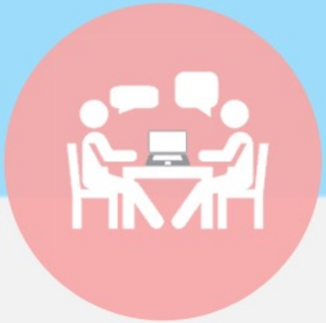


7. Nilai dan Vektor Eigen

MODUL E-LEARNING ALJABAR LINIER
FAKULTAS ILMU KOMPUTER, UNIVERSITAS INDONESIA

DR. Dra. Kasiyah Junus, MSc

Tujuan pembelajaran

Jika diberikan matriks persegi *A*, mahasiswa mampu

1. menentukan nilai-nilai eigen dan vektor-vektor eigen yang bersesuaian,
2. melakukan diagonalisasi terhadap matriks *A*,
3. mengidentifikasi sifat-sifat matriks berdasarkan nilai eigen,
4. menjelaskan ruang eigen sebagai ruang null suatu matriks.

Cakupan materi

- Nilai dan vektor eigen
  - Ruang eigen
  - Diagonalisasi
    - Diagonalisasi ortogonal

Pre-test

Pre-test

Jawablah pertanyaan berikut ini:

- Diberikan matriks A_{2x2} dan vektor-vektor **u**, **v**, dan **w**

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \qquad \vec{u} = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix} \qquad \vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} \qquad \vec{w} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}$$

- Hitunglah *A***u**, *A***w**, *A***v.**

- Manakah dari hasil kali tersebut yang hasilnya adalah vektor yang sejajar dengan vektor semula?

Jawaban soal *pre-test*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \qquad \vec{u} = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix} \qquad \vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} \qquad \vec{w} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$A\vec{u} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 24 \end{bmatrix} \neq k\vec{u} \text{ untuk setiap } k \in R$$

u dan *A***u** **TIDAK** sejajar

$$A\vec{v} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 8 \end{bmatrix} = 2.\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} = 2\vec{v}$$

v dan *A***v** sejajar

$$A\vec{w} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix} = 1\vec{w}$$

w dan *A***w** sejajar

- Nilai dan vektor eigen
  - Ruang eigen
  - Diagonalisasi
    - Similaritas
    - Matriks ortogonal
    - Diagonalisasi ortogonal

7.1 Nilai eigen dan vektor eigen

Review: konsep dasar

- **Matriks diagonal** adalah matriks persegi yang elemen selain diagonal utamanya 0 semua. Tidak ada syarat untuk elemen diagonal utama. Boleh nol atau tidak nol.

- Dua vektor **sejajar** jika yang satu merupakan **kelipatan skalar** yang lain. Contoh: vektor **x** sejajar dengan $\lambda\mathbf{x}$ (λ skalar).

- A persegi. Jika $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ memenuhi salah satu dari 2 kemungkinan: (1) mempunyai tepat satu solusi, yaitu solusi trivial saja (2) mempunyai tak hingga banyak solusi (solusi tidak trivial dan trivial).

- Det(A) = 0 jika dan hanya jika A^{-1} tidak ada jika dan hanya jika $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ mempunyai tak hingga banyak solusi.

Contoh: Perkalian vektor dengan matriks

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 24 \end{bmatrix} \neq k\begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix}$$

