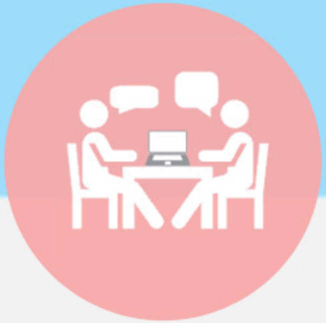
6. Ruang Hasil Kali Dalam (Bagian 4)



MODUL E-LEARNING ALJABAR LINIER
FAKULTAS ILMU KOMPUTER, UNIVERSITAS INDONESIA

Dr. Dra. Kasiyah Junus, MSc

Review: Hasil kali titik di R^n

Hasil kali dalam

Panjang dan jarak dua vektor

Sudut antara dua vektor dan ortogonalitas

Proses Gram-Schmidt

Dekomposisi QR

Matriks ortogonal

Penyelesaian kuadrat terkecil

6.7 Penyelesaian kuadrat terkecil (*least square solution* LSS)

Setelah mempelajari topik ini mahasiswa mampu

- menurunkan sistem normal dari suatu sistem persamaan linear
- menentukan penyelesaian kuadrat terkecil dari suatu sistem persamaan linear

Review: Menentukan persamaan garis

Persamaan garis melalui (x_1, y_1) dan (x_2, y_2). Persamaan umum $y = mx + b$

- Cara 1, gunakan rumus persamaan:

- Cara 2: mencari gradien $m = (y_2 - y_1)/(x_2 - x_1)$, kemudian menetukan b dengan substitusikan salah satu tititk pada persamaan

- Cara 3: menggunakan spl

Persamaan garis dengan SPL

- Tentukan persamaan garis melalui (1, 3) dan (5, 2)

Persamaan umum garis lurus: $y = ax + b$
mencari suatu persamaan garis, adalah menentukan nilai a dan b (*unknown*)

(1, 5) pada garis maka $5 = 1.\, a + b$
(3, 11) pada garis maka $11 = 3.\, a + b$

Sistem persamaan linear:
$$\begin{aligned} a + b &= 5 \\ 3a + b &= 11 \end{aligned}$$

Solusi: $a = 3$ dan $b = 2$
Persamaan garis: $y = 3x + 2$

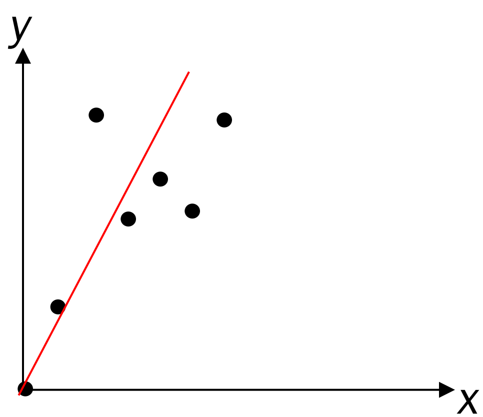
Persamaan garis melalui 4 titik kolinier

Tentukan persamaan garis melalui: (0, 2) (1, 5), (3, 11), (10, 32)

- Titik-titik tersebut kolinier (berada dalam satu garis).
- Persamaan umum garis lurus adalah $y = ax + b$
- Sistem persamaan linear yang terbentuk mempunyai dua *unknkown* (a dan b) dan 4 persamaan (sama dengan banyaknya titik)
- Sistem persamaan linear konsisten dengan satu solusi.

