UNIVERSITAS INDONESIA
Veritas, Probitas, Iustitia
FAKULTAS ILMU KOMPUTER

RELASI

(*Slide Acknowledgment*: Gatot Wahyudi, Adila A. Krisnadhi)

Matematika Diskret 2

Fakultas Ilmu Komputer Universitas Indonesia
Semester Genap 2020/2021

Agenda

- Produk Kartesius
- Definisi Relasi
- Operasi Relasi
- Representasi Relasi
- Relasi Biner dan Sifat-Sifatnya

Produk Kartesius

Himpunan

- Masih ingatkah Anda dengan apa yang dimaksud dengan himpunan?
  - Himpunan bilangan bulat positif
    - 1, 2, 3, 4, 5, …
  - Himpunan bilangan prima
    - 2, 3, 5, 7, 11, …
  - Himpunan bilangan kongruen 3 modulo 17
    - $\{ x \mid x \in \boldsymbol{Z} \wedge x \bmod 17 = 3 \}$

Produk Kartesius

- Definisi

Misalkan terdapat dua himpunan ***A*** *dan* ***B***, *produk kartesius* (*Cartesian product*) dari himpunan ***A*** dan ***B*** adalah himpunan ***A* x *B*** berikut:

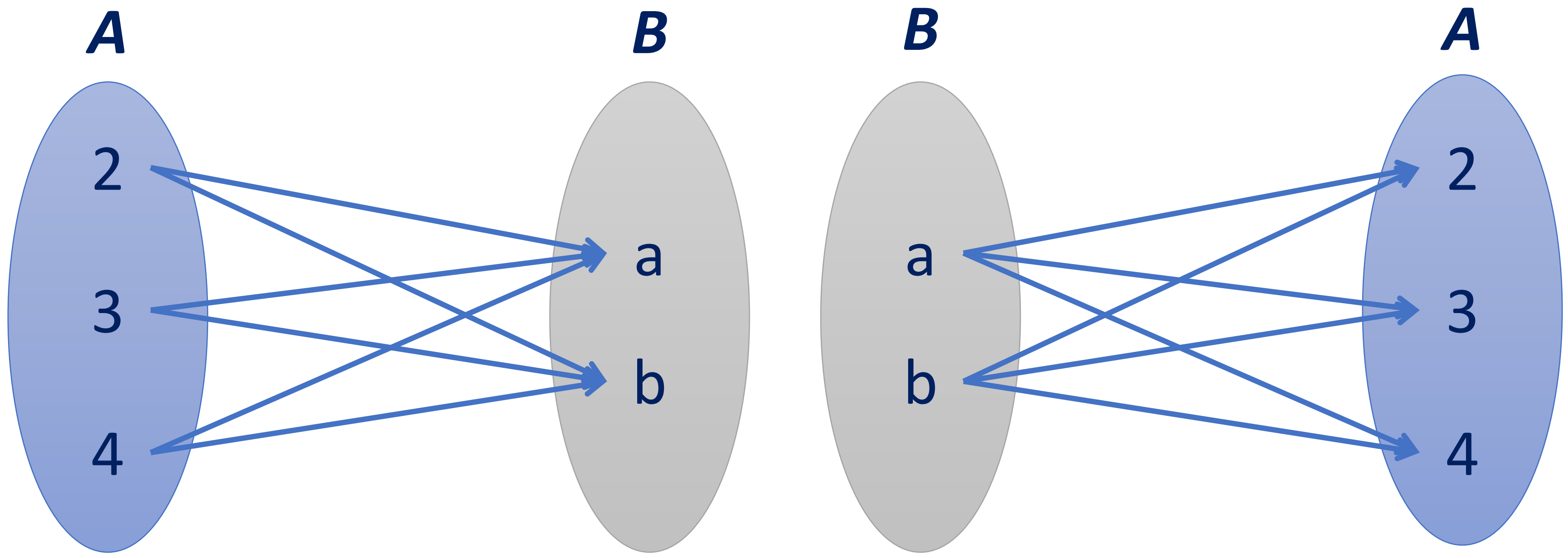
$$A \times B = \{ (a,b) \mid a \in A \wedge b \in B \}$$

- (*a*,*b*) disebut **2-*tuple*** atau **pasangan terurut dua**

Produk Kartesis

- Contoh
  - Misalkan $A = \{ 2, 3, 4 \}$ dan $B = \{ a, b \}$, maka:
    - $A \times B = \{ (2,a), (2,b), (3,a), (3,b), (4,a), (4,b)\}$
  - Apakah $A \times B = B \times A$?
    - $A \times B = \{ (2,a), (2,b), (3,a), (3,b), (4,a), (4,b)\}$
    - $B \times A = \{ (a,2), (a,3), (a,4), (b,2), (b,3), (b,4)\}$
  - Jadi, operasi produk Kartesius tidak bersifat komutatif

Produk Kartesius



Produk Kartesius

- Jumlah Anggota Produk Kartesius
  - Himpunan A memiliki m anggota
  - Himpunan B memiliki n anggota
  - Pertanyaannya:
    - Berapa banyaknya anggota produk kartesius $A \times B$?
    - Berapa banyaknya anggota produk kartesius $B \times A$?
  - Dari contoh sebelumnya
    - Jumlah anggota $A \times B$ maupun $B \times A$ adalah 6 di mana diketahui $m = 3$, $n = 2$ sehingga dapat diperoleh bahwa:
      - Jumlah anggota $A \times B = m \times n$
      - Jumlah anggota $B \times A = n \times m$

Produk Kartesius

- Teorema

Misalkan A dan B adalah dua himpunan yang berhingga, maka

$$|A \times B| = |A| \cdot |B|$$

Dengan $|A|$, $|B|$, $|A \times B|$ menyatakan kardinalitas dari himpunan A, B, dan $A \times B$

