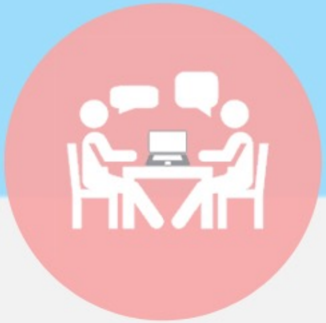
6. Ruang Hasil Kali Dalam



MODUL E-LEARNING ALJABAR LINIER
FAKULTAS ILMU KOMPUTER, UNIVERSITAS INDONESIA

Dr. Dra. Kasiyah Junus, MSc

Cakupan

- Bagian 1:
  Review
  6.1. Fungsi hasil kali dalam

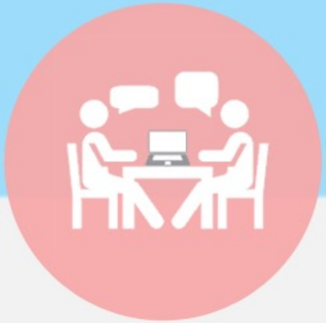
- Bagian 2:
  6.2. Panjang dan jarak dua vektor
  6.3. Sudut antara dua vektor dan ortogonalitas

- Bagian 3:
  6.4. Proses Gram-Schmidt *)
  6.5. Dekomposisi QR *)
  6.6. Matriks ortogonal

- Bagian 4
  6.7. Penyelesaian kuadrat terkecil

*) opsional

6. Ruang Hasil Kali Dalam (Bagian 1)



MODUL E-LEARNING ALJABAR LINIER
FAKULTAS ILMU KOMPUTER, UNIVERSITAS INDONESIA

DR. Kasiyah Junus, MSc

Capaian pemelajaran

Sesudah mempelajari modul ini, mahasiswa mampu

1. menjelaskan pengertian ruang hasil kali dalam secara tepat;
2. menentukan panjang vektor dan sudut antara dua vektor;
3. menjelaskan hubungan ortogonalitas komplemen antara Ruang Null, Ruang Baris, dan Ruang Kolom;
4. menerapkan proses Gram-Schmidt pada basis ruang vektor berdimensi kecil; *)
5. menentukan dekomposisi QR matriks dengan kolom-kolom bebas linier; *)
6. menentukan sistem normal penyelesaian kuadrat terkecil dari suatu spl.

*) opsional, tergantung ketersediaan waktu

Pre-test

Dengan menjawab pertanyaan pre-test, diharapkan pengetahuan terdahulu menjadi aktif dan membantu proses pembelajaran.

1. Bagaimana perubahan pemahaman Anda tentang vektor?
2. Apakah vektor merupakan elemen matematika yang selalu dapat digambarkan sebagai segmen garis berarah?
3. Apakah matriks merupakan vektor? Bagaimana menghitung panjang dan menentukan arahnya?
4. Apakah fungsi kontinu pada interval [0, 1] merupakan vektor? Apakah panjangnya sama dengan panjang kurva (yang dipelajari di Matematika Dasar)?

Bagaimana hasil *pre-test*mu?

Diskusikan jawabanmu dengan jawaban temanmu. Diharapkan pemahaman tentang vektor semakin meluas dan mendalam, tidak hanya mencakup vektor pada bidang dan ruang.

Jika masih mengalami kesulitan memahami vektor sebagai elemen ruang vektor dan konsep ruang vektor umum, baca ulang definisi dan contoh-contohnya.

Alur pembahasan

- Kita telah mempelajari ruang vektor umum dan memahami bahwa vektor adalah elemen ruang vektor.
- Pertanyaannya adalah, bagaimana menentukan panjang vektor dan sudut antara dua vektor (arah vektor relatif terhadap yang lain), pada ruang vektor selain R^n.
- Pertama-tama kita akan mengulas kembali bagaimana kita mengukur panjang, vektor, sudut antara dua vektor, sudut antara dua vektor di ruang R^n.
- Rumus besaran-besaran tersebut di atas semua dapat dinyatakan dalam bentuk *dot product* (hasil kali titik).

Alur pembahasan (lanj)

- Hasil kali titik dapat kita pandang sebagai 'alat untuk mengukur' besaran-besaran di atas pada R^n.
- Kita memerlukan **'alat ukur'** yang lebih umum dari hasil kali titik, untuk mengukur vektor di ruang vektor umum.
- Kita mulai dengan sifat-sifat dasar (ada 4) dari hasil kali titik yang memampukannya menjadi 'alat ukur'.
- Sifat-sifat ini yang akan digeneralisir untuk membuat alat ukur secara umum yang berlaku pada ruang vektor umum.
- Hasil generalisasi tersebut adalah **fungsi hasil kali dalam**.

Review: sifat-sifat dasar hasil kali titik (*dot product*)

Hasil kali titik di R^n

1. Tuliskan rumus untuk menentukan **a.b**
2. Apakah **a.b** = **b.a**?
3. Benarkah jika soal nomer 2 dibuktikan dengan contoh?
4. Sebutkan sifat-sifat dari hasil kali titik.

Catatan:

1. Ada dua definisi (sebutkan keduanya, tuliskan rumusnya)
2. Ya, BENAR
3. Tidak cukup, harus dibuktikan secara umum. Contoh hanya langkah awal untuk membuat lebih memahami konsep.
4. Silahkan sebutkan, kemudian cocokkan dengan slide selanjutnya

Apa sebenarnya hasil kali titik?

