2. Aljabar Matriks (Bagian 2)

MODUL E-LEARNING ALJABAR LINIER
FAKULTAS ILMU KOMPUTER, UNIVERSITAS INDONESIA

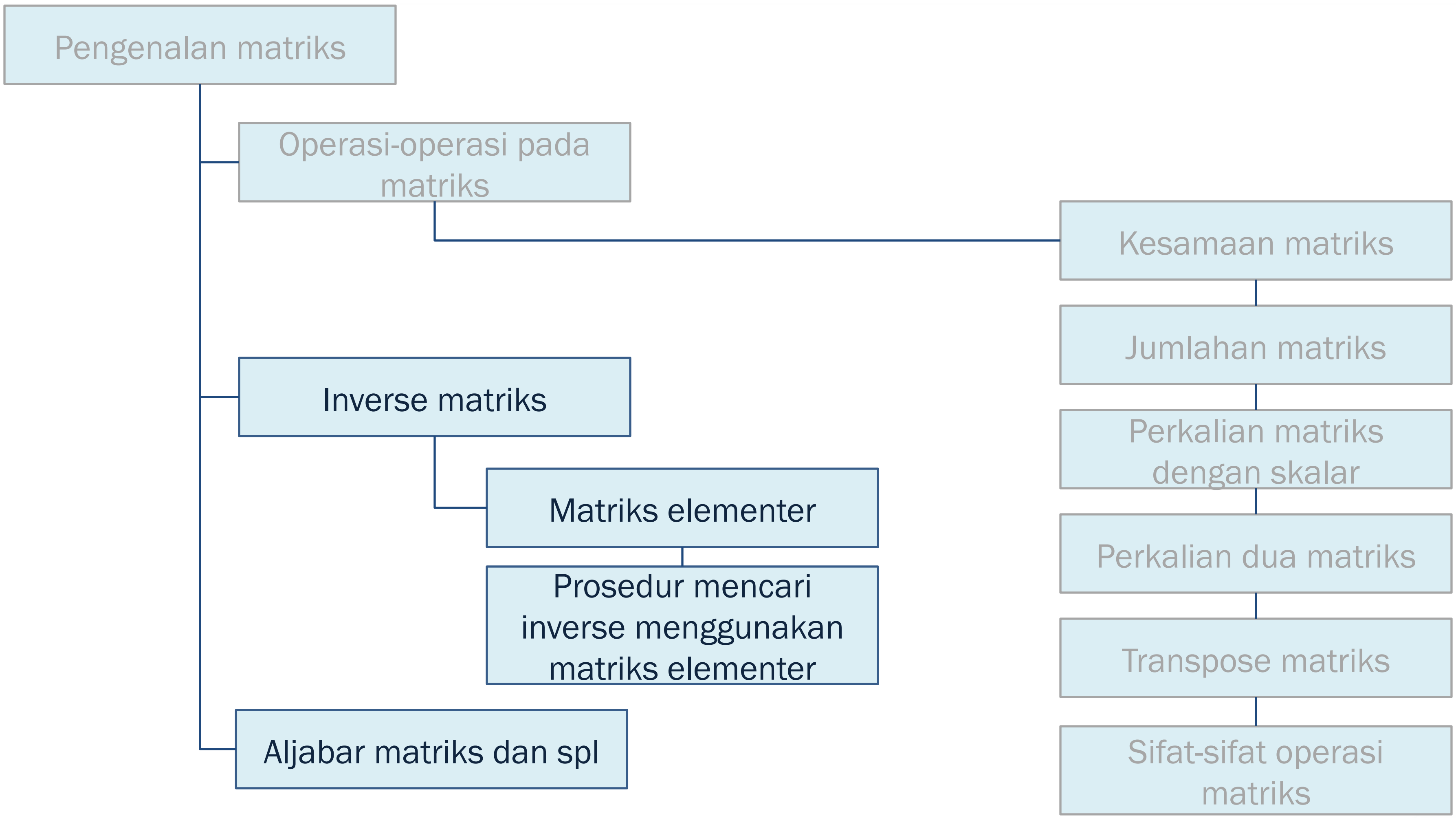
DR. Kasiyah Junus, MSc
Dr.Eng Lia Sadita

Tujuan pemelajaran

Bila diberikan matriks, Mahasiswa mempunyai kemampuan berikut.

1. melakukan operasi aritmetika dengan tepat
2. menentukan invers matriks dengan menggunakan operasi baris elementer secara efektif
3. menggunakan invers matriks untuk menentukan solusi spl dengan matriks koefisien persegi

Cakupan materi



Pre-test

Pre-test

- Jawablah pertanyaan berikut ini:

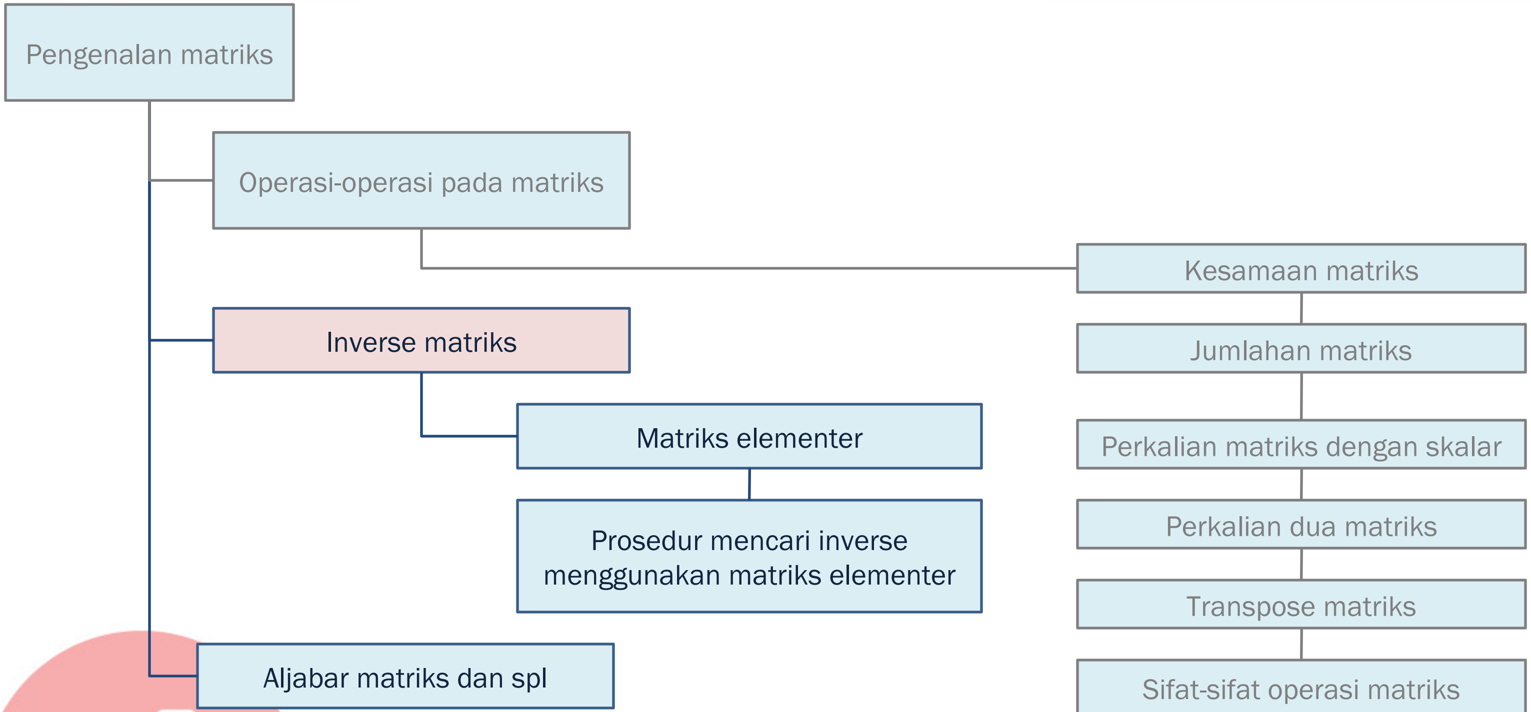
1. Tiga jenis operasi baris elementer adalah......
2. *A* dan *B* saling inverse, maka

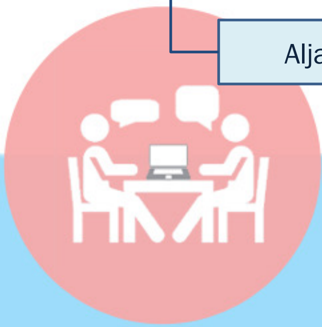
   $AB = BA = ...$

3. (B/S) matriks nol (persegi) mempunyai inverse
4. (B/S) *A* dan *B* mempunyai inverse,

   maka $A+B$ mempunyai inverse.

Diskusikan jawaban Anda dengan teman belajar.





2.3 Inverse matriks

Mengingat kembali: matriks identitas

Contoh 3: matriks identitas

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matriks identitas berordo 2 x 2

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matriks identitas berordo 3 x 3

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matriks identitas berordo 4 x 4

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Matriks identitas berordo *n* x *n*

Mengingat kembali: sifat-sifat matriks identitas

Sifat matriks identitas

a. Matriks identitas adalah elemen identitas terhadap perkalian matriks

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{I} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}}_{A}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{I} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}}_{A}$$

$$AI = IA = A$$

b. Jika $AB = A$, $BA = A$, maka $B = I$ (matriks identitas)

Inverse matriks

Definisi 2.14: Inverse matriks

Matriks persegi *A* disebut mempunyai inverse (balikan) jika terdapat matriks persegi *B* sedemikian hingga $AB = BA = I$. Inverse dari matriks ditulis A^{-1} . Pada definisi di atas, *A* adalah matriks yang mempunyai inverse. Inverse dari *A* adalah *B*: $A^{-1} = B$

Contoh 1:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}}_{A^{-1}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{I}$$

A adalah matriks yang memiliki invers

$$\underbrace{\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}}_{A^{-1}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{I}$$

Inverse matriks (lanjutan)

Masalah penting tentang matriks inverse:

1. Apakah setiap matriks persegi memiliki invers?
2. Jika mempunyai, bagaimana menentukannya?
3. Apakah inverse matriks (jika ada) tunggal?
4. Bagaimana menentukan solusi spl dengan menggunakan inverse matriks?

