Fungsi Pembangkit

Fungsi Pembangkit

- Mengapa perlu dipelajari?
  - Fungsi pembangkit membantu merepresentasikan barisan dengan mengkodekan unsur barisan sebagai koefisien dalam deret pangkat suatu variabel
- Fungsi pembangkit dapat digunakan untuk
  - Menyelesaikan berbagai masalah *counting*
  - Menyelesaikan relasi rekurensi
  - Membuktikan identitas kombinatorik

Fungsi Pembangkit untuk Barisan Berhingga

- Definisi

Fungsi Pembangkit (*Generating Function*) untuk suatu barisan berhingga $a = \langle a_0, a_1, \ldots, a_n \rangle$ adalah polinomial dalam z sebagai berikut:

$$G(z) = \sum_{i=0}^{n} a_i z^i = a_0 z^0 + a_1 z^1 + \cdots + a_n z^n$$

Fungsi Pembangkit untuk Barisan Berhingga

- Beberapa contoh fungsi pembangkit untuk beberapa barisan:
  - Barisan $\langle 1, 1, 1, 1 \rangle$, fungsi pembangkitnya:
    $G(z) = 1 + 1z + 1z^2 + 1z^3$
  - Barisan $\langle 1, -2, 3, -4 \rangle$, fungsi pembangkitnya:
    $G(z) = 1 - 2z + 3z^2 - 4z^3$
  - Barisan $\langle 7, 0, -1, 0, 3 \rangle$, fungsi pembangkitnya:
    $G(z) = 7 - 1z^2 + 3z^4$

Fungsi Pembangkit untuk Barisan Berhingga

- Untuk barisan $\langle 1, 1, 1, 1, 1, 1 \rangle$, telah diketahui bahwa:

$$1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 = \frac{1-z^6}{1-z}$$

  - Bentuk di sebelah kiri pada persamaan di atas dinamakan bentuk deret pangkat dari fungsi pembangkit
  - Bentuk di sebelah kanan pada persamaan di atas dinamakan bentuk tertutup (*closed form*) dari fungsi pembangkit

Fungsi Pembangkit untuk Barisan Koefisien Binomial

- Teorema binomial:

$$(x+y)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^{n-i} y^i$$

- Teorema

Untuk $n \geq 0$, bentuk tertutup dari fungsi pembangkit untuk barisan $(n + 1)$ buah koefisien binomial $\langle \binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \cdots, \binom{n}{n} \rangle$ adalah $G(z) = (1 + z)^n$

Fungsi Pembangkit untuk Barisan Koefisien Binomial

- Contoh
  - $n = 2$, barisan $\langle \binom{2}{0}, \binom{2}{1}, \binom{2}{2} \rangle = \langle 1, 2, 1 \rangle$
  - Maka, $G(z) = (1 + z)^2 = 1 + 2z + 1z^2$

- Contoh
  - $n = 3$, barisan $\langle \binom{3}{0}, \binom{3}{1}, \binom{3}{2}, \binom{3}{3} \rangle = \langle 1, 3, 3, 1 \rangle$
  - Maka $G(z) = (1 + z)^3 = 1 + 3z + 3z^2 + 1z^3$

Fungsi Pembangkit untuk Barisan Berhingga

G(z) closed form	G(z) power series form	X_n
$(1+z)^r$	$\sum_{n=0}^{r} C(r,n)z^n = 1 + C(r,1)z + C(r,2)z^2 + \ldots + z^r$	$C(r,n)$
$(1+az)^r$	$\sum_{n=0}^{r} C(r,n)a^n z^n = 1 + C(r,1)az + C(r,2)a^2 z^2 + \ldots + a^r z^r$	$C(r,n)a^n$
$(1+z^m)^r$	$\sum_{n=0}^{r} C(r,n)z^{mn} = 1 + C(r,1)z^m + C(r,2)z^{2m} + \ldots + z^{mr}$	$\begin{cases} C(r,n/m), \text{if } m \mid n \\ 0, \text{otherwise} \end{cases}$
$\dfrac{1-z^{r+1}}{1-z}$	$\sum_{n=0}^{r} z^n = 1 + z + z^2 + z^3 + \ldots + z^r$	$\begin{cases} 1 & \text{if } n \le r \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$

