GRAF

(*Slide Acknowledgment*: Gatot Wahyudi, Adila A. Krisnadhi)

Matematika Diskret 2

Fakultas Ilmu Komputer Universitas Indonesia

Agenda

- Definisi dan Terminologi
- Jenis-Jenis Graf Sederhana
- Operasi pada Graf
- Representasi Graf

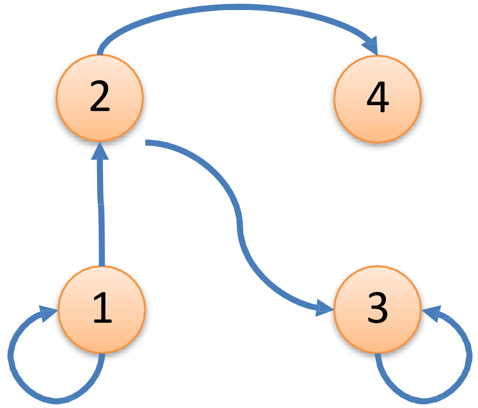
Definisi dan Terminologi Graf

Graf

- Definisi
  - Sebuah tuple (*V*, *E*)
    - *V* merupakan himpunan simpul (*vertex*) yang bukan himpunan kosong
    - *E* merupakan himpunan sisi (*edge*) yang diasosiasikan dengan satu atau dua simpul
  - Jika *V* atau *E* merupakan himpunan tak berhingga maka *G* disebut graf tak berhingga (*inifinite graph*)
  - Jika *V* dan *E* merupakan himpunan berhingga maka *G* disebut graf berhingga (*finite graph*)

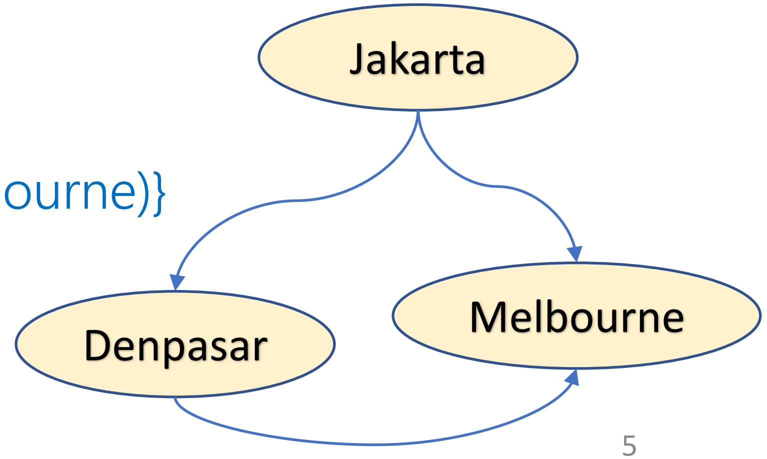
Contoh Graf

- $G_1 = (V_1, E_1)$ dengan
  - $V_1 = \{ 1, 2, 3, 4 \}$
  - $E_1 = \{ (1,1), (1,2)\ (3,3), (2,3), (2,4) \}$



- $G_2 = (\{ \text{Apple, Banana, Cherry}\}, \varnothing)$

- $G_3 = (V_3, E_3)$ dengan
  - V_3 = {Jakarta, Denpasar, Melbourne}
  - E_3 = {(Jakarta, Denpasar), (Jakarta, Melbourne), (Denpasar, Melbourne)}



