Penyelesaian Relasi Rekurensi dengan Fungsi Pembangkit

Menyelesaikan RR Linier dengan Fungsi Pembangkit

- Misalkan kita ingin menyelesaikan relasi rekurensi berikut

  $c_0 x_n + c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_k x_{n-k} = f(n),\ n \geq m$

- Langkah-langkah penyelesaiannya
  1. Kalikan kedua sisi dengan z^n
  2. Tambahkan bentuk penjumlahan untuk $n \geq 1$
  3. Asumsikan $G(z) = x_0 + x_1 z + x_2 z^2 + \ldots$, ubah bentuk penjumlahan menjadi $G(z)$ dalam bentuk deret
  4. Hitung $G(z)$, menggunakan *partial fraction decomposition* jika diperlukan

Partial Fraction Decomposition

- Solusi umum Fungsi Pembangkit

$$G(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$$

$$G(z) = \frac{P(z)}{q(1 - b_1 z)(1 - b_2 z) \cdots (1 - b_k z)}$$

$$G(z) = \frac{1}{q}\left\{\frac{A_1}{1 - b_1 z} + \frac{A_2}{1 - b_2 z} + \cdots + \frac{A_k}{1 - b_k z}\right\}$$

$$G(z) = \frac{1}{q}\sum_{n=0}^{\infty}(A_1 b_1^n + A_2 b_2^n + \cdots + A_k\, b_k^n) z^n$$

$$\boldsymbol{x_n = \frac{1}{q}(A_1 b_1^n + A_2 b_2^n + \cdots + A_k\, b_k^n)}$$

Partial Fraction Decomposition

- Solusi umum Fungsi Pembangkit dengan multiplisitas *m*

$$G(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$$

$$G(z) = \frac{P(z)}{q(1-bz)^m}$$

$$G(z) = \frac{1}{q}\left\{\frac{A_1}{(1-bz)} + \frac{A_2}{(1-bz)^2} + \cdots + \frac{A_m}{(1-bz)^m}\right\}$$

$$G(z) = \frac{1}{q}\sum_{n=0}^{\infty}\left(A_1 b^n + A_2 C(n+1,n) b^n + \cdots + A_m C(n+m-1,n) b^n\right) z^n$$

$$\boldsymbol{x_n = \frac{1}{q}\left(A_1 + A_2 C(n+1,n) + \cdots + A_m C(n+m-1,n)\right) b^n}$$

Partial Fraction Decomposition

- Solusi umum Fungsi Pembangkit dengan beberapa macam bentuk (lihat slide table FP)

$$G(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$$

$$G(z) = \frac{P(z)}{q(1 - b_1 z)(1 + b_2 z)(1 + b_3 z)^2 \ldots etc}$$

$$G(z) = \frac{1}{q}\left\{\frac{A_1}{1 - b_1 z} + \frac{A_2}{1 + b_2 z} + \frac{A_3}{1 + b_3 z} + \frac{A_4}{(1 + b_3 z)^2} + etc\right\}$$

Cari x_n = ?

Contoh: $x_n = 2x_{n-1} + 5, n \geq 1, x_0 = 1$

- Tahap 1:
  - Kalikan kedua sisi dengan z^n

$$x_n z^n = 2x_{n-1} z^n + 5z^n$$

- Tahap 2:
  - Tambahkan bentuk penjumlahan pada RR

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n z^n = \sum_{n=1}^{\infty} 2x_{n-1} z^n + \sum_{n=1}^{\infty} 5z^n$$

Contoh: $x_n = 2x_{n-1} + 5$, $n \geq 1$, $x_0 = 1$

- Tahap 3:
  - Asumsikan bahwa $G(z) = x_0 + x_1 z + x_2 z^2 + \ldots$
  - Ubah bentuk penjumlahan ke $G(z)$

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n z^n = \sum_{n=1}^{\infty} 2x_{n-1} z^n + \sum_{n=1}^{\infty} 5z^n$$

  - Bagian pertama:

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n z^n = x_1 z^1 + x_2 z^2 + x_3 z^3 + \cdots$$

$$= G(z) - x_0$$

Contoh: $x_n = 2x_{n-1} + 5$, $n \geq 1$, $x_0 = 1$

- Tahap 3 (lanjutan):
  - Ubah bentuk penjumlahan ke $G(z)$

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n z^n = \sum_{n=1}^{\infty} 2x_{n-1} z^n + \sum_{n=1}^{\infty} 5z^n$$

  - Bagian kedua:

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{\infty} 2x_{n-1} z^n \\
&= 2x_0 z^1 + 2x_1 z^2 + 2x_2 z^3 + \cdots \\
&= 2z(x_0 + x_1 z^1 + x_2 z^2 + \cdots) \\
&= 2zG(z)
\end{aligned}$$

Contoh: $x_n = 2x_{n-1} + 5, n \geq 1, x_0 = 1$

- Tahap 3 (lanjutan):
  - Ubah bentuk penjumlahan ke $G(z)$

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n z^n = \sum_{n=1}^{\infty} 2x_{n-1} z^n + \sum_{n=1}^{\infty} 5z^n$$

  - Bagian ketiga:

$$\sum_{n=1}^{\infty} 5z^n = 5z^1 + 5z^2 + 5z^3 + \cdots$$
$$= 5z(z^0 + z^1 + z^2 + \cdots)$$
$$= 5z \frac{1}{(1-z)}$$

Contoh: $x_n = 2x_{n-1} + 5, n \geq 1, x_0 = 1$

- Tahap 3 (lanjutan):
  - Dengan demikian, dari bentuk:

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n z^n = \sum_{n=1}^{\infty} 2x_{n-1} z^n + \sum_{n=1}^{\infty} 5z^n$$

  - Kita memperoleh:

$$G(z) - x_0 = 2zG(z) + 5z\frac{1}{(1-z)}$$

Contoh: $x_n = 2x_{n-1} + 5$, $n \geq 1$, $x_0 = 1$

- Tahap 3 (lanjutan):
  - Kita memperoleh:

$$G(z) - x_0 = 2zG(z) + 5z\frac{1}{(1-z)}$$

$$G(z) - 1 = 2zG(z) + 5z\frac{1}{(1-z)}$$

$$G(z) - 2zG(z) = \frac{5z}{(1-z)} + 1$$

$$(1-2z)G(z) = \frac{5z + (1-z)}{(1-z)} = \frac{4z+1}{(1-z)}$$

$$G(z) = \frac{4z+1}{(1-z)(1-2z)}$$

Contoh: $x_n = 2x_{n-1} + 5$, $n \geq 1$, $x_0 = 1$

- Tahap 4:
  - Gunakan *partial fractal decomposition*:

$$G(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{4z+1}{(1-z)(1-2z)}$$

$$\frac{4z+1}{(1-z)(1-2z)} = \frac{A_1}{(1-z)} + \frac{A_2}{(1-2z)}$$

$$= \frac{A_1(1-2z) + A_2(1-z)}{(1-z)(1-2z)}$$

$$= \frac{A_1 - 2A_1 z + A_2 - A_2 z}{(1-z)(1-2z)}$$

Contoh: $x_n = 2x_{n-1} + 5, n \geq 1, x_0 = 1$

- Tahap 4 (lanjutan):
  - Gunakan *partial fractal decomposition*:

$$G(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{4z+1}{(1-z)(1-2z)}$$

$$\frac{4z+1}{(1-z)(1-2z)} = \frac{A_1 - 2A_1z + A_2 - A_2z}{(1-z)(1-2z)}$$

$$\frac{4z+1}{(1-z)(1-2z)} = \frac{(-2A_1 - A_2)z + (A_1 + A_2)}{(1-1z)(1-2z)}$$

$$-2A_1 - A_2 = 4 \qquad dan \qquad A_1 + A_2 = 1$$

$$diperoleh \qquad A_1 = -5 \qquad dan \qquad A_2 = 6$$

Contoh: $x_n = 2x_{n-1} + 5, n \geq 1, x_0 = 1$

- Tahap 4 (lanjutan):
  - Setelah semua koefisien dan akar diketahui:
    $A_1 = -5$, $A_2 = 6$, $b_1 = 1$, $b_2 = 2$, $q = 1$, $k = 2$,
    bentuk solusi eksplisitnya:

$$x_n = \frac{1}{q}(A_1 b_1^n + A_2 b_2^n + \cdots + A_k\ b_k^n)$$

$$x_n = \frac{1}{1}(-5.1^n + 6.2^n)$$

$$x_n = -5.1^n + 6.2^n$$

Latihan 1

- Selesaikan relasi rekurensi berikut dengan FP:

  $x_n = 3x_{n\text{-}1}$ dengan $x_0 = 2$

- Selesaikan relasi rekurensi berikut dengan FP:

  $x_n = 7x_{n\text{-}1}$ dengan $x_0 = 5$

- Selesaikan relasi rekurensi berikut dengan FP:

  $x_n = 5x_{n\text{-}1} - 6x_{\text{n-2}}$ dengan $x_0 = 1,\ x_1 = 0$

Latihan 2

- Selesaikan relasi rekurensi berikut dengan FP:

  $x_n = 3x_{n-1} + 2$ dengan $x_0 = 1$

- Selesaikan relasi rekurensi berikut dengan FP:

  $x_n = 3x_{n-1} + 4^{n-1}$ dengan $x_0 = 1$

- Selesaikan relasi rekurensi berikut dengan FP:

  $x_n = x_{n-1} + 2x_{n-2} + 2^n$ dengan $x_0 = 4$, $x_1 = 12$

Latihan 3

- Selesaikan relasi rekurensi berikut dengan menggunakan Fungsi Pembangkit (FP):
  $x_n = 2x_{n-1} + 3x_{n-2} + 4^n + 6$, $n>1$, dengan $x_0 = 20$, $x_1 = 60$

- Selesaikan relasi rekurensi berikut dengan FP:
  $x_n = 4x_{n-1} - 3x_{n-2} + n$, dengan $x_0 = 1$, $x_1 = 2$

- Selesaikan relasi rekurensi berikut dengan menggunakan FP:
  $x_n = 2x_{n-1} + 3^n$ dengan $x_0 = 5$

Penyelesaian Permasalahan Counting dengan Fungsi Pembangkit

FP untuk Penyelesaian Permasalahan Kombinatorik

- Contoh 1
  - Carilah solusi untuk persamaan $x_1 + x_2 = 11$ dengan syarat x_1 dan x_2 adalah bilangan bulat positif yang memenuhi $3 \leq x_1 \leq 5$ dan $6 \leq x_2 \leq 9$
- Solusi Contoh 1
  - Kita dapat mengubah batasan x_1 dan x_2 tersebut ke dalam bentuk fungsi pembangkit sebagai berikut:
    - Untuk x_1: $z^3 + z^4 + z^5$
    - Untuk x_2: $z^6 + z^7 + z^8 + z^9$

FP untuk Penyelesaian Permasalahan Kombinatorik

- Solusi Contoh 1 (lanjutan)
  - Untuk menjawab permasalahan tersebut sama saja kita mencari koefisien dari $\boldsymbol{z^{11}}$ pada fungsi pembangkit untuk $x_1 * x_2$:

    $(z^3 + z^4 + z^5)\ (z^6 + z^7 + z^8 + z^9)$
  - Mengapa demikian? Perhatikan

    bahwa: $(z^3 + z^4 + z^5)\ (z^6 + z^7 + z^8 + z^9)$

    $= z^3z^6 + z^3z^7 + \boldsymbol{z^3z^8} + z^3z^9 + \ldots + z^4z^6 + \boldsymbol{z^4z^7} + z^4z^8 + \ldots$

    $= \ldots + \boldsymbol{3z^{11}} + \ldots$

FP untuk Penyelesaian Permasalahan Kombinatorik

- Solusi Contoh 1 (lanjutan)
  - Dapat diketahui bahwa koefisien dari z^{11} pada fungsi pembangkit yang terbentuk adalah 3
  - Ini menunjukkan ada 3 (tiga) jawaban yang mungkin yaitu:
    - z^3z^8 , yaitu 3 + 8 = 11
    - z^4z^7 , yaitu 4 + 7 = 11
    - z^5z^6 , yaitu 5 + 6 = 11

FP untuk Penyelesaian Permasalahan Kombinatorik

- Contoh 2
  - Berapa cara membagikan 8 potong kue kepada 3 orang anak sehingga setiap anak menerima 2 sampai 4 potong kue?
- Solusi Contoh 2
  - Permasalahan di atas dapat dipandang sebagai:

    $x_1 + x_2 + x_3 = 8$

    dengan syarat $2 \le x_1 \le 4$, $2 \le x_2 \le 4$, dan $2 \le x_3 \le 4$
  - Bentuk ini mirip dengan contoh sebelumnya, berarti kita tinggal mencari koefisien dari $\boldsymbol{z^8}$ dari fungsi pembangkit berikut:

    $(z^2 + z^3 + z^4)\ (z^2 + z^3 + z^4)\ (z^2 + z^3 + z^4)$

FP untuk Penyelesaian Permasalahan Kombinatorik

- Contoh 3
  - Berapa cara mengambil 3 huruf dari kata SAMBAS jika urutan huruf tidak diperhatikan?
- Solusi Contoh 3
  - Perhatikan bahwa kata SAMBAS mempunyai 4 jenis huruf yang berbeda yaitu {S, A, M, B}
    - Artinya, untuk mendapatkan 3 (tiga) huruf yang dimaksud maka kita mengambil kombinasi antara huruf **S**, **A**, **M**, dan **B** tersebut
    - Dengan kata lain, kita mempunyai $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 3$