Fungsi Pembangkit untuk Barisan Tak Berhingga

- Definisi

Fungsi Pembangkit (*Generating Function*) untuk suatu barisan tidak berhingga $a = \langle a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots \rangle$ adalah polinomial dalam z sebagai berikut:

$$G(z) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i z^i = a_0 z^0 + a_1 z^1 + \cdots + a_n z^n + \cdots$$

Fungsi Pembangkit untuk Barisan Tak Berhingga

- Catatan
  - Fungsi pembangkit tidak untuk menghitung jumlah deret pada suatu titik z yang diketahui
  - Fungsi pembangkit hanya dipakai untuk menyatakan barisan berhingga $a = \langle a_0, a_1, \ldots, a_n \rangle$ atau barisan tak berhingga $a = \langle a_0, a_1 \ldots, a_n, \ldots \rangle$ ke dalam bentuk yang baru

Fungsi Pembangkit untuk Barisan Tak Berhingga

- Contoh
  - Barisan $\langle 2, 4, 6, 8, 10, 12, \ldots \rangle$ mempunyai fungsi pembangkit barisan yaitu:

$$G(z) = 2 + 4z + 6z^2 + 8z^3 + 10z^4 + 12z^5 + \ldots$$

$$G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} 2(n+1)z^n$$

Fungsi Pembangkit untuk Barisan Tak Berhingga

- Beberapa contoh fungsi pembangkit untuk beberapa barisan:
  - Barisan $\{ a_n \}$ dengan $a_n = 5$, fungsi pembangkitnya:

    $G(z) = 5 + 5z + 5z^2 + 5z^3 + \ldots$

$$G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} 5z^n$$

  - Barisan $\{ a_n \}$ dengan $a_n = n + 3$, fungsi pembangkitnya:

    $G(z) = 3 + 4z + 5z^2 + 6z^3 + \ldots$

$$G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+3)z^n$$

Fungsi Pembangkit untuk Barisan Geometrik

- Definisi

Untuk suatu konstanta $c \neq 0$, bentuk tertutup dari fungsi pembangkit barisan $\langle c^0, c^1, c^2, c^3, \ldots \rangle$ adalah:

$$G(z) = \frac{1}{1 - cz}$$

Fungsi Pembangkit untuk Barisan Geometrik

Bagaimana rumus G(z) tersebut diperoleh?

$$G(z) = c^0z^0 + c^1z^1 + c^2z^2 + \ldots$$

$$cz \,.\, G(z) = c^1z^1 + c^2z^2 + \ldots$$

\-

$$G(z)\,(1 - cz) = c^0z^0$$

$$G(z)\,(1 - cz) = 1$$

$$G(z) = \frac{1}{(1-cz)}$$

Fungsi Pembangkit untuk Barisan Geometrik

Atau dengan cara ini:

$$
\begin{aligned}
G(z) &= c^0z^0 + c^1z^1 + c^2z^2 + \ldots \\
G(z) - c^0z^0 &= c^1z^1 + c^2z^2 + \ldots \\
G(z) - 1 &= cz + c^2z^2 + \ldots \\
G(z) - 1 &= cz\,(1 + c^1z^1 + c^2z^2 + \ldots) \\
G(z) - 1 &= cz\,(c^0z^0 + c^1z^1 + c^2z^2 + \ldots) \\
G(z) - 1 &= cz\,G(z) \\
G(z) - cz\,G(z) &= 1 \\
(1 - cz)\,G(z) &= 1 \\
\boldsymbol{G(z)} &= \boldsymbol{\frac{1}{(1-cz)}}
\end{aligned}
$$

Fungsi Pembangkit Untuk Beberapa Barisan Lain

- Contoh 1
  - Barisan $\langle 1, 0, 0, 0, 0, \ldots \rangle$
  - Fungsi pembangkit barisannya dalam bentuk tertutup maupun dalam bentuk deretnya adalah $G(z) = 1$
- Contoh 2
  - Barisan $\langle 0, 0, 1, 0, 0, \ldots \rangle$
  - Fungsi pembangkit barisannya dalam bentuk tertutup maupun dalam bentuk deretnya adalah $G(z) = z^2$