Contoh 2: inverse matriks

B adalah inverse dari matriks A, jika $AB = BA = I$ matriks identitas, ditulis $B = A^{-1}$

$$\boxed{A}\,\boxed{A^{-1}} = \boxed{A^{-1}}\,\boxed{A} = \boxed{I}$$

Contoh 2:

$$\underset{A}{\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}} \underset{A^{-1}}{\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}} = \underset{A^{-1}}{\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}} \underset{A}{\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}} = \underset{I}{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

$$\underset{B}{\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}} \underset{B^{-1}}{\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}} = \underset{B^{-1}}{\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}} \underset{B}{\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}} = \underset{I}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

Inverse matriks 2x2

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A \qquad A^{-1} \qquad = \qquad I$$

Bagaimana menentukan invers matriks A di atas?

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \left(A^{-1}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left(A^{-1}\right) = \begin{pmatrix} \frac{d}{ad-bc} & \frac{-b}{ad-bc} \\ \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{pmatrix} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Jika $ad - bc = 0$ maka A TIDAK mempunyai inverse.

Latihan 1: Inverse matriks 2x2

$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ Tentukan A^{-1} (jika ada).

Jawab:

A^{-1} dapat diperoleh dengan rumus berikut.

$$\left(A^{-1}\right) = \begin{pmatrix} \dfrac{d}{ad-bc} & \dfrac{-b}{ad-bc} \\ \dfrac{-c}{ad-bc} & \dfrac{a}{ad-bc} \end{pmatrix} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{maka} \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{2}{3.2-4.1} & \dfrac{-1}{3.2-4.1} \\ \dfrac{-4}{3.2-4.1} & \dfrac{3}{3.2-4.1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\dfrac{1}{2} \\ -2 & \dfrac{3}{2} \end{pmatrix}$$

Latihan 2

1. Kapan matriks $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ TIDAK mempunyai inverse?

Ketika ***ad-bc* = 0**

2. Tentukan inverse matriks berikut ini:

a. $\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

b. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

c. $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$

d. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

a. $\begin{pmatrix} \frac{2}{9} & -\frac{1}{9} \\ -\frac{1}{5} & \frac{5}{9} \end{pmatrix}$

b. tidak mempunyai inverse

c. tidak mempunyai inverse

d. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Matriks ortogonal

*D*efinisi 2.15: Matriks ortogonal

Matriks A ortogonal jika dan hanya jika $A^T = A^{-1}$

Contoh 3: matriks ortogonal

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad A^{-1}$$

$$B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix} \qquad B^{-1}$$

Sifat: Jika A adalah matriks orthogonal, maka $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$

Latihan 3

Isilah titik-titik di bawah ini

1. A simetri maka $A + A^T$= ....
2. $((A^T)^T)^T$ = ...
3. $(ABC)^T$ = ...
4. $((k+a)A)^T$ = ...
5. $(A + B + C)^T$ = ...

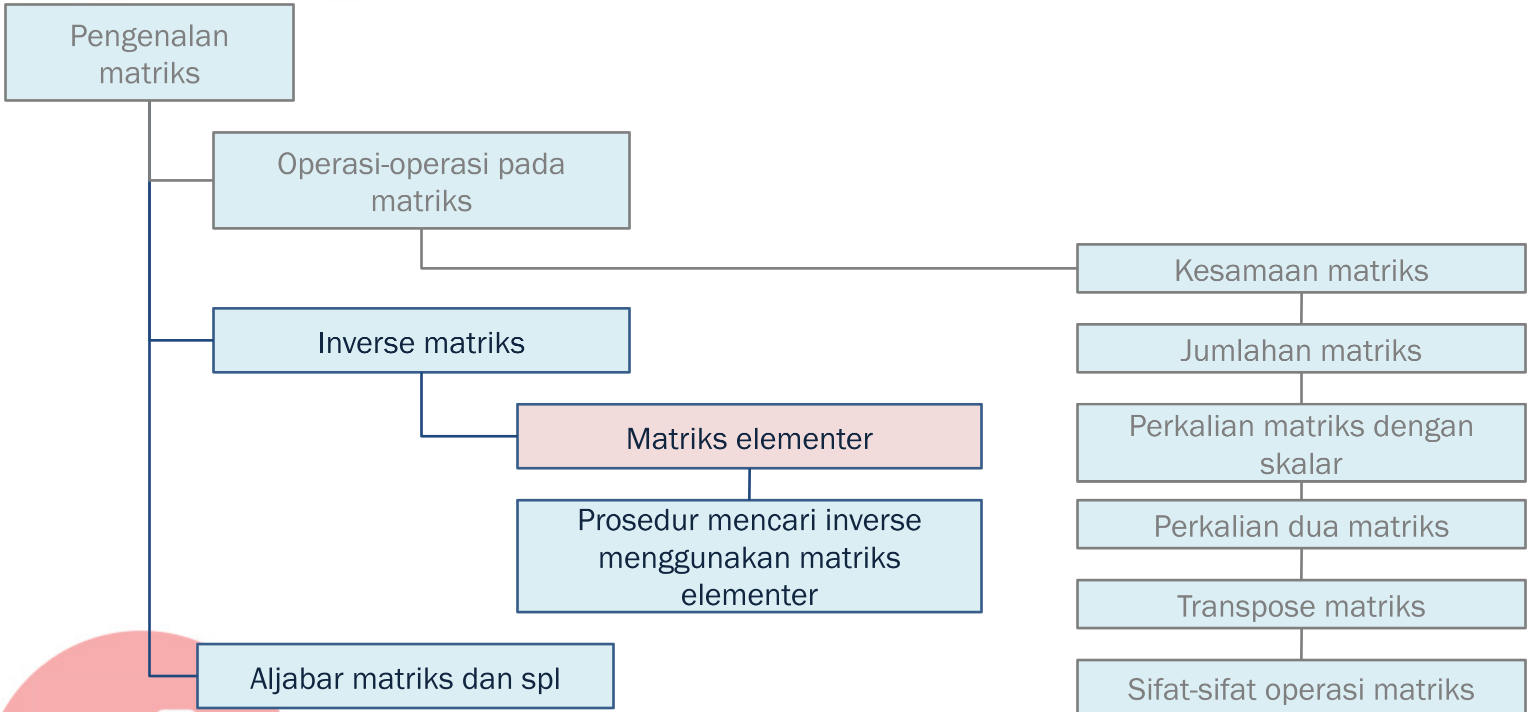
Kunci:

1. $2A$
2. A^T
3. $C^TB^TA^T$
4. $(k+a)A^T$
5. $A^T + B^T + C^T$

Sifat-sifat matriks invers

Jika $A_{n \times n}$ memiliki inverse, maka:

1. Inverse dari A, yaitu A^{-1} adalah **tunggal**
2. $(A^{-1})^{-1} = A$
3. Jika A memiliki inverse, maka A^n juga mempunyai inverse dan $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$ (n adalah bilangan bulat positif).
4. Jika k skalar tidak nol, maka $(kA)^{-1} = \dfrac{1}{k} A^{-1}$
5. $B_{m \times n}$ mempunyai inverse maka AB mempunyai inverse dan $\mathbf{(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}}$.



2.4 Matriks elementer

Aktifkan pengetahuan awal

1. Sebutkan 3 operasi baris elementer
2. Diberikan matriks identitas 3x3. Terapkan satu, dua dan tiga kali operasi baris elementer pada matriks identitas tersebut.
3. Berapa kali operasi baris elementer kamu terapkan untuk memperoleh *E* dari matriks identitas *I*?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Salah satu jawaban: **3** kali yaitu,
[1] kalikan brs kedua dengan 1/7,
[2] tiga kali tukar baris 3 dan 4,
[3] tambahkan baris pertama dengan -10/7 baris kedua,

4. Minimal berapa kali kamu menerapkan obe untuk memperoleh *E*?

tiga kali

Matriks elementer

Definisi 2.16:

Matriks elementer adalah matriks yang **dapat** diperoleh dari matriks identitas dengan melakukan tepat satu kali operasi baris elementer.

Operasi baris elementer pada matriks:

1. Mengalikan baris dengan kontanta tidak nol
2. Menukarkan posisi dua baris
3. Baris dijumlahkan dengan skalar kali baris yang lain

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 9 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

B_1 dan B_2 bukan matriks elementer, A_1 dan A_2 matriks elementer.

Contoh 4: matriks elementer

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftarrow 7 * R_2} E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

E_1 **dapat** diperoleh dari I dengan **satu kali** operasi baris elementer.
Jadi E_1 adalah **matriks elementer.**

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \leftrightarrow R_4} E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

E_2 **dapat** diperoleh dari I dengan **satu kali** operasi baris elementer.
Jadi E_2 adalah **matriks elementer.**

Contoh 5: bukan matriks elementer

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{minimal menerapkan } \mathbf{3\ kali} \text{ obe}} B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{minimal menerapkan } \mathbf{2\ kali} \text{ obe}} B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

B_1 **dapat** diperoleh dari I dengan menerapkan minimal **3 kali** operasi baris elementer.
B_2 **dapat** diperoleh dari I dengan menerapkan minimal **2 kali** operasi baris elementer.
Jadi B_1 dan B_2 **bukan** matriks elementer.

Contoh 6: matriks elementer

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftarrow 4 * R_2} E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$I \xrightarrow{R_3 \leftrightarrow R_2} E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$I \xrightarrow{R_1 \leftarrow 4R_2 + R_1} E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

E_1, E_2, E_3 **dapat** diperoleh dari I dengan **satu kali** operasi baris elementer.

