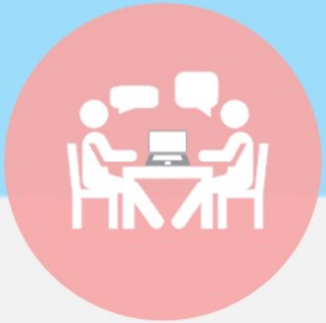
8. Transformasi linear



MODUL E-LEARNING ALJABAR LINIER
FAKULTAS ILMU KOMPUTER, UNIVERSITAS INDONESIA

DR. Kasiyah Junus, MSc

8. Transformasi Linear (Bagian 1)

MODUL E-LEARNING ALJABAR LINIER
FAKULTAS ILMU KOMPUTER, UNIVERSITAS INDONESIA

DR. Kasiyah Junus, MSc

Capaian Pemelajaran

Setelah mengikuti modul ini, Anda memiliki kemampuan sebagai berikut:

1. mengidentifikasi transformasi linear,
2. menentukan matriks standar suatu transformasi linear,
3. menjelaskan sifat-sifat transformasi linear pada bidang dan ruang,
4. menjelaskan ruang eigen sebagai Kernel suatu transformasi linear T
5. menjelaskan interpretasi nilai eigen $[T]$ secara geomeris,
6. menjelaskan sifat similaritas invarian.

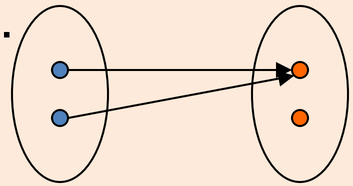
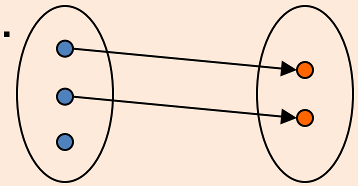
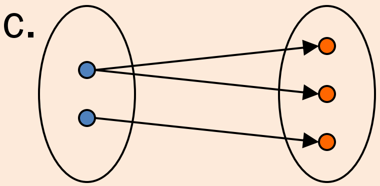
Cakupan materi

- Pengertian transformasi linear
- Transformasi linear pada ruang Euclid
- Komposisi transformasi linear
- Kernel dan *range*
- Inverse transformasi linear
- Similaritas

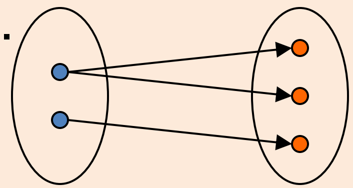
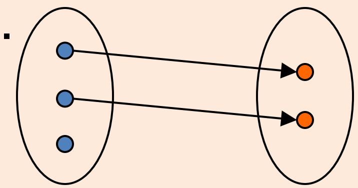
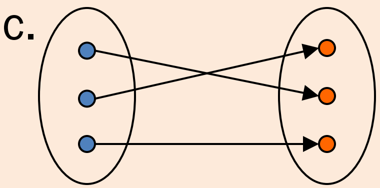
Pre-test

Pre-test

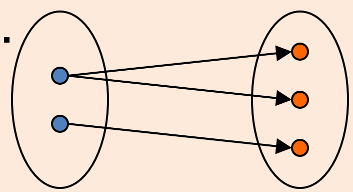
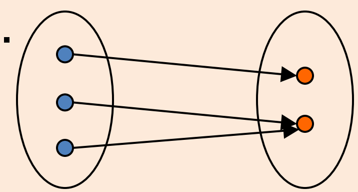
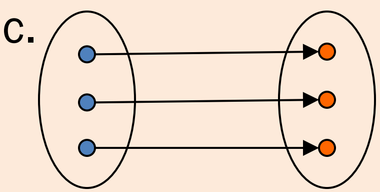
- Di bawah ini, mana yang merupakan fungsi?

a.

b.

c.


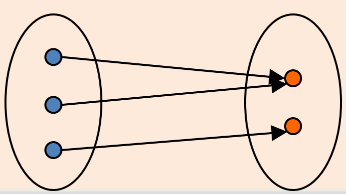
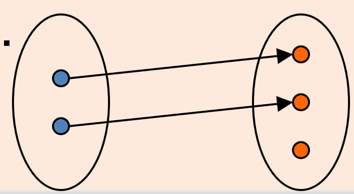
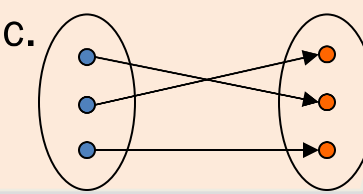
- Di bawah ini, mana yang merupakan fungsi injektif(satu-satu)?

a.

b.

c.


- Di bawah ini, mana yang merupakan fungsi surjektif (onto)?

a.

b.

c.


- Di bawah ini, mana yang merupakan fungsi korespondensi satu-satu

a.

b.

c.


Pengertian transformasi linear

Transformasi linear pada ruang Euclid

Komposisi transformasi linear

Kernel dan *range*

Inverse transformasi linear

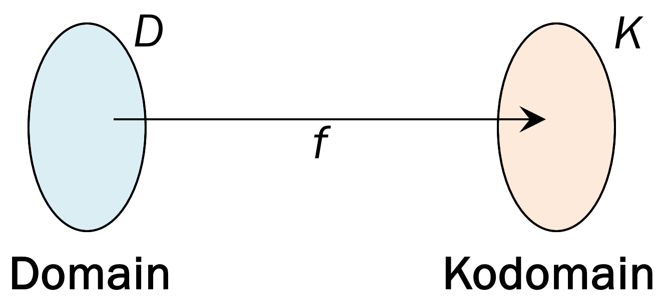
Similaritas

8.1 Pengertian Transformasi Linear

Review Fungsi

𝒟efinisi 8.1: Fungsi

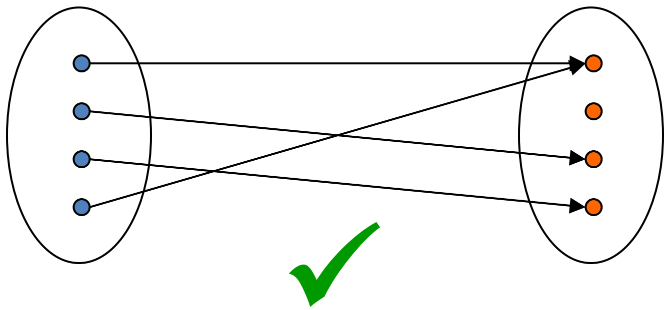
Fungsi adalah aturan pengawanan dari daerah asal (domain) *D* ke daerah hasil (kodomain) *K* sedemikian hingga setiap elemen di daeran asal memiliki tepat satu kawan di daerah hasil.