Fungsi Pembangkit Untuk Beberapa Barisan Lain

- Contoh 3
  - Barisan $\langle 1, 1, 1, 1, 1, \ldots \rangle$
  - Fungsi pembangkit barisannya dalam bentuk deret adalah $G(z) = 1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + \ldots$ atau $G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$
  - Fungsi pembangkit barisannya dalam bentuk tertutup adalah $G(z) = \frac{1}{1-z}$
- Contoh 4
  - Barisan $\langle 1, -1, 1, -1, 1, -1, \ldots \rangle$
  - Fungsi pembangkit barisannya dalam bentuk deret adalah $G(z) = 1 - z + z^2 - z^3 + z^4 - \ldots$
  - Fungsi pembangkit barisannya dalam bentuk tertutup adalah $G(z) = \frac{1}{1+z}$

Fungsi Pembangkit Untuk Beberapa Barisan Lain

- Contoh 5
  - Barisan $\langle 1, 0, 1, 0, 1, \ldots \rangle$
  - Fungsi pembangkit barisannya dalam bentuk deret adalah $G(z) = 1 + z^2 + z^4 + z^6 + \ldots$
  - Fungsi pembangkit $G(z)$ di atas merupakan deret geometri dengan suku pertama 1 dan pembanding z^2
  - Dengan demikian, bentuk tertutup $G(z)$ adalah

$$G(z) = \frac{1}{1 - z^2}$$

Fungsi Pembangkit
Untuk Beberapa Barisan Lain

- Contoh 6
  - Barisan $\langle 1, 2, 3, 4, \ldots \rangle$
  - Fungsi pembangkit barisannya dalam bentuk deret adalah $G(z) = 1 + 2z + 3z^2 + 4z^3 + \ldots$ atau

$$G(z) = \sum_{i=0}^{\infty} (i+1) z^i$$

  - Bentuk tertutup dari $G(z)$ di atas adalah

$$G(z) = \frac{1}{(1-z)^2}$$

Fungsi Pembangkit untuk Barisan Tak Berhingga

G(z) **closed form**	**G(z)** **power series form**	**X_n**
$\frac{1}{1-z}$	$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + z^3 + \dots$	*1*
$\frac{1}{1-az}$	$\sum_{n=0}^{\infty} a^n z^n = 1 + az + a^2 z^2 + a^3 z^3 + \dots$	a^n
$\frac{1}{1-z^r}$	$\sum_{n=0}^{\infty} z^{rn} = 1 + z^r + z^{2r} + z^{3r} + \dots$	$\begin{cases} 1 & \text{if } r \mid n \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$
$\frac{1}{(1-z)^2}$	$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) z^n = 1 + 2z + 3z^2 + 4z^3 + \dots$	*n+1*
$\frac{1}{(1-z)^r}$	$\sum_{n=0}^{\infty} C(n+r-1, n) z^n = 1 + C(r,1)z + C(r+1,2)z^2 + \dots$	*C(n+r-1,n)*

Fungsi Pembangkit untuk Barisan Tak Berhingga

G(z) closed form	G(z) power series form	X_n
$\frac{1}{(1-az)^r}$	$\sum_{n=0}^{\infty} C(n+r-1,n)a^n z^n = 1 + C(r,1)az + C(r+1,2)a^2 z^2 + \ldots$	$C(n+r-1,n)a^n$
$\frac{1}{(1+z)^r}$	$\sum_{n=0}^{\infty} C(n+r-1,n)(-1)^n z^n = 1 - C(r,1)z + C(r+1,2)z^2 - \ldots$	$(-1)^n C(n+r-1,n)$
$\frac{1}{(1+az)^r}$	$\sum_{n=0}^{\infty} C(n+r-1,n)(-1)^n a^n z^n = 1 - C(r,1)az + C(r+1,2)a^2 z^2 - \ldots$	$(-1)^n C(n+r-1,n)a^n$
e^z	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots$	$\frac{1}{n!}$
$Ln(1+z)$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} z^n}{n} = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \ldots$	$\frac{(-1)^{n+1}}{n}$

