Hasil kali titik, dan proyeksi ortogonal

DR. Kasiyah Junus, MSc

MODUL E-LEARNING ALJABAR LINIER
FAKULTAS ILMU KOMPUTER, UNIVERSITAS INDONESIA

- Pengenalan vektor
  - Jenis-jenis vektor
  - Vektor nol dan kesamaan vektor
  - Operasi pada vektor
    - Panjang vektor; aritmetika vektor
    - Hasil kali titik; proyeksi
    - Hasil kali silang
  - Persamaan garis dan bidang

4.5 Hasil kali titik dan proyeksi ortogonal

Sasaran pemelajaran

Setelah mempelajari modul ini, mahasiswa mampu:

- menjelaskan hasil kali titik dan sifat-sifatnya,
- menentukan panjang vektor, jarak antara dua vektor, sudut antara dua vektor, dan proyeksi ortogonal vektor

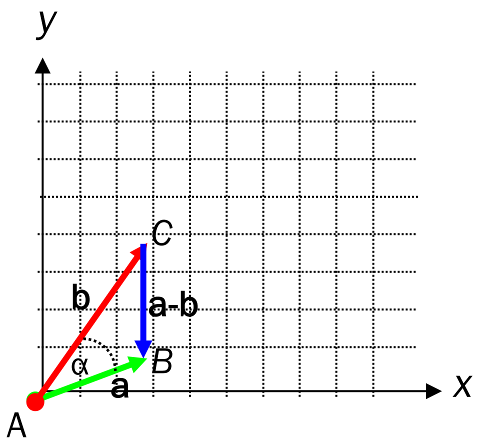
Hasil kali titik (*dot product*)

Definisi 4.4: Hasil kali titik

Jika α adalah sudut antara **a** dan **b**, maka didefinisikan

$$\mathbf{a}.\mathbf{b} = \begin{cases} = 0 \text{ jika } \mathbf{a} = \mathbf{0} \text{ atau } \mathbf{b} = \mathbf{0} \\ = \|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\|\cos\alpha \text{ dengan } \pi \geq \alpha \geq 0 \end{cases}$$

- titik pangkal dua vektor berimpit
- Jika panjang **a** dan **b** dan sudut antara keduanya diketahui maka **a.b** dapat ditentukan.



Jika panjang **a** dan **b** serta dan **a.b** diketahui, maka sudut antara **a** dan **b** dapat dihitung.

Latihan 1:

1. Hitunglah **a.b** jika
   - **a** = **0**
   - **a** = (1, 0) dan **b** = (0, 5)
   - **a** = (-1, 1) dan **b** = (5, 5)

2. Kapan **u.v** = 0?

3. Apa kesimpulan Anda?

Perhatikan: hasil kali titik dua vektor bisa bernilai 0 meskipun keduanya bukan vektor nol; kedua vektor saling tegak lurus

Definisi lain: hasil kali titik

Dapat ditunjukkan bahwa hasil kali titik dapat didefinisikan juga dengan rumus lain

Definisi 4.5: Hasil kali titik

Jika **a** dan **b** vektor-vektor di R^2, maka **a. b** = $a_1b_1 + a_2b_2$

Bukti:

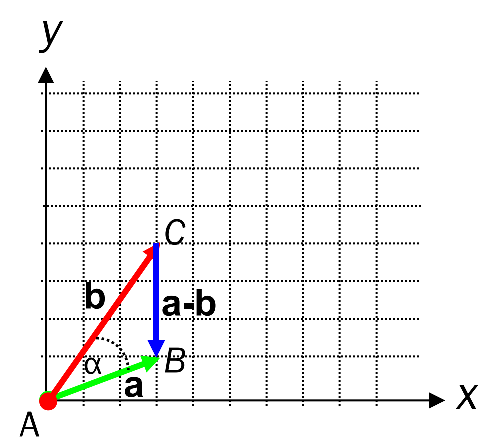
Berdasarkan rumus cosinus, $\|\mathbf{a}-\mathbf{b}\|^2 = \|\mathbf{a}\|^2 + \|\mathbf{b}\|^2 - 2\|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\|\cos\alpha$

