GRAF

(*Slide Acknowledgment*: Gatot Wahyudi, Adila A. Krisnadhi)

Matematika Diskret 2

Fakultas Ilmu Komputer Universitas Indonesia

Agenda

- Lintasan dan Sirkuit
- Keterhubungan
- Graf Euler dan Hamilton

Lintasan dan Sirkuit

Lintasan dan Sirkuit

- Lintasan (baik untuk graf berarah maupun tidak berarah)

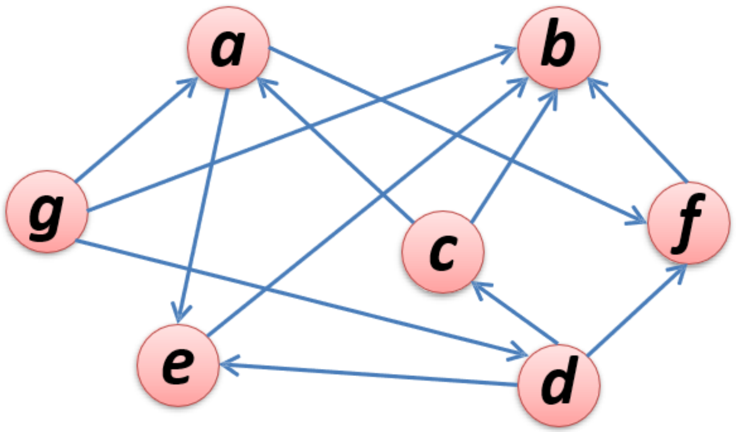
Sebuah lintasan (*path*) L dari vertex u ke vertex v dalam sebuah graf $G = (V, E)$ adalah

- barisan sisi $L = \langle e_1, e_2, \ldots, e_n \rangle$ di mana $e_1 = (u, v_1)$, $e_2 = (v_1, v_2)$, $e_3 = (v_1, v_2)$, ..., $e_n = (v_{n-1}, v)$
- dapat juga dinyatakan dalam barisan verteks $L = \langle u, v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}, v \rangle$
- Jika graf memiliki sisi ganda, lintasan dapat juga dinyatakan dalam barisan verteks-edge $L = \langle u, e_1, v_1, e_2, v_2, \ldots, v_{n-1}, e_n, v \rangle$

  - Panjang lintasan L, ditulis $p(L)$, adalah jumlah sisi pada lintasan tersebut
  - Vertex u disebut vertex awal dan vertex v disebut vertex akhir dari lintasan L
  - Jika vertex awal dan vertex akhir suatu lintasan adalah sama dan panjang lintasan lebih dari 0, maka lintasan tersebut disebut sirkuit (*circuit*, *cycle*), dituliskan dengan S

Lintasan dan Sirkuit

- Contoh
  - Tunjukkan lintasan-lintasan yang dapat dilalui dari a menuju setiap verteks lainnya
  - Berapakah panjang masing-masing lintasan?

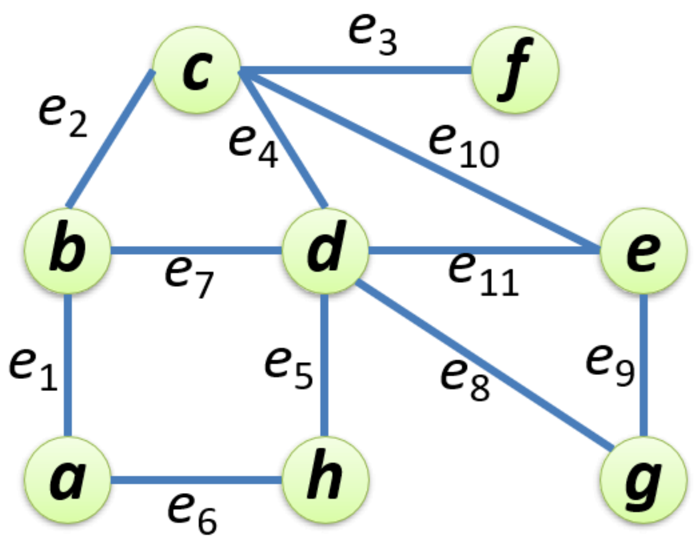


Lintasan dan Sirkuit

- Lintasan sederhana (*simple path*)
  - Lintasan yang tidak mengandung sisi yang sama lebih dari satu kali
- Sirkuit sederhana (*simple circuit*)
  - Sirkuit yang tidak mengandung sisi yang sama lebih dari satu kali

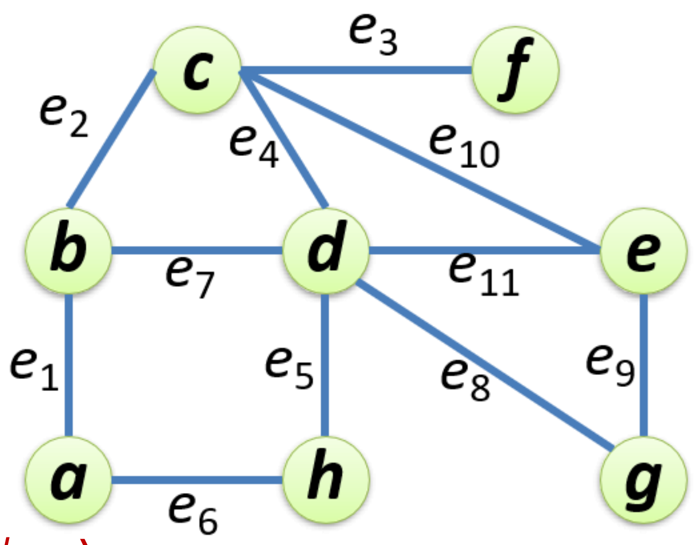
- Lintasan elementer (*elementary path*)
  - Lintasan yang tidak mengandung vertex yang sama lebih dari satu kali
- Sirkuit elementer (*elementary circuit*)
  - Sirkuit yang tidak mengandung vertex yang sama lebih dari satu kali (kecuali vertex awal dan akhir)

Lintasan dan Sirkuit



- Contoh
  - Perhatikan beberapa lintasan dari *a* ke *f* yaitu:
    - $L_1 = \langle e_1, e_2, e_3 \rangle = \langle a, b, c, f \rangle$
    - $L_2 = \langle e_1, e_2, e_4, e_8, e_9, e_{10}, e_3 \rangle = \langle a, b, c, d, g, e, c, f \rangle$
    - $L_3 = \langle e_1, e_2, e_4, e_7, e_2, e_4, e_8, e_9, e_{10}, e_3 \rangle = \langle a, b, c, d, b, c, d, g, e, c, f \rangle$
- L_1 adalah lintasan sederhana sekaligus lintasan elementer
- L_2 adalah lintasan sederhana yg bukan lintasan elementer karena ada vertex *c* yang dilalui lebih dari satu kali
- L_3 bukan lintasan sederhana karena ada sisi $e_2 = (b, c)$ atau sisi $e_4 = (c, d)$ dilalui dua kali, dan bukan lintasan elementer karena vertex b, c, dan d masing-masing dilalui lebih dari satu kali

Lintasan dan Sirkuit



- Contoh
  - Graf di samping mempunyai beberapa sirkuit:
    - $S_1 = \langle e_1, e_2, e_4, e_5, e_6 \rangle = \langle a, b, c, d, h, a \rangle$
    - $S_2 = \langle e_1, e_2, e_4, e_8, e_9, e_{11}, e_5, e_6 \rangle = \langle a, b, c, d, g, e, d, h, a \rangle$
    - $S_3 = \langle e_1, e_2, e_4, e_8, e_9, e_{10}, e_4, e_5, e_6 \rangle = \langle a, b, c, d, g, e, c, d, h, a \rangle$
- S_1 adalah sirkuit sederhana sekaligus sirkuit elementer
- S_2 adalah sirkuit sederhana yang bukan sirkuit elementer karena ada vertex d yang dilalui lebih dari satu kali
- S_3 bukan sirkuit sederhana karena ada sisi $e_4 = (c, d)$ dilalui dua kali, dan juga bukan sirkuit elementer karena vertex c dan d dilalui masing-masing lebih dari satu kali

Lintasan dan Sirkuit

- Teorema

Dalam sebuah graf berarah maupun tidak berarah G dengan n buah vertex, untuk setiap pasang vertex u & v berlaku:

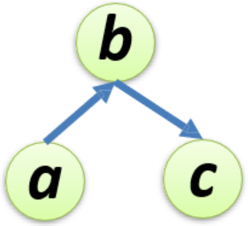
Jika dari u terdapat sebuah lintasan L ke v, maka terdapat lintasan L' dengan panjang lintasan $p(L') \leq (n - 1)$ dari u ke v.