Definisi Relasi

Relasi Biner

- Definisi

> Relasi biner antara himpunan ***A*** dan himpunan ***B*** adalah himpunan bagian dari ***A*** × ***B***

- Relasi biner dinyatakan dengan ***R*: *A* × *B***
  - Menyatakan bahwa ***R*** adalah relasi biner dari ***A*** ke ***B***
  - Sesuai dengan definisi relasi maka:
    - $R: A \times B \subseteq A \times B$ sehingga $(a,b) \in R$
      - Berarti *a* dihubungkan dengan ke *b* oleh relasi *R*

Relasi Biner

- Notasi
  - Relasi biner biasanya sering dinyatakan dengan huruf-huruf Yunani:
    - ρ, σ, α, β, …
  - Jika $\rho: A \times B$ maka
    - untuk setiap $(a,b) \in \rho$ dapat ditulis $a \; \rho \; b$

Relasi Biner

- Contoh
  - Misalkan terdapat himpunan $A = \{ 1, 2 \}$ dan $B = \{ a, b \}$, buatlah semua relasi yang mungkin dari A ke B
- Jawab
  - $A \times B = \{ (1,a), (1,b), (2,a), (2,b) \}$
  - Setiap himpunan bagian dari $A \times B$ adalah sebuah relasi dari A ke B
  - Jadi, dapat dibuat $2^4 = 16$ relasi dari A ke B

Relasi Biner

- Jawab (lanjutan)
  - Relasi yang dapat dibuat adalah:
    - $\rho_1 = \phi$
    - $\rho_2 = \{(1,a)\}$
    - $\rho_3 = \{(1,b)\}$
    - $\rho_4 = \{(2,a)\}$
    - $\rho_5 = \{(2,b)\}$
    - $\rho_6 = \{(1,a), (1,b)\}$
    - $\rho_7 = \{(1,a), (2,a)\}$
    - $\rho_8 = \{(1,a), (2,b)\}$

Relasi Biner

- Jawab (lanjutan)
  - Relasi yang dapat dibuat adalah:
    - $\rho_9 = \{(1,b), (2,a)\}$
    - $\rho_{10} = \{(1,b), (2,b)\}$
    - $\rho_{11} = \{(2,a), (2,b)\}$
    - $\rho_{12} = \{(1,a), (1,b), (2,a)\}$
    - $\rho_{13} = \{(1,a), (1,b), (2,b)\}$
    - $\rho_{14} = \{(1,a), (2,a), (2,b)\}$
    - $\rho_{15} = \{(1,b), (2,a), (2,b)\}$
    - $\rho_{16} = \{(1,a), (1,b), (2,a), (2,b)\}$

Relasi Biner

- Teorema

> Jika ***A*** dan ***B*** adalah dua himpunan berhingga, maka dapat dibuat sebanyak $\mathbf{2^{|A||B|}}$ relasi berbeda dari ***A*** ke ***B***

- Jika $A = \{ 1, 2, 3 \}$ dan $B = \{ a, s, d, f \}$ maka banyak relasi yang dapat dibuat dari $A \times B$ adalah $\mathbf{2^{|A||B|} = 2^{3.4} = 2^{12} = 4096}$

Relasi pada Sebuah Himpunan

- Relasi biner tidak hanya dapat dibuat dari dua himpunan yang berbeda
- Relasi biner dari suatu himpunan A ke dirinya sendiri disebut relasi pada himpunan A
- Contoh:
  - Pada himpunan $A = \{ 1, 2, 3, ..., 10 \}$, dibuat sebuah relasi *PLUS3* dengan definisi sebagai berikut:
    - $PLUS3 = \{ (x, y) \mid x \in A \wedge y \in A \wedge y = x + 3 \}$
  - Maka dapat diperoleh relasi:
    - $PLUS3 = \{ (1,4), (2,5), (3,6), (4,7), (5,8), (6,9), (7,10) \}$

Domain dan Range

- Domain
  - Daerah awal relasi
  - Domain suatu relasi ρ dinyatakan dengan ***Dom.*** ρ atau dapat juga ditulis **dom (ρ)**
    - ***Dom.*ρ = { *a* $\in$ *A* | terdapat *b* $\in$ *B* yang memenuhi *a* ρ *b* }**
- Range
  - Daerah jelajah relasi
  - Range suatu relasi ρ dinyatakan dengan ***Ran.*** ρ atau dapat juga ditulis **ran (ρ)**
    - ***Ran.*ρ = { *b* $\in$ *B* | terdapat *a* $\in$ *A* yang memenuhi *a* ρ *b* }**

Domain dan Range

- Contoh

  $\rho = \{ (0,0), (1,1), (4,2), (9,3), (16,4), (25,5) \}$

  maka:

  - Dom.ρ = {0, 1, 4, 9, 16, 25}
  - Ran.ρ = {0, 1, 2, 3, 4, 5}

- Contoh
  - Jika relasi ***KD*** menyatakan relasi kelipatan dua pada ***Z*** yang didefinisikan sebagai berikut:

    $$\boldsymbol{KD} = \{ (a, b) \mid a \in \boldsymbol{Z} \wedge b \in \boldsymbol{Z} \wedge a = 2b \}$$

  - Dom.*KD* = { 0, 2, 4, 6, … }
  - Ran.*KD* = { 0, 1, 2, 3, … } = ***Z***

Operasi Relasi

Operasi Himpunan pada Relasi

- Karena relasi merupakan himpunan, maka setiap operasi pada himpunan dapat diterapkan juga terhadap relasi

