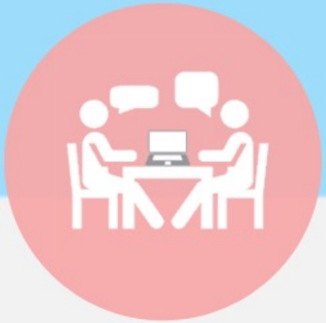
5. Ruang Vektor Umum (Bagian 1)



MODUL E-LEARNING ALJABAR LINIER
FAKULTAS ILMU KOMPUTER, UNIVERSITAS INDONESIA

Dr. Dra. Kasiyah Junus, M.Sc.

Capaian pemelajaran

Setelah mempelajari modul ini, mahasiswa mampu:

1. membuat generalisasi dari ruang R^2 dan R^3 ke R^n,
2. mampu menjelaskan ruang vektor umum,
3. menentukan apakah suatu sub-himpunan merupakan sub-ruang,
4. mengkonstruksi subruang dengan perentangan.

Cakupan materi

- Ruang vektor R^n
- Ruang vektor umum
  - Subruang
  - Dependensi linier
    - Kombinasi linier
    - Himpunan perentang
    - Basis dan dimensi
  - Ruang baris, ruang kolom, ruang null
    - Rank dan nulitas

Pre-test berfungsi mengaktifkan pengetahuan lama unatu mempermudah pemahaman pengetahuan baru.

Pre-test

Pre-test

Jawablah pertanyaan-pertanyaan berikut ini: BENAR/SALAH

V adalah himpunan semua vektor di ruang R^3.

$$V = \left\{ \mathbf{v} = \vec{v} = \left(v_1, v_2, v_3 \right) \middle| v_1, v_2, v_3 \in R \right\}$$

Jika **a, b** dan **c** adalah vektor-vektor di *V, k* dan *l* adalah skalar bilangan real. Tentukan pernyataan-pernyataan berikut ini adalah benar atau salah.

1.	Hasil penjumlahan **a** + **b** merupakan vektor di R^3.	(benar / salah)
2.	**a + b = b + a**	(benar / salah)
3.	**a** + (**b** + **c**) = (**a** + **b**) + **c**	(benar / salah)
4.	**a** + **0** = a, dengan **0** = (0, 0, 0)	(benar / salah)
5.	**a** + (-**a**) = **0**, dengan **-a** = ($-a_1$, $-a_2$, $-a_3$)	(benar / salah)
6.	Hasil perkalian *k***u** merupakan vektor di R^3	(benar / salah)
7.	*k* (**a** + **b**) = k**a** + k**b**	(benar / salah)
8.	(*k* + *l*) **a** = k**a** + l**a**	(benar / salah)
9.	*k* (*l***a**) = (*kl*) **a**	(benar / salah)
10.	1**a** = **a**	(benar / salah)

Jawaban *pretest*

Jawablah pertanyaan-pertanyaan berikut ini:

V adalah himpunan semua vektor di ruang R^3.

$$V = \left\{ \mathbf{v} = \vec{v} = (v_1, v_2, v_3) \,\middle|\, v_1, v_2, v_3 \in R \right\}$$

Jika **a, b** dan **c** adalah vektor-vektor di *V, k* dan *l* adalah skalar bilangan real. Tentukan pernyataan-pernyataan berikut ini adalah benar atau salah.

(benar / ~~salah~~) 1. Hasil penjumlahan **a** + **b** merupakan vektor di R^3.
(benar / ~~salah~~) **2. a + b = b + a**
(benar / ~~salah~~) **3. a** + (**b** + **c**) = (**a** + **b**) + **c**
(benar / ~~salah~~) **4. a** + **0** = a, dengan **0** = (0, 0, 0)
(benar / ~~salah~~) **5. a** + (-**a**) = **0**, dengan -**a** = ($-a_1$, $-a_2$, $-a_3$)
(benar / ~~salah~~) 6. Hasil perkalian *k***u** merupakan vektor di R^3
(benar / ~~salah~~) *7. k* (**a** + **b**) = k**a** + k**b**
(benar / ~~salah~~) 8. (*k* + *l*) **a** = k**a** + l**a**
(benar / ~~salah~~) *9. k* (*l***a**) = (*kl*) **a**
(benar / ~~salah~~) 10. 1**a** = **a**

Contoh vektor di R^3 : **i =** (1, 0 , 0), **j** = (0, 1, 0), **k =** (0, 0, 1)

- Ruang vektor R^n
- Ruang vektor umum
  - Subruang
  - Dependensi linier
    - Kombinasi linier
    - Himpunan perentang
    - Basis dan dimensi
  - Ruang baris, ruang kolom, ruang null
    - Rank dan nulitas

5.1 Pendefinisian ruang vektor umum

V ruang vektor atas *R*

Definisi 5.1: *V* himpunan tidak kosong. Pada *V* didefinisikan jumlahan dan perkalian dengan skalar. *V* adalah ruang vektor atas *R* (himpunan bilangan nyata) jika dan hanya jika dipenuhi:

1. *V* tertutup terhadap jumlahan,

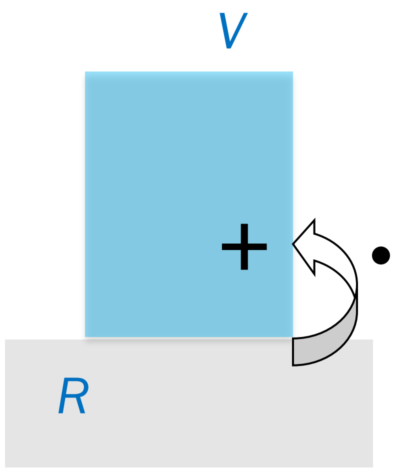
Untuk setiap vektor **u, v** dalam *V* dan sembarang bilangan skalar *k* berlaku:

2. $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$
3. $\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}$
4. terdapat objek **0** pada *V*, yang disebut vektor nol, sehingga
   $\mathbf{0} + \mathbf{u} = \mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u}$ untuk semua **u** pada *V*
5. untuk setiap **u** pada *V*, terdapat negatif –**u** pada *V* sehingga
   $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = (-\mathbf{u}) + \mathbf{u} = \mathbf{0}$
6. Jika *k* skalar dan **u** elemen di *V*, maka *k***u** terdapat pada *V*
7. $k(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = k\mathbf{u} + k\mathbf{v}$
8. $(k + l)\mathbf{u} = k\mathbf{u} + l\mathbf{u}$
9. $k(l\mathbf{u}) = (kl)\mathbf{u}$
10. $1\mathbf{u} = \mathbf{u}$

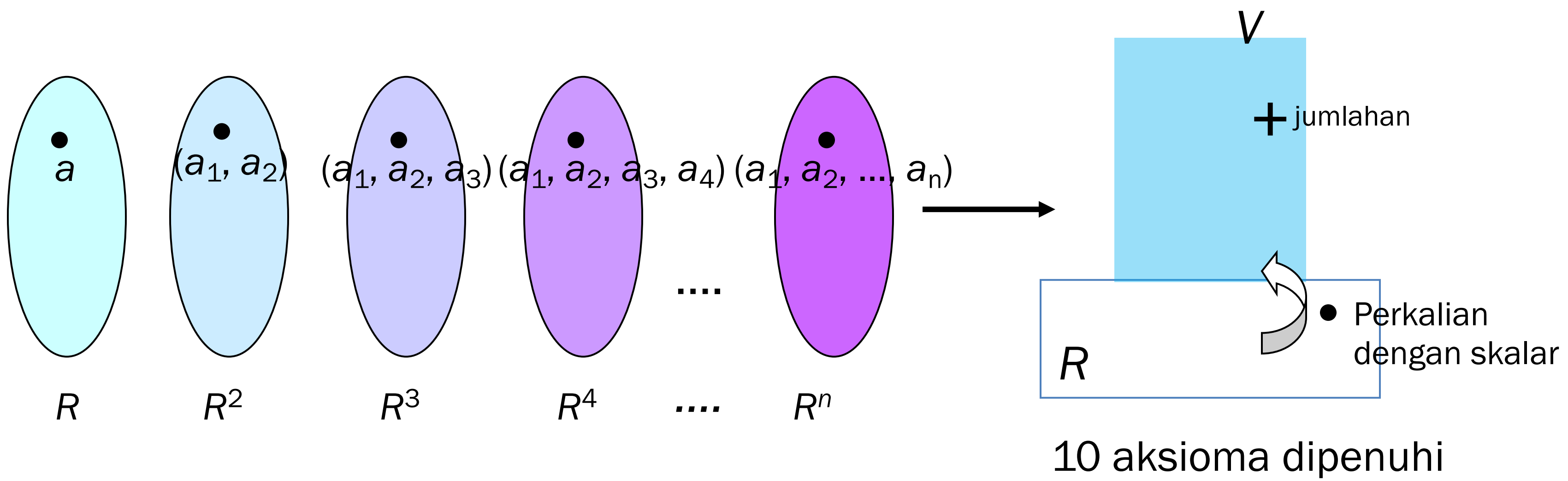
V ruang vektor atas *R*

- *V* himpunan tidak kosong
- Pada V didefinisikan: jumlahan (+) dan perkalian dengan skalar (.)
- (*V*, +, .) memenuhi 10 aksioma ruang vektor

Penulisan ruang vektor: *V* (tanpa operasi) atau (*V*, +, .)