Untuk sebuah graf berarah maupun tidak berarah G dengan urutan vertex $v_1, v_2, \ldots, v_n$, dan A adalah matriks ketetanggaan (*adjacency matrix*) untuk G, maka:

Jumlah lintasan dengan panjang r dari v_i ke v_j sama dengan jumlahan semua elemen $\boldsymbol{a_{ij}}$ pada A^r.

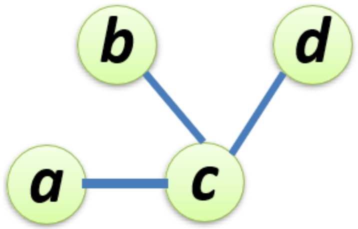
Lintasan dan Sirkuit

- Contoh
  - Tentukan jumlah lintasan dengan panjang 2 pada graf *G* berikut.



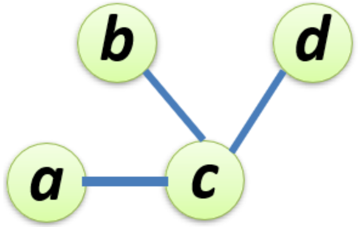
- Jawab
  - Matriks ketetanggaan untuk *G* (dengan urutan a, b, c):
    - $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
  - Untuk mendapatkan lintasan dengan panjang 2 maka harus ditentukan A^2:
    - $A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
  - Jadi, lintasan dengan panjang 2 pada *G* hanya satu yaitu dari *a* ke *c*

Lintasan dan Sirkuit



- Contoh
  - Tentukan jumlah lintasan dengan panjang 2 pada graf G berikut.
- Jawab
  - Matriks ketetanggaan untuk G (dengan urutan a, b, c, d):
    - $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$
  - Untuk mendapatkan lintasan dengan panjang 2 maka harus ditentukan A^2:
    - $A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
  - Jadi, lintasan dengan panjang 2 pada G ada 12 lintasan

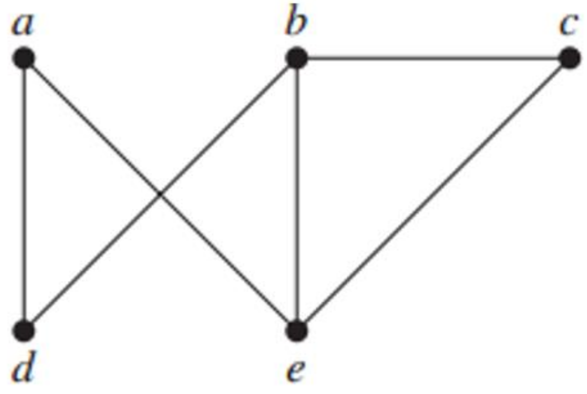
Lintasan dan Sirkuit

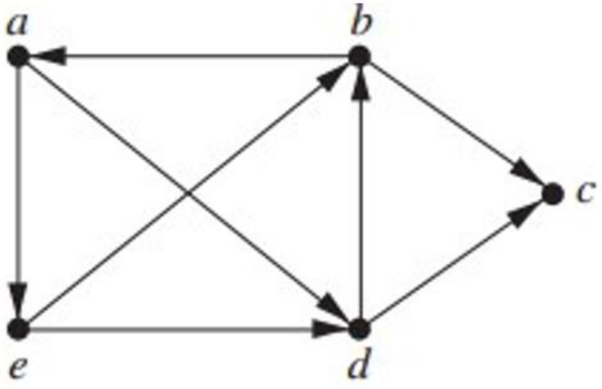


- Contoh
  - Tentukan jumlah lintasan dengan panjang 3 pada graf *G* berikut.
- Jawab
  - Matriks ketetanggaan untuk *G* (dengan urutan a, b, c, d):
    - $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ dan $A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
  - Untuk mendapatkan lintasan dengan panjang 3 maka harus ditentukan A^3:
    - $A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$
  - Jadi, lintasan dengan panjang 3 pada *G* ada 18 lintasan

Lintasan dan Sirkuit

- Contoh
  - Tentukan jumlah lintasan dan sirkuit dengan panjang 3 yang pada graf-graf berikut:





Keterhubungan

Keterhubungan (*Connectivity*)

- Definisi keterhubungan pada graf tidak berarah

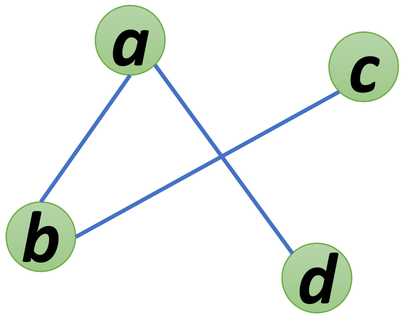
Suatu graf tidak berarah G dikatakan terhubung (*connected*) jika dan hanya jika terdapat lintasan antara setiap pasang verteks pada G.

- Definisi keterhubungan pada graf berarah

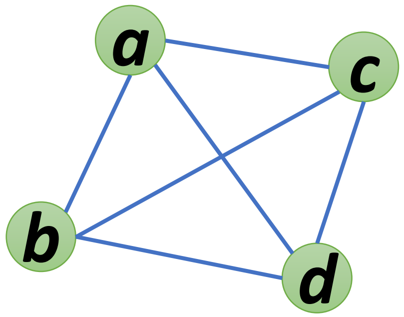
Suatu graf berarah G dikatakan terhubung kuat (*strongly connected*) jika dan hanya jika untuk setiap pasang verteks u dan v pada G, terdapat lintasan dari u ke v dan dari v ke u.

Suatu graf berarah G dikatakan terhubung (*weakly connected*) jika dan hanya jika terdapat lintasan antara setiap pasang verteks pada G jika arah sisinya diabaikan (*underlying connected graph*).