Tentukan persamaan garis

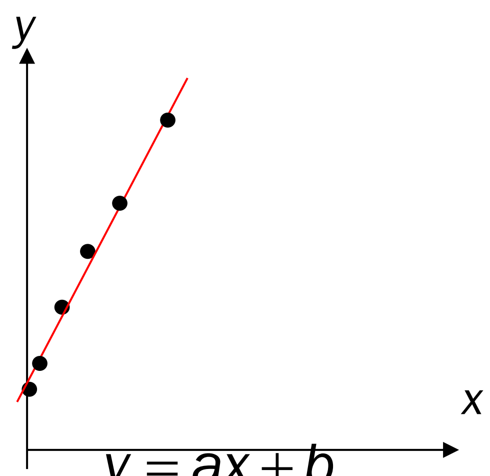
Titik-titik tidak segaris



$$y = ax + b$$

Sistem persamaan linear TIDAK konsisten

titik-titik segaris



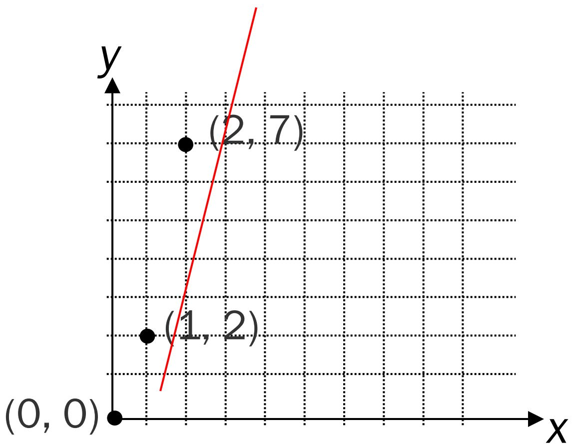
$$y = ax + b$$

Sistem persamaan linear konsisten

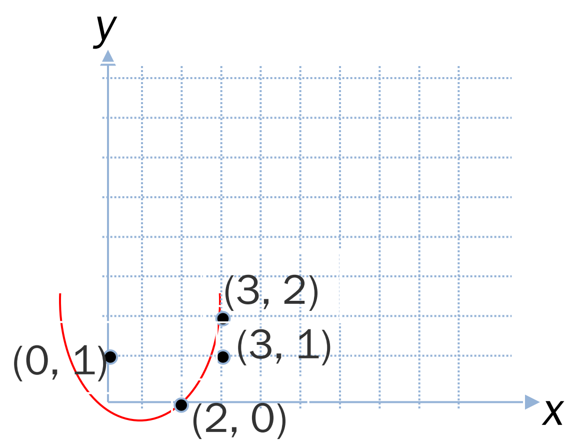
Mencocokkan kurva pada data

Masalah yang sering dijumpai dalam percobaan adalah ingin mengetahui hubungan antara dua besaran (dua peubah x dan y) dalam persamaan $y = f(x)$ yang sesuai dengan titik-titik (x, y) yang merupakan hasil percobaan, misalnya (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), ..., (x_n, y_n)

Garis lurus

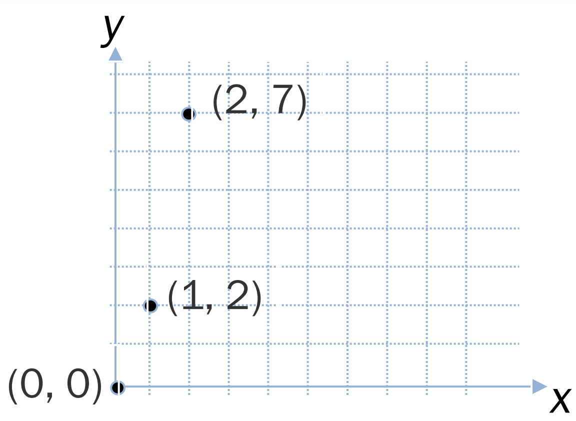


$$y = ax + b$$



$$y = ax^2 + bx + c$$

Mencocokkan garis lurus pada data



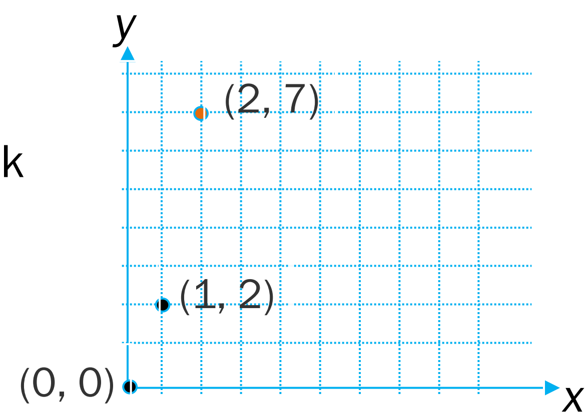
Dengan memasukkan absis dan ordinat titik-titik yang dilalui maka diperoleh system persamaan linear berikut

$$0 = a.0 + b$$
$$2 = a.\ 1 + b$$
$$7 = a.\ 2 + b$$

dalam bentuk matriks ditulis: $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix}$

Mencocokkan garis lurus pada data

Diberikan titik-titik pada bidang, kita ingin menentukan persamaan garis lurus yang paling cocok menggambarkan data tersebut.