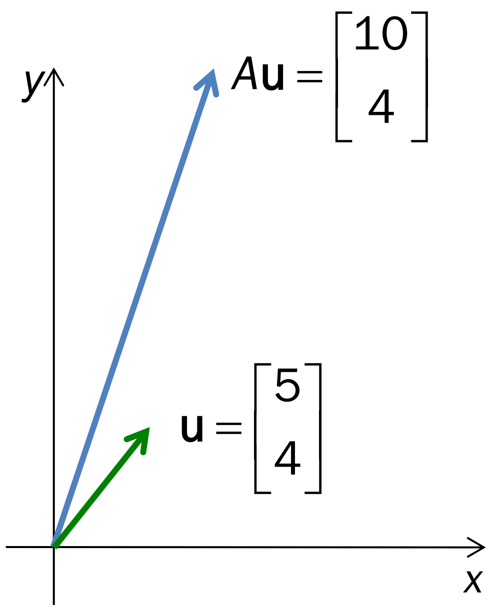
$A\mathbf{u} \neq k\mathbf{u}$

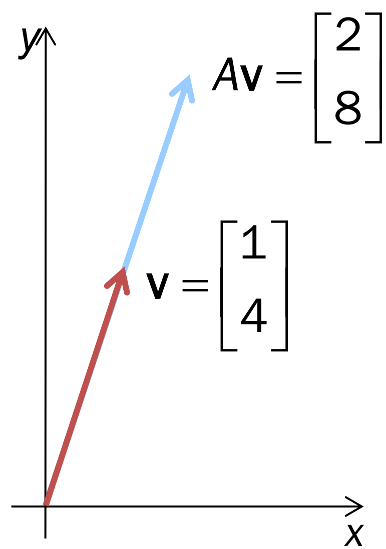
$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

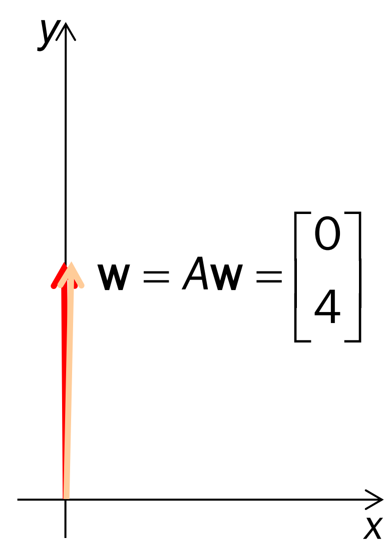
$A\mathbf{v} = 2\mathbf{v}$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix} = 1\begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$A\mathbf{w} = 1\mathbf{w}$





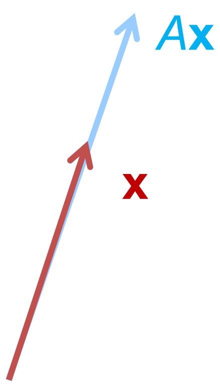


Perkalian vektor dengan matriks

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$$

Perkalian matriks dengan vektor dapat menghasilkan vekor yang sejajar dengan vektor semula

x dan *A***x** sejajar (searah atau berlawanan arah)

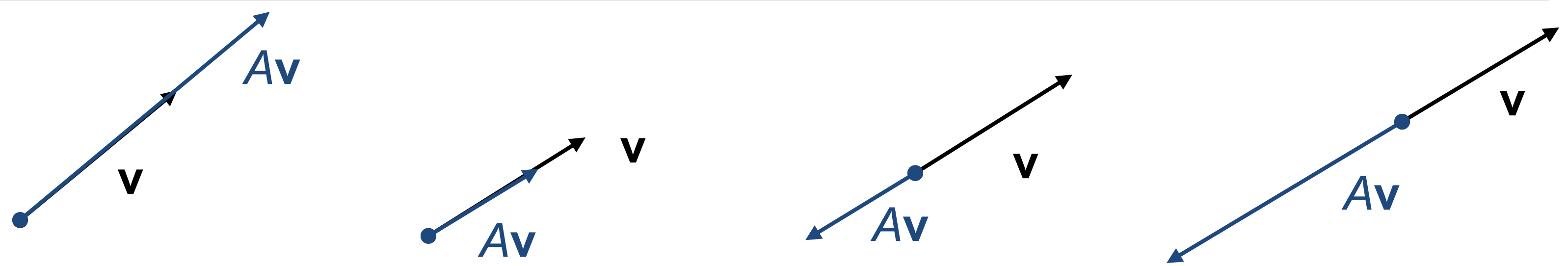


Definisi: nilai dan vektor eigen

Definisi 7.1: Nilai eigen dan vektor eigen

Diberikan matriks A_{nxn}, vektor tak nol $\mathbf{v}$ di R^n disebut vektor eigen dari A jika terdapat skalar sedemikian hingga $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$, λ disebut nilai eigen, $\mathbf{x}$ adalah vektor eigen dari A yang bersesuaian dengan λ.

