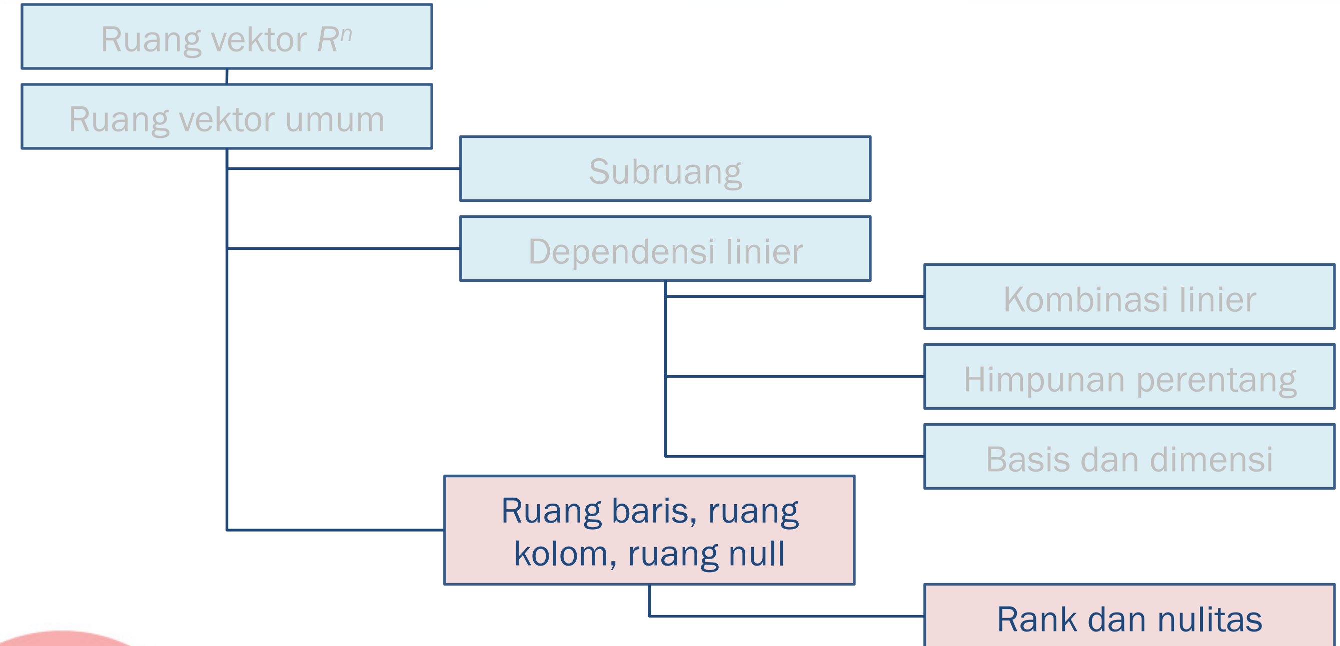
5. Ruang Vektor Umum (Bagian 3)

MODUL E-LEARNING ALJABAR LINIER
FAKULTAS ILMU KOMPUTER, UNIVERSITAS INDONESIA

DR. Kasiyah Junus, MSc



MODUL E-LEARNING ALJABAR LINIER
FAKULTAS ILMU KOMPUTER, UNIVERSITAS INDONESIA

5.6 Ruang baris, ruang kolom, ruang null

Ruang baris, ruang kolom, ruang null

Definisi 5.9: Ruang Baris, Ruang Kolon, dan Ruang Null.

Matriks A (m x n)

Baris-baris A : $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_n$

Kolom-kolom A : $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_m$

- Row(A): Ruang baris A

  Span($\{\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_n\}$)

