



Nondeterministic Finite State Machines

Kuliah Teori Bahasa dan Automata
Program Studi Ilmu Komputer
Fasilkom UI

Prepared by:

Rahmad Mahendra

Revised by:

Maya Retno Ayu S

Suryana Setiawan

Definisi Formal Nondeterministic FSM (DFSM)

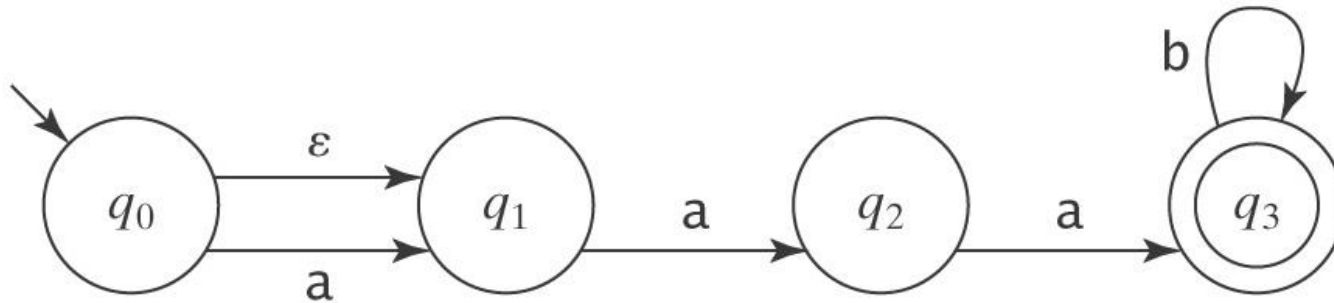
Nondeterministic FSM M adalah kuintupel $(K, \Sigma, \Delta, s, A)$ dengan:

- K adalah himpunan berhingga status-status.
- Σ : alfabet input
- $s \in K$, adalah status mulai (*start state*)
- $A \subseteq K$, adalah himpunan status menerima (*accepting states*)
- Δ : **relasi transisi** yang merupakan subset dari $(K \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\})) \times K$
Setiap elemen Δ berisikan pasangan (status, simbol masukan atau ε), serta satu status baru.

Nondeterminisme dengan NDFSM

- Pada setiap konfigurasi
 - DFSA memiliki **tepat satu pilihan transisi** selama masih ada simbol masukan, tetapi
 - NDFSA bisa **0, 1, atau lebih kemungkinan pilihan transisi**.
 - Jika 0 pilihan, maka NDFSA halt walau input belum habis.
 - NDFSA memungkinkan pendefinisian transisi tanpa membaca simbol input (**transisi ϵ**) .
 - Jika terdapat **transisi ϵ** sebagai self-loop dapat menyebabkan mesin tidak pernah halt!
- Hasil NDFSA mengikuti prinsip nondeterminisme:
 - Dari suatu konfigurasi yang sama komputasi dapat bercabang ke lebih dari satu konfigurasi yang berbeda dengan input yang sama atau tidak ada sama sekali walau input belum habis.

