LK 7

22060283332
ALDEN LUTHFI
ALIN - A
Pasjar: Wahyu Hidayat

① $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ $\bar{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\bar{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$A\bar{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = 2\bar{a}$ → nilai eigen $\lambda = 2$ bersesuaian dengan $\bar{a}$

$A\bar{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ → tidak ada k sehingga $A\bar{b} = k\bar{b}$
b bukan vektor eigen dari A

② ① pastikan $\bar{a}$ bukan vektor nol
② kalikan $\bar{a}$ dengan A
③ jika hasilnya adalah perkalian skalar dari $\bar{a}$
maka $\bar{a}$ adalah vektor eigen dari A

③ ⓐ $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 6 & -1 \end{bmatrix}$ $A - \lambda I = \begin{bmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 6 & -1-\lambda \end{bmatrix}$

$\det(A - \lambda I) = (2-\lambda)(-1-\lambda) - 18 = 0$
$\lambda^2 - \lambda - 20 = 0$
$(\lambda - 5)(\lambda + 4)$ → $\lambda_1 = -4$ $\lambda_2 = 5$

ⓑ $\lambda = 5$ → $A\bar{x} = 5\bar{x}$ → $(A - 5I)\bar{x} = 0$

$\begin{bmatrix} -3 & 3 \\ 6 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ → $\left.\begin{matrix} -3x_1 + 3x_2 = 0 \\ 6x_1 - 6x_2 = 0 \end{matrix}\right\}$ $x_1 = x_2$

himpunan semua vektor eigen

$\{(a, a) \mid a \in R^+ \cup R^-\}$

(c) $\{(a,a) \mid a \in R\}$ → ruang eigen

(d) $\{(a,a) \mid a \in R\}$ → ruang eigen

$\{(a,a) \mid a \in R^{+} \cup R^{-}\}$ → himpunan semua vektor eigen

(e) ya, $\bar{0}$ termasuk ke ruang eigen namun bukan vektor eigen

(f) $(4I - A)\bar{x} = 0$

$$\begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow x_1 = -\frac{1}{2}x_2$$

ruang eigen : $\{(-\frac{1}{2}a, a) \mid a \in R\}$

(4) Rank(A) = n → Row(A) merentang R^n → EBT(A) = I
→ tidakada nilai di diagonal EBT(A) yang = 0
→ 0 bukan nilai eigen dari A

(5) (2) $\det(\lambda I - A) = 0$
(3) $A\bar{x} = \lambda\bar{x}$
(4) λ dan $\bar{x}$ → λ adalah nilai eigen dari A yang bersesuaian dengan $\bar{x}$ yang merupakan vektor eigen dari A

(6) $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \det(A - \lambda I) = \det\begin{bmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 3 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{bmatrix}$

$-x^3 + 5x^2 - 6x = 0$

$x \in \{0, 2, 3\}$

$B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\det(B - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 3 \\ 3 & 0 & -\lambda \end{pmatrix}$

$= \lambda^3 + 2\lambda^2 = \lambda^2(\lambda + 2)$

$\lambda \in \{0, -2\}$

matriks yang barisnya tidak bebas linear akan memiliki salah satu nilai eigen $= 0$

(7) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

3 nilai eigen — 2 nilai eigen — 1 nilai eigen

matriks 3x3 tidak mungkin memiliki nilai eigen lebih dari 3 karena determinannya akan memiliki λ berderajat 3 yang hanya memiliki 3 penyelesaian paling banyak

(8.) (a) multisiplitas geometri : multisiplitas geometri dari nilai eigen k adalah dimensi ruang eigen yang berpadanan dengan k

multisiplitas aljabar : multisiplitas aljabar dari k adalah sebenapa kali $(\lambda - k)$ muncul sebagai faktor polinom karakteristik dari A

(b) karena ruang eigen tidak mungkin himpunan kosong, maka dimensinya positif ≥ 1

(c) $A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\rightarrow$ polinom karakteristik $(\lambda - 5)(\lambda - 3)(\lambda - 1)$

$\hookrightarrow$ multisiplitas aljabar $= 1$

Solusi $(A - \lambda I)\vec{x} = 0 \rightarrow \{(t, 0, 0) \mid t \in R\} \nearrow$ multisiplitas geometri $= 1$

9. (a) A harus memiliki n buah vektor eigen yang bebas linear

(b) harus terdapat P yang memiliki invers sehingga $P^{-1}AP = P^{T}AP$ adalah matriks diagonal (A memiliki n buah vektor yang ortonormal)