Contoh di R^2

- $(2, 8).(1, -2) = 14$
- **a =** $(1, 0)$, **b** $= (1, 9)$, maka **a.b** $= 1$

Buatlah beberapa contoh di R^3 dan R^7

- ✓ Perhatikan bahwa, *dot product* (hasil kali titik) mengawankan **sepasang vektor** (dua vektor) ke suatu **bilangan nyata.**
- ✓ Setiap pasang vektor pasti mempunyai **tepat satu nilai** hasil kali titik.
- ✓ Jadi, hasil kali titik di R^2 adalah **fungsi** yang domainnya adalah himpunan semua pasangan berurutan vektor-vektor di R^2 dan kodomainnya adalah himpunan bilangnan real. Aturan pengawanannya dinyatakan oleh rumus *dot-produnct*.

Hasil kali titik adalah fungsi

- Sebutkan tiga komponen fungsi hasil kali titik di R^2

  Jawab:

  1. Domain: $R^2 \times R^2$
  2. Kodomain: R
  3. Aturan : $\mathbf{a.b} = a_1b_1 + a_2b_2$ untuk semua $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2)$ elemen di R^2.

- Biasanya notasi yang digunakan: *f, g,* dst; sehingga dtulis $f(\mathbf{a}, \mathbf{b})$.
- Notasi fungsi hasil kali titik yanglazim digunakan adalah: **a.b**

- Kesalahan yang sering terjadi:
  1. Hasili titik di R^2 adalah fungsi dari R^2 ke R
  2. *Dot product* di R^2 adalah fungsi dari R^2 ke R^2.

Latihan 1

1. Definisikan hasil kali titik di R^2 dengan rumus hasil kali titik yang lain (dengan melibatkan cosinus sudut antara **a** dan **b**)
2. Definisikan hasil kali titik di R^3
3. Definisikan hasi kali titik di R^n
4. B/S hasil kali titik di R^n adalah fungsi dari R^n ke R.

Sifat-sifat hasil kali titik (1)

Buktikan: **a.b = b.a** untuk setiap **a** dan **b** vektor di R^n

Catatan:

- *n* bilangan asli
- Cobalah dengan beberapa contoh di R^2 dan R^3 untuk meyakinkan
- Buktikan secara umum (tidak cukup dibuktikan dengan contoh)
- Sifat di atas disebut sifat SIMETRIS (serupa sifat komutatif)

Sifat hasil kali titik di R^n (2)

Buktikan $(k\mathbf{a}).\mathbf{b} = k(\mathbf{b}.\mathbf{a})$

untuk setiap **a** dan **b** elemen R^n dan k bilangan real

Catatan:

- Pergunakan beberapa contoh untuk membuat dugaan.
- Buktikan sifat berlaku secara umum secara aljabar.

Sifat hasil kali titik di R^n (3)

Buktikan **a.(b+c) = a.b + a.c**

untuk setiap **a, b** dan **c** elemen R^n

Catatan:

- Pergunakan beberapa contoh untuk memahami makna sifat di atas.
- Buktikan berlaku secara umum.

Sifat hasil kali titik di R^n (4)

a. Hitunglah **a.a** nyatakan dalam hasil kali titik

b. Kapan **a.a** = 0?

Petunjuk

- Untuk mempermudah pemahaman awal, hitungnya menggunakan contoh; kemudian hitunglah secara umum.
- Buktikan sifat di atas berlaku umum.

4-sifat penting hasil kali titik

1. simetris
2. homogen
3. aditif
4. positif

Catatan:

Sifat-sifat penting di atas erat kaitannya dengan pengukuran panjang vektor, sudut antara dua vektor, dan jarak antara dua vektor dan menentukan proyeksi orthogonal vektor pada vektor lain.

Panjang vektor, sudut antara dua vektor

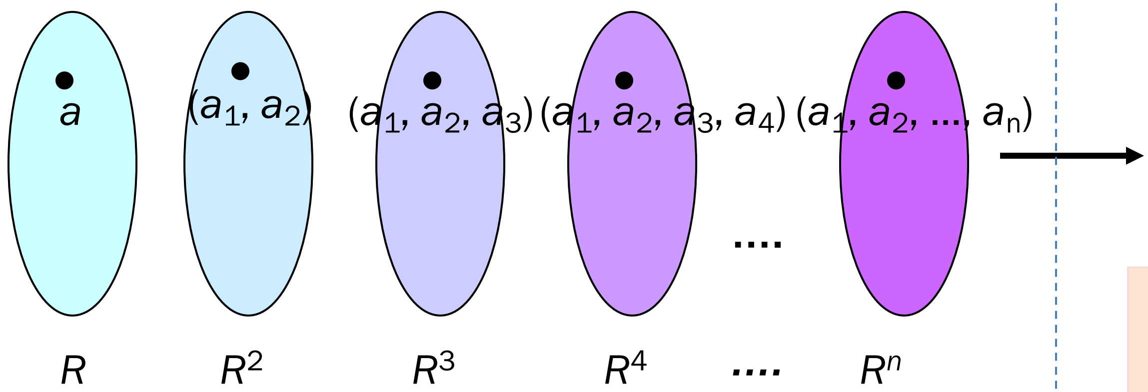
Tentukan rumus untuk menghitung

- panjang vektor
- sudut antara dua vektor **a** dan **b**
- jarak antara vektor **a** dan **b**
- proyeksi orthogonal vektor **a** pada vektor **b**

Nyatakan semua rumus di atas dalam hasil kali titik.