Graf

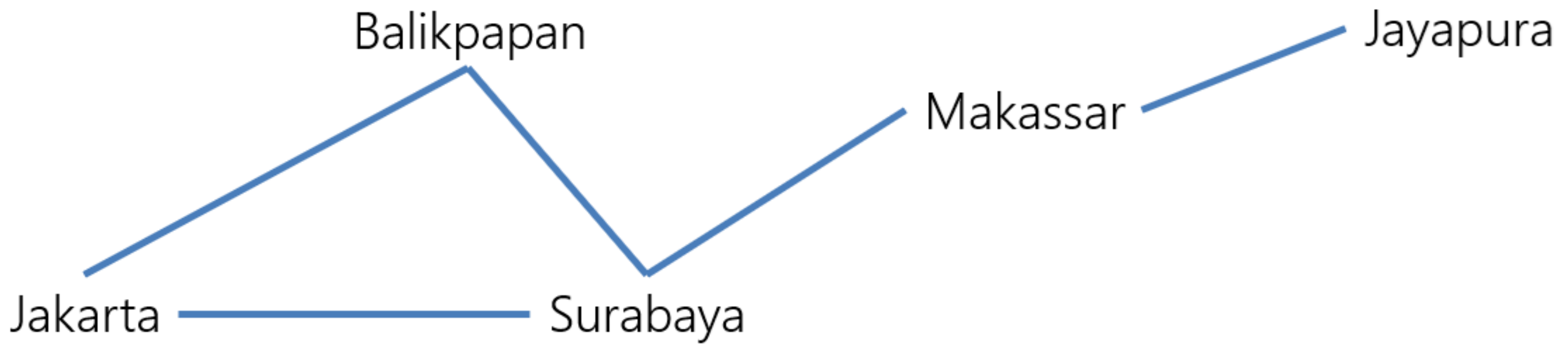
- Pada graf $G = (V, E)$, untuk setiap dua vertex $v_1, v_2 \in V$, jika *tuple* $(v_1, v_2) \in E$ dipandang sebagai:
  - Pasangan tidak berurut maka G disebut graf tidak berarah (*undirected graph*)
  - Pasangan berurut maka G disebut graf berarah (*directed graph* atau *digraph*)
    - (v_1, v_2) dibaca sebagai sisi yang berawal pada vertex v_1 dan berakhir pada vertex v_2

Graf

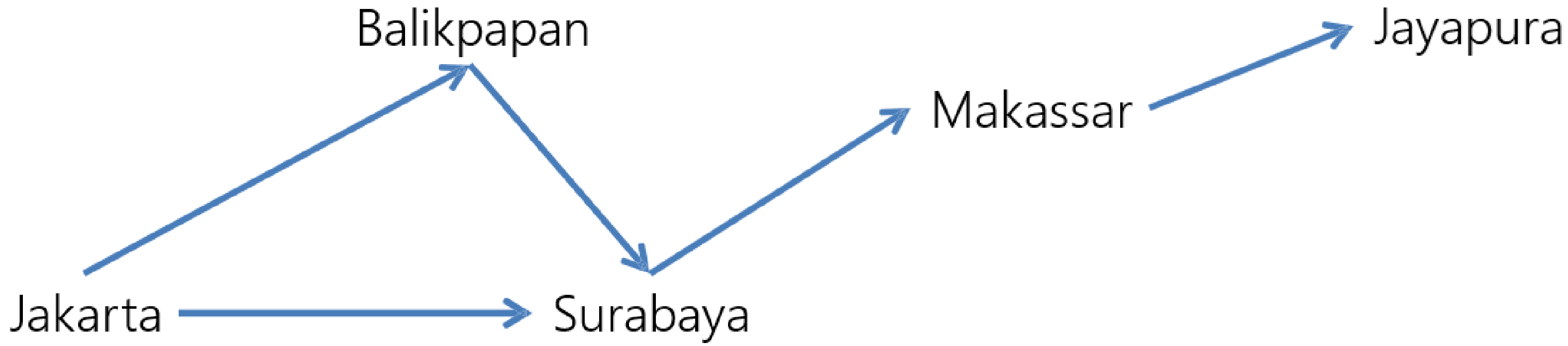
- Contoh
  - Diberikan sebuah himpunan verteks berupa nama kota dan *edge* berupa jalur yang menghubungkan dua kota yaitu:
    - V = { Jakarta, Surabaya, Balikpapan, Makassar, Jayapura }
    - E = { (Jakarta, Balikpapan), (Jakarta, Surabaya), (Surabaya, Balikpapan), (Surabaya, Makasar), (Makassar, Jayapura) }
  - Bagaimanakah visualisasi dari graf (V,E)?

Graf

– (*V*,*E*) sebagai *Undirected Graph*



– (*V*,*E*) sebagai *Directed Graph*



Model-Model Graf

- *Social Network*
  - *Friends graph, collaboration graph*
- *Communication Network*
  - *Call graph*
- *Information Network*
  - *Web graph, citation graph*
- *Software Design*
  - *Module dependency, precedence graph*
- *Transportation Network*
  - *Airline routes, road networks*
- *Biological Network*
  - *Phylogenetic, protein interaction*
- *Tournaments*
  - *Round-robin, Single-elimination*

Terminologi Graf

- Terminologi dasar
  - Gelang (*loop*)
    - Sisi e disebut *loop* jika bertumpuan pada satu vertex v
  - Sisi paralel (*parallel edges*)
    - Sisi e_1 dan e_2 dikatakan paralel jika bertumpuan pada vertex yang sama
  - Graf sederhana (*simple graph*)
    - Graf G dikatakan sederhana jika dan hanya jika G tidak memiliki loop maupun sisi paralel
  - Multigraf
    - Multigraf adalah graf sederhana yang mengandung sisi paralel

