LK 6

ALDEN LUTHFI

1. a. tidak, karena ada $\bar{u} \neq \bar{0}$ dimana $f(\bar{u},\bar{u}) = \bar{0}$.
contohnya $\bar{u} = (-2, -3, 1)$. melanggar syarat hasil kali dalam $\langle \bar{u}, \bar{u} \rangle = 0 \leftrightarrow \bar{u} = \bar{0}$

b. $\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle = 2u_1v_1 + 2u_2v_2 + 2u_3v_3$

i) $\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle = 2u_1v_1 + 2u_2v_2 + 2u_3v_3$
$= 2v_1u_1 + 2v_2u_2 + 2v_3u_3$
$= \langle \bar{v}, \bar{u} \rangle$

ii) $\langle k\bar{u}, \bar{v} \rangle = 2ku_1v_1 + 2ku_2v_2 + 2ku_3v_3$
$= k\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle$

iii) $\langle \bar{u}+\bar{w}, \bar{v} \rangle = 2(u_1+w_1)v_1 + 2(u_2+w_2)v_2 + 2(u_3+w_3)v_3$
$= 2u_1v_1 + 2w_1v_1 + 2u_2v_2 + 2w_2v_2 + 2u_3v_3 + 2w_3v_3$
$= \langle \bar{u}, \bar{v} \rangle + \langle \bar{w}, \bar{v} \rangle$

iv) $\langle \bar{u}, \bar{u} \rangle = 2u_1^2 + 2u_2^2 + 2u_3^2 \geq 0$
$\langle \bar{u}, \bar{u} \rangle = 0 \leftrightarrow u_1 = 0, u_2 = 0, u_3 = 0$

c. tidak karena melanggar aksioma positif

2. a. $\langle p(x), q(x) \rangle = p(x_0)q(x_0) + 2p(x_1)q(x_1) + 3p(x_2)q(x_2) + 2p(x_3)q(x$

No.

Date

(i) $\langle p(x), q(x) \rangle = \langle q(x), p(x) \rangle$

karena perkalian dan penjumlahan komutatif

(ii) $\langle p(x) + r(x), q(x) \rangle = \langle r(x), q(x) \rangle + \langle p(x), q(x) \rangle$

karena pentarian itu bersifat distributif

(iii) $\langle kp(x), q(x) \rangle = k \langle p(x), q(x) \rangle$

karena perkalian bersifat distributif

(iv) $\langle p(x), p(x) \rangle \geq 0$ dan $\langle p(x), p(x) \rangle = 0 \Leftrightarrow p(x) = 0$

karena kuadrat dari bilangan riil ≥ 0 dan $\sqrt{0} = 0$

keempat poin diatas terbukti karena definisi dari $\langle p(x), q(x) \rangle$ haya melibatkan penjumlahan dan perkalien bilangan riil

(b) tidak karena pasti akan melanggar aksioma positif

(c) ya

(i) $\langle p(x), q(x) \rangle = \int_0^2 2p(x)q(x)\,dx = \int_0^2 2q(x)p(x)\,dx$

$= \langle q(x), p(x) \rangle$

No.

Date

(ii) $\langle p(x)+q(x), r(x)\rangle = \int_0^2 2(p(x)+q(x))\,r(x)\,dx$

$= \langle p(x), q(x)\rangle + \langle p(x), q(x)\rangle$

(iii) $\langle kp(x), q(x)\rangle = \int_0^2 2k\,p(x)q(x)\,dx = k\int_0^2 2p(x)q(x)\,dx$

$= k\,\langle p(x), q(x)\rangle$

(iv) $\langle p(x), p(x)\rangle = \int_0^2 2\,p(x)\,dx \geq 0$

3. ya, (i) $\langle \bar{a}, \bar{b}\rangle = tr(A^TB) = tr((B^TA)^T)$

$tr(A) = tr(A^T)$

$= tr(B^TA)$

$= \langle \bar{b}, \bar{a}\rangle$

(ii) $\langle \bar{a}+\bar{b}, \bar{c}\rangle = tr((A+B)^TC)$

$= tr(A^TC) + tr(B^TC)$

$= \langle \bar{a}, \bar{c}\rangle + \langle \bar{b}, \bar{c}\rangle$

(iii) $\langle k\bar{a}, \bar{b}\rangle = tr(kA^TB)$

$= k\,tr(A^TB)$

$= k\,\langle \bar{a}, \bar{b}\rangle$

(iv) $\langle \bar{a}, \bar{a}\rangle \geq 0$ karena kuadrat dan bilangan riil adalah ≥ 0