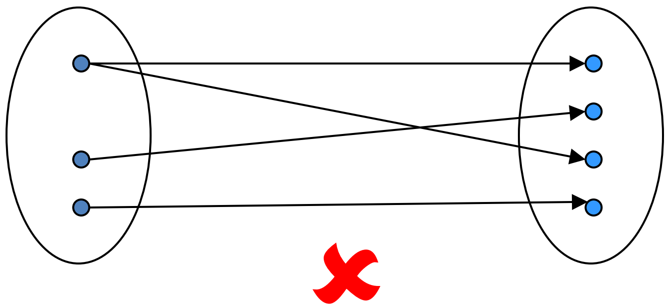


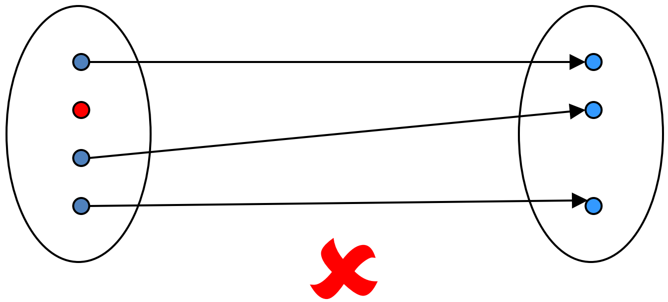
Notasi: $f: D \to K$

$f: x \mapsto f(x)$

Fungsi







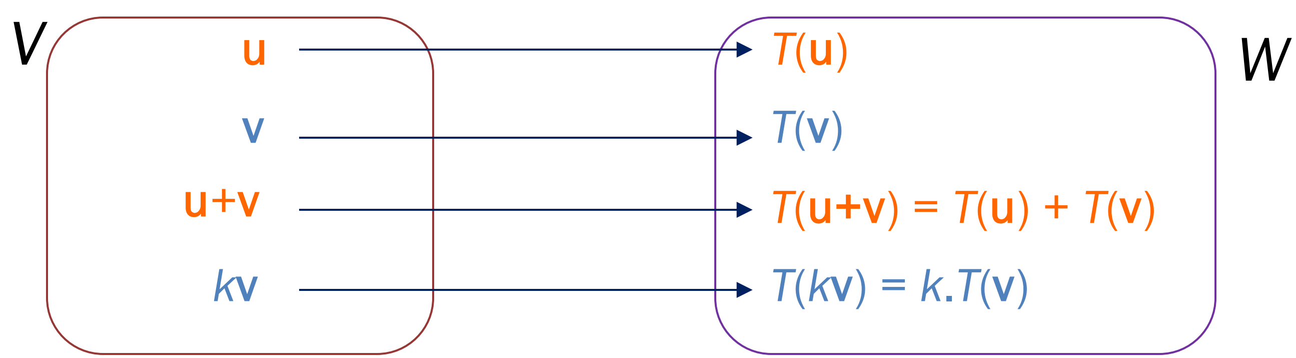
Pengertian transformasi linear

Definisi 8.2.: Transformasi linear

Jika $T: V \rightarrow W$ adalah fungsi dari ruang vektor V ke ruang vektor W, maka T disebut **transformasi linear** jika untuk setiap vektor **u, v** di V dan setiap skalar k berlaku**:**

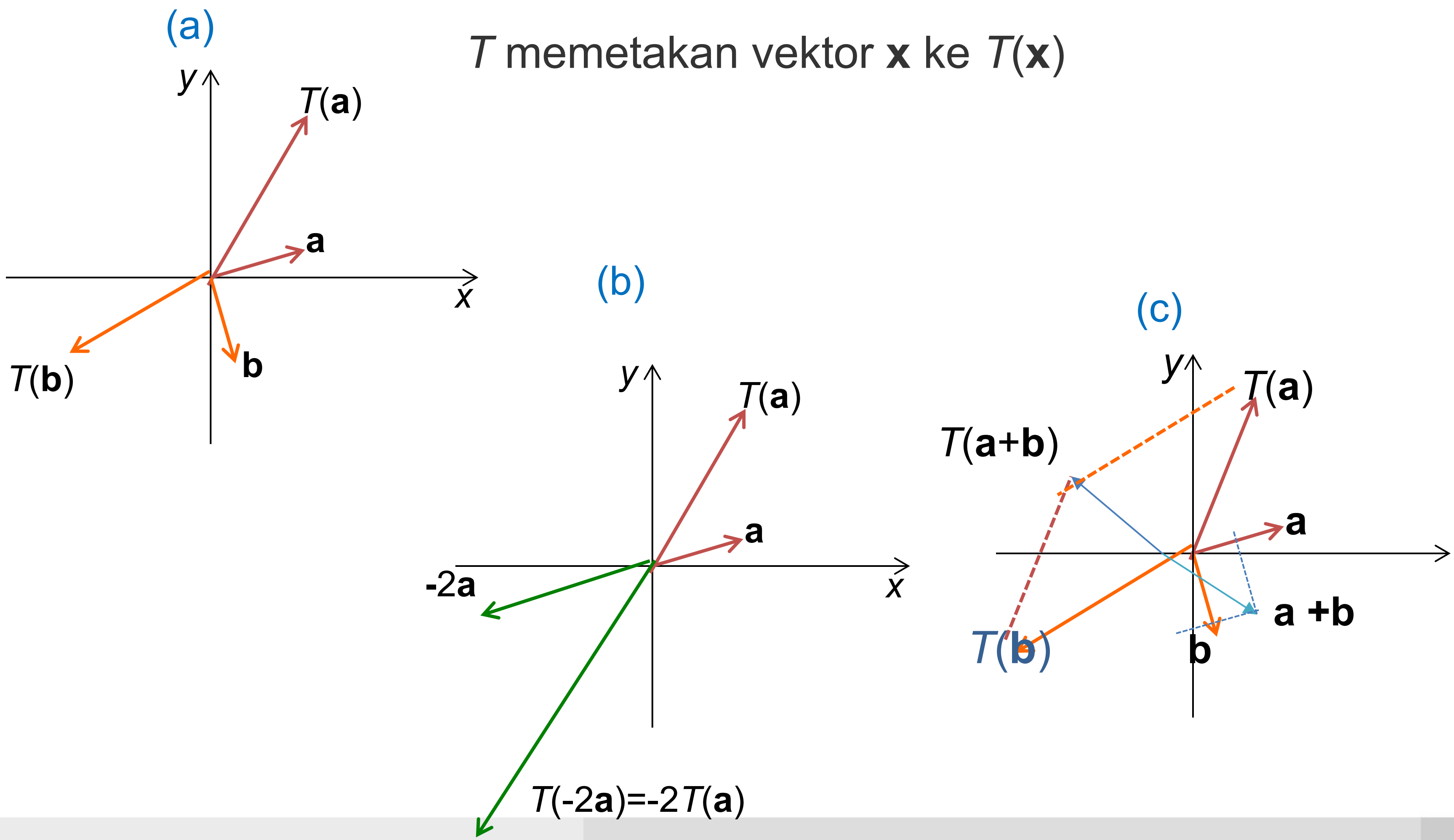
1. $T(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$
2. $T(k\mathbf{u}) = kT(\mathbf{u})$

Jika $V = W$, maka T disebut operator linear



Contoh 1: Transformasi linear

T memetakan vektor **x** ke *T*(**x**)



Contoh 2: transformasi nol & identitas

2a. Diberikan ruang vektor *V* dan *W*; didefinisikan transformasi linear

$T_0: V \rightarrow W$ *dengan* $T_0(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$ untuk setiap **v** elemen *V*

$$T_0(\alpha\mathbf{u}+\beta\mathbf{v}) = \mathbf{0}$$
$$= \alpha.\mathbf{0} + \beta.\mathbf{0}$$
$$= \alpha T_0(\mathbf{u}) + \beta T_0(\mathbf{v})$$

$T_0: V \rightarrow W$ adalah transformasi linear dan disebut **transformasi nol**

2b. Transformasi berikut ini disebut **transformasi identitas.**

$$T_1 : V \rightarrow V$$

$T_1(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$ untuk setiap v elemen *V*

Contoh 2c: Transformasi Linear

$$T_1 : R^3 \to R^2$$

$$T_1 : \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a+2c \\ 3b \end{pmatrix}$$

T_1 adalah transformasi linear.

