TEKNIK BERHITUNG LANJUT

Slide Acknowledgment:
Gatot Wahyudi, Adila A. Krisnadhi, Kurniawati Azizah

Matematika Diskret 2

Fakultas Ilmu Komputer Universitas Indonesia

Agenda

- Review: Teknik Berhitung Dasar
- Relasi Rekurensi
- Fungsi Pembangkit
- Penyelesaian Relasi Rekurensi dengan Fungsi Pembangkit
- Penyelesaian Permasalahan *Counting* dengan Fungsi Pembangkit

Review: Teknik Berhitung Dasar

Aturan Penjumlahan dan Aturan Perkalian

- Berapa banyak kemungkinan plat nomor kendaraan DKI Jakarta yang dapat dibuat?

Pola plat nomor kendaraan DKI Jakarta:

Kode Wilayah	Kombinasi Angka (0 - 9)	Kombinasi Huruf (A - Z)
B	3715	TUL

1. Kemungkinan kode wilayah: 1 (Kode wilayah DKI Jakarta pasti B)
2. Kemungkinan kombinasi angka
   - 1 digit: 9
   - 2 digit: 9 x 10 = 90
   - 3 digit: 9 x 10 x 10 = 900
   - 4 digit: 9 x 10 x 10 x 10 = 9000

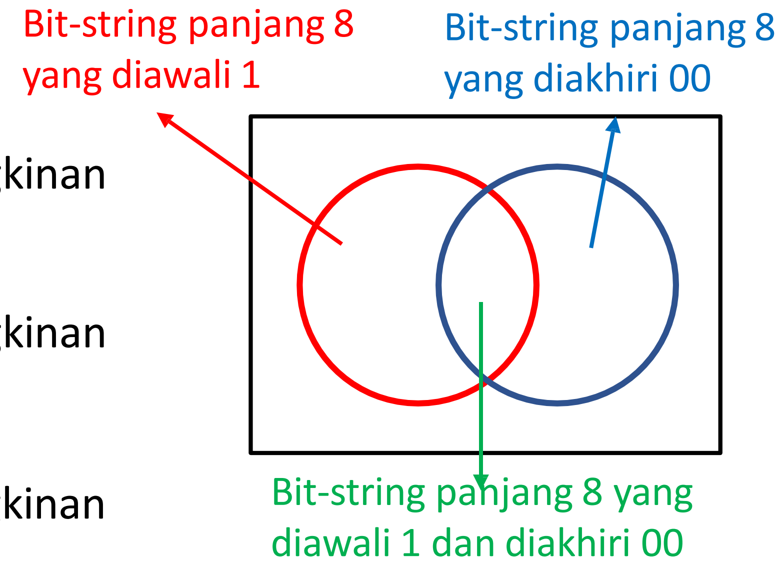
   Total ada 9999 kemungkinan kombinasi angka
3. Kemungkinan kombinasi huruf
   - 1 digit: 26
   - 2 digit: 26 x 26 = 676
   - 3 digit: 26 x 26 x 26 = 17576

   Total ada 18278 kemungkinan kombinasi huruf

Total kemungkinan (berlaku aturan perkalian):
1 x 9999 x 18278 = **182.761.722** plat nomor yang dapat dibentuk.

Prinsip Inklusi-Eksklusi

- Berapa jumlah kemungkinan bit string dengan panjang 8 yang diawali dengan 1 atau diakhiri dengan 00?



Kasus-1: Bit-string panjang 8 yang diawali 1

1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1

→ Ada 2^7 kemungkinan

Kasus-2: Bit-string panjang 8 yang diakhiri 00

0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0	0

→ Ada 2^6 kemungkinan

Kasus-3: Bit-string panjang 8 yang diawali 1 DAN diakhiri 00

1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0	0

→ Ada 2^5 kemungkinan

Kasus-1 dan Kasus-2 secara tidak langsung mengandung Kasus-3, sehingga terjadi duplikasi Kasus-3.

Dengan demikian, total kemungkinan = $2^7 + 2^6 - 2^5 = 160$ bit-string yang dapat dibentuk.

Pigeon-Hole Principle

- Berapa banyak mahasiswa yang harus mengambil kelas MD2 sedemikian hingga paling tidak ada dua mahasiswa yang mendapat nilai akhir sama (dalam huruf)?

Kemungkinan nilai huruf yang bisa diperoleh seorang mahasiswa: A, A-, B+, B, B-, C+, C, D, dan E.

Jika asumsi setiap nilai diperoleh oleh 1 orang mahasiswa, maka akan ada 9 orang mahasiswa di kelas MD2.

Jika ditambahkan 1 orang lagi ke dalam kelas MD2, maka mahasiswa tambahan tersebut akan memperoleh salah satu di antara 9 nilai yang ada, dan nilainya akan sama dengan salah satu mahasiswa yang sudah ada sebelumnya.

Dengan demikian, agar paling tidak ada dua mahasiswa yang mendapat nilai akhir sama di kelas MD2, dibutuhkan paling tidak 10 orang mahasiswa di kelas tersebut.

Permutasi (tanpa perulangan)

- Berapa banyak cara yang dapat dilakukan untuk memberikan 1 emas, 1 perak, dan 1 perunggu kepada 100 orang peserta lomba marathon?

Cara 1: Menggunakan aturan perkalian

Kemungkinan cara memberikan emas: 100 cara

Kemungkinan cara memberikan perak: 99 cara (1 sudah dapat emas)

Kemungkinan cara memberikan perunggu: 98 cara (1 sudah dapat emas dan 1 sudah dapat perak)

Total kemungkinan: 100 x 99 x 98 cara

Cara 2: Menggunakan permutasi

Permutasi → memilih dengan memperhatikan urutan

$$P_{100,3} = \frac{100!}{(100-3)!} = \frac{100 \times 99 \times 98 \times 97!}{97!} = 100 \times 99 \times 98 \text{ cara}$$

Rumus Permutasi

$$P_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Kombinasi (tanpa perulangan)

- Berapa banyak tim voli (beranggotakan 6 orang) yang dapat dibentuk dari 10 orang kandidat?

