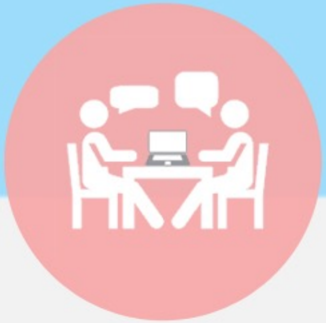


3. Determinan

MODUL E-LEARNING ALJABAR LINIER
FAKULTAS ILMU KOMPUTER, UNIVERSITAS INDONESIA

Cakupan pembahasan

- Pengertian determinan.
- Mengapa untuk matriks 4x4, 5x5 dst tidak boleh menggunakan Aturan seperti matriks 2x2 dan 3x3?

- **Metode menghitung** determinan
  - ekspansi baris/kolom (Cara 1)
  - kombinatorik (Cara 2)
  - OBE (Cara 3)

- Sifat-sifat determinan
- **Menentukan inverse** matriks dengan adjoin, bagaimana menurunkan rumusnya.
- Menurunakan **Aturan Cramer** untuk menyelesaikan SPL

Pendekatan pembelajaran

- determinan dengan persepsi baru
- menemukan kembali rumus determinan
- mengikuti jalan pikiran penemu Aturan Cramer

Hitunglah dengan kalkulator Det(A)

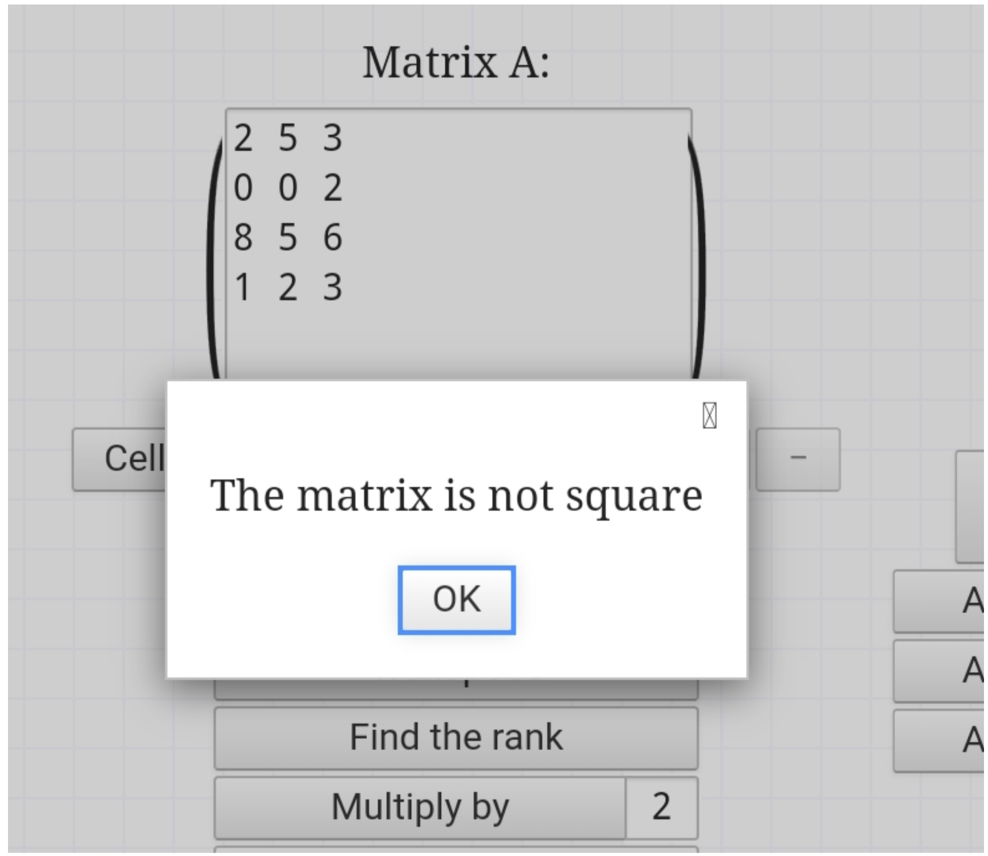
$$A = \begin{pmatrix} 2 & -90 \\ 1 & 100 \\ 10 & 12 \end{pmatrix}$$

Hitunglah dengan kalkulator. Apa hasilnya?

- Determinan didefinisikan matriks persegi.
- Pad matriks tidak persegi determinan tidak terdefinisi.
- Tidak terdefinisi TIDAK BERARTI 0

Determinan matriks tidak persegi

Invalid input



Memahami determinan

1. Matriks tidak persegi: determinan tidak didefinisikan.
2. Adakah matriks persegi yang tidak memiliki determinan?
3. Adakah matriks persegi yang memiliki lebih dari satu determinan?