(disyaratkan $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$)



(1) $\lambda \geq 1$ (2) $0 \leq \lambda \leq 1$ (3) $-1 \leq \lambda \leq 0$ (4) $\lambda \leq -1$

Latihan 1: vektor nol dan nilai eigen nol

a. Mengapa disyaratkan vektor eigen tidak boleh nol?

Jawab:

Misalkan vektor **v** = **0**, maka untuk semua matriks A_{nxn}, dan skalar λ berlaku $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$, maka tidak memberikan informasi yang berarti yang diberikan oleh persamaan tersebut.

b. Apakah nilai eigen bisa bernilai nol?

Jawab:

Nilai eigen bisa nol. Jika matriks memiliki nilai eigen nol maka matriks tersebut tidak mempunyi inverse.

Latihan 2: SPL homogen dengan $A_{nxn}\mathbf{x} = \mathbf{0}$

1. *A* adalah matriks *nxn* dan spl $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ mempunyai penyelesaian trivial saja. Apa kesimpulanmu tentang *A*?

   Jawaban:

   a. *A* mempunyai inverse.

   b. $\det(A) \neq 0$

2. *A* adalah matriks *nxn* dan SPL $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ mempunyai penyelesaian TIDAK trivial. Apa kesimpulanmu tentang *A* dan $\det(A)$?

   Jawaban:

   a. *A* tidak mempunyai inverse.

   b. $\det(A) = 0$

Masalah vektor eigen

Diberikan matriks persegi *A*,

$$\boxed{A}\,\boxed{\mathbf{x}} \quad \text{sejajar} \quad \boxed{\mathbf{x}}$$

Temukan semua vektor tidak nol **x** sedemikian hingga *A***x** kelipatan skalar **x** (atau *A***x** sejajar dengan **x**).

atau

Temukan semua vektor tak nol **x** sedemikian hingga $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ untuk suatu skalar λ

Masalah nilai eigen

Diberikan matriks persegi *A*.

$$\boxed{A}\,\mathbf{x} = \lambda\,\mathbf{x}$$

x vektor tak nol

Temukan semua skalar λ sedemikian hingga $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ untuk suatu vektor **tak nol x.**

atau

Temukan semua vektor **x** sedemikian hingga persamaan $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ mempunyai penyelesaian tidak trivial.

Pernyataan-pernyataan ekuivalen

Jika A matriks persegi nxn, maka kalimat-kalimat berikut ekuivalen

1. λ nilai eigen A
2. terdapat vektor tak nol $\mathbf{x}$ sedemikian hingga $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$
3. Spl $(A - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ mempuyai solusi tidak nol (non-trivial)
4. λ adalah penyelesaian persamaan $\det(A - \lambda I) = 0$

Mencari nilai eigen A sama dengan mencari penyelesaian persamaan $\det(\lambda I\text{-}A) = 0$

Persamaan karakteristik

Jika diuraikan, det(A - λI) merupakan suku banyak berderajat n dalam λ, $p(\lambda) = \lambda^n + c_{n-1}\lambda^{n-1} + c_{n-2}\lambda^{n-2} + \cdots + c_1\lambda + c_0$ **suku banyak karakteristik**

Persamaan $\det(A - \lambda I) = \lambda^n + c_{n-1}\lambda^{n-1} + c_{n-2}\lambda^{n-2} + \cdots + c_1\lambda + c_0 = 0$ disebut **persamaan karakteristik**

$$\boxed{A} - \boxed{\lambda I} = \boxed{A\text{-}\lambda I}$$

$$\det \boxed{A\text{-}\lambda I} = \boxed{\lambda^n + c_{n-1}\lambda^{n-1} + c_{n-2}\lambda^{n-2} + \cdots + c_1\lambda + c_0} = \boxed{0}$$

Persamaan dengan derajat n mempunyai paling banyak n penyelesaian, jadi matriks nxn paling banyak mempunyai n nilai eigen berbeda.