Kombinasi → memilih tanpa memperhatikan urutan

Rumus Kombinasi

$$C(n,k) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$$

$$C(10,6) = \binom{10}{6} = \frac{10!}{(10-6)! \cdot 6!} = \frac{10!}{4! \cdot 6!} = 210 \text{ cara}$$

Relasi Rekurensi

Motivasi

- Mengapa mempelajari relasi rekurensi?
  - Teknik berhitung dasar (permutasi, kombinasi, *pigeon-hole principle*) ada kalanya tidak mampu menyelesaikan permasalahan perhitungan dengan mudah
  - Contoh:
    - Jika seorang nasabah mendepositokan uangnya sebesar 100 juta di awal dengan profit sharing sebesar 7% setiap tahunnya maka berapakah jumlah uangnya setelah 20 tahun?
  - Permasalahan seperti ini dapat dengan mudah diselesaikan dengan teknik berhitung lanjut menggunakan pemodelan relasi rekurensi

Motivasi

- Relasi rekurensi berkaitan dengan **barisan**
  - Misalkan kita mempunyai barisan
    - $x = 1, 3, 5, 7, 9, \ldots$
  - Barisan x dapat direpresentasikan dengan beberapa cara di antaranya sebagai berikut:
    - Cara 1: $x_n = 2n + 1, n \geq 0$
      - Berbentuk **rumus umum** suku ke-n berdasarkan indeks n
      - Disebut dengan **bentuk eksplisit/solusi umum** dari relasi rekurensi
    - Cara 2: $x_n = x_{n-1} + 2, x_0 = 1$
      - Berbentuk rumus umum suku ke-n berdasarkan suku-suku sebelumnya
      - Disebut **relasi rekurensi**

Relasi Rekurensi

- Definisi

> Relasi rekurensi (*recurrence relation*) untuk sebuah barisan $\{x_n\}$ adalah suatu persamaan (rumus/formula) yang menyatakan hubungan suku x_n dengan satu atau lebih suku pendahulunya dalam barisan itu, $x_0, x_1, x_2, \ldots\ldots, x_{n-1}$, untuk setiap n dengan $n \geq n_0$, & untuk suatu $n_0 \geq 1$

- Suku pendahulunya $x_0, x_1, x_2, \ldots\ldots, x_{n-1}$ dari suku x_n pada suatu relasi rekurensi sebuah barisan $\{x_n\}$ disebut syarat awal untuk relasi rekurensi tersebut

Pemodelan Relasi Rekurensi

- Contoh 1
  - Berapa jumlah uang yang diperoleh seorang nasabah bank yang mendepositokan 10 juta uangnya selama 10 tahun dengan hasil bagi 5% per tahun?

Pemodelan Relasi Rekurensi

- Jawaban Contoh 1
  - Kita dapat membuat pemisalan berikut:
    - x_0 = jumlah uang yang pertama kali didepositokan
    - n = lamanya deposito disimpan
    - x_n = jumlah uang setelah n tahun
  - Maka permasalahan dapat dimodelkan menjadi:
    - $x_n = x_{n-1} + 0{,}05x_{n-1}$, untuk $n > 0$
    - $x_n = 1{,}05x_{n-1}$, untuk $n > 0$

Pemodelan Relasi Rekurensi

- Jawaban Contoh 1 (lanjutan)
  - Dari relasi rekurensi $x_n = 1{,}05x_{n-1}$, maka dapat diperoleh:

    $x_1 = 1{,}05\ x_0 = (1{,}05)^1\ x_0$

    $x_2 = 1{,}05\ x_1 = (1{,}05)^2\ x_0$

    $x_3 = 1{,}05\ x_2 = (1{,}05)^3\ x_0$

    …

    $x_{10} = 1{,}05\ x_9 = (1{,}05)^{10}\ x_0$

    $x_n = (1{,}05)^n\ x_0$, untuk $n > 0$
  - Jadi, setelah 10 tahun maka uang nasabah tersebut berjumlah $(1{,}05)^{10}\ x_0$

Pemodelan Relasi Rekurensi

- Contoh 2
  - Pada sebuah pulau yang tidak ada kelinci, ditempatkan sepasang kelinci jantan dan betina
  - Setelah berumur 2 bulan, setiap pasang kelinci akan melahirkan sepasang kelinci jantan dan betina lagi setiap bulan
  - Jika tidak ada kelinci yang mati, berapa jumlah pasangan kelinci pada pulau itu setelah n bulan ditempatkan pasangan pertama?

Pemodelan Relasi Rekurensi

- Jawaban Contoh 2

  Misal kelinci jantan = M dan kelinci betina = F

  $[MF]_0$ merepresentasikan pasangan kelinci dengan usia 0 bulan

  $[MF]_1$ merepresentasikan pasangan kelinci dengan usia 1 bulan

  [MF] merepresentasikan pasangan kelinci dengan usia >1 bulan

Setelah n bulan	Pasangan kelinci	Jumlah pasangan kelinci
0	$[MF]_0$	1
1	$[MF]_1$	1
2	$[MF]\ [MF]_0$	2
3	$[MF]\ [MF]_1\ [MF]_0$	3
4	$[MF]\ [MF]\ [MF]_1\ [MF]_0\ [MF]_0$	5
5	$[MF]\ [MF]\ [MF]\ [MF]_1\ [MF]_1\ [MF]_0\ [MF]_0\ [MF]_0$	8