Generalisasi: ruang Euclid ke ruang vektor umum



Pada bab sebelumnya kita sudah mempelajari himpunan vektor-vektor pada bidang (R^2) dan ruang (R^3). Dua himpunan tersebut memenuhi 10 aksioma ruang vektor. Ternyata R, R^4, R^n, ... juga memenuhi 10 aksioma ruang vektor.

Contoh 1: Ruang vektor *R*

Himpunan bilangan nyata *R*, jumlahan dan perkalian bilangan nyata

Mudah ditunjukkan bahwa 10 aksioma dipenuhi di (*R*, +, .).

Jadi, (*R*, +, .) merupakan ruang vektor atas *R*.

- Bilangan nyata 3 adalah vektor di ruang vektor *R*.
- 11 adalah vektor karena merupakan elemen ruang vektor (*R*, +, .).

Contoh 2: Ruang vektor R^2

- R^2 merupakan himpunan semua vektor pada bidang R^2.

$$R^2 = \{\mathbf{u} : \mathbf{u} = (u_1, u_2) | u_1, u_2 \in R\}$$

Operasi penjumlahan (+) didefinisikan sebagai berikut.

$\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ $\quad$ $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ $\quad$ $\mathbf{u} + \mathbf{v} = (u_1, u_2) + (v_1, v_2) = (u_1 + v_1, u_2 + v_2)$

Operasi perkalian dengan skalar (.) didefinisikan sebagai berikut.

$$k\mathbf{u} = k(u_1, u_2) = (ku_1, ku_2)$$

Elemen nol di R^2: $\mathbf{0} = (0,0)$

- Untuk membuktikan R^2 ruang vektor. Kesepuluh aksioma harus dipenuhi.
  1. (+) tertutup

     $\mathbf{u} + \mathbf{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2)$

     u+**v** menghasilkan vektor di R^2

     Aksioma 1 terpenuhi
  2. (.) tertutup

     $k\mathbf{u} = (ku_1, ku_2)$

     k**u** menghasilkan vektor di R^2

     Aksioma 6 terpenuhi

Contoh 2 (lanjutan): Ruang vektor R^2

3. Terdapat elemen nol (elemen identitas terhadap penjumlahan): **u + 0 = u**

$$\mathbf{u}+\mathbf{0}=(u_1,u_2)+(0{,}0)=(u_1,u_2)=\mathbf{u}$$

Aksioma 4 terpenuhi

4. Terdapat elemen identitas terhadap perkalian dengan skalar, sehingga 1**u** = **u**

$$1\mathbf{u}=1(u_1,u_2)=(u_1,u_2)=\mathbf{u}$$

Aksioma 10 terpenuhi

5. Terdapat –**u** sehingga **u** + (-**u**) = **0**

$$-\mathbf{u}=-1(u_1,u_2)=(-u_1,-u_2)$$

$$\mathbf{u}+(-\mathbf{u})=(u_1,u_2)+(-u_1,-u_2)=(u_1-u_1,u_2-u_2)=(0{,}0)=\mathbf{0}$$

Aksioma 5 terpenuhi

6. (+) komutatif: **u + v = v + u**

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{u}+\mathbf{v}&=(u_1+v_1,u_2+v_2)\\ \mathbf{v}+\mathbf{u}&=(v_1+u_1,v_2+u_2)\end{aligned}\right\}$$

Jumlahan bilangan *real* bersifat komutatif:

$u_1+v_1=v_1+u_1$ $\quad$ $u_2+v_2=v_2+u_2$

Jadi: $\mathbf{u}+\mathbf{v}=\mathbf{v}+\mathbf{u}$

Aksioma 2 terpenuhi

Contoh 2 (lanjutan): Ruang vektor R^2

7. (+) bersifat asosiatif: (**u** + **v**) + **w** = **u** + (**v** + **w**)

$$\begin{aligned}(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w} &= (u_1+v_1,u_2+v_2)+(w_1,w_2)\\ &= (u_1+v_1+w_1,u_2+v_2+w_2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w}) &= (u_1,u_2)+(v_1+w_1,v_2+w_2)\\ &= (u_1+v_1+w_1,u_2+v_2+w_2)\end{aligned}$$

Aksioma 3 terpenuhi

8. Distributif (.) terhadap (+): *k* (**u**+**v**) = *k***u** + *k***v**

$$\begin{aligned}k(\mathbf{u}+\mathbf{v}) &= k(u_1+v_1,u_2+v_2)\\ &= (ku_1+kv_1,ku_2+kv_2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}k\mathbf{u}+k\mathbf{v} &= k(u_1,u_2)+k(v_1,v_2)\\ &= (ku_1,ku_2)+(kv_1,kv_2)\\ &= (ku_1+kv_1,ku_2+kv_2)\end{aligned}$$

$$k(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = k\mathbf{u}+k\mathbf{v}$$

Aksioma 7 terpenuhi

Contoh 2 (lanjutan): Ruang vektor R^2

9. Distributif penjumlahan skalar terhadap vektor: $(k + l)\mathbf{u} = k\mathbf{u} + l\mathbf{u}$

$$\begin{aligned}(k+l)\mathbf{u} &= (k+l)(u_1,u_2)\\ &= ((k+l)u_1,(k+l)u_2)\\ &= (ku_1+lu_1,ku_2+lu_2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}k\mathbf{u}+l\mathbf{u} &= k(u_1,u_2)+l(u_1,u_2)\\ &= (ku_1,ku_2)+(lu_1,lu_2)\\ &= (ku_1+lu_1,ku_2+lu_2)\end{aligned}$$

Aksioma 8 terpenuhi

10. (.) bersifat asosiatif: $k(l\mathbf{u}) = (kl)\mathbf{u}$

$$k(l\mathbf{u}) = k(lu_1,lu_2) = (klu_1,klu_2)$$

$$(kl)\mathbf{u} = kl(u_1,u_2) = (klu_1,klu_2)$$

Aksioma 9 terpenuhi

Contoh 3: Ruang vektor R^n

- R^n merupakan himpunan semua vektor pada ruang R^n.

  $$R^n = \{\mathbf{u} : \mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3, \cdots, u_n) \mid u_1, u_2, u_3, \cdots, u_n \in R\}$$

  Operasi penjumlahan (+) didefinisikan sebagai berikut.

  $$\mathbf{u} = (u_1, u_2, \cdots, u_n) \qquad \mathbf{v} = (v_1, v_2, \cdots, v_n)$$

  $$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (u_1, u_2, \cdots, u_n) + (v_1, v_2, \cdots, v_n) = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \cdots, u_n + v_n)$$

  Operasi perkalian dengan skalar (.) didefinisikan sebagai berikut.

  $$k\mathbf{u} = k(u_1, u_2, \cdots, u_n) = (ku_1, ku_2, \cdots, ku_n)$$

  Elemen nol di R^n : $\mathbf{0} = (0, 0, \cdots, 0)$

- Untuk membuktikan R^n ruang vektor. Kesepuluh aksioma harus dipenuhi.
  1. Terhadap jumlahan (+) R tertutup

     $$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \cdots, u_n + v_n)$$

     Aksioma 1 terpenuhi
  2. Terhadap perkalian dengan skalar (.) R tertutup

     $$k\mathbf{u} = (ku_1, ku_2, \cdots, ku_n)$$

     Aksioma 6 terpenuhi

Contoh 3 (lanjutan): Ruang vektor R^n

3. Terdapat elemen nol (elemen identitas terhadap penjumlahan): **u** + **0** = **u**

$$\mathbf{u}+\mathbf{0}=(u_1,u_2,\cdots,u_n)+(0,0,\cdots,0)=(u_1,u_2,\cdots,u_n)=\mathbf{u}$$

Aksioma 4 terpenuhi

4. Terdapat elemen identitas terhadap perkalian dengan skalar, sehingga 1**u** = **u**

$$1\mathbf{u}=1(u_1,u_2,\cdots,u_n)=(u_1,u_2,\cdots,u_n)=\mathbf{u}$$

Aksioma 10 terpenuhi

5. Terdapat –**u** sehingga **u** + (-**u**) = **0**

$$-\mathbf{u}=-1(u_1,u_2,\cdots,u_n)=(-u_1,-u_2,\cdots,-u_n)$$

$$\mathbf{u}+(-\mathbf{u})=(u_1-u_1,u_2-u_2,\cdots,u_n-u_n)=(0,0,\cdots,0)=\mathbf{0}$$

Aksioma 5 terpenuhi

6. Komutatif terhadap (+) : **u** + **v** = **v** + **u**

$$\mathbf{u}+\mathbf{v}=(u_1+v_1,u_2+v_2,\cdots,u_n+v_n)$$

$$\mathbf{v}+\mathbf{u}=(v_1+u_1,v_2+u_2,\cdots,v_n+u_n)$$

$$\mathbf{u}+\mathbf{v}=\mathbf{v}+\mathbf{u}$$

Aksioma 2 terpenuhi

Contoh 3 (lanjutan): Ruang vektor R^n

7. (+) bersifat asosiatif: (**u** + **v**) + **w** = **u** + (**v** + **w**)

$$(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w} = (u_1+v_1, u_2+v_2, \cdots, u_n+v_n)+(w_1, w_2, \cdots, w_n)$$
$$= (u_1+v_1+w_1, u_2+v_2+w_2, \cdots, u_n+v_n+w_n)$$

$$\mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w}) = (u_1, u_2, \cdots, u_n)+(v_1+w_1, v_2+w_2, \cdots, v_n+w_n)$$
$$= (u_1+v_1+w_1, u_2+v_2+w_2, \cdots, u_n+v_n+w_n)$$