Generalisasi

Proses generalisasi dari R^2, R^2 sampai R^n dan R kemudian RVU



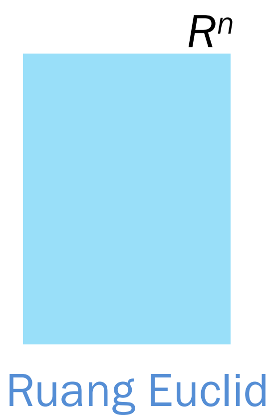
Ruang Euclid adalah ruang vektor R^n (n = 1, 2, 3, 4, ...) yang di dalamnya didefinisikan **fungsi hasil kali titik (*dot product*).**

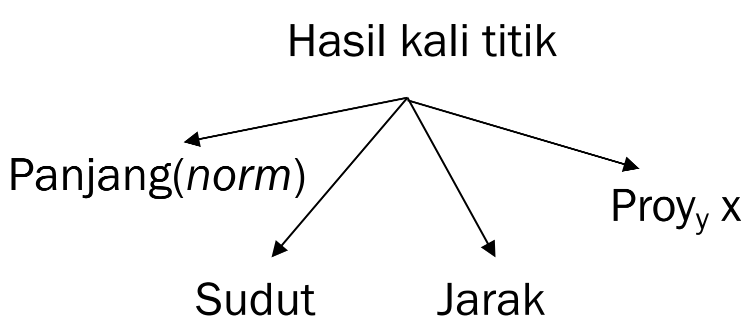
ruang hasil kali dalam: ruang vektor V yang di dalamnya didefinisikan **fungsi hasil kali dalam.**

Sifat-sifat hasil kali titik

Hasil kali titik di R^n memenuhi empat sifat

1. **u.v = v.u** (simetri)
2. (k **u**).**v** = k (**u.v**) (homogen)
3. **u.**(**v** + **w**) = **u.v** + **u.w** (aditif)
4. **v.v** = 0, **v.v** = 0 jika dan hanya jika **v** = 0 (positif)

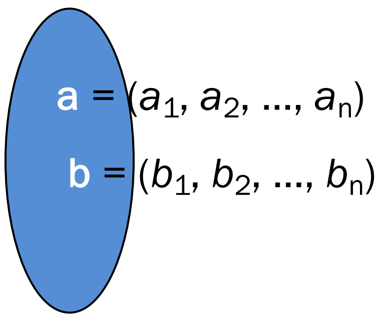




Selanjutnya kita akan mendefinisikan hasil kali dalam sebagai perluasan hasil kali titik.

Ruang vektor Euclid

Ruang Euclid R^n



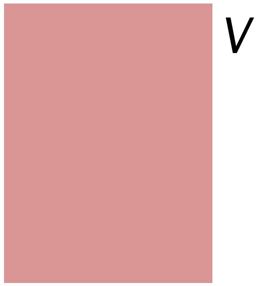
Didefiniskan:

Fungsi hasil kali titik

a.b = $a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n$

Dari hasil kali titik diturunkan rumus: (1) panjang(*norm*), (2) jarak dua vektor, (3) sudut antara dua vektor, (4) proyeksi ortogonal vektor pada vektor lain

Ruang hasil kali dalam



Didefinisikan

fungsi hasil kali dalam <**a, b**>.

Dengan fungsi tersebut akan diturunkan rumus: (1) panjang(*norm*), (2) jarak dua vektor, (3) sudut antara dua vektor, (4) proyeksi ortogonal vektor pada vektor lain

Review: Hasil kali titik di R^n

Hasil kali dalam

Panjang dan jarak dua vektor

Sudut antara dua vektor dan ortogonalitas

Proses Gram-Schmidt

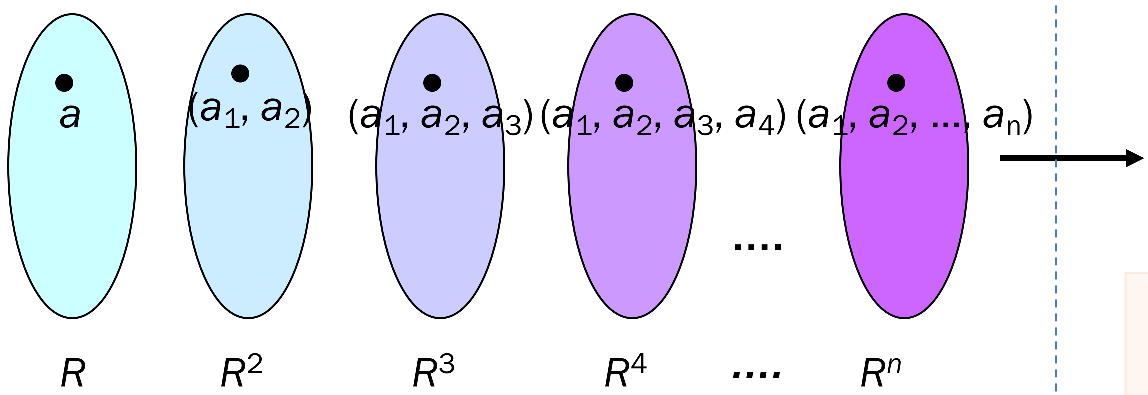
Dekomposisi QR

Matriks ortogonal

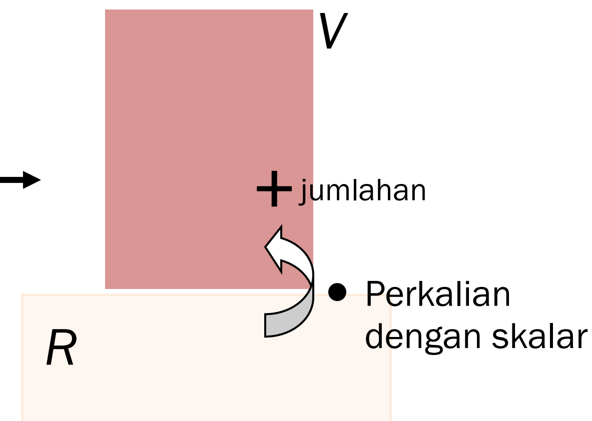
Penyelesaian kuadrat terkecil

6.1 Fungsi hasil kali dalam

Generalisasi



Ruang hasil kali dalam



u.v

Hasil kali titik

Panjang

Sudut

Jarak

Proy$_y$ **x**

<u, v>

Hasil kali dalam

Panjang

Sudut

Jarak

Proy$_y$ **x**

Definisi dan notasi: Hasil kali dalam

Definisi 6.1.: hasil kali dalam (*inner product*)