Sifat-Sifat Fungsi Pembangkit

Perkalian Skalar terhadap Suatu FP

- Teorema

Jika

$$G(z) = g_0 + g_1 z + g_2 z^2 + g_3 z^3 + \ldots$$

adalah fungsi pembangkit untuk barisan

$$g = \langle g_0, g_1, g_2, \ldots \rangle$$

maka $\alpha G(z)$ adalah fungsi pembangkit untuk barisan

$$\alpha \boldsymbol{g} = \langle \alpha \boldsymbol{g_0}, \alpha \boldsymbol{g_1}, \alpha \boldsymbol{g_2}, \ldots \rangle$$

Perkalian Skalar terhadap Suatu FP

- Fungsi pembangkit barisan $H_n = \langle 5, 10, 15, 20, \ldots \rangle$
  - Barisan H_n dapat dibuat dengan mengalikan 5 ke setiap elemen dari barisan
    $F_n = \langle 1, 2, 3, 4, \ldots \rangle$
  - Kemudian barisan H_n dapat diperoleh dari barisan F_n :
    $H_n = 5F_n$
  - Telah diketahui bahwa fungsi pembangkit untuk barisan F_n adalah $F\,(z) = \frac{1}{(1-z)^2}$
  - Maka berdasarkan teorema sebelumnya:
    $H_n = 5F_n$
    $H(z) = 5F(z) = \frac{5}{(1-z)^2}$

Penjumlahan dari Dua FP

- Teorema

Jika

$$F(z) = f_0 + f_1 z + f_2 z^2 + f_3 z^3 + \ldots \text{ dan}$$

$$G(z) = g_0 + g_1 z + g_2 z^2 + g_3 z^3 + \ldots$$

masing-masing adalah fungsi pembangkit untuk barisan

$f = \langle f_0,\ f_1,\ f_2, \ldots\rangle$ dan $g = \langle g_0, g_1, g_2, \ldots\rangle$

maka $\alpha F(z) + \beta G(z)$ adalah fungsi pembangkit untuk barisan

$$\alpha \boldsymbol{f} + \beta \boldsymbol{g} = \langle \alpha f_0 + \beta g_0, \alpha f_1 + \beta g_1, \alpha f_2 + \beta g_2, \ldots \rangle$$

Penjumlahan dari Dua FP

- Fungsi pembangkit barisan $H_n = \langle 6, 11, 16, 21, \ldots \rangle$
  - Barisan H_n dapat dibuat dengan menjumlahkan tiap elemen yang bersesuaian dari dua barisan

    $F_n = \langle 5, 10, 15, 20, \ldots \rangle$ dan $G_n = \langle 1, 1, 1, 1, \ldots \rangle$
  - Telah diketahui bahwa fungsi pembangkit untuk barisan:
    - F_n adalah $F(z) = \frac{5}{(1-z)^2}$
    - G_n adalah $G(z) = \frac{1}{1-z}$
  - Maka berdasarkan teorema sebelumnya:

    $H_n = F_n + G_n$

    $H(z) = F(z) + G(z) = \frac{5}{(1-z)^2} + \frac{1}{1-z} = \frac{5+1-z}{(1-z)^2} = \frac{6-z}{(1-z)^2}$

Penambahan *m* buah suku 0 di awal barisan (Menggeser barisan sejauh *m* elemen ke kanan)

- Teorema

Jika $G(z) = g_0 + g_1 z + g_2 z^2 + g_3 z^3 + \ldots$ adalah fungsi pembangkit dari barisan $g = \langle g_0, g_1, g_2, \ldots \rangle$,
maka fungsi pembangkit untuk barisan yang diperoleh dengan menambahkan m buah suku 0 di depannya, $g^* = \langle 0, 0, \ldots, g_0, g_1, g_2, \ldots \rangle$, adalah

$$G^*(z) = z^m \, G(z) \qquad \text{untuk } m \geq 0$$

Penambahan m buah suku 0 di awal barisan (Menggeser barisan sejauh m elemen ke kanan)

- Fungsi pembangkit dari barisan

  $X_n = \langle 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 4, 16, 64, 256, \ldots \rangle$

