Review: Konsep Dasar Matematis

Kuliah Teori Bahasa dan Automata
Program Studi Ilmu Komputer
Fasilkom UI

Prepared by:
Rahmad Mahendra

Pokok Bahasan

- Logika
- Himpunan
- Relasi
- Fungsi
- Metode Pembuktian

Logika

- **Logika proposisi** adalah pernyataan yang memiliki nilai kebenaran *TRUE* atau *FALSE*
  - Contoh:
  - Saya tinggal di Bekasi.
  - Matematika Diskrit adalah mata kuliah yang sulit.

- Dua proposisi atau lebih dapat dikombinasikan dengan menggunakan operator penghubung (*connective*)

Logika

- *Logical connectives*
  - $\neg$ negasi *NOT*
  - $\wedge$ konjungsi *AND*
  - $\vee$ disjungsi *OR*
  - $\Rightarrow$ *conditional* jika ..., maka ...
  - $\Leftrightarrow$ ekuivalensi ... jika dan hanya jika ...
- Tabel kebenaran

p	q	$\neg p$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$
T	T	F	T	T	T	T
T	F	F	F	T	F	F
F	T	T	F	T	T	F
F	F	T	F	F	T	T

Logika

Ekuivalensi	$p \Leftrightarrow q \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$	
Implikasi	$p \Rightarrow q \equiv \neg p \vee q$	
Negasi Ganda	$\neg(\neg p) \equiv p$	
Idempotensi	$p \wedge p \equiv p$	$p \vee p \equiv p$
Komutatif	$p \wedge q \equiv q \wedge p$	$p \vee q \equiv q \vee p$
Asosiatif	$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$ $(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$	
Distributif	$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$	
DeMorgan	$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$ $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$	
Identitas	$p \wedge T \equiv p$	$p \vee F \equiv p$
Anhiliasi	$p \wedge F \equiv F$	$p \vee T \equiv T$
Absorpsi	$p \wedge (p \vee q) \equiv p$	$p \vee (p \wedge q) \equiv p$

Logika

- **Logika predikat** adalah pernyataan logika yang mengandung satu variabel atau lebih.
  - Contoh:
  - Ada bilangan genap yang habis dibagi 3.
  - *Source code* dalam setiap bahasa pemrograman harus di-*compile* sebelum di-*run*.
- Variabel “ada / beberapa” dinyatakan sebagai ekspresi $\exists$ dan “semua / setiap / seluruh” dinyatakan sebagai $\forall$. Ekspresi tersebut disebut *quantifier*.

$$\neg\forall x.P(x) \equiv \exists x.\neg P(x)$$

$$\neg\exists x.P(x) \equiv \forall x.\neg P(x)$$

Himpunan

- **Himpunan (*set*)** adalah koleksi yang beranggotakan elemen / objek yang unik.
- Himpunan dapat dinyatakan dengan cara:
  - Mendefinisikan karakteristik himpunan

    Contoh: $S = \{x \mid 0 < x < 5, x \text{ adalah bilangan bulat}\}$
  - Enumerasi anggota himpunan

    Contoh: $S = \{1, 2, 3, 4\}$
- Kardinalitas adalah jumlah anggota himpunan.

  Contoh: $|S| = 4$
- x merupakan anggota himpunan S, ditulis $x \in S$

  sedangkan y bukan anggota himpunan S, ditulis $y \notin S$

Himpunan

Operasi dan Properti pada Himpunan	
Gabungan (*union*)	$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$
Irisan (*intersection*)	$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$
Produk Kartesis	$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \wedge y \in B\}$
Selisih (*difference*)	$A - B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$
Komplemen	Diketahui *S* merupakan *universal set*. Komplemen A (ditulis sebagai $\overline{A}$ atau A') didefinisikan sebagai berikut $\overline{A} = S - A$
Subset	$A \subseteq B \equiv \forall x.(x \in A \Rightarrow x \in B)$
Proper subset	$A \subset B \equiv A \subseteq B \wedge A \neq B$
Kesamaan (*equality*)	$A = B \equiv (A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A)$

Himpunan

Contoh Himpunan	
Himpunan kosong (*empty set*)	Himpunan yang tidak memiliki anggota, dengan kata lain kardinalitasnya = 0. Ditulis sebagai $\{\}$ atau ϕ Untuk setiap himpunan *S*, berlaku $\phi \subseteq S$
Singleton set	Himpunan yang memiliki tepat satu anggota. Contoh: $\{2\}$, $\{x \mid x \bmod 5 = 2,\ \ 1 < x < 4\}$
Finite set	Himpunan yang memiliki berhingga jumlah anggota. Contoh: $\{\},\ \ \{1,2,3,\ldots,1000\}$
Power sets	Himpunan yang mengandung seluruh *subset* dari sebuah himpunan. $\wp ow(S) = \{A \mid A \subseteq S\}$ Jika $\lvert S \rvert = n$, maka $\lvert \wp ow(S) \rvert = 2^n$

Relasi

- **Relasi biner** *R* antara himpunan *A* dan *B* adalah *subset* dari produk Kartesis. $R \subseteq A \times B$
- Notasi relasi $(a,b) \in R$ aRb $R(a,b)$

- Relasi *R* <u>pada</u> himpunan *S* didefinisikan sebagai $R \subseteq S \times S$
  - Refleksif $\forall x \in S.(xRx)$
  - Simetri $\forall x, y \in S.(xRy \Rightarrow yRx)$
  - Antisimetri $\forall x, y \in S.((xRy \wedge yRx) \Rightarrow (x = y))$
  - Transitif $\forall x, y, z \in S.((xRy \wedge yRz) \Rightarrow xRz)$

Relasi

- **Relasi ekuivalen** pada S adalah relasi yang memenuhi sifat refleksif, simetri, dan transitif pada S.

- **Relasi terurut parsial** (*partial order*) pada S adalah relasi memenuhi sifat refleksif, antisimetri, dan transitif pada S.

- **Relasi terurut total** (*total order*) pada S memenuhi
  - R adalah *partial order* pada S, dan
  - $\forall x, y \in S.(xRy \vee yRx)$

Fungsi

- **Fungsi** f dari himpunan A ke B adalah relasi $f \subseteq A \times B$ sedemikian hingga
  - $\forall x \exists y.(x, y) \in f$
  - $\forall x, y, z.\big((x, y) \in f \wedge (x, z) \in f\big) \Rightarrow (y = z)$

  ditulis $f : A \to B$

  $(x, y) \in f$ dapat ditulis dalam notasi $f(x) = y$

- Himpunan A disebut domain dan B disebut codomain.

  Himpunan $\{y \in B \mid \exists x \in A, f(x) = y\}$ disebut range.

Fungsi

- **Fungsi surjektif** (*onto*) didefinisikan sebagai.
  $\forall y \in B, \exists x \in A.\left(f(x) = y \right)$

- **Fungsi injektif** (*one-to-one*) didefinisikan sebagai.
  $\forall x, y.\left(f(x) = f(y) \right) \Rightarrow \left(x = y \right)$

- **Fungsi bijektif** memenuhi sifat surjektif dan injektif

Metode Pembuktian

- *Deductive proof*
  - Pembuktian langsung (*direct proof*)
  - Pembuktian dengan kontraposisi
  - Pembuktian dengan *counter example*

- *Inductive proof*
  - Pembuktian dengan induksi matematika
  - *Mutual induction*