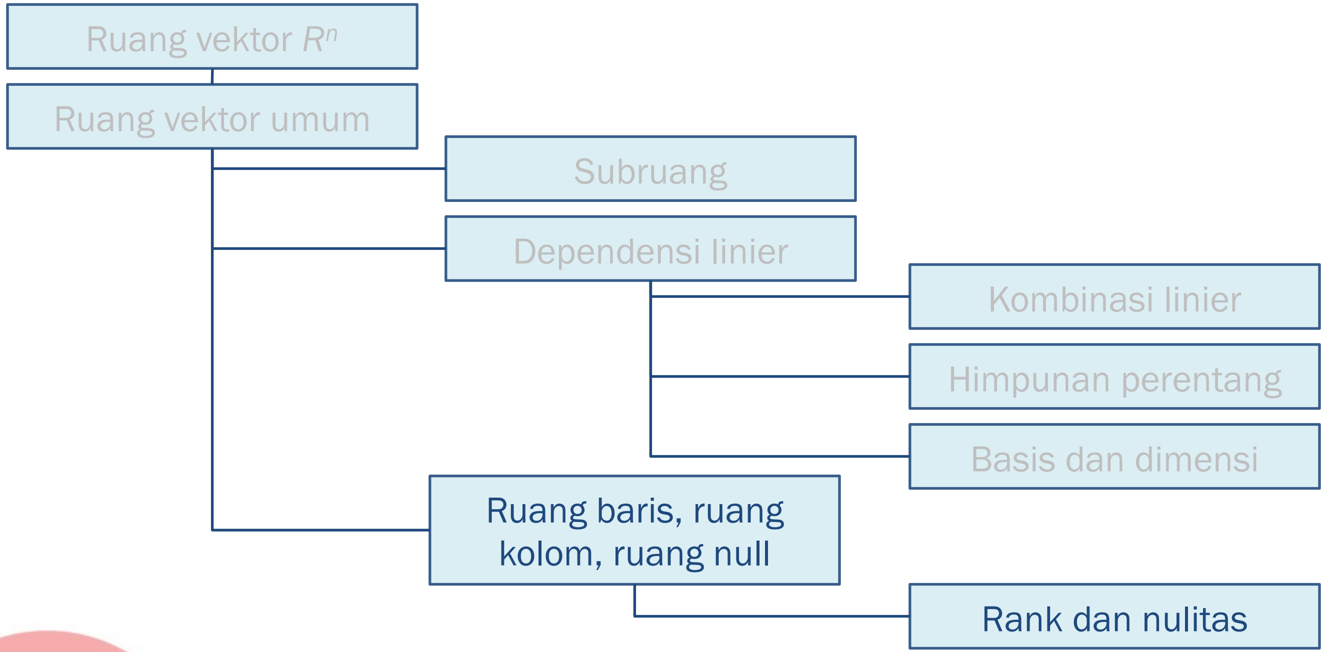


MODUL E-LEARNING ALJABAR LINIER
FAKULTAS ILMU KOMPUTER, UNIVERSITAS INDONESIA

5.6 Ruang baris, ruang kolom, ruang nul

Review: Bebas Linear

Antara dua vektor:

a dan **b** bebas linear $\Leftrightarrow k_1\,\mathbf{a} + k_2\,\mathbf{b} = \mathbf{0}$ mempunyai tepat satu solusi trivial $k_1 = k_2 = 0$.

Himpunan:

$S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r\}$ bebas linear $\Leftrightarrow k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + \ldots + k_r\mathbf{v}_r = \mathbf{0}$ mempunyai tepat satu solusi trivial $k_1 = k_2 = \ldots = k_r = 0$

S bisa tdd satu, dua, atau lebih anggota

{x} bebas/ bergantung linear?

Contoh

a. { (1, 1) }

b. { x^2}

c. {(0, 0, 0)}

d. {0} $\subseteq R$

Bagaimana solusi $k\mathbf{v} = \mathbf{0}$

2 kasus

$\bar{v} = \bar{0}$

$\bar{v} \neq \bar{0}$

{**v**} bebas/ bergantung linear?