  - Perhatikan bahwa barisan X_n di atas dapat dibentuk dari barisan $A_n = \langle 1, 4, 16, 64, 256, \ldots \rangle$ dengan menambahkan sebanyak tujuh buah suku 0 di depannya, $m = 7$
  - Perhatikan juga bahwa barisan A_n merupakan barisan geometri dengan $c = 4$, $A_n = \langle 4^0, 4^1, 4^2, 4^3, 4^4, \ldots \rangle$, dimana fungsi pembangkit dari barisan A_n adalah $A(z) = \frac{1}{1-4z}$
  - Maka berdasarkan teorema sebelumnya, fungsi pembangkit barisan X_n adalah $X(z) = z^7 \frac{1}{1-4z}$

Penghapusan m buah suku di awal barisan (Menggeser barisan sejauh m elemen ke kiri)

- Teorema

Jika $G(z) = g_0 + g_1 z + g_2 z^2 + g_3 z^3 + \ldots$ adalah fungsi pembangkit dari barisan $g = \langle g_0, g_1, g_2, \ldots \rangle$,
maka fungsi pembangkit untuk barisan yang diperoleh dengan menghapus m buah suku pertamanya, $g^* = \langle g_m, g_{m+1}, g_{m+2}, \ldots \rangle$, adalah

$$\mathbf{G^*(z) = z^{-m}\,[G(z) - (g_0 + g_1 z + \ldots + g_{m-1} z^{m-1})]} \qquad \text{untuk } m \geq 1$$

Penghapusan *m* buah suku

- Penjabaran:
  - Misalkan barisan $g_n^* = \langle g_m, g_{m+1}, g_{m+2} \ldots . \rangle$, kita dapat representasikan barisan tersebut ke dalam fungsi pembangkit berikut.
$$G^*(z) = g_m + g_{m+1}z + g_{m+2}z^2 + \cdots$$
  - Misalkan ada barisan lain yang direpresentasikan oleh fungsi pembangkit berikut
$$G(z) = g_0 + g_1 z + \cdots + g_{m-1}z^{m-1} + g_m z^m + g_{m+1}z^{m+1} + g_{m+2}z^{m+2} + \cdots$$
  - Maka berlaku:

$$G(z) - (g_0 + g_1 z + \cdots + g_{m-1}z^{m-1}) = g_m z^m + g_{m+1}z^{m+1} + g_{m+2}z^{m+2} + \cdots$$

$$G(z) - (g_0 + g_1 z + \cdots + g_{m-1}z^{m-1}) = z^m (g_m + g_{m+1}z + g_{m+2}z^2 + \cdots)$$

$$G(z) - (g_0 + g_1 z + \cdots + g_{m-1}z^{m-1}) = z^m G^*(z)$$

$$\frac{G(z) - (g_0 + g_1 z + \cdots + g_{m-1}z^{m-1})}{z^m} = G^*(Z)$$

Penghapusan *m* buah suku

- Tentukan fungsi pembangkit $G(z)$ dari barisan $\mathrm{x}_n = \langle 8,16,32,64,\ldots \rangle$
  - Barisan tersebut berasal dari barisan $\mathrm{y}_n = \langle 1,2,4,8,16,32,64,\ldots \rangle$ dengan menghilangkan suku-suku 1, 2, dan 4.

  - Fungsi pembangkit dari y_n adalah $H(z) = \frac{1}{1-2z}$, sehingga

$$G(z) = \frac{1}{z^3}\left(\frac{1}{1-2z} - (1 + 2z + 4z^2)\right)$$

Turunan Pertama dari $G(z)$

- Teorema

Jika $G(z) = g_0 + g_1z + g_2z^2 + g_3z^3 + \ldots$ adalah fungsi pembangkit dari barisan $g = \langle g_0, g_1, g_2, \ldots\rangle$,
maka turunan dari $G(z)$ terhadap z, $G'(z)$, merupakan fungsi pembangkit untuk barisan

$$g^* = \langle g_1, 2g_2, 3g_3, 4g_4, \ldots\rangle$$

Turunan Pertama dari $G(z)$

- Misalkan $G(z) = 1 + z + z^2 + z^3 + \cdots$ adalah fungsi pembangkit untuk barisan $x_n = \langle 1,1,1,1,1,1, \ldots\ldots \rangle$.