Berdasarkan pola tersebut, jumlah pasangan kelinci setelah n bulan:

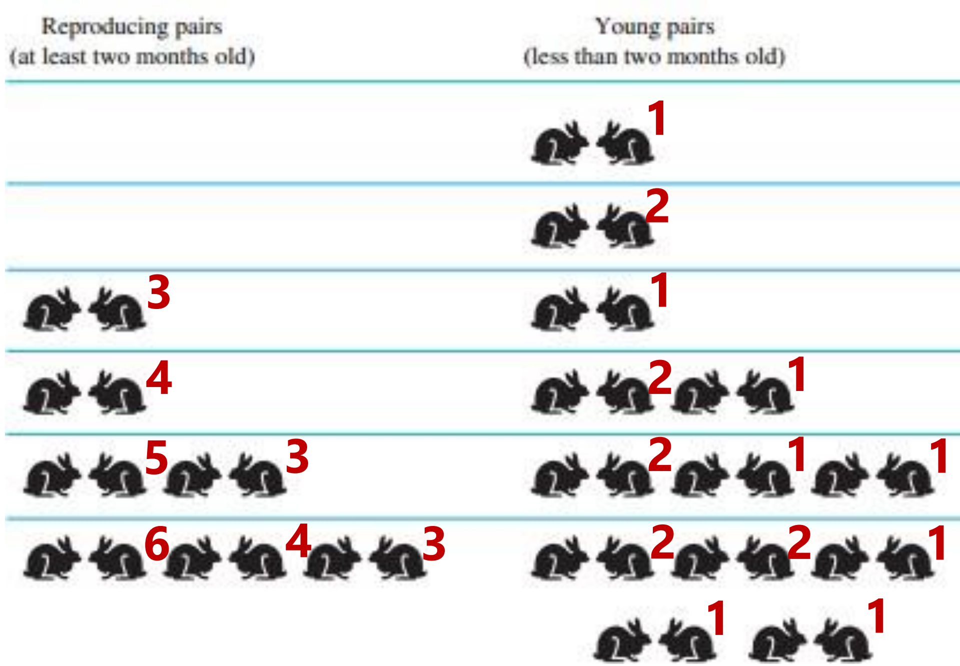
$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$$

dengan nilai awal

$a_0 = 1$ dan $a_1 = 1$

Pemodelan Relasi Rekurensi

- Jawaban Contoh 2 (alternatif)



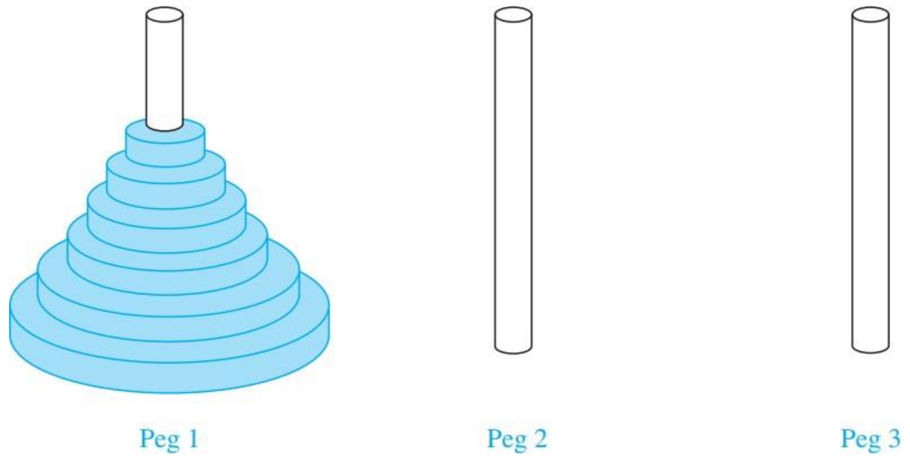
Month	Reproducing pairs	Young pairs	Total pairs	
1	0	1	1	
2	0	1	1	
3	1	1	2	1 + 1
4	1	2	3	2 + 1
5	2	3	5	3 + 2
6	3	5	8	5 + 3

Rossen, p. 502

$$x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$$

Pemodelan Relasi Rekurensi

- Contoh 3: Tower of Hanoi
  - Berapa banyak langkah yang dibutuhkan untuk memindahkan semua piringan dari tiang (peg) 1 ke tiang 3 sedemikian sehingga piringan yang lebih besar selalu berada di bawah piringan yang lebih kecil?



Pemodelan Relasi Rekurensi

- Jawaban Contoh 3: Tower of Hanoi

Misal a_n adalah banyaknya langkah yang dibutuhkan untuk memindahkan n piringan dari satu tiang ke tiang lain.
Jika terdapat n piringan di tiang 1, maka pendekatan rekursif untuk memindahkan semua piringan tersebut ke tiang 3 adalah dengan menjalankan langkah berikut:

1. Pindahkan $n - 1$ piringan teratas di tiang 1 ke tiang 2 → a_{n-1} langkah
2. Pindahkan 1 piringan (sisa) di tiang 1 ke tiang 3 → 1 langkah
3. Pindahkan $n - 1$ piringan di tiang 2 ke tiang 3 → a_{n-1} langkah

Dengan demikian, total langkah:
$a_n = 2a_{n-1} + 1$ langkah

$$a_n = 2a_{n-1} + 1$$
$$a_n = 2(2a_{n-2} + 1) + 1 = 2^2 \cdot a_{n-2} + 2 + 1$$
$$a_n = 2^2(2a_{n-3} + 1) + 2 + 1 = 2^3 \cdot a_{n-2} + 2^2 + 2 + 1$$
$$\dots$$
$$a_n = 2^{n-1} \cdot a_1 + 2^{n-2} + \cdots + 2 + 1$$

$a_1 = 1$, hanya butuh 1 langkah untuk memindahkan 1 piringan

$$a_n = 2^{n-1} + 2^{n-2} + \cdots + 2 + 1$$

Berdasarkan formula deret geometri

$$a_n = 2^n - 1$$

Pemodelan Relasi Rekurensi

- Contoh 4
  - Sebuah PIN khusus dengan panjang *n* terbentuk dari digit desimal (0..9). PIN tersebut valid jika jumlah angka 0-nya genap. Berapa banyak PIN valid dengan panjang *n* yang dapat terbentuk?