Hasil kali dalam pada suatu ruang vektor *V* adalah fungsi dari *V* x *V* ke *R* yang memetakan setiap pasangan vektor **u** dan **v** dalam *V* ke bilangan nyata $<\mathbf{u}, \mathbf{v}>$ sedemikian sehingga semua aksioma berikut ini dipenuhi:

untuk setiap vektor **u**, **v**, dan **w** dalam *V* dan semua skalar *k* berlaku:

1. $<\mathbf{u}, \mathbf{v}> = <\mathbf{v}, \mathbf{u}>$ (aksioma simetris)
2. $<\mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{w}> = <\mathbf{u}, \mathbf{w}> + <\mathbf{v}, \mathbf{w}>$ (aksioma aditif)
3. $<k\,\mathbf{u}, \mathbf{v}> = k <\mathbf{u}, \mathbf{v}>$ (aksioma homogen)
4. $<\mathbf{v}, \mathbf{v}> \geq 0$ dengan $<\mathbf{v}, \mathbf{v}> = 0$ jika dan hanya jika $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ (aksioma positif)

Biasanya notasi fungsi yang digunakan adalah *f, g, h*, dst. Fungsi dengan argument pasangan vektor ditulis sbb.

$f(\mathbf{u}, \mathbf{v})$, $g(\mathbf{u}, \mathbf{v})$, $h(\mathbf{u}, \mathbf{v})$, dst

Namun, umumnya, fungsi hasil kali dalam disajikan $<\mathbf{u}, \mathbf{v}>$. Pada prinsipnya **bisa** juga disajikan sebagai $f(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ atau notasi lain

Hasil kali titik adalah hasil kali dalam

Didefinisikan: <**u, v**> = **u.v** = $u_1v_1 + u_2v_2 + \ldots + u_nv_n$

1. **u.v = v.u** (simetri)
2. (k **u**)**.v =** k (**u.v**) (homogen)
3. **u.**(**v** + **w**) **= u.v** + **u.w** (aditif)
4. **v.v** = 0, **v.v** = 0 jika dan hanya jika **v** = 0 (positif)

(R^n,•)

Ruang Euclid

Ruang Euclid adalah ruang vektor R^n yang dilengkapi dengan hasil kali titik (*dot product*).

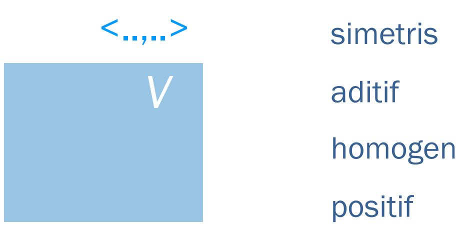
Hasil kali dalam (hkd)

Definisi 6.1.: hasil kali dalam (*inner product*)

Hasil kali dalam pada suatu ruang vektor *V* adalah fungsi dari *V* x *V* ke *R* yang memetakan setiap pasangan vektor **u** dan **v** dalam *V* ke bilangan nyata $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ sedemikian sehingga semua aksioma berikut ini dipenuhi:

untuk setiap vektor **u**, **v**, dan **w** dalam *V* dan semua skalar *k* berlaku:

1. $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle$ (aksioma simetris)
2. $\langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$ (aksioma aditif)
3. $\langle k\,\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = k \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ (aksioma homogen)
4. $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \geq 0$ dengan $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = 0$ jika dan hanya jika $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ (aksioma positif)



Ruang vektor yang dilengkapi dengan hasil kali dalam disebut sebagai **ruang hasil kali dalam**

Contoh hkd di R^n: hasil kali titik

Misalkan **u** dan **v** dua vektor di R^3, didefinisikan:

<**u**, **v**> = **u**.**v** (hasil kali titik)

Seperti sudah dibahas sebelumnya bahwa 4 sifat berikut dipenuhi:

1. <**u**, **v**> = <**v**, **u**>

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle &= u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3\\ &= v_1u_1+v_2u_2+v_3u_3\\ &= \mathbf{v}.\mathbf{u}\end{aligned}$$

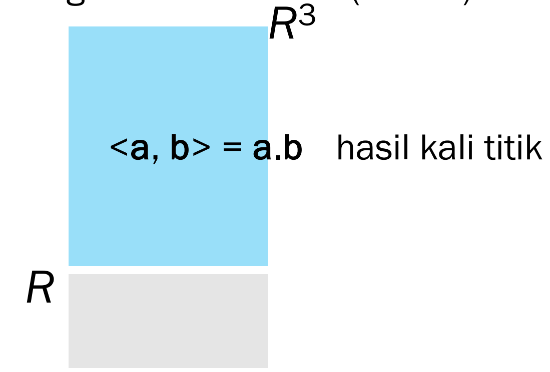
Terbukti <**u**, **v**> = <**v**, **u**>

