7. Nilai dan Vektor Eigen

MODUL E-LEARNING ALJABAR LINIER
FAKULTAS ILMU KOMPUTER, UNIVERSITAS INDONESIA

- Nilai dan vektor eigen
  - Ruang eigen
  - Diagonalisasi
    - Diagonalisasi ortogonal

7.3 Diagonalisasi

Latihan:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad D_1 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -3 & -5 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix} \qquad D_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix} \qquad D_3 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

Hitunglah:

1. **Trace**
2. **Determinan**
3. **Persamaan karakteristik**
4. **Nilai eigen**
5. **Rank dan nulitas**

Masalah Utama Diagonalisasi

Problem 1: A_{nxn}

*A*pakah *A* **dapat didiagonalkan**?

EQUIVALEN

- **Problem 2:** A_{nxn}

  *A*pakah ada basis dari R^n terdiri atas vektor-vektor eigen dari *A*?

Problem

1. **Diberikan matriks A, apakah A dapat didiagonalkan?**
2. Jika A dapat didiagonalkan, bagaimana mendiagonalkan A?
3. Bagaimana menemukan P dan D sedemikian hingga $A = PDP^{-1}$.
4. Apa syarat matriks dapat didiagonalkan?
5. Jika A dapat didiagonalkan, apakah diagonalisasinya tunggal?

Permasalahan

6. **Diberikan matriks A, apakah terdapat basis R^n yang terdiri atas vektor-vektor eigen dari A?**
7. Jika 'Ya', bagaimana menentuan basis dari R^n yang terdiri atas vektor-vektor eigen dari A?
8. Apakah basis tersebut tunggal?
9. **Diberikan matriks A yang dapat didiagonalkan, apakah A^n dapat didiagonalkan? Jika dapat, bagaimana mendiagonalkan A^n?**

Permasalahan

9. Jika A dapat didiagonalkan, bagaimana mendiagonalkan A^{-1}?
10. Apa kaitan diagonalisasi dan **similaritas**?
11. Bagaimana diagonalisasi matriks **secara orthogonal**?

Apa makna ‘matriks A dapat didiagonalkan?

Diagonalisasi

Definisi:

Matriks A_{nxn} dapat didiagonalkan **jika terdapat matriks P** yang mempunyai inverse sedemikian hingga

$$P^{-1}AP = D$$

D adalah matriks diagonal.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}}_{P^{-1}}\underbrace{\begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{P} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}_{D}$$

Matriks diagonal

Diagonalisasi

A

$\begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix}$

D

$\begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix}$

1. Trace
2. Determinan
3. Persamaan karakteristik
4. Nilai eigen
5. Rank dan nulitas

Contoh (h-a HAL 372)

- Diberikan matriks A: $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

- Terdapat matriks P, P^{-1} dan D:

$$P = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- $P^{-1}AP = D$
- A dapat didiagonalkan, P mendiagonalkan A

Matriks & hasil diagonalisasinya

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -2 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}}_{P^{-1}} \underbrace{\begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 3 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}}_{P} = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}}_{D}$$

$$A = PDP^{-1}$$

A dapat didiagonalkan.

Apakah terdapat basis dari R^n yang terdiri atas vektor-vektor eigen dari A?

Diagonalisasi dan basis R^n

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 3 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad P = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \vec{v}_3 \end{bmatrix}$$

$$A = PDP^{-1}$$

$$AP =$$

Diagonalisasi dan basis R^n

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 3 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \vec{v}_3 \end{bmatrix}$$

$$AP = PD$$

$$AP = \begin{bmatrix} A\vec{v}_1 & A\vec{v}_2 & A\vec{v}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\vec{v}_1 & 2\vec{v}_2 & 3\vec{v}_3 \end{bmatrix}$$

$\left\{ \vec{v}_1, \; \vec{v}_2, \; \vec{v}_3 \right\}$ bebas linear; basis R^3

P mempunyai inverse
$\Rightarrow$ kolom-kolomnya bebas linear
$\Rightarrow$ membentuk basis R^3

Matriks dan hasil diagonalisasi

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Basis } \mathrm{R}^3 = \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \text{ tdd vektor - vektor eigen } A$$

Kapan matriks A dapat didiagonalkan?