Aksioma 3 terpenuhi

8. Distributif (.) terhadap (+): k (**u**+**v**) = k**u** + k**v**

$$k(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = k(u_1+v_1, u_2+v_2, \cdots, u_n+v_n)$$
$$= (ku_1+kv_1, ku_2+kv_2, \cdots, ku_n+kv_n)$$

$$k\mathbf{u}+k\mathbf{v} = k(u_1, u_2, \cdots, u_n)+k(v_1, v_2, \cdots, v_n)$$
$$= (ku_1, ku_2, \cdots, ku_n)+(kv_1, kv_2, \cdots, kv_n)$$
$$= (ku_1+kv_1, ku_2+kv_2, \cdots, ku_n+kv_n)$$

Aksioma 7 terpenuhi

$$k(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = k\mathbf{u}+k\mathbf{v}$$

Contoh 3 (lanjutan): Ruang vektor R^n

9. Distributif penjumlahan skalar terhadap vektor: $(k + l)\mathbf{u} = k\mathbf{u} + l\mathbf{u}$

$$\begin{aligned}(k+l)\mathbf{u} &= (k+l)(u_1, u_2, \cdots, u_n) \\ &= ((k+l)u_1, (k+l)u_2, \cdots, (k+l)u_n) \\ &= (ku_1 + lu_1, ku_2 + lu_2, \cdots, ku_n + lu_n)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}k\mathbf{u} + l\mathbf{u} &= k(u_1, u_2, \cdots, u_n) + l(u_1, u_2, \cdots, u_n) \\ &= (ku_1, ku_2, \cdots, ku_n) + (lu_1, lu_2, \cdots, lu_n) \\ &= (ku_1 + lu_1, ku_2 + lu_2, \cdots, ku_n + lu_n)\end{aligned}$$

Aksioma 8 terpenuhi

10. (.) bersifat asosiatif: $k(l\mathbf{u}) = (kl)\mathbf{u}$

$$k(l\mathbf{u}) = k(lu_1, lu_2, \cdots, lu_n) = (klu_1, klu_2, \cdots, klu_n)$$

$$(kl)\mathbf{u} = kl(u_1, u_2, \cdots, u_n) = (klu_1, klu_2, \cdots, klu_n)$$

Aksioma 9 terpenuhi

Contoh 4 : Ruang vektor M^{2x3}

- M^{2x3} adalah himpunan semua matriks ber-ordo 2x3

$$M^{2X3} = \left\{ \mathbf{a} : \mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \middle| a_{ij} \in R \right\}$$

  - Operasi (+) didefinisikan sebagai berikut:

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} \end{pmatrix} \qquad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} & v_{13} \\ v_{21} & v_{22} & v_{23} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} & v_{13} \\ v_{21} & v_{22} & v_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{11}+v_{11} & u_{12}+v_{12} & u_{13}+v_{13} \\ u_{21}+v_{21} & u_{22}+v_{22} & u_{23}+v_{23} \end{pmatrix}$$

  - Operasi (.) didefinisikan sebagai berikut:

$$k\mathbf{u} = k\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ku_{11} & ku_{12} & ku_{13} \\ ku_{21} & ku_{22} & ku_{23} \end{pmatrix}$$

  - Elemen nol di M^{2x3} : $\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Contoh 4 (lanjutan) : Ruang vektor M^{2x3}

- Untuk membuktikan M^{2x3} adalah ruang vektor, kesepuluh aksioma harus dipenuhi.
  1. Tertutup terhadap (+)

$$\mathbf{u}+\mathbf{v}=\begin{pmatrix} u_{11}+v_{11} & u_{12}+v_{12} & u_{13}+v_{13} \\ u_{21}+v_{21} & u_{22}+v_{22} & u_{23}+v_{23} \end{pmatrix}$$

Aksioma 1 terpenuhi

  2. Tertutup erhadap (.)

$$k\mathbf{u}=\begin{pmatrix} ku_{11} & ku_{12} & ku_{13} \\ ku_{21} & ku_{22} & ku_{23} \end{pmatrix}$$

Aksioma 6 terpenuhi

  3. Terdapat elemen nol (elemen identitas terhadap penjumlahan): **u + 0 = u**

$$\mathbf{0}+\mathbf{u}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} \end{pmatrix}=\mathbf{u}$$

Aksioma 4 terpenuhi

Contoh 4 (lanjutan): Ruang vektor M^{2x3}

4. Terdapat elemen identitas terhadap perkalian dengan skalar, sehingga 1**u** = **u**

$$1\mathbf{u}=1\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} \end{pmatrix}=\mathbf{u}$$

Aksioma 10 terpenuhi

5. Terdapat –**u** sehingga **u** + (-**u**) = **0**

$$-\mathbf{u}=-1\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -u_{11} & -u_{12} & -u_{13} \\ -u_{21} & -u_{22} & -u_{23} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{u}+(-\mathbf{u})=\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -u_{11} & -u_{12} & -u_{13} \\ -u_{21} & -u_{22} & -u_{23} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}=\mathbf{0}$$

Aksioma 5 terpenuhi

6. (+) komutatif: **u** + **v** = **v** + **u**

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{u}+\mathbf{v}&=\begin{pmatrix} u_{11}+v_{11} & u_{12}+v_{12} & u_{13}+v_{13} \\ u_{21}+v_{21} & u_{22}+v_{22} & u_{23}+v_{23} \end{pmatrix} \\ \mathbf{v}+\mathbf{u}&=\begin{pmatrix} v_{11}+u_{11} & v_{12}+u_{12} & v_{13}+u_{13} \\ v_{21}+u_{21} & v_{22}+u_{22} & v_{23}+u_{23} \end{pmatrix} \end{aligned}\right\} \quad u_{ij}+v_{ij}=v_{ij}+u_{ij}$$

$$\therefore \mathbf{u}+\mathbf{v}=\mathbf{v}+\mathbf{u}$$

Aksioma 2 terpenuhi

Contoh 4 (lanjutan): Ruang vektor M^{2x3}

7. (+) bersifat asosiatif: **(u + v) + w = u + (v + w)**

$$(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w}=\begin{pmatrix} u_{11}+v_{11} & u_{12}+v_{12} & u_{13}+v_{13} \\ u_{21}+v_{21} & u_{22}+v_{22} & u_{23}+v_{23} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} w_{11} & w_{12} & w_{13} \\ w_{21} & w_{22} & w_{23} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} u_{11}+v_{11}+w_{11} & u_{12}+v_{12}+w_{12} & u_{13}+v_{13}+w_{23} \\ u_{21}+v_{21}+w_{21} & u_{22}+v_{22}+w_{22} & u_{23}+v_{23}+w_{23} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w})=\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} v_{11}+w_{11} & v_{12}+w_{12} & v_{13}+w_{13} \\ v_{21}+w_{21} & v_{22}+w_{22} & v_{23}+w_{23} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} u_{11}+v_{11}+w_{11} & u_{12}+v_{12}+w_{12} & u_{13}+v_{13}+w_{23} \\ u_{21}+v_{21}+w_{21} & u_{22}+v_{22}+w_{22} & u_{23}+v_{23}+w_{23} \end{pmatrix}$$

Aksioma 3 terpenuhi

8. Distributif (.) terhadap (+) : *k* **(u+v)** = *k***u** + *k***v**

$$k(\mathbf{u}+\mathbf{v})=k\begin{pmatrix} u_{11}+v_{11} & u_{12}+v_{12} & u_{13}+v_{13} \\ u_{21}+v_{21} & u_{22}+v_{22} & u_{23}+v_{23} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} ku_{11}+kv_{11} & ku_{12}+kv_{12} & ku_{13}+kv_{13} \\ ku_{21}+kv_{21} & ku_{22}+kv_{22} & ku_{23}+kv_{23} \end{pmatrix}$$

$$k\mathbf{u}+k\mathbf{v}=\begin{pmatrix} ku_{11} & ku_{12} & ku_{13} \\ ku_{21} & ku_{22} & ku_{23} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} kv_{11} & kv_{12} & kv_{13} \\ kv_{21} & kv_{22} & kv_{23} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} ku_{11}+kv_{11} & ku_{12}+kv_{12} & ku_{13}+kv_{13} \\ ku_{21}+kv_{21} & ku_{22}+kv_{22} & ku_{23}+kv_{23} \end{pmatrix}$$

Aksioma 7 terpenuhi

Contoh 4 (lanjutan): Ruang vektor M^{2x3}

9. Distributif penjumlahan skalar terhadap vektor: $(k + l)\mathbf{u} = k\mathbf{u} + l\mathbf{u}$

$$(k+l)\mathbf{u} = (k+l)\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (k+l)u_{11} & (k+l)u_{12} & (k+l)u_{13} \\ (k+l)u_{21} & (k+l)u_{22} & (k+l)u_{23} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} ku_{11}+lu_{11} & ku_{12}+lu_{12} & ku_{13}+lu_{13} \\ ku_{21}+lu_{21} & ku_{22}+lu_{22} & ku_{23}+lu_{23} \end{pmatrix} = k\mathbf{u}+l\mathbf{u}$$