Kasus 1: **v** $\neq$ **0**

Persamaan $k\mathbf{x} = \mathbf{0}$ dipenuhi hanya apabila $k = 0$.

Maka: {**v**} bebas linear

(ingat definisi himp bebas linear di slide 2)

$\{\mathbf{v}\}$ bebas/ bergantung linear?

Kasus 1: $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$

Persamaan $k\mathbf{x} = \mathbf{0}$ dipenuhi hanya apabila $k = 0$.

Maka: $\{\mathbf{v}\}$ bebas linear

Kasus 2: $\mathbf{v} = \mathbf{0}$,

Persamaan $k\mathbf{0} = \mathbf{0}$ dipenuhi misalnya untuk $k = 2$ (solusi tidak trivial). Jadi $\{\mathbf{0}\}$ bergantung linear.

$\{\mathbf{v}\}$ bebas linear jika dan hanya jika $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$

Dimensi {0}

Didefinisikan dim({**0**}) adalah 0

Ruang vektor {**0**} tidak mempunyai basis

<u>B/S</u>: Basis {**0**} adalah ∅ (himp kosong)

Jawab: Salah

∅ tidak merentang ruang vektor

Span({ }) = { }

Dimensi {0}

$\{\mathbf{0}\} = \text{span}(\{\mathbf{0}\})$

$\{\mathbf{0}\}$ bergantung linear

$\{\mathbf{0}\}$ bukan basis dari ruang vektor $\{\mathbf{0}\}$

$\{\mathbf{0}\}$ tidak mempunyai basis

Didefinisikan: $\dim(\{\mathbf{0}\}) = 0$

Row(A), Coll(A), Null(A), Null(A^T)

MODUL E-LEARNING ALJABAR LINIER
FAKULTAS ILMU KOMPUTER, UNIVERSITAS INDONESIA

Tujuan pembelajaran

Mahasiswa mampu

- mengonstruksi
    1. ruang baris
    2. ruang kolom dan
    3. ruang null

  dari suatu matriks
- menentukan basis ruang baris, kolom dan null
- menentukan rank dan nulitas matriks

FGD: sebagian menunjukkan CT tinggi

$$A \square \begin{bmatrix} 1 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Dipandang sebagai:

(1, 10, 0, 0, 0, 1)

(1, 10, 0) dan (0, 0, 1) (kumpulan dua vektor baris)

(1, 0), (10, 0), (0, 1) (kumpulan 3 vektor kolom)

$$2 - 3x \square 8x^2 \square x^4$$

Dipandang sebagai:

(2, -3, 8, 0, 4)

Matriks

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Pada pembahasan ruang vektor: *A* sebagai satu entitas vektor dalam ruang M^{2x3}.
- Pada pembahasan ruang baris, kolom, dan null: *A* terdiri **tiga vektor kolom** dan **dua vektor baris**

Review: Span(S)

$$A \; \square \begin{bmatrix} 1 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- S = himpunan baris-baris A

  = {(1, 10, 0), (0, 0, 1)} subset R^3

- T = himpunan kolom-kolom A

  = { (1, 0), (10, 0), (0, 1) }

  - Span(S) = himpunan semua kombinasi linear vektor-vektor di S

    = Row(A) = {(a, 10a, b) | a, b bil real}
  - Span(T) = ...
  - Himpunan semua solusi $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ = ...

Ruang baris, ruang kolom, ruang null

𝒟efinisi: A tdd baris-baris $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_n.$

kolom-kolom $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_m$

- Ruang baris A: **Row(A)** = Span($\{\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_n\}$)
- Ruang kolom A: **Coll(A)** = Span ($\{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_m\}$)
- Ruang Null A: **Null(A)** = himp semua penyelesaian $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Coll(A), Row(A), Null(A)

$$A \square \begin{bmatrix} 1 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Coll(A) =
- Row(A) =
- Null(A) = $\rightarrow$ Subruang R^3