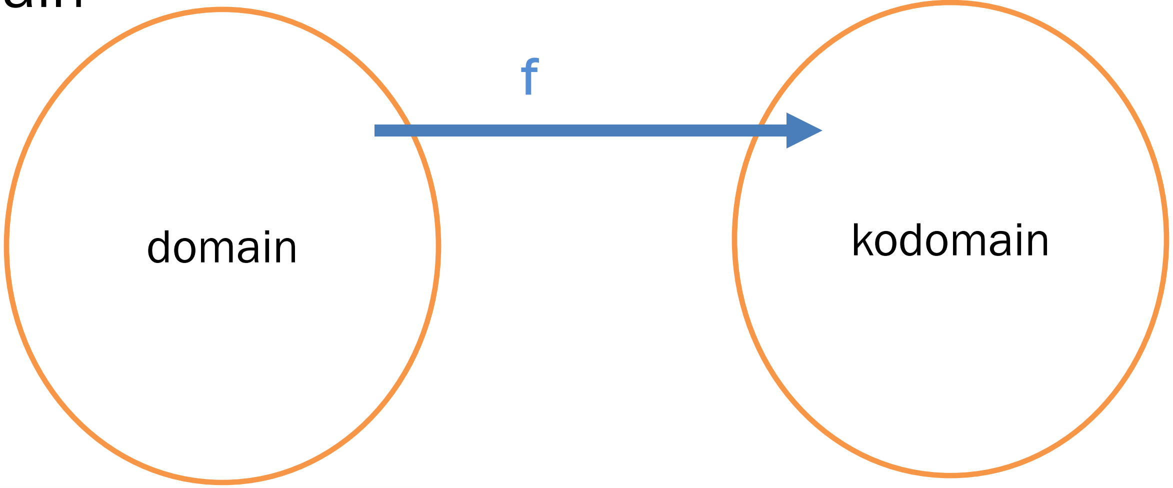
Determinan merupakan ....

Fungsi

Setiap fungsi mempunyai 3 komponen.

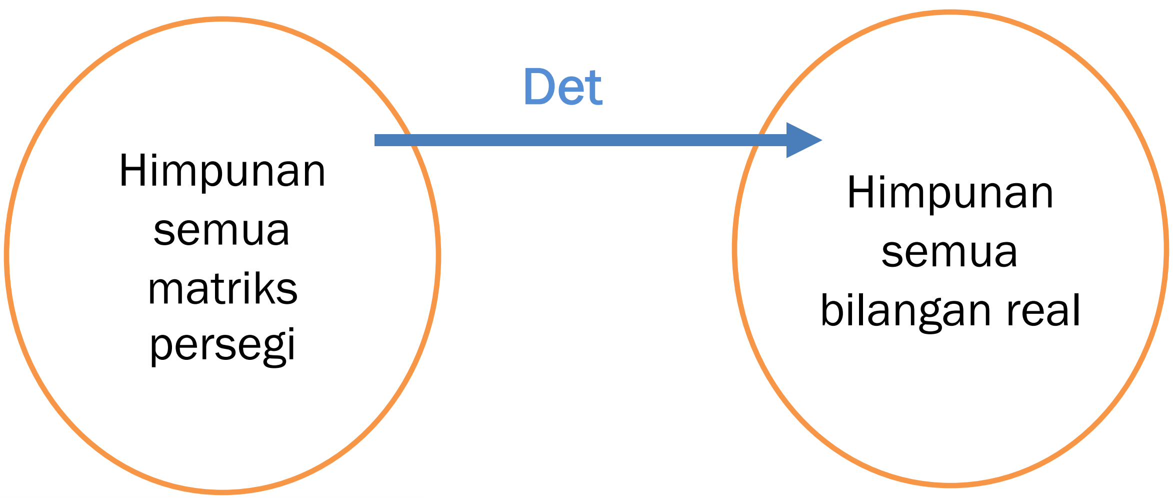
- **Domain** (himpunan)
- **Kodomain** (himpunan- memuat *range*)
- **Aturan** pengawanannya

untuk setiap elemen di domain mempunyai tepat satu kawan di kodomain



Determinan sebagai Fungsi

1. Domain : himpunan semua matriks persegi
2. Kodomain : himpunan bilangan nyata
3. Aturan pengawanannya: cara menghitung determinan



Definisi determinan

Determinan adalah fungsi

dari **himpunan semua matriks persegi**

ke **himpunan semua bilangan nyata**

aturan ....*)

* Prosedur menentukan determinan

Hitunglah determinan matriks berikut dengan: kalkulator

1. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}$

2. $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 2 & 7 & -1 \end{pmatrix}$

3. $C = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 3 & -1 & 6 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

Hitunglah determinan matriks berikut dengan: kalkulator

1. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}$

2. $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 2 & 7 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \\ 2 & 7 \end{matrix}$

   \- \- \- + + +

3. $C = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 3 & -1 & 6 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} 2 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{matrix}$

Mengapa hasilnya berbeda dengan perhitungan menggunakan kalkulator?