Invers matriks elementer

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Matriks elementer yang diperoleh dari matriks identitas dengan menerapkan $R_2 \leftrightarrow R_3$

Invers matriks E_1 diperoleh dari I dengan menerapkan operasi baris elementer kebalikannya:

$$R_2 \leftrightarrow R_3$$

Jika E_1 diperoleh dari I dengan **menukar baris *ke-i* dan ke-*j***, maka $(E_1)^{-1}$ diperoleh dari I dengan **menukar baris ke-*j* dan ke-*i***. Jadi, $\boldsymbol{E_1 = (E_1)^{-1}}$.

$$(E_1)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{E_1} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{(E_1)^{-1}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{I}$$

Invers matriks elementer

$$E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matriks elementer E_2 diperoleh dati matriks identitas dengan menerapkan $R_2 \leftarrow 2R_2$

Invers matriks elementer diperoleh dari *I* dengan menerapkan operasi baris elementer kebalikannya: $R_2 \leftarrow \frac{1}{2} R_2$

Jika E_2 diperoleh dari *I* dengan **mengalikan baris ke-*i* dengan konstanta** tak nol *k*, maka $(E_2)^{-1}$ diperoleh dari *I* dengan **mengalikan baris *ke-i* dengan konstanta 1/*k*.**

$$(E_2)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \underset{E_2}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \underset{(E_2)^{-1}}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} = \underset{I}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

Invers matriks elementer

Matriks brikut diperoleh dari matrik identitas dengan menerapkan $R_1 \leftarrow R_1 + 2R_2$

$$E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Invers matriks elementer E_3 diperoleh dari I dengan menerapkan operasi baris elementer kebalikannya $R_1 \leftarrow R_1 - 2R_2$

Jika E_3 diperoleh dari I dengan **menjumlahkan baris ke-*i* dengan hasil kali baris *ke-j*** dengan konstanta tak nol k, maka $(E_3)^{-1}$ diperoleh dari I dengan **mengurangkan baris ke-*i* dengan *k* kali baris *ke-j*.**

$$(E_3)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{E_3} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{(E_3)^{-1}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{I}$$

Invers matriks elementer (lanjutan)

$$E_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xleftarrow{R_2 \leftarrow (1/4) * R_2} I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftarrow 4 * R_2} E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xleftarrow{R_3 \leftrightarrow R_2} I \xrightarrow{R_3 \leftrightarrow R_2} E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$E_3^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xleftarrow{R_1 \leftarrow -4R_2 + R_1} I \xrightarrow{R_1 \leftarrow 4R_2 + R_1} E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Diberikan matriks identitas I, kalikan baris kedua dengan 4, maka diperoleh matriks elementer E_1. Inversenya adalah matriks yang diperoleh dari I dengan mengalikan baris kedua dengan seperempat.

Invers matriks elementer (lanjutan)

$I \rightarrow E$	$I \rightarrow E^{-1}$
Mengalikan baris ke-*i* dengan konstanta tak nol *k*	Mengalikan baris ke-*i* dengan $\frac{1}{k}$
Menukar baris ke-*i* dengan baris ke-*j*	Menukar baris ke-*i* dengan baris ke-*j*
Baris ke-*i* ditambah *k* kali baris ke-*j*	Baris ke *i* dikurangi *k* kali baris ke *j*

Kesimpulan:

Setiap matriks elementer mempunyai inverse dan inverse matriks elementer adalah matriks elementer.