Teorema

A adalah matriks nxn, A dapat didiagonalkan bhb terdapat n vektor-vektor eigen dari A yang bebas linier

Kapan matriks *A* dapat didiagonalkan?

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Misalkan *A* dapat didiagonalkan, maka terdapat matriks *P* yang mempunyai inverse sedemikian hingga $P^{-1} AP = D$

D matriks diagonal.

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$P^{-1}AP = D$$

$$AP = PD$$

Kapan matriks *A* dapat didiagonalkan? (lanjt)

$$PD = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 p_{11} & \lambda_2 p_{12} & \cdots & \lambda_n p_{1n} \\ \lambda_1 p_{21} & \lambda_2 p_{22} & \cdots & \lambda_n p_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1 p_{n1} & \lambda_2 p_{n2} & \cdots & \lambda_n p_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \mathbf{p}_1 & \lambda_2 \mathbf{p}_2 & \cdots & \lambda_n \mathbf{p}_n \end{pmatrix}$$

$$AP = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A\mathbf{p}_1 & A\mathbf{p}_2 & \cdots & A\mathbf{p}_n \end{pmatrix}$$

$$A\mathbf{p}_1 = \lambda_1 \mathbf{p}_1 \quad A\mathbf{p}_2 = \lambda_2 \mathbf{p}_2 \quad \cdots \quad A\mathbf{p}_n = \lambda_n \mathbf{p}_n$$

Teorema diagonalisasi

$D = P^{-1}AP$

$$P = \left[\overrightarrow{p_1} \quad \overrightarrow{p_2} \quad \cdots \quad \overrightarrow{p_n} \right]$$

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

P^{-1} ada, maka tidak memuat kolom nol, dan kolom-kolom bebas linier

$$AP = \left[A\overrightarrow{p_1} \quad A\overrightarrow{p_2} \quad \cdots \quad A\overrightarrow{p_n} \right]$$

$$PD = [\lambda_1 \overrightarrow{p_1} \quad \lambda_2 \overrightarrow{p_2} \quad \ldots \quad \lambda_n \overrightarrow{p_n}]$$

A dapat didiagonalisasi menjadi D oleh P, sebutkan:

a. nilai-nilai eigen
b. vektor-vektor eigen yang membentuk basis R^n?

A dapat didiagonalkan: P dan D

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix}$$

$$P^{-1}AP = D$$

$$AP = PD$$

- Nilai eigen A:
- Basis R^n:

  (tdd vektor-vektor eigen dari A)

A dapat didiagonalkan. Bagaimana prosedur mendiagonalkan matriks A?

A dapat didiagonalkan
prosedur mendiagonalkan matriks *A*

- Tentukan semua nilai eigen dari A, bentuk D matriks diagonal dengan elemen diagonal utama nilai-nilai eigen

- Untuk setiap nilai eigen tentukan basis ruang eigen. P adalah matriks yang merupakan kumpulan basis-basis ruang eigen dengan urutan sesuai dengan D

Contoh: A 5x5 dengan nilai eigen a, b, c

- Persamaan karakteristik:
- Untuk nilai eigen A, tentukan basis Ea:
- Untuk nilai eigen b, tentukan basis Eb:
- Untuk nilai eigen c, tentukan basis Ec:
- P = ...