Dengan memasukkan absis dan ordinat titik-titik yang dilalui maka diperoleh system persamaan linear berikut

$$0 = a.0 + b$$
$$2 = a.\ 1 + b$$
$$7 = a.\ 2 + b$$

disajikan dalam persamaan matriks

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix}$$

Spl tidak mempunyai penyelesaian (tidak konsisten) karena titik-titik tidak berada dalam satu garis. Pertanyaan: **bagaimana menemukan persamaan garis yang paling cocok menyajikan data tersebut?**

Tinjauan kembali fakta-fakta penting:

Dua prinsip berikut ini diperlukan dalam menentukan penyelesaian kuadrat terkecil.

1. Teorema konsistensi: $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ konsisten $\Leftrightarrow$ $\mathbf{b} \in \mathrm{Coll}(A)$

Jika konsisten, maka **b** merupakan kombinasi linear kolom-kolom *A*. Koefisien dari kombinasi linear adalah solusi.

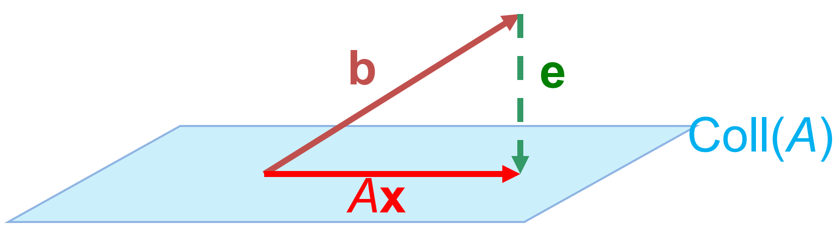
2. $\mathrm{Null}(A^T) = (\mathrm{Coll}(A))^{\perp}$

Solusi SPL $A^T\mathbf{y} = \mathbf{0}$ orthogonal dengan ruang kolom matriks *A*.

Masalah kuadrat terkecil

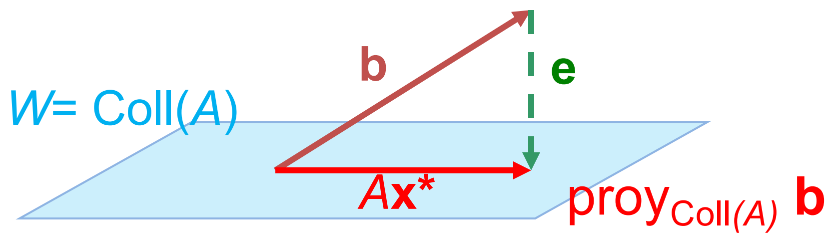
Masalah kuadrat terkecil:

Diberikan spl $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ terdiri atas *m* persamaan dan *n unknown*, tentukanlah $\mathbf{x}$ (jika mungkin) yang meminimalkan $\|A\mathbf{x} - \mathbf{b}\|$ pada ruang hasil kali dalam Euclid. Vektor $\mathbf{x}$ tersebut dinamakan penyelesaian kuadrat terkecil dari $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.



Penyelesaian kuadrat terkecil $\mathbf{x}^*$ menghasilkan vektor $A\mathbf{x}^*$ pada Coll(A) yang paling dekat ke $\mathbf{b}$.

