3.b. Aturan Cramer

MODUL E-LEARNING ALJABAR LINIER
FAKULTAS ILMU KOMPUTER, UNIVERSITAS INDONESIA

Metode-metode penyelesaian spl

1. Metode Eliminasi-Substitusi
2. Metode Geometris
3. Eliminasi Gauss-Jordan
4. Metode dengan menggunakan inverse

$$\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$$

5. Aturan Cramer (akan kita bahas dalam bab ini)

Metode-metode mencari inverse

1. Operasi baris elementer.

2. **Mengggunakan matriks adjoin**

   (dibahas pada bab ini)

Pengetahuan dasar yang diperlukan

- minor,
- kofaktor,

- SPL: $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, A mempunyai inverse,
  maka $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$

- A mempunyai 2 baris (kolom) identik,
  maka $\det(A) = 0$

Ekspansi kofaktor

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots\ldots a_{1j} \ldots\ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots\ldots a_{2j} \ldots\ldots a_{2n} \\ \vdots & \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} \ldots\ldots a_{ij} \ldots\ldots a_{in} \\ \vdots & \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} \ldots\ldots a_{nj} \ldots\ldots a_{nn} \end{pmatrix} \qquad M_{ij} = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots\ldots a_{1j} \ldots\ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots\ldots a_{2j} \ldots\ldots a_{2n} \\ \vdots & \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} \ldots\ldots a_{ij} \ldots\ldots a_{in} \\ \vdots & \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} \ldots\ldots a_{nj} \ldots\ldots a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

$$\boxed{\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} C_{ij} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} C_{ij}}$$

Determinan: hitung dgn ekspansi baris ke-3

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Ekspansi kofaktor baris ke tiga)

Det(A) = ...

$A*$ diperoleh dari matriks A dgn mengganti baris ke-3 dengan baris pertama

$$A* = \begin{bmatrix} \boxed{a_{11} \quad a_{12} \quad a_{13}} \\ a_{21} \quad a_{22} \quad a_{23} \\ \boxed{a_{11} \quad a_{12} \quad a_{13}} \end{bmatrix}$$

Det($A*$) =......

dengan ekspansi baris ke 3; yang berubah hanya entri, kofaktor tetap

Determinan $A*$; adalah hasil kali entri dan kofaktor dengan indeks yang berbeda.

Determinan: hitung dgn ekspansi baris ke-3

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Ekspansi kofaktor baris ke tiga)

Det(A) = $a_{31}\ C_{31} + a_{32}\ C_{32} + a_{33}\ C_{33}$

$A*$ diperoleh dari matriks A dgn mengganti baris ke-3 dengan baris pertama

$$A^* = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{bmatrix}$$

Det(A) = $a_{11}\ C_{31} + a_{12}\ C_{32} + a_{13}\ C_{33}$

$= 0$

dengan ekspansi baris ke 3; yang berubah hanya entri, kofaktor tetap

Determinan $A*$; adalah hasil kali entri dan kofaktor dengan indeks yang berbeda.

Determinan: hitung dgn ekspansi baris ke-1

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Ekspansi kofaktor baris ke-1

Det(A) = $a_{11}\, C_{11} + a_{12}\, C_{12} + a_{13}\, C_{13}$

$A*$ diperoleh dari matriks A dgn mengganti baris ke-1 dengan baris ke-2

$$A= \begin{bmatrix} \boxed{a_{21} \quad a_{22} \quad a_{23}} \\ \boxed{a_{21} \quad a_{22} \quad a_{23}} \\ a_{31} \quad a_{32} \quad a_{33} \end{bmatrix}$$

Det(A) = $a_{21}\, C_{11} + a_{22}\, C_{12} + a_{23}\, C_{13}$
$= 0$

dengan ekspansi baris ke 3; yang berubah hanya entri, kofaktor tetap

Determinan $A*$; adalah hasil kali entri dan kofaktor dengan indeks yang berbeda.