Contoh 6: mendiagonalkan matriks

Diagonalisasi $A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 3 \end{bmatrix}$

Prosedur

1. Tentukan semua nilai eigen.

PK: $(\lambda - 2)^2 (\lambda - 3) = 0$

Contoh 6: mendiagonalkan matriks

Diagonalisasi $A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 3 \end{bmatrix}$

Prosedur

Tentukan ruang eigen E_2

SPL $\begin{bmatrix} 4-2 & -2 & 1 \\ 2 & 0-2 & 1 \\ 2 & -2 & 3-2 \end{bmatrix} \vec{x} = \vec{0}$

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Contoh 6: mendiagonalkan matriks

Diagonalisasi $A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 3 \end{bmatrix}$

Prosedur

Tentukan ruang eigen E_3

SPL $\begin{bmatrix} 4-3 & -2 & 1 \\ 2 & 0-3 & 1 \\ 2 & -2 & 3-3 \end{bmatrix} \vec{x} = \vec{0}$ $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Contoh 6: mendiagonalkan matriks

Diagonalisasi $A=\begin{bmatrix}4 & -2 & 1\\ 2 & 0 & 1\\ 2 & -2 & 3\end{bmatrix}$

Prosedur

Basis E2

$$\left\{\begin{bmatrix}-2\\-1\\2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}3\\1\\-2\end{bmatrix}\right\}$$

Basis E3

$$\left\{\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$$

Contoh 6: mendiagonalkan matriks

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -2 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}}_{P^{-1}} \underbrace{\begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 3 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}}_{P} = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}}_{D}$$

$$A = PDP^{-1}$$

Contoh 6:
matriks tidak dapat didiagonalkan

Diagonalisasi
$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

misal PK:

nilai eigen k dan l

Basis E_k

$$\left\{ \vec{v} \right\}$$

Basis E_l

$$\left\{ \vec{w} \right\}$$

Contoh 7: Dapatkah didiagonalkan?

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Tentukan persamaan karakteristik *A*, *B* dan *C*.

$$(1-\lambda)^3 = 0 \qquad (1-\lambda)^3 = 0 \qquad (1-\lambda)^3 = 0$$

Matriks tidak dapat didiagonalkan

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Persamaan karakteristik $(1-\lambda)^3 = 0$

Basis E_1: $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$

Matriks tidak dapat didiagonalkan

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Persamaan karakteristik $(1-\lambda)^3 = 0$

Basis E_1: $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

Dapatkah didiagonalkan?

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Persamaan karakteristik $(1-\lambda)^3 = 0$

Basis E_1: $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

Matriks tidak dapat didiagonalkan

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Persamaan karakteristik $(1-\lambda)^3 = 0$

Basis E_1: $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$

Matriks tidak dapat didiagonalkan

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Persamaan karakteristik $(1-\lambda)^3 = 0$

Basis E_1: $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

Dapatkah didiagonalkan?

Persamaan karakteristik

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(1-\lambda)^3 = 0$$

Basis E_1: $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(1-\lambda)^3 = 0$$

Basis E_1: $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(1-\lambda)^3 = 0$$

Basis E_1: $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

Contoh 8: mendiagonalkan matriks

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -3 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

Langkah 1: Nilai-nilai eigen: 5 dan -3

Langkah 2: Yang membentuk basis E_5 $\begin{bmatrix} -16 \\ 4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -8 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

yang membentuk basis E_{-3} $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

Langkah3: $P = \begin{bmatrix} -8 & -16 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ **Langkah 4:** $D = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$

Contoh 8

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -3 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

Mempunyai nilia-nilai eigen 5 dan -3. Hasil diagonalisasinya *D*.

$$D = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

basis E_5 $\left\{ \begin{bmatrix} -8 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -16 \\ 4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

basis E_{-3} $\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

$$P = \begin{bmatrix} -8 & -16 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

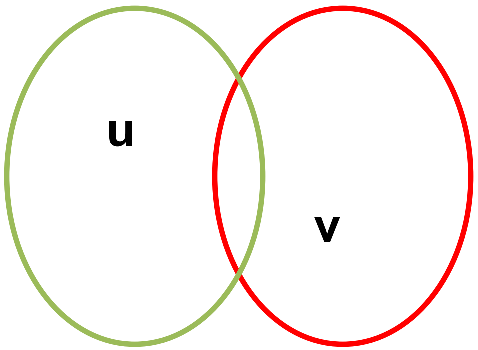
Hubungan vektor-vektor eigen di *R* Eigen

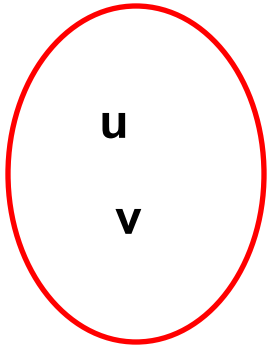
Bagaimana hubungan dependensi linear vektor eigen?