Mencari solusi pendekatan terbaik



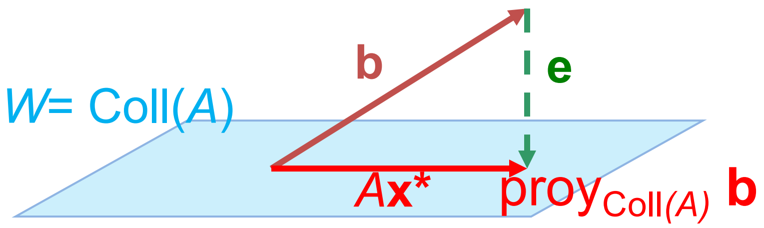
Mencari penyelesaian pendekatan adl
mencari **x*** sedemikian hingga $A\mathbf{x}^* = \text{proy}_{\text{Coll}(A)}\ \mathbf{b}$

Spl $A\mathbf{x} = \text{proy}_{\text{Coll(A)}}\ \mathbf{b}$.

Tidak mudah menentukan $\text{proy}_{\text{Coll}(A)}\ \mathbf{b}$.
Perlu dicari SPL yang ekuivalen.

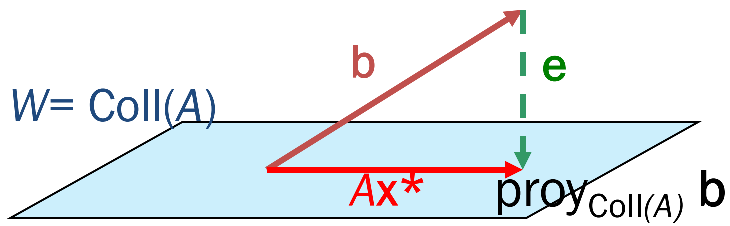
Latihan: Mencari solusi pendekatan terbaik

Jelaskan makna diagram berikut,turunkan rumus persamaan normal.



SPL $A\mathbf{x}$ = proy$_{\text{Coll(A)}}$ $\mathbf{b}$

Mencari solusi pendekatan terbaik



SPL $A\mathbf{x} = \text{proy}_{\text{Coll}(A)}\ \mathbf{b}$.

$A\mathbf{x} = \text{proy}_{\text{Coll}(A)}\mathbf{b}$. (tunjukkan vektor2 pada gambar)

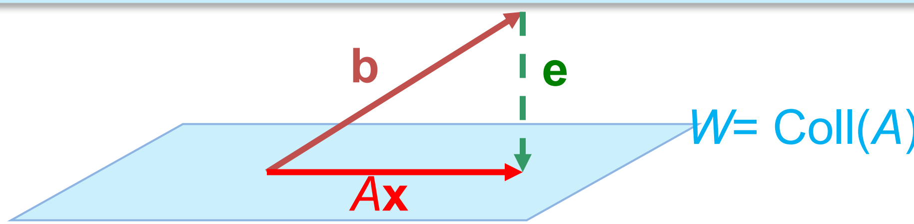
$\mathbf{b}-A\mathbf{x} = \mathbf{b}-\text{proy}_{\text{Coll}(A)}\mathbf{b}$

$\mathbf{b}-A\mathbf{x}$ ortogonal dengan W, padahal $W^{\perp}= \text{Null}(A^T)$ ruang penyelesaian $A^T\ \mathbf{x} = \mathbf{0}$, atau $\mathbf{b}-A\mathbf{x} \in \text{Null}(A^T)$

Jadi, $A^T(\mathbf{b}-A\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ atau $A^T\mathbf{b}= A^TA\mathbf{x}$

Persamaan di atas disebut sistem normal dari spl $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Sistem normal



sistem normal dari spl $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ adalah $A^TA\mathbf{x} = A^T\mathbf{b}$

Masalah mencari penyelesaian pendekaan $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, berubah menjadi mencari penyelesaian spl konsisten sistem normal.

Definisi: Penyelesaian kuadrat terkecil

Jika A adalah matriks mxn, penyelesaian kuadrat terkecil dari $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ adalah penyelesaian $\mathbf{x}^*$ dari sistem normal $A^TA\mathbf{x}^* = A^T\mathbf{b}$

Sistem normal (lanjut)

Diberikan spl $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ dengan *m* persamaan *n unknown*, maka:

$A^T\mathbf{b} = A^TA\mathbf{x}$ merupakan sistem normalnya.

