RELASI

(*Slide Acknowledgment*: Gatot Wahyudi, Adila A. Krisnadhi)

Matematika Diskret 2

Fakultas Ilmu Komputer Universitas Indonesia

Semester Genap 2020/2021

Agenda

- *Partial Order*

Partial Order

Relasi Terurut (*Partial Order*)

- Definisi

Suatu relasi R pada himpunan A disebut relasi terurut atau *(non-strict) partial order* pada A jika R bersifat refleksif, antisimetri, dan transitif.

Pasangan berurutan (A, R) di mana R merupakan relasi terurut pada himpunan A disebut *poset (partially ordered set)*. Anggota himpunan A juga merupakan anggota poset.

Notasi $\preccurlyeq$ sering digunakan untuk merepresentasikan sebuah relasi terurut.

- Notasi $x \preccurlyeq y$ menyatakan bahwa x mendahului atau sama dengan y pada urutan parsial $\preccurlyeq$.
- Notasi $x \prec y$ dapat ditulis jika $x \preccurlyeq y$ dan $x \neq y$.

Contoh Poset

- $(Z, \leq)$, di mana
  - Z merupakan himpunan bilangan bulat
  - $\leq$ menyatakan relasi “kurang dari atau sama dengan”

- (A, R), di mana
  - $A = \{ 1, 2, 3 \}$
  - $R = \{ (1,1), (1,2), (1,3), (2,2), (2,3), (3,3) \}$

- (A, R), di mana
  - $A = \{ \text{mahasiswa} \}$
  - $R = \{ (a, b) \mid \text{usia } a \text{ lebih muda atau sama dengan } b \}$

Strict Partial Order

- Definisi

> Suatu relasi *R* pada himpunan *A* disebut *strict partial order* pada *A* jika *R* bersifat irrefleksif, asimetri, dan transitif.
>
> Notasi $x \prec y$ digunakan untuk merepresentasikan $(x, y) \in R$ jika *R* merupakan sebuah *strict partial order*.

- Contoh *strict partial order*
  - Relasi "kurang dari (<)" pada himpunan bilangan natural $\mathbb{N}$
  - Relasi $R = \{(a, b) \in \mathbb{Z}^2 \mid b = a + 2k \ dengan \ k \in \mathbb{Z}^+\}$

Keterbandingan (*Comparability*)

- Definisi

> Misalkan $(S, \preccurlyeq)$ merupakan sebuah poset.
> - Untuk sembarang $a, b \in S$, jika $a \preccurlyeq b$ atau $b \preccurlyeq a$, maka a dan b dikatakan *comparable* (dapat dibandingkan)
> - Sebaliknya, jika tidak berlaku demikian, maka a dan b dikatakan *incomparable* (tidak dapat dibandingkan)

- Contoh
  - Dalam poset $(\mathbb{Z}^+, |)$, 3 dan 9 bersifat *comparable*, sedangkan 5 dan 7 bersifat *incomparable*

Urutan Total (*Total Order*)

- Definisi

> Suatu relasi terurut $\preccurlyeq$ pada himpunan S disebut urutan total (*total order*) atau urutan linier (*linear order*) jika setiap pasangan elemen pada S bersifat *comparable*.
>
> Pasangan $(S, \preccurlyeq)$ disebut himpunan terurut linier (*linearly ordered set/totally ordered set*) atau sebuah rantai (*chain*)

- Contoh
  - Pasangan $(N, \leq)$ dengan $\leq$ adalah relasi kurang dari atau sama dengan adalah sebuah rantai
    - Relasi $\leq$ bersifat refleksif, antisimetri, dan transitif
    - Pada $\leq$ pada N, $\forall a,b \in N$, berlaku $a \leq b$ atau $b \leq a$

Well-Ordered Set

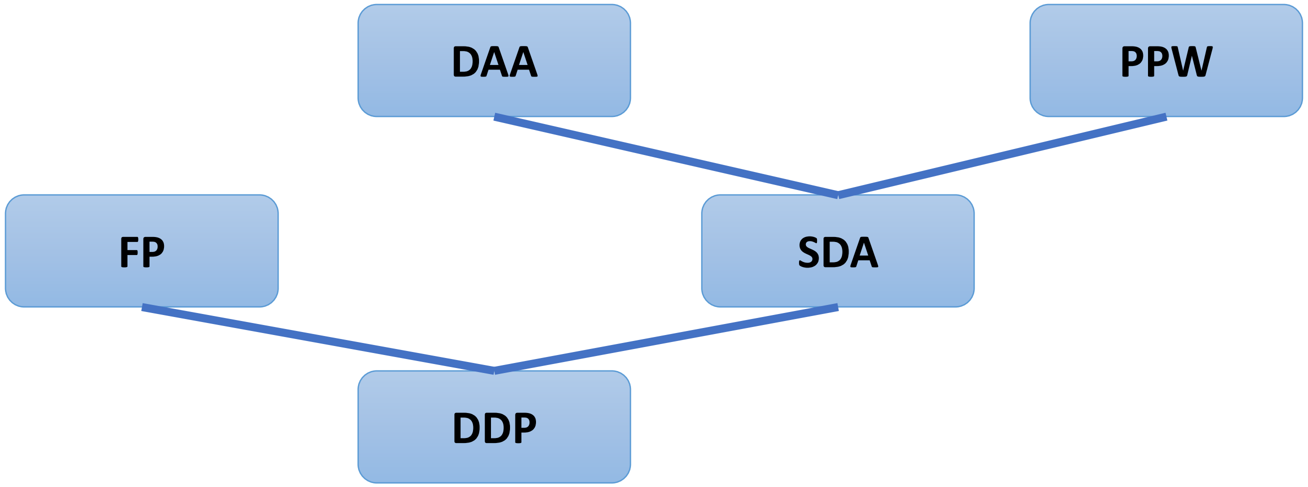
- Definisi

> Sebuah poset $(S, \preccurlyeq)$ disebut *well-ordered set* jika $\preccurlyeq$ merupakan *total order* dan setiap himpunan bagian tidak kosong pada S memiliki elemen terkecil sesuai dengan urutan yang didasarkan pada relasi $\preccurlyeq$.

