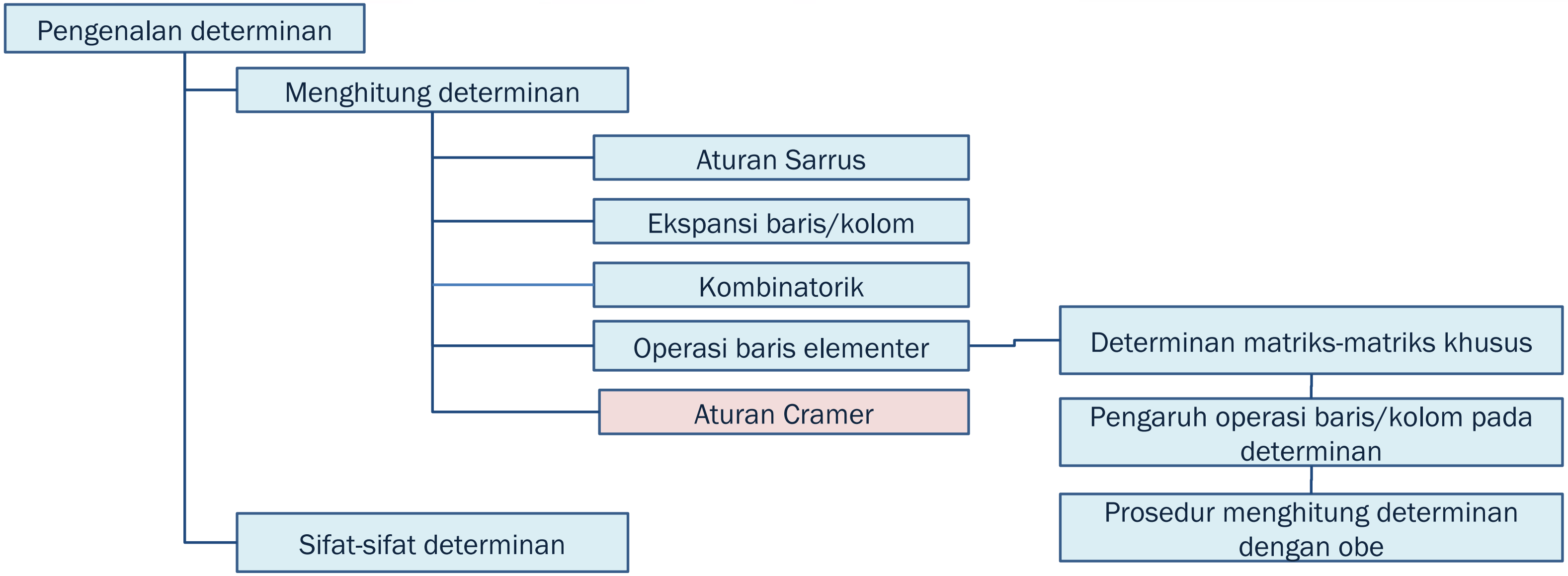


3.7 Aturan Cramer

MODUL E-LEARNING ALJABAR LINIER
FAKULTAS ILMU KOMPUTER, UNIVERSITAS INDONESIA

Mengingat kembali metode-metode penyelesaian spl

- Metode Eliminasi Substitusi
- Metode Geometris
- Eliminasi Gauss-Jordan
- Jika matriks koefisien mempunyai inverse maka solusi spl adalah sebagai berikut:

$$\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$$

Akan dipelajari Aturan Cramer untuk menyelesaikan spl tertentu.

Pengantar Aturan Cramer

- Anda akan mempelajari bagaimana menurunkan Aturan Cramer (metode untuk menentukan solusi spl dengan menggunakan determinan)

- Supaya memahami penurunan Aturan Cramer, pengetahuan dasar yang perlu dikuasai terlebih dahulu adalah:
  - minor
  - kofaktor,
  - adjoin,
  - sifat-sifat determinan.

Ekspansi kofaktor

$$A_{n\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

M_{ij} adalah determinan matriks A dengan menghilangkan elemen ke-i dan kolom ke-j

$$M_{ij} = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \ddots & \vdots \\ & & & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} C_{ij} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} C_{ij}$$

Perkalian entri dengan kofaktor

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Baris 1 dan 3 identik, maka det(A) = 0 (sifat 5)

Determinan dengan ekspansi kofaktor baris ke-1

$$\det(A) = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13} + \cdots + a_{1n}C_{1n}$$

$$[C_{ij}] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & \cdots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & \cdots & C_{2n} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & \cdots & C_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & C_{n3} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}$$

Determinan dengan ekspansi kofaktor baris ke-3

$$\det(A) = \underbrace{a_{11}C_{31} + a_{12}C_{32} + a_{13}C_{33} + \cdots + a_{1n}C_{3n}}_{\text{Jumlahan hasil kali entri dan kofaktor dari baris berbeda}}$$

Jumlahan hasil kali entri dan kofaktor dari baris berbeda adalah

= determinan matriks dengan 2 kolom/baris identik

= 0

Perkalian entri dengan kofaktor

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{31} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Kolom 1 dan 3 identik, maka det(A) = 0