1. Sistem normal terdiri dari *n* persamaan dan *n unknown*.
2. Sistem normal pasti konsisten dan semua penyelesaian persamaan normal merupakan penyelesaian kuadrat terkecil.
3. Jika x adalah penyelesaian kuadrat terkecil, maka: $\text{proy}_{\text{Coll}(A)}\mathbf{b} = A\mathbf{x}$
4. Sistem normal bisa mempunyai tak hingga banyak solusi

Jika kolom-kolom *A* bebas linier, maka

- ✓ A^TA mempunyai inverse
- ✓ penyelesaian kuadrat terkecil tunggal.

Sistem normal dengan kolom-kolom A bebas linier

Jika kolom-klom A bebas linier maka A^TA mempunyai inverse, sehingga penyelesaian kuadrat terkecil

$A^TA\mathbf{x} = A^T\mathbf{b}$ (kalikan dengan $(A^TA)^{-1}$)

$(A^TA)\text{-}\ A^TA\mathbf{x} = (A^TA)\text{-}\ A^T\mathbf{b}$ (karena asosiatif)

$\mathbf{x} = (A^TA)\text{-}\ A^T\mathbf{b}$ (penyelesaian kuadrat terkecil)

Contoh 16: garis lurus (1)

Diberikan titik2 (0, 0), (1, 2), dan (2, 7).

$y = ax + b$. Kita akan mencari a dan b.
Jika titik berada pada garis, maka a dan b memenuhi persamaan berikut:

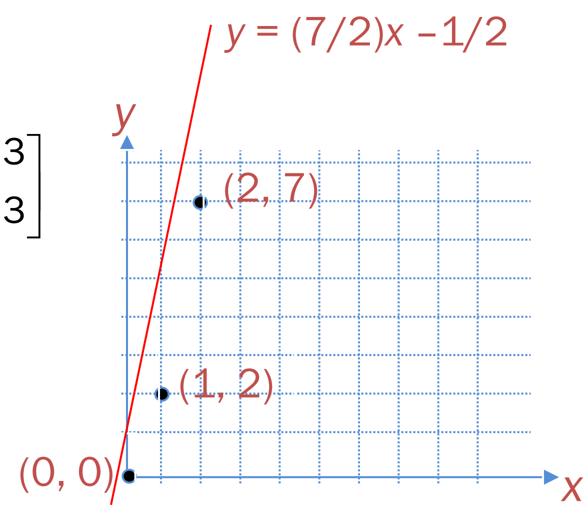
$0 = a.\,0 + b$

$2 = a.\,1 + b \quad 7 = a.\,2 + b$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{v} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix} \qquad M^T M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$M^T \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 \\ 9 \end{bmatrix}$$



Penyelesaian: $a = 7/2$, $b = -1/2$. Jadi, $y = 7/2x - 1/2$

Contoh 16: garis lurus (1)

Diberikan titik2 (0, 0), (1, 2), dan (2, 7). Akan dicari persamaan garis lurus yang merepresentasikan data tersebut. Kita konstruksi spl dari data-data yang ada.

Misalkan persamaan garis lurus adalah $y = ax + b$. Kita akan mencari a dan b.

Jika titik berada pada garis, maka a dan b memenuhi persamaan berikut:

$$\begin{aligned} 0 &= a.\,0 + b \\ 2 &= a.\,1 + b \\ 7 &= a.\,2 + b \end{aligned} \quad \text{dalam bentuk matriks ditulis:} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix}$$

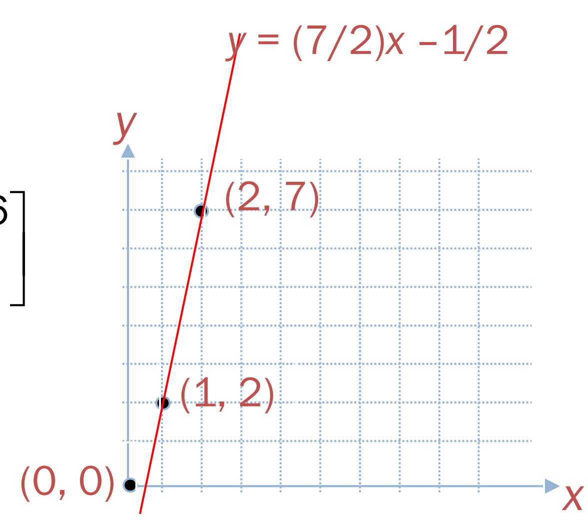
notasikan

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{v} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$M^T M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \qquad M^T\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 \\ 9 \end{bmatrix}$$