- Contoh
  - Poset $(\mathbb{Z}^+, \leq)$ merupakan contoh *well-ordered set*
  - Poset $(\mathbb{R}^+, \leq)$ BUKAN merupakan contoh *well-ordered set*

Diagram Hasse

- Diagram Hasse digunakan untuk menggambarkan poset jika himpunan pembetuknya adalah himpunan berhingga
- Contoh



Pembentukan Diagram Hasse

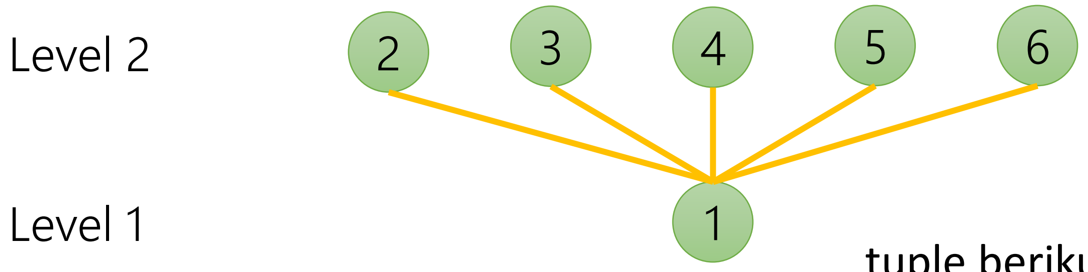
- Diagram Hasse untuk suatu poset $(A, \preccurlyeq)$ dibentuk berdasarkan aturan berikut:
  - Setiap elemen A akan muncul tepat satu kali
  - Jika $x \preccurlyeq y$ dan $x \neq y$, maka x berada pada level yang lebih rendah dari level y.
  - Setiap $z \in A$ di mana tidak ada $y \in A$ sehingga $y \preccurlyeq z$ diletakkan pada level 1
  - Jika $x \preccurlyeq y$ dan tidak ada $z \in A$ sehingga $x \preccurlyeq z$ dan $z \preccurlyeq y$, maka ditarik sebuah garis dari x ke y

Pembentukan Diagram Hasse

- **Contoh 1**
  - Diberikan sebuah poset $(A, |)$ di mana
    - Himpunan $A = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6 \}$ dan;
    - Relasi $| = \{ (a, b) \mid a \in A, b \in A, b \bmod a = 0 \}$ sehingga $| = \{ (1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,2), (2,4), (2,6), (3,3), (3,6), (4,4), (5,5), (6,6) \}$

Pembentukan Diagram Hasse

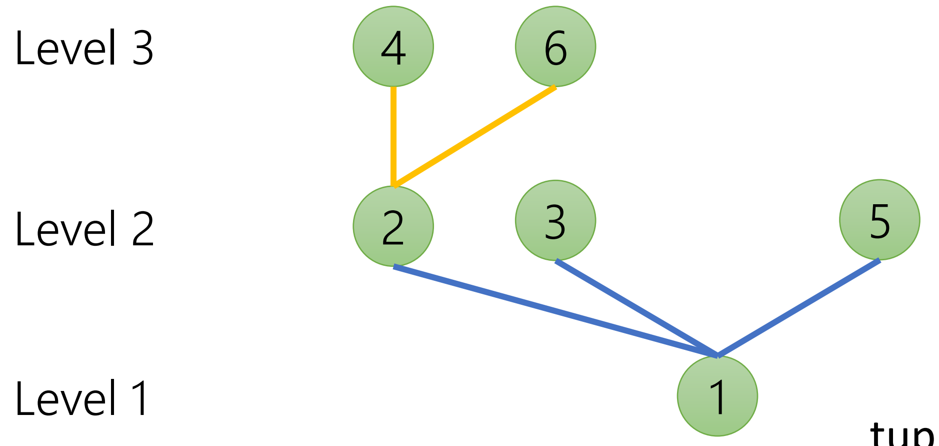
- Pembentukan Diagram Hasse untuk $(A, |)$
  - Tahap 1: dari tuple-tuple (1,1), (1,2), (1,3), …, (1,6) diperoleh diagram Hasse sementara sebagai berikut:



tuple berikutnya: (2,2), (2,4), (2,6)

Pembentukan Diagram Hasse

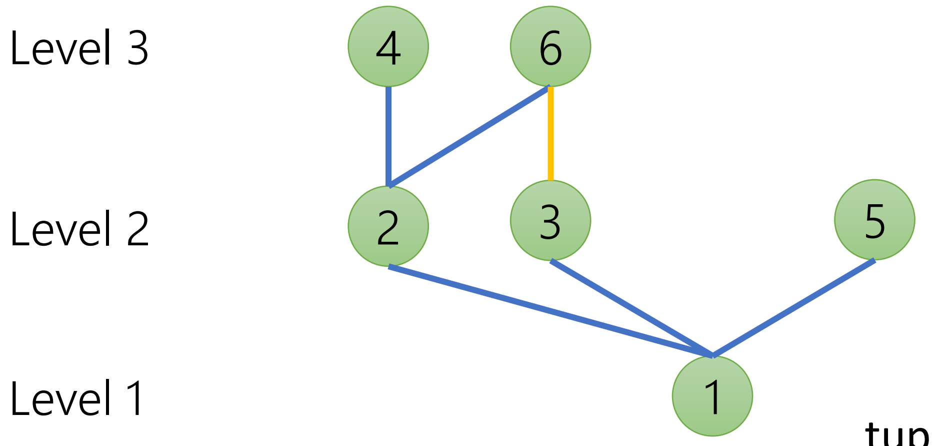
- Pembentukan Diagram Hasse untuk $(A, |)$
  - Tahap 2: ditambah tuple-tuple (2,2), (2,4), (2,6) diperoleh diagram Hasse sementara sebagai berikut:



tuple berikutnya: (3,3), (3,6)