Determinan dengan ekspansi kofaktor kolom ke-1

$$\det(A) = a_{11}C_{11} + a_{21}C_{21} + a_{31}C_{31} + \cdots + a_{n1}C_{n1}$$

$$[C_{ij}] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & \cdots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & \cdots & C_{2n} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & \cdots & C_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & C_{n3} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}$$

Determinan dengan ekspansi kofaktor kolom ke-3

$$\det(A) = \underbrace{a_{11}C_{13} + a_{21}C_{23} + a_{31}C_{33} + \cdots + a_{n1}C_{n3}}_{\text{Jumlahan hasil kali entri dan kofaktor dari kolom berbeda}}$$

Jumlahan hasil kali entri dan kofaktor dari kolom berbeda adalah

= determinan matriks dengan 2 kolom/baris identik

= 0

Hasil kali entri dan kofaktor

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \qquad [C_{ij}] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & \cdots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & \cdots & C_{2n} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & \cdots & C_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & C_{n3} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}$$

$$k = l \qquad \sum_{i=1}^{n} a_{ik} C_{il} = \det(A)$$

Jika $k = l$, maka rumus ini merupakan rumus untuk menghitung det(A)

$$k \neq l \qquad \sum_{i=1}^{n} a_{ik} C_{il} = 0$$

Ketika k berbeda dengan l, maka rumus ini merupakan rumus determinan matriks dengan kolom k identik dengan kolom l

Matriks kofaktor A

Matriks kofaktor-kofaktor A

$$[C_{ij}] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}$$

Matriks adjoin A

$$\operatorname{adj}(A) = [C_{ij}]^T = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & \cdots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \cdots & C_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{1n} & C_{2n} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}$$

$$A.\operatorname{adj}(A) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & \cdots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \cdots & C_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{1n} & C_{2n} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \det(A) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \det(A) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \det(A) \end{bmatrix} = \det(A)I$$

Diketahui:

$$k = l \qquad \sum_{i=1}^{n} a_{ik} C_{il} = \det(A)$$

$$k \neq l \qquad \sum_{i=1}^{n} a_{ik} C_{il} = 0$$

Inverse matriks

$$A.\mathrm{adj}(A) = \det(A)I$$

(det(A) dipindah ruas)

$$\left(\frac{1}{\det(A)}\right).A.\mathrm{adj}(A) = I$$

(det(A) merupakan skalar, boleh pindah posisi)

$$A.\left(\frac{1}{\det(A)}\right).\mathrm{adj}(A) = I$$

Jadi,

$$A^{-1} = \left(\frac{1}{\det(A)}\right).\mathrm{adj}(A)$$

Hitunglah determinan matriks

Matriks A_j diperoleh dari A dengan mengganti kolom ke j dengan **b**

$$A_j = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Hitung det(A_j) dengan ekspansi kolom ke j

$$\det(A_j) = b_1 C_{1j} + b_2 C_{2j} + \cdots + b_n C_{nj}$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Hitung det(A_1) dengan ekspansi kolom pertama

$$\det(A_1) = b_1 C_{11} + b_2 C_{21} + \cdots + b_n C_{n1}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} a_{11} & b_1 & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ a_{n1} & b_n & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\det(A_2) = b_1 C_{12} + b_2 C_{22} + \cdots + b_n C_{n2}$$

Aturan Cramer

Diberikan $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ $\qquad$ A mempunyai inverse

Spl mempunyai solusi tunggal

$$\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b} = \frac{1}{\det(A)} adj(A)\mathbf{b}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & \cdots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \cdots & C_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{1n} & C_{2n} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} b_1C_{11} + b_2C_{21} + \ldots + b_nC_{n1} \\ b_1C_{12} + b_2C_{22} + \ldots + b_nC_{n2} \\ \vdots \\ b_1C_{1n} + b_2C_{2n} + \ldots + b_nC_{nn} \end{bmatrix} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} \det(A_1) \\ \det(A_2) \\ \vdots \\ \det(A_n) \end{bmatrix}$$

= det(A1)
determinan matriks yang diperoleh dari matriks A dengan mengganti kolom pertama dengan **b**

$$\boxed{x_j = \frac{\det(A_j)}{\det(A)}, j = 1,2,\ldots,n}$$

Penyajian spl dengan persamaan matriks

spl

$$
\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\
&\vdots \\
&a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n
\end{aligned}
$$

matriks koefisien persegi (berordo *nxn*)

$$
A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}
$$

$$
A\mathbf{x} = \mathbf{b}
$$

Contoh 6:

- Spl
$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 1 \\ 2x - y - z &= 1 \\ x - y + 2z &= 3 \end{aligned}$$

Lebih mudah mana dibandingkan dgn metode lain?

