Sifat Context Free Language (Pembahasan Kasus-kasus)

Kuliah Teori Bahasa dan Automata
Program Studi Ilmu Komputer
Fasilkom UI

Prepared by:
Suryana Setiawan

Contoh 1

- $L = \{a^n b^n c^n : n \geq 0\}$
- Diberikan suatu harga k, gunakan $w = a^k b^k c^k$.
  - Misalnya, jika $k = 3$, w = aaabbbccc
- Mengapa string ini?
  - *vxy* sebagai sliding window
  - *vxy* tidak akan pernah berisi a, b, c, karena $|vxy| \leq k$.
- Untuk memudahkan deretan a disebut region 1, deretan b, region 2, dan deretan c, region 3, dan penulisan (i, j) menyatakan *vxy* berada di region i dan j:
  - Semuanya a atau (1,1), berisi a dan b atau (1,2), semuanya b atau (2,2), berisi b dan c atau (2,3), semuanya c atau (3,3).

Contoh 1 (cont'd)

- Kita periksa (1,1), maka:
  - Jadi *v* dan *y* hanya berisi symbol a.
  - Dengan pumping maka banyaknya a menjadi tidak sama dengan symbol-symbol lain.
- Demikian juga (2,2) dan (3,3).
- Berikutnya kita kasus (1,2):
  - Jika v berisi a dan/atau y berisi b maka banyaknya a dan b bias dibuat sama tapi jadi berbeda dengan banyaknya c.
  - Jika v dan/atau y berisi ab maka pumping menyebabkan adanya kemunculan (ab)* di dalam string.
- Demikian juga (2,3) menyebabkan hasil pumping bukan lagi anggota bahasa tsb.
- Kesimpulan: Tidak ada suatu cara pemecahan *w* ke dalam *u*,*v*,*x*,*y*, dan *z* yang bisa memompa dengan setiap harga *q* selalu $uv^qxy^qz \in L$.

Contoh 2

- $L = \{a^m : m = n^2$, dengan $n \geq 0\}$
- Dengan suatu harga k gunakan $|w| = k^4$
- Karena hanya satu symbol jelas bahwa *vxy* atau *vy* yang panjangnya maksimum k.
- Juga salah satu (atau keduanya) dari v dan y minimal terdapat satu symbol a; jadi misalkan $|vy| = p$ dengan $1 \leq p \leq k$.
- Dengan pumping $q = 2$ maka hasil pumpingnya, w', memiliki panjang $(k^4 + p)$ dengan $(k^4+1) \leq (k^4 + p) \leq (k^4+k)$.

Contoh 2 (Cont'd)

- Sementara secara proper-order setelah w tsb adalah w'' dengan $|w''| = (k^2+1)^2 = k^4+2k^2 + 1$ dan ini jelas lebih besar dari (k^4+k) karena $k \geq 1$.
  - Misalnya jika $k = 3$, $w = a^{81}$, dan $|vy| =3$, hasil pumping a^{84}, sementara secara properorder setelah a^{81} adalah a^{100}.
  - Sementara $(k^4 + p) \leq (k^4 + k) = 82+3=84 < 100$
- Berarti pumping menghasilkan string $w' \notin L$

Contoh 4

- $L = \{a^i b^i c^j : i, j \geq 0, i \neq j\}$
- Kesulitan teorema Pumping: banyaknya cara partisi *w* menjadi *u*, *v*, *x*, *y*, *z*.
- Tujuan kita menunjukkan:
  - Deretan a dan deretan b bisa dipumping sehingga panjangnya berbeda, atau
  - Deretan c dibuat menjadi sama dengan deretan lain.
- Untuk k > 1 kemungkinan-kemeungkinan:
  - $w = a^k b^k c^{k+1}$ maka sifat pumping terpenuhi dengan v=aa dan y=bb
  - $w = a^k b^k c^{2k}$ maka sifat pumping terpenuhi dengan v=c y= ε
  - $w = a^k b^k c^{k+k!}$ juga sifat pumping terpenuhi dengan v=c dan y=c (mengapa $a^k b^k c^{k+k!}$?)
- Gagal dalam membuktikan "**L bukan CFL**" karena vxy bias beredar dimana saja dalam *w*.

Contoh 4 (cont'd)

- Dengan Ogden's Lemma, kembali $w = a^k b^k c^{k+k!}$.
- Penentuan *distinguished position* (DP) bertujuan mengurangi banyaknya kemungkinan *vxy* yang bias terjadi.
  - Salah satu symbol dalam v atau y harus DP.
  - Tapi panjang xvy tidak dibatasi lagi (hanya maks meliputi k buah DP, dan minimum 1 DP).
  - Teorema Pumping gagal untuk *v* dan *y* berisi c, jadi c jangan menjadi DP.
  - Setiap a ditandai sebagai DP**.**
- Dengan pembatasan DP ini kemungkinan (2, 2), (2, 3), (3, 3) dihilangkan.
- Jika *v* atau *y* berisi dua atau lebih simbol berbeda, ambil $q = 2$, langsung terbukti bukan CFL.
- Untuk (1, 1) dan (1, 3): dengan $q= 2$, panjang deretan a akan bebeda dari deretan b.
- Untuk (1, 2) dan $|v| \neq |y|$ maka dengan $q = 2$, segera terbukti bukan CFL.
- Yang rumit adalah untuk (1,2) dan $|v| = |y|$
  - Tapi dengan $q = (k!/|v|) + 1$, panjang deretan a = deretan c.
- Pertanyaan "mengapa $a^k b^k c^{k+k!}$?" →untuk menghasilkan q bilangan bulat.

Contoh 5

- $L = \{a^i b^j c^k : i \neq j \neq k\}$
- Ini juga secara intuitif pasti bukan CFL. Dengan teorema pumping pasti sulit (atau tidak bisa?).
- Dengan Ogden's Lemma, $w = a^{k+k!} b^k c^{k+k!}$
  - DP pada setiap simbol b
  - Supaya *vy* berisi sekurangnya sebuah b,
- Kemungkinan-kemungkinan adalah: (1,2), (2,2), dan (2,3).

Contoh 5 (Cont'd)

- Untuk (1, 2) atau (2,3) dengan v dan/atau y berisi dua simbol:
  - menghasilkan string bukan di L karena ada sequence …abab… atau …bcbc…
- Untuk (1, 2) atau (2,3) dan salah satu (v atau y) berisi b sebanyak p dengan $p \leq k$
  - maka dengan $q = (k!/p + 1)$ menyebabkan banyaknya b == banyaknya a atau banyaknya b.
- (2,2), berarti vxy semuanya b:
  - jika |xy| = p, dengan $p \leq k$, maka dengan $q = (k!/p + 1)$ menyebabkan banyaknya b == banyaknya a dan/atau banyaknya b.
- Jadi semua kemungkinan sudah dianalisis dan kesimpulannya bahasa ini bukan Context Free.