Determinan: dgn ekspansi kolom ke -2

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

Hitunglah determinan matriks A dengan ekspansi kolom 2

$A*$ diperoleh dari A: mengganti kolom ke-2 dgn kolom ke-3

$$A* = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{23} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

$\text{Det}(A*) = \ldots\ldots$

$= 0$

Determinan $A*$;adalah hasil kali entri dan kofaktor dengan indeks yang berbeda.

Determinan: dgn ekspansi kolom ke -2

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \det(A) = a_{12}C_{12} + a_{22}C_{22} + a_{32}C_{32} + a_{42}C_{42}$$ Ekspansi kolom ke-2

$$B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{23} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \det(B) = a_{13}C_{12} + a_{23}C_{22} + a_{33}C_{32} + a_{43}C_{42}$$

hasil kali entri dan kofaktor dengan indeks yang berbeda adalah determinan matriks dengan dua kolom/ baris identik, hasilnya sama dengan 0

Hasil kali entri dan kofaktor

$$k = l \qquad \sum_{i=1}^{n} a_{ik} C_{il} = \det(A)$$

Determinan matriks *A* dihitung dengan ekspansi baris ke *i*

$$k \neq l \qquad \sum_{i=1}^{n} a_{ik} C_{il} = 0$$

determinan matriks dengan kolom *k* dan *l* identik

$$k \neq l \qquad \sum_{i=1}^{n} a_{ki} C_{li} = 0$$

determinan matriks dengan baris *k* dan *l* identik

Hasil kali entri dan kofaktor

Diberikan matriks *A*, dibentuk matriks kofaktor $[Ci_j]$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \qquad [c_{ij}] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & \cdots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & \cdots & C_{2n} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & \cdots & C_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & C_{n3} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{Adj}(A) = [C_{ij}]^T$$

$$\mathrm{adj}(A) = [c_{ij}]^T = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & \cdots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \cdots & C_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{1n} & C_{2n} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}$$

Matriks kofaktor *A*

$$A \times \mathbf{adj}(A) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & \cdots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \cdots & C_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{1n} & C_{2n} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}$$

$$k = l \qquad \sum_{i=1}^{n} a_{ik} C_{il} = \det(A)$$

$$k \neq l \qquad \sum_{i=1}^{n} a_{ik} C_{il} = 0$$

Matriks kofaktor A

$$A \times \mathbf{adj}(A) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & \cdots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \cdots & C_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{1n} & C_{2n} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}$$

$$k = l \qquad \sum_{i=1}^{n} a_{ik} C_{il} = \det(A)$$

$$k \neq l \qquad \sum_{i=1}^{n} a_{ik} C_{il} = 0$$

$$= \begin{bmatrix} \det(A) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \det(A) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \det(A) \end{bmatrix} = \det(A)\, I$$

Rumus inverse matriks

$$A \ \mathbf{adj}(A) = \det(A)\ I$$

$$\frac{1}{\det(A)} A \ \mathbf{adj}(A) = I$$

$$A \ \frac{1}{\det(A)} \mathbf{adj}\left(A\right) = I$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \mathbf{adj}\left(A\right)$$

SPL

$$
\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\
&\vdots \\
&a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n
\end{aligned}
$$

$$
A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}
$$

$$
A\mathbf{x} = \mathbf{b}
$$

Hitunglah determinan matriks

A_j diperoleh dari A dengan mengganti kolom ke j dengan **b**

$$A_1 = \begin{bmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

ekspansi kolom pertama

$$\det(A_1) = b_1 C_{11} + b_2 C_{21} + \cdots + b_n C_{n1}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} a_{11} & b_1 & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ a_{n1} & b_n & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\det(A_2) = b_1 C_{12} + b_2 C_{22} + \cdots + b_n C_{n2}$$

$$A_j = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

ekspansi kolom ke j

$$\det(A_j) = b_1 C_{1j} + b_2 C_{2j} + \cdots + b_n C_{nj}$$

Perhatikan

$$\det(A_1) = b_1C_{11} + b_2C_{21} + \cdots + b_nC_{n1}$$

$$\det(A_2) = b_1C_{12} + b_2C_{22} + \cdots + b_nC_{n2}$$

$$\det(A_j) = \ldots.$$

Penurunan Aturan Cramer

A mempunyai inverse, solusi $Ax = b$ solusi tunggal **x**

$$\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b} = \frac{1}{\det(A)} adj(A)\mathbf{b}$$

