Agenda

- Penutup Relasi (*Closure*)
- Relasi Ekuivalen

Penutup Relasi (*Closure*)

Penutup Relasi

- Diberikan relasi $R = \{ (1,1), (2,3), (3,3) \}$ pada himpunan $A = \{ 1, 2, 3, 4 \}$
  - Apakah R bersifat refleksif? TIDAK
  - Bagaimana membuat relasi R menjadi refleksif?
    - Dengan menambahkan (2,2) dan (4,4)
  - Jika R digabungkan dengan (2,2) dan (4,4) maka diperoleh relasi baru:
    - $R' = R \cup \{ (2,2), (4,4) \}$
    - $R' = \{ (1,1), (2,2), (2,3), (3,3), (4,4) \}$
    - ***R'*** disebut sebagai penutup refleksif dari R

Penutup Relasi

- Definisi

Misalkan R adalah relasi pada himpunan A, penutup refleksif/simetri/transitif adalah relasi R' yang memenuhi 3 (tiga) syarat berikut:

- R' bersifat refleksif/simetri/transitif
- $R \subseteq R'$
- Jika R'' bersifat refleksif/simetri/transitif dan $R \subseteq R''$ maka $R' \subseteq R''$

Penutup Relasi

- Definisi

Notasi yang diberikan:

- $r(R)$ untuk penutup refleksif dari R
- $s(R)$ untuk penutup simetri dari R
- R^+ untuk penutup transitif dari R
- R^* untuk penutup transitif refleksif dari R

Penutup Relasi

- Contoh
  - Jika $A = \{ 1, 2, 3, 4 \}$ dan $R = \{ (1,2), (2,3), (3,4) \}$ maka penutup refleksif, penutup simetri, dan penutup transitif dari R adalah:
    - $r(R) = \{ (1,2), (2,3), (3,4), (1,1), (2,2), (3,3), (4,4) \}$
    - $s(R) = \{ (1,2), (2,3), (3,4), (2,1), (3,2), (4,3) \}$
    - $R^+ = \{ (1,2), (2,3), (3,4), (1,3), (2,4), (1,4) \}$
    - $R^* = R^+ \cup I_A = \{ (1,2), (2,3), (3,4), (1,3), (2,4), (1,4), (1,1), (2,2), (3,3), (4,4) \}$

Penutup Relasi

- Misalkan R adalah sebuah relasi pada A
  - R bersifat refleksif $\rightarrow$ $r(R) = R$
  - R bersifat simetri $\rightarrow$ $s(R) = R$
  - R bersifat transitif $\rightarrow$ $R^+ = R$
- Mengapa demikian?
  - Penutup refleksif dari relasi R pada A:
    - Superset terkecil dari R yang bersifat refleksif
  - Penutup simetri dari relasi R pada A:
    - Superset terkecil dari R yang bersifat simetri
  - Penutup transitif dari relasi R pada A:
    - Superset terkecil dari R yang bersifat transitif

Penutup Relasi

- Apakah penutup refleksif relasi $<$ pada Z?
  - $r(<) \quad = \; < \cup I_Z$
    $\quad = \; \leq$
- Apakah penutup simetri relasi pada Z yang didefinisikan $R = \{ (x, y) \mid x = 2y \}$

Penutup Relasi

- Teorema

Untuk suatu relasi R pada himpunan A berlaku:

$$r(R) = R \cup I_A$$
$$s(R) = R \cup R^{-1}$$
$$R^+ = (\forall\ k \mid k > 0 : R^k) = R \cup R^1 \cup R^2 \cup \ldots$$
$$R^* = R^+ \cup I_A$$

Relasi Ekuivalen

Relasi Ekuivalen (Relasi Setara)

- Definisi

> Suatu relasi R pada himpunan A disebut relasi ekuivalen pada A jika R bersifat refleksif, simetri, dan transitif.
>
> Dua elemen a dan b pada himpunan A dikatakan ekuivalen apabila terdapat suatu relasi ekuivalen R sehingga $a\ R\ b$.