Pembentukan Diagram Hasse

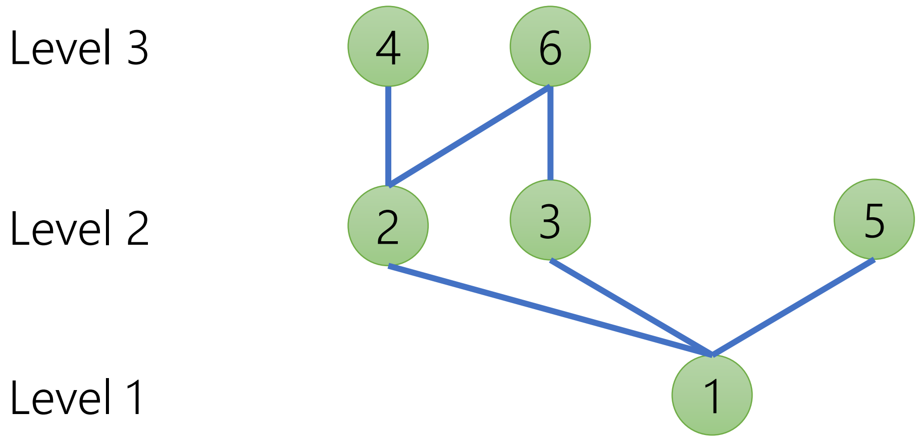
- Pembentukan Diagram Hasse untuk *(A, |)*
  - Tahap 3: ditambah tuple-tuple (3,3), (3,6) diperoleh diagram Hasse sementara sebagai berikut:



tuple berikutnya: (4,4), (5,5), (6,6)

Pembentukan Diagram Hasse

- Pembentukan Diagram Hasse untuk $(A, |)$
  - Tahap 4: ditambah tuple-tuple (4,4), (5,5), (6,6) tidak mengubah lagi diagram Hasse yang terbentuk:



Pembentukan Diagram Hasse

- **Contoh 2**

  Diberikan (P(B), $\subseteq$), di mana

  - B = {a, b, c}
  - P(B) = {$\varnothing$, {*a*}, {b}, {c}, {a, b}, {b, c}, {a, c}, B }
  - $\subseteq$ = { ($\varnothing$, $\varnothing$), ($\varnothing$, {*a*}), …, ($\varnothing$, B),

    ({a}, {a}), ({a}, {a,b}), ({a}, {a,c}), ({a}, *B*),

    ({b}, {b}), ({b}, {a,b}), ({b}, {b,c}), ({b}, *B*),

    ({c}, {c}), ({c}, {a,c}), ({c},{b,c}), ({c}, *B*),

    ({a,b}, {a,b}), ({a,b}, B),

    ({a,c}, {a,c}), ({a,c}, B),

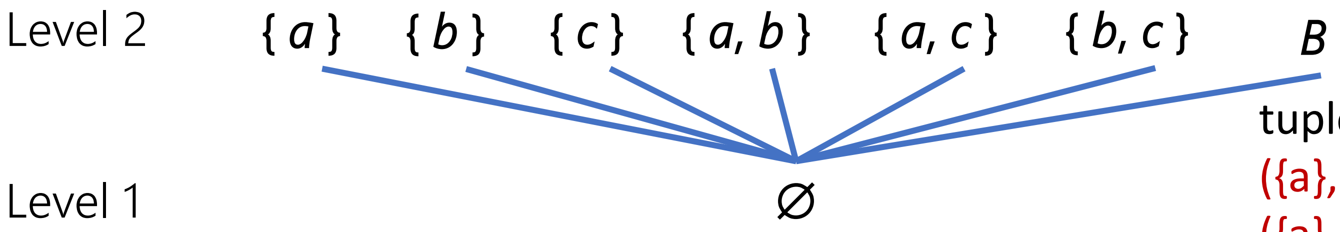
    ({b,c}, {b,c}), ({b,c}, B),

    (B,B)}

Pembentukan Diagram Hasse

- Tahap 1:

dari tuple-tuple (∅, ∅), (∅, {*a*}), …, (∅, B) diperoleh diagram Hasse sementara sebagai berikut:

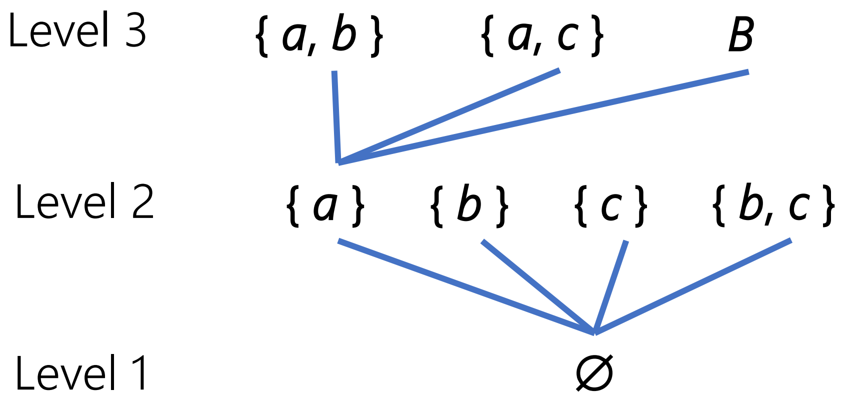


tuple berikutnya:
({a}, {a}), ({a}, {a,b}), ({a}, {*a*, *c*}), ({a}, B)

Pembentukan Diagram Hasse

- Tahap 2:

ditambah tuple-tuple ({a}, {a}), ({a}, {a,b}), ({a}, {*a*, *c*}), ({a}, B)
diperoleh diagram Hasse sementara sebagai berikut:

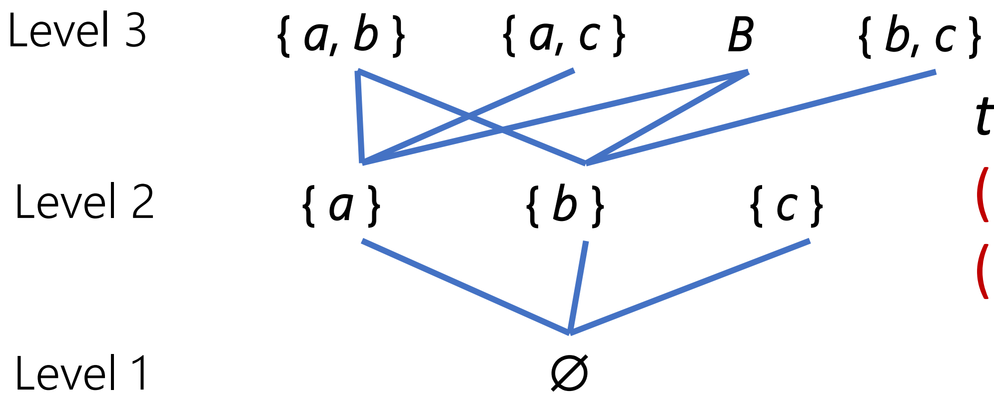


tuple berikutnya:
({b}, {b}), ({b}, {a,b}),
({b}, {b, c}), ({b}, B)

Pembentukan Diagram Hasse

- Tahap 3:

ditambah tuple-tuple ({b}, {b}), ({b}, {a,b}), ({b}, {b, *c*}), ({b}, B)
diperoleh diagram Hasse sementara sebagai berikut:

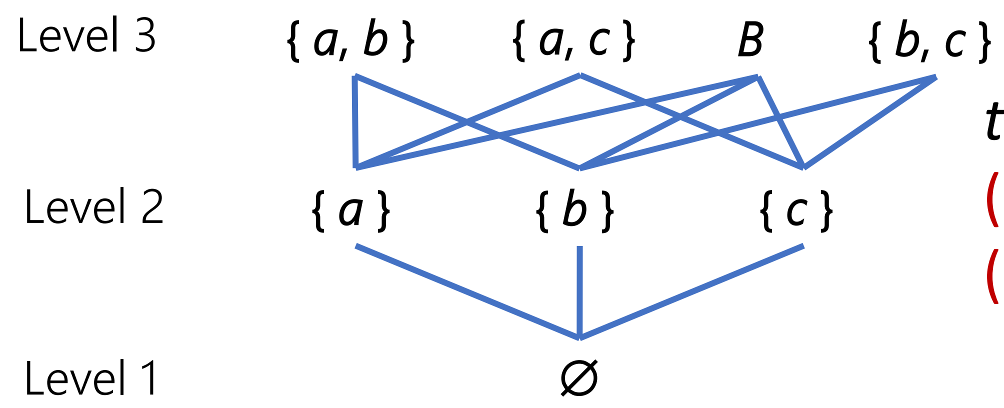


tuple berikutnya:
({c}, {c}), ({c}, {b,c}),
({b}, {a, *c*}), ({c}, B)

Pembentukan Diagram Hasse

- Tahap 3:

ditambah tuple-tuple ({c}, {c}), ({c}, {b,c}), ({b}, {a, c}), ({c}, B)
diperoleh diagram Hasse sementara sebagai berikut:

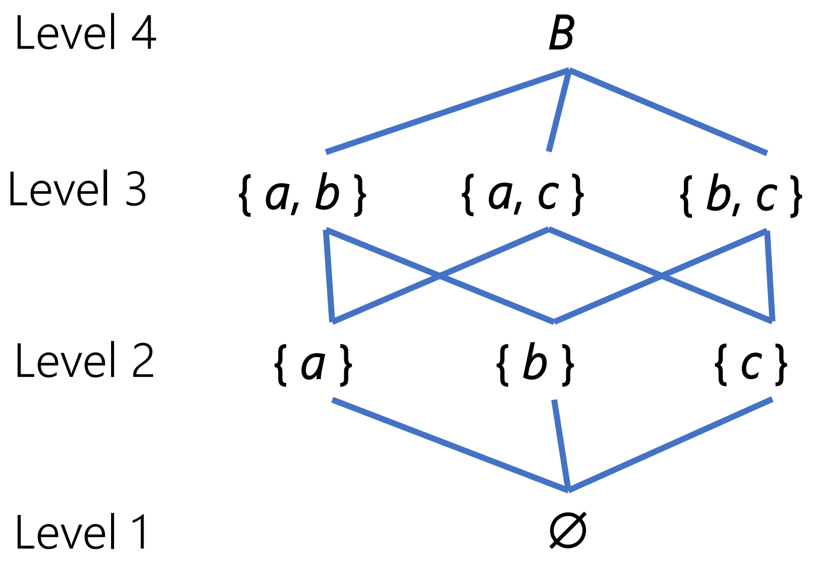


tuple berikutnya:
({a,b}, B), ({a,c}, B), ({b,c}, B), (B,B)

Pembentukan Diagram Hasse

- Tahap 4:

ditambah tuple-tuple ({a,b}, {a,b}), ({a,b}, B), ({a,c}, {a,c}), ({a,c}, B), ({b,c}, {b,c}), ({b,c}, B), (B,B) diperoleh diagram Hasse akhir:



Alternatif Pembentukan Diagram Hasse

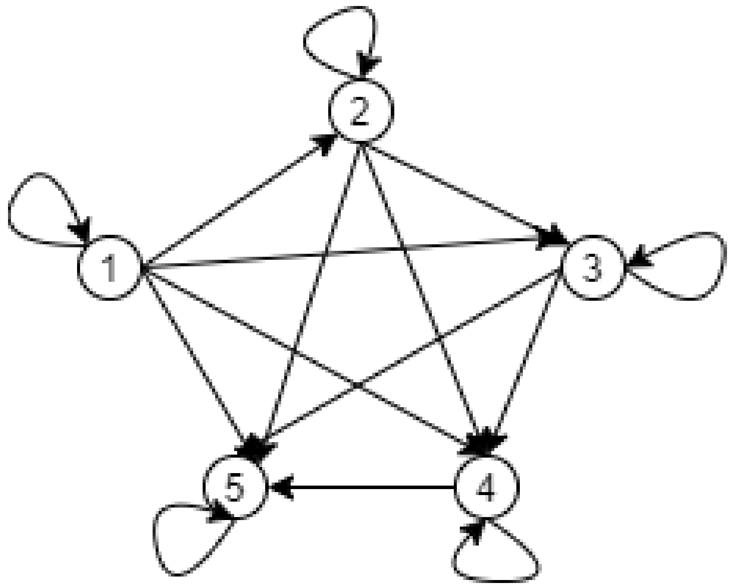
- Untuk suatu poset (A, R), diagram Hasse pada dasarnya merupakan sebuah graf tidak berarah yang diperoleh dari representasi graf relasi R melalui langkah-langkah operasi berikut:
    1. Hilangkan semua *loop*
    2. Hilangkan semua *shortcut edge* yang berasal dari sifat transitif
        - Hilangkan sisi (a, c) jika sudah ada sisi (a, b) dan sisi (b, c)
    3. Gambarkan sisi yang tersisa mengarah ke atas dan hilangkan semua tanda panah (menjadi graf tak berarah)
        - Sisi (a, b) digambar dari bawah ke atas, artinya a berada di bawah b, dan a dihubungkan ke b melalui suatu sisi tak berarah

Pembentukan Diagram Hasse

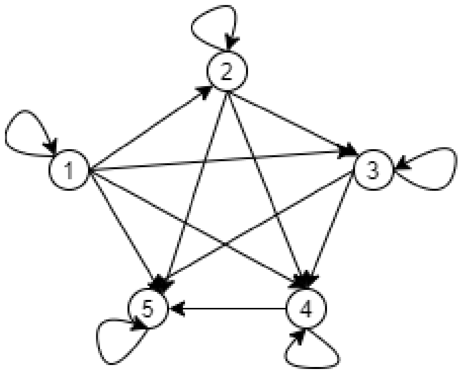
Bentuklah diagram Hasse untuk poset berikut: ({1, 2, 3, 4, 5}, $\leq$)

Relasi $\leq$ = {(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5),
(2,2), (2,3), (2,4), (2,5),
(3,3), (3,4), (3,5),
(4,4), (4,5),
(5,5)}

Representasi graf berarah dari relasi $\leq$ pada {1,2,3,4,5}



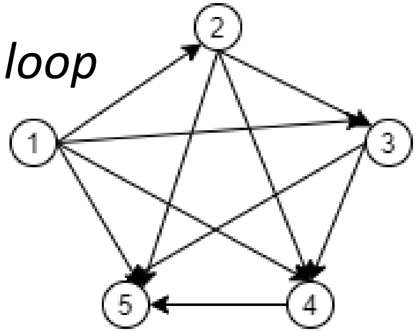
Pembentukan Diagram Hasse



Bentuklah diagram Hasse untuk poset berikut: ({1, 2, 3, 4, 5}, $\leq$)

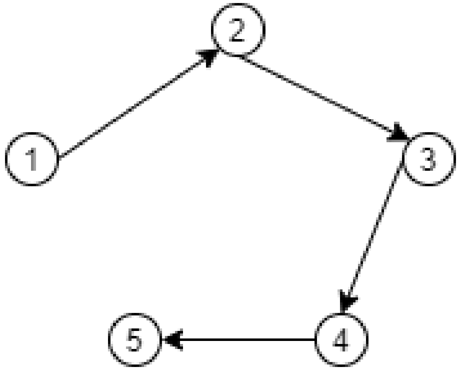
Langkah 1: Hilangkan semua *loop*

Hasil:



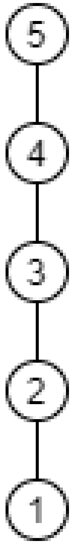
Langkah 2: Hilangkan semua *shortcut edge*

Hasil:



Langkah 3: Gambar dari bawah ke atas dan hilangkan tanda panah

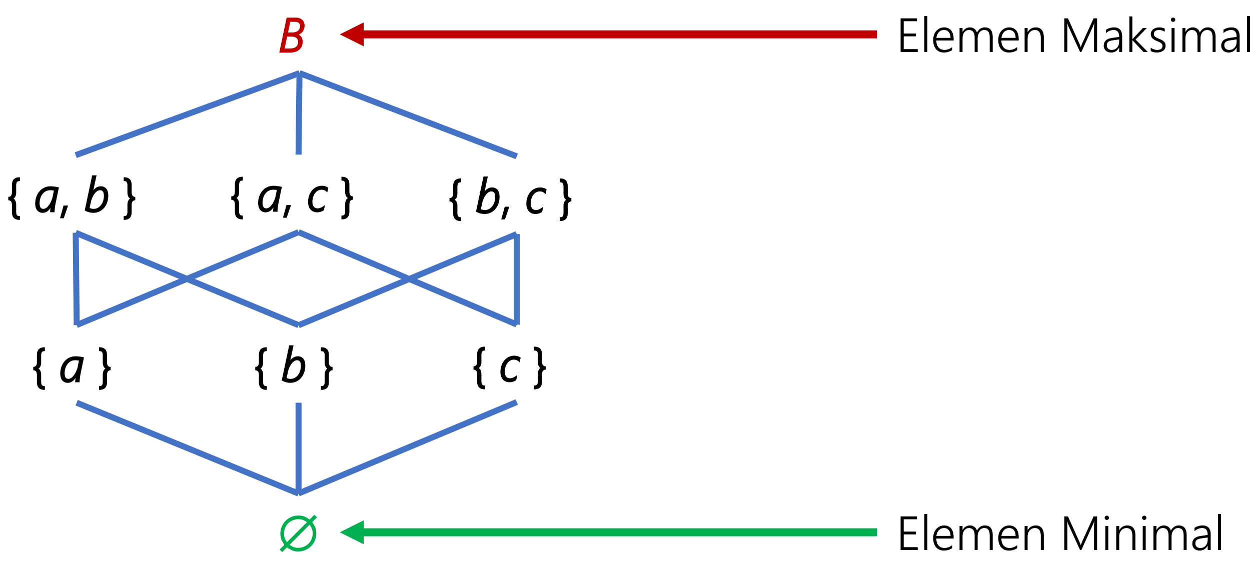
Hasil:



Elemen Minimal dan Maksimal

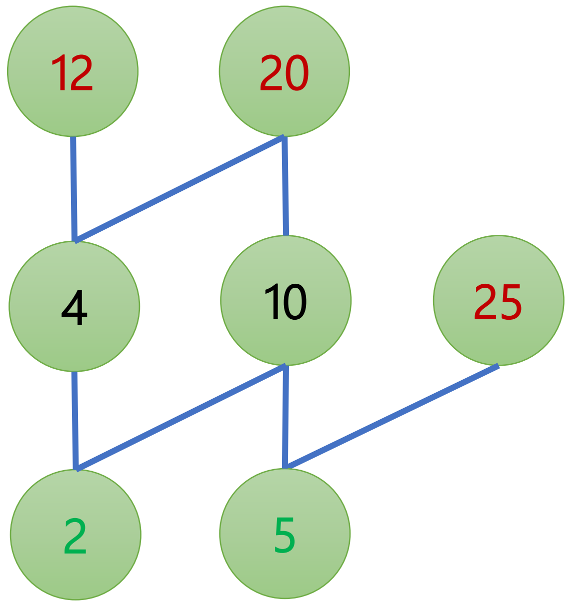
- Pada poset $(A, \preccurlyeq)$
  - $x \in A$ disebut elemen minimal (minimum element) jika tidak ada elemen lain pada A yang mendahului x
- Pada poset $(A, \preccurlyeq)$
  - $x \in A$ disebut elemen maksimal (maximum element) jika tidak ada elemen lain pada A yang didahului oleh x

Elemen Minimal dan Maksimal



Elemen Minimal dan Maksimal

- Pada poset ({ 2, 4, 5, 10, 12, 20, 25 }, |)



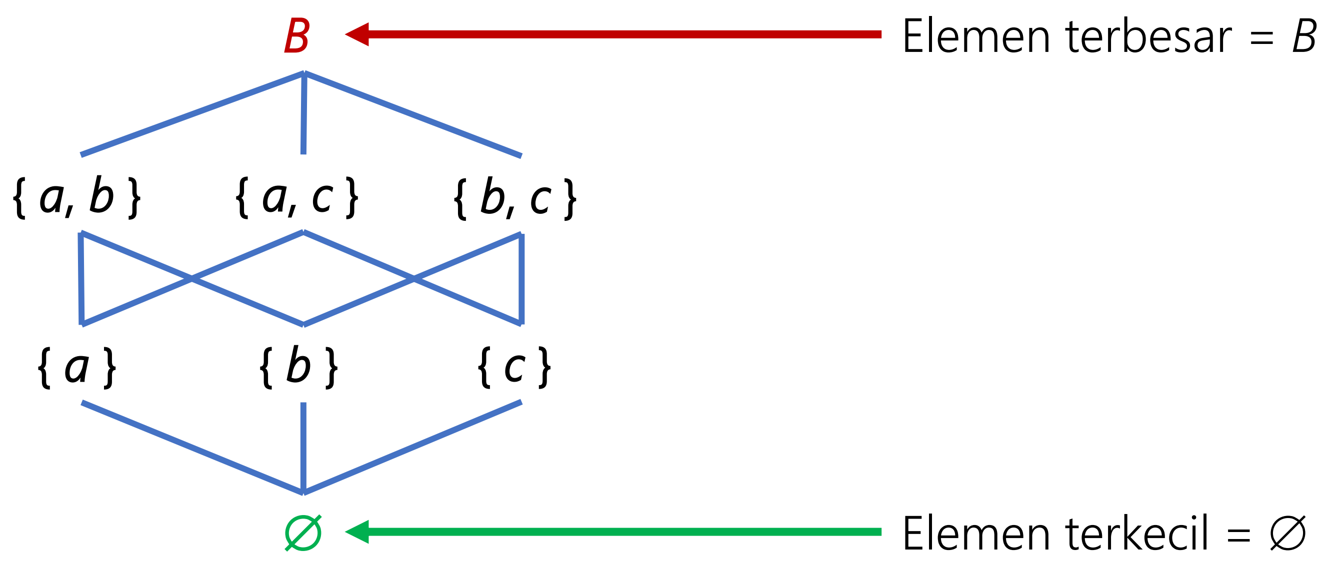
Elemen maksimal = 12, 20, dan 25

Elemen minimal = 2 dan 5

Elemen Terkecil dan Terbesar

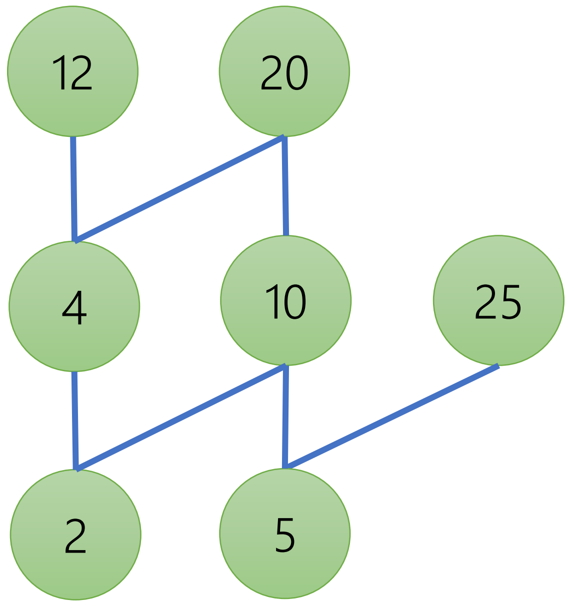
- Pada poset $(A, \preccurlyeq)$
  - $x \in A$ disebut elemen terkecil (*least element*) jika x mendahului semua elemen A
- Pada poset $(A, \preccurlyeq)$
  - $x \in A$ disebut elemen terbesar (*greatest element*) jika x didahului semua elemen A

