2 2 0 6 0 2 8 9 3 2
ALDEN LUTHFI
LK - 3

(A) minor suatu matriks A disebut M_{ij} adalah determinan dari A setelah baris i dan kolom j dihapuskan.

kofaktor C_{ij} diberi dengan rumus $(-1)^{i+j} M_{ij}$

(B.) (1) aturan Sarrus hanya bisa digunakan untuk matriks persegi $A_{n \times n}$ dengan ordo $n \leq 3$.

$$\det(A) = (-1).(2) - (-2)(3)$$
$$= -2 + 6$$
$$= 4$$

$$\det(B) = (2 . -4 . 3) - (2 . -4)$$
$$= -16$$

↳ C tidak bisa di cari determinanya dengan aturan Sarrus

↳ D bukan matriks persegi

(2) (a) Determinan matriks adalah fungsi yang domainya matriks persegi dan kodomainya bilangan riil dengan aturan pengawanan cara menghitung determinan seperti

- Aturan Sarrus
- Ekspansi baris dan kolom
- Secara kombinatorik
- Metode OBE

(b.) dengan kofaktor

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} C_{ij} \qquad = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} C_{ij}$$

↓ ekspansi ~~baris~~ kolom j ↓ ekspansi baris i

Dengan kombinatorik :

determinan adalah jumlahan dari hasil kali elementer bertanda oleh matriks sehingga

$$\det(A) = \Sigma (-1)^p a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

dengan $j_1 j_2 \cdots j_n$ kombinatorik dari rentang $[1..n]$

p adalah tanda jumlah inversi $j_1 j_2 \cdots j_n$, inversi genap akan bertanda positif dan ganjil akan bertanda negatif

Dengan OBE :

↳ untuk matriks dengan bentuk EBT $\neq I$, determinannya trivial yaitu 0

↳ jika EBT $(A) = I$ maka $\det(A)$ dapat didapat dengan menerapkan OBE sehingga matriks I bisa menjadi A. setiap OBE memengaruhi determinan I yang bernilai 1

① penukaran baris $\rightarrow \det(E) = \det(E')$
② perkalian baris dengan skalar $\neq 0$ $k \rightarrow \det(E') = k \det(E)$
③ jumlahan baris dengan perkalian skalar baris lain $\rightarrow \det(E') = \det(E)$

(c) ya, karena untuk semua $n \in R$, dapat dibuat $A_{n \times n}$

$$I \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & n \end{bmatrix} \right.$$ sehingga $\det(A) = n$

(d) $\det(A) = 0$ jika dan hanya jika A tidak memiliki invers

③ ⓐ ekspansi baris 1

$C_{11} = -4$, $C_{12} = +3$, $C_{13} = -5$

$\det(B) = 1.-4 + 3.3 + 1.-5$

$= -4 + 9 + -5 = 0$

ⓑ Secara kombinatorik

$\det(B) = (a_{11}+a_{22}+a_{33}) + (a_{13}a_{21}a_{32}) + (a_{12}a_{23}a_{31})$
$- (a_{11}+a_{23}a_{32}) - (a_{12}a_{21}a_{33}) + (a_{13}a_{22}a_{31})$
$= (-6+18+1) - (6-2+4)$
$= 0$

ⓒ dengan OBE

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftarrow R_2 + R_1} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 3 \\ 3 & -1 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 \leftarrow R_3 - 3R_1} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 3 \\ 0 & -10 & -6 \end{bmatrix} R_3 \leftarrow R_3 + 2R_2$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

karena ada baris 0 , B ekivalen dengan matriks dengan baris 0 tersebut, karena matriks yang ekivalen baris memiliki determinan sama dan matriks berbaris 0 memiliki determinan = 0 , det (B) = 0

④ ① pertukaran baris → $\det(E') = -\det(E)$

② perkalian skalar baris → $\det(E') = k\det(E)$
$k \neq 0$

③ penjumlahan baris dengan perkalian skalar baris lain tidak berpengaruh pada determinan

(5.) (a.) $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$

(b.) tidak selalu

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$\det = 2 \quad = \quad \det = 0 \quad \det = 0$

