



Sifat-sifat Bahasa-bahasa Reguler: Teorema Pumping – Bagian 2

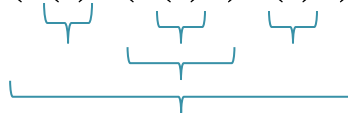
Kuliah Teori Bahasa dan Automata
Program Studi Ilmu Komputer
Fasilkom UI

Prepared by:
Suryana Setiawan

Contoh: untuk Bal

- $Bal = \{w \in \{ (,) \}^* : \text{tanda kurung berpasangan}\}$

- Contoh: $((() (()) ()))$



- Kita ingin mendapatkan string w sehingga teorema sukses menunjukkan L reguler.
 - Coba dengan $w = ({}^k)^k$, $|w| = 2k$
- Akan sama halnya dengan pembuktian $A^n B^n$, mengakibatkan banyaknya simbol “(” berbeda dengan simbol “)”.

Contoh: untuk PalEven

- $\text{PalEven} = \{vv^R : v \in \{a, b\}^*\}$; bahasa palindrom dengan panjang string bil genap.
 - Kita ingin mendapatkan string w sehingga teorema sukses menunjukkan L reguler.
- Coba dengan $w = a^k b^k b^k a^k$, $|w| = 4k$
 - Akan sama halnya dengan pembuktian $A^n B^n$, mengakibatkan banyaknya deretan simbol a ter kiri berbeda dengan deretan simbol a ter kanan.
- Coba dengan $w = a^{\lceil k/2 \rceil} b^{\lceil k/2 \rceil} b^{\lceil k/2 \rceil} a^{\lceil k/2 \rceil}$, $|w| \geq 2k$
 - Akan sama halnya dengan pembuktian $A^n B^n$, mengakibatkan ruas kiri berbeda dengan ruas kanan.
- Bagaimana $w = a^{\lceil k/4 \rceil} b^{\lceil k/4 \rceil} b^{\lceil k/4 \rceil} a^{\lceil k/4 \rceil}$, $|w| \geq k$?
 - Bahkan, bisa akan mengarah kontradiksi alias **pemenuhan sifat pumping**. Misalnya partisi dengan $y = bb$

Contoh: Bahasa $A^n B^m$, $n > m$

- Mencoba $w = a^{2k} b^k$ dengan $|w| = 3k$.
- Apa yang terjadi? Kegagalan menunjukkan bahasa ini nonregular.
 - Misalnya $y = a$, $x = \varepsilon$ dan $z = a^{2k-1} b^k$ menghasilkan pumping $a^q a^{2k-1} b^k$ yang selalu \in bahasa ini.
- Sebaiknya, $w = a^k b^{k-1}$ (atau secara umum $w = a^{k+g} b^{h+g}$ dengan $k-h=1$ dan $g \geq 0$).

Contoh: Bahasa A^n dengan n Bil. Prima

- L adalah $\text{Prime}_a = \{a^n : n \text{ bilangan prima}\}$
- Dengan diberikan suatu $k \geq 1$, mengambil j bilangan prima terkecil yang lebih besar dari k , sehingga $|w| = j > k$.
- Ambil suatu y yang tidak kosong, dan x & z sisanya, sehingga $xy \leq k$ maka berikutnya adalah menguji $\forall q \geq 0$, $a^{|x|}(a^{|y|})^q a^{|z|} = a^{|x|+|z|+q|y|}$ apakah selalu $\in L$,
 - Berarti memeriksa $|x| + |z| + q|y|$ apakah selalu bilangan prima?
- Namun, $|x| + |z| = q$, dapat mengakibatkan sbb.
 - $|x| + |z| + q|y| = q + q|y| = q(|y| + 1) \rightarrow$ bukan bil prima karena berfaktor $|xz|$ & $(|y|+1)$ dan keduanya > 1 .

Memfaatkan sifat Closure

- Hasil operasi yang bersifat closure L dengan suatu bahasa reguler L_R , jika L reguler maka hasil operasi L' juga harus reguler. Namun, ternyata L' bukan reguler, maka juga berarti L bukan reguler.
- Operasi irisan:
$$L = \{w \in \{a, b\}^* : \#_a(w) = \#_b(w)\}$$

Karena $L \cap A^n B^m = A^n B^n$, dan $A^n B^n$ nonreguler, maka L juga nonreguler.
- Operasi komplemen:
$$L = \{a^i b^j : i, j \geq 0 \text{ dan } i \neq j\}$$

Karena $\neg L \cap A^n B^m = A^n B^n$, dan $A^n B^n$ nonreguler, maka $\neg L \cap A^n B^m$ juga nonreguler, lalu L nonreguler karena $\neg L$ nonreguler.

Terkadang Manfaat Sifat Closure memang Diperlukan!

