PR 1 DAA

ALDEN LUTHFI
2206028932

(1.) MISTERI(n) :

```
1. if n <= 1 :
2.     return false
3. for i from 2 to ⌊√n⌋ :
4.     if n % i == 0 :
5.         return False
6. return True
```

(a) (i) MISTERI(15) = False

eksekusi baris (4.) : 2 kali

① 15 % 2 == 0 ✗

② 15 % 3 == 0 ✓

↳ False

(ii) MISTERI(17) = True

eksekusi baris (4.) : 3 kali

① 17 % 2 == 0 ✗

② 17 % 3 == 0 ✗

③ 17 % 4 == 0 ✗

↳ True

(b) MISTERI(n) akan mengeluarkan True jika n prima dan false jika n adalah bilangan komposit (tidak prima)

(c) Penyataan yang perlu dibuktikan : "fungsi MISTERI(n) akan mengeluarkan True jika n prima dan False jika n bilangan komposit (tidak prima)"

(i) PEMBUKTIAN "fungsi MISTERI(n) akan mengeluarkan True jika n prima" (asumsi n selalu prima di kasus ini)

loop invariant : $\forall k \, (2 \le k < i \rightarrow n \% k \neq 0)$

- Initialization

  Sebelum iterasi pertama, nilai $i=2$ akan membuat invarian $\forall k (2 \leq k < i \rightarrow n \% k \neq 0)$ selalu bernilai benar karena tidak ada nilai k yang memenuhi $2 \leq k < 2$

- Maintenance

  untuk iterasi $i=j$, $n \% j \neq 0$ karena n prima, sehingga saat iterasi $i = j+1$, invarian $\forall k (2 \leq k < i \rightarrow n \% k \neq 0)$ akan selalu bernilai benar.

- Termination

  saat loop selesai, $i = \lfloor \sqrt{n} \rfloor + 1$ sehingga $\forall k (2 \leq k < \lfloor \sqrt{n} \rfloor \rightarrow n \% k \neq 0)$ dan baris (6.) akan dieksekusi

$\therefore$ TERBUKTI jika n prima, loop akan selalu selesai dan fungsi akan mengeluarkan True

(ii) PEMBUKTIAN "fungsi MISTERI(n) akan mengeluarkan False jika n bilangan komposit (tidak prima)" (di kasus ini, n tidak prima)

invarian: $i \leq \lfloor \sqrt{n} \rfloor$

- Initialization

  $i \leq \lfloor \sqrt{n}$ akan bernilai benar karena $i=2$ saat iterasi pertama dan 4 adalah bilangan komposit terkecil dan $2 \leq \lfloor \sqrt{4} \rfloor$ sehingga $i \leq \lfloor \sqrt{n} \rfloor$ akan selalu bernilai benar

- maintenance

  n bilangan komposit sehingga ada k, $2 \leq k \leq \lfloor \sqrt{n} \rfloor$ sehingga $n \% k = 0$ ~~jadi~~ sehingga $i \leq \lfloor \sqrt{n} \rfloor$ akan selalu benar di setiap iterasi

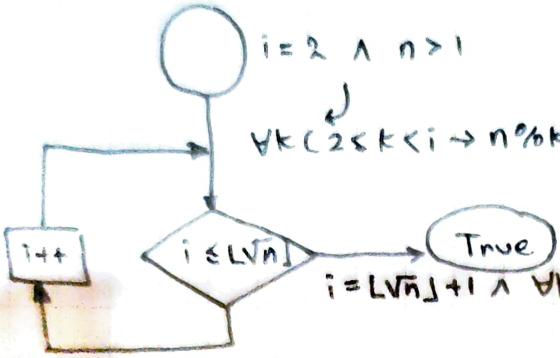
- Termination

  loop berhenti ketika $n \% i = 0$. $i \leq \lfloor \sqrt{n} \rfloor$ dan $n \% i = 0$ mengimplikasikan n bilangan komposit dan baris (5.) akan dieksekusi

$\therefore$ TERBUKTI fungsi MISTERI(n) akan selalu mengeluarkan False jika n komposit

BAGAN :