Latihan 3: mencari nilai-nilai eigen

Tentukan semua nilai eigen $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$

Jawab:

Pertama ditentukan persamaan karakteristik dari persamaan det(A- λ I) = 0

$$\det\begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 \\ 4 & 1-\lambda \end{pmatrix} = 0$$

Diperoleh persamaan karakteristik

$$(2-\lambda)(1-\lambda) - 0.4 = 0$$

$$(2-\lambda)(1-\lambda) = 0$$

Penyelesaian persamaan karakteristik tersebut merupakan nilai eigen dari A yaitu: $\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = 1$

Prosedur menentukan nilai eigen

Diberikan matriks persegi *A*, maka nilai-nilai eigen *A* dapat diperoleh sebagai berikut

1. Tentukan persamaan karakteristik det(A - λI) = 0

$$p(\lambda) = \lambda^n + c_{n-1}\lambda^{n-1} + c_{n-2}\lambda^{n-2} + \cdots + c_1\lambda + c_0 = 0$$

2. Ubahlah persamaan karakteristik ke dalam persamaan suku banyak karakteristik yang mudah diselesaikan.

3. Selesaikan persamaan di atas untuk memperoleh nilai-nilai eigen dari *A*.

Latihan 4: menentukan nilai eigen

Tentukan semua nilai eigen dari matriks persegi $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Jawab:

1. Tentukan persamaan karakteristik det(A - λI) = 0

$$\det(A-\lambda I) = \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 3-\lambda & 3 \\ -2 & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)^2(3-\lambda) - 6 + 2(3-\lambda) - 3(1-\lambda)$$

2. Ubahlah persamaan karakteristik ke dalam persamaan sukubanyak karakteristik:

$$(1-\lambda)^2(3-\lambda) - 6 + 2(3-\lambda) - 3(1-\lambda) = 0$$

3. Selesaikan persamaan di atas untuk memperoleh nilai-nilai eigen

$$(1-\lambda)^2(3-\lambda) - (3-\lambda) = 0$$

$$\lambda(\lambda-2)(3-\lambda) = 0$$

$$\lambda_1 = 0$$

$$\lambda_2 = 2$$

$$\lambda_3 = 3$$

Nilai eigen matriks diagonal

Diberikan matriks diagonal $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

Persamaan karakteristik: $\det(A - \lambda I) = (2-\lambda)(5-\lambda)(6-\lambda)(1-\lambda) = 0$

Nilai-nilai eigen 2, 6, 5, 1 (merupakan entri diagonal utama)

Nilai-nilai eigen matriks diagonal adalah elemen-elemen diagonal utamanya.

Latihan 5 : menentukan nilai eigen

1. Diberikan matriks segitiga atas berikut ini. Tentukan nilai-nilai eigennya.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

2. Tentukan semua nilai eigen matriks segitiga bawah berikut ini.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

3. Berapa nilai eigen matriks identitas?

4. Suku banyak karakteristik matriks *B* adalah $(\lambda\text{-}1)^3(\lambda\text{-}1)\ \lambda$, berapa ukuran matriks *B*?

Kunci jawaban Latihan 5

1. Nilai-nilai eigen matriks $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ adalah 1, 5, 6, 7

2. Nilai-nilai eigen matriks $A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ adalah $a_{11}, a_{22}, \ldots a_{nn}$

3. Nilai eigen matriks identitas adalah 1

4. Suku banyak karakteristik matriks *B* adalah $(\lambda-1)^3(\lambda-1)\,\lambda$, maka *B* berordo 5x5

Apakah λ nilai eigen *A*?

$$A=\begin{pmatrix}2&2&0\\0&4&0\\0&1&0\end{pmatrix}$$

Jika ditanyakan apakah 2, 4, 8 merupakan nilai eigen matriks *A*, maka dapat diselesaikan dengan melihat apakah 2, 4, 8 masing-masing penyelesaian persamaan karakteristik.