→ Ini cara yang salah dalam menghitung determinan matriks 4x4

Aturan Sarrus

$A_1 : 2x2$

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

\- +

$$\text{Det}(A_1) = (a_{11}.a_{22}) - (a_{12}.a_{21})$$

$A_2 : 3x3$

$$A_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

\- - - + + +

$$\text{Det}(A_2) = a_{11}.a_{22}.a_{33} + a_{12}.a_{23}.a_{31} + a_{13}.a_{21}.a_{32} - (a_{13}.a_{22}.a_{31} + a_{11}.a_{23}.a_{32} + a_{12}.a_{21}.a_{33})$$

Determinan matriks 4x4

Cara manual

$$A = \left[\begin{array}{cccc|ccc} 2 & 5 & 3 & 3 & 2 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 0 & 0 & 2 \\ 8 & 5 & 6 & 8 & 8 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right]$$

$$\det(A) = 2\cdot0\cdot6\cdot1 + 5\cdot2\cdot8\cdot1 + 3\cdot4\cdot8\cdot2 + 3\cdot0\cdot5\cdot3 - 1\cdot5\cdot2\cdot3 - 2\cdot6\cdot4$$

$$= 0 + 80 + 192 + 0 - 30 - 96 - 0 - 0$$

$$= 146 \ldots$$

Dengan kalkulator

Matrix A:

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 8 & 5 & 6 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Cells | + | −

Find the determinant

Find the inverse

Display decimals

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 8 & 5 & 6 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -226$$

Cara 1:

Menghitung Determinan

Secara Kombinatorik

Definisi determinan secara kombinatorik

Definisi: Determinan matriks *A* adalah jumlahan semua hasil kali elementer bertanda dari A

Hasil kali elementer dari matriks *nxn* adalah hasil kali *n* entri masing-masing dari kolom dan baris berbeda (tidak ada yang berasal dari kolom sama atau baris sama).

Definisi determinan secara kombinatorik

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

6 hasil hasil kali elementer

$$a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

Hasil kali elementer **bertanda**

Hasil kali elementer dari matriks *3x3* adalah hasil kali *3 entri* masing-masing dari kolom dan baris berbeda (tidak ada yang berasal dari kolom sama atau baris sama).

Determinan dgn ekspansi baris/kolom

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$\det(A)=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}$$

latihan

Berikan contoh hasil kali elementer dan bukan hasil kali elementer dari matriks 3x3

Kuis:

Tentukan berikut ini hasil kali elementer atau bukan

1. $a_{11}\ a_{23}\ a_{31}$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Ada dua entri berasal dari kolom yang sama

2. $a_{12}\ a_{23}$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Tidak ada entri dari baris ke 3 atau kolom pertama

3. $a_{12}\ a_{23}\ a_{31} a_{33}$

Hasil kali elementer matriks 3x3 terdiri atas 3 entri

4. $a_{12}\ a_{23}\ a_{31}$

Menentukan hasil kali elementer

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Terdapat 6 hasil kali elementer

Hasil kali elementer matriks 3x3

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

6 hasil kali elementer: 3 positif 3 negatif

	baris	kolom
$a_{11}a_{22}a_{33}$	1, 2, 3	1, 2, 3
- $a_{11}a_{23}a_{32}$	1, 2, 3	1, 3, 2
$a_{12}a_{23}a_{31}$	1, 2, 3	2, 1, 3
- $a_{12}a_{21}a_{33}$	1, 2, 3	2, 3, 1
$a_{13}a_{21}a_{32}$	1, 2, 3	3, 1, 2
- $a_{13}a_{22}a_{31}$	1, 2, 3	3, 2, 1

Permutasi

- **Permutasi** n bilangan 1, 2, 3, …, *n* adalah susunan terdiri dari n bilangan tersebut tanpa pengulangan

Permutasi dari 1, 2

1, 2

2, 1

Ada 2 permutasi

Permutasi dari 1, 2, 3

1, 2, 3

1, 3, 2

2, 1, 3

2, 3, 1

3, 1, 2

3, 2, 1

Ada 6 (= 3 x 2 x 1) permutasi

Permutasi dari 1, 2, 3, 4

??

Latihan:

Tentukan permutasi dari 1, 2, 3, 4

Ada 24 (= 4x3 x 2 x 1) permutasi

Hasil kali emeneter matriks 4x4

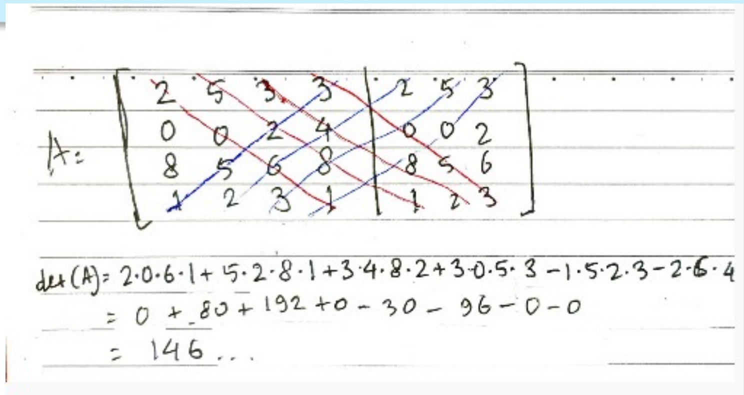
- Tuliskan semua hasil kali elementer dari matriks 4x4
- Ada berapa banyak?