Elemen Terkecil dan Terbesar



Elemen Terkecil dan Terbesar

- Pada poset $\langle \{ 2, 4, 5, 10, 12, 20, 25 \}, \mid \rangle$



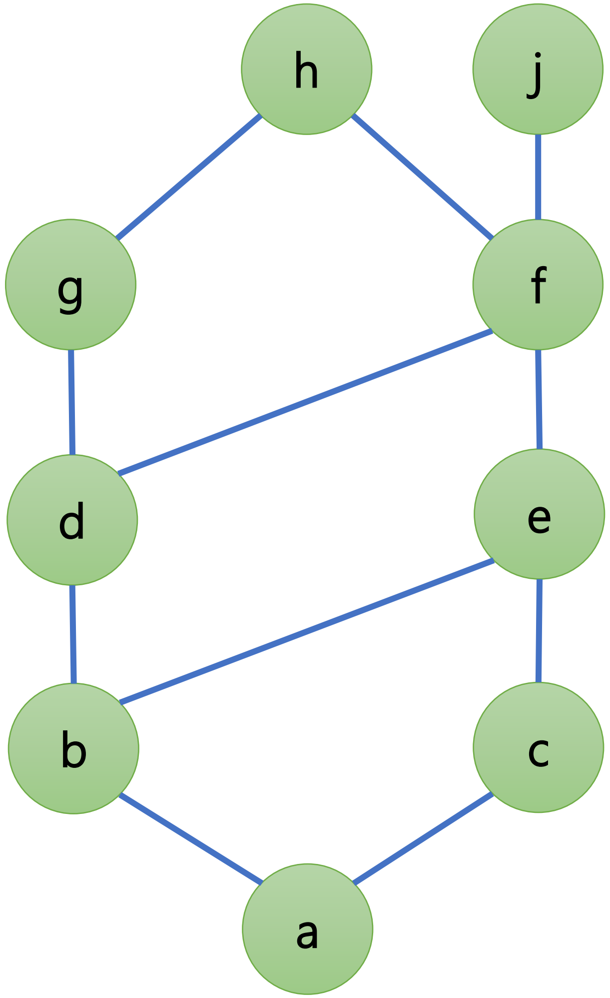
Elemen terbesarnya TIDAK ADA

Elemen terkecilnya TIDAK ADA

Batas Bawah

- Pada poset $(S, \preccurlyeq)$
  - Jika $A \subseteq S$, $A \neq \emptyset$, maka $b \in S$ disebut batas bawah (*lower bound*) dari A jika $\forall a \in A, b \preccurlyeq a$
  - Untuk $x \in S$ disebut batas bawah terbesar (*greatest lower bound*) untuk A jika untuk semua batas bawah b dari A, $b \preccurlyeq x$

Batas Bawah



Batas bawah dari { *a, b, c* } adalah *a*

Batas bawah dari { *j, h* } adalah *a, b, c, d, e, f*

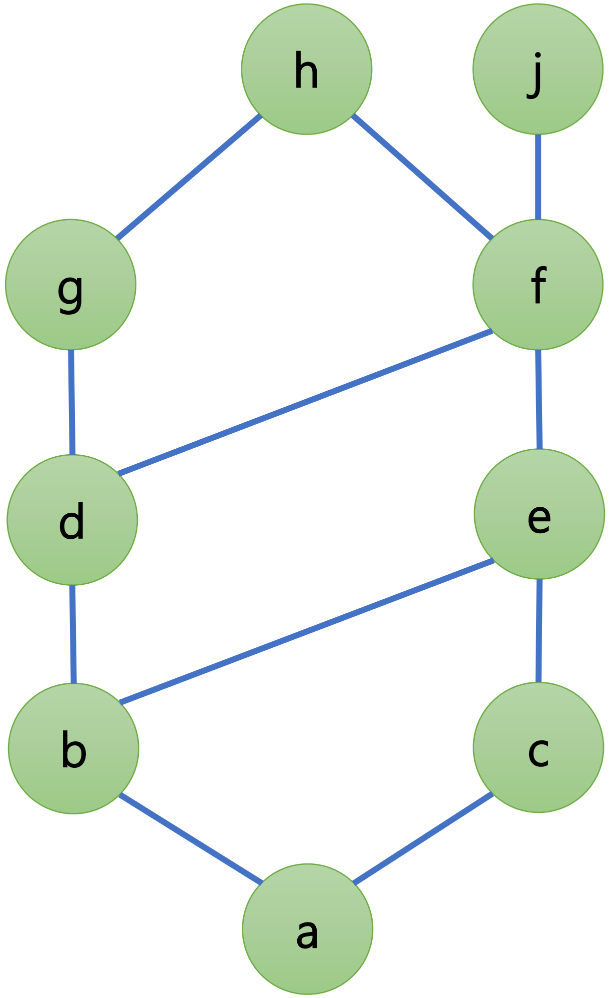
Batas bawah terbesar dari { *a, b, c* } adalah *a*

Batas bawah terbesar dari { *j, h* } adalah *f*

Batas Atas

- Pada poset $(S, \preccurlyeq)$
  - Jika $A \subseteq S$, $A \neq \emptyset$, maka $a \in S$ disebut batas atas (*upper bound*) dari A jika $\forall s \in A, s \preccurlyeq a$
  - Untuk $y \in S$ disebut batas atas terkecil (*least upper bound*) untuk A jika untuk semua batas atas a dari A, $y \preccurlyeq a$