- 2 vektor dari ruang eigen berbeda

- 2 vektor dari ruang eigen yang sama

Hubungan dependensi linear 2 vektor eigen





vektor **u** dan **v** pasti bebas linear

vektor **u** dan **v** bisa bebas atau bergantung linear.

vektor **u** dan **v** bisa bebas linear jika terletak pada satu basis yang sama.

Hubungan vektor-vektor eigen di *R* Eigen

- 2 vektor dari ruang eigen berbeda: pasti saling bebas linear

- 2 vektor dari ruang eigen yang sama:
  - jika nulitasnya 1, maka 2 vektor tersebut beergantung linear
  - Jika nulitasnya > 1 maka 2 vwektor bisa bebas bisa bergantung.
  - pasti bebas linear jika anggota basis yang sama

Apa syarat A dapat didiagonalkan?

Syarat matriks dapat didiagonalkan

A dapat didiagonalkan jika untuk setiap nilai eigen multiplisitas geometri sama dengan multiplisitas aljabarnya

- Multiplisitas geometri untuk nilai eigen a adalah $\dim(E_a) = \dim(\text{Null}(A - aI))$

- Untuk setiap nilai eigen berlaku:

$$1 \leq mg(a) \leq ma(a)$$

Anxn mempunyai n nilai eigen berbeda, apakah A dapat didiagonalkan?

dapat didiagonalkan?

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Persamaan karakteristik $(1-\lambda)^3 = 0$

Ma(1) = 3

Basis E_1: $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

Mg(1) = 2

Mg(1) = 2
Ma(1) = 3

B tidak dapat didiagonalkan

Apakah A dapat didiagonalkan?

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -3 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

PK:....
Nilai eigen: 5 dan 3
Ma(5) = 2
Ma(-3) = 2

basis E_5 $\begin{array}{cc} \textbf{a.} & \textbf{b} \\ \left\{ \begin{bmatrix} -8 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \right. & \left. \begin{bmatrix} -16 \\ 4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \end{array}$

Mg(5) = 2

basis E_{-3} $\begin{array}{cc} \textbf{u} & \textbf{v} \\ \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \right. & \left. \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \end{array}$

Mg(-3) = 2

A dapat didiagonalkan

A dapat didiagonalkan?

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

PK: $(\lambda - 2)^2(\lambda - 3) = 0$

Basis E_2

$$\left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \right\}$$

Basis E_3

$$\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Cara menentukan basis R^4

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -3 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

basis E_5

$$\begin{array}{cc} \textbf{a.} & \textbf{b} \\ \left\{ \begin{bmatrix} -8 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \right. & \left. \begin{bmatrix} -16 \\ 4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \end{array}$$

basis E_{-3}

$$\begin{array}{cc} \textbf{u} & \textbf{v} \\ \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \right. & \left. \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \end{array}$$

Basis R^4 yang tdd vektor-vektor eigen dari *A*: {**a, b, u, v**}

Prosedur mendiagonalkan matriks

Diberikan A_{nxn}. dicari P sedemikian hingga $PAP^{-1} = D$.

1. Tentukan semua nilai eigen dari A.
2. Tentukan n vektor eigen A yang bebas linier, misalkan

   $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3, \ldots, \mathbf{p}_n$

2. Dibentuk matriks P yang kolom-kolomnya adalah

   $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3, \ldots, \mathbf{p}_n$

3. Mariks $D = P^{-1}AP$ adalah matriks diagonal yang entri diagonal utamanya adalah $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n$ dengan λ_j adalah nilai eigen bersesuaian dengan $\mathbf{p}_j$ untuk $j = 1, 2, 3, \ldots, n$

Contoh 3: mendiagonalkan matriks

Diberikan matriks A_{nxn}. Akan dicari P sedemikian hingga $PAP^{-1} = D$.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$$