Pemodelan Relasi Rekurensi

- Jawaban Contoh 4

Misal a_n adalah banyaknya PIN dengan panjang n yang valid.

Kasus-1: PIN valid dengan panjang n yang **tidak diawali digit 0**

1,2,...,9	PIN valid dengan panjang $n-1$

→ Ada $\mathbf{9} \cdot \boldsymbol{a_{n-1}}$ PIN

Kasus-2: PIN valid dengan panjang n yang **diawali digit 0**

0	PIN invalid dengan panjang $n-1$

→ Ada $\mathbf{1} \cdot \text{PIN}_{(n-1)}$ invalid

$\text{PIN}_{(n-1)}$ invalid = Semua kemungkinan $\text{PIN}_{(n-1)}$ – $\text{PIN}_{(n-1)}$ valid

$\text{PIN}_{(n-1)}$ invalid = 10^{n-1} – a_{n-1}

Total PIN valid yang dapat dibentuk:

$a_n = 9a_{n-1} + 10^{n-1} - a_{n-1}$

$a_n = 8a_{n-1} + 10^{n-1}$

Teknik Penyelesaian Relasi Rekurensi

- Telescoping
- Iterasi
- Persamaan Karakteristik
- Fungsi Pembangkit

Teknik Penyelesaian Relasi Rekurensi

- Contoh: Carilah solusi dari relasi rekurensi $a_n = a_{n-1} + 5$ dengan syarat awal $a_0 = 10$

Metode telescoping

$a_n - a_{n-1} = 5$

$a_1 - a_0 = 5$
$a_2 - a_1 = 5$
$a_3 - a_2 = 5$
…
$a_n - a_{n-1} = 5$
______________+

$a_n - a_0 = 5n$
$a_n = 5n + a_0$
$a_n = 5n + 10$

Metode Iterasi

$a_n = a_{n-1} + 5$
$a_n = a_{n-2} + 5 + 5 = a_{n-2} + 5 \cdot 2$
$a_n = a_{n-3} + 5 + 5 + 5 = a_{n-3} + 5 \cdot 3$
…
$a_n = a_0 + 5 + \cdots + 5 = a_0 + 5 \cdot n$

$a_n = a_0 + 5n$
$a_n = 10 + 5n$

Persamaan Karakteristik untuk Mencari Solusi RLHK

Klasifikasi Relasi Rekurensi

Berdasarkan *linearity*

- Linear
- Nonlinear

Berdasarkan *homogeneity*

- Homogen
- Nonhomogen

Berdasarkan koefisiennya.

- Konstan
- Non-konstan

Relasi rekurensi linier homogen berkoefisien konstan

Definisi RLHK

Relasi rekurensi **linier homogen derajat k berkoefisien konstan** (RLHK derajat k) berbentuk

$$a_n + c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k} = f(n)$$

yang mana $f(n) = 0$, $c_1, c_2, \ldots, c_k$ adalah bilangan riil dan $c_k \neq 0$

RLHK derajat k biasanya dinyatakan bersama k kondisi awal:

$a_0 = C_0, a_1 = C_1, \ldots, a_{k-1} = C_{k-1}$, yang menentukan sebuah solusi barisan unik $\{a_n\}$.

Contoh relasi rekurensi linier homogen berkoefisien konstan

Berapa derajatnya?

- $P_n = (1.11)P_{n-1}$
- $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$
- $a_n = a_{n-5}$.

BUKAN relasi rekurensi linier homogen berkoefisien konstan

- $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}^2$: tidak linier
- $a_n = 2a_{n-1} + 1$: tidak homogen
- $a_n = na_{n-1}$: tidak memiliki koefisien konstan

Persamaan dan akar karakteristik

Definisi: Persamaan Karaktertik

Misalkan $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k}$ adalah RLHK derajat k. Maka persamaan:

$$r^k - c_1 r^{k-1} - c_2 r^{k-2} - \cdots - c_{k-1} r - c_k = 0$$

untuk suatu konstanta r disebut **persamaan karakteristik** dari RLHK di atas.

Definisi

Akar dari persamaan karakteristik suatu RLHK disebut **akar karakteristik** dari RLHK tersebut.

Contoh persamaan karakteristik

Apa persamaan karakteristik untuk relasi rekurensi berikut?

- *RR fibonacci:* $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$
- $a_n = 6a_{n-1} - 11a_{n-2} + 6a_{n-3}$
- $a_n = -3a_{n-1} - 3a_{n-2} - a_{n-3} + 2a_{n-4}$

Persamaan karakteristik berbentuk polinomial

- Persamaan karakteristik merupakan polinomial variabel tunggal berderajat k.
- Teorema dasar aljabar[1] menyatakan bahwa:
  "Setiap polinomial variabel tunggal (yang tidak 0) berderajat k dengan koefisien bilangan kompleks memiliki tepat k buah akar bilangan kompleks (termasuk duplikat akar)".
- Contoh: polinomial kuadratik punya 2 akar; polinomial kubik punya 3 akar.
- Banyaknya duplikat suatu akar disebut **multiplisitas** dari akar tersebut.
  - $r^2 - 1 = 0$ memiliki akar 1 dan -1 (masing-masing dengan multiplisitas 1).
  - $r^3 - r^2 - r + 1 = 0$ memiliki akar 1 dengan multiplisitas 2, serta -1 dengan multiplisitas 1.
  - $r^3 - 3r^2 + 3r - 1 = 0$ memiliki akar 1 dengan multiplisitas 3.