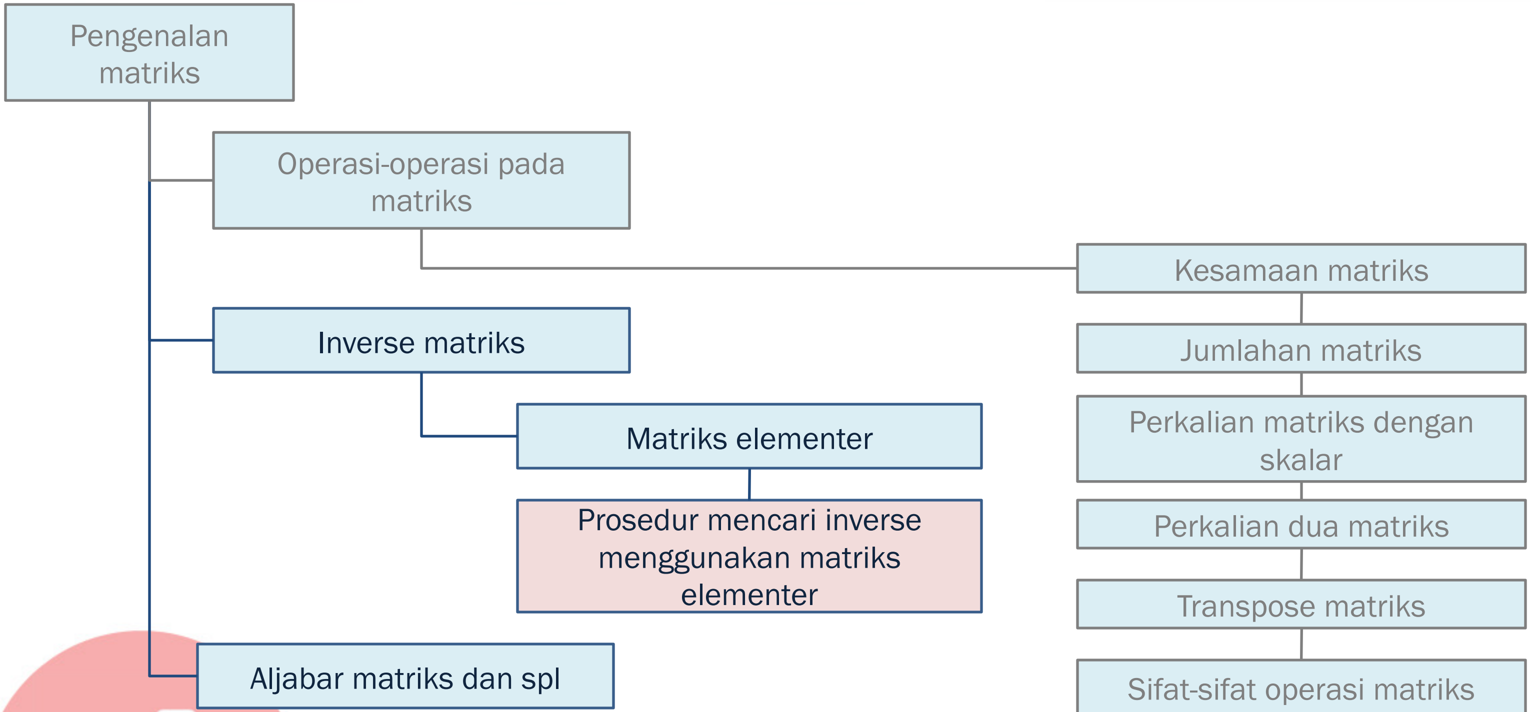
Latihan 4

Tentukan inverse matriks elementer berikut ini:

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

Bandingkan jawabanmu dengan jawaban temanmu.

Apa dugaanmu?



2.5 Prosedur mencari inverse menggunakan matriks elementer

Perkalian dengan matriks elementer

Mengalikan matriks A dari kanan dengan matriks elementer (***EA***) sama efeknya dengan **menerapkan operasi baris elementer** (yang sama dengan operasi baris elementer untuk mendapatkan E dari I) **pada *A*.**

$$\underset{I}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \xrightarrow{R_2 \leftarrow 4R_2} \underset{E}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

$$\underset{E}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \underset{A}{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 12 & 4 & 4 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underset{A}{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}} \xrightarrow{R_2 \leftarrow 4R_2} \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 12 & 4 & 4 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}}$$

Matriks elementer dan operasi baris elementer

Diterapkan obe pada matriks A

Hasilnya sama dengan EA

$$\underset{A}{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 6 & 9 & 0 \end{pmatrix}} \xrightarrow[R_1 \leftrightarrow R_3]{} \begin{pmatrix} 6 & 9 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 6 & 9 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 9 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$I \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_3} E \qquad A \qquad EA$$

$$\underset{A}{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 6 & 9 & 0 \end{pmatrix}} \xrightarrow[R_2 \leftarrow ½\, R_2]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 6 & 9 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 6 & 9 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 6 & 9 & 0 \end{pmatrix}$$

$$I \xrightarrow{R_2 \leftarrow \frac{1}{2} R_2} E \qquad A \qquad EA$$

$$\underset{A}{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 6 & 9 & 0 \end{pmatrix}} \xrightarrow[R_1 \leftarrow R_1 + 2R_2]{} \begin{pmatrix} 5 & 6 & 5 \\ 2 & 2 & 1 \\ 6 & 9 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 6 & 9 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 5 \\ 2 & 2 & 1 \\ 6 & 9 & 0 \end{pmatrix}$$

$$I \xrightarrow{R_1 \leftarrow R_1 + 2R_2} E \qquad A \qquad EA$$

Mengingat kembali:

Menerapkan operasi baris elementer pada matriks *A* sama dengan mengalikan *A* dari kanan dengan matriks elementer yang sesuai.

Bentuk eselon baris tereduksi dari matriks persegi ada dua kemungkinan: (1) matriks identitas atau (2) matriks dengan baris nol.

Matriks persegi yang mempunyai inverse dapat direduksi menjadi matriks identitas dengan serangkaian operasi baris elementer.

Kita akan menerapkan operasi baris elementer untuk menentukan inverse matriks.

Mencari inverse dengan operasi baris elementer

Matriks persegi yang mempunyai inverse dapat direduksi menjadi matriks identitas dengan serangkaian operasi baris elementer.

$$A \xrightarrow[E_s \ldots E_2 \;\; E_1 \; A]{obe_1 \;\; obe_2 \;\; \ldots\ldots \; obe_s} I$$

Setiap penerapan operasi baris elementer ke *i*, obe-*i* pada *A*, sama dengan mengalikan dengan E_i dari kanan dengan *A*.

$$\underbrace{E_s \, E_{s-1} \ldots E_2 \, E_1}_{A^{-1}} \, A = I$$

$$I \xrightarrow[E_s \ldots E_2 \;\; E_1 \; A]{obe_1 \;\; obe_2 \;\; \ldots\ldots \; obe_s} A^{-1}$$

Inverse matriks *A* dapat diperoleh dengan serangkaian operasi baris elementer pada *A*.