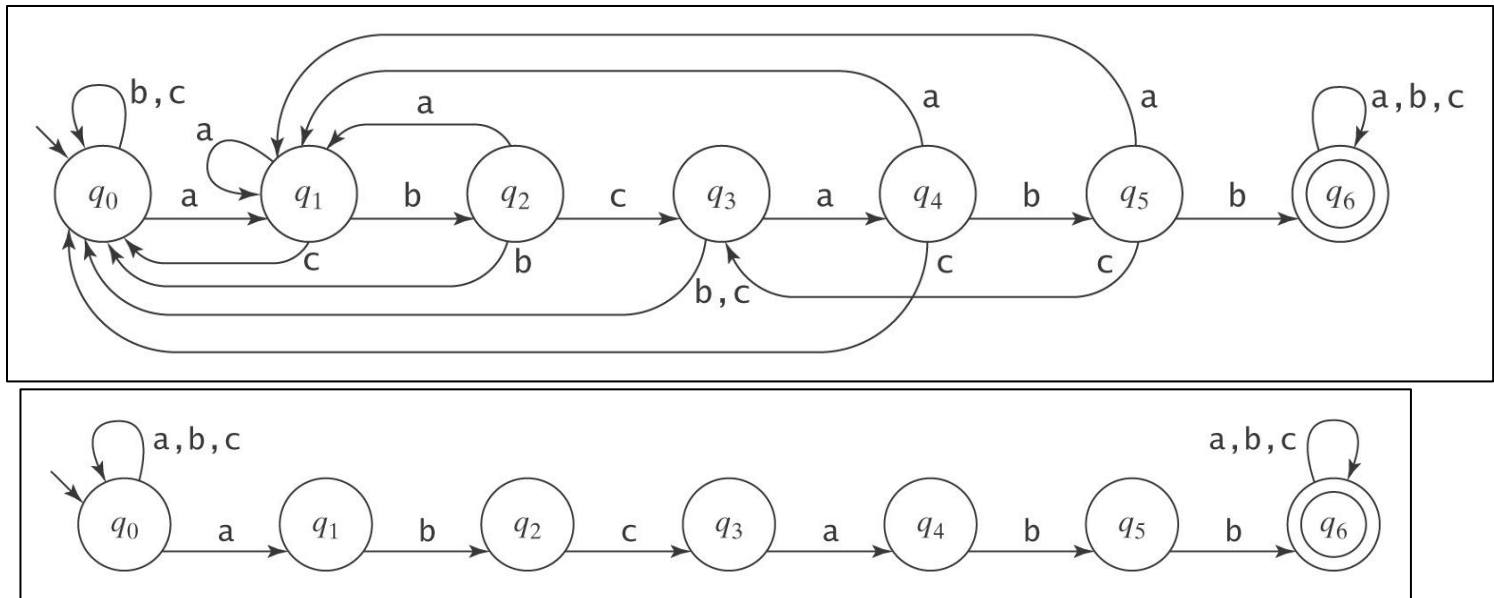
Contoh 3



- Mesin menerima aa atau aaa, kemudian diikuti sederetan symbol b dengan panjang 0 atau lebih.
- Input aaab akan menghasilkan dua pilihan konfigurasi berikutnya:
 $(q_0, aaab) \vdash^*_M (q_1, aaab) \vdash^*_M (q_2, aab) \vdash^*_M (q_3, ab)$ gagal
 $(q_0, aaab) \vdash^*_M (q_1, aab) \vdash^*_M (q_2, ab) \vdash^*_M (q_3, b) \vdash^*_M (q_3, \epsilon)$ sukses
- Pilihan pertama dengan transisi ϵ berakhir tanpa berhasil mencapai accepting configuration (q_3, ϵ) sementara pilihan kedua berhasil.
- Karena ada satu yang sukses maka mesin menerima string aaab.

Membandingkan DFSM dan NDFSM

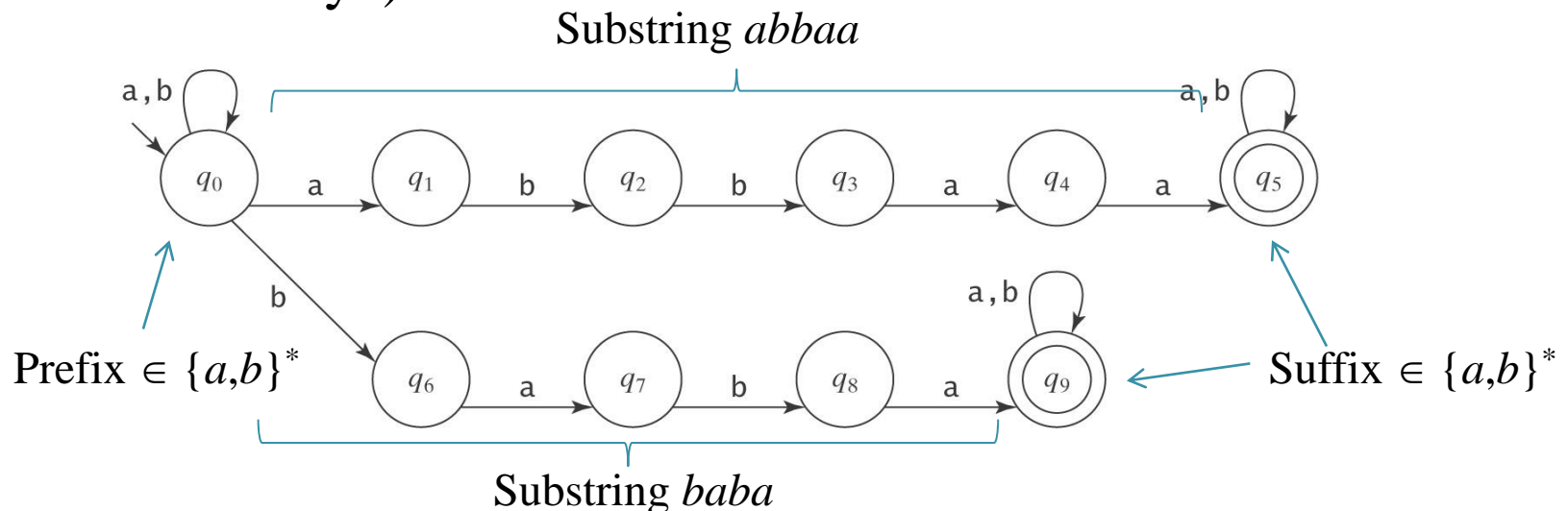
- $L = \{w \in \{a, b, c\}^* : \exists x, y \in \{a, b, c\}^* (w = xabcabby)\}$
- Dua FSM berbeda yang menerima L