Latihan

Tentukan rumus determinan matriks 4x4

Aturan Sarrus untuk matriks 4x4

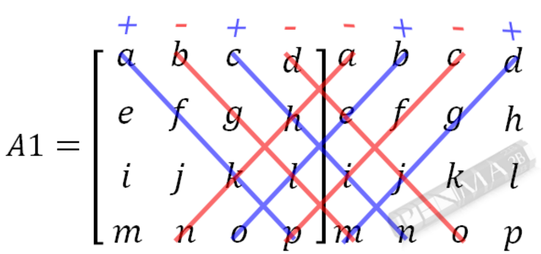
Salah



benar

Pola Pertama A1

Pola pertama dimulai tanda + (plus) dengan aturan 1 – 1 – 1

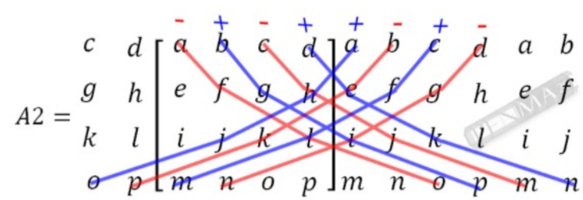


Jarak a ke f = f ke k = k ke p = 1

A 1 = afkp – bglm + chin – dejo – ahkn + belo – cfip + dgjm

Pola Kedua A2

Pola berikutnya dimulai tanda – (minus) dengan aturan 1 – 2 – 3

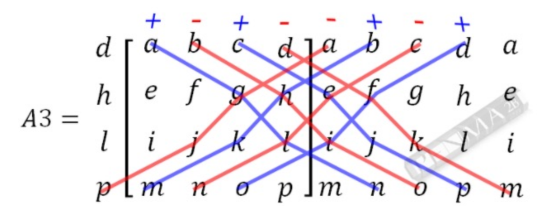


Jarak a ke f = 1 Jarak f ke l = 2 Jarak l ke o = 3

A 2 = -aflo + bgip – chjm + dekn + ahjo – bekp + cflm – dgin

Pola Ketiga A3

Pola terakhir dimulai tanda + (plus) dengan aturan 2 – 1 – 2



Jarak a ke g = 2 Jarak g ke l = 1 Jarak l ke n = 2

A 3 = agln – bhio + cejp – dfkm – agjp + bhkm – celn + dfio

Tahap 4: $\mathrm{Det}(A) = A_1 + A_2 + A_3$

Apa kesalahannya?

Jelaskan kesalahan menghitung determinan matriks 4x4 dengan cara membuat 8 garis diagonal (seperti pada matriks 3x3).

Bagaimana jika matriksnya 5x5?

Tanda (+/-) HKE

Bagaimana menentukan positif atau negatifnya hasil kali elementer?

- Hasil kali elementer bertanda positif jika jenis permutasinya genap.
- Hasil kali elementer bertanda negatif jika jenis permutasinya ganjil.

Menentukan jenis permutasi (+/-)

Inversi terjadi jika bilangan lebih besar mendahului lebih kecil

Genap atau ganjilnya permutasi didefinisikan dengan genap atau ganjilnya jumlah inversi

Permutasi 2 3 1 $a_{12}a_{23}a_{31}$

1 inversi
(2 mendahului 1)

1 inversi
(3 mendahului 1)

0 inversi

Jumlah inversi: 1 + 1 + 0 = 2

Jenis permutasi: genap

$a_{12}a_{23}a_{31}$ bertanda positif

Menentukan tanda hasil kali elementer bertanda

$a_{12}\, a_{23}\, a_{31}$

Permutasi 2 3 1

1 inversi
(2 mendahului 1)

0 inversi

1 inversi
(3 mendahului 1)

Jumlah inversi: 1 + 1+0 = 2

Jenis permutasi: genap

$a_{12}\, a_{23}\, a_{31}$ bertanda positif (+)

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Determinan matriks 3x3

Perkalian Elementer	permutasi dari kolom	Jumlah inversi dari 1,2,3	Jenis Permutasi	Tanda
$a_{11}a_{22}a_{33}$ $a_{11}a_{23}a_{32}$	1,2,3 1,3,2	0 1	Genap Ganjil	+ -
$a_{12}a_{21}a_{33}$ $a_{12}a_{23}a_{31}$	2,1,3 2,3,1	1 2	Ganjil Genap	- +
$a_{13}a_{21}a_{32}$ $a_{13}a_{22}a_{31}$	3,1,2 3,2,1	2 3	Genap Ganjil	+ -

$$\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

determinan matriks 4x4

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

Tentukan salah satu hasil kali elementer dan tandanya.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