Buktikan (sebagai latihan)

Transformasi linear & perkalian matriks

$$T_1 : R^3 \to R^2$$

$$T_1\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+2c \\ 3b \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} a + 0.b + 2c \\ 0.a + 3b + 0.c \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$ perkalian matriks dengan vektor

Ternyata T_1 dapat dioperasionalkan dengan perkalian matriks

$$T_1(\mathbf{v}) = A\mathbf{v}$$

Contoh 2d: Transformasi Linear

$$T_2 : R^3 \to R^4$$

$$T_2 : \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} b \\ 2a \\ 3a + b + 2c \\ 0 \end{pmatrix}$$

T_2 adalah transformasi linear.

Tunjukkan bahwa T_2 dapat dikerjakan dengan perkalian matriks.

Contoh 2d: Transformasi Linear

$$T_2 : R^3 \rightarrow R^4$$

$$T_2 : \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} b \\ 2a \\ 3a + b + 2c \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

T_2 juga dapat dioperasionalkan dengan perkalian matriks: $T_2(\mathbf{v}) = A\mathbf{v}$

T_2 adalah transformasi linear.

Buktikan (sebagai laporan)

Contoh 3: transformasi linear

Transformasi linear dari P^2 ke P^3

$T: P^2 \rightarrow P^3$ Untuk $\mathbf{v} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \in P^2$

didefinisikan $T(\mathbf{v}) = a_1 x^2 + a_2 x^3$

$$\begin{aligned} T(k\mathbf{v}) &= k a_1 x^2 + k a_2 x^3 \\ &= k\left(a_1 x^2 + a_2 x^3\right) \\ &= kT(\mathbf{v}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T(\mathbf{v} + \mathbf{w}) &= (a_1 + b_1)x^2 + (a_2 + b_2)x^3 \\ &= a_1 x^2 + b_1 x^2 + a_2 x^3 + b_2 x^3 \\ &= \left(a_1 x^2 + a_2 x^3\right) + \left(b_1 x^2 + b_2 x^3\right) \\ &= T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v}) \end{aligned}$$

Contoh 4a: fungsi bukan transf. linear

Didefinisikan fungsi dari R^2 ke R^3 sebagai berikut

$T: R^2 \rightarrow R^3$

$$T: (v_1, v_2) \mapsto (v_1, v_2, 5)$$

$$T(\mathbf{v}+\mathbf{w}) = (v_1 + w_1, v_2 + w_2, 5)$$
$$T(\mathbf{v}) + T(\mathbf{w}) = (v_1 + w_1, v_2 + w_2, 10)$$
$$T(\mathbf{v}+\mathbf{w}) \neq T(\mathbf{v}) + T(\mathbf{w})$$

T **bukan** transformasi linear.

Contoh 4b: fungsi bukan transf. linear

Didefinisikan fungsi dari R^3 ke R^3 sebagai berikut

$$T: R^3 \rightarrow R^3$$

$$T(x, y, z) = (xy, 2x - z, 0)$$

Ditunjukkan T bukan TL

$\mathbf{v} = (a, b, c)$
$\mathbf{w} = (d, e, f)$

$$T(\mathbf{v}) = T(a, b, c) = (ab, 2a - c, 0)$$

$$T(\mathbf{w}) = T(d, e, f) = (de, 2d - f, 0)$$

$T(\mathbf{v}) + T(\mathbf{w}) =$

$T(\mathbf{v} + \mathbf{w}) =$

T **bukan** transformasi linear.

Contoh 4c: fungsi bukan transf. linear

Didefinisikan fungsi dari R^3 ke R^4 sebagai berikut

T: $R^3 \rightarrow R^4$

$$T(x, y, z) = (x^2, 2y + z, 0)$$

Ditunjukkan T bukan TL

$$\mathbf{v} = (a, b, c)$$
$$\mathbf{w} = (d, e, f)$$

$$T(\mathbf{v}) = T(a, b, c) =$$
$$T(\mathbf{w}) = T\ (d, e, f) =$$
$$T\ (\mathbf{v}) + T(\mathbf{w}) =$$
$$T(\mathbf{v} + \mathbf{w}) =$$

T **bukan** transformasi linear.

Ciri TL di ruang euclid

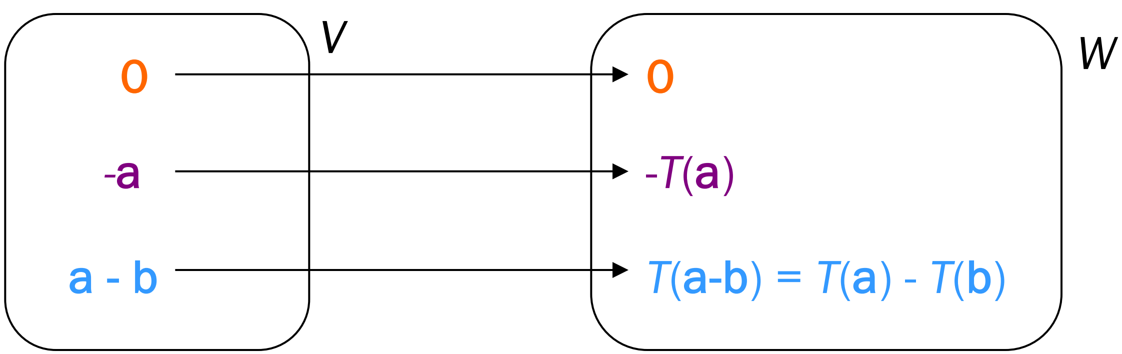
Transformasi Linear	BUKAN transformasi Linear
• $T(a, b) = (2a - b, 0)$	• $T(a, b) = (2a - b, 15)$
• $T^*(p, q, r, s) = (0, p-q, 2r+s)$	• $T(a, b) = (2ab, 0)$
• $T'(x, y, z) = (x - z, y, z - y)$	• $T(a, b, c) = (b^2, a + b)$ • $T(a, b, c) = (\cos a, 2a - c)$
• Contoh lain?	• Contoh lain?

- Bandingkan komponen vektor hasil pemetaan.
- Transformasi linear melibatkan hanya kombinasi linear komponen vektor.