- Rancangan kedua lebih intuitif (menggambarkan bahasa L) dibanding yang pertama tapi yang pertama lebih implementable.

Substring Searching

- Ilustrasi sebelumnya adalah contoh substring searching yang dengan NDFSM jadi lebih mudah dirancang.
- Dengan cara yang sama bisa dirancang substring searching lain, misalnya untuk mencari string yang berisi substring **abbaa** **atau** **baba** (salah satu atau keduanya)



DFSM vs NDFSM

- Perancangan NDFSM lebih bersifat intuitif (lebih mudah) dibanding DFSM.
- DFSM memungkinkan implementasi mesin real sementara NDFSM hanya bersifat simulatif (karena semua kemungkinan pilihan harus dicoba secara simultan).
- Pertanyaan: apakah mungkin merancang seintuitif NDFSM tetapi dapat diimplementasikan seperti DFSM?
- Jawab: mungkin!
- Dalam bagian selanjutnya akan dibahas teorema ekivalensi dan algoritma konversi NDFSM menjadi DFSM.
 - Perancangan dapat dilakukan di versi NDFSM kemudian dikonversi menjadi DFSM.

Teorema Ekuivalensi DFMS dan NDFMS

- **Teorema ekuivalensi:**
 - Untuk setiap DFMS M , terdapat NDFMS M' yang menerima bahasa yang diterima oleh M .
 - Untuk setiap NDFMS M , terdapat DFMS M' yang menerima bahasa yang diterima oleh M .
- Manfaat teorema ekuivalensi.
 - **Manfaat teoritis:** jaminan akan kesamaan lingkup bahasa yang dapat dikenali kedua versi mesin FSM (tidak ada Bahasa yang hanya dapat dikenali oleh salah satu saja sementara yang lain tidak).
 - **Manfaat praktis:** rancangan suatu FSM bisa dibuat secara nondeterministik, kemudian dicarikan padanannya yang deterministic.

DFSM \rightarrow NDFSM

- Pembuktian ekivalensi dengan menunjukkan setiap DFSM adalah juga NDFSM karena untuk setiap fungsi $((q,c),p) \in \delta$ maka juga $(q,c,p) \in \Delta$.
- Misalkan M adalah sebuah DFSM yang menerima (*accept*) bahasa L .
- M juga merupakan sebuah NDFSM yang tidak mengandung transisi ϵ dan seluruh relasi transisi merupakan fungsi (Fungsi transisi DFSM adalah bentuk khusus dari relasi transisi NDFSM)

NDFSM \rightarrow DFSM

- Pembuktian teorema adalah dengan menunjukkan adanya algoritma konversi NDFSM menjadi DFSM.
- Diberikan sebuah NDFSM $M = (K, \Sigma, \Delta, s, A)$ yang menerima (*accept*) bahasa L , terdapat DFSM yang ekuivalen yang juga menerima L .
- Kontruksi DFSM $M' = (K', \Sigma, \delta', s', A')$ di mana:
 - K' mengandung sebuah status untuk setiap elemen $\wp(K)$
 - $s' = eps(s)$
 - $A' = \{Q \subseteq K : Q \cap A \neq \emptyset\}$
 - $\delta'(Q, c) = \cup \{eps(p) : \exists q \in Q((q, c, p) \in \Delta)\}$