2. <(**u** + **v**), **w**> = <**u, w**> + <**v, w**>

$$\begin{aligned}\langle(\mathbf{u}+\mathbf{v}),\mathbf{w}\rangle &= (u_1+v_1,u_2+v_2,u_3+v)_3.(w_1,w_2,w_3)\\ &= (u_1+v_1)w_1+(u_2+v_2)w_2+(u_3+v_3)w_3\\ &= (u_1w_1+v_1w_1)+(u_2w_2+v_2w_2)+(u_3w_3+v_3w_3)\\ &= \langle \mathbf{u},\mathbf{w}\rangle+\langle \mathbf{v},\mathbf{w}\rangle\end{aligned}$$

Terbukti<(**u** + **v**), **w**> = <**u, w**> + <**v, w**>

Ruang hasil kali dalam (atas *R*)



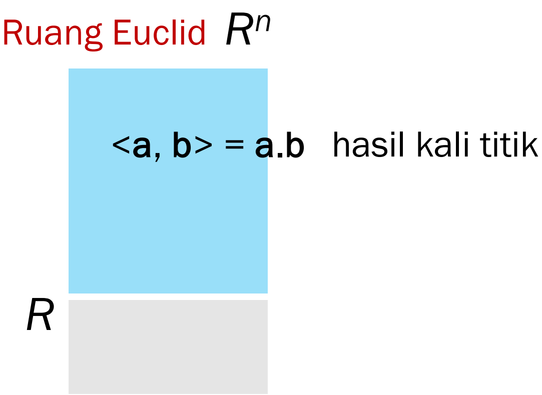
Sifat 3, dan 4 buktikan sebagai latihan. R^3 adalah ruang hasil kali dalam (ruang Euclid)

Hasil kali dalam Euclid

Di R^n hasil kali titik $<\mathbf{u}, \mathbf{v}> = \mathbf{u}.\mathbf{v}$ (hasil kali titik)

memenuhi 4 sifat berikut:

1. $<\mathbf{u}, \mathbf{v}> = <\mathbf{v}, \mathbf{u}>$
2. $<(\mathbf{u} + \mathbf{v}), \mathbf{w}> = <\mathbf{u}, \mathbf{w}> + <\mathbf{v}, \mathbf{w}>$
3. $<k\mathbf{u}, \mathbf{v}> = k <\mathbf{u}, \mathbf{v}>$
4. $<\mathbf{v}, \mathbf{v}> \geq 0$ dengan $<\mathbf{v}, \mathbf{v}> = 0$ jika dan hanya jika $\mathbf{v} = \mathbf{0}$

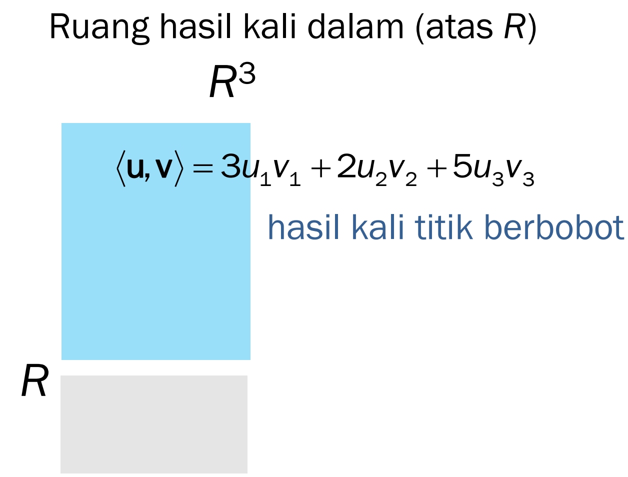


- Hasil kali titik merupakanc contoh hasil kali dalam di R^n, dan disebut hasil kali dalam Euclid.
- R^n yang dilengkapi dengan hasil kali dalam Euclid disebut ruang Euclid.

Hasil kali dalam di R^n selain hasil kali titik: hasil kali dalam berbobot

Jika **u** dan **v** dua vektor di R^3, didefinisikan:

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 3u_1v_1 + 2u_2v_2 + 5u_3v_3$$



Diselidiki apakah 4 aksioma berikut dipenuhi.

1. $<\mathbf{u}, \mathbf{v}> = <\mathbf{v}, \mathbf{u}>$
2. $<(\mathbf{u} + \mathbf{v}), \mathbf{w}> = <\mathbf{u}, \mathbf{w}> + <\mathbf{v}, \mathbf{w}>$
3. $<k\,\mathbf{u}, \mathbf{v}> = k <\mathbf{u}, \mathbf{v}>$
4. $<\mathbf{v}, \mathbf{v}> \geq 0$ dengan $<\mathbf{v}, \mathbf{v}> = 0$ jika dan hanya jika $\mathbf{v} = \mathbf{0}$

Bukti: hasil kali titik berbobot positif

$$\langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle = 3u_1v_1 + 2u_2v_2 + 5u_3v_3$$

$$\begin{aligned}
1.\langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle &= 3u_1v_1 + 2u_2v_2 + 5u_3v_3 \\
&= 3v_1u_1 + 2v_2u_2 + 5v_3u_3 \\
&= \langle \mathbf{v},\mathbf{u}\rangle
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2.\langle (\mathbf{u},\mathbf{v}),\mathbf{w}\rangle &= \langle ((u_1+v_1),(u_2+v_2),(u_3+v_3)),(w_1,w_2,w_3)\rangle \\
&= 3(u_1+v_1)w_1 + 2(u_2+v_2)w_2 + 5(u_3+v_3)w_3 \\
&= (3u_1w_1 + 2u_2w_2 + 5u_3w_3) + (3v_1w_1 + 2v_2w_2 + 5v_3w_3) \\
&= \langle (\mathbf{u},\mathbf{w}),(\mathbf{v},\mathbf{w})\rangle
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
3.\langle k\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle &= \langle k(u_1,u_2,u_3),(v_1,v_2,v_3)\rangle \\
&= \langle (ku_1,ku_2,ku_3),(v_1,v_2,v_3)\rangle \\
&= (3ku_1v_1 + 2ku_2v_2 + 5ku_3v_3) \\
&= k(3u_1v_1 + 2u_2v_2 + 5u_3v_3) \\
&= k\langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle
\end{aligned}$$

