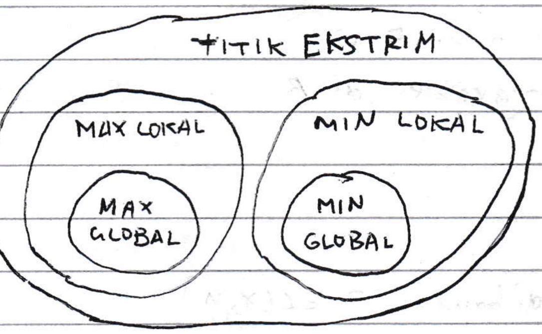
12.8

Maxima dan minima



→ definisi

↳ max global pada p_0 jika utk semua p, $f(p_0) \geq f(p)$

↳ min global pada p_0 jika utk semua p, $f(p_0) \leq f(p)$

→ Teorema keberadaan max-min

↳ jika f kontinu di set tertutup S maka f memiliki max global dan min global di S

→ jika $f(p_0)$ adalah nilai ekstrim, maka p_0 adalah titik kritis ~~stastioner~~

p_0 adalah < titik pembatas / titik stasioner / titik singuler

→ titik stasioner → $\nabla f(x_0, y_0) = 0$

→ syarat nilai ekstrim

misal $D = f_{xx}(x_0, y_0) f_{yy}(x_0, y_0) - f^2_{xy}(x_0 y_0)$

1. jika $D < 0$ dan $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$ → (x_0, y_0) adalah maksimum lokal
2. jika $D < 0$ dan $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$ → (x_0, y_0) adalah minimum lokal
3. jika $D > 0$ → (x_0, y_0) adalah titik pelana
4. jika $D = 0$, tes inkonklusif

12.9

Pengali lagrange

memaksimalka / meminimalkan $f(p)$ dengan batas $g(p) = 0$ maka solusinya adalah penyelesaian dari persamaan sistem:

$$\nabla f(p) = \lambda \nabla g(p) \text{ dan } g(p) = 0$$

13.1

Double Integral

↳ definisi jika f fungsi dua variabel di set tertutup R.
jika $\lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\bar{x}_k, \bar{y}_k)\, \Delta A_k$ ada maka f integrable di R

dengan $\lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\bar{x}_k, \bar{y}_k)\, \Delta A_k = \iint_R f(x,y)\, dA$

↳ Double Integral adalah representasi volume dibawah $z = f(x,y)$

↳ f integrable di R jika hanya diskontinu di ~~titik~~ kurva yang jumlahnya berhingga (termasuk 0) → Teorema Integrability

↳ Sifat Double Integral
① linear → (± dan perkalian konstanta)
② $\iint_R f(x,y)\, dA = \iint_{R_1} f(x,y)\, dA + \iint_{R_2} f(x,y)\, dA$
③ jika $f(x,y) \geq g(x,y)$ di semua (x,y) maka
$\iint_R f(x,y)\, dA \geq \iint_R g(x,y)\, dA$

13.2

Integral teriterasi

↳ intinya dikerjakan 2 kali, 1 untuk dx, 1 untuk dy atau sebaliknya

$$\iint_R f(x,y)\, dA = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\, dx \right) dy$$

$$R = \{ (x,y) \mid a \leq x \leq b ,\ c \leq y \leq d \}$$

13.3 jika R Bukan Persegi Panjang

↳ S adalah x simple jika y dibatasi konstanta → $S = \{(x,y) \mid f(y) \leq x \leq g(y),\ c \leq y \leq d\}$
↳ S adalah y simple jika x dibatasi konstanta → $S = \{(x,y) \mid f(x) \leq y \leq g(x),\ a \leq x \leq b\}$

f dan g adalah fungsi sembarang, ~~dn~~ cara mengevaluasinya sama

$\boxed{\text{x simple}}$
$$\iint_S f(x,y)\, dA = \int_c^d \int_{f(y)}^{g(y)} f(x,y)\, dx\, dy$$

$\boxed{\text{y simple}}$
$$\iint_S f(x,y)\, dA = \int_a^b \int_{f(x)}^{g(x)} f(x,y)\, dy\, dx$$

Contoh Soal:

12.8

1. Carilah ~~titik~~ kritis $f(x,y) = x^2 + y^2$.

$f_x(x,y) = 0 \rightarrow 2x = 0 \rightarrow x = 0$
$f_y(x,y) = 0 \rightarrow 2y = 0 \rightarrow y = 0$

maka titik kritisnya $(0,0)$

$D = f_{xx} \cdot f_{yy} - f^2_{xy}$

$\left.\begin{array}{l} f_{xx} = 2 \\ f_{yy} = 2 \end{array}\right\} D = 4 - 0 = 4$

$f_{xy} = 0$

$D > 0$ dan $f_{xx} > 0$
maka titik $(0,0)$ adalah minimum

12.9 Cari nilai ekstrim $4(x+y+z)$ saat $xyz = 125$

$f(x,y,z) =$ $\qquad g(x,y,z)$
$4x + 4y + 4z$, $\quad g = xyz = 125$

$\nabla f(x,y,z) \rightarrow f_x(x,y,z) = 4$
$f_y(x,y,z) = 4$
$f_z(x,y,z) = 4$

$\nabla g(x,y,z) \rightarrow g_x(x,y,z) = yz$
$g_y(x,y,z) = xz$
$g_z(x,y,z) = xy$

1. $\lambda yz = 4$
2. $\lambda xz = 4$
3. $\lambda xy = 4$
4. $xyz = 125$

$yz = xz \rightarrow y = x$
$xz = xy \rightarrow z = y = x$

$x = y = z = \sqrt[3]{125} = 5$

13.2

$$\int_1^2 \int_1^2 x^2 + y^2 \, dx\, dy \rightarrow \int_1^2 \left(\tfrac{1}{3}x^3 + y^2 x\right)\Big]_1^2 dy$$

$$= \int_1^2 \frac{7}{3} + y^2 \, dy$$

$$= \frac{7}{3}y + \frac{1}{3}y^3 \Big]_1^2 = \frac{7}{3} + \frac{7}{3} = \frac{14}{3}$$

13.3

$$\int_1^2 \int_{-x}^{x} x^2 + y^2 \, dy\, dx = \int_1^2 \left(x^2 y + \tfrac{1}{3}y^3\right)\Big]_{-x}^{x} dx = \int_1^2 2x^3 + \frac{2}{3}x^3 dx = \int_1^2 \frac{8}{3}x^3 dx$$

$$= \frac{8}{12}x^4 \Big]_1^2 = \frac{2}{3}(16-1) = \frac{30}{3} = 10$$