- $L = \{a^i b^j c^k : i, j, k \geq 0 \text{ dan (jika } i=1, \text{ maka } j = k)\}$
- Jika langsung diuji dengan teorema pumping, maka setiap string w , dengan $|w| > 0$ selalu bisa dipumping.
 - Jika $i = 0$ (yaitu $w = b^j c^k$), untuk $j \neq 0$, dengan $y = b$ (otherwise $k \neq 0$, dengan $y = c$), maka $\forall q \geq 0, xy^qz \in L$
 - Jika $i = 1$ (yaitu $w = ab^k c^k$), dengan $y = a$, maka $\forall q \geq 0, xy^qz \in L$
 - Jika $i = 2$ (yaitu $w = aab^j c^k$), dengan $y = aa$, maka $\forall q \geq 0, xy^qz \in L$
 - Jika $i > 2$, dengan $y = a$, maka $\forall q \geq 0, xy^qz \in L$
- Namun, L bukan reguler!

Terkadang Manfaat Sifat Closure memang Diperlukan! (lanjutan)

- Perhatikan bahwa

$$L' = L \cap \{ab^j c^k : j, k \geq 0\} = \{ab^j c^j : j \geq 0\}$$

- $\{ab^j c^k : j, k \geq 0\}$ adalah bahasa reguler dengan ekspresi reguler ab^*c^*
- Jika $\{ab^j c^j : j \geq 0\}$ reguler maka L reguler menurut sifat closure.
- Tetapi $\{ab^j c^j : j \geq 0\}$ dengan teorema pumping dapat dibuktikan tidak reguler.
- Cara lain: jika L reguler, L^R juga reguler. Pemeriksaan dengan teorema pumping pada L^R dapat segera membuktikan L^R bukan reguler, maka juga L bukan reguler.

Problem-problem Dunia Nyata

- Bahasa-bahasa yang telah dibahas “cukup sederhana” sehingga sifat-sifat reguler/nonreguler cukup eksplisit.
- Bahasa-bahasa dari dunia nyata ternyata “tidak sesederhana itu.”
- Contoh, apakah L reguler?
 - $L = \{w \in \{0, 1, \dots, 7\}^* : w \text{ representasi oktal dari bilangan bulat non-negatif yang habis dibagi } 7\}$
 $= \{0, 7, 16, 25, \dots\}$.
 - $L = \{w \in \{ \text{♩}, \text{♪}, \text{♫}, \text{♬}, \text{♭}, \text{♮} \}^* : w \text{ merepresentasikan suatu lagu dengan ketukan } 4/4\}$. ♩, ♪, ♫, ♬, ♭, ♮ adalah simbol-simbol not dengan 4 ketuk, 2 ketuk, 1 ketuk, 1/2 ketuk, 1/4 ketuk dan 1/8 ketuk, masing-masing.

Teorema Pumping u/ Reguler?

- Tujuan teorema untuk menunjukkan dengan pasti suatu bahasa yang tidak memiliki sifat pumping, adalah nonreguler.
- Tetapi untuk mengetahui apa yang terjadi jika teorema digunakan untuk suatu bahasa reguler, akan dibahas di slide berikutnya untuk bahasa A^nB^m yang sudah jelas bahasa reguler.

Contoh: untuk Bahasa $A^n B^m$

- Diketahui L adalah $A^n B^m = \{a^n b^m : m, n \geq 0\}$.
 - Disini kita ingin mencari w yang akan menyebabkan teorema gagal menunjukkannya bahasa reguler.
- Periksa untuk $w = a^k b^k$, sehingga $|w| = 2k \geq k$, lalu:
 $y = a^p$,
 $x = a^{j-p}$ ($1 \leq p \leq j \leq k$, untuk memenuhi $|xy| \leq k$) dan
 $z = a^{k-j} b^k$,
maka $a^{j-p} a^{pq} a^{k-j} b^k = a^{k-p+pq} b^k$ yang selalu $\in L$, untuk $q \geq 0$.
- Silahkan mendapatkan w lain untuk mengujinya!

Memahami Teorema Pumping melalui suatu permainan

1. Lawan: mengajukan L untuk diperiksa
2. Anda: harus membuktikan bhw L nonreguler
3. Lawan: berasumsi adanya FSM dengan jumlah status k (k boleh suatu bilangan atau tetap general sebagai k)
4. Anda: menemukan suatu $w \in L$ yang tepat, $|w| \geq k$
5. Lawan: menemukan substring-substring x, y, z , dimana $w = xyz$, $|xy| \leq k$, dan $|y| \geq 1$, untuk dapat membatalkan usaha anda
6. Anda: menemukan suatu q sehingga $xy^qz \notin L$. Jika gagal, ulangi langkah 4 hingga memang disadari ternyata memang reguler!