[1] https://en.wikipedia.org/wiki/Fundamental_theorem_of_algebra

Solusi relasi rekurensi linier homogen berkoefisien konstan

Teorema

Misal $c_1, \ldots, c_k \in \mathbb{R}$ dan persamaan karakteristik $r^k - c_1 r^{k-1} - \cdots - c_k = 0$ memiliki t buah akar yakni $r_1, \ldots, r_t$ masing-masing dengan multiplisitas $m_1, \ldots, m_t$ sedemikian hingga $m_i \geq 1$ untuk $i = 1, 2, \ldots, t$ serta $m_1 + m_2 + \ldots + m_t = k$. Maka,

Barisan $\{a_n\}$ adalah solusi dari RLHK $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \ldots + c_k a_{n-k}$

jika dan hanya jika

$$a_n = (\alpha_{1,0} + \alpha_{1,1} n + \ldots + \alpha_{1,m_1-1} n^{m_1-1}) r_1^n + (\alpha_{2,0} + \alpha_{2,1} n + \ldots + \alpha_{2,m_2-1} n^{m_2-1}) r_2^n$$
$$+ \ldots + (\alpha_{t,0} + \alpha_{t,1} n + \ldots + \alpha_{t,m_t-1} n^{m_t-1}) r_t^n$$

untuk $n = 0, 1, 2, \ldots,$ yang mana α_1, α_2 konstan.

Solusi relasi rekurensi linier homogen berkoefisien konstan

Langkah 1:

Ubah bentuk relasi rekurensi ke dalam bentuk persamaan karakteristik

$c_0 a_n + c_1 a_{n-1} + \ldots + c_{k-1} a_{n-k-1} + c_k a_{n-k} = 0,\ n \geq k$

diubah menjadi

$c_0 r^k + c_1 r^{k-1} + \ldots + c_{k-1} r + c_k = 0$

Langkah 2:

Cari akar-akar karakteristiknya

$r_1, r_2, r_3 \ldots$ berikut multiplisitasnya $(m_1, m_2, \ldots)$

Solusi relasi rekurensi linier homogen berkoefisien konstan

Langkah 3:

Bentuk solusi umumnya adalah:

$$a_n = \left(\alpha_{1,0} + \alpha_{1,1}n + \alpha_{1,2}n^2 + \cdots + \alpha_{1,m_1-1}n^{m_1-1}\right)r_1^n + \left(\alpha_{2,0} + \alpha_{2,1}n + \alpha_{2,2}n^2 + \cdots + \alpha_{2,m_2-1}n^{m_2-1}\right)r_2^n + \cdots$$

Langkah 4:

Cari $\alpha_{1,0}$, $\alpha_{2,0}$, …, dengan melakukan substitusi persamaan dengan syarat awal yang diketahui

Masukkan koefisien yang sudah ditemukan ke dalam bentuk solusi umum sehingga diperoleh solusi umumnya (solusi eksplisit)

Solusi RLHK: $x_n = 3x_{n-1} - 2x_{n-2}$, $n > 1$ dengan $x_0=1$ dan $x_1=4$

Tentukan solusi umum untuk relasi rekurensi berikut ini:

$x_n = 3x_{n-1} - 2x_{n-2}$, untuk $n > 1$ dengan $x_0=1$ dan $x_1=4$

Solusi

Langkah 1:

Persamaan karakteristik dari relasi rekurensi yang diberikan yaitu

$x_n - 3x_{n-1} + 2x_{n-2} = 0$ adalah $\mathbf{r^2 - 3r + 2 = 0}$

Langkah 2:

Perhatikan bahwa : $r^2 - 3r + 2 = \mathbf{(r - 2)(r - 1) = 0}$

Akar-akar karakteristik dari persaman tersebut adalah :

$r_1 = 2$, dengan pengulangan $m_1 = 1$

$r_2 = 1$, dengan pengulangan $m_2 = 1$

Solusi RLHK: $x_n = 3x_{n-1} - 2x_{n-2}$, for $n > 1$ with $x_0=1$ and $x_1=4$

Langkah 3:

Bentuk solusi umumnya menjadi :

$$x_n = \alpha_{1,0} r_1^n + \alpha_{2,0} r_2^n$$
$$x_n = \alpha_{1,0} 2^n + \alpha_{2,0} 1^n$$

Langkah 4:

Cari $\alpha_{1,0}$ dan $\alpha_{2,0}$ dengan memanfaatkan kondisi awal yang sudah diketahui yaitu $x_0 = 1$ and $x_1 = 4$

Dari x_0 dan x_1, kita dapat memperoleh persamaan :

$$\alpha_{1,0} 2^0 + \alpha_{2,0} 1^0 = 1 \rightarrow \alpha_{1,0} + \alpha_{2,0} = 1$$
$$\alpha_{1,0} 2^1 + \alpha_{2,0} 1^1 = 4$$

Dengan metode substitusi maka akan diperoleh:

$$\alpha_{1,0} = 3 \quad \text{dan} \quad \alpha_{2,0} = -2$$

Dengan demikian solusi umumnya adalah:

$$x_n = \alpha_{1,0} {r_1}^n + \alpha_{2,0} {r_2}^n \rightarrow \boldsymbol{x_n = 3 \cdot 2^n - 2 \cdot 1^n} \rightarrow \boldsymbol{x_n = 3 \cdot 2^n - 2}$$

Solusi RLHK: $x_n = 6x_{n-1} - 9x_{n-2}$, $n > 1$ dengan $x_0 = -3$ dan $x_1 = 12$