λ = 2, 4, 8. Jika det(A-λI) = 0, maka λ merupakan nilai eigen, kalau $\neq$ 0, maka λ bukan nilai eigen dari *A*.

$$\det(A-2I)=\det\begin{pmatrix}2-2&2&0\\0&4-2&0\\0&1&0-2\end{pmatrix}=0$$

2 adalah nilai eigen *A*

$$\det(A-4I)=\det\begin{pmatrix}2-4&2&0\\0&4-4&0\\0&1&0-4\end{pmatrix}=0$$

4 adalah nilai eigen *A*

$$\det(A-0I)=\det\begin{pmatrix}2-8&2&0\\0&4-8&0\\0&1&0-8\end{pmatrix}=-192$$

8 bukan nilai eigen *A*

Latihan 6 : menentukan vektor eigen

- Diberikan matriks *A* dan dua vektor tak nol **u, x, y** dan vektor nol **z.** Tentukan apakah **u, x, y, z** merupakan vektor eigen *A*.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{x} = \begin{pmatrix} -4 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{y} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \vec{z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Tentukan dan gambarkan vektor-vektor **u**, **x**, **y**, **z** dan *A***u**, *A***x**, *A***y**, *Az*

- [*Petunjuk*: **x** vektor eigen bersesuaian dengan nilai eigen 2,
  u vektor eigen dengan nilai eigen nol,
  y bukan vektor eigen,
  z vektor nol, jadi bukan vektor eigen.]

Latihan 7

Tentukan apakah pernyataan di bawah ini bernilai benar atau salah

1. Suatu matriks mungkin memiliki nilai eigen nol, dan vektor nol pasti bukan vektor eigen untuk matriks manapun.
   - Kunci jawaban: **BENAR**
   - Vektor nol bukan vektor eigen, nilai eigen bisa nol. Nanti akan diperlihatkan bahwa vektor dengan nilai eigen nol adalah matriks singular (tidak mempunyai inverse)

2. Vektor **x** dan **y** adalah vektor eigen *A*, maka **x** = **y**.
   - Kunci jawaban: **SALAH**

3. λ_1 dan λ_2 adalah nilai-nilai eigen *A*, maka $\det(A - \lambda_1 I) = \det(A - \lambda_2 I)$
   - Kunci jawaban: **BENAR**

Nilai eigen matriks pangkat

Teorema 7.1:

Jika n adalah bilangan bulat positif, λ nilai eigen matriks A, maka λ^n adalah nilai eigen A^n

- Diberikan sembarang matriks A dan diketahui bahwa λ adalah nilai eigennya. Maka terdapat vektor tak nol $\mathbf{x}$ sedemikian hingga

$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ kalikan kedua ruas dengan matriks A

$A.A\mathbf{x} = A\,\lambda\mathbf{x}$

$A^2\mathbf{x} = \lambda(A\mathbf{x})$ substitusi $A\mathbf{x}$ dengan $\lambda\mathbf{x}$

$A^2\mathbf{x} = \lambda^2\mathbf{x}$ jadi, λ^2 merupakan nilai eigen A^2

Nilai eigen matriks pangkat

- Nilai eigen dari A adalah 0, 2, dan 3.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Akan dihitung nilai eigen untuk $A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 5 \\ -6 & 12 & 12 \\ -4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, A^{13}, A^{20}

Nilai eigen untuk A^2 adalah: 0, 4, dan 9

Nilai eigen untuk A^{13} adalah: 0, 2^{13}, dan 3^{13}

Nilai eigen untuk A^{20} adalah 0, 2^{20}, dan 3^{20}

- Jika nilai eigen A diketahui, maka nilai A^n bisa langsung ditentukan tanpa menghitung A^n terlebih dahulu.