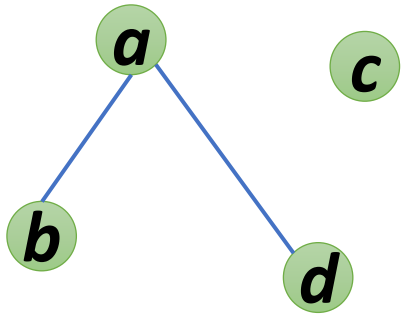
Keterhubungan (*Connectivity*)



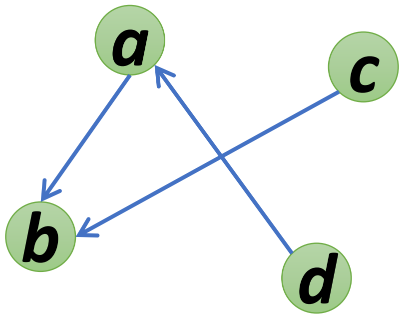
Terhubung



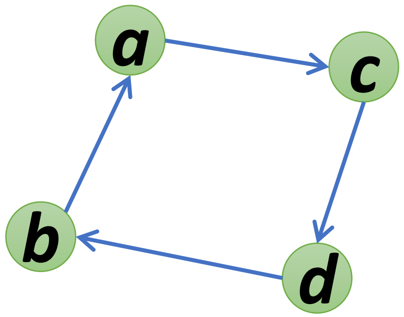
Terhubung



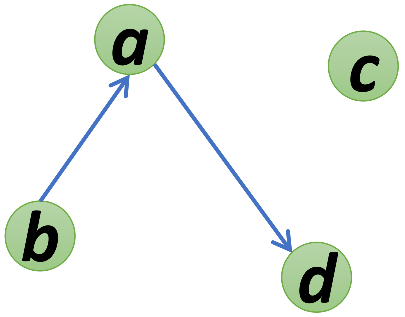
Tidak Terhubung



Terhubung
(*Weakly Connected*)



Terhubung kuat
(*Strongly Connected*)



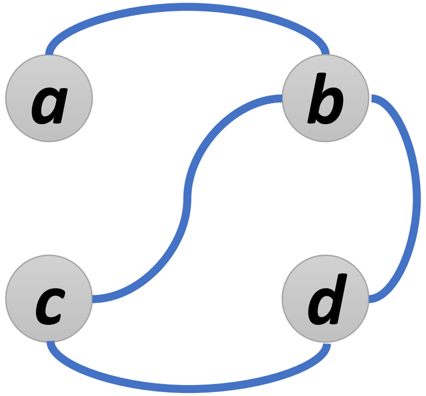
Tidak Terhubung

Memeriksa Keterhubungan

- Contoh Soal 1

  Buktikan bahwa graf tak berarah $G = (V, E)$ dengan

  $V = \{ a, b, c, d\}$ dan $E = \{ (a, b), (b, c), (b, d), (c, d) \}$ adalah terhubung



Memeriksa Keterhubungan

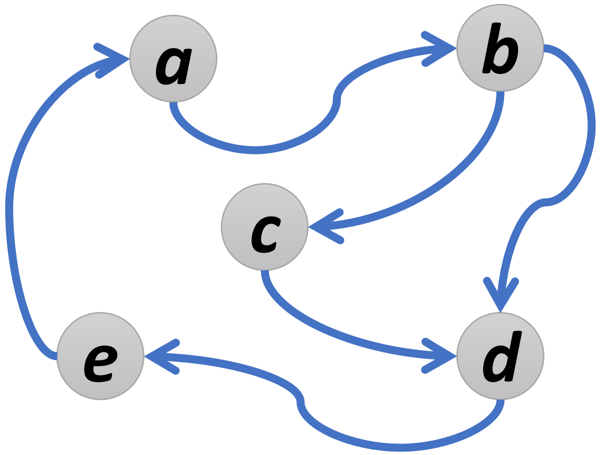
- Jawab (Cara 1)
  - *G* terhubung karena untuk setiap dua vertex berbeda terdapat lintasan:
    - sepanjang 1 dari *a* ke *b*: $\langle a, b\rangle$
    - sepanjang 2 dari *a* ke *c*: $\langle a, b, \mathrm{c}\rangle$
    - sepanjang 2 dari *a* ke *d*: $\langle a, b, d\rangle$
    - sepanjang 1 dari *b* ke *c*: $\langle b, c\rangle$
    - sepanjang 1 dari *b* ke *d*: $\langle b, d\rangle$
    - sepanjang 1 dari *c* ke *d*: $\langle c, d\rangle$

Memeriksa Keterhubungan

- Jawab (Cara 2)
  - Menggunakan matriks ketetanggaan (*adjacency matrix*) dari graf, misalnya M_G beserta pangkat-pangkatnya $(M_G)^2$, $(M_G)^3$, …
    - $M_G = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ $\quad (M_G)^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$
  - Terlihat bahwa $(a_{ij} \neq 0) \vee (b_{ij} \neq 0)$, dengan $i, j = 1, 2, 3, 4$ pada M_G dan $(M_G)^2$
  - Antara sepasang vertex selalu ada lintasan dengan panjang 1 (sebanyak 8) atau 2 (sebanyak 18)

Memeriksa Keterhubungan

- Contoh Soal 2
  - Buktikan bahwa graf berarah $G = (V, E)$ dengan $V = \{ a, b, c, d, e \}$ dan $E = \{ (a, b), (b, c), (b, d), (c, d), (d, e), (e, a) \}$ adalah terhubung kuat

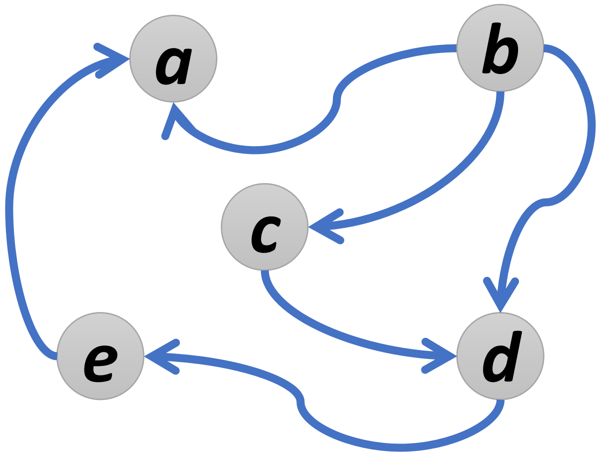


Memeriksa Keterhubungan

- Jawab
  - *G* terhubung kuat karena untuk setiap dua vertex berbeda terdapat lintasan:
    - sepanjang 1 dari *a* ke *b*: $\langle a, b\rangle$
    - sepanjang 2 dari *a* ke *c*: $\langle a, b, \mathrm{c}\rangle$
    - sepanjang 2 dari *a* ke *d*: $\langle a, b, d\rangle$
    - sepanjang 4 dari *a* ke *e*: $\langle a, b, c, d, e\rangle$
    - …
    - sepanjang 3 dari *e* ke *c* : $\langle e, a, b, c\rangle$
    - sepanjang 4 dari *e* ke *d*: $\langle e, a, b, c, d\rangle$

Memeriksa Keterhubungan

- Contoh Soal 3
  - Buktikan bahwa graf berarah $G = (V, E)$ dengan $V = \{ a, b, c, d, e \}$ dan $E = \{ (b, a), (b, c), (b, d), (c, d), (d, e), (e, a) \}$ adalah tidak terhubung kuat tetapi terhubung



Memeriksa Keterhubungan

- Jawab
  - G tidak terhubung kuat karena tidak ada lintasan dari a ke b, tetapi G terhubung karena jika G dipandang sebagai graf tidak berarah maka matriks ketetanggaan M_G adalah:
  - $M_G = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ $\qquad (M_G)^2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$
  - Terlihat bahwa $(a_{ij} \neq 0) \vee (b_{ij} \neq 0)$, dengan $i, j = 1, 2, 3, 4, 5$ pada M_G dan $(M_G)^2$, yang berarti antara sepasang vertex selalu ada lintasan dengan panjang 1 (sebanyak 12) atau 2 (sebanyak 30)

Komponen Terhubung (*Connected Components*)

- Definisi

> Suatu subgraf *H* dari graf *G* (baik graf tidak berarah maupun graf berarah yang diabaikan arah sisinya) disebut komponen terhubung jika dan hanya jika *H* terhubung dan *H* bukan proper subgraf dari komponen terhubung lain pada *G*.
>
> Dapat dikatakan juga bahwa *H* terhubung maksimal.

