LK 5

ALDEN LUTHFI
2206028932 - ALIN A

A. 1. a. Himpunan tersebut bebas linear karena semua elemenya tidak bisa direpresentasikan dengan kombinasi linear elemen lain. Hal ini dapat dibuktikan karena representasi matriks $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ dapat direduksi dengan OBE menjadi I, dalam artian tidak ada kombinasi baris yang bisa menghasilkan Baris 0

b. B tidak bebas linear karena elemen pertama merupakan kelipatan elemen kedua

c. C tidak bebas linear/ bergantung linear karena span() 3 elemen pertama mengandung elemen keempat, berdasarkan teorema plus-minus, C bergantung linear

2. a. $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$

b. $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}$

c. ada, karena dimensi $M_{2\times3}$ adalah 6, artinya basis $M_{2\times3}$ yang bebas linear bisa sepanjang 6.

$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$

d. mn vektor, karena $\dim(M_{m\times n}) = mn$

e. bergantung linear, karena melebihi dimensinya

3\. a. $\text{Span}(S) = \{ a_1v_1 + a_2v_2 + \dots + a_nv_n \mid a_1, a_2, \dots, a_n \in R \}$, semua kombinasi linean dari semua vektor di S

b. $\left\{ \begin{bmatrix} a-2b+c & -2a+b \\ 2a+b & a+2b+c \end{bmatrix} \middle| \ a,b,c \in R \right\}$

c. $\{(-a, 5b, 2c) \mid a,b,c \in R\}$

d. $\{(a-2b, 2a+b, 4a-b) \mid a,b \in R\}$

e. $\{(a,b,c) \mid a,b,c \in R\}$

f. $\{(a,b,c) \mid a,b,c \in R\}$

g. $\{a - 2ax + ax^2 \mid a \in R\}$

h. $\{a\ln(x) + b\sin(x) + ce^{2x} \mid a,b,c \in R\}$

4\. a. basis adalah himpunan bebas linear yang merentang ruang vektor tsb. Sedangkan dimensi adalah panjang basis dari ruang vektor tsb.

b. misal vektor $c = -\frac{1}{2}(w - 2v) = (0,0,1)$

$b = \frac{1}{4}w = (0,1,0)$

$a = u + c = (1,0,0)$

kombinasi linear dari u, v, w dapat menghasilkan himpunan $\{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ yang jelas merupakan basis dari R^3

c. tak hingga, $\{(0,0,1), (0,1,0), (1,0,0)\}$, $\{(2,0,0), (0,2,0), (0,0,2)\}$ ... $\{(n,0,0), (0,n,0), (0,0,n)\}$ $n \in R$ dan semua kombinasi linearnya merupakan basis dari R^3

d. Setiap basis R^3 memiliki 3 vektor karena itu adalah panjang himpunan bebas linear terpanjang yang merentang R^3

(e) n, karena n adalah panjang himpunan bebas linear terpanjang yang merentang R^n

(5.) (a) ya karena misal $S = \{w, x, y, z\} = \{2, 1+x, x^2+x, 2x^3\}$

misal
$$\left.\begin{aligned} a &= \tfrac{1}{2}w = 1 \\ b &= x - a = x \\ c &= y - b = x^2 \\ d &= \tfrac{1}{2}z = x^3 \end{aligned}\right\}$$
dari w, x, y, z bisa menghasilkan vektor yang bebas linear

dimana $S' = \{a, b, c, d\} = \{1, x, x^2, x^3\}$ jelas merupakan basis dari P^3

(b.) ya, karena dari w, x, y, z yang baru bisa menghasilkan vektor yang bebas linear juga yang merupakan basis dari P^3

(c.) $\{1, 1+x, x^2, x^3\}$

(d.) $\dim(P^3) = 4$ karena 4 adalah panjang basis dari P^3

(e.) $\dim(P^n) = n+1$ karena $n+1$ adalah panjang basis dari P^n
contoh basis $P^n \rightarrow \{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$

(6.) (a) $\{1, x, x^2, x^3, x^4, x^5\}$

(b.) $$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

(c.) ya, karena semua himpunan bebas linear bisa direduksi menjadi $\{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ sehingga 3 vektor yang bukan basis pasti bergantung linear
contoh $\{(1,0,0), (2,0,0), (3,0,0)\}$

(7.) (a.) perlu ada vektor yang berada di luar $\text{span}(\{v_1, v_2\})$

$= \{(a-b, b, -a, 0) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$

yaitu $\underset{V_3}{(1,0,0,0)}$ dan $\underset{V_4}{(0,0,0,1)}$ sehingga

$\text{span}(\{V_1, V_2, V_3, V_4\}) = \mathbb{R}^4$

(b.) $V_1 = V_3 + 2V_2 - V_4$ sehingga bisa dihilangkan

sehingga $\text{span}(\{V_2, V_3, V_4\}) = \mathbb{R}^3$

(8.) (a.) Coll(A) adalah himpunan semua kombinasi linear semua kolom dari A

(b.) Row(A) adalah himpunan semua kombinasi linear semua baris dari A

(c.) Null(A) adalah himpunan semua solusi $Ax = 0$

(9.) misal $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $A_2 = A_1 ; R_2 \leftrightarrow R_3 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