Terminologi Graf

- Adjacency, endpoints, incident
  - Dalam suatu graf $G = (V, E)$, dua vertex v_1 dan v_2 dikatakan bersisian (*adjacent*) jika $(v_1, v_2) \in E$
  - Jika sisi $e = (v_1, v_2) \in E$, maka dikatakan bahwa
    - Sisi e bertumpuan pada vertex v_1 dan v_2
    - Vertex v_1 dan v_2 disebut titik-titik ujung (*endpoints*) dari e
  - Dalam suatu graf berarah $G^* = (V^*, E^*)$, jika $e^* = (v_1^*, v_2^*) \in E^*$, maka
    - v_1 disebut vertex awal (*initial vertex*) dan v_2 disebut vertex akhir (*terminal vertex*) dari sisi e^*
    - v_1 dikatakan bertetangga ke (*adjacent to*) v_2
    - v_2 dikatakan bertetangga dari (*adjacent from*) v_1
  - Jika sisi e menghubungkan v_1 dan v_2, maka dikatakan bahwa
    - Sisi e berinsiden pada (*incident to/at*) vertex v_1 dan v_2
    - Vertex v_1 dan v_2 berinsiden dengan (*incident to/with*) e

Terminologi Graf

- Degree
  - Pada suatu graf G, jumlah sisi yang bertumpuan pada suatu vertex v disebut derajat (*degree*) dari vertex v, dinyatakan dengan $\deg(v)$
  - Suatu vertex u disebut vertex terisolasi (*isolated vertex*) jika $\deg(u) = 0$
  - Suatu vertex w disebut bandul (*pendant*) jika $\deg(w) = 1$

Terminologi Graf

- Degree Vertex pada Graf Berarah
  - Dalam graf berarah $G^* = (V^*, E^*)$, untuk setiap vertex v^* didefinisikan:
    - Derajat-masuk (*in-degree*) dari v^*, dinyatakan dengan $\deg^-(v^*)$
      - **Menyatakan jumlah sisi dengan v^* sebagai vertex akhir**
    - Derajat-keluar (*out-degree*) dari v^*, dinyatakan dengan $\deg^+(v^*)$
      - **Menyatakan jumlah sisi dengan v^* sebagai vertex awal**

Handshaking Theorem

- Teorema jumlah derajat semua vertex

> Jumlah derajat semua vertex dalam suatu graf sama dengan
> dua kali jumlah sisi pada graf tersebut

- Bukti
  - Misalkan graf $G = (V, E)$ dengan $V = \{ v_1, v_2, \ldots, v_n \}$ dan $E = \{ e_1, e_2, \ldots, e_m \}$, berarti
    - Jumlah vertex = $| V | = n$ dan jumlah sisi = $| E | = m$
    - Setiap sisi $e_i \in E$ bertumpuan pada dua vertex, berarti setiap sisi berkontribusi 2 terhadap jumlah derajat semua vertex
    - Jadi, $\sum_{i=1}^{n} \deg(v_i) = 2m$

Contoh

1. Tentukan derajat masing-masing vertex pada graf $G = (V, E)$ dengan
   - $V = \{ a, b, c, d, e, f \}$
   - $E = \{ (a,b), (a,d), (a,d), (a,e), (b,b), (b,c), (b,d), (b,e), (d,e), (d,e), (d,e) \}$

Jawab:

Derajat masing-masing vertex:

$\deg(a) = 4$; $\deg(b) = 6$; $\deg(c) = 1$; $\deg(d) = 6$; $\deg(e) = 5$; $\deg(f) = 0$

Contoh

2. Berapa jumlah sisi pada graf G yang mempunyai 15 vertex yang masing-masing verteksnya berderajat 6?

Jawab:

Berdasarkan teorema handshaking, $\sum_{i=1}^{n} \deg(v_i) = 2m$, dengan m adalah jumlah sisi pada graf.

$\sum_{i=1}^{n} \deg(v_i) = 2m$ dapat dihitung dari 15 x 6 = 90.