(i) n prima



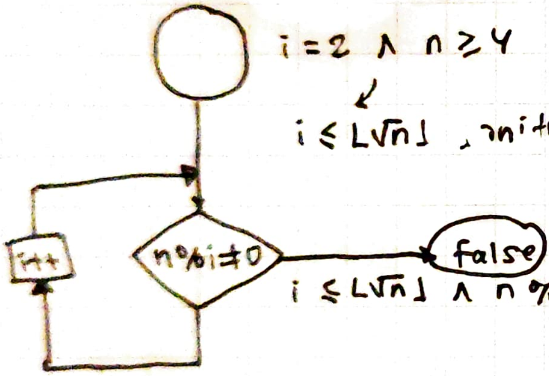
$i = 2 \land n > 1$

$\forall k\,(2 \leq k < i \rightarrow n \% k \neq 0)$, initialization

$i = \lfloor\sqrt{n}\rfloor + 1 \land \forall k\,(2 \leq k < i \rightarrow n \% k \neq 0) \rightarrow n$ prima

$\forall k\,(2 \leq k < i \rightarrow n \% i \neq 0)$, maintenance

(ii) n bukan prima



$i = 2 \land n \geq 4$

$i \leq \lfloor\sqrt{n}\rfloor$, initialization

$i \leq \lfloor\sqrt{n}\rfloor \land n \% i = 0 \rightarrow n$ bukan prima

$i \leq \lfloor\sqrt{n}\rfloor$, maintenance

$\therefore$ dari (i) dan (ii) TERBUKTI bahwa MISTERI(n) akan mengeluarkan False jika dan hanya jika n bukan prima DAN mengeluarkan True jika dan hanya jika n prima

(2) Loop Invariant : Sum = jumlah semua bilangan dari indeks 1 s/d i-1
($Sum = \sum_{k=1}^{i-1} A[k]$)

- Initialization
  $A[1..0] = [\,]$ sehingga $Sum = 0$ bernilai benar

- Maintenance

  Saat iterasi ke-j , sum = $\sum_{k=1}^{j-1} A[k]$ akan ditambakan $A[j]$
  sehingga saat iterasi ke-j+1 , sum = $\sum_{k=1}^{j-1} A[k] + A[j] = \sum_{k=1}^{(j+1)-1} A[k]$
  maka invarian benar

- ~~Saat~~ Termination

  Saat loop berakhir $i = n+1$ dan sum = $\sum_{k=1}^{n} A[k]$ mengimplikasikan
  sum menjumlahkan semua agka di array dari indeks 1 s/d n

$\therefore$ TERBUKTI SUM-ARRAY(A,n) menjumlahkan semua angka di array dari indeks 1 s/d n

3. (a) $\text{MISTERI2}(n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{i} j! = n! + 2.(n-1)! + \ldots + n.1! = \sum_{i=1}^{n} i.(n-i+1)!$

(SPOILER!)

(b)

LINE	T(n)
1	C_1
2	$(C_1+C_4)(n+1) + C_2 n$
3	$C_1 n$
4	$\sum_{i=1}^{n} (C_1+C_4)(i+1) + C_2 i = \frac{n(n+1)}{2} C_2 + \frac{n(n+3)}{2}(C_1+C_4)$
5	$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{i} (C_1+C_3) = \frac{n(n+1)}{2}(C_1+C_3)$
6	$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{i} (C_1+C_2) = \frac{n(n+1)}{2}(C_1+C_2)$
7	$0 \quad = 0$

$$\text{SUM} = C_1 + nC_1 + nC_4 + C_1 + C_4 + nC_2 + \frac{n^2 C_2}{2} + \frac{n}{2} C_2 + \frac{n^2}{2} C_1 + \frac{3n}{2} C_1$$
$$+ \frac{n^2}{2} C_4 + \frac{3n}{2} C_4 + \frac{n^2 C_1}{2} + \frac{nC_1}{2} + \frac{n^2}{2} C_3 + \frac{nC_3}{2} + \frac{n^2}{2} C_1 + \frac{nC_1}{2} + \frac{n^2 C_2}{2} + \frac{nC_2}{2}$$