Kesimpulan: fungsi hasil kali dalam berbobot positif merupakan hasil kali dalam di R^3, disebut hasil kali titik berbobot

4. <**v**, **v**> $\geq$ 0 dengan <**v**, **v**> = 0 jika dan hanya jika **v** = **0** (buktikan sebagai latihan)

Hasil kali dalam di R^n selain hasil kali titik adalah: hasil kali dalam berbobot

Contoh-contoh hasil kali dalam di R^3:

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 30u_1v_1 + 20u_2v_2 + 5u_3v_3$$

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \tfrac{1}{5}u_1v_1 + 2u_2v_2 + \tfrac{5}{6}u_3v_3$$

$$f(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = u_1v_1 + 2u_2v_2 + 11u_3v_3$$

- Ada tak hingga banyak fungsi hasil kali dalam di R^3, disebut hasil kali dalam berbobot.
- Bobot w_i adalah bilangan nyata yang merupakan kofisien u_iv_i.
- Bobot harus berupa bilangan positif. (tunjukkan)

- Hasil kali titik adalah hasil kali dalam denganbobot satu semua.

Bukti: hasil kali titik berbobot positif

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 3u_1v_1 + 2u_2v_2 + 5u_3v_3$$

$$\begin{aligned} 1. \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle &= 3u_1v_1 + 2u_2v_2 + 5u_3v_3 \\ &= 3v_1u_1 + 2v_2u_2 + 5v_3u_3 \\ &= \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \langle (\mathbf{u}, \mathbf{v}), \mathbf{w} \rangle &= \langle ((u_1 + v_1), (u_2 + v_2), (u_3 + v_3)), (w_1, w_2, w_3) \rangle \\ &= 3(u_1 + v_1)w_1 + 2(u_2 + v_2)w_2 + 5(u_3 + v_3)w_3 \\ &= (3u_1w_1 + 2u_2w_2 + 5u_3w_3) + (3v_1w_1 + 2v_2w_2 + 5v_3w_3) \\ &= \langle (\mathbf{u}, \mathbf{w}), (\mathbf{v}, \mathbf{w}) \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3. \langle k\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle &= \langle k(u_1, u_2, u_3), (v_1, v_2, v_3) \rangle \\ &= \langle (ku_1, ku_2, ku_3), (v_1, v_2, v_3) \rangle \\ &= (3ku_1v_1 + 2ku_2v_2 + 5ku_3v_3) \\ &= k(3u_1v_1 + 2u_2v_2 + 5u_3v_3) \\ &= k\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \end{aligned}$$

Kesimpulan: fungsi hasil kali dalam berbobot positif merupakan hasil kali dalam di R^3, disebut hasil kali titik berbobot

4. <**v**, **v**> $\geq$ 0 dengan <**v**, **v**> = 0 jika dan hanya jika **v** = **0** (buktikan sebagai latihan)

Latihan 1.1: bobot negatif

1. Misalkan **u** dan **v** dua vektor di R^3, didefinisikan:

$$f(\mathbf{u},\mathbf{v}) = 3u_1v_1 + 2u_2v_2 - 5u_3v_3$$

Tunjukkan bahwa *f* bukan hasil kali dalam.

Jawab:

Ambil **v** = (1, 1, 1)

f (**v**, **v**) = 3.1.1.+ 2.1.1 -5.1.1 = 0 padahal **v** $\neq$ 0.

Aksioma positif TIDAK dipenuhi, jadi *f* bukan hasil kali dalam. Jika ada bobot yang bernilai negatif, maka fungsi tersebut bukan hasil kali dalam.

2. Berikan fungsi yang $f(R^4 x R^4) \rightarrow R$ yang merupakan hasil kali titik berbobot.

3. . Berikan fungsi yang $f(R^4 x R^4) \rightarrow R$ yang BUKAN merupakan hasil kali dalam.

bobot negatif → aksioma 4 dilanggar

Misalkan **u** dan **v** dua vektor di R^3, didefinisikan:

$$f(\mathbf{u},\mathbf{v}) = 3u_1v_1 + 2u_2v_2 - 5u_3v_3$$

Tunjukkan bahwa *f* bukan hasil kali dalam.

Jawab:

Ambil **v** = (1, 1, 1)

f (**v**, **v**) = 3.1.1.+ 2.1.1 -5.1.1 = 0 padahal $\mathbf{v} \neq 0$.

Aksioma positif TIDAK dipenuhi, jadi *f* bukan hasil kali dalam. Jika ada bobot yang bernilai negatif, maka fungsi tersebut bukan hasil kali dalam.