Nilai eigen matriks singular

- Misalkan $\lambda = 0$ merupakan nilai eigen dari A.

  Maka 0 merupakan penyelesaian persamaan karakteristik:

  dengan menganti λ dengan 0, diperoleh $c0 = 0$.

  Padahal $\det(A - \lambda I) = 0$, dengan $\lambda = 0$, maka $\det(A) = c0 = 0$.

  Karena $\det(A) = 0$ maka A tidak mempunyai inverse.

- Sebaliknya, $\det(A) = \det(A - \lambda I)$ dengan mengambil $\lambda = 0$.

  Jadi $\det(A) = c0$.

  Jika A tidak mempunyai inverse, maka $\det(A) = 0 = c0$.

  Sehingga $\lambda = 0$ merupakan salah satu penyelesaian persamaan karakteristik.

  $\lambda = 0$ merupakan salah satu nilai eigen dari A.

Teorema 7.2:

0 adalah nilai eigen A jika dan hanya jika A tidak mempunyai inverse.

Nilai eigen matriks transpose

$$\det(B) = \det(B^T)$$
$$(A-\lambda I)^T = (A^T-\lambda I)$$

Misalkan λ merupakan nilai eigen dari A, maka $\det(A-\lambda \mathrm{I}) = 0$.

Karena matriks dan transposenya mempunyai determinan yang sama,

maka $\det(A-\lambda \mathrm{I})^T = 0$. Karena $(A-\lambda \mathrm{I})^T = (A^T-\lambda \mathrm{I})$, maka $\det(A^T-\lambda \mathrm{I}) = 0$. Jadi, λ adalah nilai eigen dari A^T. Kesimpulan: A dan A^T mempunyai nilai eigen yang sama

*T*eorema 7.3:

A dan A^T mempuyai nilai eigen yang sama.

Latihan 8

Tentukan apakah pernyataan di bawah ini bernilai benar atau salah!

1. Jika $A\mathbf{x} - a\mathbf{x} = 0$ untuk skalar tak nol a, maka **x** adalah vektor eigen.
2. Jika a bukan nilai eigen A, maka spl $(aI - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ mempunyai tepat satu penyelesaian.
3. Setiap matriks identitas mempunyai satu nilai eigen 1
4. Matriks dengan nilai eigen 1 saja adalah matriks identitas.
5. Jika berikut ini adalah suku banyak karakteristik matriks *A*
   $p(\lambda) = (\lambda - 1)^2 (\lambda - 2)^3 (\lambda - 3)$ maka *A* berukuran 5x5
6. Jika berikut ini adalah suku banyak karakteristik matriks *A*
   $p(\lambda) = (\lambda - 1)^2 (\lambda - 2)^3 (\lambda - 3)$, maka A^2 tidak mempunyai inverse.

Kunci jawaban Latihan 8

Kunci:

1. **SALAH**, jika **x** vektor nol maka **x** bukan vektor eigen
2. BENAR
3. BENAR
4. SALAH
5. SALAH
6. SALAH

7.2 Ruang Eigen

- Nilai dan vektor eigen
  - Ruang eigen
  - Diagonalisasi
    - Similaritas
    - Matriks ortogonal
    - Diagonalisasi ortogonal

7.2 Ruang Eigen

Kelipatan skalar vektor eigen

- Diberikan *A*. Diketahui bahwa **x** adalah vektor eigen *A* yang bersesuaian dengan nilai eigen 2. Selidiki apakah 1/2**x**, 10**x**, 5**x** juga vektor-vektor eigen *A*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} -4 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \frac{1}{2}\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad 10\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -40 \\ -60 \\ 20 \end{pmatrix} \quad 5\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -20 \\ -30 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -4 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ -12 \\ 4 \end{pmatrix} = 2\mathbf{x}$$

$A\mathbf{x} = 2\ \mathbf{x}$

$$A(10\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -40 \\ -60 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -80 \\ -120 \\ 40 \end{pmatrix} = 2(10\mathbf{x})$$

$A(10\mathbf{x}) = 2\ (10\mathbf{x})$

$$A\ \mathbf{x} = \lambda\ \mathbf{x}$$

$$A\ (10)\ \mathbf{x} = \lambda\ (10)\ \mathbf{x}$$

Bagaimana jika skalarnya 0?