Diberikan relasi $R, R_1, R_2 \subseteq A \times B$

Union (Gabungan)	$R_1 \cup R_2 = \{(a, b) \in A \times B \mid (a, b) \in R_1 \text{ } or \text{ } (a, b) \in R_2\}$
Intersection (Irisan)	$R_1 \cap R_2 = \{(a, b) \in A \times B \mid (a, b) \in R_1 \text{ } and \text{ } (a, b) \in R_2\}$
Difference (Selisih)	$R_1 - R_2 = \{(a, b) \in A \times B \mid (a, b) \in R_1 \text{ } but \text{ } (a, b) \notin R_2\}$
Symmetric Difference	$R_1 \oplus R_2 = (R_1 \cup R_2) - (R_1 \cap R_2)$
Komplementer	$\bar{R} = (A \times B) - R = \{(a, b) \in A \times B \mid (a, b) \notin R\}$

Relasi Komplementer

- Untuk sembarang relasi biner R: A x B, maka komplemen dari R, ditulis C(R): A x B, didefinisikan sebagai berikut:

$$\mathbf{C}(R) = \{ (a, b) \mid (a, b) \in A \times B \wedge (a, b) \notin R \}$$
$$= (A \times B) - R$$

- Contoh

$$C(<) = \{ (a, b) \mid (a, b) \notin < \}$$
$$= \{ (a, b) \mid \neg(a < b) \}$$
$$= \geq$$

Relasi Invers

- Definisi

ρ^{-1} adalah relasi invers dari ρ jika:

$$(a, b) \in \rho^{-1} \equiv (b, a) \in \rho$$

- Contoh
  - $\sigma = \{ (1, a), (2, b) \}$ maka $\sigma^{-1} = \{ (a, 1), (b, 2) \}$
  - $\rho = \{ (a, b) \mid a^2 = b \}$ maka $\rho^{-1} = \{ (b, a) \mid b = a^2 \}$

Produk Relasi

- Definisi

$S \circ R$ adalah relasi produk (komposisi) dari relasi $R \subseteq A \times B$ dan relasi $S \subseteq B \times C$ apabila

$$(a, c) \in S \circ R \equiv \exists\, b \in B\ ((a, b) \in R \land (b, c) \in S)$$

atau

$$a\ (S \circ R)\ c \equiv \exists\, b \in B\ (a\ R\ b \land b\ S\ c)$$

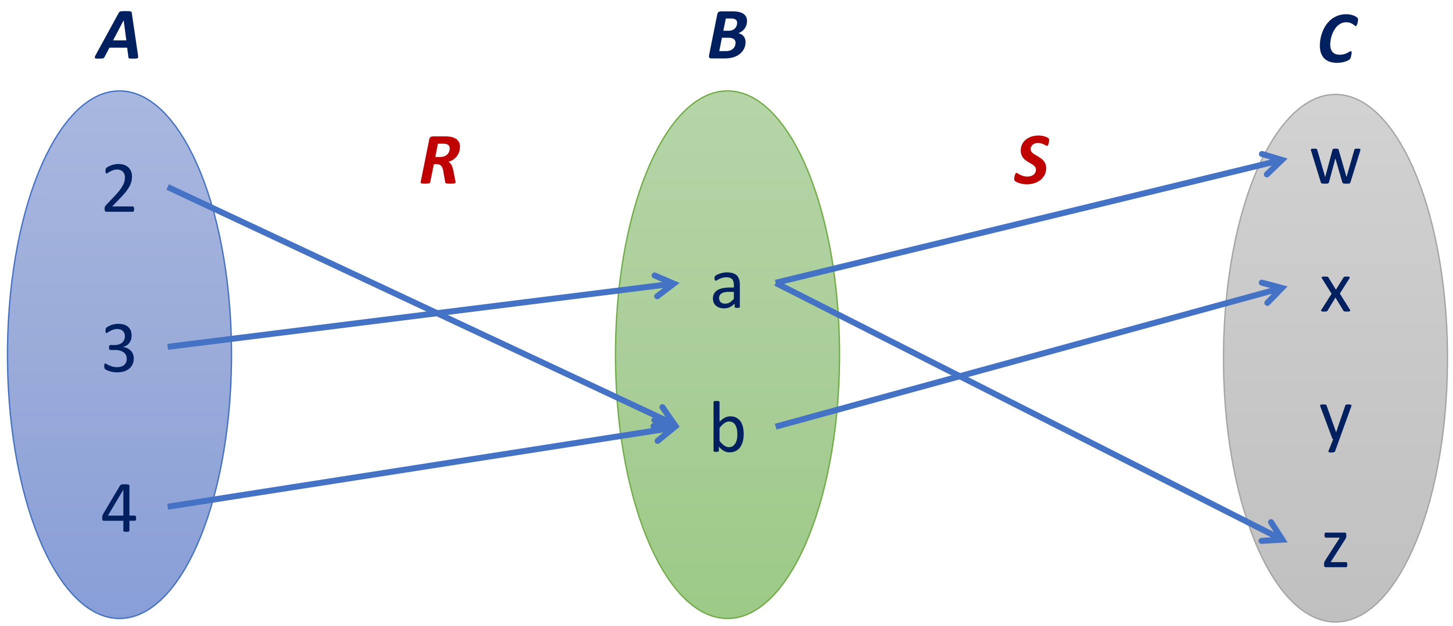
Produk Relasi

- Contoh
  - Jika ρ = *parent* dan λ = *parent*, maka $\lambda \circ \rho$ merupakan relasi *grandparent*
- Contoh
  - Jika terdapat dua relasi:
    - $\rho = \{ (b - 1, b) \mid b \in Z \}$ dan
    - $\lambda = \{ (b + 1, b) \mid b \in Z \}$,
  - maka relasi produk $\rho \circ \lambda$ dan $\lambda \circ \rho$ merupakan relasi identitas pada Z

Produk Relasi

- Diberikan dua buah relasi ***R*** dan ***S***:
  - R adalah relasi dari A ke B ($R \subseteq A \times B$)
  - S adalah relasi dari B ke C ($S \subseteq B \times C$)
- Produk dari ***R*** dan ***S*** adalah:
  - $\boldsymbol{S \circ R = \{ (a, c) \mid \exists\, b \in B, (a, b) \in R, (b, c) \in S \}}$