$a_{12}\, a_{23}\, a_{31}\, a_{44}$

Permutasi: 2 3 1 4

Jumlah inversi: 1 + 1 + 0 + 0 = 2

Jenis permutasi: genap

Hasil kali elementer bertanda: (+) $a_{12}\, a_{23}\, a_{31}\, a_{44}$

Definisi determinan matriks nxn

Determinan matriks A adalah **jumlahan semua hasil kali elementer bertanda** dari A: Det(A) $=\sum(-1)^p a_{1j1}\, a_{2j2}\, a_{3j3} \ldots a_{njn}$

untuk semua permutasi $j_1, j_2, j_3, \ldots j_n$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots\ldots a_{1j} \ldots\ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots\ldots a_{2j} \ldots\ldots a_{2n} \\ : & : \quad\quad : \quad\quad : \\ a_{i1} & a_{i2} \ldots\ldots a_{ij} \ldots\ldots a_{in} \\ : & : \quad\quad : \quad\quad : \\ a_{n1} & a_{n2} \ldots\ldots a_{nj} \ldots\ldots a_{nn} \end{pmatrix}$$

Terdapat $n!$ hasil kali elementer bertanda dari A

Rangkuman

- Setiap matriks persegi memiliki tepat satu nilai determinan
- Nilai determinan matriks persegi tunggal
- Det(A) adalah julahan semua hasil kali elementer bertanda dari A
- **A_{nxn} tidak mempunyai inverse bhb det(A) = 0**

Latihan:

1. Det(A) = 5, apa kesimpulanmu?
2. Matriks *A* tidak mempunyai inverse, maka *A* tidak mempunyai determinan (B/S)
3. Bagaimana menghitung deteminan?

Cara 2

Menghitung Determinan
dengan

Ekspansi Baris/ Kolom

Minor dan kofaktor

Minor M_{ij} adalah determinan matriks A setelah dihapus baris ke-i kolom ke-j.

Kofaktor C_{ij} adalah $(-1)^{i+j}\, M_{ij}$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots\ldots a_{1j} \ldots\ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots\ldots a_{2j} \ldots\ldots a_{2n} \\ \vdots & \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} \ldots\ldots a_{ij} \ldots\ldots a_{in} \\ \vdots & \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} \ldots\ldots a_{nj} \ldots\ldots a_{nn} \end{pmatrix} \qquad M_{ij} = det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots \ldots a_{1j} \ldots\ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots \ldots a_{2j} \ldots\ldots a_{2n} \\ \vdots & \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} \ldots \ldots a_{ij} \ldots\ldots a_{in} \\ \vdots & \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} \ldots\ldots a_{nj} \ldots\ldots a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$C_{ij} = (-1)^{i+j}\, M_{ij}$$

Minor dan kofaktor

Minor M_{ij} = determinan matriks A setelah dihapus brs-i klm-j.

Kofaktor C_{ij}= $(-1)^{i+j}\ M_{ij}$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \qquad M_{13} = \det\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$$

$$C_{13} = (-1)^{1+3} M_{13}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \qquad M_{21} = \det\begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$C_{21} = (-1)^{2+1} M_{21}$$

Latihan 2:

- Hitunglah semua kofaktor matriks berikut ini:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 4 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 4 & 4 & 5 \end{pmatrix} \qquad C_{11} = \det\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = 10$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 4 & 4 & 5 \end{pmatrix} \qquad C_{12} = -\det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = -5$$

$C_{13}=$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 4 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$C_{21}=$

$C_{22}=$

$C_{23}=$

$C_{31}=$

$C_{32}=$

$C_{33}=$

Determinan dgn ekspansi baris/kolom

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

$$= a_{11}(-1)^{1+1}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) + a_{12}(-1)^{1+2}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(-1)^{1+3}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

$$\det(A) = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13}$$

Ekspansi baris pertama

$$\det(A) = a_{21}C_{21} + a_{22}C_{22} + a_{23}C_{23}$$

Ekspansi baris kedua

Menghitung det dgn ekspansi baris/kolom

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$\det(A) = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13}$	ekspansi baris pertama
$\det(A) = a_{21}C_{21} + a_{22}C_{22} + a_{23}C_{23}$	ekspansi baris kedua
	ekspansi baris ketiga
$\det(A) = a_{11}C_{11} + a_{21}C_{21} + a_{31}C_{31}$	ekspansi kolom pertama
	ekspansi kolom kedua
	ekspansi kolom ketiga

Contoh:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 4 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Ada sebanyak 9 (= 3x3) kofaktor, yaitu:

C_{11}= 10	C_{21}= 0	C_{31}= 0
C_{12}= -5	C_{22}= 15	C_{32}= 0
C_{13}= -4	C_{23}= -12	C_{33}= 6

dengan ekspansi baris ketiga:

det(A) = 4x0 + 4x0 + 5x6 = 30

dengan ekspansi kolom ketiga:

det(A) = 5x6 = 30

determinan matriks 4x4 dengan kofaktor

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

$$M_{34} = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{pmatrix} \qquad C_{34} = (-1)^{3+4} M_{34}$$