$A\bar{x} = \bar{0} \rightarrow 3$ unknown

$$A^T \square \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 10 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Coll(A^T) =
- Row(A^T) =
- Null(A^T) = $\rightarrow$ subruang R^2

$A^T\bar{x} = \bar{0} \rightarrow 2$ unknown

Subruang yang dibentuk dari *A*

$$A \square \begin{bmatrix} 1 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$

$\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3$

Coll(A)
Row(A^T)
Subruang R^2

Row(A)
Coll(A^T)
subruang R^3

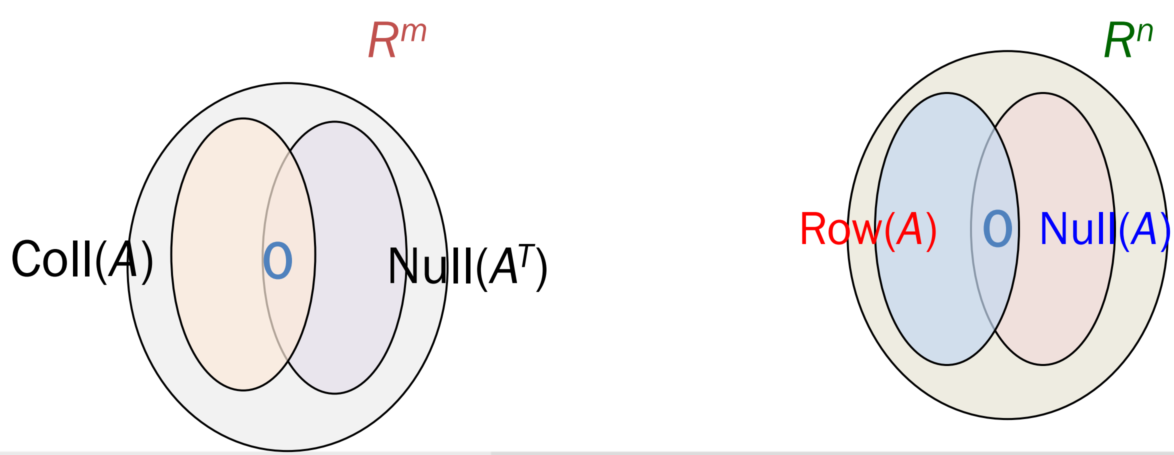
Null(A)
Subruang R^3

Null(A^T)
Subruang R^2

Ruang baris, kolom dan nul : Row(A), Coll(A), Null(A), Null(A^T)

$$A \;\square \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Coll(A) = Row(A^T)   Row(A) = Coll(A^T)   Null(A)   Null(A^T)



Tentukan Row(A) dan Coll(A)

- $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
- $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
- $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Row(A), Coll(A), Null(A): A mempunyai inverse

A^{-1} ada

- A $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$Col(A) = Row(A) = R^3$

B^{-1} ada

- B $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$Coll(B) = Row(B) = R^3$

- $\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$

A mempunyai inverse

Jika A_{nxn} mempunyai inverse maka

- Row(A) = Coll(A) = R^n

  Dimensi Row(A) = dimensi Coll(A) = n

  Rank(A) = n

- Null(A) = {**0**}

  Dimensi Null(A) = 0

  Nulitas(A) = 0

Basis Ruang Baris, Kolom, Null

Tentukan ruang baris Row(A_i)

$$A_1 \square \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad A_2 \square \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad A_3 \square \begin{bmatrix} 1 & 10 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad A_4 \square \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Tentukan ruang Null

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 10 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad A_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Contoh (lanj):

$$A_1 \square \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad A_2 \square \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad A_3 \square \begin{bmatrix} 1 & 10 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Null(A_1) = Null(A_2) = Null(A_3) karena obe tidak mengubah penyelesaian spl.
- Penyelesaian umum spl $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ adalah:

  $a = 0$

  $b = 0$

  $c = t$
- Setiap vektor berbentuk $(0, 0, t)$ adalah penyelesaian spl $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Basis ruang null adalah $\{(0, 0, 1)\}$.