  Himpunan semua kombinasi linier baris-baris A
- Coll(A): Ruang kolom A

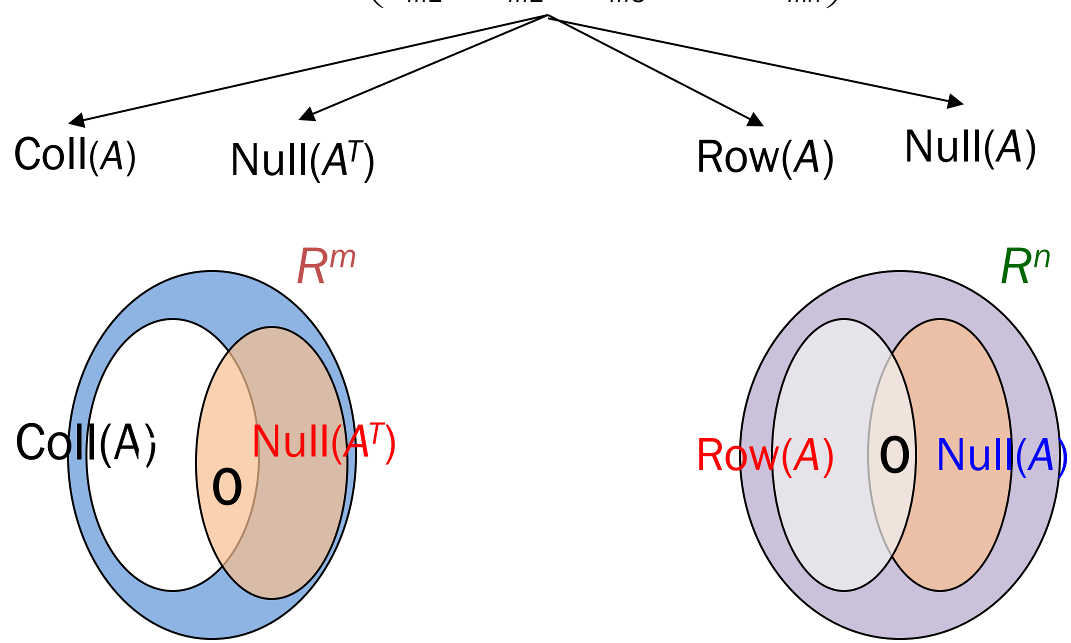
  Span($\{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_m\}$)

  Himpunan semua kombinasi linier kolom-kolom A
- Null(A): Ruang null A

  Himpunan semua penyelesaian spl homogen $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$

Ruang baris, kolom dan null : Row(A), Coll(A), Null(A)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$



Contoh 20:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 10 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

	A_1	A_2	A_3
Coll(A_i)	$\left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ 0 \end{bmatrix} : a, b \in R \right\}$	$\left\{ \begin{bmatrix} a \\ 0 \\ b \end{bmatrix} : a, b \in R \right\}$	$\left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ 0 \end{bmatrix} : a, b \in R \right\}$
Row(A_i)	$\{[a \quad b \quad 0] \mid a, b \in R\}$	$\{[a \quad b \quad 0] \mid a, b \in R\}$	$\{[a \quad b \quad 0] \mid a, b \in R\}$

Ruang baris **tidak berubah** oleh obe.
Ruang kolom **dapat berubah** oleh obe.

Contoh 20 (lanj):

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 10 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Null(A_1) = Null(A_2) = Null(A_3) karena obe tidak mengubah penyelesaian spl.
- Penyelesaian umum spl $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ adalah:

  $a = 0$

  $b = 0$

  $c = t$
- Setiap vektor berbentuk (0, 0, t) adalah penyelesaian spl $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.
- Basis ruang null matriks di atas adalah {(0, 0, 1)}.

Contoh 21:

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 10 & 0 \\ 5 & 50 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 5 & 50 & 0 \end{bmatrix} \quad B_3 = \begin{bmatrix} 1 & 10 & 0 \\ 10 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad B_4 = \begin{bmatrix} 1 & 10 & 0 \\ 5 & 50 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

- Pada setiap matriks berlaku: $c_2 = 10\, c_1$

  $\{c_1, c_3\}$ bebas linier

  $\{c_2, c_3\}$ bebas linier

- Hubungan dependensi linier kolom-kolom tidak berubah oleh obe.

Contoh 22:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix} \qquad \text{ebt}(B) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- *B* mempunyai inverse, kolom-kolom (baris-baris) bebas linier, maka semua baris (semua kolom) membentuk basis ruang baris (ruang kolom). Coll(*B*) = Row(*B*) = R^3.