Sifat-sifat transformasi linear

𝒯eorema 8.1. : Sifat-sifat transformasi linear

1. $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$
2. $T(-\mathbf{a}) = -T(\mathbf{a})$
3. $T(\mathbf{a} - \mathbf{b}) = T(\mathbf{a}) - T(\mathbf{b})$



Pengertian transformasi linear

Transformasi linear pada ruang Euclid

Komposisi transformasi linear

Kernel dan *range*

Inverse transformasi linear

Similaritas

8.2 Transformasi Linear di Ruang Euclid

Transformasi linear & perkalian matriks

$$T_1 : R^3 \rightarrow R^2$$

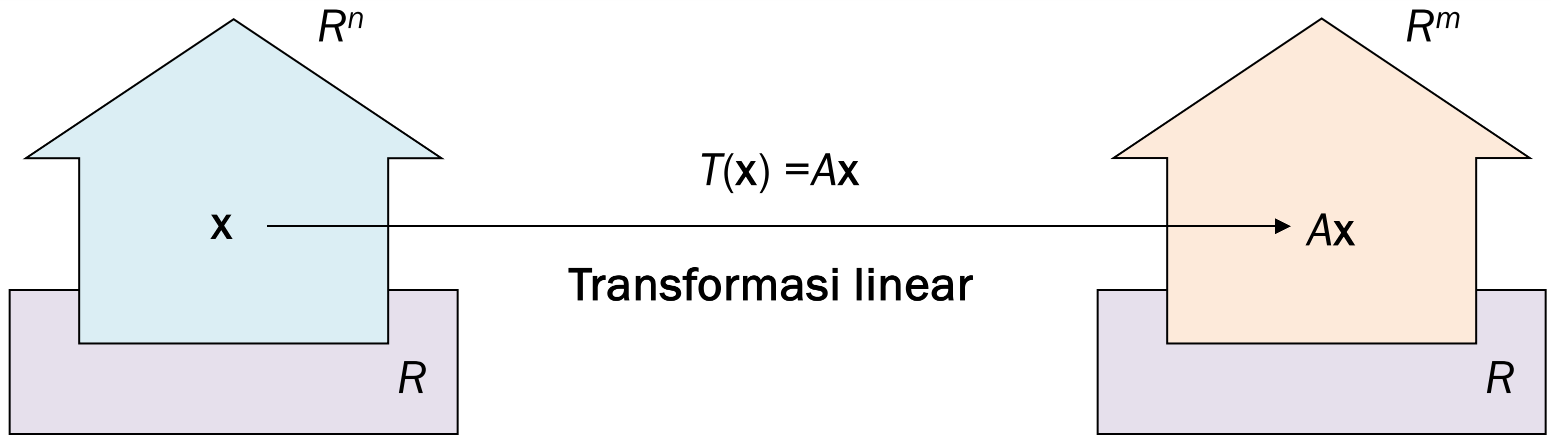
$$T_1 \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+2c \\ 3b \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} a + 0.b + 2c \\ 0.a + 3b + 0.c \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

T_1 dapat dioperasionalkan dengan perkalian matriks

$$T_1(\mathbf{v}) = A\mathbf{v}$$

Transformasi linear di ruang Euclid



Setiap transformasi linear dari ruang Euclid ke ruang Euclid selalu dapat dinyatakan sebagai perkalian matriks, disebut matriks standard

Jika $m = n$, maka T disebut **operator linear.**

Notasi: $T: R^n \rightarrow R^m$

$$T_A(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$$

$[T_A] = [T] = A$ **matriks standard** transformasi T

Matriks standar

- Untuk setiap transformasri linear $T : R^n \rightarrow R^m$ maka dapat disajikan sebagai perkalian dengan matriks standar.

- Notasi matriks standar T adalah $[T]$ berordo m x n

$$T : \mathbf{x} \mapsto T(\mathbf{x})$$

$$T(\mathbf{x}) = [T]\mathbf{x}$$

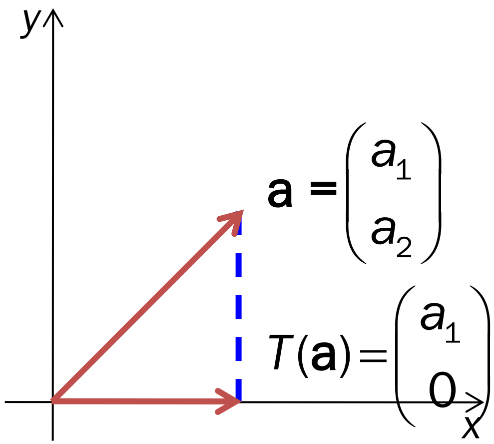
Catatan:

$\mathbf{x} \in R^n$, maka $\mathbf{x}$ berordo nx1

$T(\mathbf{x})$ berordo mx1

$[T]$ berordo mxn

Proyeksi pada sumbu-x

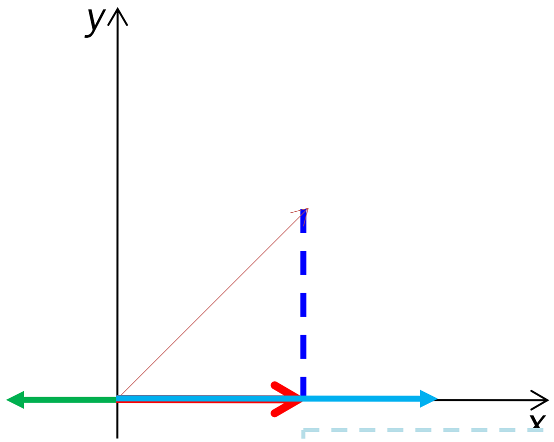


$$\bar{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

Matriks standar TL

$$T\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.a_1 + 0.a_2 \\ 0.a_1 + 0.a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

Proyeksi pada sumbu-x



$$T\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.a_1 + 0.a_2 \\ 0.a_1 + 0.a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

$$[T] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Nilai eigen matriks [T] : 1 dan 0.

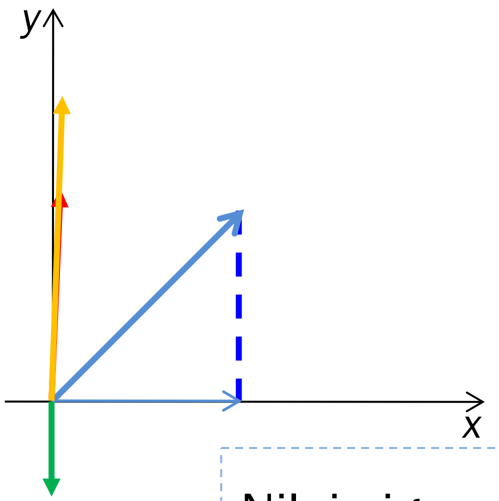
Nilai eigen 1 artinya [T] **x** = 1.**x**

T(**x**) = [T] **x** = **x**

(**x** dipetakan ke **x** sendiri)

Vektor eigen: vektor horizontal tak nol

Proyeksi pada sumbu-x: nilai eigen



$$[T] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Nilai eigen matriks $[T]$: 1 dan 0.