Maka $\|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\|\cos\alpha = \frac{1}{2}\left(\|\mathbf{a}\|^2 + \|\mathbf{b}\|^2 - \|\mathbf{a}-\mathbf{b}\|^2\right)$

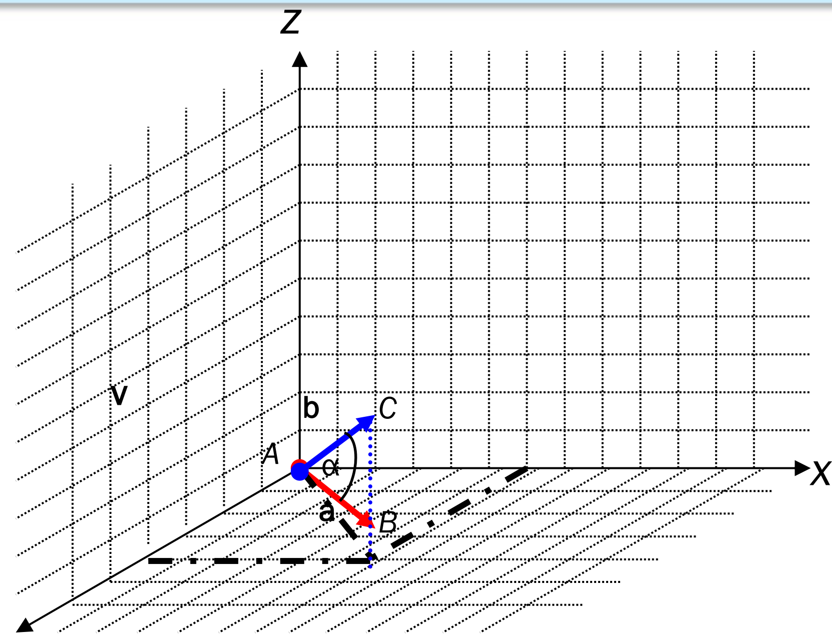
dengan $\|\mathbf{a}\|^2 = a_1{}^2 + a_2{}^2$ dan $\|\mathbf{b}\|^2 = b_1{}^2 + b_2{}^2$

$$\|\mathbf{a}-\mathbf{b}\|^2 = (a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 = a_1{}^2 + a_2{}^2 + b_1{}^2 + b_2{}^2 - 2(a_1b_1 + a_2b_2)$$

$$\mathbf{a}.\mathbf{b} = \|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\|\cos\alpha = \frac{1}{2}\left(\|\mathbf{a}\|^2 + \|\mathbf{b}\|^2 - \|\mathbf{a}-\mathbf{b}\|^2\right) = a_1b_1 + a_2b_2$$



Hasil kali titik di R^3

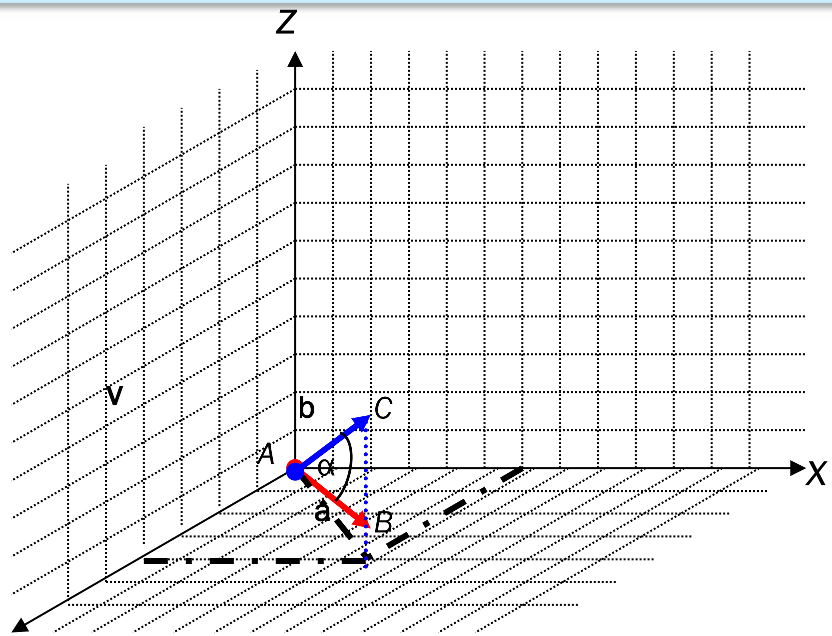


Definisi 4.6: Hasil kali titik (*dot product*)