Produk Relasi



$S \circ R$ = { (2,x) , (3,w) , (3,z), (4,x) }

Produk Relasi

- Teorema

Operasi komposisi relasi bersifat asosiatif, bila terdapat himpunan A, B, C, D dan relasi R: $A \times B$, S: $B \times C$, dan T: $C \times D$, maka berlaku:

$$T \circ (S \circ R) = (T \circ S) \circ R$$

Produk Relasi

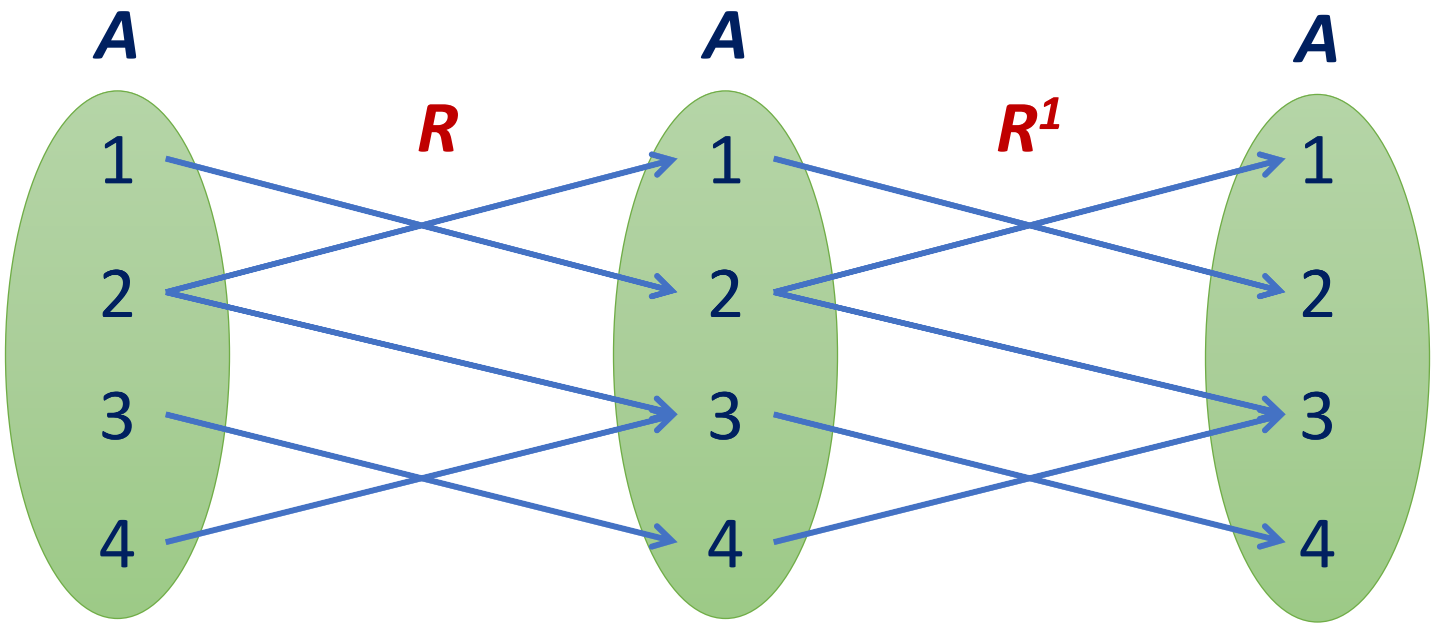
Misalkan R sebagai relasi pada himpunan A
Secara induktif didefinisikan:

$$R^1 = R$$

$$R^{n+1} = R^n \circ R$$

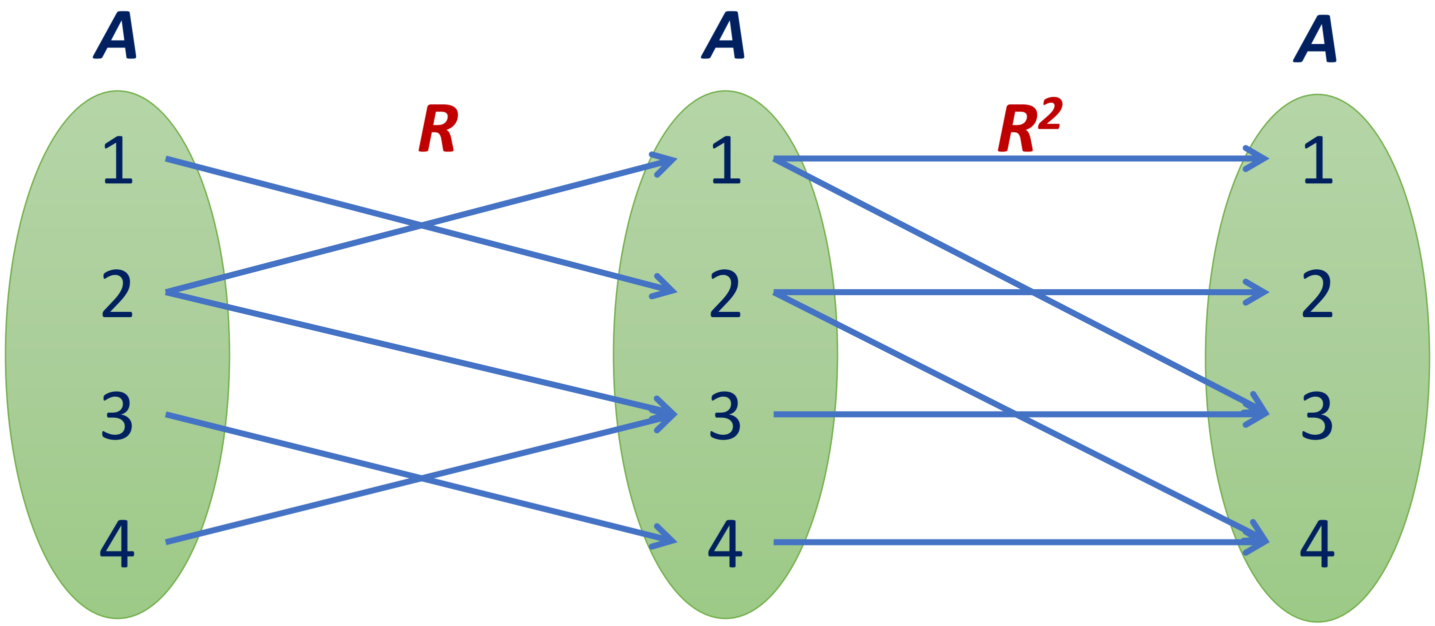
- Dengan demikian:
  - $R^2 = R^1 \circ R$
  - $R^3 = R^2 \circ R$
  - $R^4 = \ldots$