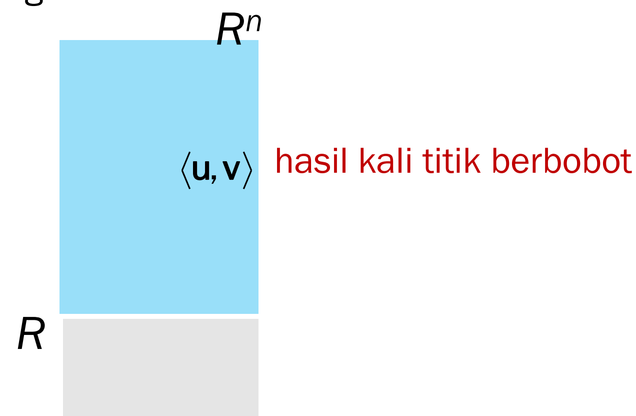
Hasil kali dalam berbobot di R^n

Definisi 6.2.: Hasil kali dalam berbobot (*weighted inner product*) di R^n

Jika **u** = $(u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n)$ dan **v** = $(v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n)$ adalah vektor-vektor dalam R^n, maka hasil kali dalam berbobot dengan $w_1, w_2, w_3, \ldots, w_n$ masing-masing merupakan bilangan nyata positif, didefinisikan sebagai:

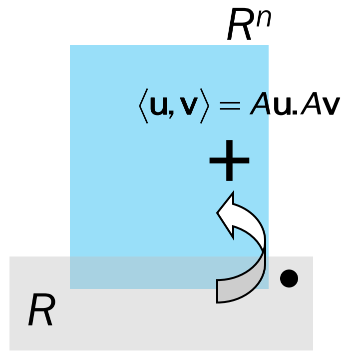
$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = w_1 u_1 v_1 + w_2 u_2 v_2 + \ldots + w_n u_n v_n$$

Ruang hasil kali dalam berbobot



Hasil kali dalam dibangkitkan matriks

A adalah matriks nxn yang mempunyai inverse.
Didefinisikan: $<\mathbf{u}, \mathbf{v}> = A\mathbf{u}.A\mathbf{v}$ (*dot product* antara $A\mathbf{u}$ dengan $A\mathbf{v}$)



Empat sifat dipenuhi:

1. $A\mathbf{u}.\ A\mathbf{v} = A\mathbf{v}.A\mathbf{u}$
2. $A\ (\mathbf{u} + \mathbf{v}).\ A\mathbf{w} = A\mathbf{u}.A\mathbf{w} + A\mathbf{v}.A\mathbf{w}$
3. $A\ (k\ \mathbf{u}.A\mathbf{v}) = k\ (A\mathbf{u}.A\mathbf{v})$
4. $A\mathbf{v}.A\mathbf{v} \geq 0$ dengan $A\mathbf{v}.A\mathbf{v} = 0$ jika dan hanya jika $\mathbf{v} = \mathbf{0}$

$A\mathbf{u}$ dan $A\mathbf{v}$ adalah vektor di R^n. Sehingga, $A\mathbf{u}.\ A\mathbf{v}$ bernilai scalar. 4 aksioma hasil kali titik dipenuhi.

Ruang vektor R^n tersebut dinamakan ruang hasil kali dalam R^n yang dibangkitkan oleh matriks A.

Latihan 1.2

1. Pada hasil kali dalam yang dibangkitkan oleh matriks A, jika A adalah matriks identitas, apa yang kalian peroleh?

2. Jika semua bobot (pada hasil kali titik berbobot) adalah 1, apa yang kamu peroleh?

Hasil kali titik di P^3 (1)

Dua sembarang vektor di P^3

$$\mathbf{p} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$$
$$\mathbf{q} = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3$$

Didefinisikan:

$$\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle = a_0 b_0 + a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

Empat sifat berikut ini dipenuhi:

1. $<\mathbf{u}, \mathbf{v}> = <\mathbf{v}, \mathbf{u}>$
2. $<(\mathbf{u} + \mathbf{v}), \mathbf{w}> = <\mathbf{u}, \mathbf{w}> + <\mathbf{v}, \mathbf{w}>$
3. $<k\,\mathbf{u}, \mathbf{v}> = k <\mathbf{u}, \mathbf{v}>$
4. $<\mathbf{v}, \mathbf{v}> \geq 0$ dengan $<\mathbf{v}, \mathbf{v}> = 0$ jika dan hanya jika $\mathbf{v} = \mathbf{0}$

Kesimpulan:

fungsi $<\mathbf{p}, \mathbf{q}>$ merupakan hasil kali dalam di P^3

Ruang hasil kali dalam

P^3

$$\mathbf{p} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$$
$$\mathbf{q} = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3$$
$$\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle = a_0 b_0 + a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

$+$

$\bullet$

R

Hasil kali titik di P^3 (2)

Dua sembarang vektor di P^3

$$\mathbf{p} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$$
$$\mathbf{q} = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3$$

Didefinisikan:

$$\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle = a_0 b_0 + 2a_1 b_1 + 7a_2 b_2 + 3a_3 b_3$$

Empat sifat berikut ini juga dipenuhi:

1. $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle$
2. $\langle (\mathbf{u} + \mathbf{v}), \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$
3. $\langle k\,\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = k \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$
4. $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \geq 0$ dengan $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = 0$ jika dan hanya jika $\mathbf{v} = \mathbf{0}$

Ruang hasil kali dalam P^3

$$\mathbf{p} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$$
$$\mathbf{q} = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3$$
$$\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle = a_0 b_0 + a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

$+$

$\bullet$

R

Kesimpulan:

fungsi <**p**, **q**> merupakan hasil kali dalam di P^3

Bukan hasil kali dalam di P^3

Ruang hasil kali dalam

P^3

$$\mathbf{p} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$$
$$\mathbf{q} = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3$$
$$\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle = a_0 b_0 + a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

$+$

$\bullet$

R

Dua sembarang vektor di P^3

$$\mathbf{p} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$$

$$\mathbf{q} = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3$$

Didefinisikan:

$$\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle = 2a_0 b_0 + 2a_1 b_1 - 7a_2 b_2 + 3a_3 b_3$$

Apakah fungsi <**p**, **q**> merupakan hasil kali dalam di P^3?