Tentukan solusi umum untuk relasi rekurensi berikut ini:

$x_n = 6x_{n-1} - 9x_{n-2}$, untuk $n > 1$ dengan $x_0 = -3$ dan $x_1 = 12$

Solusi

Langkah 1:

Persamaan karakteristik dari relasi rekurensi yang diberikan yaitu:

$x_n - 6x_{n-1} + 9x_{n-2} = 0$ adalah $\mathbf{r^2 - 6r + 9 = 0}$

Langkah 2:

Perhatikan bahwa : $r^2 - 6r + 9 =$ $\mathbf{(r - 3)(r - 3) = 0}$

Akar-akar karakteristik dari persaman tersebut adalah :

$r_1 = 3$ dengan pengulangan $m_1 = 2$

Solusi RLHK: $x_n = 6x_{n-1} - 9x_{n-2}$, $n > 1$ dengan $x_0 = -3$ dan $x_1 = 12$

Langkah 3:

Bentuk solusi umumnya menjadi:

$$x_n = \left(\alpha_{1,0} + \cdots + \alpha_{1,m-1} n^{m-1}\right) r^n$$
$$x_n = \left(\alpha_{1,0} + \alpha_{1,1} n\right) 3^n$$
$$x_n = \left(\alpha_{1,0} + \alpha_{1,1} n\right) 3^n$$

Langkah 4:

Cari $\alpha_{1,0}$ dan $\alpha_{1,1}$ dengan memanfaatkan kondisi awal yang sudah diketahui yaitu:

$x_0 = -3$ dan $x_1 = 12$

Dari x_0 dan x_1, kita dapat memperoleh persamaan:

$$(\alpha_{1,0} + \alpha_{1,1} * 0)3^0 = -3$$
$$(\alpha_{1,0} + \alpha_{1,1} * 1)3^1 = 12$$

Dengan metode substitusi maka akan diperoleh:

$$\alpha_{1,1} = 7 \quad \text{and} \quad \alpha_{1,2} = -3$$

Dengan demikian solusi umumnya adalah:

$$x_n = (b_{1,0} + \alpha_{1,1} n)3^n \rightarrow \boldsymbol{x_n = (-3 + 7n)3^n}$$

Latihan mencari solusi RLHK

Soal

Tentukan solusi umum untuk relasi rekurensi

$x_n = 3x_{n-2} - 2x_{n-3}$, untuk $n > 2$ dimana $x_0 = 1$, $x_1 = 7$, dan $x_2 = 4$,

Jawab

Persamaan karakteristiknya: ?

Akar-akar karakteristiknya: ?

Bentuk solusi umumnya: ?

Solusi umum yang dicari: ?

Latihan mencari solusi RLHK

Temukan relasi rekurensi untuk banyaknya cara menaiki tangga jika kita dapat melewati 1, 2, atau 3 anak tangga dalam satu langkah?

Bagaimana bentuk umum solusi relasi rekurensi linier homogen yang mempunyai akar-akar karakteristik berikut?

1, 1, 1, 1, -2, -2, -2, 3, 3, -4?

Persamaan Karakteristik untuk Mencari Solusi RLNK

Relasi rekurensi linier nonhomogen berkoefisien konstan

Definisi: RLNK

Relasi rekurensi **linier nonhomogen berkoefisien konstan** (RLNK) berbentuk

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \ldots + c_k a_{n-k} + F(n)$$

dengan $c_1, \ldots, c_k \in \mathbb{R}$ dan $F(n)$ adalah fungsi tidak nol yang bergantung hanya pada n.

Definisi: RLHK terkait dengan RLNK

Untuk setiap RLNK di atas, kita sebut relasi rekurensi

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \ldots + c_k a_{n-k}$$

sebagai **RLHK yang terkait** dengan RLNK tersebut.

Berikut adalah contoh RLNK (Apa $F(n)$ pada RLNK tersebut? Apa RLHK yang terkait?)

- $a_n = a_{n-1} + 2^n$
- $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + n^2 + n + 1$
- $a_n = 3a_{n-1} + n3^n$
- $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3} + n!$

Solusi relasi rekurensi linier nonhomogen berkoefisien konstan

Teorema: Solusi RLNK

Andaikan $\{a_n^{(p)}\}$ adalah suatu solusi partikulir dari RLNK:

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \ldots + c_k a_{n-k} + F(n)$$

Maka, setiap solusi RLNK tsb berbentuk $a_n = a_n^{(p)} + a_n^{(h)}$, yang mana $a_n^{(h)}$ adalah solusi RNHK yang terkait dengan RLNK tersebut.

Jadi, solusi (umum) suatu RLNK adalah penjumlahan dari:

- **sebuah** solusi partikulir dari RLNK tersebut; dan
- solusi dari RLHK terkait (cara mencarinya sudah dibahas sebelumnya)

Teorema: Mencari solusi partikulir RLNK)

Andaikan $\{a_n\}$ memenuhi RLNK $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \ldots + c_k a_{n-k} + F(n)$ dengan $c_1, \ldots, c_k \in \mathbb{R}$ dan $F(n) = (b_t n^t + b_{t-1} n^{t-1} + \ldots + b_1 n + b_0) s^n$ untuk $b_0, b_1, \ldots, b_t, s \in \mathbb{R}$:

Maka,

1. jika s **bukan** akar karakteristik dari RLHK terkait, maka terdapat solusi partikulir dari RLNK di atas yang berbentuk:

$$(p_t n^t + p_{t-1} n^{t-1} + \ldots + p_1 n + p_0) s^n$$

2. jika s adalah akar karakteristik dari RLHK terkait dengan multiplisitas m, maka terdapat solusi partikulir dari RLNK di atas yang berbentuk:

$$n^m (p_t n^t + p_{t-1} n^{t-1} + \ldots + p_1 n + p_0) s^n$$

Solusi relasi rekurensi linier nonhomogen berkoefisien konstan

Ada dua bentuk ***f*(*n*)** untuk solusi partikulir yaitu:

1. $f(n) = \sum_{i=0}^{t} p_i n^i$
2. $f(n) = s^n \sum_{i=0}^{t} p_i n^i$

dengan ***s***, ***p***, dan ***t*** merupakan konstanta, *i* = 0, 1, 2,…

Solusi relasi rekurensi linier nonhomogen berkoefisien konstan

Bagaimana bentuk solusi partikulir dari fungsi-fungsi $f(n)$ berikut?