Banyaknya kofaktor = banyaknya entri

$$\det(A) = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13} + a_{14}C_{14}$$ (eksp brs pertama)

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{4} a_{ij}C_{ij}$$ (eksp brs ke-*i*)

Ada 8 cara menghitung determinan *A* dengan ekspansi brs/klm

Menghitung determinan matriks
(dengan ekspansi kofaktor)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots\ldots & a_{1j} \ldots\ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots\ldots & a_{2j} \ldots\ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} \ldots\ldots & a_{ij} \ldots\ldots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} \ldots\ldots & a_{nj} \ldots\ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Determinan matriks *A* (dengan ekspansi baris ke *i*, atau ekspansi kolom ke *j*) adalah :

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} C_{ij} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} C_{ij}$$

Definisi determinan (sebagai fungsi)

Definisi 3.1: Determinan

Determinan matriks adl fungsi dari **himpunan semua matriks persegi** ke **himpunan semua bilangan nyata** dengan **aturan**

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} C_{ij} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} C_{ij}$$

Kesalahan menghitung det matriks 4x4

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & -4 \end{pmatrix} \qquad \det(A) = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13} + a_{14}C_{14}$$

Cara 3:

Menghitung Determinan dengan Operasi Baris Elementer

Pengaruh tukar baris pada determinan

$$A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 4\end{pmatrix}\xrightarrow{R_1\leftrightarrow R_2}A'=\begin{pmatrix}2 & 4\\ 1 & 3\end{pmatrix}\qquad \det(A)=-2\rightarrow\det(A')=2$$

$$B=\begin{pmatrix}1 & -4 & 2\\ 2 & 0 & 1\\ 3 & 3 & 6\end{pmatrix}\xrightarrow{R_1\leftrightarrow R_3}B'=\begin{pmatrix}3 & 3 & 6\\ 2 & 0 & 1\\ 1 & -4 & 2\end{pmatrix}\det(B)=45\rightarrow\det(B')=-45$$

$X \rightarrow X'$ dengan tukar baris

$\det(X') = -\det(X)$

Pengaruh perkalian baris dengan skalar pada nilai determinan

$$A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 4\end{pmatrix}\xrightarrow{R_2\leftarrow 10R_2}A'=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 20 & 40\end{pmatrix}\qquad \det(A)=-2\ \rightarrow \det(A')=-20$$

$$B=\begin{pmatrix}1 & -4 & 2\\ 2 & 0 & 1\\ 3 & 3 & 6\end{pmatrix}\xrightarrow{R_3\leftarrow \frac{1}{3}R_3}B'=\begin{pmatrix}1 & -4 & 2\\ 2 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}\ \det(B)=45\rightarrow \det(B')=15=\frac{1}{3}\det(B)$$

$$\boxed{\det(X')=k.\det(X)}$$

Pengaruh OBE (mengalikan baris dengan skalAr tak nol) pada nilai determinan

$$A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 4\end{pmatrix}\xrightarrow{R_2\leftarrow R_2+2R_1}A'=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 4 & 10\end{pmatrix}$$

$$\det(A)=-2\ \rightarrow \det(A')=-2$$

$$B=\begin{pmatrix}1 & -4 & 2\\ 2 & 0 & 1\\ 3 & 3 & 6\end{pmatrix}\xrightarrow{R_2\leftarrow R_2+\frac{1}{3}R_3}B'=\begin{pmatrix}1 & -4 & 2\\ 3 & 1 & 3\\ 3 & 3 & 6\end{pmatrix}$$

$$\det(B)=45$$

$$\rightarrow \det(B')=45=\det(B)$$

$$\boxed{\det(X')=\det(X)}$$

Pengaruh operasi baris elementer pada nilai determinan

$$A \xrightarrow[obe]{} B$$

OBE	Pengaruh pada Determinan
$R_i \leftrightarrow R_j$	$\det(B) = -\det(A)$
$R_i \leftarrow kR_i, k \neq 0$	$\det(B) = k.\det(A)$
$R_i \leftarrow k.R_i + l.R_j, k, l \neq 0$	$\det(B) = \det(A)$