- Contoh relasi ekuivalen
  - Relasi $R = \{ (x, y) \mid x \ \&\ y$ lahir di bulan yang sama $\}$ pada himpunan $A = \{$ mahasiswa $\}$
  - Relasi $S = \{ (1,1), (1,2), (2,1), (2,2) \}$ pada $B = \{ 1, 2 \}$
  - Relasi $EQUALS(=)$ pada Z

Relasi Ekuivalen

- Contoh
  - Diberikan suatu himpunan A = { mahasiswa UI } dan relasi $R = \{ (x, y) \mid x, y \in A, x$ sefakultas dengan $y \}$
  - Apakah R merupakan relasi ekuivalen?
    - Setiap mahasiswa pasti sefakultas dengan dirinya sendiri, berlaku $x R x$, artinya R bersifat refleksif
    - Untuk sembarang mahasiswa x dan y, x sefakultas dengan y berarti y juga sefakultas dengan x, berlaku $x R y \wedge y R x$, artinya R bersifat simetri
    - Untuk sembarang mahasiswa x, y, dan z dapat dipastikan bahwa jika x sefakultas dengan y dan y sefakultas dengan z maka x sefakultas dengan y, berlaku $x R y \wedge y R z \to x R z$, artinya R bersifat transitif
    - Dapat diketahui bahwa R bersifat refleksif, simetri, dan transitif sehingga dapat disimpulkan bahwa R adalah relasi ekuivalen

Relasi Ekuivalen

- Contoh
  - *R* adalah relasi pada himpunan semua *binary string* **Q** sedemikian hingga *a R b* jika dan hanya jika *a* dan *b* memiliki jumlah angka 1 yang sama

    ***Q* = {0, 1, 00, 01, …, 11, 000, 001, … 111, …}**

    ***R* = ?**
  - Apakah *R* adalah relasi yang ekuivalen?

Kelas Ekuivalen

- Definisi

Misalkan ***R*** adalah relasi ekuivalen pada himpunan ***A***, himpunan $[x]_R = \{ y \mid y \in A \wedge x \, R \, y \}$ disebut sebagai kelas ekuivalen *x* terhadap relasi ***R***

Jika $b \in [x]_R$, dapat dikatakan bahwa *b* merupakan perwakilan (*representative*) dari kelas ekuivalen $[x]_R$

$[x]_R$ sering ditulis cukup dengan $[x]$ saja

Kelas Ekuivalen

- Diketahui:
  - $A = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 \}$
  - $R = \{ (a, b) \mid a \equiv b \pmod 3\}$ atau
    - $R = \{ (1,1), (1,4), (1,7), (2,2), (2,5), (3,3), (3,6), (4,1), (4,4), (4,7), (5,2), (5,5), (6,3), (6,6), (7,1), (7,4), (7,7) \}$
  - Kita dapat membentuk kelompok-kelompok berdasarkan keterlibatan anggota yang berelasi
    - (1,1), (1,4), (1,7); (4,1), (4,4), (4,7); (7,1), (7,4), (7,7)
    - (2,2), (2,5); (5,2), (5,5)
    - (3,3), (3,6); (6,3), (6,6)
  - Sesuai dengan definisi kelas ekuivalen, maka dapat diketahui kelas-kelas ekuivalen yang terbentuk yaitu:
    - $[1] = [4] = [7] \quad = \{ 1, 4, 7 \}$
    - $[2] = [5] \quad = \{ 2, 5 \}$
    - $[3] = [6] \quad = \{ 3, 6 \}$

Kelas Ekuivalen

- Sebutkan kelas-kelas ekuivalen yang ada pada relasi $\{ (x, y) \mid x,y \in Z \wedge x \equiv y \pmod 2) \}$
- Jawab
  - Anggota relasi tersebut adalah
    - { (0,0), (0,2), (0,4), …, (1,1), (1,3), (1,5), …, (0,-2), (0,-4), (0,-6), …, (1,-1), (1,-3), (1,-5), … }
  - Kelas-kelas ekuivalen yang terbentuk:
    - $[0] = \{ 0, \pm 2, \pm 4, \pm 6, \dots \}$
    - $[1] = \{ \pm 1, \pm 3, \pm 5, \pm 7, \dots \}$