$f(n) = 5$ $\quad$ $f(n) = n^2$ $\quad$ $f(n) = n2^n$

Jawab

i. $f(n) = 5$ maka $a_n^{(p)} = p_0$

ii. $f(n) = n^2$ maka $a_n^{(p)} = p_0 + p_1 n + p_2 n^2$

iii. $f(n) = n2^n$ maka $a_n^{(p)} = 2^n(p_0 + p_1 n)$

Solusi RLNK #1: $x_n = 2x_{n-1} + 5$ untuk $n > 0$ dengan $x_0 = 1$

Contoh

Carilah solusi dari RLNK $x_n = 2x_{n-1} + 5$ untuk $n > 0$ dengan syarat awal $x_0 = 1$

Solusi

Tahap 1: Mencari Solusi Homogen

Temukan akar karakteristik dari persamaan karakteristik yang bersesuaian

Tahap 2: Mencari Solusi Partikulir

Bentuk solusi partikulirnya

Lakukan substitusi bentuk solusi partikulir ke relasi rekurensi

Tahap 3: Mencari Solusi Umum

Gabungkan solusi homogen dan solusi partikulir

Gunakan syarat awal untuk mencari nilai koefisien

Solusi RLNK #1: $x_n = 2x_{n-1} + 5$ untuk $n > 0$ dengan $x_0 = 1$

Solusi

Tahap 1: Mencari Solusi Homogen

Relasi rekurensi $x_n = 2x_{n-1} + 5$ mempunyai relasi rekurensi homogen yang berkaitan: $x_n - 2x_{n-1} = 0$

Selanjutnya, $x_n - 2x_{n-1} = 0$ mempunyai persamaan karakteristik $r - 2 = 0$

Akar karakteristiknya dengan mudah dapat diketahui yaitu $r = 2$

Dengan demikian, diperoleh

$$x_n^{(h)} = \alpha_{1,0} r^n$$

$$\boldsymbol{x_n^{(h)} = \alpha_{1,0} 2^n}$$

Solusi RLNK #1: $x_n = 2x_{n-1} + 5$ untuk $n > 0$ dengan $x_0 = 1$

Tahap 2: Mencari Solusi Partikulir

Perhatikan, relasi rekurensi $x_n = 2x_{n-1} + 5$ atau dalam bentuk lain $x_n - 2x_{n-1} = 5$, mempunyai $f(n) = 5$

Perhatikan, bentuk $f(n)$ tersebut serupa dengan bentuk pertama $f(n)$ dari solusi partikulir yaitu: $f(n) = \sum_{i=0}^{t} p_i n^i$, dimana $t = 0$

Dengan demikian, bentuk solusi partikulirnya adalah:

$$x_n{}^{(p)} = \sum_{i=0}^{0} p_0 n^0 = p_0$$

Solusi RLNK #1: $x_n = 2x_{n-1} + 5$ untuk $n > 0$ dengan $x_0 = 1$

Tahap 2: Mencari Solusi Partikulir (lanjutan)

Setelah bentuk $x_n^{(p)}$ diketahui, lakukan substitusi ke dalam relasi rekurensi:

$$x_n - 2x_{n-1} = 5$$

$$x_n^{(p)} - 2\, x_{n-1}^{(p)} = 5$$

$$p_0 - 2p_0 = 5$$

$$p_0 = -5$$

Dengan demikian, diperoleh bahwa: $\boldsymbol{x_n^{(p)} = -5}$

Solusi RLNK #1: $x_n = 2x_{n-1} + 5$ untuk $n > 0$ dengan $x_0 = 1$

Tahap 3: Solusi Umum

Setelah $x_n^{(h)}$ dan $x_n^{(p)}$ diketahui, solusi umum yang diperoleh adalah:

$x_n = x_n^{(h)} + x_n^{(p)}$ → $x_n = \alpha_{1,0}2^n + (-5)$

Dengan memanfaatkan kondisi awal $x_0 = 1$, kita dapat mencari nilai $\alpha_{1,0}$:

$x_0 = \alpha_{1,0}2^0 + (-5)$

$1 = \alpha_{1,0} - 5$ → $\alpha_{1,0} = 6$

Dengan demikian, solusi umumnya adalah:

$\boldsymbol{x_n = 6(2^n) - 5}$

Solusi RLNK #2: $x_n = 2x_{n-1} + 3n$ untuk $n > 1$ dengan $x_1 = 5$

Carilah solusi dari relasi rekurensi linier non homogen:

$x_n = 2x_{n-1} + 3n$ untuk $n > 1$ dengan syarat awal $x_1 = 5$

Solusi

Tahap 1: Mencari Solusi Homogen

Relasi rekurensi $\mathbf{x_n - 2x_{n-1} = 0}$ mempunyai persamaan karakteristik $\mathbf{r - 2 = 0}$ yang mempunyai akar karakteristik $r_1 = 2$ dengan $m_1 = 1$