Mencari inverse dengan operasi baris elementer (lanjutan)

Prosedur: Menentukan A^{-1}

Diberikan matriks A_{nxn} yang mempunyai inverse

1. dibentuk matriks $[A \mid I]$
2. menerapkan operasi baris elementer pada matriks $[A \mid I]$ sedemikian hingga A tereduksi menjadi matriks identitas I, maka pada saat yang sama I berubah menjadi A^{-1}.

$$[A \mid I] \xrightarrow{\text{obe}_1\text{obe}_2\ldots\text{obe}_n} [I \mid A^{-1}]$$

Latihan 5

Tentukan invers dari matriks A berikut. $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

<u>Jawaban</u>

$$(A|I) = \left(\begin{array}{cc|cc} 4 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \leftarrow \frac{1}{4}R_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \leftarrow R_2 - 2R_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1 \leftarrow R_1 - \frac{1}{2}R_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 1 \end{array}\right)$$

I $\quad$ A^{-1}

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

Latihan 6

A. Jawablah BENAR atau SALAH

1. Perkalian matriks bersifat komutatif.

   Jawab: salah

2. Menerapkan operasi baris elementer pada *A* hasilnya sama dengan *EA*, dengan *E* matriks elementer yang sesuai dan diperoleh dari *I*.

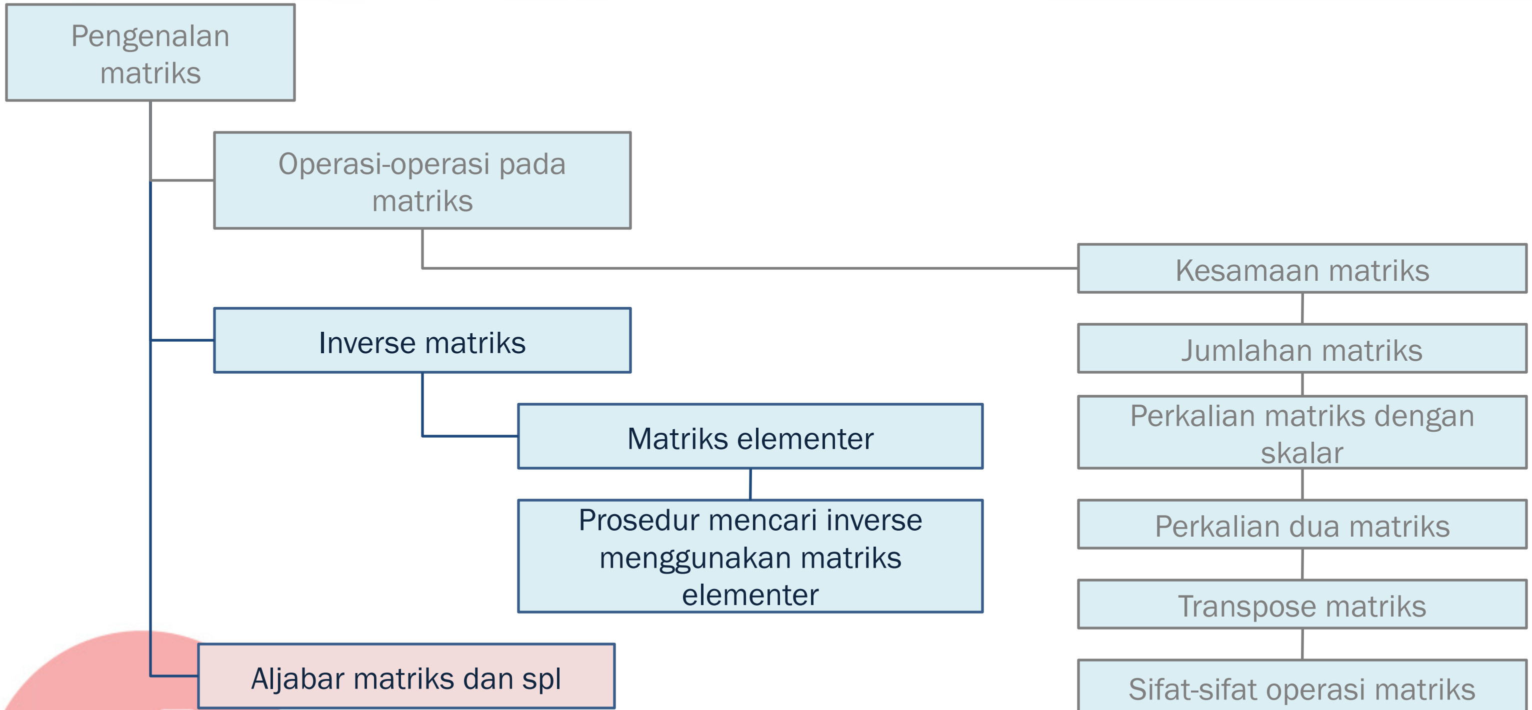
   Jawab: benar

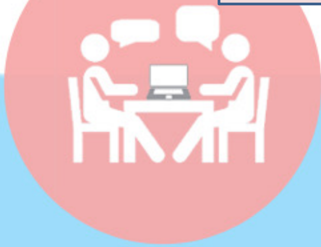
3. Setiap matriks elementer mempunyai inverse dan inversenya juga elementer.