Nilai eigen 0 artinya $[T]\,\mathbf{x} = 0.\mathbf{x} = \mathbf{0}$

$$T(\mathbf{x}) = [T]\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

($\mathbf{x}$ dipetakan ke $\mathbf{0}$)

Vektor eigen: vektor vertical tak nol

Latihan 1: proyeksi pada sumbu-*y*

1. Tentukan hasil proyeksi vektor (*x*, *y*) pada sumbu-*y*.
2. Tulislah setiap komponen sebagai kombinasi linear *x* dan *y*.
3. Tentukan matriks standar operator linear proyeksi pada sumbu-*y*.
4. Tentukan semua nilai eigen dari matriks tersebut.

Jawaban:

(1) (*x*, *y*) diproyeksikan ke (0, *y*)

(2) $$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.x + 0.y \\ 0.x + 1.y \end{pmatrix}$$

(3) $$\text{matriks standard}: \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(4) nilai eigen [*T*] adalah 1 dan 0

Nilai eigen transformasi linear

- $T : R^n \rightarrow R^n$ operator linear

  $T : \mathbf{x} \mapsto T(\mathbf{x})$

- Jika terdapat $x \neq 0$ dan $T(\mathbf{x}) = \lambda\mathbf{x}$

  maka λ adalah **nilai eigen transformasi linear** T

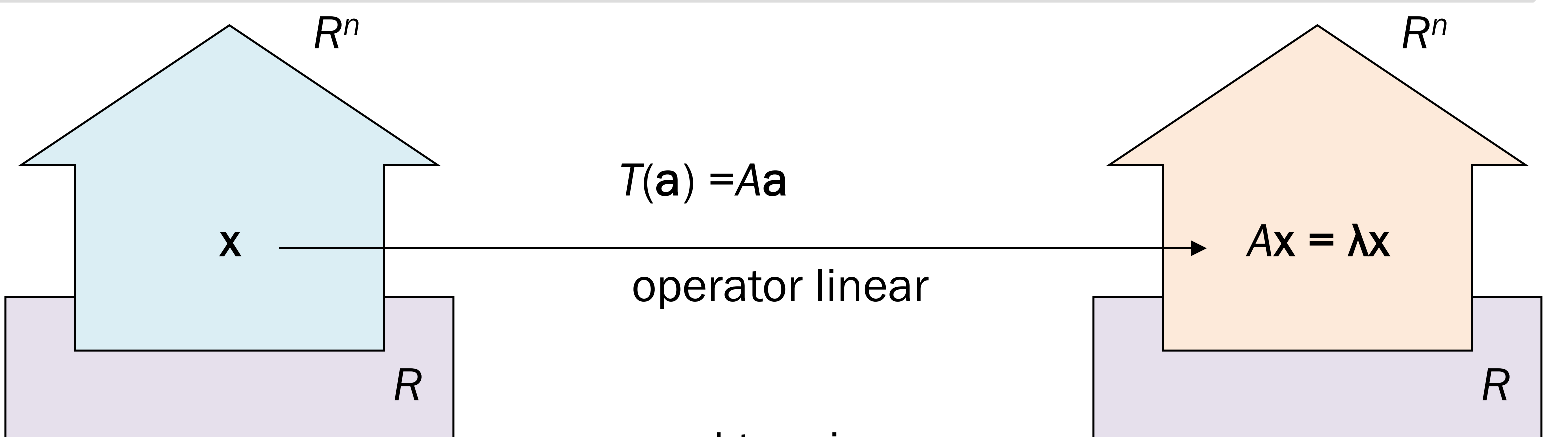
- *Untuk setiap tl di RE berlaku* $T(\mathbf{x}) = [T]\mathbf{x}$

- **Jadi, nilai eigen [*T*] nilainya sama dengan nilai eigen *T***

Nilai dan vektor eigen operator linear

Definisi 8.3.: Nilai dan vektor eigen operator linear

Jika $T: R^m \rightarrow R^n$ adalah operator linear, maka λ disebut nilai eigen dari T jika terdapat vektor tak nol $\mathbf{x}$ sedemikian hingga $T(\mathbf{x}) = \lambda\mathbf{x}$. Vektor tak nol ini disebut vektor eigen dari T yang bersesuaian dengan λ.



x vektor eigen

λ nilai eigen

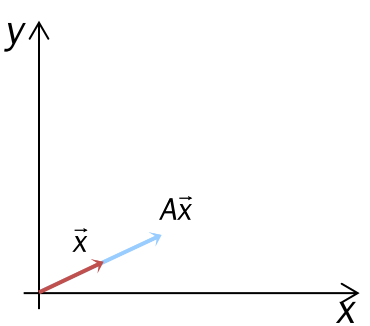
Contoh 5: transformasi linear

Diberikan f:$R^2 \rightarrow R^2$ dengan $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$, dengan $A = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$

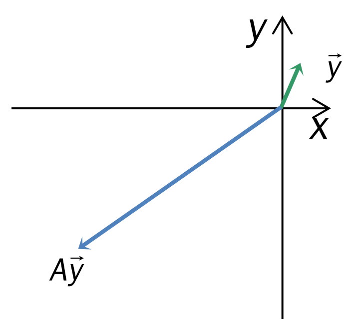
Tentukan hasil transformasi linear vektor **x**, **y**, dan **z** berikut ini.

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \vec{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \vec{z} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

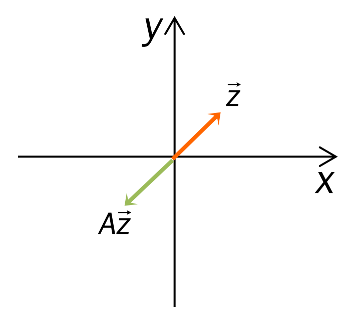
$$f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad f(\vec{y}) = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 \\ -9 \end{pmatrix} \qquad f(\vec{z}) = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}$$



x vektor eigen dari *A*

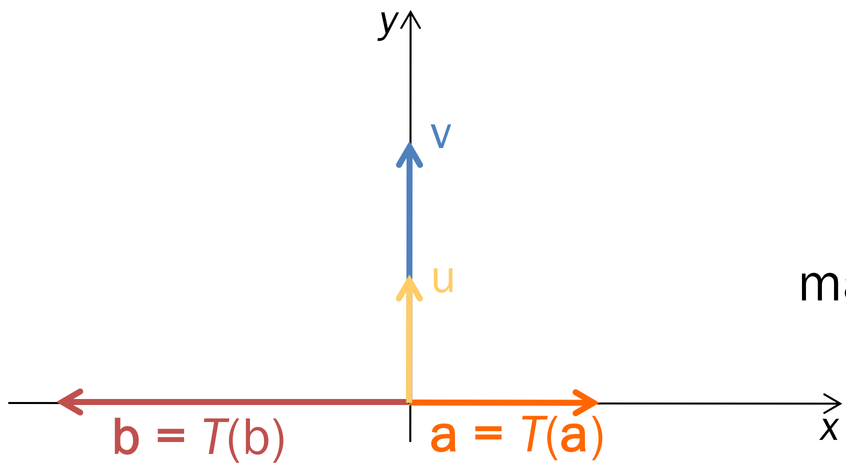


y bukan vektor eigen *A*



z vektor eigen dari *A*

Nilai eigen dari proyeksi pada sumbu-x



$$\text{matriks standard} = [T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Nilai eigen [*T*] adalah 1 dan 0