Jika α adalah sudut antara **a** dan **b**, maka didefinisikan 0 jika **a** = **0** atau **b** = **0**

$$\mathbf{a}.\mathbf{b} = \begin{cases} = 0 \text{ jika } \mathbf{a} = \mathbf{0} \text{ atau } \mathbf{b} = \mathbf{0} \\ = \|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\|\cos\alpha \text{ dengan } \pi \geq \alpha \geq 0 \end{cases}$$

Hasil kali titik di R^3



𝒟efinisi 4.7: Hasil kali titik

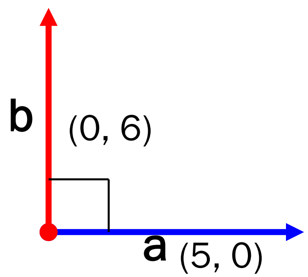
Jika **a**, **b** vektor-vektor di R^3, maka **a. b** = $a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$

Latihan 2

1. (Benar/Salah) hasil kali titik dua vektor hasilnya vektor lain yang sebidang.
2. Diketahui **a** dan panjangnya dua kali **b**, panjang **b** sama dengan k satuan, **a** dan **b** membentuk sudut 45 derajat. Tentukan **a.b.**

   a. $2k^2$ c. $\sqrt{2}k^2$ e. $2\sqrt{2}k$

   b. $2\sqrt{2}k^2$ d. $6\sqrt{2}k$

3. 

   Maka **a.b** adalah a. 0 c. (5, 6) e. (6, 5)

   b. 30 d. 1

4. Hitunglah **u.v**, jika **u** = (10, 0) dan **v** = (25, 0)

   a. 0 c. (35, 0) e. (10, 25)

   b. 250 d. (250, 0)

5. Diketahui ||**a**|| = 5, ||**b**|| = 6, dan sudut antara keduanya 120. Hitung **a.b**

   a. 0 c. (5, 6) e. -15

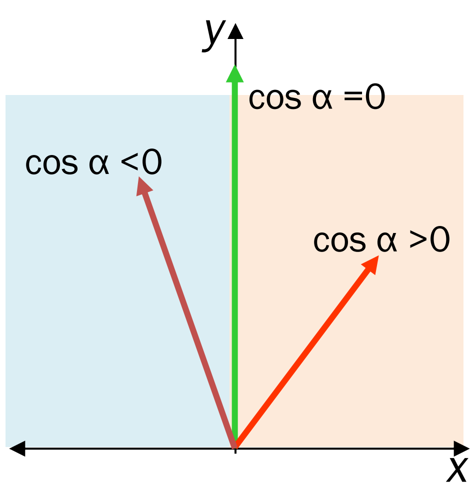
   b. $15\sqrt{3}$ d. 15

Sudut dan hasil kali titik dua vektor

- Perhatikan kembali rumus pertama hasil kali titik

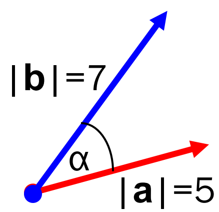
$$\|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\|\cos\alpha \quad \text{dengan} \quad \pi \geq \alpha \geq 0$$

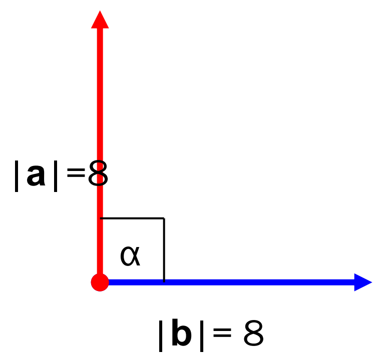
- Panjang vektor selalu positif atau nol, sedangkan cos α bisa positif, negatif atau nol tergantung pada nilai α

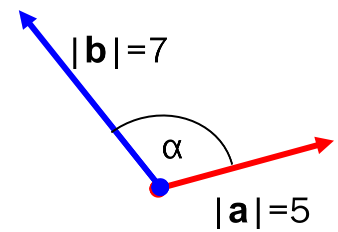


$$\mathbf{u.v} \begin{cases} < 0, \text{ jika sudutnya tumpul} \\ = 0, \text{ jika } \mathbf{u} \text{ ortogonal dgn } \mathbf{v} \\ > 0 \text{ jika sudutnya lancip} \end{cases}$$

Latihan 3







a.b= ....