Prosedur

1. Pertama kita tentukan nilai-nilai eigennya yaitu $\lambda_1 = 2$ dan $\lambda_2 = -1$ (telah dihitung sebelumnya).
2. Tentukan vektor eigen bersesuaian dengan nilai eigen, dengan menyelesaiakn spl $(A - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Diperoleh 2 vektor eigen A yang bebas linier.

$$\mathbf{p}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{p}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

3. Dibentuk matriks P yang kolom-kolomnya adalah vektor-vektor eigen di atas.

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

4. Matriks $D = P^{-1}A\,P$ adalah matriks diagonal yang entri diagonal utamanya adalah λ_1, λ_2 berturut-turut

$$D = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Contoh 6: mendiagonalkan matriks

Diagonalisasi $A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 3 \end{bmatrix}$

Prosedur

Basis E_2

$$\left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \right\}$$

Basis E3

$$\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Contoh 6: mendiagonalkan matriks

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -2 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}}_{P^{-1}} \underbrace{\begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 3 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}}_{P} = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}}_{D}$$

$$A = PDP^{-1}$$

Dimensi ruang eigen

- k nilai eigen dari A
- Ruang eigen E_k = ...
- Mungkinkan $\dim(E_k) = 0$?

$\dim(E_k)$ disebut multiplisitas geom (mg) dari k

- Untuk setiap nilai eigen k : $mg(k) \leq ma(k)$

Latihan: Multiplisitas geometri

- Misalkan PK = ...
- Ruang eigen E_k = ...
- $\dim(E_k) = \text{mg}(k)$
- Rentang multiplisitas geometri

Multiplisitas geometris dan aljabar

Definisi 7.3.:

- Jika suatu λ_0 adalah nilai eigen matriks *A*, *nxn*, maka dimensi ruang eigen yang berpadanan dengan λ_0 disebut multiplisitas ***geometri*** dari λ_0.

- Jumlah berapa kali $\lambda - \lambda_0$ muncul sebagai suatu faktor dalam polinom karakteristik dari *A* disebut multiplisitas ***aljabar*** dari *A.*

Multiplisitas Aljabar & Geometri

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 3 \end{bmatrix} \qquad A - \lambda I = \begin{bmatrix} 4-\lambda & -2 & 1 \\ 2 & 0-\lambda & 1 \\ 2 & -2 & 3-\lambda \end{bmatrix}$$

Persamaan karakteristik $(\lambda - 3)(\lambda - 2)^2 = 0$

Multiplisitas aljabar untuk nilai eigen 3 adalah 1
untuk nilai eigen 2 adalah 2

Multiplisitas geometri adalah dimensi ruang eigen
(ruang null (A – kI))

Multiplisitas geometri

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

Persamaan karakteristik: $(\lambda-2)^2(\lambda-3) = 0$
Nilai eigen 2 dan 3.

Basis ruang eigen E_2 diperoleh dengan menyelesaikan SPL $(A-2I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$

Dan Basis E3 adalah basis Null(*A*-3I)

Basis E_2 $\left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$

Basis E_3 = ...

Dimensi (E_2) = 2
= multiplisitas geometri nilai eigen 2.

Nilai eigen	2	3
Multiplisitas aljabar	2	1
Multiplisitas geometri	2	1

Tentukan multiplisitas aljabar dan geometri

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

- Bisakah ruang eigen berdimensi nol?
- Berapa dimensi terbesarnya?

Persamaan karakteristik $(2-\lambda)(1-\lambda)=0$

E_1 = Null(A-I) = ...

E_2 = Null(A-2I) = ...

Nilai eigen	2	1
Multiplisitas aljabar	1	1
Multiplisitas geometri	?	?

Tentukan multiplisitas geometri dan aljabar

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -4 & -6 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Persamaan karakteristik $-\lambda^3 - 3\lambda^2 + 4 = 0$

$$(\lambda - 1)(\lambda + 2)^2 = 0$$

E_1 = Null(A-I) = ...