Algoritma

Input: NDFSM $M = (K, \Sigma, \Delta, s, A)$

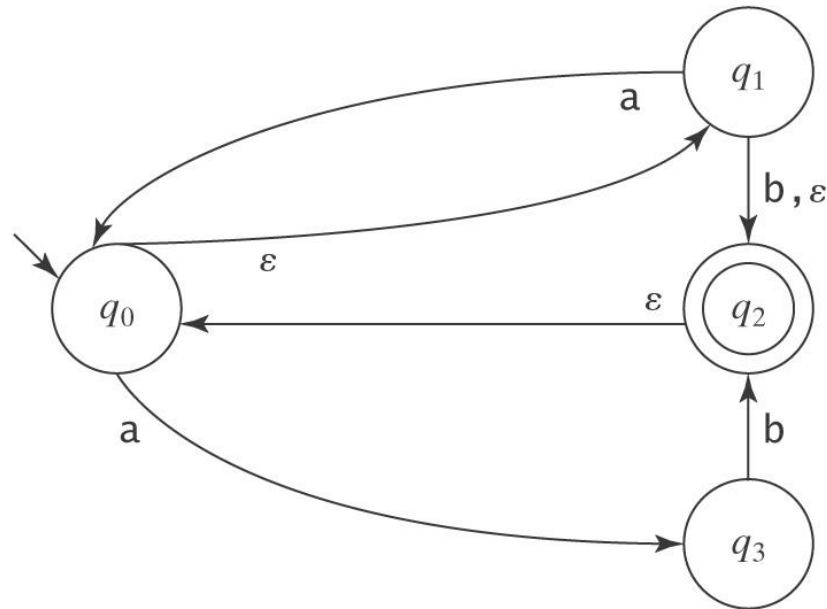
1. Untuk setiap *state* q pada K : tentukan $eps(q)$
2. $s' = eps(s)$
3. Tentukan δ' (lihat halaman selanjutnya pada slide ini)
4. $K' = \text{state aktif}$
5. $A' = \{Q \subseteq K : Q \cap A \neq \emptyset\}$

Output: DFISM $M' = (K', \Sigma, \delta', s', A')$

Fungsi $\text{eps}(q_i)$

- Himpunan status yang reachable dari q_i akibat transisi ε .
 - Reachability: Jika mesin mencapai q_i , tanpa membaca symbol input mesin tapi melalui satu atau beberapa transisi ε , mesin dapat berada di sejumlah kemungkinan status: $\{q_j, q_k, \dots\}$ (termasuk juga yang tidak langsung dari q_i).
 - Jika konfigurasi saat ini adalah (q_i, w_i) , yield berikut berangkat dari setiap status di dalam kelompok tersebut.
- Secara formal didefinisikan sbb.
$$\text{eps}(q) = \{p \in K : (q, w) \vdash^*_M (p, w)\}$$
- Secara algoritma:
 - fungsi $\text{eps}(q)$:
 $\text{result} = \{q\}$
 Untuk setiap $p \in \text{result}$, dan terdapat transisi (p, ε, r) ,
 $\text{result} += \{r\}$
 Return result

Contoh



$$eps(q_0) = \{q_0, q_1, q_2\}$$

$$eps(q_1) = \{q_0, q_1, q_2\}$$

$$eps(q_2) = \{q_0, q_1, q_2\}$$

$$eps(q_3) = \{q_3\}$$

Algoritma Penentuan δ'

3.1 var stateAktif = $\{s'\}$

3.2 var $\delta' = \emptyset$

3.3 while (masih ada $Q \in \text{stateAktif}$ yang belum ditentukan fungsi δ' -nya) do:

3.3.1 for (setiap simbol $c \in \Sigma$) do:

var stateBaru = \emptyset

3.3.1.1 for (setiap *state* $q \in Q$) do:

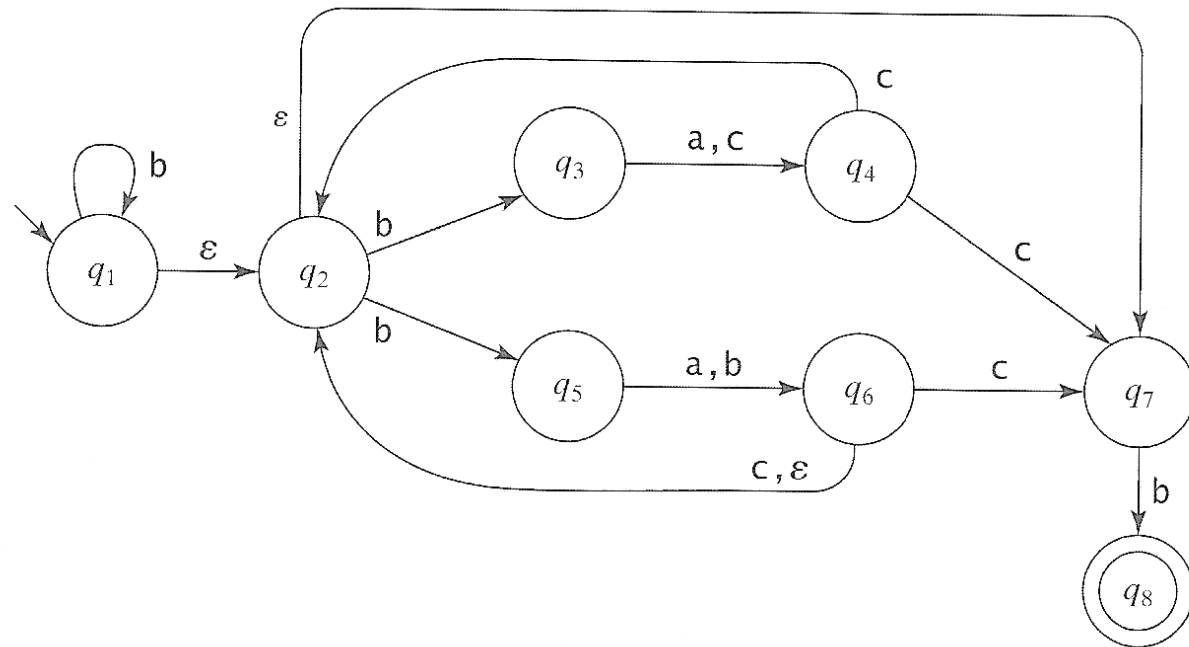
for (setiap *state* $p \in K$, sehingga $((q, c), p) \in \Delta$) do:

StateBaru = stateBaru $\cup \text{eps}(p)$

3.3.1.2 Tambahkan transisi $((Q, c), \text{stateBaru})$ ke δ'

3.3.2 stateAktif = stateAktif $\cup \{\text{stateBaru}\}$

Contoh



- Tentukan *DFSM* yang ekuivalen dengan *NDFSM* di atas

Contoh

1. Untuk setiap *state* q pada K : Tentukan $eps(q)$

- $eps(q_1) = \{q_1, q_2, q_7\}$
- $eps(q_2) = \{q_2, q_7\}$
- $eps(q_3) = \{q_3\}$
- $eps(q_4) = \{q_4\}$
- $eps(q_5) = \{q_5\}$
- $eps(q_6) = \{q_2, q_6, q_7\}$
- $eps(q_7) = \{q_7\}$
- $eps(q_8) = \{q_8\}$

2. Tentukan start state

$$s' = eps(s) = eps(q_1) = \{q_1, q_2, q_7\}$$

Contoh

Tentukan transisi δ'

3.1 stateAktif = $\{\{q_1, q_2, q_7\}\}$

3.3 Menghasilkan δ' dari $Q = \{q_1, q_2, q_7\}$

$((\{q_1, q_2, q_7\}, a), \emptyset)$

$((\{q_1, q_2, q_7\}, b), \{q_1, q_2, q_3, q_5, q_7, q_8\})$

$((\{q_1, q_2, q_7\}, c), \emptyset)$

stateAktif = $\{\{q_1, q_2, q_7\}, \emptyset, \{q_1, q_2, q_3, q_5, q_7, q_8\}\}$

Tinjau transisi dari *state* \emptyset

$((\emptyset, a), \emptyset)$

$((\emptyset, b), \emptyset)$

$((\emptyset, c), \emptyset)$

Contoh

3. Tentukan δ' (lanjutan)

State aktif = $\{\{q_1, q_2, q_7\}, \emptyset, \{q_1, q_2, q_3, q_5, q_7, q_8\}\}$

Tinjau transisi dari *state* $\{q_1, q_2, q_3, q_5, q_7, q_8\}$

$((\{q_1, q_2, q_3, q_5, q_7, q_8\}, a), \{q_2, q_4, q_6, q_7\})$

$((\{q_1, q_2, q_3, q_5, q_7, q_8\}, b), \{q_1, q_2, q_3, q_5, q_6, q_7, q_8\})$

$((\{q_1, q_2, q_3, q_5, q_7, q_8\}, c), \{q_4\})$

State aktif = $\{\{q_1, q_2, q_7\}, \emptyset, \{q_1, q_2, q_3, q_5, q_7, q_8\}, \{q_2, q_4, q_6, q_7\}, \{q_1, q_2, q_3, q_5, q_6, q_7, q_8\}, \{q_4\}\}$