Kelipatan skalar vektor eigen (lanjutan)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} -4 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -4 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ -12 \\ 4 \end{pmatrix} = 2\mathbf{x}$$

$$A\mathbf{x} = 2\mathbf{x}$$

$$\frac{1}{2}\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A\left(\frac{1}{2}\mathbf{x}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix} = 2\left(\frac{1}{2}\mathbf{x}\right)$$

$$A\left(\frac{1}{2}\right)\mathbf{x} = 2\left(\frac{1}{2}\right)\mathbf{x}$$

A **x** = λ **x**

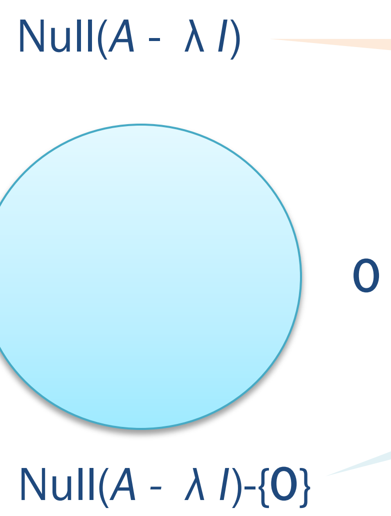
A (1/2) **x** = λ (1/2) **x**

Kelipatan skalar (tak nol) dari vektor eigen adalah vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen yang sama

Menentukan semua vektor eigen E_λ

- Diberikan vektor matriks A dan salah satu nilai eigennya, misalnya λ. Tentukan semua vektor eigen yang bersesuaian dengan λ.

- Vektor-vektor eigen A yang bersesuaian dengan $\lambda = 3$ dapat diperoleh dengan menyelesaikan spl $(A - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Vektor eigen adalah anggota Null($A - \lambda I$)