Jawab: 35 x cosα

a.b=.....

Jawab: 64x0=0

a.b=.....

Jawab: -35 x cos(π-α)

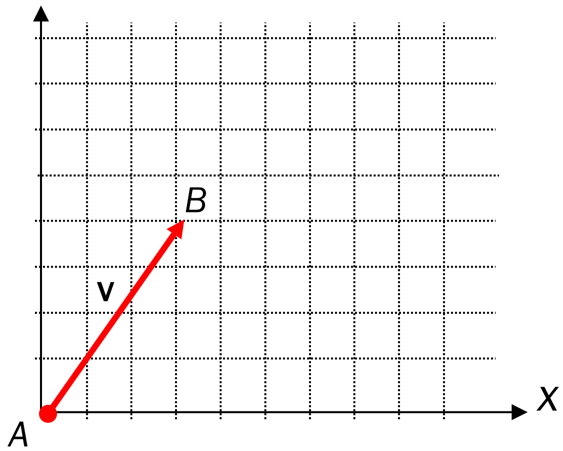
Jika dua vektor berimpit, maka hasil kali titiknya ....

Jawab: hasil kali panjangnya

Jika salah satu vektor adalah nol, maka hasil kali titiknya ....

Jawab: 0

Norm/panjang vektor



$$\mathbf{v} = (v_1, v_2)$$

$$|\mathbf{v}| = \|\mathbf{v}\| = (\mathbf{v.v})^{1/2} = \sqrt{v_1^{\,2} + v_2^{\,2}}$$

Karena cosinus sudut antara **v** dengan **v** adalah 1, maka

$$\mathbf{v.v} = |\mathbf{v}||\mathbf{v}| \text{ atau } |\mathbf{v}| = (\mathbf{v.v})^{1/2}$$

Norm/panjang vektor **v** di R^3 adalah $\|\mathbf{v}\| = (\mathbf{v.v})^{1/2} = \sqrt{v_1^{\,2} + v_2^{\,2} + v_3^{\,2}}$

Perhatikan notasi panjng vektor: $|\mathbf{v}|$ atau $\|\mathbf{v}\|$

Hasil kali titik dalam perkalian matriks

- **a** dan **b** vektor-vektor di R^2, maka **a.b** = $a_1b_1 + a_2b_2$.
- Jika **a** dan **b**, dipandang sebagai vektor-vektor baris maka **a.b** = **ab**^{T}

$$\mathbf{a} = (a_1, a_2) \,\text{dan}\, \mathbf{b} = (b_1, b_2)$$

$$\mathbf{a.b} = a_1.b_1 + a_2b_2 = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \mathbf{a.b}^T$$

- Jika **a**, **b** vektor-vektor di R^3, maka berlaku

$$\mathbf{a.b} = a_1.b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \mathbf{a.b}^T$$

Latihan 4: sifat-sifat hasil kali titik

1. Diberikan **u** = (5,3), dan **v** = (4,6). Tentukan **u.v** dan **v.u**. Apa kesimpulanmu?

   Jawab: ….

2. Diberikan **u** = (*a*, *b*), dan **v** = (*c*, *d*). Hitunglah **u.v** dan **v.u**. Apa kesimpulanmu?

   Jawab: …..

Perkalian titik memenuhi sifat **simetri**, yaitu **u.v** = **v.u**

Latihan 4 (lanjutan):

4. Diberikan **u** = (5, 3), **v** = (4, 6), dan skalar *k* = 4.
   Hitunglah (*k***u**).**v** dan *k*(**u**.**v**).
   Apa kesimpulanmu?
   Jawab:

5. Diberikan **u** = (*a*, *b*), **v** = (*c*, *d*), dan skalar *k*.
   Tentukan (*k***u**).**v** dan *k*(**u**.**v**).
   Apa kesimpulanmu?
   Jawab:

Perkalian titik memenuhi sifat (*k***u**).**v** = *k*(**u**.**v**)

Latihan 4 (lanjutan):

5. Diberikan **u** = (5,3), **v** = (4,6), dan **w** = (4,7).

   Tentukan **u.**(**v+w**) dan **u.v** + **u.w**

   Apakah **u.**(**v+w**) dan **u.v** + **u.w?**

   Jawab: ….