E_2 = Null(A+2I) = ...

Nilai eigen	-2	1
Multiplisitas aljabar	2	1
Multiplisitas geometri	?	?

Anxn mempunyai n nilai eigen berbeda, apakah A dapat didiagonalkan?

Matriks *A:* semua nilai eigen berbeda

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Jika A_{nxn} mempunyai n nilai eiegen berbeda, maka multiplisitas aljabar dan geometrinya semua sama dengan 1 => dapat didiagonalkan.

Persamaan karakteristik:

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 3-\lambda & 3 \\ -2 & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= (1-\lambda)^2 (3-\lambda) - 6 + 2(3-\lambda) - 3(1-\lambda) = 0$$

$$\lambda(\lambda - 2)(3-\lambda) = 0$$

Nilai-nilai eigen $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = 3$

Multiplisitas geometris dan aljabar

Persamaan karakteristik dari A adalah $(1-\lambda)(6-\lambda)^2 = 0$. Jadi A memiliki nilai–nilai eigen: $\lambda = 1$, $\lambda = 6$. Misalnya diketahui bahwa basis ruang-ruang eigennya adalah:

$$\text{basis } E_1 : B_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \text{basis } E_6 : B_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 2/3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1/4 \\ 3/4 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \text{ atau } B_2^* = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \right\}$$

Maka A dapat didiagonalkan karena multiplisitas geometri = multiplisitas aljabar masing-masing nilai Eigen,

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Multiplisitas geometri dan aljabar

Persamaan karakteristiknya adalah $\lambda^2(\lambda - 1) = 0$, sehingga nilai eigennya hanya $\lambda = 0$ dan $\lambda = 1$. Basis ruang eigen yang berasosiasi dengan $\lambda = 0$

$(E_{\lambda=0})$ adalah $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$ Basis $E_{\lambda=1}$ adalah $\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

Maka $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ dan $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = D$

Multiplisitas Aljabar & Geometri

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Persamaan karakteristik $|A-\lambda I| = (1-\lambda)^3 = 0$
- Multiplisitas aljabar untuk $\lambda = 1$ adalah 3
- Tentukan ruang eigen E_1, atau Null(A-1I)

Basis E_1: $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$

- Multiplisitas geometris untuk $\lambda = 1$ adalah 1.

Informasi dari persamaan karakteristik

Misalkan *A* adalah matriks 6x6 yang memiliki persamaan karakteristik $\lambda^2 (\lambda-1) (\lambda-2)^3 = 0$.

Sebutkan kemungkinan-kemungkinan dimensi dari ruang-ruang eigen dari *A*? Jelaskan implikasinya terhadap diagonalisasi A (bisa atau tidak bisa didiagonalkan)

Apa syarat *A* dapat didiagonalkan?

Syarat matriks dapat didiagonalkan

A dapat didiagonalkan jika untuk setiap nilai eigen multiplisitas geometri sama dengan multiplisitas aljabarnya

- Multiplisitas geometri untuk nilai eigen λ adalah $\dim(E_\lambda) = \dim(\text{Null}(A - \lambda I))$
- Untuk setiap nilai eigen berlaku:

$$1 \leq mg(\lambda) \leq ma(\lambda)$$

A_{nxn} mempunyai n nilai eigen berbeda, apakah A dapat didiagonalkan?

A mempunyai n nilai eigen berbeda

Untuk setiap nilai eigen :

$$mg(\lambda) = ma(\lambda) = 1.$$

A pasti dapat didiagonalkan.

dapat didiagonalkan?

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Persamaan karakteristik $(1-\lambda)^3 = 0$

Ma(1) = 3

Basis E_1: $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

Mg(1) = 2

Mg(1) = 2
Ma(1) = 3

B tidak dapat didiagonalkan

Apakah A dapat didiagonalkan?