Maka diperoleh solusi homogen: $x_n^{(h)} = \alpha_{1,0} 2^n$

Solusi RLNK #2: $x_n = 2x_{n-1} + 3n$ untuk $n > 1$ dengan $x_1 = 5$

Tahap 2: Mencari Solusi Partikulir

Perhatikan, relasi rekurensi $x_n = 2x_{n-1} + 3n$ mempunyai $f(n) = 3n$

Dengan bentuk $f(n)$ tersebut maka $x_n^{(p)}$ yang serupa adalah:

$$\boldsymbol{x_n^{(p)} = p_0 + p_1 n}$$

Selanjutnya kita akan mensubstitusikan $\boldsymbol{x_n^{(p)}}$ ke dalam relasi rekurensi untuk mendapatkan nilai p_0 dan p_1

Solusi RLNK #2: $x_n = 2x_{n-1} + 3n$ untuk $n > 1$ dengan $x_1 = 5$

Tahap 2: Mencari Solusi Partikulir (lanjutan)

Hasil substitusinya menjadi:

$$0 = x_n - 2x_{n-1} - 3n$$

$$0 = x_n^{(p)} - 2\, x_{n-1}^{(p)} - 3n$$

$$0 = (p_0 + p_1 n) - 2(p_0 + p_1(n - 1)) - 3n$$

$$0 = p_0 + p_1 n - 2p_0 - 2p_1 n + 2p_1 - 3n$$

$$0 = -p_0 + 2p_1 - p_1 n - 3n$$

$$0 = (-p_1 - 3)n + (2p_1 - p_0)$$

Dari persamaan terakhir kita mengetahui bahwa $p_1 = -3$,
sehingga diperoleh $p_0 = -6$

Dengan demikian: $x_n^{(p)} = p_0 + p_1 n = -3n - 6$

Solusi RLNK #2: $x_n = 2x_{n-1} + 3n$ untuk $n > 1$ dengan $x_1 = 5$

Tahap 3: Solusi Umum

Setelah $x_n^{(h)}$ dan $x_n^{(p)}$ diketahui, solusi umum yang diperoleh adalah:

$x_n = x_n^{(h)} + x_n^{(p)}$ $\rightarrow$ $x_n = \alpha_{1,0}2^n - 3n - 6$

Dengan memanfaatkan kondisi awal $x_1 = 5$, kita dapat mencari nilai $\alpha_{1,1}$:

$x_1 = \alpha_{1,0}2^1 - 3\cdot 1 - 6$

$5 = \alpha_{1,0} - 9$ $\rightarrow$ $\alpha_{1,0} = 7$

Dengan demikian, solusi umumnya adalah:

$\mathbf{x_n = 7(2^n) - 3n - 6}$

Solusi RLNK #3: $x_n = 2x_{n-1} + 2^n$ untuk $n > 1$ dengan $x_1 = 5$

Carilah solusi dari relasi rekurensi linier non homogen:

$x_n = 2x_{n-1} + 2^n$ untuk $n > 1$ dengan $x_1 = 5$

Solusi

Tahap 1: Perhatikan bahwa solusi hogemen RR tersebut mempunyai persamaan karakteristik $\mathbf{r - 2 = 0}$ yang akarnya $\boldsymbol{r = 2}$ dengan multiplisitas $\boldsymbol{m = 1}$ sehingga diperoleh:

$$x_n^{(h)} = \alpha_{1,0} 2^n$$

Tahap 2: Dari bentuk $f(n) = 2^n$ dan perhatikan bahwa nilai $\boldsymbol{s}$ pada solusi partikulir adalah akar dari persamaan karakteristik sehingga solusi partikulirnya adalah:

$$x_n^{(p)} = n^m s^n p_0 = n 2^n p_0$$

Solusi RLNK #3: $x_n = 2x_{n-1} + 2^n$ untuk $n > 1$ dengan $x_1 = 5$

Perhatikan hasil substitusinya:

$$0 = x_n - 2x_{n-1} - 2^n$$
$$0 = x_n^{(p)} - 2\,x_{n-1}^{(p)} - 2^n$$
$$0 = n2^n p_0 - (2(n-1)2^{n-1}p_0) - 2^n$$
$$0 = n2^n p_0 - (n-1)2^n p_0 - 2^n$$
$$0 = n2^n p_0 - n2^n p_0 + 2^n p_0 - 2^n$$
$$0 = 2^n(p_0 - 1)$$

Sekarang dapat diketahui bahwa $p_0 = 1$, sehingga diperoleh:

$$x_n^{(p)} = n2^n p_0 = n2^n$$

Solusi RLNK #3: $x_n = 2x_{n-1} + 2^n$ untuk $n > 1$ dengan $x_1 = 5$

Tahap 3: Solusi umumnya adalah

$$x_n = x_n^{(h)} + x_n^{(p)} = \alpha_{1,0}2^n + n2^n$$

Dengan memanfaatkan kondisi awal $x_1 = 5$, kita dapat mencari nilai $\alpha_{1,0}$:

$$x_1 = \alpha_{1,0}2^1 + 1\cdot 2^1$$

$$5 = 2\alpha_{1,0} + 2 \rightarrow \alpha_{1,0} = 3/2$$

Dengan demikian, solusi umumnya adalah:

$$\mathbf{x_n = (3/2)(2^n) + n2^n}$$

Solusi relasi rekurensi linier nonhomogen berkoefisien konstan

Bagaimanakah bentuk solusi umum dari RLNK berikut:

$x_n = 6x_{n-1} - 9x_{n-2} + 6n^2$

Bagaimanakah bentuk solusi umum dari RLNK berikut:

$x_n = 6x_{n-1} - 9x_{n-2} + 3^n$

Selesaikanlah RLNK berikut:

$x_n = -5x_{n-1} - 6x_{n-2} - 42 \cdot 4^n$ dengan syarat awal $x_1 = 56$ dan $x_2 = 278$