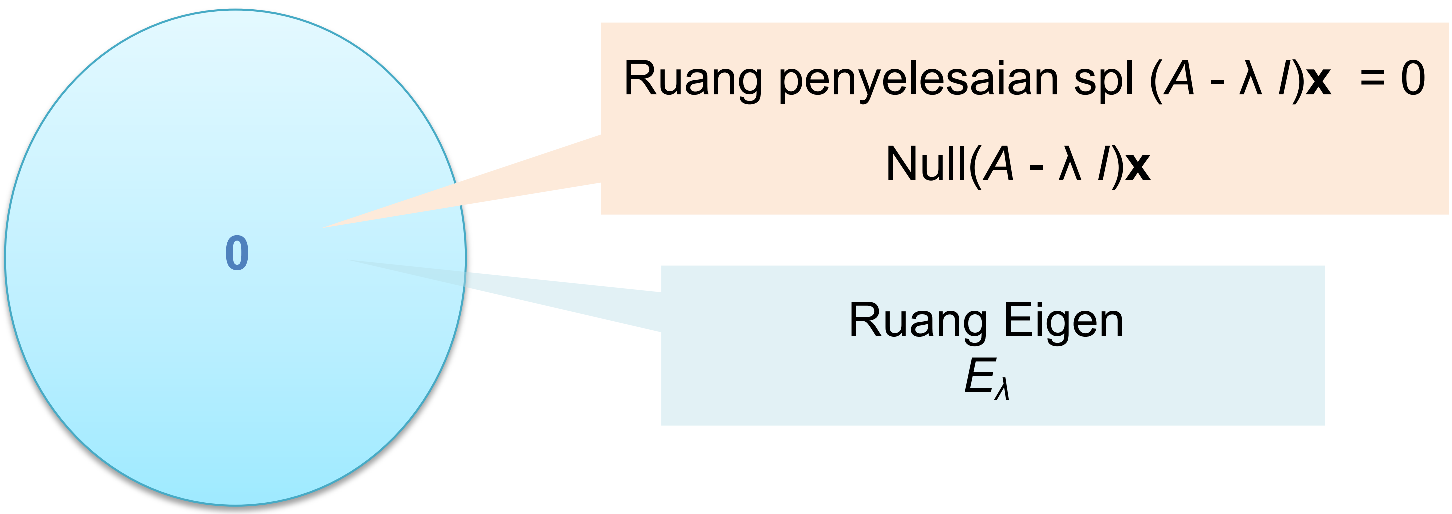


Himpunan semua penyelesaian spl $(A - \lambda I)\mathbf{x} = 0$

Himpunan semua vektor eigen bersesuaian dengan λ

Ruang eigen

- Ruang eigen A yang bersesuaian dengan λ terdiri atas semua vektor eigen yang bersesuaian dengan λ dan vektor nol



Null$(A - \lambda I)$ = $\boldsymbol{E}_\lambda$

- Menentukan E_λ sama dengan menentukan himpunan penyelesaian spl: $(A - \lambda I)\mathbf{x} = 0$

Prosedur menentukan ruang eigen

Diberikan A dan nilai eigen λ.

E_λ ruang eigen A yang bersesuaian dengan λ diperoleh sbb:

1. Dibentuk spl homogen $(A - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$
2. Selesaikan SPL homogen tersebut, diperoleh ruang Null$(A - \lambda I)$
3. Ruang eigen E_λ adalah ruang penyelesaian SPL homogen $(A - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$

$$E_\lambda = \mathrm{Null}(A - \lambda I)$$

Contoh: Menentukan ruang eigen E_λ

Diberikan matriks A dan salah satu nilai eigennya, yaitu λ = 3. Akan ditentukan semua vektor eigen yang bersesuaian dengan λ = 3.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad A - \lambda I = \begin{pmatrix} 1-3 & 1 & 1 \\ 0 & 3-3 & 3 \\ -2 & 1 & 1-3 \end{pmatrix}$$

Dibentuk spl $(A-3I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$

$$(A-3I)\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1-3 & 1 & 1 \\ 0 & 3-3 & 3 \\ -2 & 1 & 1-3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} -2x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ 3x_3 &= 0 \\ -2x_1 + x_2 - 2x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Penyelesaian umum: $\begin{aligned} x_1 &= a \\ x_2 &= 2a \\ x_3 &= 0 \end{aligned}$

Himpunan penyelesaian: $\left\{ a\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, a \in R \right\}$

Himpunan vektor eigen A bersesuaian dengan $\lambda = 3$: $\left\{ a\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, a \neq 0, a \in R \right\}$

Latihan 9: Menentukan ruang eigen

1. Apa hubungan ruang eigen E_λ dengan ruang Null(A - λ I)
2. Apakah setiap elemen ruang eigen merupakan vektor eigen?
3. Buatlah prosedur untuk menentukan basis ruang eigen matriks A yang bersesuaian dengan nilai eigen λ.

Jawaban:

1. E_λ = Null(A - λ I)
2. TIDAK, ada satu elemen ruang eigen yaitu **0** yang bukan vektor eigen. Salah satu syarat vektor eigen adalah vektor tersebut tidak boleh nol.
3. [*Petunjuk*: carilah basis dari Null(A - λI)]

Refleksi

- Tuliskan 5 hal baru yang Anda pelajari dari modul ini.
- Tuliskan konsep apa saja yang masih belum Anda kuasai dengan baik.

Materi berikutkan: Diagonalisasi Matriks

MODUL E-LEARNING ALJABAR LINIER

FAKULTAS ILMU KOMPUTER, UNIVERSITAS INDONESIA