Sistem normal:

$$M^T M\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 \\ 9 \end{bmatrix}$$



Penyelesaian: $a = 7/2$, $b = -1/2$. Jadi, $y = 7/2x - 1/2$

Garis lurus (2)

Misalkan kita mempunyai *n* data percobaan $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), \ldots, (x_n, y_n)$

Kita ingin mencocokkan garis lurus *y* = *ax* + *b* dengan data di atas.

Jika titik-titik berada pada satu garis tersebut, maka *a* dan *b* memenuhi

$$\begin{array}{rcl} y_1 & = & ax_1 + b \\ y_2 & = & ax_2 + b \\ y_3 & = & ax_3 + b \\ \vdots & & \vdots \\ y_n & = & ax_n + b \end{array} \quad \text{ditulis} \quad \begin{bmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ x_3 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

$$M \; \mathbf{u} = \mathbf{y}$$

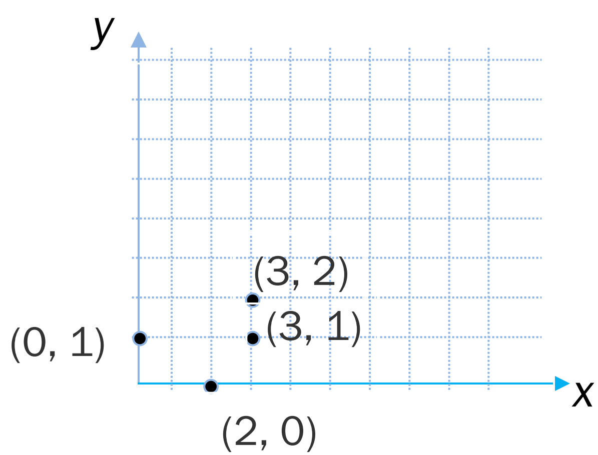
Sistem normal $M^T M.\mathbf{u} = M^T \mathbf{y}$

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \ldots & x_n \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ x_3 & 1 \\ \ldots & \ldots \\ x_n & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \ldots & x_n \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \ldots \\ y_n \end{bmatrix}$$

Dengan menyelesaikan sistem normal akan diperoleh persamaan garis.

Contoh 17: parabola (1)

Berikan titik-titik (0, 1), (2, 0), (3, 1), dan (3, 2)



Persamaan umum parabola: $y = ax^2 + bx + c$

Substitusikan data pada persamaan untuk mendapatkan spl, kemudian tentukan persamaan normalnya.

Penyelesaian: parabola (lanjutan)

$$\begin{aligned} y_1 &= ax_1^2 + bx_1 + c \\ y_2 &= ax_2^2 + bx_2 + c \\ y_3 &= ax_3^2 + bx_3 + c \\ y_4 &= ax_4^2 + bx_4 + c \end{aligned} \longrightarrow \begin{aligned} 1 &= a(0)^2 + b(0) + c \\ 0 &= a(2)^2 + b(2) + c \\ 1 &= a(3)^2 + b(3) + c \\ 2 &= a(3)^2 + b(3) + c \end{aligned}$$

ditulis: $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Sistem normal:

$$\begin{pmatrix} 0 & 4 & 9 & 9 \\ 0 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 9 & 9 \\ 0 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Maka solusinya:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix} 0 & 4 & 9 & 9 \\ 0 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \end{pmatrix} \right)^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 4 & 9 & 9 \\ 0 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Parabola (lanjutan)

Berikan titik-titik (0, 1), (2, 0), (3, 1), dan (3, 2)