4. $\langle p(x), q(x)\rangle = p(x_0)q(x_0) + p(x_1)q(x_1) - 2p(x_2)q(x_2)$

akan melanggar aksioma positif

5. a. $\|\bar{u}\| = \sqrt{3u_1^2 + 4u_2^2 + 2u_3^2} = \sqrt{\langle \bar{u}, \bar{u} \rangle}$

b. $d(\bar{u}, \bar{v}) = \|\bar{u} - \bar{v}\| = \sqrt{\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle}$

c. $\cos(\alpha) = \dfrac{\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle}{\|\bar{u}\| \, \|\bar{v}\|} = \dfrac{\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle}{\langle \bar{u}, \bar{u} \rangle \langle \bar{v}, \bar{v} \rangle}$

6. a. $\langle f(x), g(x) \rangle = \int_0^2 f(x)\, g(x)$

dengan pembuktian dan alasan sama seperti no 2, hal ini dikarenakan p(x) dan q(x) di no 2 merupakan bagian dari $C_{[1,2]}$

b. $f(x) = e^x$

$$\|f(x)\| = \sqrt{\int_0^2 e^{2x}\, dx}$$
$$= \sqrt{\frac{e^4 - 1}{2}}$$

c. $f(x) = e^x$, $g(x) = 2e^x$

$$\|f(x) - g(x)\| = \sqrt{\int_0^2 (e^x - 2e^x)^2\, dx}$$
$$= \sqrt{\int_0^2 e^{2x}\, dx}$$
$$= \sqrt{1 - e^2} \cdot \frac{e}{\sqrt{2}}$$

No.

Date

(d) $f(x) = 1 \qquad g(x) = 2x - 3$

$\langle f(x), g(x) \rangle = \int_0^2 2x - 3 \, dx = 0$

7\. (a) memiliki HKD yang bernilai 0

(b) $\bar{u} = (1, 0, 1)$

$\bar{v} = (0, 1, 0)$

$\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle = u_1 v_1 + u_2 v_2 + 2u_3 v_3$

$= \bar{0}$

(c) $\langle p(x), q(x) \rangle = p(x_0) q(x_0) + p(x_1) q(x_1) + p(x_3) q(x_3)$

$+ p(x_4) q(x_4)$

jika $p(x) = 2x^2 - x + 2$

maka $q(x) = x^3$ dan $r(x) = x^2 + 4x + 1$

ortogonal dgn $p(x)$ karena $\langle p(x), q(x) \rangle = 0$

dan $\langle p(x), r(x) \rangle = 0$

(d) ya karena untuk semua fungsi HKD

$\langle \bar{0}, \bar{0} \rangle = 0$

(e) $\bar{0}$ sejajar dengan dirinya sendiri karena

$\bar{0}$ merupakan kelipatan dari $\bar{1}$

No.

Date

8 (a) himpunan tidak ortogonal karena

$\langle A, B \rangle = -4 \neq 0$

8 (b) himpunan tidak ortogonal

karena $\langle \vec{p_1}, \vec{p_2} \rangle = 4 \neq 0$

9 (a) W_1 berisi semua vektor yang ortogonal dengan W_2 dinotasikan $W_2 = W_1^{\perp}$

(b) tidak karena ~~(...)~~ $(1,3,3) \notin W_1$ dan W_2 ~~...~~ $\ni (0,0,0)$ tapi keduanya saling ortogonal sehingga tidak semua vektor yang ortogonal dengan W_2 ada di W_1

(c) {semua vektor pada sumbu-x} selalu ortogonal dengan {semua vektor pada sumbu-y} baik secara aljabar maupun geometris

(d) $\langle p(x), q(x) \rangle = p(x_0)q(x_0) + p(x_1)q(x_1) + p(x_2)q(x_2) + p(x_3)q(x_3)$

maka $\{ax^2 + bx \mid a, b \in R\}$ dan $\{ax^3 + b \mid a, b \in R\}$ ortogonal komplemen karena semua pasangan vektornya saling ~~kom~~ ortogonal

No.