Produk Relasi



$R^2 = R^1 \circ R = \{ (1,1), (1,3), (2,2), (2,4), (3,3), (4,4) \}$

Produk Relasi



$R^3 = R^2 \circ R = \{ (1,2), (1,4), (2,1), (2,3), (3,4), (4,3) \}$

Representasi Relasi

Representasi Relasi dengan Tabel

- Relasi dapat dituliskan dalam bentuk tabel yang berisi daftar tuple
  - $R_1 = \{(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid a + b = 5\}$

a	b
0	5
1	4
2	3
3	2
4	1
5	0

Representasi Relasi dengan Matriks

- Definisi

Misalkan $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ dan $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ adalah dua himpunan yang keduanya tidak kosong dan R: A x B, maka relasi R dapat direpresentasikan menggunakan matriks M_R yang didefinisikan sebagai berikut:

$$M_R = [m_{ij}] = \begin{cases} 1, & jika\ (a_i, b_i) \in R \\ 0, & jika\ (a_i, b_i)\ bukan \in R \end{cases}$$

$\boldsymbol{M_R}$ disebut sebagai matriks representasi untuk $\boldsymbol{R}$

Representasi Relasi dengan Matriks

- Contoh
  - Himpunan A = { 1, 2, 3 } dan B = { 5, 7 } di mana dibuat sebuah relasi pada A x B yaitu:
    - R = { (1,5), (2,5), (3,5), (3,7) }
  - Bentuk matriks representasi untuk R adalah:
    - $M_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

Representasi Matriks untuk Relasi pada Suatu Himpunan

- Representasi Matriks untuk Relasi pada Himpunan A pasti merupakan matriks persegi berukuran |A| x |A|
- Contoh
  - Himpunan $A = \{ 1, 2, 3 \}$ di mana dibuat sebuah relasi pada A x A yaitu:
    - $R = \{ (1,2), (2,3), (3,1), (3,2) \}$
  - Bentuk matriks representasi untuk R adalah:
    - $M_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

Operasi pada Matrik Representasi

- Operasi pada matrik representasi relasi
  - Dapat digunakan untuk mengetahui <u>representasi relasi baru</u> yang dihasilkan
- Operasi umum pada matrik representasi relasi
  - Operasi TRANSPOSE
  - Operasi boolean KONJUNGSI
  - Operasi boolean DISJUNGSI
  - Operasi boolean PRODUCT

Operasi pada Matrik Representasi

- Misalkan
  - Himpunan A = { 1, 2, 3, 4 }
  - R = { (1,1), (1,3), (2,2), (2,3), (3,2), (4,4) }
  - S = { (1,2), (2,2), (2,3), (3,4), (4,1), (4,4) }
- Matrik representasi R dan S
  - $M_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $M_S = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Operasi pada Matrik Representasi

- Transpose
  - $M_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $(M_R)^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$(M_R)^T$ merepresentasikan invers dari relasi R (atau R^{-1})

Operasi pada Matrik Representasi

- Konjungsi
  - $M_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $M_S = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
  - $M_{R \cap S} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$M_R \wedge M_S$ merepresentasikan $R \cap S$

Operasi pada Matrik Representasi

- Disjungsi
  - $M_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\qquad M_S = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
  - $M_{R \cup S} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$M_R \vee M_S$ merepresentasikan $R \cup S$

Operasi pada Matrik Representasi

- Produk
  - $M_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $M_S = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
  - $M_{SoR} = M_R \cdot M_S = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

M_R . M_S merepresentasikan S o R

Operasi pada Matrik Representasi

- Misalkan
  - R adalah relasi pada suatu himpunan A
  - S adalah relasi pada suatu himpunan B
  - M_R menyatakan matrik representasi R
  - M_S menyatakan matrik representasi S
  - Operasi-operasi yang dapat dilakukan terhadap M_R dan M_S antara lain:

Operasi	Notasi	Matrik yang dihasilkan	Keterangan
TRANSPOSE	M^T	INVERS dari relasi R	M^T representasi R^{-1}
KONJUNGSI	$M_R \wedge M_S$	IRISAN dari relasi R dan S	$M_R \wedge M_S$ representasi $R \cap S$
DISJUNGSI	$M_R \vee M_S$	UNION dari relasi R dan S	$M_R \vee M_S$ representasi $R \cup S$
PRODUCT	$M_R \,.\, M_S$	KOMPOSISI dari relasi R dan S	$M_R \,.\, M_S$ representasi $S \circ R$