6. Diberikan **u** = (a,b), **v** = (c,d), dan **w =** (e,f).

   Tentukan **u.**(**v+w**) dan **u.v** + **u.w**? Apa kesimpulanmu?

   Jawab: …..

Perkalian titik memenuhi sifat yaitu **u**.(**v+w**) = **u**.**v** + **u**.**w**

Latihan 4 (lanjutan):

7. Diberikan **v** = (4, 6, 1) dan **u** = (0, 0, 0)

   Tentukan **v.v** dan **u.u**

   Jawab: ....

8. Diberikan **v** = (*a*, *b*, *c*)

   a. tentukan **v.v**

   b. kapan **v.v** = 0

   Jawab: ....

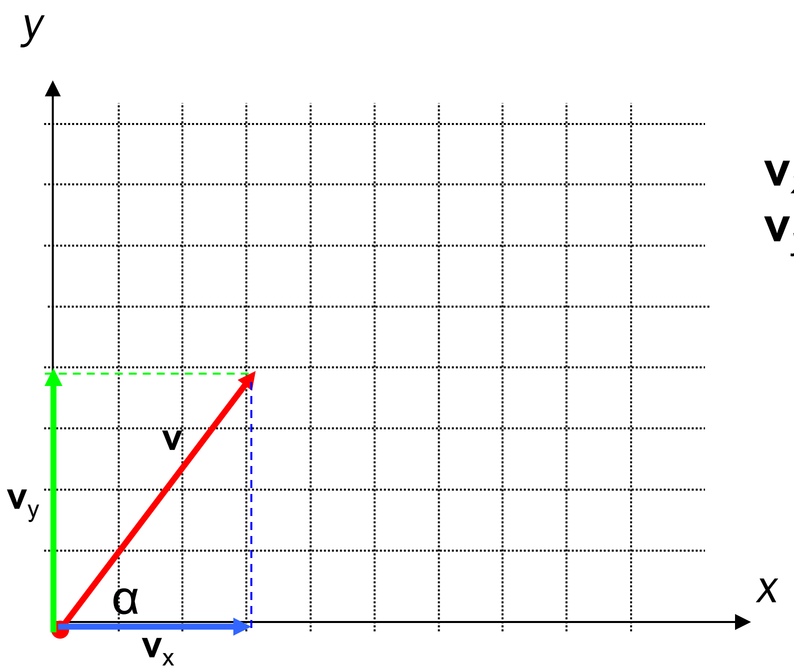
Empat sifat penting hasil kali titik

Hasil kali titik memenuhi sifat:

1. $\mathbf{u.v} = \mathbf{v.u}$
2. $(k\mathbf{u}).\mathbf{v} = k(\mathbf{u.v})$
3. $\mathbf{u}(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u.v} + \mathbf{u.w}$
4. $\mathbf{v.v} = \|\mathbf{v}\|\|\mathbf{v}\| = 0,$ hanya jika $\mathbf{v} = \mathbf{0}$

Perhatikan empat sifat penting di atas. Penulisan notasi harus tepat, bedakan notasi skalar dengan vektor

Proyeksi ortogonal pada sumbu koordinat



$\mathbf{v}_x$ adalah proyeksi ortogonal **v** pada sumbu-*x*
$\mathbf{v}_y$ adalah proyeksi ortogonal **v** pada sumbu-*y*

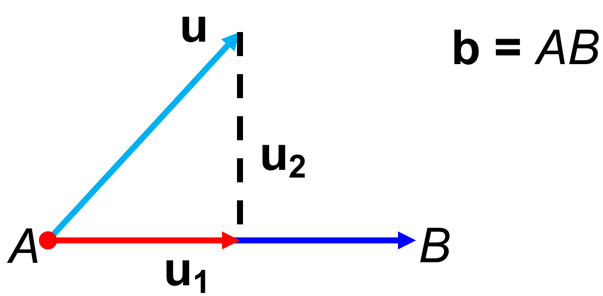
$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_x + \mathbf{v}_y$$

$$|\mathbf{v}_x| = |\mathbf{v}| \cos\alpha$$

$$|\mathbf{v}_y| = |\mathbf{v}| \sin\alpha$$

v dapat didekomposisikan menjadi jumlahan dua vektor yaitu $\mathbf{v}_x$ dan $\mathbf{v}_y$