Aksioma 8 terpenuhi

10. (.) bersifat asosiatif: $k(l\mathbf{u}) = (kl)\mathbf{u}$

$$k(l\mathbf{u}) = (k)\begin{pmatrix} lu_{11} & lu_{12} & lu_{13} \\ lu_{21} & lu_{22} & lu_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} klu_{11} & klu_{12} & klu_{13} \\ klu_{21} & klu_{22} & klu_{23} \end{pmatrix}$$

$$= (kl)\mathbf{u}$$

Aksioma 9 terpenuhi

Contoh 5: Ruang vektor D^{3x3}

D^{3x3} adalah himpunan semua matriks diagonal ber-ordo 3x3

$$V = \left\{ \mathbf{a} : \mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} \middle| a_{ii} \in R \right\}$$

- Operasi (+) didefinisikan sebagai berikut:

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_{11} & 0 & 0 \\ 0 & u_{22} & 0 \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix} \qquad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_{11} & 0 & 0 \\ 0 & v_{22} & 0 \\ 0 & 0 & v_{33} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \begin{pmatrix} u_{11} & 0 & 0 \\ 0 & u_{22} & 0 \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_{11} & 0 & 0 \\ 0 & v_{22} & 0 \\ 0 & 0 & v_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{11} + v_{11} & 0 & 0 \\ 0 & u_{22} + v_{22} & 0 \\ 0 & 0 & u_{33} + v_{33} \end{pmatrix}$$

- Operasi (.) didefinisikan sebagai berikut:

$$k\mathbf{u} = k\begin{pmatrix} u_{11} & 0 & 0 \\ 0 & u_{22} & 0 \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ku_{11} & 0 & 0 \\ 0 & ku_{22} & 0 \\ 0 & 0 & ku_{33} \end{pmatrix}$$

- Elemen nol di D^{3x3} : $\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Contoh 5 (lanjutan): Ruang vektor D^{3x3}

- Untuk membuktikan D^{3x3} ruang vektor, kesepuluh aksioma harus dipenuhi.

1. (+) tertutup

$$\mathbf{u}+\mathbf{v}=\begin{pmatrix} u_{11}+v_{11} & 0 & 0 \\ 0 & u_{22}+v_{22} & 0 \\ 0 & 0 & u_{33}+v_{33} \end{pmatrix}$$

Elemen D^{3x3}

Aksioma 1 terpenuhi

2. (.) tertutup

$$k\mathbf{u}=\begin{pmatrix} ku_{11} & 0 & 0 \\ 0 & ku_{22} & 0 \\ 0 & 0 & ku_{33} \end{pmatrix}$$

Elemen D^{2x3}

Aksioma 6 terpenuhi

3. Terdapat elemen nol (elemen identitas terhadap penjumlahan): **u + 0 = u**

$$\mathbf{0}+\mathbf{u}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} u_{11} & 0 & 0 \\ 0 & u_{22} & 0 \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} u_{11} & 0 & 0 \\ 0 & u_{22} & 0 \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix}=\mathbf{u}$$

Aksioma 4 terpenuhi

Contoh 5 (lanjutan): Ruang vektor D^{3x3}

4. Terdapat elemen identitas terhadap perkalian dengan skalar, sehingga 1**u** = **u**

$$1\mathbf{u} = 1\begin{pmatrix} u_{11} & 0 & 0 \\ 0 & u_{22} & 0 \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{11} & 0 & 0 \\ 0 & u_{22} & 0 \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix} = \mathbf{u}$$

Aksioma 10 terpenuhi

5. Terdapat –**u** sehingga **u** + (-**u**) = **0**

$$-\mathbf{u} = -1\begin{pmatrix} u_{11} & 0 & 0 \\ 0 & u_{22} & 0 \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -u_{11} & 0 & 0 \\ 0 & -u_{22} & 0 \\ 0 & 0 & -u_{33} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} u_{11} & 0 & 0 \\ 0 & u_{22} & 0 \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -u_{11} & 0 & 0 \\ 0 & -u_{22} & 0 \\ 0 & 0 & -u_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

Aksioma 5 terpenuhi

6. (+) komutatif: **u** + **v** = **v** + **u**

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \begin{pmatrix} u_{11} + v_{11} & 0 & 0 \\ 0 & u_{22} + v_{22} & 0 \\ 0 & 0 & u_{33} + v_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{11} + u_{11} & 0 & 0 \\ 0 & v_{22} + u_{22} & 0 \\ 0 & 0 & v_{33} + u_{33} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$$

Aksioma 2 terpenuhi

Contoh 5 (lanjutan): Ruang vektor D^{3x3}

7. (+) bersifat asosiatif: **(u + v) + w = u + (v + w)**

$$(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w}=\begin{pmatrix} u_{11}+v_{11} & 0 & 0 \\ 0 & u_{22}+v_{22} & 0 \\ 0 & 0 & u_{33}+v_{33} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} w_{11} & 0 & 0 \\ 0 & w_{22} & 0 \\ 0 & 0 & w_{33} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} u_{11}+v_{11}+w_{11} & 0 & 0 \\ 0 & u_{22}+v_{22}+w_{11} & 0 \\ 0 & 0 & u_{33}+v_{33}+w_{33} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} u_{11} & 0 & 0 \\ 0 & u_{22} & 0 \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} v_{11}+w_{11} & 0 & 0 \\ 0 & v_{22}+w_{22} & 0 \\ 0 & 0 & v_{33}+w_{33} \end{pmatrix}=\mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w})$$

Aksioma 3 terpenuhi

8. Distributif (.) terhadap (+): *k* **(u+v)** = *k***u** + *k***v**

$$k(\mathbf{u}+\mathbf{v})=k\begin{pmatrix} u_{11}+v_{11} & 0 & 0 \\ 0 & u_{22}+v_{22} & 0 \\ 0 & 0 & u_{33}+v_{33} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ku_{11}+kv_{11} & 0 & 0 \\ 0 & ku_{22}+kv_{22} & 0 \\ 0 & 0 & ku_{33}+kv_{33} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} ku_{11} & 0 & 0 \\ 0 & ku_{22} & 0 \\ 0 & 0 & ku_{33} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} kv_{11} & 0 & 0 \\ 0 & kv_{22} & 0 \\ 0 & 0 & kv_{33} \end{pmatrix}$$

$$=k\mathbf{u}+k\mathbf{v}$$

Aksioma 7 terpenuhi

Contoh 5 (lanjutan): Ruang vektor D^{3x3}

9. Distributif penjumlahan skalar terhadap vektor: $(k + l)\mathbf{u} = k\mathbf{u} + l\mathbf{u}$

$$(k+l)\mathbf{u} = (k+l)\begin{pmatrix} u_{11} & 0 & 0 \\ 0 & u_{22} & 0 \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (k+l)u_{11} & 0 & 0 \\ 0 & (k+l)u_{22} & 0 \\ 0 & 0 & (k+l)u_{33} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} ku_{11}+lu_{11} & 0 & 0 \\ 0 & ku_{22}+lu_{22} & 0 \\ 0 & 0 & ku_{33}+lu_{33} \end{pmatrix} = k\mathbf{u} + l\mathbf{u}$$

Aksioma 8 terpenuhi

10. (.) bersifat asosiatif: $k(l\mathbf{u}) = (kl)\mathbf{u}$

$$k(l\mathbf{u}) = (k)\begin{pmatrix} lu_{11} & 0 & 0 \\ 0 & lu_{22} & 0 \\ 0 & 0 & lu_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} klu_{11} & 0 & 0 \\ 0 & klu_{22} & 0 \\ 0 & 0 & klu_{33} \end{pmatrix}$$

$$= (kl)\mathbf{u}$$

Aksioma 9 terpenuhi

Contoh 6: $C_{[a, b]}$

- $C_{[a, b]}$ adalah himpunan semua fungsi bernilai nyata yang kontinu pada intervakselang tertutup $[a, b]$

- Fungsi f kontinu pada titik c di domainnya jika limit $f(x)$ sebagaimana x mendekati c melalui domain f ada dan bernilai $f(c)$.

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$$

- Fungsi bernilai nyata kontinu memetakan himpunan bilangan nyata ke bilangan nyata.