- Maka $G'(z) = 0 + 1 + 2z + 3z^2 + 4z^3 + \cdots$ adalah fungsi pembangkit dari barisan $y_n = \langle 1,2,3,4,5, \ldots. \rangle$.

- Bentuk tertutup barisan x_n adalah $G(z) = \frac{1}{(1-z)}$, sehingga bentuk tertutup barisan y_n adalah $G'(z) = (-1)(1-z)^{-2}(-1) = \frac{1}{(1-z)^2}$

$G(z)$ untuk barisan yang suku-sukunya adalah deret barisan lain

- Teorema

Jika $G(z)$ adalah fungsi pembangkit barisan

$x = \langle x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots \rangle$,

maka fungsi pembangkit untuk barisan

$y = \langle y_0, y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots \rangle$, dengan suku umum $y_n = x_0 + x_1 + \ldots + x_n$

adalah

$$Y(z) = \frac{G(z)}{(1-z)}$$

$G(z)$ untuk barisan yang suku-sukunya adalah deret barisan lain

- Misalkan $G(z) = 1 + 2z + 4z^2 + 8z^3 + \cdots$adalah fungsi pembangkit untuk barisan $x_n = \langle 1,2,4,8, \ldots . . \rangle$.

- Jika setiap suku barisan y_n diperoleh dari x_n sehingga $y_n = \langle 1, (1+2), (1+2+4),(1+2+4+8), \ldots \rangle$ maka fungsi pembangkit yang merepresentasikan barisan y_n, misalnya $F(z)$ adalah $\frac{G(z)}{1-z}$
  - Karena bentuk tertutup $G(z) = \frac{1}{(1-2z)}$, maka $F(z) = \frac{1}{(1-2z)(1-z)}$

$G(z)$ untuk barisan yang suku-sukunya adalah $1/n$ suku barisan lain

- Teorema

Jika $G(z)$ adalah fungsi pembangkit barisan

$x = \langle x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots \rangle$,

maka fungsi pembangkit untuk barisan

$y = \langle y_0, y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots \rangle$, dengan suku umum

$$y_n = \begin{cases} \frac{1}{n} x_{n-1}, & untuk\ n \geq 1 \\ 0, & untuk\ n = 0 \end{cases}$$

$$Y(z) = \int_0^z G(t)dt$$

$G(z)$ untuk barisan yang suku-sukunya adalah $1/n$ suku barisan lain

- Misalkan $G(z) = 2 + 4z + 6z^2 + 8z^3 + \cdots$ adalah fungsi pembangkit untuk barisan $x_n = \langle 2,4,6,8,\ldots\ldots \rangle$.

- Kita dapat memperoleh FP barisan y_n, misalnya $F\,(z)$ dari FP barisan x_n.

$$F(z) = \int_0^z G(t)dt = \int_0^z (2 + 4t + 6t^2 + 8t^3 + \cdots)dt$$
$$= 2z + 2z^2 + 2z^3 + 2z^4 + \cdots$$
$$= 2z(1 + z + z^2 + z^3 + \cdots)$$
$$= 2z\,\frac{1}{(1-z)}$$

FP ini membentuk barisan $y_n = \langle 0,2,2,2,\ldots\ldots \rangle$

Perkalian *(Product)* dari dua buah barisan

Hati-Hati!

- Tentukan closed form dari fungsi pembangkit untuk barisan: $\mathrm{H_n} = \langle 1, -2, 4, -8, 16, \dots \rangle$

Jawab:

- Barisan tersebut adalah barisan geometri dengan rationya adalah $c = -2$, sehingga fungsi pembangkitnya dalam bentuk closed form:
  - $H(z) = \frac{1}{1+2z}$
- **Jawaban ini benar.**

Perkalian *(Product)* dari dua buah barisan

Hati-Hati!