Representasi Relasi dengan Graf

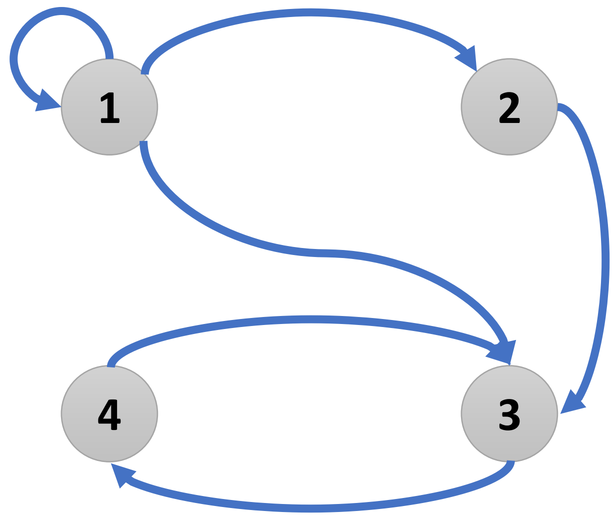
- Relasi juga dapat direpresentasikan sebagai graf berarah (*digraph*)
- Definisi

Graf berarah (*digraph*) adalah suatu graf yang memuat himpunan simpul (*vertex*) *V* dan himpunan sisi (*edge*) *E* yang terdiri atas pasangan terurut dari *V*. Simpul *a* disebut sebagai simpul awal sisi (*a*,*b*), dan simpul *b* disebut sebagai simpul terminal sisi (*a*,*b*)

Sisi yang berbentuk (*a*,*a*) disebut *loop* atau gelang

Representasi Relasi dengan Graf

- Pembentukan graf dari relasi *R*
  - Misalkan *R* = { (1,1), (1,2), (1,3), (2,3), (3,4), (4,3) }
  - Maka graf untuk *R* tersebut:
    - Perhatikan bahwa edge dari graf mempunyai arah



Relasi Biner dan Sifat-Sifatnya

Sifat Relasi

- Beberapa sifat relasi biner:
  - Refleksif
  - Irrefleksif
  - Simetri
  - Antisimetri
  - Asimetri
  - Transitif

Sifat Relasi Refleksif

Sebuah relasi ρ pada $\boldsymbol{A}$ bersifat refleksif:
jika $\forall\ a \in \boldsymbol{A}$, maka berlaku $a\ \rho\ a$

- Contoh:
  - Relasi "saling kenal dengan" bersifat refleksif
  - Relasi "mengagumi"? tidak refleksif
  - Relasi = bersifat refleksif
  - Relasi < tidak refleksif

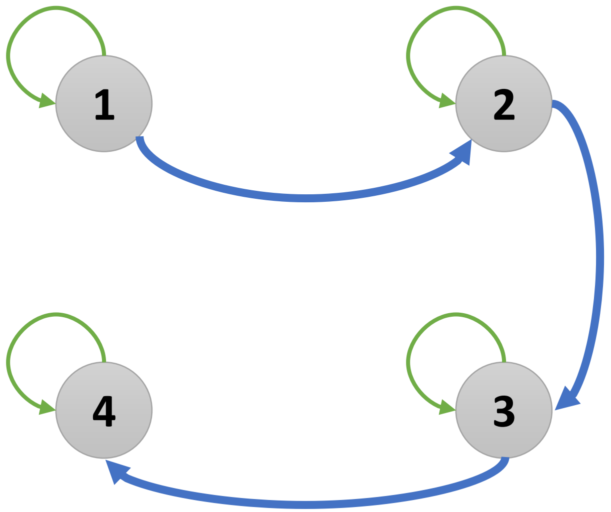
Memeriksa Sifat Refleksif

- Ciri matriks dari relasi yang bersifat refleksif
  - $i = j \rightarrow m_{ij} = 1$ atau $m_{ij} = 1$ **untuk semua** $i = j$
    - Semua elemen di diagonal utama bernilai 1
- Contoh:
  - $R = \{ (1,1), (1,2), (2,2), (2,3), (3,3), (3,4), (4,4) \}$

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Memeriksa Sifat Refleksif

- Ciri graf dari relasi yang bersifat refleksif
  - Setiap verteks mempunyai LOOP
- Contoh:
  - R = { (1,1), (1,2), (2,2), (2,3), (3,3), (3,4), (4,4) }



Sifat Relasi Irrefleksif

Sebuah relasi ρ pada $\boldsymbol{A}$ bersifat irrefleksif:
jika $\forall\, a \in \boldsymbol{A}$, maka berlaku $\neg(a \;\rho\; a)$

- Contoh
  - Relasi "anak dari" bersifat irrefleksif
  - Relasi $<$
  - Relasi $\subset$

Sifat Relasi Irrefleksif

- Irrefleksif <u>bukan berarti</u> tidak refleksif
  - Perhatikan himpunan $A = \{ a, b, c, d \}$ dan relasi pada himpunan A, $\rho = \{ (a,d), (b,c), (c,b), (d,d) \}$
    - Tidak refleksif dan tidak juga irrefleksif
    - Mengapa?
      - Relasi ρ tidak refleksif karena tidak mempunyai tuple (a,a), (b,b), dan, (c,c)
      - Relasi ρ tidak irrefleksif karena mempunyai tuple (d,d)

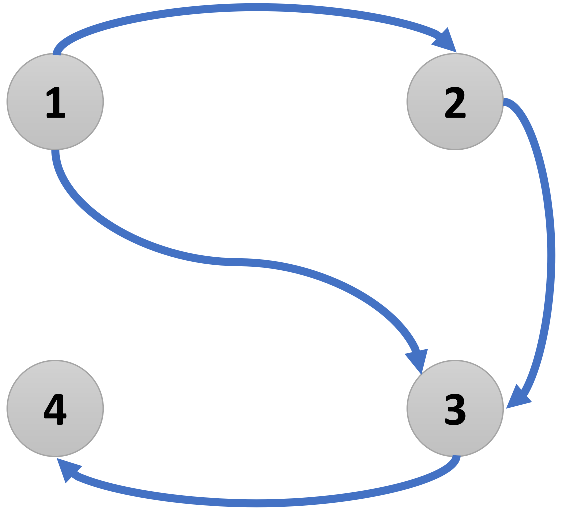
Memeriksa Sifat Irrefleksif

- Ciri matriks dari relasi bersifat irrefleksif
  - ***i* = *j* $\rightarrow$ *m*$_{ij}$ = 0** atau ***m*$_{ij}$ = 0 untuk semua *i* = *j***
    - Semua elemen di diagonal utama bernilai 0
- Contoh:
  - *R* = { (1,2), (1,3), (2,3), (3,4) }

$$M_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Memeriksa Sifat Irrefleksif