Tinjau transisi dari *state* \emptyset

$((\{q_2, q_4, q_6, q_7\}, a), \emptyset)$

$((\{q_2, q_4, q_6, q_7\}, b), \{q_3, q_5, q_8\})$

$((\{q_2, q_4, q_6, q_7\}, c), \{q_2, q_7\})$

Contoh

3. Tentukan δ' (lanjutan)

State aktif = $\{\{q_1, q_2, q_7\}, \emptyset, \{q_1, q_2, q_3, q_5, q_7, q_8\}, \{q_2, q_4, q_6, q_7\}, \{q_1, q_2, q_3, q_5, q_6, q_7, q_8\}, \{q_4\}, \{q_3, q_5, q_8\}, \{q_2, q_7\}\}$

Tinjau transisi dari *state* $\{q_1, q_2, q_3, q_5, q_6, q_7, q_8\}$

$((\{q_1, q_2, q_3, q_5, q_6, q_7, q_8\}, a), \{q_2, q_4, q_6, q_7\})$

$((\{q_1, q_2, q_3, q_5, q_6, q_7, q_8\}, b), \{q_1, q_2, q_3, q_5, q_6, q_7, q_8\})$

$((\{q_1, q_2, q_3, q_5, q_6, q_7, q_8\}, c), \{q_2, q_4, q_7\})$

State aktif = $\{\{q_1, q_2, q_7\}, \emptyset, \{q_1, q_2, q_3, q_5, q_7, q_8\}, \{q_2, q_4, q_6, q_7\}, \{q_1, q_2, q_3, q_5, q_6, q_7, q_8\}, \{q_4\}, \{q_3, q_5, q_8\}, \{q_2, q_7\}, \{q_2, q_4, q_7\}\}$

Tinjau transisi dari *state* $\{q_4\}$

$((\{q_4\}, a), \emptyset)$

$((\{q_4\}, b), \emptyset)$

$((\{q_4\}, c), \{q_2, q_7\})$

Contoh

3. Tentukan δ' (lanjutan)

State aktif = $\{\{q_1, q_2, q_7\}, \emptyset, \{q_1, q_2, q_3, q_5, q_7, q_8\}, \{q_2, q_4, q_6, q_7\}, \{q_1, q_2, q_3, q_5, q_6, q_7, q_8\}, \{q_4\}, \{q_3, q_5, q_8\}, \{q_2, q_7\}, \{q_2, q_4, q_7\}\}$

Tinjau transisi dari *state* $\{q_3, q_5, q_8\}$

$((\{q_3, q_5, q_8\}, a), \{q_2, q_4, q_6, q_7\})$

$((\{q_3, q_5, q_8\}, b), \{q_2, q_6, q_7\})$

$((\{q_3, q_5, q_8\}, c), \{q_4\})$

State aktif = $\{\{q_1, q_2, q_7\}, \emptyset, \{q_1, q_2, q_3, q_5, q_7, q_8\}, \{q_2, q_4, q_6, q_7\}, \{q_1, q_2, q_3, q_5, q_6, q_7, q_8\}, \{q_4\}, \{q_3, q_5, q_8\}, \{q_2, q_7\}, \{q_2, q_4, q_7\}, \{q_2, q_6, q_7\}\}$

Tinjau transisi dari *state* $\{q_2, q_7\}$

$((\{q_2, q_7\}, a), \emptyset)$

$((\{q_2, q_7\}, b), \{q_3, q_5, q_8\})$

$((\{q_2, q_7\}, c), \emptyset)$

Contoh

State aktif = $\{\{q_1, q_2, q_7\}, \emptyset, \{q_1, q_2, q_3, q_5, q_7, q_8\}, \{q_2, q_4, q_6, q_7\}, \{q_1, q_2, q_3, q_5, q_6, q_7, q_8\}, \{q_4\}, \{q_3, q_5, q_8\}, \{q_2, q_7\}, \{q_2, q_4, q_7\}, \{q_2, q_6, q_7\}\}$

Tinjau transisi dari *state* $\{q_2, q_4, q_7\}$

$((\{q_2, q_4, q_7\}, a), \{\emptyset\})$

$((\{q_2, q_4, q_7\}, b), \{q_3, q_5, q_8\})$

$((\{q_2, q_4, q_7\}, c), \{q_2, q_7\})$

State aktif = $\{\{q_1, q_2, q_7\}, \emptyset, \{q_1, q_2, q_3, q_5, q_7, q_8\}, \{q_2, q_4, q_6, q_7\}, \{q_1, q_2, q_3, q_5, q_6, q_7, q_8\}, \{q_4\}, \{q_3, q_5, q_8\}, \{q_2, q_7\}, \{q_2, q_4, q_7\}, \{q_2, q_6, q_7\}\}$