Tentukan ruang kolom Coll(A_i)

$$A_1 \square \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad A_2 \square \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad A_3 \square \begin{bmatrix} 1 & 10 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad A_4 \square \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Coll(A_1) =

Coll(A_2) =

Coll(A_3) =

Coll(A_4) =

Contoh 20:

	$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$	$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 10 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
Coll(A_i)	$\left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ 0 \end{bmatrix} : a, b \in R \right\}$	$\left\{ \begin{bmatrix} a \\ 0 \\ b \end{bmatrix} : a, b \in R \right\}$	$\left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ 0 \end{bmatrix} : a, b \in R \right\}$
Row(A_i)	$\{ [a \quad b \quad 0] \mid a, b \in R \}$	$\{ [a \quad b \quad 0] \mid a, b \in R \}$	$\{ [a \quad b \quad 0] \mid a, b \in R \}$

Ruang baris tidak berubah oleh obe. Ruang kolom dapat berubah oleh obe

Jawablah dan jelaskan

1. B/S ruang kolom **pasti** berubah oleh OBE.
2. B/S ruang kolom **dapat** berubah oleh OBE
3. B/S ruang baris **dapat** berubah oleh OBE
4. B/S ruang baris **pasti tidak** berubah oleh OBE
5. B/S ruang null(A) **bisa** berubah oleh OBE
6. B/S ruang null(A) **tidak** berubah oleh OBE

Pengaruh operasi baris elementer

Operasi baris elementer (obe)

1. tidak mengubah ruang null suatu matriks.
2. tidak mengubah ruang baris dari suatu matriks.
3. **dapat** mengubah ruang kolom matriks.
4. tidak mengubah hub dependensi linier kolom-kolom A.

Cara menenentukan basis Coll(A), Row(A), Null(A) : **melakukan OBE pada** A.

OBE dan ruang baris, kolom, null

𝒯eorema: Operasi baris elementer (obe) **tidak mengubah** ruang null dan ruang baris matriks.

𝒯eorema: Operasi baris elementer (obe) **dapat** mengubah ruang kolom matriks.

hubungan dependesi kolom-kolom

- B_2 diperoleh dari B_1 dengan tukar baris $R_2 \leftrightarrow R_3$
- B_3 diperoleh dari B_1 dengan $R_2 \leftarrow 10 * R_2$
- B_4 diperoleh dari $B1$ dengan $\mathrm{R}_2 \leftarrow R_2 + 2 * R_3$

$$B_1 \square \begin{bmatrix} 1 & 10 & 0 \\ 5 & 50 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad B_2 \square \begin{bmatrix} 1 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 5 & 50 & 0 \end{bmatrix} \quad B_3 \square \begin{bmatrix} 1 & 10 & 0 \\ 10 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad B_4 \square \begin{bmatrix} 1 & 10 & 0 \\ 5 & 50 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

hubungan dependesi kolom-kolom

$B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 10 & 0 \\ 5 & 50 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ $\quad B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 5 & 50 & 0 \end{bmatrix}$ $\quad B_3 = \begin{bmatrix} 1 & 10 & 0 \\ 10 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ $\quad B_4 = \begin{bmatrix} 1 & 10 & 0 \\ 5 & 50 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

- Pada setiap matriks berlaku: $\mathbf{c}_2 = 10\,\mathbf{c}_1$

  $\{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_3\}$ bebas linier

  $\{\mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3\}$ bebas linier

- **Hubungan dependensi linier kolom-kolom tidak berubah oleh obe**

Obe dan ruang baris, kolom, null

Teorema: Apabila *A* dan *B* ekuivalen, maka:

a. Himpunan vektor-vektor kolom dari *A* bebas linier jika dan hanya jika vektor-vektor kolom yang sesuai *B* bebas linear.

b. Himpunan vektor-vektor kolom dari *A* membentuk basis untuk ruang kolom dari *A* jika dan hanya jika kolom yang sesuai vektor *B* membentuk basis untuk ruang kolom *B*.

Obe dapat merubah ruang kolom suatu matriks.