- Ciri graf dari relasi yang bersifat irrefleksif
  - Setiap verteks TIDAK memiliki LOOP
- Contoh:
  - R = { (1,2), (1,3), (2,3), (3,4) }



Sifat Relasi Simetri

Sebuah relasi ρ pada $\boldsymbol{A}$ bersifat simetri:
jika $\forall\, a \in \boldsymbol{A}$ dan $\forall\, b \in \boldsymbol{A}$, maka berlaku

$$a\ \rho\ b \equiv b\ \rho\ a$$

- Contoh
  - Relasi **=** pada ***Z*** bersifat simetri
  - Relasi $\leq$ tidak bersifat simetri
    - Pehatikan bahwa $1 \leq \mathbf{2}$ tapi tidak berlaku $\mathbf{2} \leq \mathbf{1}$

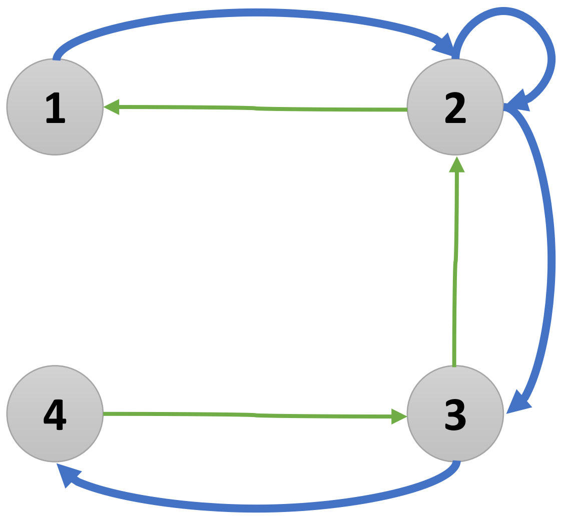
Memeriksa Sifat Simetri

- Ciri graf dari relasi yang bersifat simetri
  - $m_{ij} = m_{ji}$ atau $M_R = (M_R)^T$
    - Diagonal utama menjadi cermin bagi matriks segitiga atas dan bawah
- Contoh:
  - R = { (1,2), (2,1), (2,2), (2,3), (3,2) (3,4), (4,3) }

$$M_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Memeriksa Sifat Simetri

- Ciri graf dari relasi yang bersifat simetri
  - Setiap edge HARUS memiliki edge BALIK
- Contoh:
  - R = { (1,2), (2,1), (2,2), (2,3), (3,2) (3,4), (4,3) }



Sifat Relasi Antisimetri

Sebuah relasi ρ pada $\boldsymbol{A}$ bersifat antisimetri:
jika $\forall\, a \in \boldsymbol{A}$ dan $\forall\, b \in \boldsymbol{A}$, maka berlaku

$$a \,\rho\, b \wedge b \,\rho\, a \rightarrow a = b$$

atau

$$a \neq b \rightarrow (a \,\rho\, b \rightarrow \neg(b \,\rho\, a))$$

- Contoh
  - Relasi $\leq$ pada $\boldsymbol{Z}$ bersifat antisimetri
    - Karena $\forall\, a, b \in \boldsymbol{Z}$ berlaku $a \leq b \wedge b \leq a \rightarrow a = b$
  - Relasi $\neq$ pada $\mathbf{Z}$ tidak antisimetri
    - Karena $1 \neq 2 \wedge 2 \neq 1 \rightarrow 1 = 2$ bernilai *false*

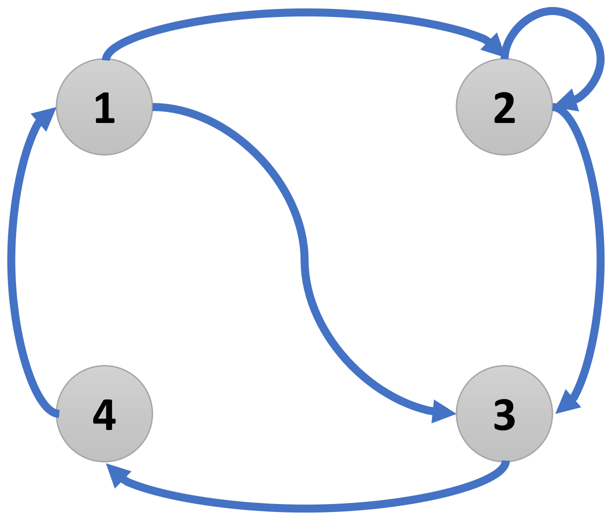
Memeriksa Sifat Antisimetri

- Ciri matriks dari relasi bersifat antisimetri
  - $i \neq j \rightarrow m_{ij} = 0 \lor m_{ji} = 0$
    - Setiap pasang elemen yaitu elemen di segitiga atas dan cerminannya di segitiga bawah (dengan diagonal utama sebagai cermin) harus memiliki kombinasi nilai 1 0, 0 1, atau 0 0. Setiap elemen di diagonal utama bebas, boleh 0 atau 1.
- Contoh:
  - R = { (1,2), (1,3), (2,2), (2,3), (3,4), (4,1) }

$$M_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Memeriksa Sifat Antisimetri