Tinjau transisi dari *state* $\{q_2, q_6, q_7\}$

$((\{q_2, q_6, q_7\}, a), \emptyset)$

$((\{q_2, q_6, q_7\}, b), \{q_3, q_5, q_8\})$

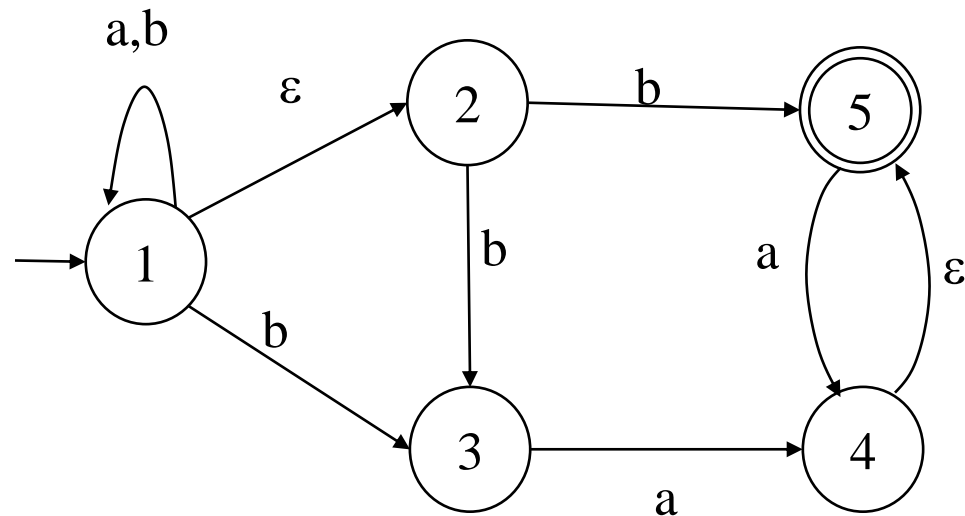
$((\{q_2, q_6, q_7\}, c), \{q_2, q_7\})$

Contoh

4. $K' = \{\{q_1, q_2, q_7\}, \emptyset, \{q_1, q_2, q_3, q_5, q_7, q_8\}, \{q_2, q_4, q_6, q_7\}, \{q_1, q_2, q_3, q_5, q_6, q_7, q_8\}, \{q_4\}, \{q_3, q_5, q_8\}, \{q_2, q_7\}, \{q_2, q_4, q_7\}, \{q_2, q_6, q_7\}\}$
5. $A' = \{\{q_1, q_2, q_3, q_5, q_7, q_8\}, \{q_1, q_2, q_3, q_5, q_6, q_7, q_8\}, \{q_3, q_5, q_8\}\}$

Contoh 2

- Tentukan DFSM yang ekuivalen dengan NDFSM di bawah ini:



Contoh 2

1. Untuk setiap *state* q pada K , tentukan $eps(q)$

q	$eps(q)$
1	$\{1,2\}$
2	$\{2\}$
3	$\{3\}$
4	$\{4,5\}$
5	$\{5\}$

2. Tentukan start state

$$s' = eps(s) = eps(1) = \{1,2\}$$

Contoh 2

3. Tentukan transisi δ'

State aktif = $s' = \{1,2\}$

Tinjau transisi dari state $\{1,2\}$

$((\{1,2\}, a), \{1,2\})$

$((\{1,2\}, b), \{1,2,3,5\})$

State aktif = $(\{1,2\}, \{1,2,3,5\})$

Tinjau transisi dari state $\{1,2,3,5\}$

$((\{1,2,3,5\}, a), \{1,2,4,5\})$

$((\{1,2,3,5\}, b), \{1,2,3,5\})$

State aktif = $(\{1,2\}, \{1,2,3,5\}, \{1,2,4,5\})$

Tinjau transisi dari state $\{1,2,4,5\}$

$((\{1,2,4,5\}, a), \{1,2,4,5\})$

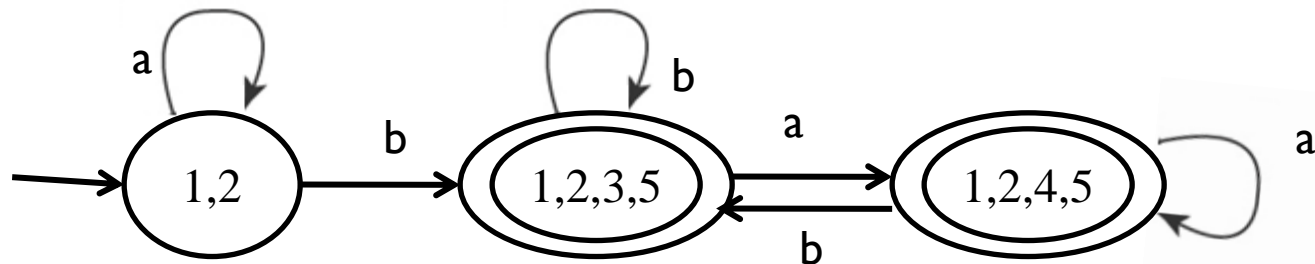
$((\{1,2,3,5\}, b), \{1,2,3,5\})$

4. Tentukan state aktif K'

$K' = (\{1,2\}, \{1,2,3,5\}, \{1,2,4,5\})$

5. Tentukan accepting state A'

$A' = (\{1,2,3,5\}, \{1,2,4,5\})$

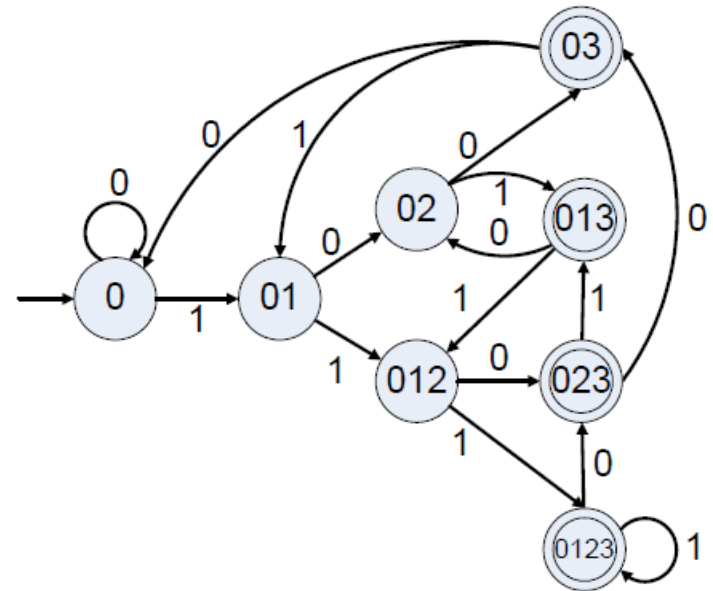
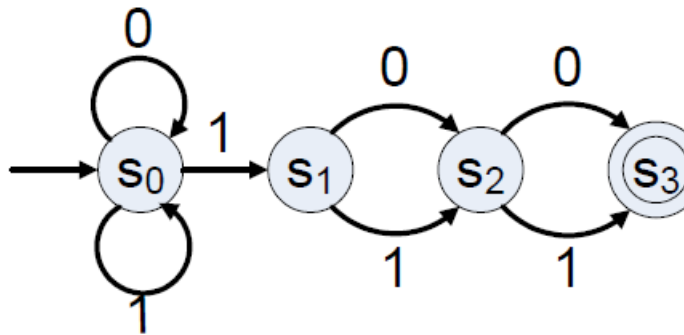


Soal Latihan 1

Diberikan sebuah NDFSM $M = (K, \Sigma, \Delta, s, A)$ dan terdapat DFMS ekuivalen $M' = (K', \Sigma, \delta', s', A')$

- Jika M memiliki jumlah *state* sebanyak k
 - Berapa maksimum jumlah *state* pada M' ?
Jawab: 2^k (Mengapa?)
 - Berapa minimum jumlah *state* pada M' ?
- Karakteristik M seperti apa sehingga M' ekuivalen tidak memiliki *dead state*?

Soal Latihan2

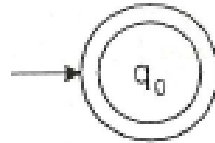


- Tunjukkan bahwa NDFSM dan DFSM pada pasangan gambar di atas ekuivalen

Soal Latihan 3

- Carilah DFSM yang ekuivalen dengan masing-masing NDFSM di bawah ini

(i) $\Sigma = \{a, b\}$



(ii) $\Sigma = \{p, r\}$