- Perhatikan bahwa graf *G* pada definisi di atas tidak harus terhubung
- Graf tidak terhubung dapat dipecah ke dalam dua atau lebih komponen
- Suatu graf dikatakan terhubung jika dan hanya jika graf tersebut hanya terdiri dari satu komponen
- Suatu graf yang terdiri dari *n* verteks dapat terdiri dari paling sedikit satu komponen dan paling banyak *n* komponen

Komponen Terhubung (*Connected Components*)

- Komponen terhubung kuat pada graf berarah

Suatu subgraf *H* dari graf berarah *G* disebut komponen terhubung kuat (*strongly connected component*) jika dan hanya jika *H* terhubung kuat dan *H* bukan proper subgraf dari komponen terhubung lain pada *G*.

Memeriksa Keterhubungan

- Contoh Soal 4
  - Buktikan bahwa graf $G = (V, E)$ dengan $V = \{ a, b, c, d, e, f\}$ dan $E = \{ (a, c), (b, c), (d, f), (f, e) \}$ tidak terhubung

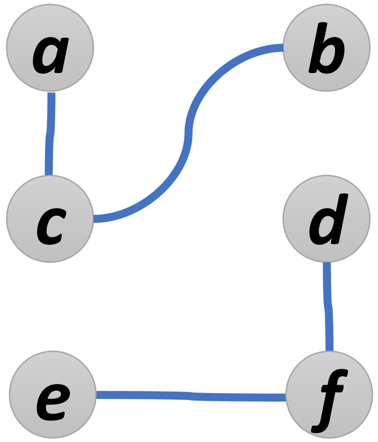
- Jawab (Cara 1)

  Graf G memiliki lebih dari satu komponen

- Jawab (Cara 2)

  Tidak terdapat lintasan dari a ke d

  (*Counterexample*)

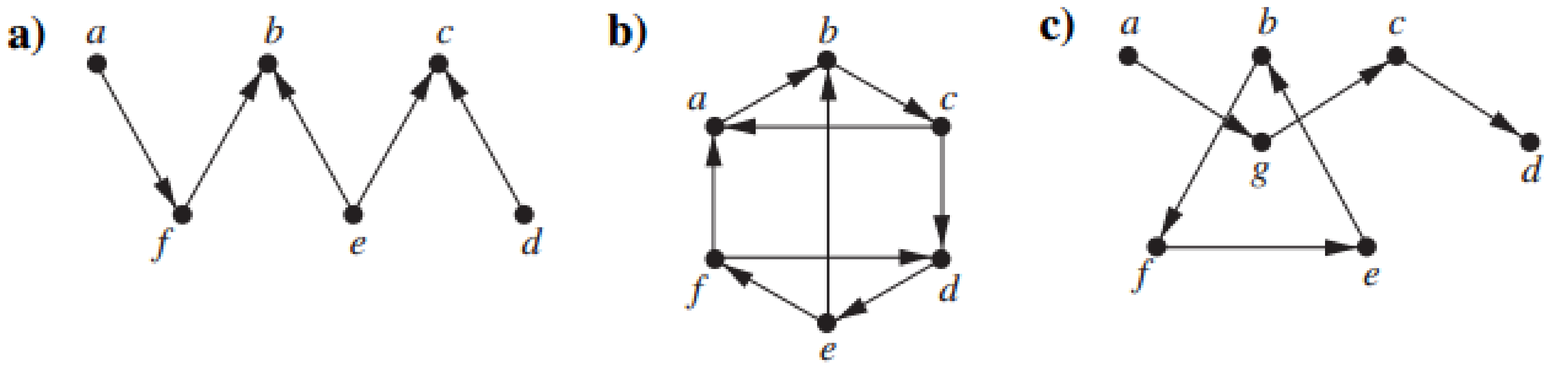


Memeriksa Keterhubungan

- Jawab (Cara 3)
  - Menggunakan matriks ikatan, misalnya M_G,
    - $M_G = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}$
  - $(M_G)^r$ untuk r=0,1,2,.. selalu dapat dijadikan matriks blok *B,* terdapat submatriks yang merupakan matriks nol.

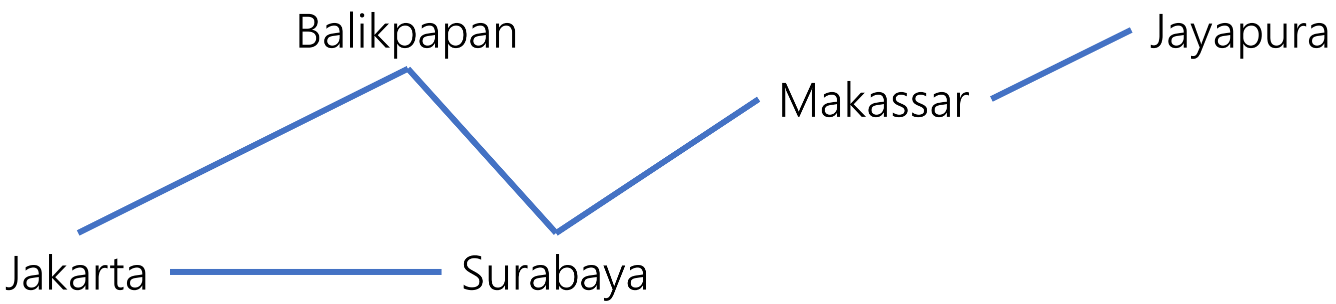
Latihan

- Soal
  - Tentukan apakah graf-graf berikut ini adalah graf terhubung kuat atau hanya terhubung



Cut Vertex & Cut Edge

- Bagaimana memeriksa seberapa handal keterhubungan sebuah graf (tidak berarah)?
- Bagaimana mengetahui jalur-jalur kritis pada sebuah peta yang menghubungkan beberapa kota?



Cut Vertex & Cut Edge

- *Cut vertex*

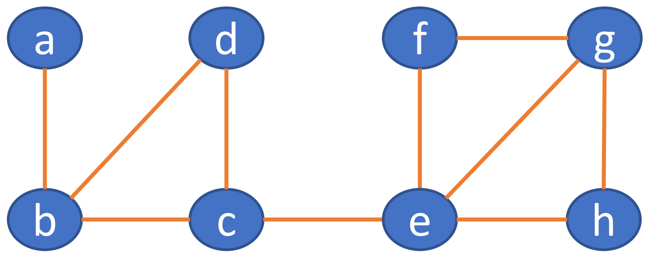
Suatu verteks *v* pada graf terhubung G disebut *cut vertex* (*cut node/articulation point*) jika dan hanya penghapusan verteks tersebut akan membuat graf G menjadi tidak terhubung.

- *Cut edge*

Suatu *edge u* pada graf terhubung G disebut *cut edge (jembatan/bridge*) jika dan hanya penghapusan *edge* tersebut akan membuat graf G menjadi tidak terhubung.