- Spl dalam persamaan matriks

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = -10$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\det(A_1) = -10 \quad \det(A_2) = -20 \quad \det(A_3) = 10$$

Solusi:

$$x = \det(A_1) / \det(A) = 1$$

$$y = \det(A_2) / \det(A) = 2$$

$$z = \det(A_3) / \det(A) = -1$$

Matrik A_i

- A_1 diperoleh dengan mengubah elemen-elemen kolom ke-1 matriks koefisien A dengan elemen-elemen pada matriks kolom **b**

- A_2 diperoleh dengan diperoleh dengan mengubah elemen-elemen kolom ke-2 matriks koefisien A dengan elemen-elemen pada matriks kolom **b**

- A_3 diperoleh dengan mengubah elemen-elemen kolom ke-3 matriks koefisien A dengan elemen-elemen pada matriks kolom **b**

Secara umum, A_i diperoleh dengan mengubah elemen-elemen kolom ke-i matriks koefisien A dengan elemen-elemen pada matriks kolom **b**

Contoh 7

- Spl
$$a+b+2c+d=7$$
$$2a-b-c-2d=-2$$
$$a-b+2c+d=5$$
$$2a+b+c+d=8$$

- Spl dalam persamaan matriks:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2 & 1\\ 2 & -1 & -1 & -2\\ 1 & -1 & 2 & 1\\ 2 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix} \quad \mathbf{x}=\begin{pmatrix}a\\ b\\ c\\ d\end{pmatrix} \quad \mathbf{b}=\begin{pmatrix}7\\ -2\\ 5\\ 8\end{pmatrix}$$

$$\det(A)=-14$$

- Tentukan A_1, A_2, A_3, A_4 dan hitung determinannya

$$A_1=\begin{pmatrix}7 & 1 & 2 & 1\\ -2 & -1 & -1 & -2\\ 5 & -1 & 2 & 1\\ 8 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix} \quad A_2=\begin{pmatrix}1 & 7 & 2 & 1\\ 2 & -2 & -1 & -2\\ 1 & 5 & 2 & 1\\ 2 & 8 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

lanjutan hal berikut→

$$\det(A_1)=-28 \qquad \det(A_2)=-14$$

Contoh 7(lanjut)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \det(A) = -14$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & -1 & -2 \\ 5 & -1 & 2 & 1 \\ 8 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & -1 & -2 \\ 1 & 5 & 2 & 1 \\ 2 & 8 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det(A_1) = -28 \qquad \det(A_2) = -14$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 7 & 1 \\ 2 & -1 & -2 & -2 \\ 1 & -1 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 8 & 1 \end{pmatrix} \qquad A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 7 \\ 2 & -1 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 1 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\det(A_3) = -14 \qquad \det(A_4) = -28$$

Lebih mudah mana dibandingkan dgn metode lain? Apakah metode ini berlaku umum?

Solusi:

$$a = \det(A_1) / \det(A) = 2$$

$$b = \det(A_2) / \det(A) = 1$$

$$c = \det(A_3) / \det(A) = 1$$

$$d = \det(A_4) / \det(A) = 2$$

Syarat Aturan Cramer bisa diterapkan

Diberikan spl $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, $A_{n \times n}$

Dengan Aturan Cramer, penyelesaian dapat diperoleh dengan rumus berikut ini

$$x_j = \frac{\det(A_j)}{\det(A)} \qquad j = 1,2,\ldots,n$$

Karena menggunakan determinan matriks koefisien sebagai pembagi, maka Aturan Cramer dapat diterapkan jika **matriks koefisiennya persegi** dan **determinannya tidak nol** (atau matriks koefisien mempunyai inverse).

Review Aturan Cramer

Diberikan A matriks nxn

- A_{ij} adalah....
- M_{ij} adalah....
- C_{ij} adalah....
- $[C_{ij}]$ adalah ....
- $[C_{jj}]^T$ = adj(A) adalah.........
- A. adj(A) =....
- A^{-1} = ... (pergunakan hasil di atas)
- A_j adalah matriks yang diperoleh dari A dengan cara................
- Det(Aj) = ...(ekspansi kolom ke-j)
- $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$; kalikan dengan A^{-1},maka $A^{-1}A\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$ dan $\mathbf{x}$ =....
- x_j = ...

Post-test Modul 3

Post-test

Tentukan determinan matriks berikut ini.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

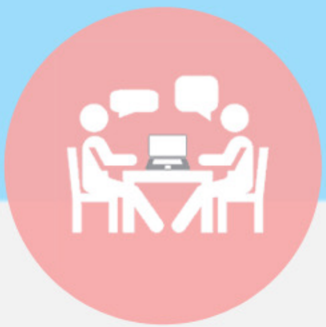
$$D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix} \quad E = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad F = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \\ 5 & 100 & 1 \end{bmatrix}$$

Refleksi

- Buatlah ringkasan materi yang baru saja kamu pelajari.

- Periksalah hasil ringkasanmu, apakah sudah mencakup semua konsep kunci berikut ini?
  - Aturan Sarrus dan syarat penerapannya
  - Definisi determinan
  - Minor dan kofaktor
  - Hasil kali elementer
  - Determinan matriks elementer
  - Determinan dengan operasi baris elementer
  - Sifat-sifat determinan
  - Aturan Cramer

Selamat, Anda telah menyelesaikan Modul 3.
Topik bahasan berikutnya: vektor



MODUL E-LEARNING ALJABAR LINIER
FAKULTAS ILMU KOMPUTER, UNIVERSITAS INDONESIA