- Contoh fungsi kontinu:
  - $f(x) = \sin(x)$
  - Fungsi suku banyak, misal : $f(x) = ax^2 + bx + c$
- Contoh bukan fungsi kontinu

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$$ $f(x)$ diskontinu saat $x = 0$

Contoh 6: $C_{[1,\,3]}$

$C_{[1,\,3]}$ adalah himpunan semua fungsi bernilai nyata yang kontinu di selang tertutup [1,3] $C_{[1,3]} = \{\mathbf{f} = f(x) : I \rightarrow R, x \in R\}$

- Operasi (+) didefinisikan sebagai berikut:

$$\mathbf{f} + \mathbf{g} = (\mathbf{f} + \mathbf{g})(x) = f(x) + g(x)$$

- Operasi (.) didefinisikan sebagai berikut:

$$k\mathbf{f} = (k\mathbf{f})(x) = kf(x)$$

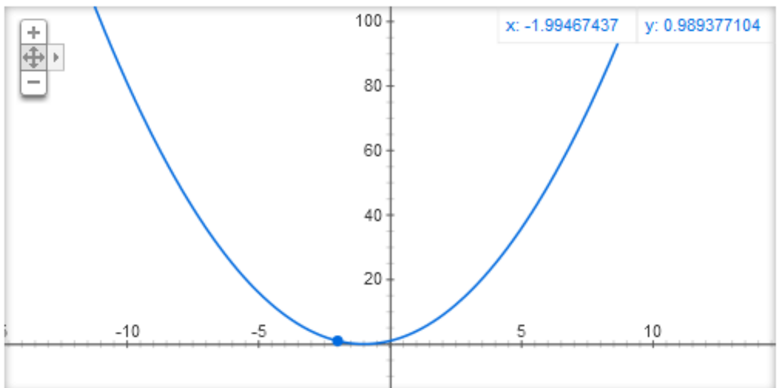
- Elemen nol di $C_{[1,\,3]}$:

$$\mathbf{0} = f_0(x) = 0, \forall x \in R$$

$f_0(x)$ adalah fungsi yang memetakan ke 0 untuk nilai x berapa pun.

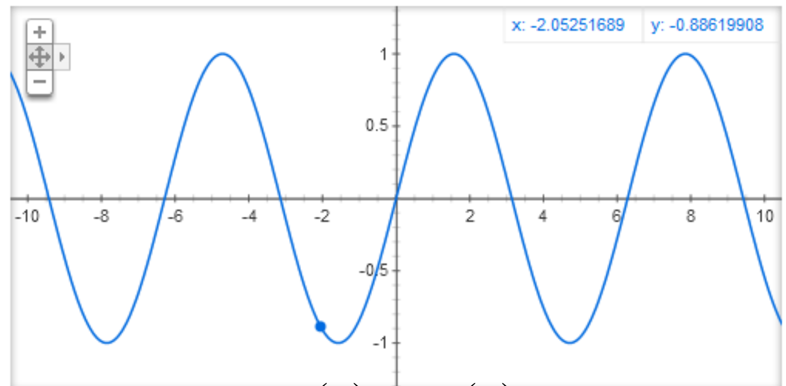
Grafik contoh 6: $C_{[1,\,3]}$

Graph for x^2+2*x+1



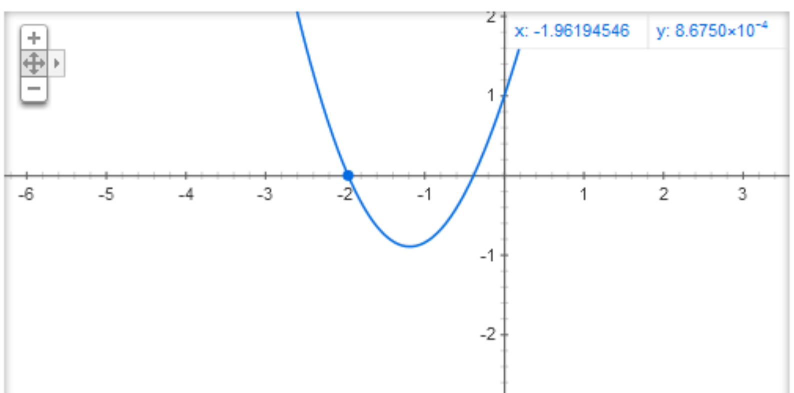
$$f(x) = x^2 + 2x + 1$$

Graph for sin(x)



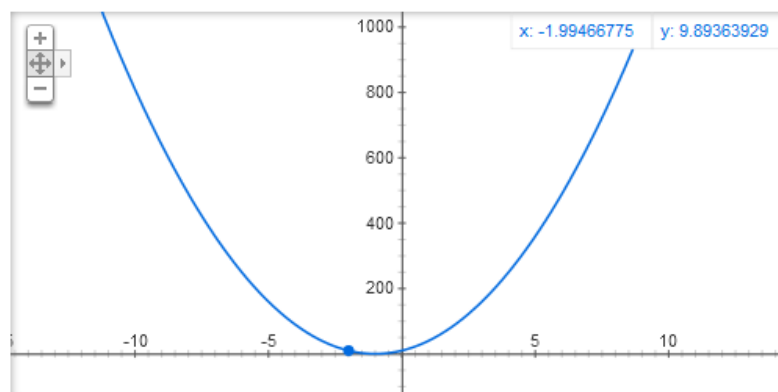
$$g(x) = \sin(x)$$

Graph for sin(x)+x^2+2*x+1



$$(f+g)(x) = x^2 + 2x + 1 + \sin(x)$$

Graph for 10*(x^2+2*x+1)



$$(10f)(x) = 10(2x + 1 + \sin(x))$$

Contoh 6 (lanjutan): $C_{[1, 3]}$

- Untuk membuktikan $C_{[1, 3]}$ ruang vektor, kesepuluh aksioma harus dipenuhi.
  1. (+) tertutup

     $$\mathbf{f}+\mathbf{g}=(\mathbf{f}+\mathbf{g})(x)=f(x)+g(x)$$

     $f(x)$ + $g(x)$ merupakan fungsi kontinu yang melibatkan variable x ($h(x)$) pada selang tertutup [1,3]

     Aksioma 1 terpenuhi
  2. (.) tertutup

     $$k\mathbf{f}=(k\mathbf{f})(x)=kf(x)$$

     $kf(x)$merupakan fungsi kontinu yang melibatkan variable x ($h(x)$) pada selang tertutup [1,3]

     Aksioma 6 terpenuhi
  3. Terdapat elemen nol (elemen identitas terhadap penjumlahan): **f + 0 = f**

     $$\mathbf{f}+\mathbf{0}=f(x)+0=f(x)=\mathbf{f}$$

     Aksioma 4 terpenuhi

Contoh 6 (lanjutan): $C_{[1,\,3]}$

4. Terdapat elemen identitas terhadap perkalian dengan skalar, sehingga 1**f** = **f**

   Elemen identitas terhadap perkalian dengan skalar *k*=1

   $1\mathbf{f} = 1f(x) = f(x) = \mathbf{f}$

   Aksioma 10 terpenuhi

5. Terdapat –**f** sehingga **f** + (-**f**) = **0**

   $-\mathbf{f} = -f(x)$

   $\mathbf{f} + (-\mathbf{f}) = f(x) - f(x) = 0 = \mathbf{0}$

   Aksioma 5 terpenuhi

6. (+) komutatif: **f** + **g** = **g** + **f**

   $\mathbf{f} + \mathbf{g} = f(x) + g(x) = g(x) + f(x) = \mathbf{g} + \mathbf{f}$

   Jumlahan dua fungsi atas bil. real bersifat komutatif

   Aksioma 2 terpenuhi

7. (+) bersifat asosiatif: (**f** + **g**) + **h** = **f** + (**g** + **h**)

   $$(\mathbf{f} + \mathbf{g}) + \mathbf{h} = (f+g)(x) + h(x) = (f+g+h)(x)$$
   $$= f(x) + (g+h)(x) = \mathbf{f} + (\mathbf{g} + \mathbf{h})$$

   Aksioma 3 terpenuhi

Contoh 6 (lanjutan): $C_{[1, 3]}$

8. Distributif (.) terhadap (+): k (**f**+**g**) = k**f** + k**g**

$$k(\mathbf{f}+\mathbf{g}) = k(f(x)+g(x)) = k((f+g)(x))$$
$$= (kf+kg)(x) = kf(x)+kg(x)$$
$$= k\mathbf{f}+k\mathbf{g}$$

Aksioma 7 terpenuhi

9. Distributif penjumlahan skalar terhadap vektor: $(k + l)$**f** = k**f** + l**f**

$$(k+l)\mathbf{f} = (k+l)f(x)$$
$$= (kf(x))+(lf(x))$$
$$= (\mathrm{k}\mathbf{f})+(l\mathbf{f})$$

Aksioma 8 terpenuhi

10. (.) bersifat asosiatif: $k(l$**f**$) = (kl)$**f**

$$k(l\mathbf{f}) = k(lf(x))$$
$$= (klf(x))$$
$$= (\mathrm{kl})f(x)$$
$$= (\mathrm{kl})\mathbf{f}$$

Aksioma 9 terpenuhi

Contoh 7: $D_{[a,\, b]}$

- $D_{[a,\, b]}$ adalah himpunan semua fungsi terdiferensial pada selang tertutup $[a, b]$

- Sebuah fungsi bilangan nyata terdiferensial pada suatu titik jika turunannya ada pada di titik tersebut.

- Contoh fungsi terdiferensial:

  $f(x) = \sin(x)$

- Setiap fungsi terdiferensial pasti kontinu, tetapi tidak semua fungsi kontinu merupakan fungsi terdiferensial

Contoh 7 (lanjutan): $D_{[0,\,1]}$

- $D_{[0,\,1]}$ adalah himpunan semua fungsi terdeferensial pada selang tertutup[0,1]

  - Operasi (+) didefinisikan sebagai berikut:

    $$\mathbf{f}+\mathbf{g}=(\mathbf{f}+\mathbf{g})(x)=f(x)+g(x)$$

  - Operasi (.) didefinisikan sebagai berikut:

    $$k\mathbf{f}=(k\mathbf{f})(x)=kf(x)$$

  - Elemen nol di $D_{[1,\,3]}$: $\mathbf{0}=f_0(x)=0, \forall x \in R$

    $f_0(x)$ adalah fungsi yang memetakan ke 0 untuk nilai x berapa pun.