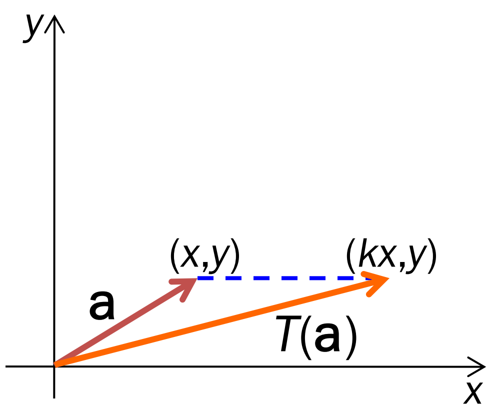
Untuk setiap vektor horisontal **a**, maka *T*(**a**) = 1.***a***.

Untuk setiap vektor vertikal **u**, maka *T*(**u**) = 0.**u** = **0**

Nilai eigen *T* sama dengan nilai eigen [*T*], yaitu 1 dan 0. Vektor eigen dari *T* yang bersesuaian dengan nilai eigen 1 adalah vektor tak nol horisontal. Vektor tak nol vertikal adalah vektor eigen bersesuaian dengan nilai eigen 0.

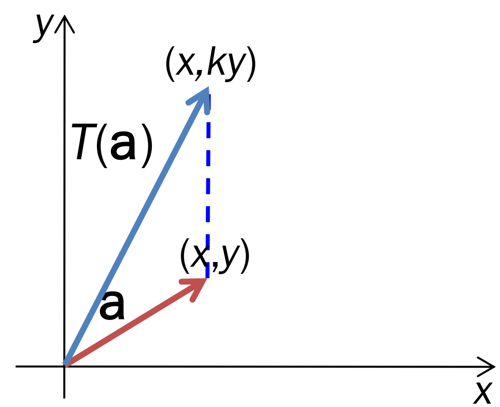
Ekspansi searah sumbu-x & sumbu-*y*

Terhadap sumbu-x



matriks standard $\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Terhadap sumbu-*y*

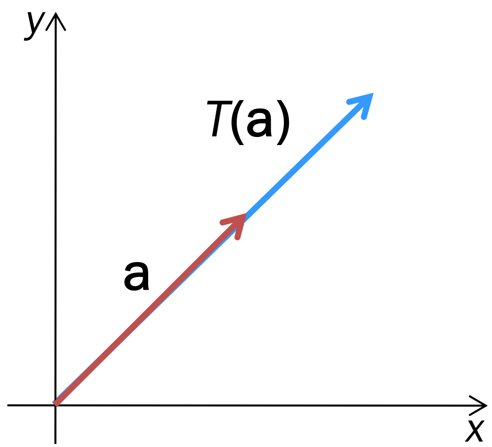


matriks standard $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$

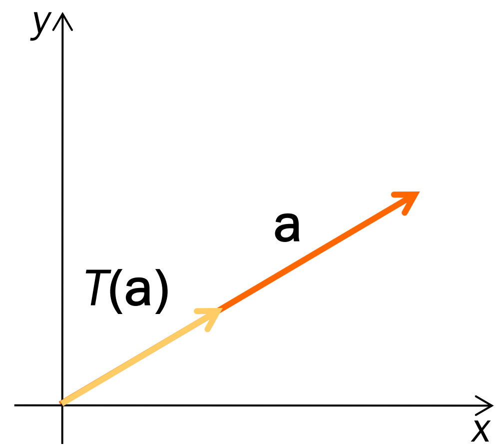
Delatasi: $k > 1$; kontraksi $0 < k < 1$

Delatasi dan kontraksi (searah vektor)

Jika k adalah skalar tidak nol, maka operator $T(\mathbf{x}) = k\mathbf{x}$ di R^2 atau R^3 disebut kontraksi dengan faktor k (jika $0 \leq k \leq 1$) dan delatasi dengan faktor k jika $k \geq 1$.



$k \geq 1$



$0 \leq k \leq 1$

Nilai eigen dari T : k, setiap vektor tak nol di R^2 adalah vektor eigen.

Determinan operator linear

𝒟efinisi 8.4.: determinan operator linear

Jika T: $R^m \rightarrow R^n$ adalah operator linear dengan matriks standar $[T]$ maka determinan operator linear T adalah

$$\det(T) = \det([T])$$

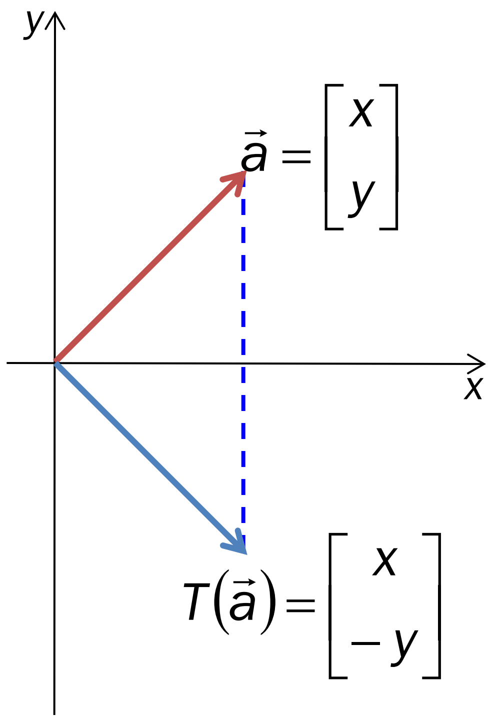
Contoh 6:

a. T proyeksi ortogonal pada sumbu-x; matriks standard $= [T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$,

maka $\det(T) = 0$

b. Determinan delatasi sebesar k di R^2 adalah $k^2 = \det \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$

Pencerminan terhadap sumbu-*x* di R^2

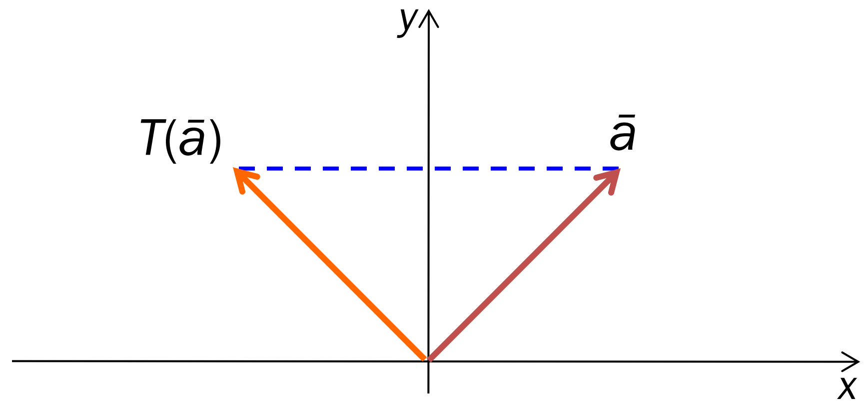


Matriks standar

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.x + 0.y \\ 0.x - 1.y \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}}_{\text{Matriks standar}} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Nilai eigen *T* adalah 1 dan -1.
Determinan *T* adalah -1