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -3 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

PK:....
Nilai eigen: 5 dan 3
Ma(5) = 2
Ma(-3) = 2

basis E_5

$$\begin{array}{cc} \textbf{a.} & \textbf{b} \\ \left\{ \begin{bmatrix} -8 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \right. & \left. \begin{bmatrix} -16 \\ 4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \end{array}$$

Mg(5) = 2

basis E_{-3}

$$\begin{array}{cc} \textbf{u} & \textbf{v} \\ \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \right. & \left. \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \end{array}$$

Mg(-3) = 2

A dapat didiagonalkan

A dapat didiagonalkan?

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

PK: $(\lambda - 2)^2(\lambda - 3) = 0$

Basis E_2

$$\left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \right\}$$

Basis E_3

$$\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

A dapat didiagonalkan, bagaimana diagonalisasi A^k?

$$A = PD^{-1}P^{-1}$$

$$A^k = PD^kP^{-1}$$

A dapat didiagonalkan, bagaimana diagonalisasi A^{-1}?

$$A = PDP^{-1}$$

$$A^{-1} = PD^{-1}P^{-1}$$

Pengertian transformasi linier

Transformasi linier pada ruang Euclid

Komposisi transformasi linier

Kernel dan *range*

Inverse transformasi linier

Similaritas

Similaritas

Dua matriks similar

Definisi

Jika A dan B dua matriks berukuran nxn, A dikatakan similar dengan B jika terdapat matriks P yang mempunyai inverse sedemikian hingga $B = P^{-1}AP$

A dan B saling similar.

Contoh 17:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \quad P = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad A = PBP^{-1}$$

Contoh dua matriks similar

Matriks A dan D berikut ini saling similar.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Matriks diagonal

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}}_{P^{-1}} \underbrace{\begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{P} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}_{D}$$

A dapat didiagonalkan menjadi *D*, maka*A* similar dengan matriks diagonal *D*

Contoh : dua matriks similar

Matriks A dan B berikut ini similar

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Perhatikan bahwa det(A) = det(B) = -2; trace(A) =trace(B) = 5

Invarian similaritas

Dua matriks similar memiliki persamaan, antara lain determinannya sama.

Misalkan A dan B saling similar, maka terdapat matriks P sedemikian hingga $B = P^{-1}AP$

$$\begin{aligned}
\det(B) &= \det(P^{-1}AP) \\
&= \det(P^{-1})\det(A)\det(P) \\
&= \det(P^{-1})\det(P)\det(A) \\
&= \det(A)
\end{aligned}$$

Selain determinannya sama, dua matriks similar juga memiliki persamaan-persamaan lain.

Invarian similaritas

karakteristik	Penjelasan
Determinan	Det(A) = det($P^{-1}AP$)
Singularitas	A dan $P^{-1}AP$ sama-sama mempunyai inverse atau sama-sama tidak mempunyai inverse
Rank dan nulitas	Rank(A) = rank($P^{-1}AP$); Nulitas (A) = nilitas($P^{-1}AP$);
Trace	Trace(A) = trace($P^{-1}AP$)
PK	A dan $P^{-1}AP$ memiliki persamaan karakteristik sama
Nilai eigen	A dan $P^{-1}AP$ memiliki nilai-nilai eigen yang sama. (vektor-vektor eigennya bisa berlainan)

Diagonalisasi dan similaritas

A dan *B* similar bhb terdapat matriks yang mempunyai inverse P sedemikian hingga $B = P^{-1}AP$

Matriks *A* dikatakan dapat didiagonalisasi jika terdapat matriks *P* yangmempunyai invese sehingga $P^{-1}AP$ adalah matriks diagonal *D*;

A dapat didiagonalkan jika *A* similar dengan matriks diagonal

Latihan: Buktikan

- A dan B similar, $\det(A) = \det(B)$
- A dan B similar, A dan B sama-sama mempunyai/ tidak mempunyai inverse
- A similar dengan B, B similar dengan C, maka A similar dengan C

- Nilai dan vektor eigen
  - Ruang eigen
  - Diagonalisasi
    - Diagonalisasi ortogonal

7.4 Diagonalisasi ortogonal

Review

- Apakah setiap himpunan ortogonal bebas linear?
- Apakah setiap himpunan bebas linear ortogonal?