Cut Vertex & Cut Edge

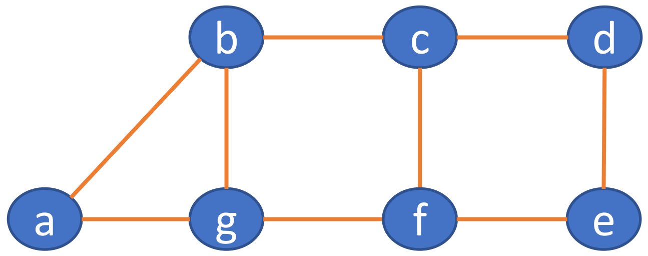
- Contoh:



- Tuliskan semua *cut vertex* dari graf di atas.
    - b, c, dan e
- Tuliskan semua *cut edge* dari graf di atas.
    - (a,b) dan (c,e)

Cut Vertex & Cut Edge

- Contoh graf *H*:



  - Tuliskan semua *cut vertex* dari graf di atas.
    - Tidak ada
  - Tuliskan semua *cut edge* dari graf di atas.
    - Tidak ada

- Graf *H* adalah contoh *nonseparable graph*

Cut Vertex & Cut Edge

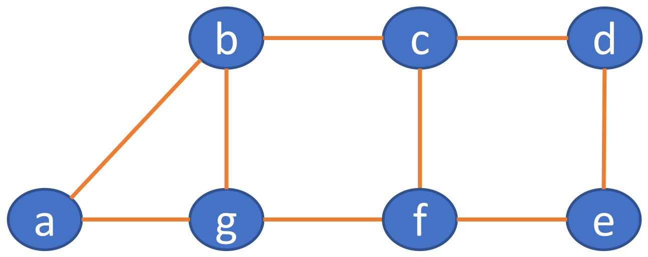
- Tidak semua graf memiliki *cut vertex* atau *cut edge*. Dengan demikian, setiap graf mungkin memiliki derajat keterhubungan yang berbeda satu sama lain.

Misalkan terdapat graf $G = (V, E)$ yang terhubung.

- ***Vertex-cut set*** atau ***separating set***:
  - Subhimpunan vertex V' pada G yang jika dihapus akan menyebabkan G menjadi tidak terhubung
- ***Edge-cut set*** atau ***cut set***
  - Subhimpunan edge E' pada G yang jika dihapus akan menyebabkan G menjadi tidak terhubung

Cut Vertex & Cut Edge

- Contoh graf *X*:



- Tuliskan semua *vertex cut* dari graf *X*.
  - {b,g}, {b,f}, {c,e}, {c,f}, {c,g}, {d,f}, ada lagi?
- Tuliskan semua *edge cut* dari graf *X*.
  - {(a,b),(a,g)}, {(b,c),(g,f)}, {(c,d),(f,e)}, {(c,d),(d,e)}, {(d,e),(f,e)}, ada lagi?

Cut Vertex & Cut Edge

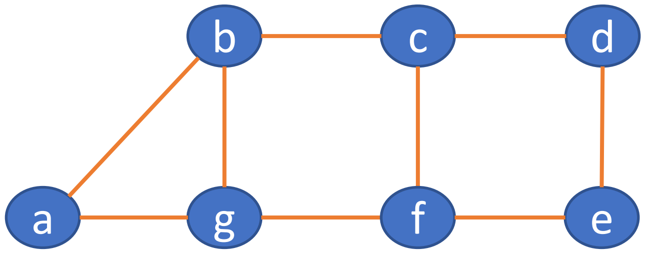
- Suatu graf mungkin saja memiliki lebih dari satu *vertex cut* atau *edge cut*.

> - *Vertex connectivity* ($\boldsymbol{\kappa}(\boldsymbol{G})$): jumlah vertex minimum pada sebuah ***vertex cut/separating set***
> - *Edge connectivity* ($\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{G})$): jumlah edge minimum pada sebuah ***edge cut/cut set***

- Kasus khusus: jika G merupakan graf lengkap K_n, maka $\boldsymbol{\kappa}(\boldsymbol{G}) = \boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{G}) = n - 1$
- Jika graf G tidak terhubung atau hanya terdiri dari satu verteks, maka $\boldsymbol{\kappa}(\boldsymbol{G}) = \boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{G}) = 0$
- Jika graf G memiliki satu cut vertex atau satu cut edge, maka $\boldsymbol{\kappa}(\boldsymbol{G}) = \boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{G}) = 1$
- Graf G dikatakan k-connected jika $\boldsymbol{\kappa}(\boldsymbol{G}) \geq k$
- Pada graf tidak berarah G, berlaku $\boldsymbol{\kappa}(\boldsymbol{G}) \leq \boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{G}) \leq \min_{v \in V} \deg(v)$

Cut Vertex & Cut Edge

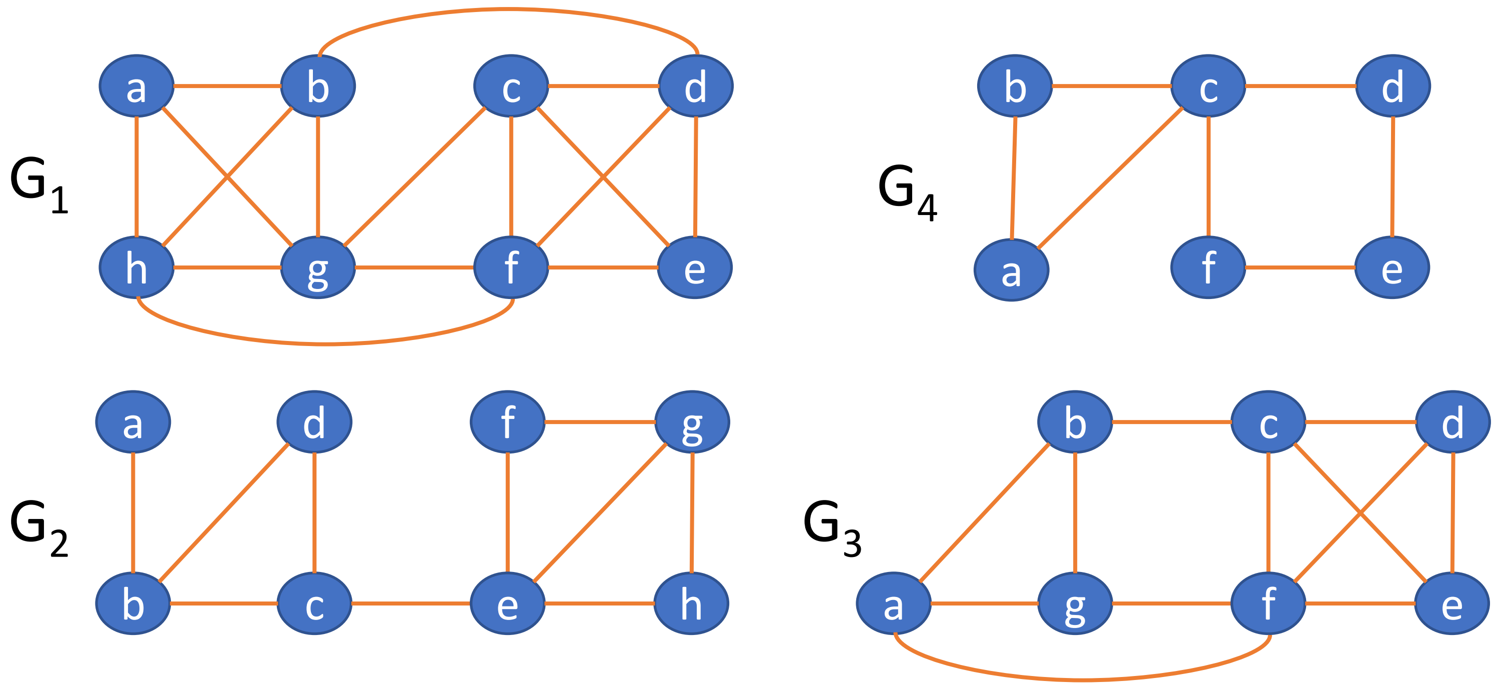
- Contoh graf *X*:



- Tentukan *vertex-connectivity* dari graf *X*.
  - $\kappa(X) = 2$
- Tentukan *edge-connectivity* dari graf *X*.
  - $\lambda(X) = 2$

Cut Vertex & Cut Edge

- Latihan:

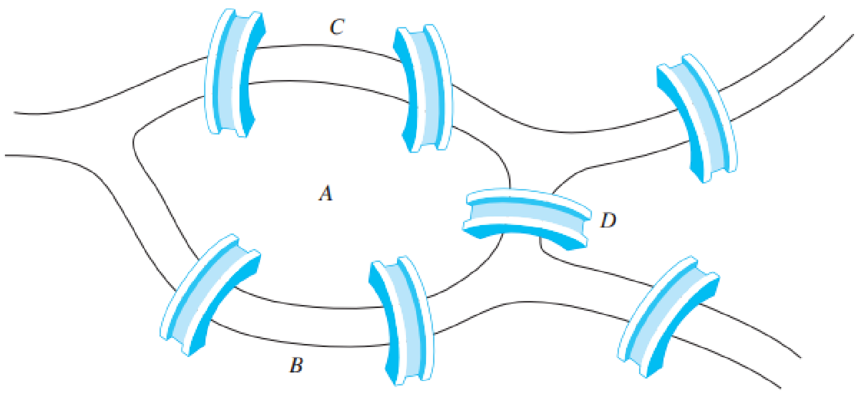


Tuliskan vertex connectivity dan edge connectivity dari graf-graf di atas.

Graf Euler dan Hamilton

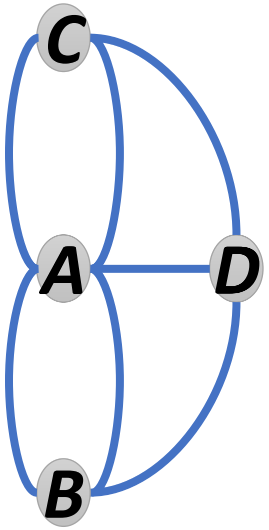
Lintasan dan Sirkuit Euler

- *Konigsberg Bridge Problem*
  - Kota Konigsberg di Prussia mempunyai sungai dan 7 jembatan berbentuk seperti pada gambar di bawah
  - Timbul pertanyaan:
    - Adakah cara seseorang memulai berjalan dari satu daratan ke daratan yang lain dengan melalui 7 jembatan masing-masing satu kali dan kembali ke tempat asalnya?



[ROSSEN]

Apakah ada sebuah sirkuit sederhana yang melalui semua sisi? Sirkuit seperti ini memiliki sebutan khusus yaitu Sirkuit Euler.



Lintasan dan Sirkuit Euler

- Definisi

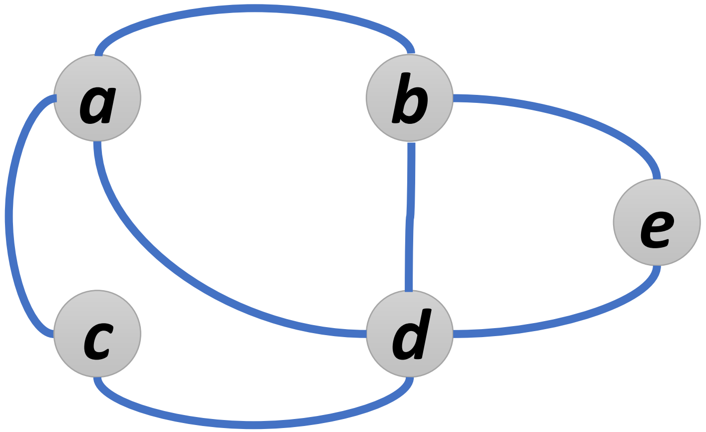
Sebuah lintasan L pada graf sederhana atau graf ganda $G = (V, E)$ disebut lintasan Euler jika L adalah lintasan sederhana yang mengandung semua $e \in E$

Sebuah sirkuit S pada graf G disebut sirkuit Euler jika S adalah sirkuit sederhana yang mengandung semua $e \in E$

Contoh

- Soal
  - Identifikasi semua lintasan Euler dan sirkuit Euler yang dimulai dari vertex *a* jika ada!

- Jawab
  - Lintasan Euler dari *a*:
    - $L_1 = \langle a, c, d, a, b, d, e, b \rangle$
    - $L_2 = \langle a, d, b, a, c, d, e, b \rangle$
    - $L_3 = \langle a, b, e, d, c, a, d, b \rangle$
    - …

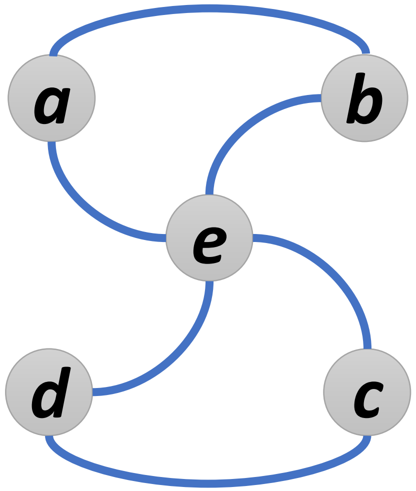


  - Sirkuit Euler dari *a*:
    - Tidak ada

Contoh

- Soal
  - Identifikasi semua lintasan Euler dan sirkuit Euler yang dimulai dari vertex *a* jika ada!

- Jawab
  - Lintasan Euler dari *a*:
    - $L_1 = \langle a, b, e, c, d, e, a \rangle$
    - $L_2 = \langle a, b, e, d, c, e, a \rangle$
    - $L_3 = \langle a, e, c, d, e, b, a \rangle$
    - $L_4 = \langle a, e, d, c, e, b, a \rangle$



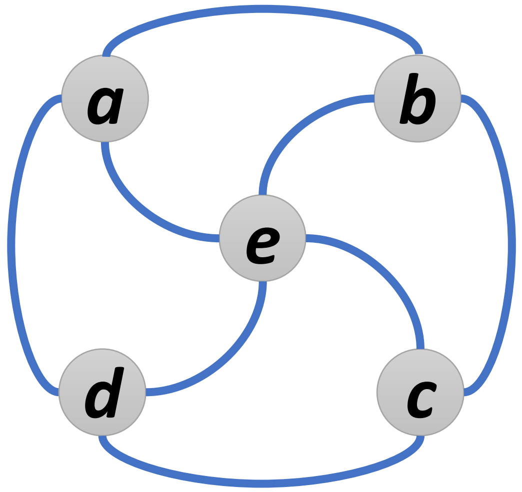
  - Sirkuit Euler dari *a*:
    - Semua lintasan Euler di atas merupakan sirkuit Euler

Contoh

- Soal
  - Identifikasi semua lintasan Euler dan sirkuit Euler yang dimulai dari vertex *a* jika ada!