- $B\mathbf{x} = \mathbf{0}$ mempuyai tepat satu solusi trivial. Null(*B*) = {**0**}

Pengaruh operasi baris elementer

- Operasi baris elementer (obe) tidak mengubah ruang null matriks.
- Operasi baris elementer tidak mengubah ruang baris dari matriks.
- Operasi baris elementer dapat mengubah ruang kolom matriks.
- Operasi baris elementer **tidak mengubah hubungan dependensi linier kolom-kolom *A*.**

Cara menenentukan basis dari ruang baris dan ruang kolom:

- Basis ruang kolom dari A diperoleh dengan melakukan OBE pada A.
- Basis ruang baris dari A diperoleh dengan melakukan OBE pada A^T.

Basis ruang baris, ruang kolom, ruang null

$$A=\begin{bmatrix}-2 & -5 & 8 & 0 & -17\\ 1 & 3 & -5 & 1 & 5\\ 3 & 11 & -19 & 7 & 1\\ 1 & 7 & -13 & 5 & -3\end{bmatrix} \qquad A_1=\begin{bmatrix}1 & 3 & -5 & 1 & 5\\ 0 & 1 & -2 & 2 & 7\\ 0 & 0 & 0 & -4 & 20\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$A_2=\begin{bmatrix}1 & 3 & -5 & 1 & 5\\ 0 & 1 & -2 & 2 & 7\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -5\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \qquad A_3=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -2 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -5\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

- Diketahui bahwa matriks-matriks di atas ekuivalen baris. Tentukan basis Row(A) dan basis Coll(A);

Basis ruang baris, ruang kolom, ruang null

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -5 & 8 & 0 & -17 \\ 1 & 3 & -5 & 1 & 5 \\ 3 & 11 & -19 & 7 & 1 \\ 1 & 7 & -13 & 5 & -3 \end{bmatrix} \Rightarrow EBT(A) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} x_1 + x_3 + x_5 &= 0 \\ x_2 - 2x_3 + 3x_5 &= 0 \\ x_4 - 5x_5 &= 0 \end{aligned}$$

x_2, x_5 parameter bebas
$x_2 = s$
$x_5 = t$ dengan s, t bil. real

$$\begin{aligned} x_1 &= -x_3 - x_5 = -s - t \\ x_2 &= 2x_3 - 3x_5 = 2s - 3t \\ x_4 &= 5x_5 = 5t \end{aligned}$$

Bentuk umum solusi

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ 0 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}; s, t \in R \Rightarrow \text{basis Null}(A) = \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ 0 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Basis ruang kolom

- Jika *A* dan *B* adalah matriks yang ekivalen baris, maka
  - Himpunan vektor-vektor kolom *A* adalah bebas linier jika dan hanya jika vektor kolom bersesuaian dari *B* juga bebas linier
  - Himpunan vektor-vektor kolom *A* membentuk basis untuk ruang vektor kolom *A* jika dan hanya jika vektor kolom terkait dari *B* membentuk basis untuk ruang kolom *B*,
  - Jika suatu matriks *R* = EBT(A), maka vektor-vektor baris dengan satu utama membentuk basis Row(*R)* = Row(*A*) , dan vektor kolom-kolom dengan satu utama dari vektor baris membentuk basis Coll(*R*)

OBE dan ruang baris, kolom, null

Teorema 5.5: OBE dan Ruang Null

Operasi baris elementer (obe) tidak mengubah ruang nol suatu matriks.

Teorema 5.6: OBE dan Ruang Baris

Operasi baris elementer (obe) tidak mengubah ruang baris suatu matriks.

OBE dan ruang baris, kolom, null

Teorema 5.7: OBE dan Ruang Kolom

Apabila *A* dan *B* adalah baris matriks yang ekuivalen, maka:

a. Himpunan vektor-vektor kolom dari *A* bebas linear jika dan hanya jika vektor-vektor kolom yang sesuai *B* adalah bebas linear.

b. Himpunan vektor-vektor kolom dari *A* membentuk basis untuk ruang kolom dari *A* jika dan hanya jika kolom yang sesuai vektor *B* membentuk basis untuk ruang kolom *B*.

OBE dan ruang baris, kolom, null

Teorema di bawah ini menjadi dasar untuk menentukan basis ruang baris dan ruang kolom matriks.