10. (a) $$\det\left(\begin{bmatrix} 4-\lambda & 0 & 1 \\ 2 & 3-\lambda & 2 \\ 1 & 0 & 4-\lambda \end{bmatrix}\right) = 0$$

$$= (\lambda-3)^2(\lambda-5)$$

multisiplitas aljabar dan $\lambda = 3$ adalah 2

$\quad$ " $\quad$ " $\quad$ $\lambda = 5$ adalah 1

$\lambda = 3$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \bar{0} \rightarrow x_1 = -x_3 \rightarrow \begin{bmatrix} t \\ s \\ -t \end{bmatrix}$$

$\{(t, s, -t) \mid t, s \in R\} \rightarrow$ multisiplitas geometri = 2

$\lambda = 5$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \bar{0} \rightarrow x_1 = x_3 = \frac{1}{2}x_2$$

$\{(t, 2t, t) \mid t \in R\} \rightarrow$ multisiplitas geometri = 1

(b) bisa, $P = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $P^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & 1 & -1 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ $D = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

(11) ⓐ ordo A lebih dari 5x5 karena polinomialnya berderajat 5
↳ atau sama dengan

ⓑ tidak karena salah satu nilai eigennya 0

ⓒ kemungkinan mg $\lambda = 5$ adalah 1
—— // —— $\lambda = 0$ adalah 1 dan 2
—— // —— $\lambda = 2$ adalah 1 dan 2

(12) ① nilai eigen dari A

$$\det(A - \lambda I) = \det\left(\begin{bmatrix} \lambda-4 & -3 & -3 \\ 3 & \lambda+2 & -3 \\ -1 & 1 & \lambda-2 \end{bmatrix}\right) = 0$$

$$= -(\lambda-1)(\lambda-1)(\lambda-2)$$

$\lambda = 1$ dan $\lambda = 2$

② cari ruang eigen yang bersesuaian

$\lambda = 2$

$$\begin{bmatrix} -2 & 3 & 3 \\ -3 & 4 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \bar{0}$$

Solusi Umum $\rightarrow \{(-3t, -3t, t) \mid t \in R\}$

$\lambda = 1$

$$\begin{bmatrix} -3 & 3 & 3 \\ -3 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \bar{0}$$

Solusi Umum $\rightarrow \{(t+s, t, s) \mid t, s \in R\}$

③ vektor eigenya

$$V_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad V_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad V_3 = \begin{bmatrix} -3 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

④ P adalah matriks yang kolom-kolomnya vektor eigen

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & 4 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B = PAP^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

(b.) tidak, contoh lain diagonalisasi A

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(c) $\{(1,1,0), (1,0,1), (-3,-3,1)\}$

(13) ① sifat trace → trace (ABC) = trace (BAC) = trace (CAB) dst...

$A = PBP^{-1}$ dan trace (AB) = trace (A) trace (B)

$$\text{trace}(P^{-1}A) = \text{trace}(BP^{-1})$$
$$= \text{trace}(P^{-1}B)$$
$$\text{trace}(A) = \text{trace}(B)$$

② $\det(A) = \dfrac{1}{\det(A^{-1})}$

$A = PBP^{-1}$

$$\det(A) = \frac{\det(P)\ \det(B)}{\det(P)}$$

③ karena perkalian matriks dengan P = OBE
dan OBE tidak merubah rank maka rank(A) = rank(B)

④ sifat invertible A dan B sama karena determinannya sama

⑤ persamaan karakteristiknya sama karena determinannya sama

⑥ nilai eigennya sama karena persamaan karakteristiknya sama

⑧ ① Salah
② Salah
③ Benar
④ Salah
⑤ Salah
⑥ Benar
⑦ Salah

Alasan

① Counter example:

$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

② karena k bisa $= 0$ dan semua $\bar{v}$ akan memenuhi sifat jika $k = 0$

③ solusi trivial saja $\rightarrow \det(AB) \neq 0 \rightarrow \det(B) \neq 0$
$\rightarrow 0$ bukan λ dari $B \rightarrow \prod \lambda_i$ dari $B \neq 0$

④ tidak dapat ditentukan apakah A memiliki n buah vektor eigen bebas linear

⑤ Counter example : Bagian A no. 12, A_{3x3} tapi 2 nilai eigen

KOKUYO LOOSE LEAF

6. trace(D) $\neq 0 \rightarrow$ det(D) $\neq 0 \rightarrow$ det(A) $\neq 0 \rightarrow$ A invertible $\rightarrow A^{T}x = \vec{0}$ memiliki 1 solusi

7. $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ bisa $= \vec{0}$ dan $\vec{0}$ tidak bebas linear dengan semua vektor

D. Refleksi :

i. nilai eigen adalah penyelesaian λ dari det $(A - \lambda I) = 0$

ii. untuk mendapatkan ruang vektor perlu menyelesaikan persamaan $(A - \lambda I)\bar{x} = \vec{0}$ yang bisa diselesaikan dengan OBE