Date

(e) ortogonal dengan $\{(a,b,0) \mid a,b \in R\}$

(10) (a) $W^{\perp}$ adalah himpunan semua vektor di V yang ortogonal terhadap W

(b) $W^{\perp} \cap W = \{0\}$

(c) $V^{\perp} = \{0\}$

(d) $(V^{\perp})^{\perp} = V$

(e) tidak karena bisa saja ada $\bar{u}$ yang tidak di W namun tidak ortogonal dengan W sehingga $W \cup W^{\perp} \neq V$

(11) (a) semua basis pada basis ortonormal harus memiliki norm 1

(b) A bukan basis ortonormal karena norm elemen ketiga $\neq 1$

B —— " —— ~~norm elemen~~

C —— " —— ~~norm 2 elemen~~

$\langle (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}), (0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) \rangle \neq 0$

$\langle (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0), (1,0,0) \rangle \neq 0$

No.

Date

(c) Basis ortonormal karena semua syarat basis ortonormal terpenuhi

(12) (a) memiliki 1 atau tak hingga solusi

(b) $A^T A \bar{x} = A^T \bar{b}$ disebut persamaan normal dari $A\bar{x} = \bar{b}$

(c) Solusi kuadrat terkecil dari $A\bar{x} = \bar{b}$

(13) $f(x) = ax^2 + bx + C$

dari keempat titik diperoleh

$$\left.\begin{array}{l} a+b+c=2 \\ a+b+c=6 \end{array}\right\} \text{ tidak konsisten}$$

Solusi minimum E yaitu solusi $A^T A\bar{x} = A^T\bar{b}$

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix} \bar{x} = \begin{bmatrix} 8 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix}$$

diperoleh $a=1$, $b=2$, $c=1$

maka $f'(x) = x^2+2x+1$

(14) (a) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \bar{x} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 \\ -2 \\ 6 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} \bar{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 8 \end{bmatrix}$$

No.

Date

(b) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 2 \\ -3 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 3 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & -1 \end{bmatrix} \bar{x} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \\ -3 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 26 & 8 & 7 \\ 8 & 14 & -9 \\ -1 & -13 & 12 \end{bmatrix} \bar{x} = \begin{bmatrix} -1 \\ 7 \\ 8 \end{bmatrix}$$

(c) $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & \text{[illegible]} & -2 \end{bmatrix} \bar{x} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 12 & 4 & -6 \\ 4 & 7 & -6 \\ -6 & -6 & 9 \end{bmatrix} \bar{x} = \begin{bmatrix} 8 \\ 14 \\ -8 \end{bmatrix}$$

(3) Benar / Salah

1. Salah
2. Salah
3. Benar
4. Benar
5. Salah
6. Benar
7. Benar
8. Salah

Alasan

1. karena keortogonalah ditentukan dari fungsi hasil kali dalam, tanpa didefinisikan maka pernyataan tidak dapat dipastikan

2. karena ada $\bar{u}$ (misal $q(x) = 1$) yang ortogonal dengan W namun tidak di $W^{\perp}$

3. $\langle \bar{u}, \bar{0} \rangle = \bar{0}$ jika dan hanya jika $\bar{u} = \bar{0}$

4. karena semua vektor pada S bukan merupakan hasil kombinasi linear vektor lain

5. salah, counter example

$\bar{u} = (0,0,1)$ $\quad \bar{u} \perp \bar{v}$

$\bar{v} = (0,1,0)$ $\quad \bar{u} \perp \bar{w}$

$\bar{w} = (1,1,0)$ $\quad \bar{v} \not\perp \bar{w}$

6. ya karena setiap baris di A bebas linear dan satu-satunya vektor yang ortogonal dengan himpunan baris A adalah $\bar{0}$

(a) $A^T A \bar{x} = A^T b$ selalu konsisten karena pasti ada satu vektor yang membuat $A^T A \bar{x} = A^T \bar{b}$

(b) $A^T A$ yang memiliki invers karena A belum tentu matriks persegi

(c) Refleksi

Ruang Hasil Kali Dalam

4 aksioma
1. Simetris
2. Homogen
3. Aditif
4. Positif

Produk
1. panjang (norm) vektor
2. jarak 2 vektor
3. sudut 2 vektor
4. ortogonalitas

LSS
- teorema konsisten
- penyelesaian yang paling mendekati