$90 = 2m$

$m = 90/2 = 45$

Teorema terkait Derajat Vertex

- Teorema
  - Banyaknya vertex yang berderajat ganjil pada suatu graf adalah genap
  - Untuk suatu graf berarah $G^* = (V^*, E^*)$ berlaku

$$\sum_{v \in V} \deg^-(v) = \sum_{v \in V} \deg^+(v) = |E|$$

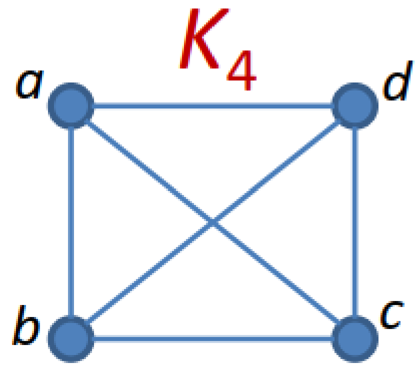
Jenis-Jenis Graf Sederhana

Graf Lengkap

- Definisi

> Sebuah graf dengan *n* buah vertex disebut sebagai graf lengkap (*complete graph*), ditulis K_n, apabila untuk setiap pasang vertex yang berbeda terdapat tepat satu sisi.

- Contoh
  - $K_1 = (\{ a \}, \emptyset)$
  - $K_2 = (\{ a, b \}, \{ (a, b) \})$
  - $K_3 = (\{ a, b, c \}, \{ (a, b), (a, c), (b, c) \})$



Graf Lengkap

Berapakah jumlah sisi pada sebuah graf lengkap dengan n buah vertex?

Jawab:

- Setiap vertex pada K_n terdapat tepat satu sisi menuju $(n-1)$ vertex lainnya
- Karena terdapat n buah vertex maka terdapat sebanyak $n\ (n-1)$ buah sisi tetapi setiap sisi dihitung 2 kali
- Dengan demikian, jumlah sisi pada K_n adalah sebanyak $\frac{n(n-1)}{2}$

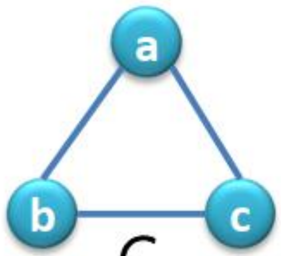
Graf Siklis (*Cycle*)

- Definisi

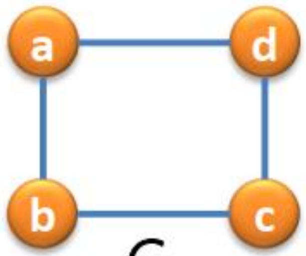
  Sebuah graf $G = (V, E)$ dengan n buah vertex disebut sebuah siklis (*cycle*), ditulis C_n, apabila

  - $V = \{ v_1, v_2, \ldots, v_n \}$ dan
  - $E = \{ (v_1, v_2), (v_2, v_3), \ldots, (v_{n-1}, v_n), (v_n, v_1) \}$

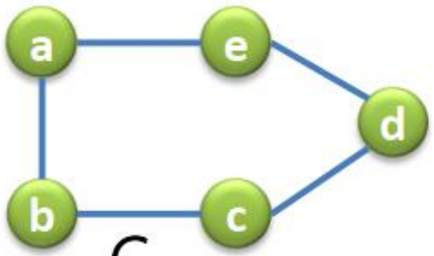
- Contoh



C_3



C_4



C_5

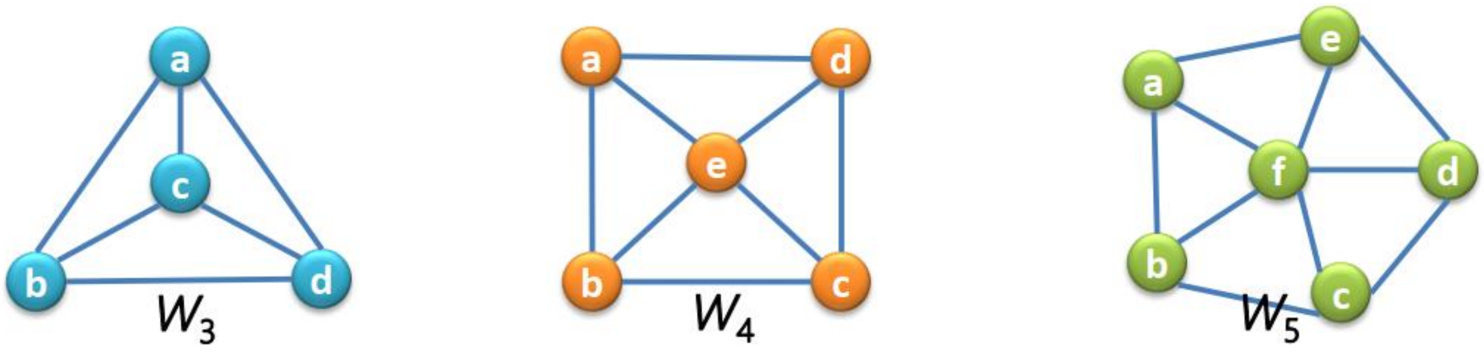
Graf Roda (*Wheel*)