Diagonalisasi ortogonal

𝒯eorema 7.7:

Jika A_{nxn}, maka pernyataan berikut ekuivalen:

a. *A* merupakan matriks yang terdiagonalisasi oleh matriks ortogonal (*P* ortogonal)

b. Terdapat himpunan ortonormal yang terdiri atas *n* vektor eigen dari *A*

c. *A* simetris

Catatan: secara umum, matriks yang simetris dapat didiagonalkan.

Contoh 9:Diagonalisasi ortogonal

Karakteristik persamaan *A*:

$$\det(\lambda I - A) = \det\begin{bmatrix} \lambda-4 & -2 & -2 \\ -2 & \lambda-4 & -2 \\ -2 & -2 & \lambda-4 \end{bmatrix} = (\lambda-2)^2(\lambda-8) = 0$$

Nilai eigen: $\lambda_{1,2} = 2$ dan $\lambda_3 = 8$.

Tentukan ruang eigen dari masing-masing nilai eigen beserta basisnya.

Vektor- vektor $\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ dan $\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ membentuk basis $E_{\lambda = 2}$.

Terapkan Proses Gram-Schmidt pada $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ sehingga menghasilkan.

Himpunan vektor eigen ortonormal sebagai berikut: $\{\mathbf{v}_1 , \mathbf{v}_2\}$ dengan

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix} \text{ dan } \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \end{bmatrix}$$

Diagonalisasi ortogonal (lanjutan)

Ruang untuk $\lambda = 8$ memiliki basis $B = \{\ \mathbf{u}_3\ \} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

Terapkan normalisasi ke $\{\mathbf{u}_3\}$ sehingga menghasilkan:

$$B = \{\mathbf{v}_3\ \} = \left\{ \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{bmatrix} \right\}$$

Dengan $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, dan $\mathbf{v}_3$ sebagai kolom vektor, diperoleh: $P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$

yang mendiagonalisasi *A* secara ortogonal.

Prosedur diagonalisasi ortogonal

Berikut ini merupakan prosedur untuk mendiagonalisasi matriks simetris *A* secara ortogonal:

1. Untuk setiap nilai eigen dari *A*, tentukan basis untuk setiap ruangnya.
2. Terapkan proses Gram-Schmidt dan normalisasi pada masing masing basis tersebut untuk membentuk basis orthonormal.
3. Bentuk matrik *P* yang kolomnya adalah vektor yang membentuk basis orthonormal di langkah 2. Maka *P* akan mendiagonalkan *A* secara orthogonal

Diagonalisasi ortogonal

- Matriks A adalah simetris jika dan hanya jika dapat didiagonalkan oleh matriks ortogonal
- A simetriks jika dan hanya jika terdapat matriks ortogonal Q sedemikian hingga $Q^TAQ = D$ matriks diagonal
- A simetris bila dan hanya bila dapat didiagonalkan oleh matriks yang kolom-kolomnya merupakan basis ortonormal dari R^n

Ringkasan materi

Buatlah ringkasan materi yang baru saja kamu pelajari.

Periksalah hasil ringkasanmu, apakah sudah mencakup semua konsep kunci berikut ini?

- nilai eigen
- vektor eigen
- persamaan karakteristik
- ruang eigen
- multiplisitas geometri
- multiplisitas aljabar
- diagonalisasi
- diagonalisasi orthogonal
- Similaritas dan invarian

Post-test

1. Bagaimana menentukan nilai-nilai eigen matriks *A*?
2. Jika diberikan matriks *A* dan nilai eigen *k*, bagaimana menentukan ruang eigennya?
3. Apakah ruang eigen memuat hanya vektor eigen?
4. Dua matriks mempunyai persamaan karakteristik sama, apa kesimpulanmu? Apakah mereka memiliki ruang-ruang eigen yang sama?
5. Terdapat basis dari R^n yang terdiri atas vektor-vektor eigen dari *A*. Apa kesimpulanmu?
6. *A* dapat didiagonalkan secara ortogonal, apa kesimpulanmu?

SEMANGAAT...