FP untuk Penyelesaian Permasalahan Kombinatorik

- Solusi Contoh 3 (lanjutan)
  - Bagaimana dengan syarat untuk masing-masing x_i?
    - Setiap huruf mempunyai kemungkinan dapat diambil maksimal sejumlah hurufnya saja
    - Untuk huruf **S** dan **A**, kemungkinan diambilnya adalah 0 buah, 1 buah, atau 2 buah
    - Untuk huruf **M** dan **B**, kemungkinan diambilnya adalah 0 buah atau 1 buah
  - Dengan demikian, permasalahan tersebut dapat diselesaikan dengan mencari koefisien z^3 dari fungsi pembangkit berikut:

$$(z^0 + z^1 + z^2)\,(z^0 + z^1 + z^2)\,(z^0 + z^1)\,(z^0 + z^1)$$

FP untuk Penyelesaian Permasalahan Kombinatorik

- Contoh 4
  - Ada berapa cara kita membayar **20 ribu** jika kita mempunyai uang pecahan **5 ribu** dan 10 ribu di mana urutan uangnya tidak diperhatikan?
- Solusi Contoh 4
  - Perhatikan bahwa:
    - Cara kita mengeluarkan uang dengan pecahan **5 ribu** dapat dinyatakan dengan barisan $x_1 = \langle 0, 5, 10, 15, 20, \ldots \rangle$
    - Cara kita mengeluarkan uang dengan pecahan **10 ribu** dapat dinyatakan dengan barisan $x_2 = \langle 0, 10, 20, 30, \ldots \rangle$

FP untuk Penyelesaian Permasalahan Kombinatorik

- Solusi Contoh 4 (lanjutan)
  - Fungsi pembangkit yang sesuai:
    - Barisan $x_1 = \langle 0, 5, 10, 15, 20, \ldots\rangle$ mempunyai bentuk fungsi pembangkit yaitu $\boldsymbol{(z^0 + z^5 + z^{10} + z^{15} + \ldots)}$
    - Barisan $x_2 = \langle 0, 10, 20, 30, \ldots\rangle$ mempunyai bentuk fungsi pembangkit yaitu $\boldsymbol{(z^0 + z^{10} + z^{20} + z^{30} + \ldots)}$
  - Selanjutnya, permasalahan tersebut dapat dinyatakan sebagai $\boldsymbol{x_1 + x_2 = 20}$
  - Dengan demikian sama saja kita mencari koefisien dari $\boldsymbol{z^{20}}$ dari perkalian FP dari $\boldsymbol{x_1}$ dan $\boldsymbol{x_2}$

FP untuk Penyelesaian Permasalahan Kombinatorik

- Solusi Contoh 4 (lanjutan)
  - Mencari koefisien dari z^{20} pada FP:

    $$(z^0 + z^5 + z^{10} + z^{15} + \ldots)(z^0 + z^{10} + z^{20} + z^{30} + \ldots)$$

    $$= \ldots + z^0z^{20} + z^{10}z^{10} + z^{20}z^0 + \ldots$$

    $$= \ldots + 3z^{20} + \ldots$$

  - Jadi, dapat diketahui bahwa terdapat **3 cara** untuk membayar **20 ribu** dengan pecahan **5 ribu** dan **10 ribu** dimana urutan tidak diperhatikan, yaitu:
    - Cara 1: **0** pecahan 5 ribu dan **2** pecahan 10 ribu
    - Cara 2: **2** pecahan 5 ribu dan **1** pecahan 10 ribu
    - Cara 3: **4** pecahan 5 ribu dan **0** pecahan 10 ribu

FP untuk Penyelesaian Permasalahan Kombinatorik

- Contoh 5
  - Ada berapa cara kita membayar **20 ribu** jika kita mempunyai uang pecahan **5 ribu** dan 10 ribu dimana urutan uangnya diperhatikan?
- Solusi Contoh 5
  - Untuk kasus seperti ini, sama saja seperti kita mencari banyaknya cara membayar 20 ribu jika kita membayar dengan pecahan 5 ribu dan 10 ribu masing-masing 0 lembar, 1 lembar, 2 lembar, 3 membayar dst:
    - $(z^5 + z^{10})^0$
    - $(z^5 + z^{10})^1$
    - $(z^5 + z^{10})^2$
    - …