Pencerminan terhadap sumbu-*y* di R^2

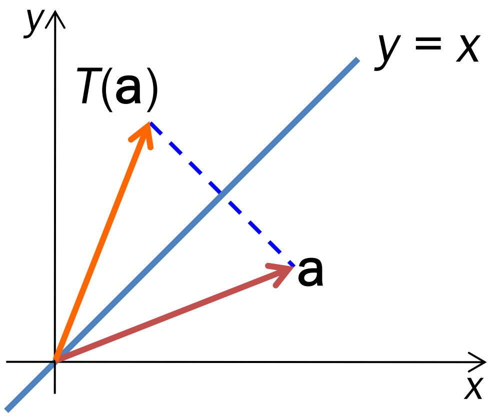


$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.x + 0.y \\ 0.x + 1.y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Matriks standard = $[T] = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ det ([*T*]) = det(*T*) = -1

Nilai –nilai eigen *T*: -1 dan 1. Vektor-vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen -1 adalah semua vektor tak nol horisontal. Vektor-vektor eigen untuk nilai eigen 1 : semua vektor tak nol vertikal.

Pencerminan terhadap garis y=x di R^2



$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.x + 1.y \\ 1.x + 0.y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

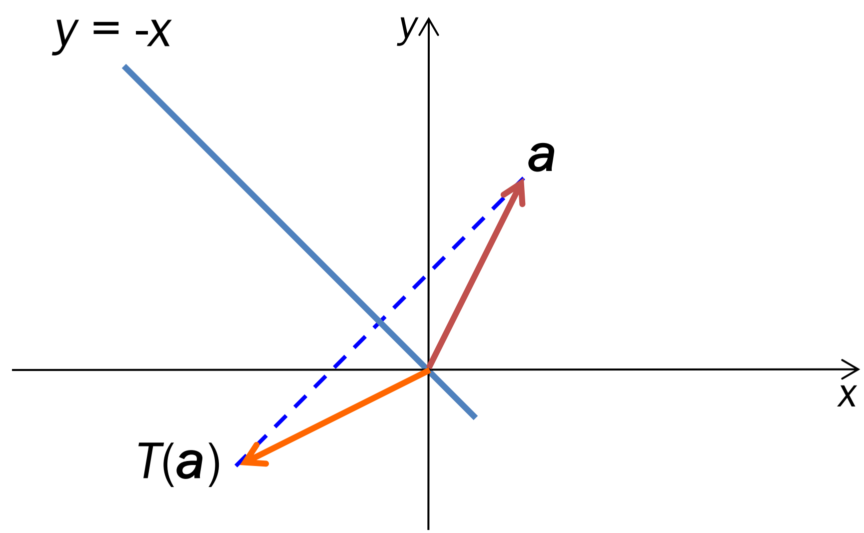
Nilai -nilai eigen dari T adalah 1 dan -1. Vektor (a, a) dengan $a \neq 0$ adalah vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen 1.

a. Tentukan vektor eigen untuk nilai eigen -1.

b. Vektor apa yang dipetakan ke vektor nol?

c. Hitung det(T)

Pencerminan terhadap garis y=-x di R^2



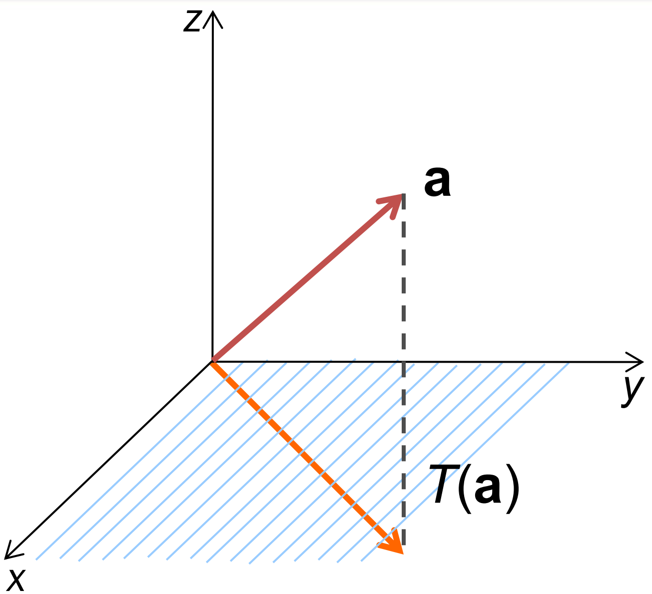
$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -y \\ -x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.x - 1.y \\ -1.x + 0.y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\text{matriks standard}: [T] = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Det (T) = -1

Nilai-nilai eigen T adalah 1 dan -1

Pencerminan terhadap bidang-*xy* di R^3



$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x \\ y \\ -z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.x + 0.y + 0.z \\ 0.x + 1.y + 0.z \\ 0.x + 0.y + -1.z \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$\text{matriks standar} = [T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

a. Tentukan vektor eigen untuk nilai eigen *T*.

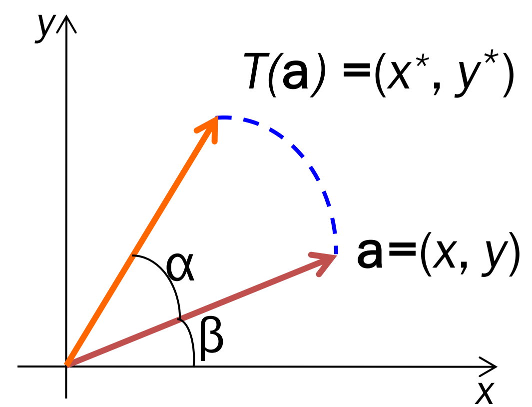
b. Vektor apa yang dipetakan ke vektor nol?

c. Hitung det(*T*)

Rotasi di R^2

- Rotasi sebesar α berlawanan arah jarum jam

- Persamaan $T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x^* \\ y^* \end{bmatrix}$



$$x = r\cos\beta, y = r\sin\beta$$

$$x^* = r\cos(\beta+\alpha), y^* = r\sin(\beta+\alpha)$$

$$x^* = r\cos\beta\cos\alpha - r\sin\beta\sin\alpha$$

$$y^* = r\cos\beta\sin\alpha + r\sin\beta\cos\alpha$$

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x^* \\ y^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r\cos\beta\cos\alpha - r\sin\beta\sin\alpha \\ r\cos\beta\sin\alpha + r\sin\beta\cos\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x\cos\alpha - y\sin\alpha \\ x\sin\alpha + y\cos\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