- Definisi

  Sebuah graf $G = (V, E)$ dengan $n + 1$ buah vertex disebut sebuah roda (*wheel*), ditulis W_n, apabila

  - n buah vertex dari $(n + 1)$ vertex membentuk C_n dan
  - vertex ke-$(n + 1)$ mempunyai tepat satu sisi ke setiap vertex pada C_n yang terbentuk

- Contoh



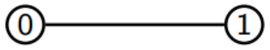
Hypercubes

- Definisi

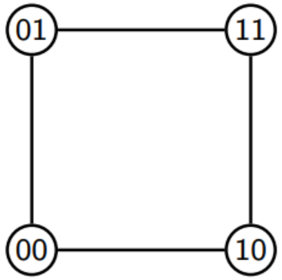
Sebuah graf sederhana disebut sebagai hypercube n-dimensi (*n-cube*), ditulis Q_n, apabila

  - memiliki 2^n vertex dan
  - setiap vertex merepresentasikan bit string dengan panjang *n*

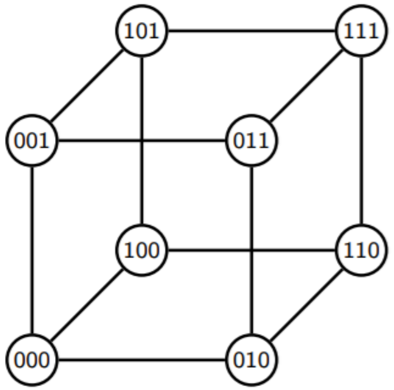
- Contoh



Q_1



Q_2



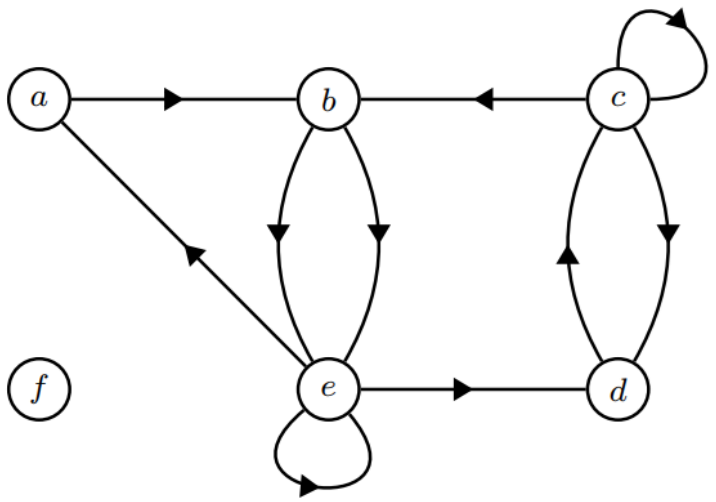
Q_3

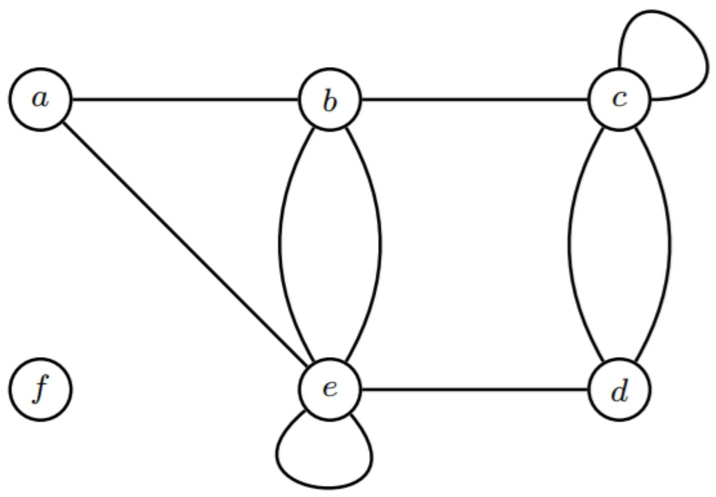
Operasi pada Graf

Underlying Undirected Graph

- Definisi

Underlying undirected graph dari sebuah graf berarah $G = (V, E)$ adalah sebuah graf G' yang terbentuk dengan cara mengabaikan arah setiap sisi pada G.