- Tentukan closed form dari fungsi pembangkit untuk barisan: $\mathrm{H_n} = \langle 1, -2, 4, -8, 16, \dots \rangle$

Jawab:

- Barisan tersebut diperoleh dengan mengalikan setiap elemen dari dua barisan berikut:
  - $\mathrm{F_n} = \langle 1, 2, 4, 8, 16, \dots \rangle,\ F(z) = \frac{1}{1-2z}$
  - $\mathrm{G_n} = \langle 1, -1, 1, -1, 1, \dots \rangle, G(z) = \frac{1}{1+z}$
- Sehingga $H(z) = \frac{1}{1-2z} \cdot \frac{1}{1+z} = \frac{1}{(1-2z)(1+z)}$
- **Jawaban ini salah** karena perkalian dari dua buah fungsi pembangkit tidak dijalankan seperti ini, namun berjalan sesuai formula **konvolusi** di slide selanjutnya.

Konvolusi (*Convolution*) Barisan

- Misalkan kita mempunyai barisan

  $f = \langle f_0, f_1, f_2, \ldots \rangle$ dan

  $g = \langle g_0, g_1, g_2, \ldots \rangle$

- Konvolusi dari barisan barisan f dan g di atas adalah barisan $h_n = \langle h_0, h_1, h_2, \ldots \rangle$ dengan

$$h_n = \sum_{k=0}^{n} f_k g_{n-k}$$

- Konvolusi dari barisan f dan g di atas diberi notasi $\boldsymbol{h = f * g}$

Konvolusi (*Convolution*) Barisan

- Teorema

Jika

$F(z) = f_0 + f_1z + f_2z^2 + f_3z^3 + \ldots$ dan

$G(z) = g_0 + g_1z + g_2z^2 + g_3z^3 + \ldots$

masing-masing adalah fungsi pembangkit untuk barisan

$f = \langle f_0, f_1, f_2, \ldots\rangle$ dan $g = \langle g_0, g_1, g_2, \ldots\rangle$

maka fungsi pembangkit untuk konvolusi barisan f dan g, $\boldsymbol{h = f * g}$, adalah

$$H(z) = F(z) \times G(z)$$

Konvolusi (*Convolution*) Barisan

Contoh 1

- Fungsi pembangkit barisan $h_n = \langle 2,10,28,60,\ldots \rangle$
  - Barisan h_n dapat dibuat dengan melakukan kovolusi dua barisan $f_n = \langle 1, 3, 5, 7, \ldots \rangle$ dan $g_n = \langle 2, 4, 6, 8, \ldots \rangle$ menjadi:

$$H_0 = \sum_{i=0}^{0} f_0 g_0 = 1.2 = 2$$

$$H_1 = \sum_{i=0}^{1} f_0 g_1 + f_1 g_0 = 1.4 + 3.2 = 10$$

$$H_2 = \sum_{i=0}^{2} f_0 g_2 + f_1 g_1 + f_2 g_0 = 1.6 + 3.4 + 5.2 = 28$$

$$H_3 = \sum_{i=0}^{3} f_0 g_3 + f_1 g_2 + f_2 g_1 + f_3 g_0 = 1.8 + 3.6 + 5.4 + 7.2 = 60$$

Konvolusi (*Convolution*) Barisan

- Barisan $f_n = \langle 1, 3, 5, 7, \ldots \rangle$ dapat dibentuk dari barisan $\langle 1, 2, 3, 4, \ldots \rangle$ dijumlahkan tiap elemennya dengan barisan $\langle 0, 1, 2, 3, 4, \ldots \rangle$. Maka fungsi pembangkitnya: $F(z) = \frac{1}{(1-z)^2} + \frac{z}{(1-z)^2} = \frac{1+z}{(1-z)^2}$
- Barisan $g_n = \langle 2, 4, 6, 8, \ldots \rangle$ dapat dibentuk dari barisan $\langle 1, 2, 3, 4, \ldots \rangle$ dengan mengalikan 2 untuk setiap elemennya. Maka fungsi pembangkitnya: $G(z) = \frac{2}{(1-z)^2}$
- Maka berdasarkan teorema sebelumnya, fungsi pembangkit untuk barisan h_n adalah:

$$H(z) = F(z) \times G(z) = \frac{1+z}{(1-z)^2} \times \frac{2}{(1-z)^2} = \frac{2+2z}{(1-z)^4}$$