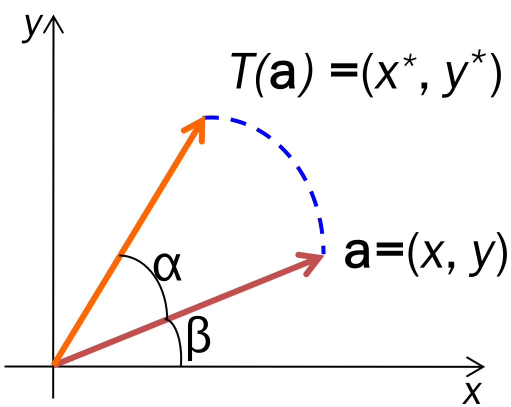
$$\text{matriks standar} = [T] = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

[*T*] matriks orthogonal
T merupakan isometri

Rotasi di R^2

Rotasi sebesar α berlawanan arah jarum jam

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$



Kolom-kolom [T]

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \end{bmatrix}$$

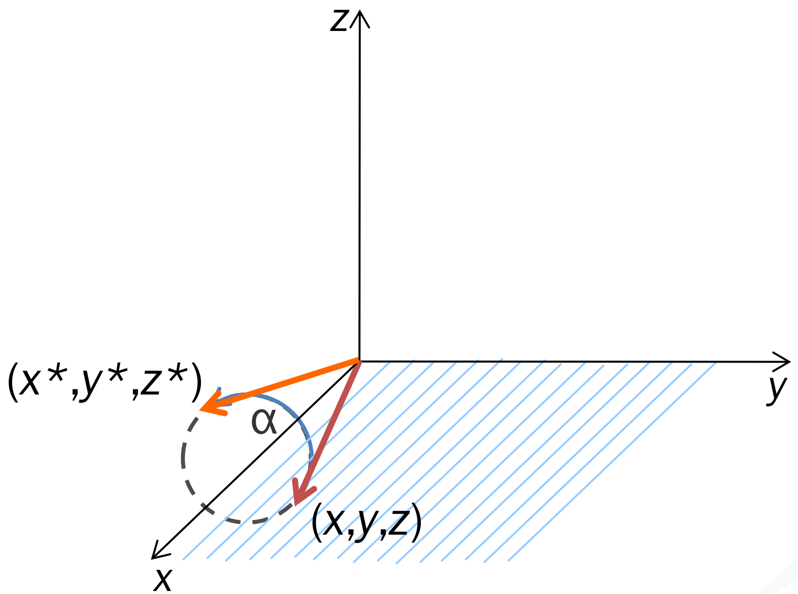
saling orthogonal dan normnya 1

[*T*] matriks orthogonal

T merupakan **isometri** $|\mathbf{x}| = |T(\mathbf{x})|$

Rotasi terhadap sumbu-x positif di R^3

- Rotasi sebesar α berlawanan arah jarum jam



Matriks standar

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x \\ y\cos\alpha - z\sin\alpha \\ y\sin\alpha + z\cos\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Menentukan matriks standar

Teorema 8.2: Jika $T : R^n \rightarrow R^m$ maka $T(\mathbf{x}) = [T]\mathbf{x}$ (T dapat diterapkan dengan perkalian matriks standar $[T]$). Matriks standar $[T]$ diperoleh sebagai berikut

$$[T] = [\ T(\mathbf{e}_1)\ \ T(\mathbf{e}_2)\ \ldots\ldots T(\mathbf{e}_n)\ ]$$

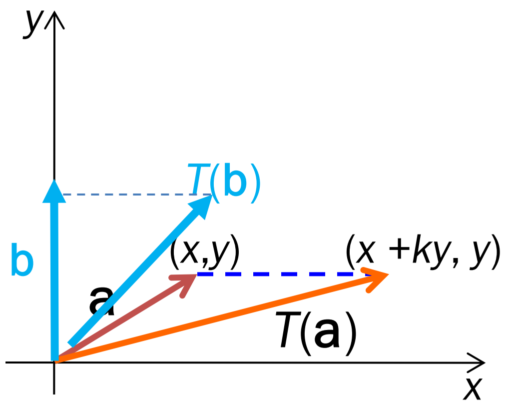
matriks yang kolom-kolomnya adalah hasil pemetaan vektor-vektor basis normal standar (terurut)

Contoh 7: $T : R^3 \rightarrow R^2$ dengan $T : \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 2u_1 + 3u_2 \\ 4u_3 \end{bmatrix}$

$T(\mathbf{i}) = \begin{bmatrix} 2.1 + 3.0 \\ 4.0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ $T(\mathbf{j}) = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$ $T(\mathbf{k}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}$ Jadi, $[T] = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

shear searah sumbu-x

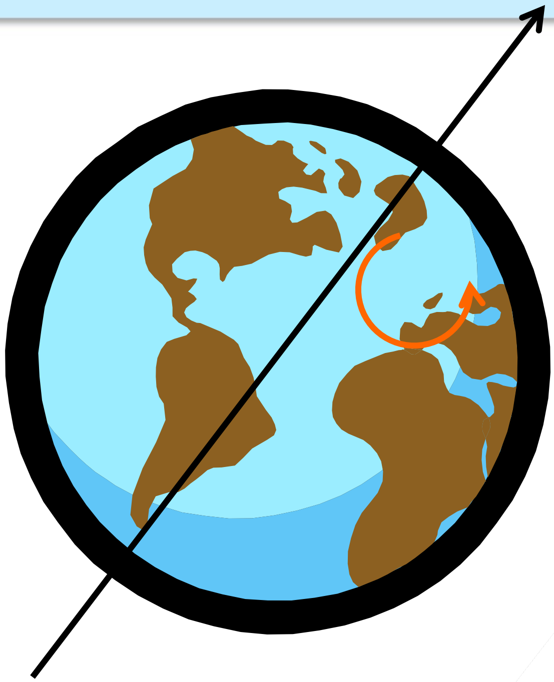
Terhadap sumbu-x



matriks standard $\begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

- Bagaimana *shear* sebesar *k* searah sumbu-*y*?
- Bandingkan *shear* dengan ekspansi ke arah sumbu-x

Rotasi bumi



- Bumi berputar pada porosnya yaitu sumbu yang melalui kutub utara dan selatan. Karena matahari terbit dari timur dan tenggelam ke barat, maka bumi berputar dari barat ke timur. Dilihat di bawah kutub selatan, bumi berputar searah jarum jam, tetapi dari atas kutub utara, bumi berputar berlawanan arah jarum jam.

Refleksi

- Tuliskan pengertian relasi, fungsi, transformali linear, dan operator linear.
- Apa kekhasan dari transformasi linear di ruang Euclid?
- Apa kaitan matriks *mxn* dengan transformasi linear?

Silahkan lanjutkan subtopik 8.3 Komposisi TL

MODUL E-LEARNING ALJABAR LINIER
FAKULTAS ILMU KOMPUTER, UNIVERSITAS INDONESIA