- Jawab
  - Lintasan Euler dari *a*:
    - Tidak ada

  - Sirkuit Euler dari *a*:
    - Tidak ada



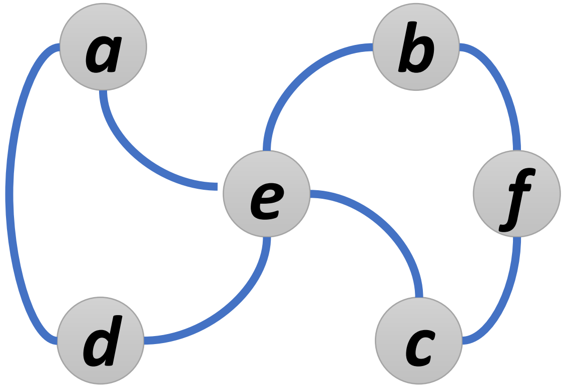
Lintasan dan Sirkuit Euler

- Teorema untuk **multigraf terhubung**

Suatu graf $G = (V, E)$ memiliki sirkuit Euler jika dan hanya jika setiap vertex $v \in V$ berderajat genap

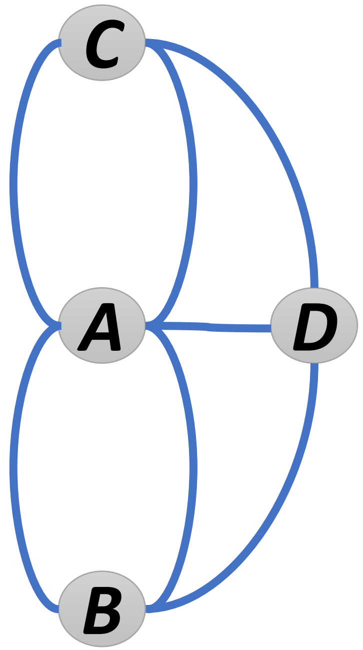
Suatu graf $G = (V, E)$ memiliki sebuah lintasan Euler tetapi tidak memiliki sirkuit Euler jika dan hanya jika G memiliki tepat dua vertex berderajat ganjil

Contoh



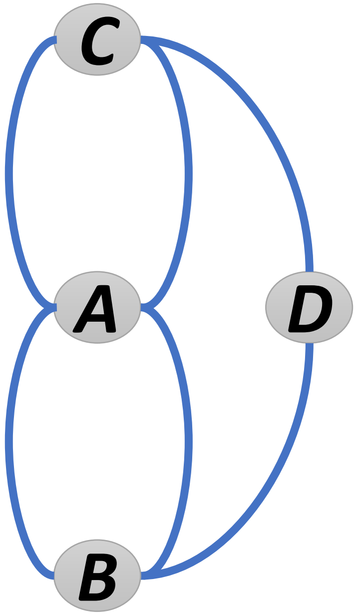
- Soal
  - Temukan salah satu lintasan dan sirkuit Euler pada graf berikut jika ada!
- Jawab
  - Graf di samping pasti mempunyai sirkuit Euler karena terhubung dan setiap vertexnya berderajat genap
    - deg(a) = 2; deg(b) = 2; deg(c) = 2; deg(d) = 2; deg(e) = 4; dan deg(f) = 2
  - Karena mempunyai sirkuit Euler maka pasti mempunyai lintasan Euler
  - Salah satu sirkuit dan lintasan Euler pada graf:
    - $L = S = \langle f, b, e, a, d, e, c, f \rangle$

Contoh



- Soal
  - Apakah graf di samping mempunyai lintasan atau sirkuit Euler? Temukan salah satunya jika ada!
- Jawab
  - Graf representasi *Konigsberg bridge* adalah terhubung dengan derajat setiap vertexnya:
    - deg(a) = 5; deg(b) = 3; deg(c) = 3; deg(d) = 3
  - Graf tersebut tidak memiliki sirkuit Euler karena ada verteks berderajat ganjil.
  - Graf tersebut tidak memiliki lintasan Euler karena tidak tepat dua verteks yang berderajat ganjil.

Contoh



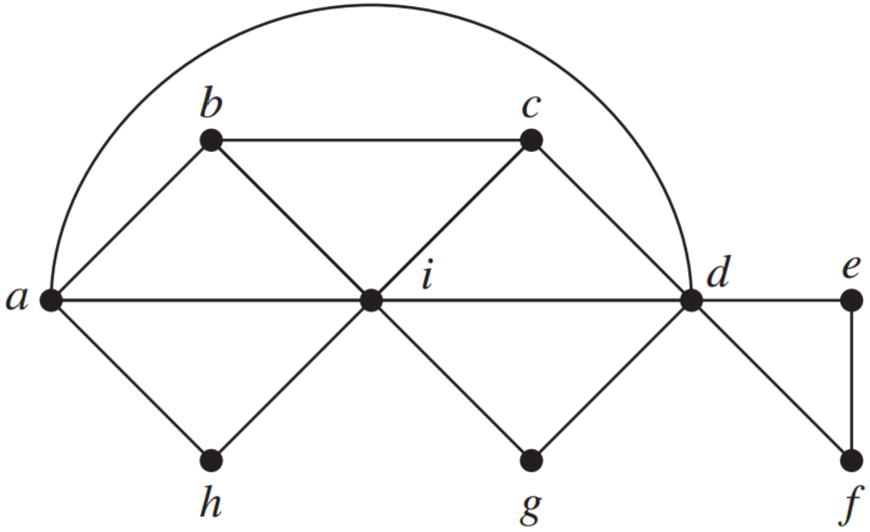
- Soal
  - Apakah graf di samping mempunyai lintasan atau sirkuit Euler? Temukan salah satunya jika ada!
- Jawab
  - Graf di samping adalah terhubung dengan derajat setiap vertexnya:
    - deg(a) = 4; deg(b) = 3; deg(c) = 3; deg(d) = 2
  - Berdasarkan teorema maka terdapat lintasan Euler tetapi tidak terdapat sirkuit Euler
  - Salah satu lintasan Euler pada graf:
    - $L = \langle B, D, C, A, B, A, C \rangle$

Aplikasi Lintasan dan Sirkuit Euler

- *Postman problem*
  - Untuk mencari cara bagaimana agar seorang petugas pos harus melalui semua jalan yang diperlukan untuk menyampikan pesan dimana setiap jalan cukup dilewati satu kali
- *Electronic and Networking*
  - *Layout* sirkuit elektronik atau *network multicasting* dapat dibuat efisien dengan memanfaatkan lintasan/sirkuit Euler
- *Molecular biology*
  - Lintasan Euler dapat digunakan pada pengurutan DNA

Latihan

- Soal
  - Selidiki apakah graf berikut mempunyai lintasan atau sirkuit Euler. Jika ya maka tunjukkan salah satunya!



Lintasan dan Sirkuit Hamilton

- Definisi

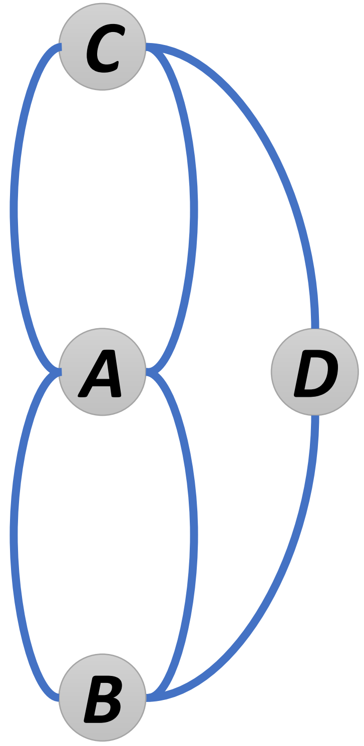
Sebuah lintasan *L* pada suatu graf sederhana atau graf berganda $G = (V, E)$ disebut lintasan Hamilton apabila *L* adalah sebuah lintasan yang melalui setiap $v \in V$ tepat satu kali

Sebuah sirkuit *S* pada *G* disebut sirkuit Hamilton apabila *S* adalah sebuah sirkuit yang melalui setiap $v \in V$ tepat satu kali (kecuali vertex awal dan akhir)

Contoh

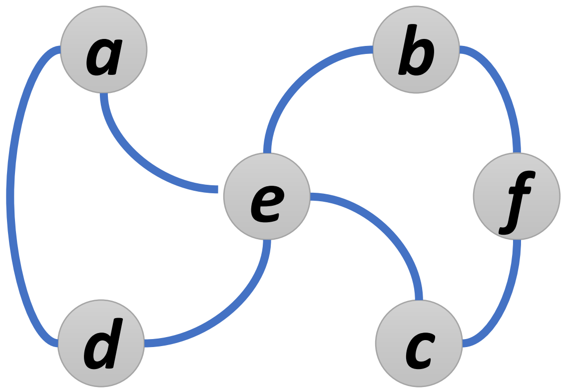
- Soal
  - Temukan salah satu lintasan dan sirkuit Hamilton pada graf di bawah jika ada!