$$\det(A_j) = b_1C_{1j} + b_2C_{2j} + \cdots + b_nC_{nj}$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & \cdots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \cdots & C_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{1n} & C_{2n} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} b_1C_{11} + b_2C_{21} + \ldots + b_nC_{n1} \\ b_1C_{12} + b_2C_{22} + \ldots + b_nC_{n2} \\ \vdots \\ b_1C_{1n} + b_2C_{2n} + \ldots + b_nC_{nn} \end{bmatrix}$$

Penurunan Aturan Cramer

A mempunyai inverse, solusi *Ax* = *b* solusi tunggal **x**

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} \det(A_1) \\ \det(A_2) \\ \vdots \\ \det(A_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \det(A_1)/\det(A) \\ \det(A_2)/\det(A) \\ \vdots \\ \det(A_n)/\det(A) \end{bmatrix}$$

$$x_j = \frac{\det(A_j)}{\det(A)}, j = 1,2,\ldots,n$$

Penurunan Aturan Cramer

A mempunyai inverse, solusi *A***x** = ***b*** solusi tunggal **x**

$$\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b} = \frac{1}{\det(A)} adj(A)\mathbf{b}$$

$$\det(A_j) = b_1C_{1j} + b_2C_{2j} + \cdots + b_nC_{nj}$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & \cdots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \cdots & C_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{1n} & C_{2n} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} b_1C_{11} + b_2C_{21} + \ldots + b_nC_{n1} \\ b_1C_{12} + b_2C_{22} + \ldots + b_nC_{n2} \\ \vdots \\ b_1C_{1n} + b_2C_{2n} + \ldots + b_nC_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} \det(A_1) \\ \det(A_2) \\ \vdots \\ \det(A_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \det(A_1)/\det(A) \\ \det(A_2)/\det(A) \\ \vdots \\ \det(A_n)/\det(A) \end{bmatrix}$$

$$x_j = \frac{\det(A_j)}{\det(A)}, j = 1,2,\ldots,n$$

Syarat Aturan Cramer bisa diterapkan

$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, (dengan $A_{n \times n}$)

$$x_j = \frac{\det(A_j)}{\det(A)} \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

Aturan Cramer dapat diterapkan jika: det(A) **tidak nol** (atau A **mempunyai inverse**).

Contoh :

$$x + y + 2z = 1$$
$$2x - y - z = 1$$
$$x - y + 2z = 3$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = -10$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\det(A_1) = -10 \qquad \det(A_2) = -20 \qquad \det(A_3) = 10$$

Solusi:

$$x = \det(A_1) / \det(A) = 1$$
$$y = \det(A_2) / \det(A) = 2$$
$$z = \det(A_3) / \det(A) = -1$$

Mana yang lebih efektif?

$$x + y + 2z = 1$$
$$2x - y - z = 1$$
$$x - y + 2z = 3$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Selesaikan SPL dengan menggunakan inverse matriks koefisien.

Dibanding dengan Aturan Cramer, mana yang lebih efisien?

Pemicu

- Suatu SPL dapat diselesaikan menggunakan Aturan Cramer, apakah dapat diselesaikan dengan inverse?

Penurunan Aturan Cramer

Turunkan Aturan Cramer dengan melengkapi kalimat-kalimat berikut in:

Diberikan A matriks *nxn.*

- M_{ij} adalah....
- C_{ij} adalah....
- $[C_{ij}]$ adalah ....
- $[C_{jj}]^T$ = adj(A) adalah.........
- A. adj(A) =....
- A^{-1} = ... (pergunakan hasil di atas)
- A**x** = **b**, Aj adalah ...., det(Aj) = ...(ekspansi kolom ke-j)
- A**x** = **b** dengan A memiliki inverse, maka solusinya tunggal yaitu....
- Substitusi A^{-1} dengan 1/det(A). Adj(A) dengan pergunakan det(Aj) , maka diperoleh.......
- x_j = ...

Kerjakan LK dengan seksama langkah demi angkah