$2 \neq 0$

(c) $\det(kA^{-1}) = k^p \det(A^{-1}) = \frac{k^p}{\det(A)}$

(d) $\det(A^T) = \det(A)$

(e) karena nilai determinanya sama

~~dett~~ $(A^T)^{-1} = A^{-1}$

⑥ Tidak semua matriks dengan determinan yang sama adalah matriks yang sama

contoh :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

dimana $\det(A) = \det(B)$ namun $A \neq B$

⑦ $$A = \begin{bmatrix} 9 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 6 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

ⓘ ekspansi baris 1 : $a_{11} . C_{11} + a_{12} C_{12} + a_{13} C_{13}$

$$= 9 . \det\left(\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}\right) - 3 . \det\left(\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}\right) + 2 . \det\left(\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}\right)$$

$$= 9 . 4 - 3 . 4 + 2 . -4$$

$$= 36 - 12 - 8 = 16$$

ⓘⓘ OBE

$$A = \begin{bmatrix} 9 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 6 & 4 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 \leftarrow R_3 - 3R_2} \begin{bmatrix} 9 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftarrow R_1 - R_3} \begin{bmatrix} 9 & 5 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftarrow R_1 - \frac{5}{2} R_2} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_1 \leftarrow \frac{1}{4} R_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftarrow R_2 - 2R_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 \leftarrow R_3 + R_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftarrow \frac{1}{2} R_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3 \leftarrow \frac{1}{2} R_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

$I \rightarrow (R_3 \leftarrow 2R_3) \rightarrow (R_2 \leftarrow 2R) \rightarrow (R_3 \leftarrow R_3 - R_2) \rightarrow (R_2 \leftarrow R_2 + 2R_1) \rightarrow (R_1 \leftarrow 4R_1) \rightarrow (R_1 \leftarrow R_1 + \frac{5}{2} R_2) \rightarrow (R_1 \leftarrow R_1 + R_3) \rightarrow (R_3 \leftarrow R_3 + 3R_2) \rightarrow A$

$\det(I) \rightarrow \times 2 \rightarrow \times 2 \rightarrow +0 \rightarrow +0 \rightarrow \times 4 \rightarrow +0 \rightarrow +0 \rightarrow +0$

$\det(A) = 1 \times 2 \times 2 \times 4 = \boxed{16}$

8.) a) i) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ii) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

det (i) = 0
det (ii) = 0
det (iii) = 0
det (iv) = 0

iii) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ iv) $\begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

b.) dari Pengertian determinan adalah jumlahan dari hasil kali elementer sebuah matriks persegi. sebuah matriks persegi dengan baris dan kolom 0 akan memiliki semua hasil kali elementernya bertemu dengan angka 0 sehingga semua hasil kali elementernya semua berjumlah 0 sehingga determinannya 0.

matriks yang memiliki baris duplikat dan baris yang merupakan kelipatan baris lain akan ekivalen baris dengan EBT yang memiliki baris 0. karena determinan 2 matriks yang ekivalen baris sama, maka determinan matriksnya juga 0.

9.) solusi $Ax = b$ dengan A memiliki invers adalah $x = A^{-1}b$

bukti $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \operatorname{adj}(A)$:

$$A^{-1}A = \frac{1}{\det A} \operatorname{adj}(A) \cdot A \rightarrow I = \frac{1}{\det(A)} [C_A]^T A$$

$$= \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & \cdots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & & C_{n2} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ C_{1n} & C_{2n} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} \det(A) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \det(A) & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \det(A) \end{bmatrix}$$

$$= I \ \#$$

(1.) (a.) $\begin{bmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 1 & 6 & -3 \\ 6 & 6 & 3 \end{bmatrix} \bar{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{bmatrix}$

aturan Cramer : $x_j = \dfrac{\det(A_j)}{\det(A)}$

$\det(A) : 0.\det\left(\begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}\right) + 2\det\left(\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}\right) + 3\det\left(\begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 6 & 6 \end{bmatrix}\right)$

$: 2.21 + 3.-30 = -48$

$C_{11} = 36 \qquad C_{21} = 24 \qquad C_{31} = -12$

$C_{12} = -21 \qquad C_{22} = -18 \qquad C_{32} = 3$

$C_{13} = -30 \qquad C_{23} = -12 \qquad C_{33} : 2$

$\det(A_1) = 1.36 + (-2)\,24 + 5(-12) = -72$

$\det(A_2) = 1.-21 + (-2)(-18) + 5.3 = 30$

$\det(A_3) : 1.-30 + (-2).(-12) + 5.2 : 4$

$x_1 = \dfrac{-72}{-48} = \dfrac{3}{2}$

$x_2 = \dfrac{30}{48} = -\dfrac{5}{8}$

$x_3 = \dfrac{4}{-48} = -\dfrac{1}{12}$

(b.) tidak karena syarat aturan cramer adalah $\det(A) \neq 0$ sehingga matriks yang memiliki baris 0 (contoh $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$) tidak bisa ditemukan penyelesaiannya