Subgraf

- Definisi

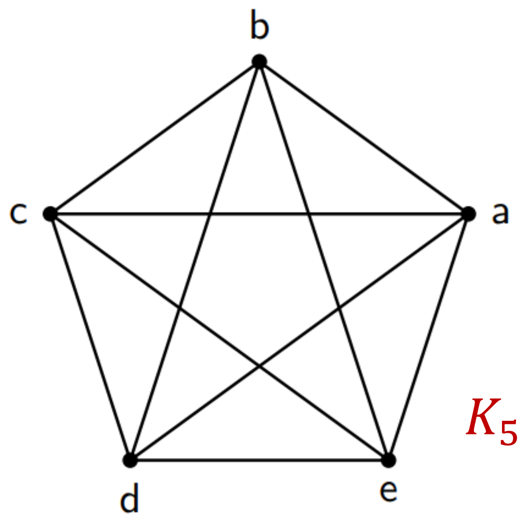
> Subgraf dari suatu graf $G = (V, E)$ adalah sebuah graf $H = (W, F)$ dengan $W \subseteq V$ dan $F \subseteq E$

- Contoh
  - Berikanlah dua subgraf dari graf $G = (V, E)$ di mana
    - $V = \{ 1, 2, 3 \}$ dan $E = \{ (1, 2), \{2, 3\}, (3, 1) \}$
      - $H_1 = (W_1, F_1)$ dengan
        - – $\mathbf{W_1 = \{ 1, 3 \}}$ **dan** $\mathbf{F_1 = \varnothing}$
      - $H_2 = (W_2, F_2)$ dengan
        - – $\mathbf{W_2 = V}$ **dan** $\mathbf{F_2 = \{ (1, 2), (3, 1) \}}$

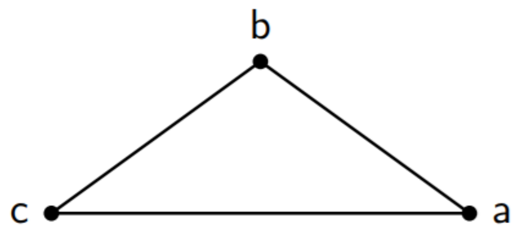
Subgraf Terinduksi

- Definisi

Jika diketahui graf $G = (V, E)$ dan himpunan vertex $W \subseteq V$, maka subgraf G terinduksi terhadap W adalah subgraf yang vertexnya termasuk di dalam W dan sisinya adalah bagian dari E yang hanya menghubungkan pasangan vertex di dalam W.



K_5



Subgraf K_5 terinduksi terhadap $\{a, b, c\}$

Penambahan dan Pengurangan Sisi

- Definisi

Diketahui graf $G = (V, E)$.

- Jika e adalah sebuah sisi pada E, maka $G - e$ adalah subgraf yang didapatkan dengan menghapus sisi e dari G.
- Jika e adalah sebuah sisi baru yang belum ada pada E namun menghubungkan vertex yang terdapat pada V, maka $G + e$ adalah subgraf yang didapatkan dengan menambahkan sisi e ke G.

Penambahan dan Pengurangan Simpul

- Definisi

Diketahui graf $G = (V, E)$.

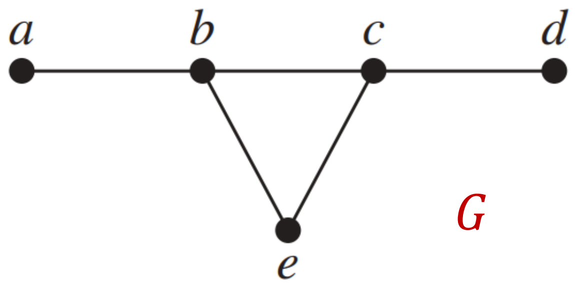
- Jika v adalah sebuah simpul pada V, maka penghapusan simpul v menghasilkan subgraf G' yang tidak mengandung vertex v dan tidak mengandung sisi yang berinsiden dengan v.
- Jika v adalah sebuah simpul baru yang belum ada pada V, maka penambahan simpul v akan menambahkan simpul v ke dalam V dan tidak memengaruhi anggota E.

Kontraksi Sisi (*Edge Contraction*)

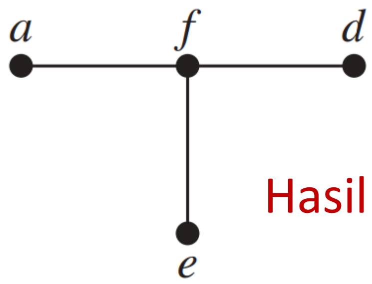
- Definisi

Diketahui graf $G = (V, E)$ dan $e \in E$ adalah sebuah sisi yang menghubungkan vertex u dan v, $(u, v \in V)$. Kontraksi sisi e pada G akan menghasilkan graf G' di mana

- sisi e tidak termasuk pada G',
- vertex u dan v digabung menjadi vertex baru w, dan
- vertex lain yang sebelumnya memiliki hubungan ketetanggaan dengan u dan v akan memiliki hubungan ketetanggaan dengan w.