(1.) OBE merubah ~~coll~~(A) karena $\text{coll}(A_1) \neq \text{coll}(A_2)$

(2) dan (3) OBE tidak merubah solusi SPL yang direpresentasikan A_1 dan A_2 sehingga tidak merubah Row(A) dan Coll(A)

(4.) OBE tidak merubah dependensi linear dari kolom-kolom A

(10.) Bentuk EBT dari A adalah $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

(a.) sehingga basis dari Row(A) = $\{(1,0,0,-1),(0,1,0,1),(0,0,1,1)\}$
(b.) basis dari Coll (A) = $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$
(c.) $Ax = 0$
$\hookrightarrow a - d = 0 \rightarrow a = d$
$\hookrightarrow b + d = 0 \rightarrow b = -d$
$\hookrightarrow c + d = 0 \rightarrow c = -d$
semua unknown bisa ditulis sebagai d
sehingga basis Null (A) = $\{(1,-1,-1,1)\}$

(11.) (a.) Rank(A) adalah dim(Row (A))
(b.) Nulitas (A) adalah dim (Null(A))
(c.) Rank(A) = 3
dan Nulitas (A) = 1

(d.) matriks berinvers akan memiliki EBT(A) = I dan hanya solusi trivial $Ax = 0$ sehingga Nulitas (A) = 0 dan Rank(A) = n

(e.) keduanya sama karena dimensi Row (A) dan Coll (A) ditentukan dari banyak satu utama dari EBT (A)

(f.) Rank(A) + Nulitas (A) = n

(B.) (1) $(A \cup B) \cap (B \cup C)$
$\equiv ((A \cup B) \cap B) \cup ((A \cup B) \cap C)$
$\equiv ((A \cap B) \cup (B \cap B)) \cup ((A \cup B) \cap C)$
$\equiv ((A \cap B) \cup B) \cup ((A \cup B) \cap C)$
jika $A \cup B \cup C$ bebas linear
maka $A \cup B$ bebas linear
maka $A \cap B$ bebas linear
maka $(A \cap B) \cup B$ bebas linear
maka $(A \cup B) \cap C$ bebas linear
maka $(A \cup B) \cap (B \cup C)$ pastilah bebas linear (BENAR)

(2.) Benar karena semua elemen pada S' bebas linear dan $\text{Span}(S') = \{ av_1 + (b+c)v_2 + (c+d)v_3 + dv_4 \mid a,b,c,d \in \mathbb{R} \}$ $= \text{Span}(S)$ karena untuk semua nilai d, bisa dicari nilai c untuk koefisien v_3 dan untuk semua nilai c bisa dicari nilai b untuk koefisien v_2

(3.) Benar karena vektor $\bar{0}$ adalah kombinasi linear dari semua vektor

(4.) Benar, $\text{Rank}(A) = n$ berarti jumlah satu utama di $EBT(A) = n$ sehingga $n < m$ karena jika $n > m$ akan ada kolom 0 di $EBT(A)$ dan $\text{Rank}(A) < n$ sehingga jika $n < m$ akan ada baris 0 di $EBT(A)$ sehingga $\text{Coll}(A)$ tidak merentang $\mathbb{R}^m$

(5.) Benar, teorema plus minus menyatakan bahwa menggabungkan basis dari sebuah RV tidak akan mengubah ruang vektor yang direntang sehingga $\text{Coll}(A+B) = \text{Coll}(A) \cup \text{Coll}(B) = \text{Coll}(A)$ $= \text{Coll}(B)$

(6.) false, OBE bisa merubah $\text{Coll}(A)$ sehingga bisa saja $\text{Coll}(A) \neq \text{Coll}(A^{-1})$

(7.) false, $A \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\text{Row}(A) = \text{Row}(B)$, namun A tidak ekivalen baris dengan B

(8.) Benar, Matriks persegi yang barisnya merentang $\mathbb{R}^n$ akan membentuk $EBT = I$ dan $Ax = \bar{0}$ akan hanya memiliki solusi trivial

(C) (1) Basis adalah himpunan minimal yang merentang V
(2) Basis bebas linear
(3) Basis merentang V
(4) Dimensi adalah panjang dari Basis V
(5) $\text{Row}(A)$ = himpunan kombinasi linear baris A
(6) $\text{Coll}(A)$ = Himpunan kombinasi linear kolom A
(7) $\text{Null}(A)$ = himpunan semua solusi $Ax = \bar{0}$
(8) $\dim(\text{Row } A)) = \text{Rank}(A)$
(9) $\dim(\text{Null}(A)) = \text{Nulitas}(A)$
(10) $\text{Rank}(A) + \text{Nulitas}(A) = n$