   Jawab: benar

B. Pada prosedur apa saja operasi baris elementer digunakan?

1. Menyelesaikan sistem persamaan linier
2. Mencari inverse matriks (jika ada)





2.6 Aljabar matriks dan spl

Menyelesaikan spl dengan matriks invers

Teorema 2.1:

Jika matriks A memiliki invers, maka untuk setiap matriks **b** berukuran n x 1, spl $A\mathbf{x}$ = **b** memiliki tepat satu solusi, yang disebut $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$.

Bukti $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ jika A memiliki invers, maka terdefinisi

$$A\left(A^{-1}\mathbf{b}\right) = \mathbf{b}$$

$$\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$$

A^{-1} tunggal, maka spl $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ memiliki tepat satu solusi

$$AA^{-1}x_0 = A^{-1}\mathbf{b}$$

$$x_0 = A^{-1}\mathbf{b}$$

Latihan 7

1. Tentukan solusi spl berikut

$$4a + 2b = 18$$
$$2a + 2b = 14$$

<u>Jawaban</u>

Spl dinyatakan dalam bentuk matriks $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$

$$\underset{A}{\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}} \underset{\mathbf{x}}{\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}} = \underset{\mathbf{b}}{\begin{pmatrix} 18 \\ 14 \end{pmatrix}}$$

Menghitung A^{-1}

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

Menghitung solusi $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 18 \\ 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$a = 2$$
$$b = 5$$

Latihan 7 (lanjutan)

2. Selesaikan spl berikut ini

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 6$$
$$-x_2 + x_3 = 1$$
$$4x_1 + 2x_2 + x_3 = 4$$

$$\begin{pmatrix} 1.x_1 + 2.x_2 + 1.x_3 \\ 0.x_1 + -1.x_2 + 1.x_3 \\ 4.x_1 + 2.x_2 + 1.x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

<u>Petunjuk</u>:

- Tentukan inverse dari matriks koefisien
- Tentukan solusinya

Latihan 7 (lanjutan)

3. Diberikan spl $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, A matriks persegi. Apakah selalu dapat diselesaikan dengan menggunakan inverse matriks koefisien?

4. Jelaskan metode-metode penyelesaian spl yang Anda kuasai dengan baik? Metode mana yang paling baik menurut Anda?

Refleksi

1. Buatlah daftar konsep-konsep kunci dari modul ini. (Sebagai contoh: matriks persegi, jumlahan matriks-matriks, dsb)

2. Buatlah daftar permasalahan yang muncul pada materi yang diberikan dalam modul ini.

3. Berilah tanda pada daftar materi yang sulit kamu fahami dengan belajar mandiri. Sampaikah hal ini pada sesi tatap muka atau dalam forum diskusi *online.*

Konsep penting

Daftar konsep penting

- Matriks
- Matriks persegi, matriks segitiga, matriks nol, matriks identitas
- Operasi-operasi pada matriks (jumlahan, perkalian matriks dengan skalar, perkalian dua matriks, perpangkatan matriks)
- Kesamaan matriksMatriks transpose
- Matriks ortogonal
- Matriks simetri
- Sifat-sifat operasi matriks
- Invers matriks
- Sifat-sifat matriks invers
- Matriks elementer
- Invers matriks elementer
- Prosedur mencari invers matriks *A* dari matriks elementer
- Aljabar matriks dan spl

Ringkasan materi

Buatlah uraian singkat pada konsep penting berikut

- Matriks *A* dan *B* dikatakan saling inverse jika.....
- Sifat inverse matriks pada transpose dan perpangkatan.
- Matriks elementer
- Menentukan inverse matriks dengan operasi baris elementer.
- Menggunakan inverse matriks untuk mencari solusi spl

Post-test Modul

Post-test

1. Bagaimana memeriksa apakah dua matriks saling inverse?

2. Bagaimana menentukan inverse matriks dengan menggunakan obe?

3. Apakah semua spl dapat diselesaikan dengan mencari inverse matriks koefisien?

4. Jika $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ mempunyai solusi tunggal dan A persegi, apakah A pasti mempunyai inverse?

Analisis hasil *post-test*

Petunjuk untuk meninjau hasil tes

hasil	Saran
Dapat menjawab semua pertanyaan dengan yakin	Berbagilah dengan temanmu untuk membantu sekaligus memperdalam pemahamanmu
Dapat menjawab tetapi masih ragu	Baca kembali bagian yang masih belum mengerti. Berdiskusi dan klarifikasi pemahamanmu
Sebagian besar tidak dapat menjawab, atau menjawab dengan ragu-ragu	Baca ulang modul dan buku bacaan. Jika masih belum faham diskusikan atau tanyakan pada teman, asisten, atau dosen melalui diskusi online maupun secara tatap muka.

Selamat, Anda telah menyelesaikan Modul 2.
Bersiaplah untuk Modul 3 tentang Determinan.