[<u>Petunjuk</u>: ambil $\mathbf{p} = 1 + x + x^2 + x^3$ tunjukkan bahwa aksioma 4 tidak dipenuhi]

Hasil kali titik di P^3 (3)

Dua sembarang vektor di P^3

$$\mathbf{p} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$$
$$\mathbf{q} = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3$$

Didefinisikan:

$$\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle = \int_{-1}^{1} p(x) q(x) dx$$

Empat sifat berikut ini dipenuhi:

1. <**u**, **v**> = <**v**, **u**>
2. <(**u** + **v**), **w**> = <**u**, **w**> + <**v**, **w**>
3. <*k* **u**, **v**> = *k* <**u**, **v**>
4. <**v**, **v**> $\geq$ 0 dengan <**v**, **v**> = 0 jika dan hanya jika **v** = **0**

Ruang hasil kali dalam

$$\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle = \int_{-1}^{1} p(x) q(x) dx$$

P^3: $\mathbf{p} = p(x)$, $\mathbf{q} = q(x)$

R

Kesimpulan:

fungsi <**p**, **q**> merupakan hasil kali dalam di P^3

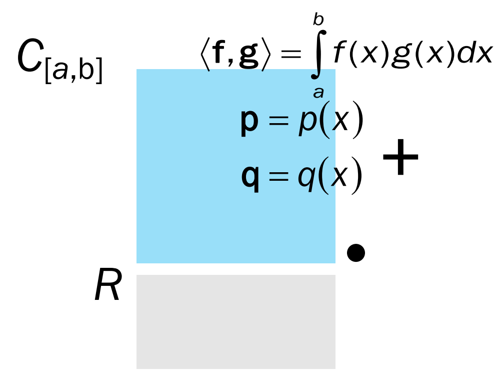
Integral tertentu: hasil kali titik di $C_{[a,b]}$

$C_{[a.b]}$ ruang vektor terdiri atas fungsi-fungsi kontinu diinterval $[a, b]$, $b > a$.

f dan **g** dua vektor di $C_{[a,\ b]}$, dengan $\mathbf{f} = f(x)$, $\mathbf{g} = g(x)$

$$\langle \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle = \int_a^b f(x) g(x) dx$$

Ruang hasil kali dalam



Hasil kali titik di P^3

Dua sembarang vektor di P^3

$$\mathbf{p} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$$
$$\mathbf{q} = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3$$

Didefinisikan: $\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle = a_0 b_0 + a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$
adalah hasil kali dalam di P3.

Didefinisikan: $\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle = a_0 b_0 + 2a_1 b_1 + 7a_2 b_2 + 3a_3 b_3$
Merupakan hasil kali dalam di P3.

Didefinisikan: $\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)dx$

Adalah hasil kali dalam di P^3.

Ruang hasil kali dalam

$$\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)dx$$

P^3: $\mathbf{p} = p(x)$, $\mathbf{q} = q(x)$

R

Bukan hasil kali dalam di P^3

Dua sembarang vektor di P^3

$$\mathbf{p} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$$

$$\mathbf{q} = b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3$$

Didefinisikan: $\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle = 2a_0b_0 + 2a_1b_1 - 7a_2b_2 + 3a_3b_3$

Apakah fungsi <**p**, **q**> merupakan hasil kali dalam di P^3?

[<u>Petunjuk</u>: ambil $\mathbf{p} = 1 + x + x^2 + x^3$ tunjukkan bahwa aksioma 4 tidak dipenuhi] : <**p**, **p**> = 0, padahal $\mathbf{p} \neq \mathbf{0}$

Hasil kali titik di $C_{[a,b]}$: Integral tertentu

$C_{[a.b]}$ ruang vektor terdiri atas fungsi-fungsi kontinu diinterval [*a, b*], *b* > *a*.

f dan **g** adalah vektor-vektor di $C_{[a,\ b]}$, dengan **f** = *f*(*x*), **g** = *g*(*x*).

Didefinisikan: $$\langle \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx$$

Ruang hasil kali dalam

$C_{[a,b]}$

$\mathbf{p} = p(x)$

$\mathbf{q} = q(x)$

$$\langle \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx$$

Hasil kali titik di M^{nxn}: trace(A^TB)

M_{nxn} ruang vektor terdiri atas semua matriks *nxn*

Jika $\mathbf{u} = A$, $\mathbf{v} = B$ matriks-matriks di M^{nxn}, didefinisikan

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \text{trace}(A^TB)$$

Fungsi di atas adalah hasil kali dalam, karena aksioma berikut dipenuhi.

1. $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle$
2. $\langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$
3. $\langle k\,\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = k \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$
4. $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \geq 0$ dengan $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = 0$ jika dan hanya jika $\mathbf{v} = \mathbf{0}$

Jadi, M^{nxn} dengan hasil kali dalam di atas merupakan ruang hasil kali dalam.

Refleksi

- Di R^2 ada berapa banyak fungsi hasil kali dalam yang kita bias definisikan?
- Tuliskan ruang hasil kali dalam R^2 selain ruang Euclid.
- Tuliskan suatu ruang hasil kali dalam dengan ruang vektor P^3. Definiskan fungsi hasil kali dalamnya.
- Buatlah suatu ruang hasil kali dalam dari M^{2x3}.

Untuk membentuk ruang hasil kali dalam harus ada 2 komponen: ruang vektor, dan fungsi hasil kali dalam.

Temukan bahasan lebih mendalam di materi ajar berikutnya

MODUL E-LEARNING ALJABAR LINIER
FAKULTAS ILMU KOMPUTER, UNIVERSITAS INDONESIA