G



Hasil kontraksi sisi $\{b, c\}$ pada G

Graf Gabungan (*Union*)

- Definisi

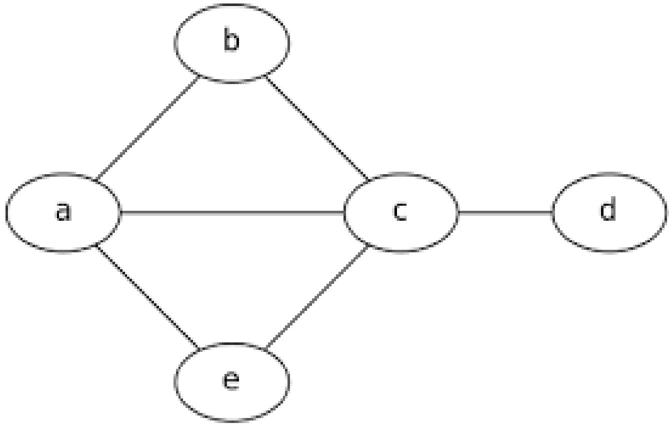
Graf gabungan (*union*) dari dua buah graf sederhana $G_1 = (V_1, E_1)$ dan $G_2 = (V_2, E_2)$ adalah $G = G_1 \cup G_2$ dengan $G = (V, E)$ di mana $V = V_1 \cup V_2$ & $E = E_1 \cup E_2$

- Contoh
  - Tentukan graf gabungan dari $G_1 = (\{ a, b \}, \{ (a, b) \})$ dan $G_2 = (\{ b, c, d \}, \{ (b, c), (b, d) \})$
  - Jawab:
    - $G = (\{ a, b, c, d \}, \{ (a, b), (b, c), (b, d) \})$

Representasi Graf

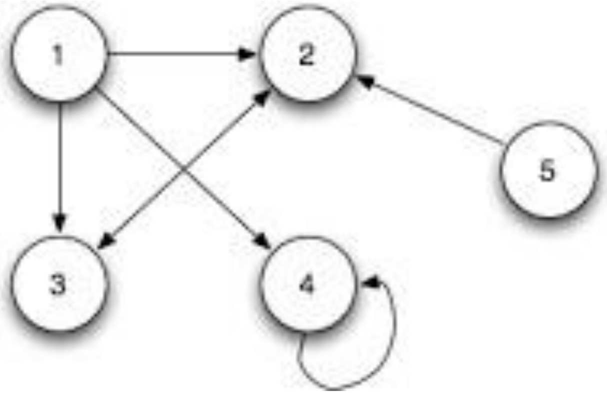
List Ketetanggaan (*Adjacency List*)

- List ketetanggaan untuk graf tidak berarah



Verteks	Verteks yang adjacent
a	b, c, e
b	a, c
c	a, b, d, e
d	c
e	a, c

- List ketetanggaan untuk graf berarah



Verteks inisial	Verteks terminal
1	2, 3, 4
2	3
3	
4	4
5	2

Matriks Ketetanggaan (*Adjacency Matrix*)

- Graf G dengan n buah vertex $v_1, v_2, \ldots, v_n$ dapat direpresentasikan dalam matriks $A=[a_{ij}]$ berukuran n x n
  - Elemen a_{ij} menyatakan jumlah sisi yang memiliki v_i dan v_j sebagai titik-titik ujungnya.
    - Sisi gelang berkontribusi dua
  - Untuk graf berarah G^*, jika direpresentasikan dalam matriks ikatan, maka a_{ij} menyatakan jumlah sisi yang memiliki v_i sebagai vertex awal dan v_j sebagai vertex akhirnya

Matriks Ketetanggaan (*Adjacency Matrix*)