Batas Atas



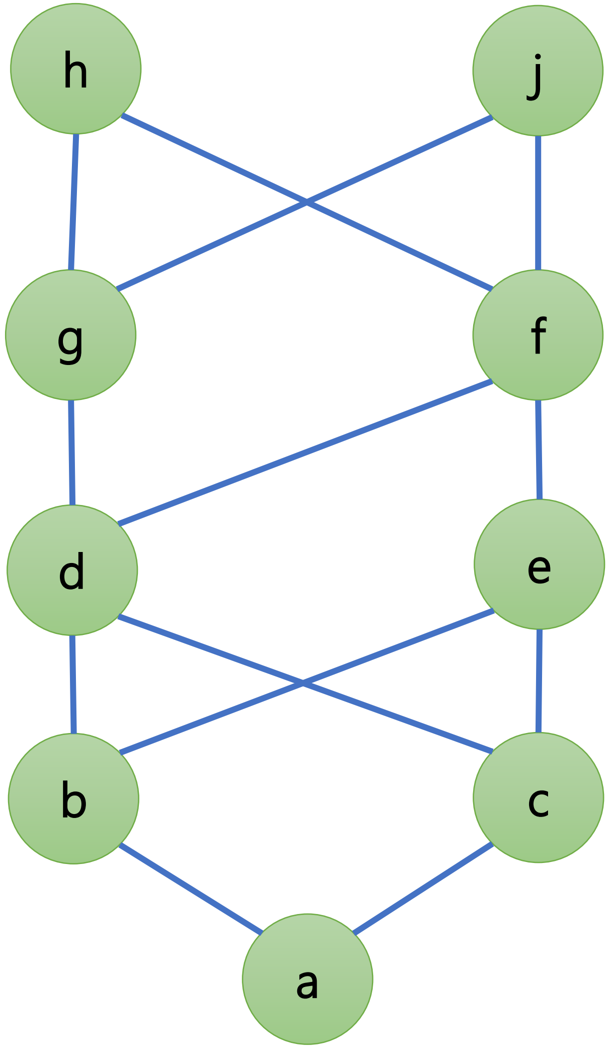
Batas atas dari { *a*, *b*, *c* } adalah *e*, *f*, *h*, *j*

Batas atas dari { *j*, *h* } tidak ada

Batas atas terkecil dari { *a*, *b*, *c* } adalah *e*

Batas atas terkecil dari { *j*, *h* } tidak ada

Contoh



- **Elemen minimum: *a***
- **Elemen terkecil: *a***
- **Elemen maksimum: *h, j***
- **Elemen terbesar: tidak ada**

- Batas bawah dari **{ *j, h* }** adalah ***a, b, c, d, e, f, g***
- Batas bawah terbesar dari **{ *j, h* }** adalah ***tidak ada***
- Batas atas dari **{ *j, h* }** tidak ada
- Batas atas terkecil dari **{ *j, h* }** tidak ada

- Batas bawah dari **{ *a, b, c* }** adalah ***a***
- Batas bawah terbesar dari **{ *a, b, c* }** adalah ***a***
- Batas atas dari **{ *a, b, c* }** adalah ***d, e, f, g, h, j***
- Batas atas terkecil dari **{ *a, b, c* }** adalah ***tidak ada***

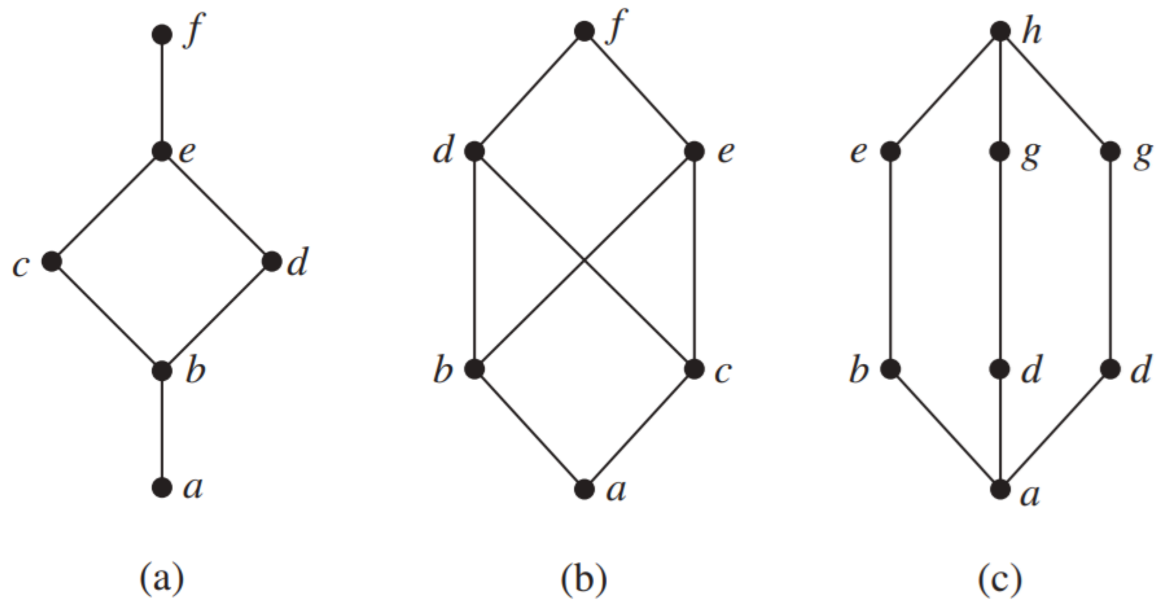
Lattice

- Definisi

Sebuah poset $(\mathrm{S}, \preccurlyeq)$ disebut *lattice* jika untuk setiap pasang elemen $a, b \in S$, himpunan $\{a, b\}$ memiliki batas atas terkecil (*least upper bound*/LUB) dan batas bawah terbesar (*greatest lower bound*/GLB).

Lattice

- Manakah diagram yang merupakan *lattice*?



- Diagram (a) dan (c) merupakan *lattice*
- Diagram (b) bukan *lattice* karena $\{b, c\}$ tidak memiliki LUB

Selamat belajar…