(c) (1) Benar, asumsi A berisi bilangan riil maka A akan selalu memiliki nilai determinan karena determinan adalah jumlahan dari hasil kali bertanda permutasi elementer dan karena penjumlahan dan perkalian adalah operasi tertutup pada $\mathbb{R}$ maka A dengan $a_{ij} \in \mathbb{R}$ akan selalu memiliki nilai determinan

(2) Salah, berdasarkan sifat $\det(AB) = \det(A).\det(B)$ maka $\det(A)$ ATAU $\det(B)$ yang memiliki nilai 0 jika $\det(AB) = 0$, dan matriks dengan nilai determinan 0 tidak memiliki invers sehingga A ATAU B tidak memiliki invers, tidak harus keduanya.

(3) Salah, Counterexample : $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = A$

$\det(A) = 3$ namun A bukan matriks diagonal dan segitiga

(4) $A.\,\mathrm{adj}(A) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & \cdots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & & \vdots \\ & & \ddots & \vdots \\ C_{1n} & \cdots & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} \det(A) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \det(A) & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & \det(A) & & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \det(A) \end{bmatrix}$$

$\det(A.\mathrm{adj}(A)) = \det(A).\det(\mathrm{adj}(A)) = (\det(A))^n$

$\det(\mathrm{adj}(A)) = (\det(A))^{n-1}$. Benar

(5.) Benar, Syarat dari aturan cramer sebuah Matriks A adalah $\det(A) \neq 0$ atau A memiliki invers. karena jika EBT(A) = I maka A memiliki invers, maka aturan cramer bisa digunakan

(6.) Salah, counterexample $= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = E$

E diperoleh dari menerapkan $R_2 \leftarrow -R_2$ ke I sehingga $\det(E) = -1$ namun E tidak diperoleh dari penukaran baris

(7.) Salah misal $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ $A - 1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

$$\det(A-1) = 0 \cdot \det\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right) - 1 \cdot \det\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right) + 1 \cdot \det\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right)$$

$$= -1 \cdot -1 + 1 \cdot 1 = 2, \quad \det(A-1) \neq 0$$

(8.) Saya belajar bahwa ada banyak cara untuk menemukan determinan dan saya belajar bahwa determinan sangat berguna untuk menentukan invers dan sangat berhubungan dengan konsep lain seperti adjoin dan pencarian solusi SPL.

$$\begin{vmatrix} 9 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 6 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 16$$

▼ Details (Triangle's rule)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = +a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33}$$

$$+a_{12}\cdot a_{23}\cdot a_{31}$$

no 7

$$+a_{13}\cdot a_{21}\cdot a_{32}$$

$$-a_{13}\cdot a_{22}\cdot a_{31}$$

$$-a_{11}\cdot a_{23}\cdot a_{32}$$

$$-a_{12}\cdot a_{21}\cdot a_{33}$$ (?)

$$\begin{vmatrix} 9 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 6 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 9\cdot 2\cdot 2+3\cdot 0\cdot 6+2\cdot 2\cdot 4-6\cdot 2\cdot 2-4\cdot 0\cdot 9-2\cdot 2\cdot 3=16$$

▼ Details (Rule of Sarrus)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = +a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33}+a_{12}\cdot a_{23}\cdot a_{31}+a_{13}\cdot a_{21}\cdot a_{32}$$

$$-a_{13}\cdot a_{22}\cdot a_{31}-a_{11}\cdot a_{23}\cdot a_{32}-a_{12}\cdot a_{21}\cdot a_{33}$$ (?)

$$\begin{vmatrix} 9 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 6 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 9\cdot 2\cdot 2+3\cdot 0\cdot 6+2\cdot 2\cdot 4-6\cdot 2\cdot 2-4\cdot 0\cdot 9-2\cdot 2\cdot 3=16$$

8. a. i.

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

8. a. ii.

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

8. a. iii.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

8. a. iv.

$$\begin{vmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$$