Proyeksi ortogonal dan dekomposisi



$\mathbf{u}_1$ adalah komponen **u** sepanjang **b** atau proyeksi ortogonal **u** pada **b**

$$\mathbf{u}_1 = \text{proj}_{\mathbf{b}}\mathbf{u}$$

$$\text{proj}_{\mathbf{b}}\mathbf{u} = \frac{\mathbf{u}.\mathbf{b}}{\|\mathbf{b}\|^2}.\mathbf{b}$$

$\mathbf{u}_2$ tegak lurus $\mathbf{u}_1$ dan **b**; $\mathbf{u}_2$ disebut komponen **u** tegak lurus **b**.

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_2 &= \mathbf{u} - \mathbf{u}_1 \\ &= \mathbf{u} - \text{proj}_{\mathbf{b}}\mathbf{u}\end{aligned}$$

$$\mathbf{u} - \text{proj}_{\mathbf{b}}\mathbf{u} = \mathbf{u} - \frac{\mathbf{u}.\mathbf{b}}{\|\mathbf{b}\|^2}.\mathbf{b}$$

Proyeksi ortogonal dan dekomposisi

Karena $\mathbf{u_1}$ paralel dengan $\mathbf{b}$ maka dapat dituliskan $\mathbf{u_1} = k\mathbf{b}$, maka

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 = k\mathbf{b} + \mathbf{u}_2$$

Dengan menggunakan sifat *dot product,* diperoleh $\mathbf{u}.\mathbf{b} = (k\mathbf{b} + \mathbf{u}_2).\mathbf{b} = k\|\mathbf{b}\|^2 + \mathbf{u}_2.\mathbf{b}$

Karena $\mathbf{u_2.b} = 0$ ($\mathbf{u_2} \perp \mathbf{b}$), maka $\mathbf{u}.\mathbf{b} = k\|\mathbf{b}\|^2$

sehingga

$$k = \frac{\mathbf{u}.\mathbf{b}}{\|\mathbf{b}\|^2}$$

Kesimpulan:

$$\boxed{\text{proy}_b\mathbf{u} = \frac{\mathbf{u}.\mathbf{b}}{\|\mathbf{b}\|^2}\mathbf{b}}$$

Contoh 2: proyeksi ortogonal

Diberikan **u** = (1, 0, 0) dan **v** = (1, 1, 0).

Tentukan:

- komponen **u** sepanjang **v** (proyeksi ortogonal **u** pada **v**) , dan
- komponen **u** tegak lurus **v.**

<u>Jawab:</u>

$$\mathbf{u}.\mathbf{v} = 1.1 + 0.1 + 0.0 = 1 \qquad \|v\|^2 = 1^2 + 1^2 + 0^2 = 2$$

Proyeksi ortogonal **u** pada **v** adalah: $\text{proy}_v\mathbf{u} = \dfrac{\mathbf{u}.\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|^2}\mathbf{v} = \dfrac{1}{2}(1,1,0) = \left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2},0\right)$

Komponen vektor **u** yang ortogonal terhadap **v** adalah:

$$\mathbf{u} - \text{proy}_v\mathbf{u} = (1,0,0) - \left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right) = \left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},0\right)$$

Refleksi

- Tuliskan besaran apa saja yang dapat diturunkan dari *dot product*. Tunjukkan cara penurunannya.

- Tulisakan hal baru yang kamu pelajari di modul ini.

Modul selanjutnya…

- Pada modul ini kita mempelajari operasi antara dua vektor yang menghasilkan scalar. Modul berikutnya membahas operasi antara dua vektor yang menghasilkan vektor: hasil kali silang (*cross product*) pada bidang.

- Hasil kali silang mempunyai banyak aplikasi antara lain untuk menentukan persamaan garis dan bidang. Bagaimana aplikasi yang Anda kenal dari mata ajar Fisika?