$T(n) \approx An^2 + Bn + C$

(c) $T(n) = \Theta(n^2)$ karena bisa diambil ~~[illegible]~~ ~~[illegible]~~
$C_1 = \min(A-1, 1)$ dan $C_2 = A+1$ dan $n_0 = 10^4$ ~~[illegible]~~

sehingga $\forall_{n > n_0} \left(C_1 n^2 \leq T(n) \leq C_2 n^2 \right)$

(d)

```
MISTERI3(n)
  x = 0
  y = 1
  for i from 1 to n :
      y = y * i
      x = x + y * (n-i+1)
  return x
```

	T(n)
x = 0	C_1
y = 1	C_1
for i from 1 to n :	$(C_1+C_4)(n+1) + C_2 n$
y = y * i	$(C_1+C_3)n$
x = x + y * (n-i+1)	$(C_1 + 3C_2 + C_3)n$
return x	0

$T(n) = An + B$
$= \Theta(n)$ karena alasan yang sama dgn (c)

4.) a) Worst Case : x tidak ada di A

LINE	T(n)
1	$(C_1+C_4)(n+1)+C_2 n$
2	$C_4 n$
3	0
4	0

$T(n) = An + B$

$= \Theta(n)$ karena alasan di 3d

b.) Best Case : x ada di indeks pertama

LINE	T(n)
1	$2(C_1+C_4)+C_2$
2	C_4
3	0
4	0

$T(n) = 2C_1 + C_2 + 3C_4 = A$

$= \Theta(1)$ karena alasan di 3d

c) kemungkinan x ada di indeks $i = \frac{1}{n}$

→ dari a) didapat T(n) jika x ada di indeks (n+1) (tidak ada di A sehingga iterasi n+1 kali)

$T(n) = An + B$ untuk x di indeks n+1

$= A(n-1) + B$ untuk x di indeks terakhir

$\vdots$

$= B$ untuk x di indeks pertama

$$\text{total} = \left(A\frac{n(n+1)}{2} + Bn\right)\frac{1}{n}$$

↳ kemungkinan muncul di indeks tersebut

$$T(n) = \frac{An + A}{2} + B$$

$$= Cn + D = \Theta(n)$$

5. a. AXIOMA 1 : $\lg(ab) = \lg(a) + \lg(b)$ ... (a1)

AXIOMA 2 : $\frac{n}{a} \leq n$, $a \geq 1$ ... (a2)

AXIOMA 3 : jika $n \leq m$ maka $\frac{n}{a} \leq m$, $a \geq 1$ ... (a3)

AXIOMA 4 : $\lfloor \lg(n+1) \rfloor \leq \lfloor \lg(n) + 1 \rfloor$, $n > 0$ ... (a4)

$= \lfloor \lg(n) \rfloor + 1$

BUKTI (a4) : misal $\lfloor \lg(n) \rfloor = k$, maka $\lfloor \lg(n+1) \rfloor$ bisa bernilai k atau $k+1$, sehingga

$\lfloor \lg(n+1) \rfloor \leq \lfloor \lg(n) \rfloor + 1$ benar karena

$k \leq k+1$ atau

$k+1 \leq k+1$

$\therefore$ keduanya benar

PEMBUKTIAN $\lg(n!) \leq \lfloor \lg(n) \rfloor !$ karena $\lg(n!) = O(\lfloor \lg(n) \rfloor !)$

DEFINISI : $O(g(n)) = \{ f(n) \mid \exists c \exists n_0 \forall_{n > n_0} (0 \leq f(n) \leq c g(n)) \}$

PERLU DIBUKTIKAN BAHWA ada $c > 0$ dan $n_0 > 0$ sehingga untuk semua $n > n_0$, $0 \leq f(n) \leq c g(n)$

BUKTI INDUKSI ($c = 1$ dan $n_0 = 32$)

$P(n) : 0 \leq \lg(n!) \leq \lfloor \lg(n) \rfloor !$

BASE CASE :