- Ciri graf dari relasi yang bersifat antisimetri
  - Tidak ada dua *vertex* berbeda yang dihubungkan oleh dua *edge* yang berlawanan
- Contoh:
  - R = { (1,2), (1,3), (2,2), (2,3), (3,4), (4,1), (4,2) }



Sifat Relasi Asimetri

Sebuah relasi ρ pada $\boldsymbol{A}$ bersifat asimetri:
jika $\forall\ a, b \in \boldsymbol{A}$ maka berlaku
$$a\ \rho\ b \rightarrow \neg(b\ \rho\ a)$$

- Contoh
  - Relasi **<** pada $\boldsymbol{Z}$ bersifat asimetri
    - Karena $\forall\ a,b \in \boldsymbol{Z}$ berlaku $a < b \rightarrow \neg(b < a)$
  - Relasi **≤** pada $\boldsymbol{Z}$ tidak asimetri
    - Karena $1 \le 1 \rightarrow \neg(1 \le 1)$ bernilai *false*

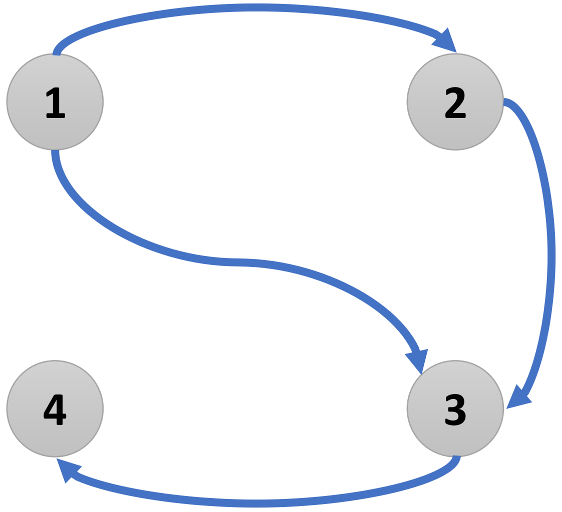
Memeriksa Sifat Asimetri

- Ciri matriks dari relasi bersifat asimetri
  - $\boldsymbol{m_{ij} = 1 \rightarrow m_{ji} = 0}$
    - Setiap pasang elemen yaitu elemen di segitiga atas dan cerminannya di segitiga bawah (dengan diagonal utama sebagai cermin) harus memiliki kombinasi nilai 1 0, 0 1, atau 0 0. Setiap elemen di diagonal utama bernilai 0.
- Contoh:
  - R = { (1,2), (1,3), (3,2), (3,4) }

$$M_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Memeriksa Sifat Asimetri

- Ciri graf dari relasi yang bersifat asimetri
  - Setiap *edge* TIDAK ADA *edge* BALIK dan TIDAK ada LOOP di setiap *vertex*
- Contoh:
  - R = { (1,2), (1,3), (2,3), (3,4) }



Sifat Relasi Transitif

Sebuah relasi ρ pada $\boldsymbol{A}$ bersifat transitif:
jika $\forall\ a, b, c \in \boldsymbol{A}$ maka berlaku
$a\ \rho\ b \wedge b\ \rho\ c \rightarrow a\ \rho\ c$

- Contoh
  - Relasi **<** pada $\boldsymbol{Z}$ bersifat transitif
    - Karena $\forall\ a, b, c \in \boldsymbol{Z}$ berlaku $a < b \wedge b < c \rightarrow a < c$
  - Relasi "anak dari" tidak transitif
    - Mengapa?

Memeriksa Sifat Transitif

- Ciri matriks dari relasi bersifat transitif
    - $m_{ij} = 1 \wedge m_{jk} = 1 \rightarrow m_{ik} = 1$
- Contoh:
    - R = { (1,2), (3,1), (3,2), (3,4), (4,1), (4,2), (4,4) }

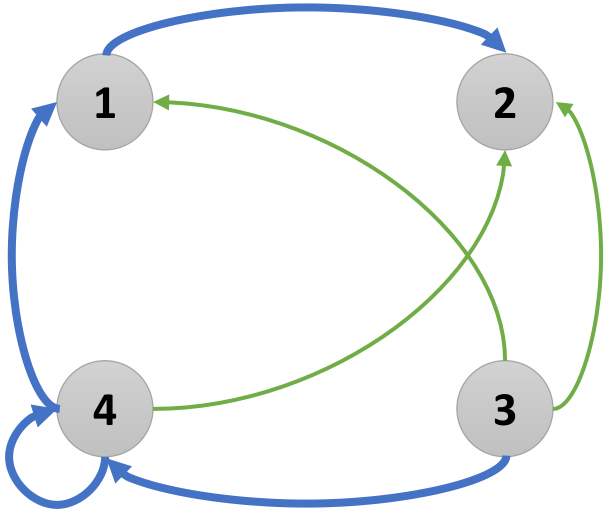
$$M_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Memeriksa Sifat Transitif

- Ciri graf dari relasi yang bersifat transitif
  - Setiap lintasan dengan panjang dua, (a,b) dan (b,c), HARUS mempunyai edge pintas, (a,c)
- Contoh:
  - $R = \{ (1,2), (3,1), (3,2), (3,4), (4,1), (4,2), (4,4) \}$

Untuk edge (3,4) dan (4,1), ada edge pintas (3,1)

Untuk edge (4,1) dan (1,2), ada edge pintas (4,2)



Untuk edge (3,1) dan (1,2), ada edge pintas (3,2)

Untuk edge (3,4) dan (4,2), ada edge pintas (3,2)

Hati-Hati!

- Jika ada tuple (a,b) namun tidak ada (b,c) nya maka tuple (a,b) tersebut tidak melanggar transitif.
- Contoh:
  - R: A x A, dengan A = {1, 2, 3}
  - R = {(1,2)}
  - Ada tuple (1,2) namun tidak ada tuple (2, …) maka hal ini tidak melanggar transitif
  - Relasi R bersifat transitif