FP untuk Penyelesaian Permasalahan Kombinatorik

- Solusi Contoh 5 (lanjutan)
  - Selanjutnya kita cari koefisien dari z^{20} pada FP:

$$(z^5 + z^{10})^0 + (z^5 + z^{10})^1 + \boxed{(z^5 + z^{10})^2} + \boxed{(z^5 + z^{10})^3} + \dots$$

$$= \dots + \boxed{z^{10}z^{10}} + \boxed{z^5z^5z^{10} + z^5z^{10}z^5 + z^{10}z^5z^5 + \dots}$$

$$+ \boxed{z^5z^5z^5z^5} + \dots$$

$$= \dots + 5z^{20} + \dots$$

FP untuk Penyelesaian Permasalahan Kombinatorik

- Contoh 6
  - Ada berapa cara menyusun 2 (dua) huruf dari huruf **ACC** jika urutan diperhatikan?
- Solusi Contoh 6
  - Untuk kasus jumlah yang diambil terbatas, gunakan bentuk FP seperti berikut:

$$\left(\frac{z^0}{0!}+\frac{z^1}{1!}\right)\left(\frac{z^0}{0!}+\frac{z^1}{1!}+\frac{z^2}{2!}\right)$$

  - Selanjutnya cari koefisien z^2 pada FP di atas dan kalikan dengan **2!** (jumlah huruf yang diambil)

FP untuk Penyelesaian Permasalahan Kombinatorik

- Solusi Contoh 6 (lanjutan)
  - Perhatian bahwa:

$$\left(\frac{z^0}{0!}+\frac{z^1}{1!}\right)\left(\frac{z^0}{0!}+\frac{z^1}{1!}+\frac{z^2}{2!}\right)$$
$$=\cdots+\frac{z^1}{1!}\frac{z^1}{1!}+\cdots+\frac{z^0}{0!}\frac{z^2}{2!}+\cdots$$

  - Kita peroleh bahwa koefisien dari z^2 adalah $\frac{1}{1!1!}=1$ dan $\frac{1}{0!2!}=\frac{1}{2}$
  - Jumlahkan semua koefisien dari z^2 yang ditemukan sehingga diperoleh koefisien $\frac{3}{2}$

FP untuk Penyelesaian Permasalahan Kombinatorik

- Solusi Contoh 6 (lanjutan)
  - Kalikan koefisien yang diperoleh dengan **2!** (menyatakan jumlah huruf yang diambil) sehingga diperoleh:
    - $\frac{3}{2}2! = 3$
  - Jadi, terdapat 3 cara untuk mengambil 2 huruf dari huruf ACC jika urutan huruf diperhatikan yaitu:
    - CC, AC, CA

FP untuk Penyelesaian Permasalahan Kombinatorik

- Contoh 7
  - Ada berapa cara menyusun 4 (empat) huruf dari huruf **SAMBAS** jika urutan diperhatikan?
- Solusi Contoh 7
  - Dengan menggunakan cara sebelumnya, kita mempunyai FP untuk permasalahan di atas yaitu:

$$\left(\frac{z^0}{0!}+\frac{z^1}{1!}+\frac{z^2}{2!}\right)\left(\frac{z^0}{0!}+\frac{z^1}{1!}+\frac{z^2}{2!}\right)\left(\frac{z^0}{0!}+\frac{z^1}{1!}\right)\left(\frac{z^0}{0!}+\frac{z^1}{1!}\right)$$

  - Selanjutnya cari koefisien z^4 pada FP di atas dan kalikan dengan **4!** (jumlah huruf yang diambil)

Latihan

- Sebuah *vending machine*, yang menjual minuman seharga 20, dapat menerima koin dengan nilai 1, 5 dan 10
    - Jika kita hanya memiliki 10 koin senilai 1, 3 koin senilai 5 dan 1 koin senilai 10, maka ada berapa banyak cara untuk membeli satu minuman dari mesin tersebut?

A vending machine made in 1952 (Wikipedia)

Latihan

- Ada berapa cara untuk membagikan 10 hadiah kepada 3 orang anak dengan syarat sebagai berikut:
  - Setiap anak harus mendapatkan hadiah
  - Setiap anak tidak boleh menerima hadiah dalam jumlah yang ganjil
- Ada berapa cara untuk menyusun 4 bola yang diambil dari bola merah, biru, dan kuning yang masing-masing terdapat 3 buah jika:
  - Urutan bola diperhatikan
  - Urutan bola tidak diperhatikan

Selamat belajar…