↳ $P(32) : 0 \leq 117,... \leq 120$ BENAR

INDUCTION STEP

ASUMSI $P(k) : 0 \leq \lg(k!) \leq \lfloor \lg(k) \rfloor !$ BENAR

$P(k+1) : 0 \leq \lg((k+1)!) \leq \lfloor \lg(k+1) \rfloor !$

$0 \leq \lg(k!) + \lg((k+1)) \leq \lfloor \lg(k+1) \rfloor !$ ... (a1)

$0 \leq \lg(k!) + \lg((k+1)) \leq (\lfloor \lg(k) \rfloor + 1)!$ ... (a4)

$0 \leq \lg(k!) + \lg((k+1)) \leq \lfloor \lg(k) \rfloor ! \, (\lfloor \lg(k) \rfloor + 1)$

$0 \leq \frac{\lg(k!) + \lg((k+1))}{(\lfloor \lg(k) \rfloor + 1)} \leq \lfloor \lg(k) \rfloor !$

$0 \leq \frac{\lg(k!)}{(\lfloor \lg(k) \rfloor + 1)} \leq \lfloor \lg(k) \rfloor ! - \frac{\lg(k+1)}{(\lfloor \lg(k) \rfloor + 1)} \leq \lfloor \lg(k) \rfloor !$ ... (a2) (a3)

BENAR

TERBUKTI $P(k+1)$ BENAR karena $P(k)$ BENAR

$\therefore$ TERBUKTI $\lg(n!) \le \lfloor \lg(n) \rfloor!$ BENAR karena $\lg(n!) = O(\lfloor \lg(n) \rfloor !)$ berdasarkan DEFINISI $O(\lfloor \lg(n) \rfloor !)$

(b) AXIOMA 1 : $f(n) = O(g(n)) \rightarrow g(n) = \Omega(f(n))$ ... (a1)

AXIOMA 2 : $f(n) = \Theta(g(n)) \leftrightarrow f(n) = O(g(n)) \land f(n) = \Omega(g(n))$ ... (a2)

PREMIS 1 : $f(n) = O(g(n))$

MAKA $g(n) = \Omega(f(n))$ ... (a1) ... (p1)

PREMIS 2 : $f(n) = \Theta(h(n))$

MAKA $f(n) = \Omega(h(n))$ ... (a2) ... (p2)

~~dari (p1) disimpulkan ada $c_1 > 0$ dan $n_{01} > 0$ sehingga untuk $n > n_{01}$ berlaku $0 \le c_1 g(n) \le f(n)$~~

→ dari (p2) disimpulkan ada $c_2 > 0$ dan $n_{02} > 0$ sehingga untuk semua $n > n_{02}$ berlaku $0 \le c_2 h(n) \le f(n)$ ... (p4)

→ dari (p1) disimpulkan ada $c_1 > 0$ dan $n_{01} > 0$ sehingga untuk semua $n > n_{01}$ berlaku $0 \le c_1 f(n) \le g(n)$ ... (p3)

→ dari (p3) dan (p4) bisa diambil $n_0 = \max(n_{01}, n_{02})$ sehingga berlaku $0 \le c_2 h(n) \le f(n)$ DAN $0 \le c_1 f(n) \le g(n)$ ... (p5) untuk semua $n > n_0$

→ dari (p5) karena berlaku $0 \le c_2 h(n) \le f(n)$ untuk $n > n_0$ maka berlaku juga $0 \le c_1 c_2 h(n) \le c_1 f(n)$ ... (p6)

→ dari (p5) dan (p6) diperoleh $0 \le c_1 c_2 h(n) \le c_1 f(n) \le g(n)$ maka $0 \le c_1 c_2 h(n) \le g(n)$, misal $c = c_1 c_2$ ... (p7)

→ dari (p7) karena ada $c > 0$ dan $n_0 > 0$ sehingga untuk semua $n > n_0$ $0 \le c\,h(n) \le g(n)$, dapat disimpulkan $g(n) = \Omega(h(n))$ Q.E.D.