Kelas Ekuivalen

- Contoh
  - *R* adalah relasi pada himpunan semua *binary string* sedemikian hingga *a R b* jika dan hanya jika *a* dan *b* memiliki jumlah angka 1 yang sama
  - Apakah kelas ekuivalen untuk *binary string* 011 pada relasi ekuivalen *R*?
    - Tuple-tuple yang memenuhi syarat relasi untuk *a* = 011 antara lain: { (011,11), (011,011), (011,110), … }
    - Jadi,

      [011] = { semua *binary string* yang mempunyai angka 1 sebanyak 2 }

Kelas Ekuivalen

- Diberikan:
  - A = { mahasiswa UI } dan;
  - $R = \{ (x, y) \mid x, y \in A, x$ sefakultas dengan $y \}$
  - Berapakah jumlah kelas ekuivalen pada R?
- Jawab
  - Untuk setiap fakultas ke-i maka kita mendapati (x_i,y_i), menyatakan x dan y berada di fakultas ke-i
  - Jika terdapat m mahasiswa pada fakultas ke-i maka diperoleh kelas ekuivalen $[x_{ij}] = [x_{ij+1}] = [x_{ij+2}] = \ldots [x_{im}]$
  - Setiap fakultas akan membentuk satu kelas ekuivalen
  - Jadi, jumlah kelas ekuivalen pada R adalah <u>sebanyak jumlah fakultas</u>

Kelas Ekuivalen

- Teorema

Jika R adalah relasi ekuivalen pada suatu himpunan A, $x \in A$, dan $y \in A$, maka 3 (tiga) pernyataan berikut ini adalah ekuivalen:

1. $x \, R \, y$
2. $[x] = [y]$
3. $[x] \cap [y] \neq \varnothing$

Partisi

- Kelas-kelas ekuivalen yang dibangun oleh sebuah relasi ekuivalen membentuk suatu partisi P dari A, yaitu:
  - Himpunan yang anggotanya adalah himpunan-himpunan bagian dari A yang merupakan kelas-kelas ekuivalen yang saling lepas (*disjoint*)
- Gabungan dari semua himpunan-himpunan bagian tersebut sama dengan A

Partisi

- Contoh
  - $A = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 \}$
  - $R = \{ (a, b) \mid a \equiv b \pmod 3 \}$
  - Kita dapat membentuk kelompok-kelompok berdasarkan keterlibatan anggota yang berelasi
    - (1,1), (1,4), (1,7); (4,1), (4,4), (4,7); (7,1), (7,4), (7,7)
    - (2,2), (2,5); (5,2), (5,5)
    - (3,3), (3,6); (6,3), (6,6)
  - Diperoleh partisi P dari A yaitu
    - $P = \{ \{ 1, 4, 7 \}, \{ 2, 5 \}, \{ 3, 6 \} \}$

Partisi

- Teorema

> Jika $P = \{ A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n \}$ adalah sebuah partisi pada himpunan A, maka relasi $R = \{ (x, y) \mid \forall k, 1 \le k \le n, x \in A_k \text{ dan } y \in A_k \}$ pada A merupakan suatu relasi ekuivalen

- Bagaimana membuktikannya?
  - Harus dibuktikan bahwa R bersifat refleksif, simetri, dan transitif

Partisi

- Contoh
  - Suatu himpunan $A = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6 \}$ mempunyai partisi $P = \{ \{ 1, 2, 3 \}, \{ 4 \}, \{ 5, 6 \} \}$, maka relasi ekuivalen yang bersesuaian adalah:
    - $R = \{ (1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (3,3), (4,4), (5,5), (5,6), (6,5), (6,6) \}$
  - Terdapat 3 (tiga) kelas ekuivalen berbeda:
    - $\{ 1, 2, 3 \}$ dengan nama kelas ekuivalen $[1]$ atau $[2]$ atau $[3]$
    - $\{ 4 \}$ dengan nama kelas ekuivalen $[4]$
    - $\{ 5, 6 \}$ dengan nama kelas ekuivalen $[5]$ atau $[6]$