Contoh 7 (lanjutan): $D_{[0,\,1]}$

Untuk membuktikan $D_{[0,\,1]}$ ruang vektor, kesepuluh aksioma harus dipenuhi.

1. (+) tertutup

$$\mathbf{f}+\mathbf{g}=(\mathbf{f}+\mathbf{g})(x)=f(x)+g(x)$$

f(*x*) + *g*(*x*) merupakan fungsi kontinu yang melibatkan variable *x* (*h*(*x*)) pada selang tertutup [1,3]

Aksioma 1 terpenuhi

2. (.) tertutup

$$k\mathbf{f}=(k\mathbf{f})(x)=kf(x)$$

kf(*x*)merupakan fungsi kontinu yang melibatkan variable *x* (*h*(*x*)) pada selang tertutup [1,3]

Aksioma 6 terpenuhi

3. Terdapat elemen nol (elemen identitas terhadap penjumlahan): **f + 0 = f**

$$\mathbf{f}+\mathbf{0}=f(x)+0=f(x)=\mathbf{f}$$

Aksioma 4 terpenuhi

Contoh 7 (lanjutan): $D_{[0,\,1]}$

4. Terdapat elemen identitas terhadap perkalian dengan skalar, sehingga 1**f** = **f**

   Elemen identitas terhadap perkalian dengan skalar *k*=1

   $$1\mathbf{f} = 1f(x) = f(x) = \mathbf{f}$$

   Aksioma 10 terpenuhi

5. Terdapat –**f** sehingga **f** + (-**f**) = **0**

   $$-\mathbf{f} = -f(x)$$

   $$\mathbf{f} + (-\mathbf{f}) = f(x) - f(x) = 0 = \mathbf{0}$$

   Aksioma 5 terpenuhi

6. (+) komutatif: **f** + **g** = **g** + **f**

   $$\mathbf{f} + \mathbf{g} = f(x) + g(x) = g(x) + f(x) = \mathbf{g} + \mathbf{f}$$

   Jumlahan dua fungsi atas bil. real bersifat komutatif

   Aksioma 2 terpenuhi

7. (+) bersifat asosiatif: (**f** + **g**) + **h** = **f** + (**g** + **h**)

   $$\begin{aligned}(\mathbf{f} + \mathbf{g}) + \mathbf{h} &= (f + g)(x) + h(x) = (f + g + h)(x) \\ &= f(x) + (g + h)(x) = \mathbf{f} + (\mathbf{g} + \mathbf{h})\end{aligned}$$

   Aksioma 3 terpenuhi

Contoh 7 (lanjutan): $D_{[0,\,1]}$

8. Distributif (.) terhadap (+): k (**f**+**g**) = k**f** + k**g**

$$\begin{aligned} k(\mathbf{f}+\mathbf{g}) &= k(f(x)+g(x)) = k((f+g)(x)) \\ &= (kf+kg)(x) = kf(x)+kg(x) \\ &= k\mathbf{f}+k\mathbf{g} \end{aligned}$$

Aksioma 7 terpenuhi

9. Distributif penjumlahan skalar terhadap vektor: (k + l)**f** = k**f** + l**f**

$$\begin{aligned} (k+l)\mathbf{f} &= (k+l)f(x) \\ &= (kf(x))+(lf(x)) \\ &= (\mathrm{k}\mathbf{f})+(l\mathbf{f}) \end{aligned}$$

Aksioma 8 terpenuhi

10. (.) bersifat asosiatif: k(l**f**) = (kl)**f**

$$\begin{aligned} k(l\mathbf{f}) &= k(lf(x)) \\ &= (klf(x)) \\ &= (\mathrm{kl})f(x) \\ &= (\mathrm{kl})\mathbf{f} \end{aligned}$$

Aksioma 9 terpenuhi

Contoh 8: P^4

P^4: himpunan semua suku banyak berderajat paling banyak 4

$$P^4 = \{\mathbf{p} : p(x) = a_0x^0 + a_1x^1 + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4, a_i \in R\}$$

- Operasi (+) didefinisikan sebagai berikut:

$$\mathbf{p} : p(x) = a_0x^0 + a_1x^1 + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4$$
$$\mathbf{q} : q(x) = b_0x^0 + b_1x^1 + b_2x^2 + b_3x^3 + b_4x^4$$
$$\mathbf{p} + \mathbf{q} = (p+q)(x)$$
$$= (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x^1 + (a_2 + b_2)x^2 + (a_3 + b_3)x^3 + (a_4 + b_4)x^4$$

- Operasi (.) didefinisikan sebagai berikut:

$$k\mathbf{p} = (kp)(x)$$
$$= (ka_0) + (ka_1)x^1 + (ka_2)x^2 + (ka_3)x^3 + (ka_4)x^4$$

- Elemen nol di P^4 :

$$\mathbf{0} = 0x^0 + 0x^1 + 0x^2 + 0x^3 + 0x^4 = 0$$

Contoh 8 (lanjutan): P^4

- Untuk membuktikan P^4 ruang vektor, kesepuluh aksioma harus dipenuhi.
  1. tertutup terhadap (+)

  $$\mathbf{p}+\mathbf{q}=(a_0+b_0)+(a_1+b_1)x^1+(a_2+b_2)x^2+(a_3+b_3)x^3+(a_4+b_4)x^4$$

  Hasil penjumlahan dua fungsi suku banyak P^4 berupa fungsi suku banyak di P^4 juga

  Aksioma 1 terpenuhi

  2. tertutup terhadap (.)

  $$k\mathbf{p}=(ka_0)+(ka_1)x^1+(ka_2)x^2+(ka_3)x^3+(ka_4)x^4$$

  Hasil perkalian fungsi suku banyak dengan skalar di P^4 berupa fungsi suku banyak di P^4 juga

  Aksioma 6 terpenuhi

  3. Terdapat elemen nol (elemen identitas terhadap penjumlahan): **p + 0 = p**

  $$\begin{aligned}\mathbf{p}+\mathbf{0}&=(a_0+0)+(a_1+0)x^1+(a_2+0)x^2+(a_3+0)x^3+(a_4+0)x^4\\&=a_0+a_1x^1+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4=\mathbf{p}\end{aligned}$$

  Aksioma 4 terpenuhi

Contoh 8 (lanjutan): P^4

4. Terdapat elemen identitas terhadap perkalian dengan skalar, sehingga 1**p** = **p**

$$1\mathbf{p} = 1\left(a_0 + a_1x^1 + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4\right) = \mathbf{p}$$

Aksioma 10 terpenuhi

5. Terdapat –**p** sehingga **p**+ (-**p**) = **0**

$$\begin{aligned}-\mathbf{p} &= -1\left(a_0 + a_1x^1 + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4\right)\\ &= -a_0 - a_1x^1 - a_2x^2 - a_3x^3 - a_4x^4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{p} + (-\mathbf{p}) &= (a_0 - a_0) + (a_1 - a_1)x^1 + (a_2 - a_2)x^2 + (a_3 - a_3)x^3 + (a_4 - a_4)x^4\\ &= 0 + 0x^1 + 0x^2 + 0x^3 + 0x^4 = \mathbf{0}\end{aligned}$$

Aksioma 5 terpenuhi

6. (+) komutatif: **p** + **q** = **q** + **p**

$$\begin{aligned}\mathbf{p} + \mathbf{q} &= (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x^1 + (a_2 + b_2)x^2 + (a_3 + b_3)x^3 + (a_4 + b_4)x^4\\ &= (b_0 + a_0) + (b_1 + a_1)x^1 + (b_2 + a_2)x^2 + (b_3 + a_3)x^3 + (b_4 + a_4)x^4\end{aligned}$$

(sifat komutatif penjumlahan bilangan real)

$$\mathbf{p} + \mathbf{q} = \mathbf{q} + \mathbf{p}$$

Aksioma 2 terpenuhi

Contoh 8 (lanjutan): P^4

7. (+) bersifat asosiatif: (**p** + **q**) + **r** = **p** + (**q** + **r**)

$$\text{Misal}: \mathbf{r} = c_0x^0 + c_1x^1 + c_2x^2 + c_3x^3 + c_4x^4$$

$$(\mathbf{p}+\mathbf{q})+\mathbf{r} = (a_0+b_0)+(a_1+b_1)x^1+(a_2+b_2)x^2+(a_3+b_3)x^3+(a_4+b_4)x^4+\left(c_0x^0+c_1x^1+c_2x^2+c_3x^3+c_4x^4\right)$$

$$= (a_0+b_0+c_0)+(a_1+b_1+c_1)x^1+(a_2+b_2+c_2)x^2+(a_3+b_3+c_3)x^3+(a_4+b_4+c_4)x^4$$

(sifat asosiatif penjumlahan bilangan real)

$$= \left(a_0x^0+a_1x^1+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4\right)+(b_0+c_0)+(b_1+c_1)x^1+(b_2+c_2)x^2+(b_3+c_3)x^3+(b_4+c_4)x^4$$

$$= \mathbf{p}+(\mathbf{q}+\mathbf{r})$$

Aksioma 3 terpenuhi

8. Distributif (.) terhadap (+): *k* (**p**+**q**) = *k***p** + *k***q**

$$k(\mathbf{p}+\mathbf{q}) = k\left((a_0+b_0)+(a_1+b_1)x^1+(a_2+b_2)x^2+(a_3+b_3)x^3+(a_4+b_4)x^4\right)$$