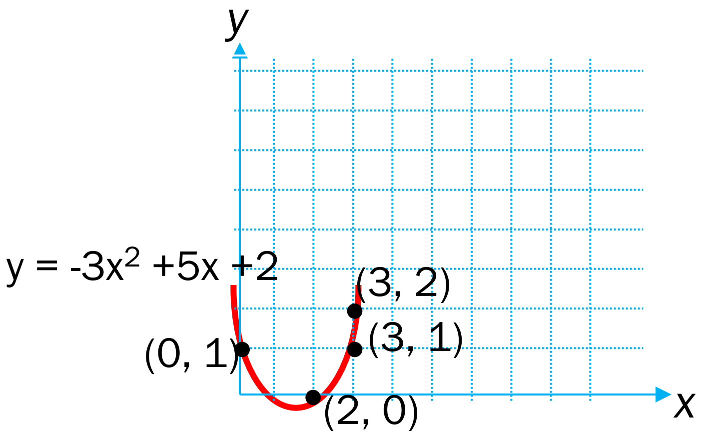
Persamaan kuadrat yang dicari $y = ax^2 + bx + c$

Penyelesaian:

$a = -3$

$b = 5$

$c = 2$



Persamaan parabola:

$y = -3x^2 + 5x + 2$

Latihan 10

- Bagaimana penyelesaian kuadrat terkecilnya jika spl $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ konsisten?

  Jawaban:

  penyelesaian kuadrat terkecil sama dengan penyelesaian splnya.

- Diberikan spl tidak konsisten $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Kapan kita dapat menentukan penyelesaian kuadrat terkecilnya dengan menghitung $\mathbf{x} = \left(A^T A\right)^{-1}\left(A^T \mathbf{b}\right)$

  Jawaban:

  Kolom-kolom dari A bebas linier, atau $(A^T A)^{-1}$ ada

Refleksi

1. Buatlah ringkasan materi yang baru saja kamu pelajari.
2. Sebutkan 5 hal baru yang kamu pelajari pada modul ini dan belum kamu pelajari sebelumnya.
3. Temukan 2 masalah nyata yang dapat kamu selesaikan dengan metode yang telah kamu pelajari.

Ringkasan materi

- Periksalah hasil ringkasanmu, apakah sudah mencakup semua konsep penting berikut ini?
  - ✓ Hasil kali dalam
  - ✓ Hasil kali dalam berbobot
  - ✓ Panjang dan jarak dua vektor
  - ✓ Sudut antara dua vektor
  - ✓ Teorema pythagoras umum
  - ✓ Basis ortogonal
  - ✓ Basis ortonormal
  - ✓ Pertaksamaan Cauchy-Swartz
  - ✓ Ortogonal komplemen dan sifat dasarnya
  - ✓ Hubungan (ortogonal komplemen) ruang baris, ruang kolom, ruang null
  - ✓ Proses Gram-Schmidt
  - ✓ Dekomposisi-QR
  - ✓ Penyelesaian kuadrat terkecil
  - ✓ Sistem normal

Post-test

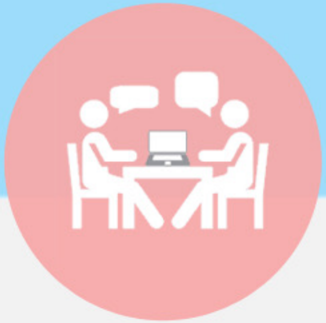
MODUL E-LEARNING ALJABAR LINIER
FAKULTAS ILMU KOMPUTER, UNIVERSITAS INDONESIA

Post-test

Tentukan pernyataan berikut benar/salah dan berikan alasan.

1. Penyelesaian kuadrat terkecil dari $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ adalah $(A^TA)^{-1}A^T\mathbf{b} = A^{-1}\mathbf{b}$
2. Diketahui bahwa $\| \mathbf{a} + \mathbf{b} \|^2 = \| \mathbf{a} \|^2 + \| \mathbf{b} \|^2$, maka **a** dan **b** ortogonal.
3. Spl yang konsisten tidak memiliki penyelesaian kuadrat terkecil.

Selamat, Anda telah menyelesaikan Modul 6. Bagaimana tingkat pemahamanmu?



MODUL E-LEARNING ALJABAR LINIER
FAKULTAS ILMU KOMPUTER, UNIVERSITAS INDONESIA