(c.) SALAH BY COUNTEREXAMPLE

(i) misal $f(n) = 2$ dan $g(n) = 1$

(ii) $f(n) = O(g(n))$ karena ada $c = 2$ dan $n_0 = 0$ sehingga $\forall n > n_0 \ (0 \leq 1 \leq 2)$

(iii) namun $\lg(f(n)) \neq O(\lg(g(n))$ karena $0 \leq 1 \leq 0 \equiv F$

(d.) AKSIOMA : $f(n) = \Theta(g(n)) \leftrightarrow f(n) = O(g(n)) \wedge f(n) = \Omega(g(n))$

→ $k^3 \lg k = \Theta(n^3)$ maka $k^3 \lg k = O(n^3)$ ... (p1) dan $k^3 \lg k = \Omega(n^3)$ (p2)

→ dari (p1) dan (p2), ada c_1 dan n_{01} sehingga $\forall_{n > n_{01}} (0 \leq k^3 \lg k \leq c_1 n^3)$ (p3)
dan c_2 dan n_{02} sehingga $\forall_{n > n_{02}} (0 \leq c_2 n^3 \leq k^3 \lg k)$ ... (p4)

→ dari (p3), $\exists_{c_3} \exists_{n_{03}} \forall_{n > n_{03}} (0 \leq k^3 \leq k^3 \lg k \leq c_3 n^3)$ ... (p5) karena $\lg k \geq 1$
maka $k^3 = O(n^3)$

→ dari (p4) $\exists_{c_4} \exists_{n_{04}} \forall_{n > n_{04}} \left(0 \leq c_4 n^3 \leq \frac{c_2 n^3}{\lg k} \leq k^3\right)$ .. (p6) karena $\lg k \geq 1$

→ dari (p5) dan (p6) maka $k^3 = \Theta(n^3)$ ... (p7)

→ dari (p7), $\lg(k^3) = \Theta(\lg(n^3))$, maka $\lg(k) = \Theta(\lg(n))$ .. (p8)

→ dari (p8) maka $k^3 \lg k = \Theta(n^3)$ mengimplikasikan $k^3 = \Theta\left(\frac{n^3}{\lg k}\right) = \Theta\left(\frac{n^3}{\lg n}\right)$

Q.E.D

(e) asumsi $d \geq 0$, PROOF BY INDUCTION
$R(d)$: $a_d n^d + a_{(d-1)} n^{(d-1)} + \dots + a_0 = \Theta(n^d)$

BASE CASE :
$R(0)$: $a_0 = \Theta(1)$ BENAR karena ada $c_1 = \min(1, a_0)$ dan $c_2 = a_0 + 1$
dan $n_0 = 0$ sehingga $c_1 \leq a_0 \leq c_2$ untuk $n \geq n_0$

INDUCTION STEP

ASUMSI $R(k)$: $a_k n^k + \dots + a_0 = \Theta(n^k)$
maka ada $c_1 > 0$ dan $c_2 > 0$ dan $n_0 > 0$ sehingga

$$\forall n > n_0 \left(c_1 n^k \le a_k n^k + \dots + a_0 \le c_2 n^k \right)$$

maka $R(k+1)$ BENAR karena bisa diambil $c_1' = a_{(k+1)}$ dan
$c_2' = a_{(k+1)} + c_2$ dan $n_0' = n_0$ sehingga

$$\forall n > n_0' \left(c_1' n^{(k+1)} \le a_{(k+1)} n^{(k+1)} + \underbrace{\dots + a_0}_{>0} \le a_{(k+1)} n^{(k+1)} + c_2 n^k \le c_2' n^{(k+1)} \right)$$

maka $\forall n > n_0' \left(c_1' n^{(k+1)} \le a_{(k+1)} n^{(k+1)} + \dots + a_0 \le c_2' n^{(k+1)} \right)$

maka $R(k+1)$: $a_{(k+1)} n^{(k+1)} + \dots + a_0 = \Theta(n^{(k+1)})$ BENAR QED.

(f) $f(n) = \omega(g(n))$,

maka $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \infty$

$4^n = \omega(3^n n)$ karena $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{4^n}{3^n n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{4}{3}\right)^n \cdot \frac{1}{n}$

$$\stackrel{L}{=} \lim_{n\to\infty} \left(\frac{4}{3}\right)^n \ln\left(\frac{4}{3}\right) = \infty$$