(sifat distributif perkalian dengan skalar bil. real)

$$= (ka_0+kb_0)+(ka_1+kb_1)x^1+(ka_2+kb_2)x^2+(ka_3+kb_3)x^3+(ka_4+kb_4)x^4$$

$$= \left((ka_0)+(ka_1)x^1+(ka_2)x^2+(ka_3)x^3+(ka_4)x^4\right)+\left((kb_0)+(kb_1)x^1+(kb_2)x^2+(kb_3)x^3+(kb_4)x^4\right)$$

$$= k\mathbf{p}+k\mathbf{q}$$

Aksioma 7 terpenuhi

Contoh 8 (lanjutan): P^4

9. Distributif penjumlahan skalar terhadap vektor: $(k + l)\mathbf{p} = k\mathbf{p} + l\mathbf{p}$

$$\begin{aligned}(k+l)\mathbf{p} &= (k+l)\left(a_0 + a_1x^1 + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4\right)\\ &= \left((k+l)a_0 + (k+l)a_1x^1 + (k+l)a_2x^2 + (k+l)a_3x^3 + (k+l)a_4x^4\right) \quad \text{(sifat distributif perkalian dengan skalar bil. real)}\\ &= \left((ka_0 + la_0) + (ka_1 + la_1)x^1 + (ka_2 + la_2)x^2 + (ka_3 + la_3)x^3 + (ka_4 + la_4)x^4\right)\\ &= k\mathbf{p} + l\mathbf{p}\end{aligned}$$

Aksioma 8 terpenuhi

10. (.) bersifat asosiatif: $k(l\mathbf{p}) = (kl)\mathbf{p}$

$$\begin{aligned}k(l\mathbf{p}) &= (k)\left(la_0 + la_1x^1 + la_2x^2 + la_3x^3 + la_4x^4\right)\\ &= \left(kla_0 + kla_1x^1 + kla_2x^2 + kla_3x^3 + kla_4x^4\right)\\ &= kl\left(a_0 + a_1x^1 + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4\right) \quad \text{(sifat asosiatif perkalian dengan skalar bil. real)}\\ &= (kl)\mathbf{p}\end{aligned}$$

Aksioma 9 terpenuhi

Contoh 9: P^2

- P^2: himpunan semua suku banyak berderajat paling banyak 2

$$P^2 = \{\mathbf{p} : p(x) = a_0x^0 + a_1x^1 + a_2x^2 \,|\, a_i, i \in R\}$$

  - Operasi (+) didefinisikan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
\mathbf{p} &: p(x) = a_0x^0 + a_1x^1 + a_2x^2 \\
\mathbf{q} &: q(x) = b_0x^0 + b_1x^1 + b_2x^2 \\
\mathbf{p} + \mathbf{q} &= (p+q)(x) \\
&= (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x^1 + (a_2 + b_2)x^2
\end{aligned}$$

  - Operasi (.) didefinisikan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
k\mathbf{p} &= (kp)(x) \\
&= (ka_0) + (ka_1)x^1 + (ka_2)x^2
\end{aligned}$$

  - Elemen nol di P^4: $\mathbf{0} = 0x^0 + 0x^1 + 0x^2 = 0$

Contoh 9 (lanjutan): P^2

- Untuk membuktikan P^2 ruang vektor, kesepuluh aksioma harus dipenuhi.
  1. tertutup terhadap (+)

     $$\mathbf{p}+\mathbf{q}=(a_0+b_0)+(a_1+b_1)x^1+(a_2+b_2)x^2$$

     Hasil penjumlahan dua fungsi suku banyak P^2 berupa fungsi suku banyak di P^2 juga

     Aksioma 1 terpenuhi

  2. tertutup terhadap (.)

     $$k\mathbf{p}=(ka_0)+(ka_1)x^1+(ka_2)x^2$$

     Hasil perkalian fungsi suku banyak dengan skalar di P^2 berupa fungsi suku banyak di P^2 juga

     Aksioma 6 terpenuhi

  3. Terdapat elemen nol (elemen identitas terhadap penjumlahan): **p + 0 = p**

     $$\begin{aligned}\mathbf{p}+\mathbf{0}&=(a_0+0)+(a_1+0)x^1+(a_2+0)x^2\\&=a_0+a_1x^1+a_2x^2=\mathbf{p}\end{aligned}$$

     Aksioma 4 terpenuhi

Contoh 9 (lanjutan): P^2

4. Terdapat elemen identitas terhadap perkalian dengan skalar, sehingga 1**p** = **p**

$$1\mathbf{p} = 1\left(a_0 + a_1 x^1 + a_2 x^2\right) = \mathbf{p}$$

Aksioma 10 terpenuhi

5. Terdapat –**p** sehingga **p**+ (-**p**) = **0**

$$-\mathbf{p} = -1\left(a_0 + a_1 x^1 + a_2 x^2\right)$$
$$= -a_0 - a_1 x^1 - a_2 x^2$$

$$\mathbf{p} + (-\mathbf{p}) = (a_0 - a_0) + (a_1 - a_1)x^1 + (a_2 - a_2)x^2$$
$$= 0 + 0x^1 + 0x^2 = \mathbf{0}$$

Aksioma 5 terpenuhi

6. (+) komutatif: **p** + **q** = **q** + **p**

$$\mathbf{p} + \mathbf{q} = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x^1 + (a_2 + b_2)x^2$$
$$= (b_0 + a_0) + (b_1 + a_1)x^1 + (b_2 + a_2)x^2$$
$$\mathbf{p} + \mathbf{q} = \mathbf{q} + \mathbf{p}$$

(sifat komutatif penjumlahan bilangan real)

Aksioma 2 terpenuhi

Contoh 9 (lanjutan): P^2

7. (+) bersifat asosiatif: (**p** + **q**) + **r** = **p** + (**q** + **r**)

$$\text{Misal}: \mathbf{r} = c_0x^0 + c_1x^1 + c_2x^2$$

$$\begin{aligned}(\mathbf{p}+\mathbf{q})+\mathbf{r} &= (a_0+b_0)+(a_1+b_1)x^1+(a_2+b_2)x^2+\left(c_0x^0+c_1x^1+c_2x^2\right)\\ &= (a_0+b_0+c_0)(a_1+b_1+c_1)x^1+(a_2+b_2+c_2)x^2\\ &= \left(a_0x^0+a_1x^1+a_2x^2\right)+(b_0+c_0)+(b_1+c_1)x^1+(b_2+c_2)x^2\\ &= \mathbf{p}+(\mathbf{q}+\mathbf{r})\end{aligned}$$

(sifat asosiatif penjumlahan bilangan real)

Aksioma 3 terpenuhi

7. Distributif (.) terhadap (+): *k* (**p**+**q**) = *k***p** + *k***q**

$$\begin{aligned}k(\mathbf{p}+\mathbf{q}) &= k\left((a_0+b_0)+(a_1+b_1)x^1+(a_2+b_2)x^2\right)\\ &= (ka_0+kb_0)+(ka_1+kb_1)x^1+(ka_2+kb_2)x^2\\ &= \left((ka_0)+(ka_1)x^1+(ka_2)x^2\right)+\left((kb_0)+(kb_1)x^1+(kb_2)x^2\right)\\ &= k\mathbf{p}+k\mathbf{q}\end{aligned}$$

(sifat distributif perkalian dengan skalar bil. real)

Aksioma 7 terpenuhi

Contoh 9 (lanjutan): P^2

9. Distributif penjumlahan skalar terhadap vektor: $(k + l)\mathbf{p} = k\mathbf{p} + l\mathbf{p}$

$$
\begin{aligned}
(k+l)\mathbf{p} &= (k+l)\left(a_0 + a_1x^1 + a_2x^2\right) \\
&= \left((k+l)a_0 + (k+l)a_1x^1 + (k+l)a_2x^2\right) \quad \text{(sifat distributif perkalian dengan skalar bil. real)} \\
&= \left((ka_0 + la_0) + (ka_1 + la_1)x^1 + (ka_2 + la_2)x^2\right) \\
&= k\mathbf{p} + l\mathbf{p}
\end{aligned}
$$

Aksioma 8 terpenuhi

10. (.) bersifat asosiatif: $k(l\mathbf{p}) = (kl)\mathbf{p}$

$$
\begin{aligned}
k(l\mathbf{p}) &= (k)\left(la_0 + la_1x^1 + la_2x^2\right) \\
&= \left(kla_0 + kla_1x^1 + kla_2x^2\right) \\
&= kl\left(a_0 + a_1x^1 + a_2x^2\right) \\
&= (kl)\mathbf{p}
\end{aligned}
$$

(sifat asosiatif perkalian dengan skalar bil. real)

Aksioma 9 terpenuhi

Latihan 1

1. Diberikan Z : himpunan semua bilangan bulat. Apakah (Z, +, .) merupakan ruang vektor?

2. Apakah (M^{nxn}, +, .) ruang vektor atas R?

3. Diberikan D^{2x2} himpunan semua matriks diagonal berukuran 2x2. Didefinisikan jumlahan pada himpunan tersebut seperti jumlahan yang kita kenal. Didefinisikan perkalian skalar * sebagai berikut:

$$k * A = 0$$

   untuk sembarang skalar k dan matriks $A \in D^{2x2}$, 0 adalah matriks nol. Apakah (D^{2x2} , + , *) merupakan ruang vektor?