- Jawab
  - Beberapa lintasan Hamilton yang mungkin:
    - $L_1 = \langle A, B, D, C \rangle$
    - $L_2 = \langle B, A, C, D \rangle$
    - $L_3 = \langle D, C, A, B \rangle$
  - Beberapa sirkuit Hamilton yang mungkin:
    - $S_1 = \langle A, B, D, C, A \rangle$
    - $S_2 = \langle D, C, A, B, D \rangle$



Contoh

- Soal
  - Temukan salah satu lintasan dan sirkuit Hamilton pada graf berikut jika ada!

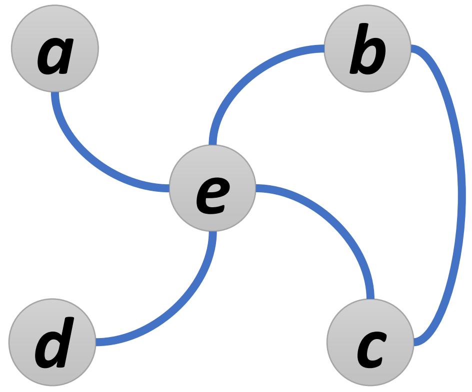


- Jawab
  - Salah satu lintasan Hamilton pada graf:
    - $L = \langle a, d, e, b, f, c \rangle$
  - Graf tersebut tidak mempunyai sirkuit Hamilton karena setiap lintasan yang melibatkan semua vertex harus melewati *e* sebanyak dua kali

Contoh

- Soal
  - Identifikasi semua lintasan Hamilton dan sirkuit Hamilton pada graf di bawah jika ada!

- Jawab
  - Tidak ada lintasan Hamilton:
    - vertex *e* harus dilalui dua kali
  - Tidak ada sirkuit Hamilton:
    - vertex *a* dan *d* berderajat 1



Lintasan dan Sirkuit Hamilton

- Teorema

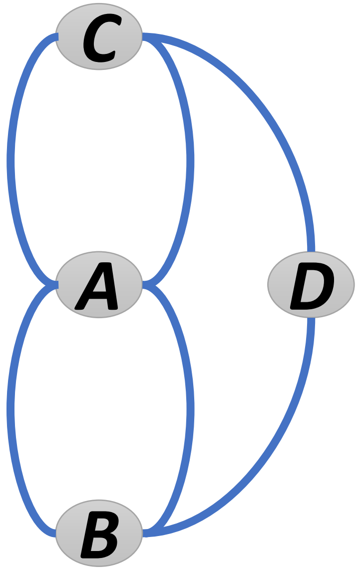
[ORE's THEOREM]

Jika G adalah graf sederhana dengan n buah vertex ($n \geq 3$) sedemikian hingga jumlah derajat setiap pasang vertex yang tidak bersisian $\geq n$ maka G mempunyai suatu sirkuit Hamilton

[DIRAC's THEOREM]

Jika G adalah graf sederhana dengan n buah vertex ($n > 3$) dengan setiap vertex mempunyai derajat $\geq {}^{n}/_{2}$ maka G mempunyai suatu sirkuit Hamilton

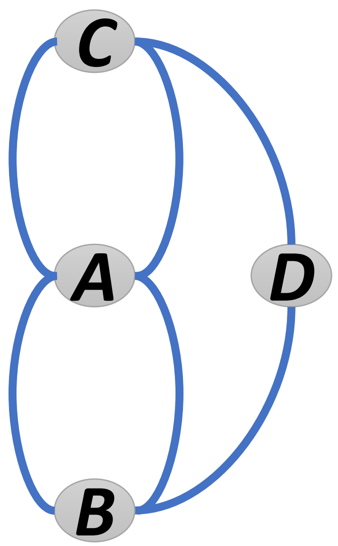
Contoh



- Soal
  - Selidiki apakah graf di samping mempunyai sirkuit Hamilton!

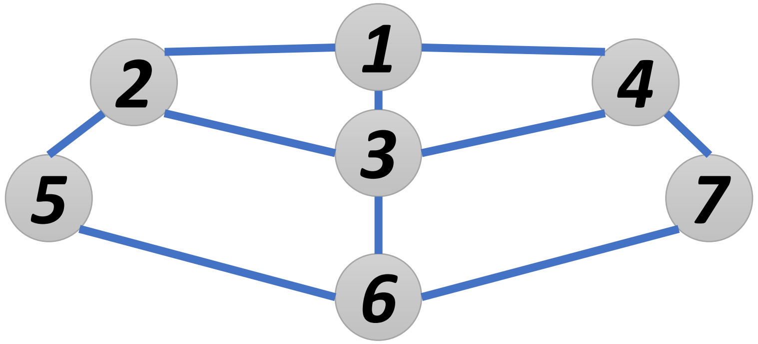
- Jawab
  - Berdasarkan Ore's Theorem, kita akan memeriksa jumlah derajat setiap pasang vertex yang tidak bersisian $\geq n = 4$
    - $\deg(A) + \deg(D) = 4 + 2 = 6 \geq 4$
    - $\deg(B) + \deg(C) = 3 + 3 = 6 \geq 4$
  - Dengan demikian graf tersebut pasti mempunyai suatu sirkuit Hamilton, salah satunya
    - $S_1 = \langle A, B, D, C, A \rangle$

Contoh



- Soal
  - Selidiki apakah graf di samping mempunyai sirkuit Hamilton!
- Jawab
  - Berdasarkan Dirac's Theorem, kita akan memeriksa derajat setiap vertex harus $\geq {}^{n}/_{2} = {}^{4}/_{2} = 2$
    - $\deg(A) = 4$ → $4 \geq 2$
    - $\deg(B) = \deg(C) = 3$ → $3 \geq 2$
    - $\mathrm{Deg}(D) = 2$ → $2 \geq 2$
  - Dengan demikian graf tersebut pasti mempunyai suatu sirkuit Hamilton, salah satunya
    - $S_1 = \langle A, B, D, C, A \rangle$

Contoh



- Soal

  Selidiki apakah graf di samping mempunyai sirkuit Hamilton!

- Jawab
  - Derajat vertex pada graf:
    - deg(*1*) = 3; deg(*2*) = 3; deg(*3*)= 4; deg(*4*)= 3; deg(*5*)= 2; deg(*6*)=3; deg(*7*)=2;
  - Diketahui bahwa jumlah vertex pada graf, $n > 3$.
    - Berdasarkan teorema DIRAC, jika derajat setiap vertex $\geq n/2 = 7/2 = 3.5$, maka terdapat sirkuit Hamilton.
    - **Diketahui bahwa ada verteks yang derajatnya < 3.5, maka kita tidak dapat menyimpulkan apa pun.**
    - Karena ternyata, ketika dicek di gambar, ada sirkuit Hamilton-nya, yaitu: 1 – 2 – 5- 6 – 7- 4 – 3 – 1.

Latihan

- Soal
  - Selidiki apakah graf berikut mempunyai lintasan atau sirkuit Hamilton. Jika iya, tunjukkan!