Menghitung determinan dengan operasi baris elementer

- *A* mempunyai inverse

Bentuk ebt A

$$A \longrightarrow I$$

$\det(A)$ $\qquad$ $\det(I) = 1$

r kali tukar baris

s kali perkalian baris dengan skalar (k_1, k_2, k_3, ..., k_s),

t kali jumlahkan baris dengan kelipatan baris lain

$$\det(I) = (-1)^r k_1 k_2 k_3 \cdots k_s \det(A)$$
$$1 = (-1)^r k_1 k_2 k_3 \cdots k_s \det(A)$$

$$\det(A) = \frac{(-1)^r}{(k_1 k_2 k_3 \cdots k_s)}$$

A mempunyai inverse maka $\det(A) \neq 0$

Menghitung determinan dengan operasi baris elementer

Bentuk ebt A Mempunyai baris nol

A TIDAK mempunyai inverse

$A \longrightarrow$ 0 0 … 0

det(*A*) $\qquad$ det(*A*') = 0

r kali tukar baris

s kali perkalian baris dengan skalar (k_1, k_2, k_3, …, k_s),

t kali jumlahkan baris dengan kelipatan baris lain

$$\det(A') = (-1)^r k_1 k_2 k_3 \cdots k_s \det(A)$$
$$0 = (-1)^r k_1 k_2 k_3 \cdots k_s \det(A)$$

$$\det(A) = 0$$

A TIDAK mempunyai inverse maka det(*A*) = 0

menghitung determinan dengan OBE

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftarrow \frac{1}{4} R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

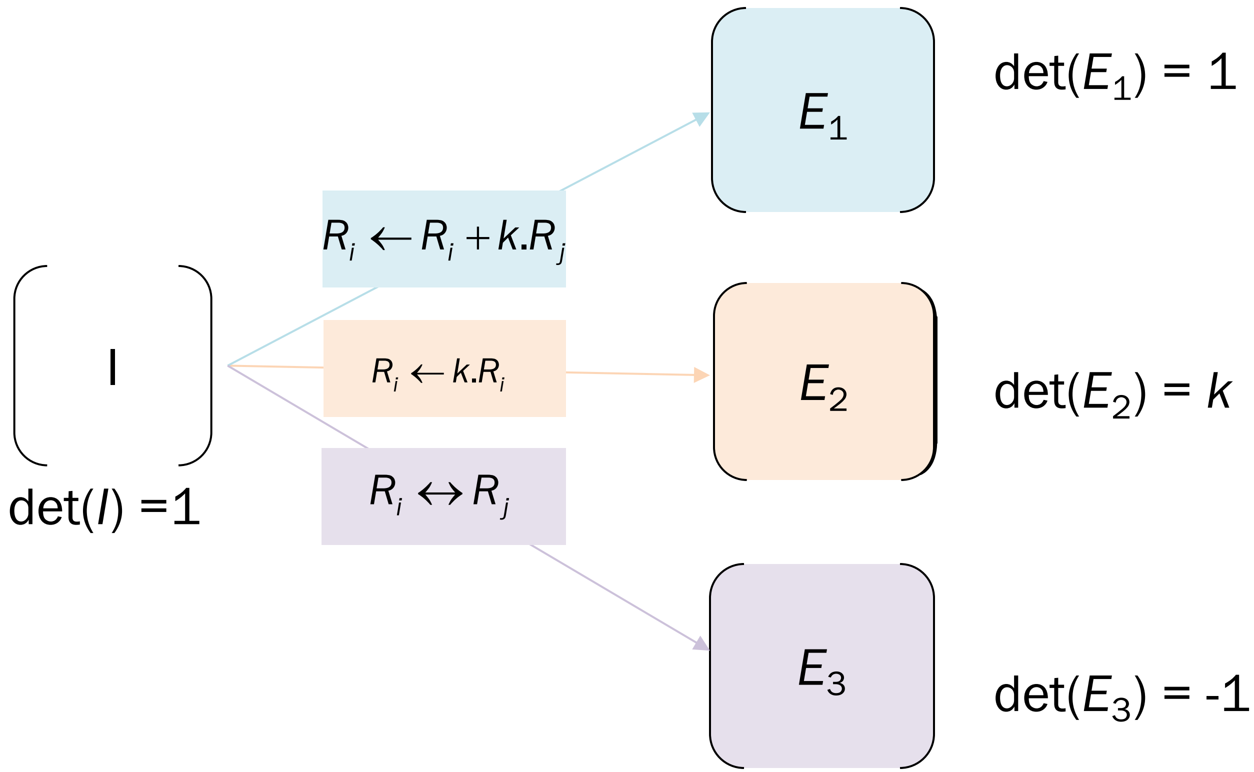
B direduksi menjadi matriks identitas dengan:

- 2 kali tukar baris,
- sekali mengalikan dengan konstanta ¼

$$\det(M) = (-1)^2 \frac{1}{1/4} = 1.4 = 4$$

Determinan matriks elementer

Berikan E_1, E_2, E_3, hitung determinannya



Determinan matriks-matriks tertentu

Latihan 3:

- Matriks diagonal

$$D = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \qquad \det(D) = 504$$

- Matriks segitiga

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \qquad \det(S) = 10$$

- Matriks dengan baris nol

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 7 \\ -9 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \det(B) = 0$$

- Matriks dengan kolom nol

$$K = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & -9 & 1 \end{pmatrix} \qquad \det(K) = 0$$

- Matriks dengan dua baris sama

$$M = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -4 \\ 4 & 1 & -4 \\ 0 & -9 & 1 \end{pmatrix} \qquad \det(M) = 0$$

Determinan matriks sederhana

- Matriks diagonal

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & & a_{ij} & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33}\ldots a_{nn}$

- Matriks segitiga

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & & a_{ij} & & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$\det(B) = a_{11}a_{22}a_{33}\ldots a_{nn}$

Determinan matriks segitiga sama dengan hasil kali entri diagonal utama.