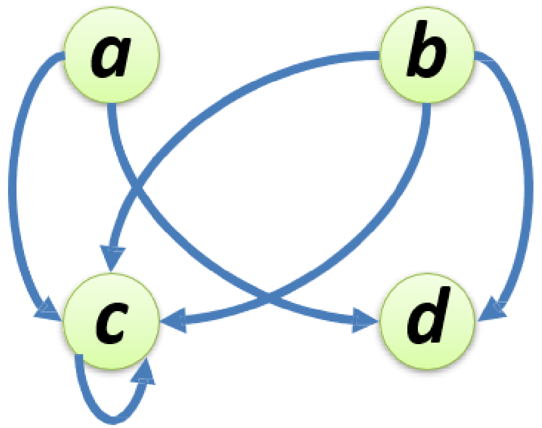
- Contoh
  - Tentukan matriks ketetanggaan untuk graf tidak berarah $G = (V, E)$ dengan:
    - $V = \{ a, b, c, d \}$ dan $E = \{ (a, c), (a, d), (b, c), (b, c), (c, c), (b, d) \}$
- Jawab
  - Matriks ketetanggaan untuk G dapat dibentuk lebih dari satu tergantung pada pemilihan urutan verteksnya
  - Jadi, untuk graf dengan n vertex dapat dipilih satu dari $n!$ (permutasi n unsur) matriks sebagai matriks ketetanggaannya
  - Contoh:

$$A_1 = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \qquad A_2 = \begin{array}{c} \\ b \\ c \\ d \\ a \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} b & c & d & a \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Matriks Ketetanggaan (*Adjacency Matrix*)

- Contoh
  - Tentukan matriks ikatan untuk graf berarah $G^* = (V, E)$ dengan:
    - $V = \{ a, b, c, d \}$ dan $E = \{ (a, c), (a, d), (b, c), (b, c), (c, c), (b, d) \}$
- Jawab
  - Contoh:

$$A_1 = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$



  - Perhatikan bahwa
    - Matriks ikatan untuk graf tidak berarah bersifat simetri
    - Matriks ikatan untuk graf berarah tidak harus simetri

Latihan

- Tentukan matriks ketetanggaan untuk sebuah graf $G = (V, E)$ dengan
    - $V \quad = \{ a, b, c, d, e \}$
    - $E \quad = \{ (a, b), (a, b), (a, c), (a, d), (a, d), (b, c),$
        - $(b, d), (b, d), (c, d), (c, e), (d, d), (d, d) \}$

- Pandang graf pada soal di atas sebagai
    - graf berarah
    - graf tidak berarah

Matriks Kehadiran (*Incidence Matrix*)

- Graf G dengan n buah vertex $v_1, v_2, \ldots, v_n$ dan m buah edge $e_1, e_2, \ldots, e_m$ dapat direpresentasikan dalam matriks $A=[a_{ij}]$ berukuran n x m
  - Elemen a_{ij} menyatakan apakah verteks v_i menjadi tumpuan bagi edge e_j
    - $a_{ij} = 1$ jika verteks v_i menjadi tumpuan edge e_j
      - **Kasus spesial, $a_{ij} = 2$ jika v_i menjadi tumpuan *loop* e_j**
    - $a_{ij} = 0$ jika verteks v_i tidak menjadi tumpuan *edge* e_j
  - Untuk graf berarah G^*, jika direpresentasikan ke dalam matriks kehadiran $A = [a_{ij}]$
    - $a_{ij} = 1$ jika verteks v_i merupakan verteks awal dari e_j dan $a_{ij} = -1$ jika verteks v_i merupakan verteks akhir dari e_j
      - **Kasus spesial, $a_{ij} = 2$ jika v_i memiliki loop berarah e_j**
    - $a_{ij} = 0$ jika verteks v_i bukan merupakan verteks awal/akhir dari e_j

Matriks Kehadiran (*Incidence Matrix*)

- Tentukan matriks kehadiran graf $G = (V, E)$ dengan $V = \{ v_1, v_2, v_3, v_4 \}$ dan $E = \{ e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8 \}$ dengan:
  $e_1 = (v_1, v_1)$, $e_2 = (v_1, v_2)$, $e_3 = (v_1, v_2)$, $e_4 = (v_2, v_3)$,
  $e_5 = (v_2, v_3)$, $e_6 = (v_4, v_2)$, $e_7 = (v_3, v_3)$, $e_8 = (v_3, v_4)$

- Jawab

$$M = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 & e_8 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Latihan

- Diberikan himpunan verteks *V* dan edge *E* berikut
  - *V* = { Jakarta, Surabaya, Balikpapan, Makassar, Jayapura }
  - *E* = { (Jakarta, Balikpapan), (Jakarta, Surabaya), (Surabaya, Balikpapan), (Surabaya, Makasar), (Makassar, Jayapura) }

- Bagaimana representasi matriks kehadirannya jika (*V*,*E*) dilihat sebagai:
  - graf tidak berarah
  - graf berarah