Jawaban 1. Bukan 2. Ya 3. Bukan

Sifat-sifat ruang vektor

Diberikan ruang vektor V. Untuk setiap vektor $\mathbf{u}$ dan skalar k berlaku:

a) $0\mathbf{u} = \mathbf{0}$

b) $k\mathbf{0} = \mathbf{0}$

c) $(-1)\mathbf{u} = -\mathbf{u}$

d) Jika $k\mathbf{u} = \mathbf{0}$, maka $k = 0$ atau $\mathbf{u} = \mathbf{0}$

- Ruang vektor R^n
- Ruang vektor umum
  - Subruang
  - Dependensi linier
    - Kombinasi linier
    - Himpunan perentang
    - Basis dan dimensi
  - Ruang baris, ruang kolom, ruang null
    - Rank dan nulitas

5.2 Subruang

Pengertian subruang

Definisi 5.2: Subruang

Subhimpunan W dari V disebut subruang dari V jika W merupakan ruang vektor di bawah penjumlahan dan perkalian dengan skalar seperti yang didefinisikan pada V.

Contoh 10:

P^4 dan P^3 adalah ruang-ruang vektor dengan operasi aljabar yang sama.

- P^3 adalah subhimpunan dari P^4.
- P^3 adalah subruang P^4.

R^2 bukan subruang dari R^3

Contoh-contoh subruang

- $D_{[0,\ 1]}$ adalah subruang dari $C_{[0,\ 1]}$. Setiap fungsi terdeferensial pasti kontinu, tetapi tidak sebaliknya.

- D^{2x2} adalah subruang dari M^{2x2}.

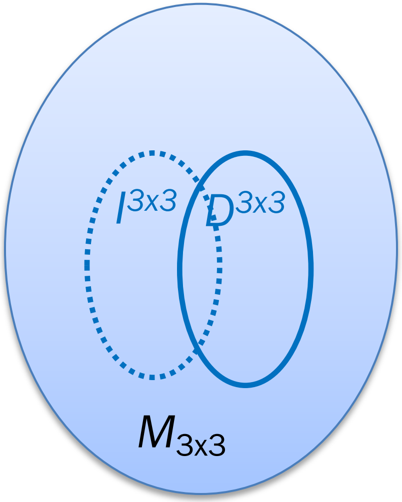
- P^3 bukan subruang dari M^{2x2} karena P^3 bukan subhimpunan dari M^{2x2}.

- (D^{2x2}, +, *) pada Latihan 1 no. 3, bukan subruang dari M^{2x2}, karena bukan ruang vektor.

Contoh-contoh subruang

D^{3x3}: Himpunan semua matriks diagonal 3x3 adalah subruang.

I^{3x3} : Himpunan semua matriks 3x3 yang mempunyai inverse bukan subruang karena bukan ruang vektor. Jumlahan dua matriks yang mempunyai inverse tidak bersifat tertutup. Demikian juga perkalian dengan skalar.



Contoh matriks yang mempunyai inverse tapi jumlahan keduanya tidak memiliki inverse.

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{a}+\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det(\mathbf{a}) = 1 \qquad \det(\mathbf{b}) = -1 \qquad \det(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = 0$$

Latihan 2: subruang dari M^{2x2}

Apakah berikut ini subruang dari M^{2x2}?

- Himpunan semua matriks 2 x 2 yang mempunyai invers
- Himpunan semua matriks 2 x 2 yang berbentuk $\begin{bmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{bmatrix}$
- Himpunan semua matriks 2 x 2 yang berbentuk $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$
- Himpunan semua matriks 2 x 2
- Himpunan $\left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}$

Membuktikan *W* subruang *V*

W subset tidak kosong dari *V*. Pada *W* didefinisikan jumlahan dan perkalian dengan skalar seperti pada *V*. *W* adalah ruang vektor jika dan hanya jika dipenuhi:

1. *W* tertutup terhadap jumlahan

2. $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$

3. $\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}$

4. terdapat objek **0** pada *W*, yang disebut vektor nol, sehingga
   $\mathbf{0} + \mathbf{u} = \mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u}$ untuk semua **u** elemen *W*

5. untuk setiap **u** pada *W*, terdapat negatif –**u** pada *W* sehingga
   $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = (-\mathbf{u}) + \mathbf{u} = \mathbf{0}$

6. *W* tertutup terhadap perkalian dengan skalar

7. $k(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = k\mathbf{u} + k\mathbf{v}$ untuk setiap skalar *k,* dan setiap **u, v** elemen *V*

8. $(k + l)\mathbf{u} = k\mathbf{u} + l\mathbf{u}$ untuk setiap skalar k dan *l,* dan setiap **u** elemen *V*

9. $k(l\mathbf{u}) = (kl)\mathbf{u}$ untuk setiapskalar k dan *l,* dan setiap **u** elemen *V*

10. $1\mathbf{u} = \mathbf{u}$ untuk setiap setiap **u, v** elemen *V*

Membuktikan subruang

- Bagaimana membuktikan bahwa suatu subhimpunan dari ruang vektor adalah subruang? 10 aksioma ruang vektor harus dipenuhi oleh subruang. Namun ada beberapa aksioma yang pasti berlaku, ada yang harus, ada yang bisa diturunkan dari aksioma lain. Sehingga tidak semua aksioma harus dibuktikan keberlakuannya.

Teorema 5.1:

Jika *W* merupakan suatu himpunan dengan satu atau lebih vektor dari ruang vektor *V*, maka *W* merupakan subruang dari *V* jika dan hanya jika kondisi berikut terpenuhi.

a. Jika **u** dan **v** merupakan vektor di *W*, maka **u** + **v** juga di *W*

b. Untuk sembarang skalar *k* dan sembarang vektor di *W*, maka *k***u** berada di *W*.

Subruang *W* dari ruang vektor *V*

Syarat *W* subruang dari *V*:

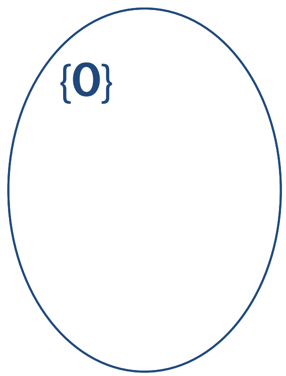
1. *W* subset tidak kosong dari *V*
2. Terhadap jumlahan dan perkalian skalar yang sama dengan di *V*, *W* memenuhi semua aksioma ruang vektor.

Ternyata beberapa aksioma pasti berlaku di subset ruang vektor, dan beberapa aksioma dapat disimpulkan berlaku jika aksioma lain berlaku. Sehingga membuktikan *W* subruang adalah dengan mebuktikan bahwa

1. *W* subset tidak kosong dari *V*,
2. *W* tertutup terhadap jumlahan, dan
3. *W* tertutup terhadap perkalian dengan skalar

Subruang tak sebenarnya

V ruang vektor



{**0**} ruang vektor

- {**0**} dan *V* adalah subruang dari *V*, disebut subruang tak sebenarnya
- Setiap ruang vektor pasti memiliki subruang, setidaknya dirinya sendiri dan {**0**} dan disebut subruang tak-sebenarnya.
- {**0**} adalah ruang vektor dengan satu subruang, yaitu dirinya sendiri.

Refleksi

Pilihan 1: Tuliskan esai pendek yang berjudul:

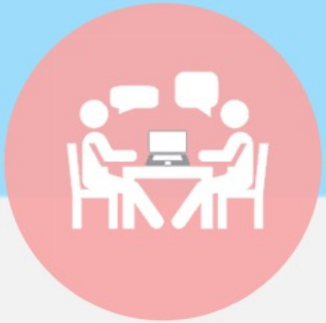
"Setiap ruang vektor adalah subruang dan setiap subruang adalah ruang vektor"

Pilihan 2: Buatlah *mindmap* yang menggambarkan pemahamanmu tentang ruang vektor dan subruang.

Ringkasan: Contoh-contoh ruang vektor atas R

- Himpunan bilangan nyata, jumlahan dan perkalian bilangan nyata
- Himpunan semua vektor pada bidang R^2
- Himpunan semua vektor pada ruang R^3
- Himpunan semua vektor pada ruang R^n
- Himpunan semua suku banyak berderajad paling banyak n.
- Himpunan semua matriks berukuran m x n, jumlahan matriks, perkalian matriks dengan skalar
- Himpunan semua fungsi kontinu di $[a, b]$, jumlahan fungsi dan perkalian fungsi dengan skalar
- Himpunan semua fungsi terdiferensial di $[a, b]$, jumlahan fungsi dan perkalian fungsi dengan skalar
- Himpunan semua barisan tak hingga, jumlahan barisan dan perkalian barisan dengan skalar

Materi berikutnya: dependensi linear, basis dan dimensi ruang vektor



MODUL E-LEARNING ALJABAR LINIER
FAKULTAS ILMU KOMPUTER, UNIVERSITAS INDONESIA