Determinan matriks dengan baris/kolom nol

- Matriks dengan baris / kolom nol

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\ldots\ldots\ldots a_{1j}\ \ldots\ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\ \ldots\ldots a_{2j}\ldots\ldots\ldots a_{2n} \\ : & :\qquad :\qquad : \\ a_{i1} & a_{i2}\ \ldots\ldots a_{ij}\ldots\ldots\ldots\ a_{in} \\ : & :\qquad :\qquad : \\ 0 & 0\ldots\ldots\ 0\ldots\ldots\ldots\ 0 \end{pmatrix}$$

det(A) = 0

Setiap hasil kali elementer pasti memuat entri dari baris terakhir (yaitu 0). Jadi semua hasil kali elementer adalah nol.

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & 0\ldots\ldots\ldots a_{1j}\ \ldots\ldots a_{1n} \\ a_{21} & 0\ \ldots\ldots a_{2j}\ldots\ldots\ldots a_{2n} \\ : & :\qquad :\qquad : \\ a_{i1} & 0\ \ldots\ldots a_{ij}\ldots\ldots\ldots\ a_{in} \\ : & :\qquad :\qquad : \\ a_{n1} & 0\ldots\ldots a_{nj}\ldots\ldots\ldots\ a_{nn} \end{pmatrix}$$

det(B) = 0

Pertanyaan: apakah matriks yang tidak mempunyai inverse determinannya nol?

3.5 Sifat-sifat determinan

Sifat determinan

1. $\det(A^T) = \det(A)$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

ekspansi baris ke - i :

$$\det(A) = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \cdots + a_{in}C_{in}$$

ekspansi kolom ke - i,

$$\det(A^T) = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \cdots + a_{in}C_{in}$$

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = \det(A^T)$$

Sifat determinan (lanj) -- 2

2. Jika B mempunyai baris nol, maka det(B) = 0

Bukti:

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2j} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nj} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\det(B) = 0.C_{i1} + 0.C_{i2} + \cdots + 0.C_{in}$$

3. Sifat determinan (lanj)

3. Jika B mempunyai dua baris identik maka $\det(B) = 0$

Bukti:

B mempunyai dua baris identik maka $R_i = k.R_j$.

Bila dilakukan operasi baris elementer: $R_i \leftarrow R_i - kR_j$ pada B sehingga diperoleh matriks B' maka matriks B' akan memiliki baris nol.

Berdasarkan sifat (4) dan (1), $\det(B') = \det(B) = 0$

4. Pengaruh obe pada determinan

$$A \xrightarrow[obe]{} B$$

OBE	Pengaruh pada Determinan
$R_i \leftrightarrow R_j$	$\det(B) = -\det(A)$
$R_i \leftarrow kR_i, k \neq 0$	$\det(B) = k.\det(A)$
$R_i \leftarrow k.R_i + l.R_j, k, l \neq 0$	$\det(B) = \det(A)$

Matriks dengan determinan nol

1. Matriks yang memiliki baris/kolom nol
2. Matriks yang memiliki 2 baris/kolom identik
3. Matriks yang memiliki baris/kolom kelipatan baris/kolom lain
4. Matriks yang mempunyai baris/kolom yang merupakan jumlahan kelipatan baris-baris/kolom-kolom lain.

Sifat-sifat determinan (lanj) 5 - 8

5. $\det(AB) = \det(A)\det(B)$

6. Pada umumnya $\det(A + B) \neq \det(A) + \det(B)$

7. $\det(kA) = k^n \det(A)$ (A berordo n x n)

8. $\det(A^{-1}) = 1/\det(A)$

$$A^{-1}A = I$$

$$\det\left(A^{-1}A\right) = \det(I)$$

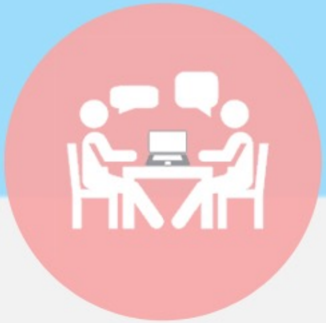
$$\det\left(A^{-1}\right)\det(A) = 1, \text{karena } A^{-1} \text{ ada}, \det(A) \neq 0$$

$$\det\left(A^{-1}\right) = \frac{1}{\det(A)}$$

Latihan

1. A matriks orthogonal, hitung det A.
2. Det(A) = det(A^T) apa kesimpulanmu?
3. B/S det(A) = 0, maka terdapat dua baris identik.

Semangaat



MODUL E-LEARNING ALJABAR LINIER
FAKULTAS ILMU KOMPUTER, UNIVERSITAS INDONESIA