Teorema 5.8: OBE dan Ruang Kolom

Jika matriks A berada dalam bentuk eselon baris, maka vektor-vektor baris dengan satu utama (vektor-vektor baris tak nol) membentuk basis bagi ruang baris dari A, dan vektor-vektor kolom dengan satu utama suatu basis untuk ruang kolom dari A.

Rank dan nulitas

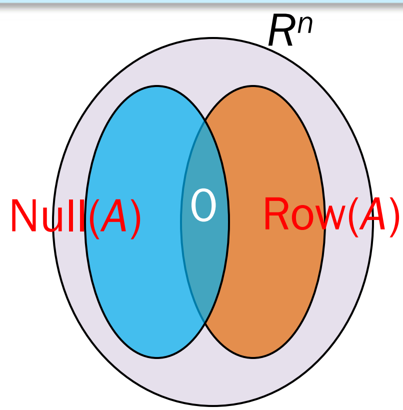
Definisi 5.10: Rank

Dimensi ruang baris dan dimensi ruang kolom dari matriks A disebut rank dari A dan ditulis: rank(A).

Definisi 5.11: Nulitas

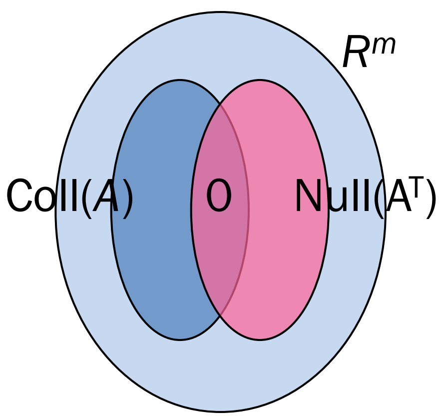
Dimensi ruang null dari A disebut nulitas dari A dan ditulis nulitas(A).

Hubungan ruang baris, kolom, dan null



n banyaknya kolom matriks A

Rank(A) + nulitas (A) = n



Rank(A^T) + nulitas (A^T) = m

Contoh 23

Tentukan rank dan nulitas dari matrik *A* di bawah ini:

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 4 & 5 & -3 \\ 3 & -7 & 2 & 0 & 1 & 4 \\ 2 & -5 & 2 & 4 & 6 & 1 \\ 4 & -9 & 2 & -4 & -4 & 7 \end{bmatrix}$$

Jawab:

Bentuk eselon baris tereduksi dari *A* adalah:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 & -28 & -37 & 13 \\ 0 & 1 & -2 & -12 & -16 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Contoh 23 (lanjutan)

- Matriks *A* direduksi menjadi EBT(*A*)
- Karena terdapat dua dua 1 utama, maka ruang baris dan ruang kolom berdimensi dua (ditulis rank (*A*) = 2).
- Untuk menemukan nulitas dari *A*, kita harus menemukan Null(*A*) ruang solusi dari sistem linear *A***x** = **0**, kemudian menenetukan dimensinya.
- Dari matriks EBT(*A*) dapat ditentukan SPL:

$$\begin{aligned} x_1 - 4x_3 - 28x_4 - 37x_5 + 13x_6 &= 0 \\ x_2 - 2x_3 - 12x_4 - 16x_5 + 5x_6 &= 0 \end{aligned} \quad \text{atau} \quad \begin{aligned} x_1 &= 4x_3 + 28x_4 + 37x_5 - 13x_6 \\ x_2 &= 2x_3 + 12x_4 + 16x_5 - 5x_6 \end{aligned}$$

- Tentukan solusi umum SPL → lanjut halaman berikutnya

Contoh 23 (lanjutan)

- Sehingga, solusi umumnya adalah:

$$\begin{aligned} x_1 &= 4r + 28s + 37t - 13u \\ x_2 &= 2r + 12s + 16t - 5u \\ x_3 &= r \\ x_4 &= s \\ x_5 &= t \\ x_6 &= u \end{aligned}$$

atau ditulis:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s\begin{bmatrix} 28 \\ 12 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 37 \\ 16 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + u\begin{bmatrix} -13 \\ -5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x} = r\,\mathbf{v}_1 + s\,\mathbf{v}_2 + t\,\mathbf{v}_3 + u\,\mathbf{v}_4$$

- Solusi merupakan kombinasi linear empat vektor. Himpunan empat vektor tersebut mebentuk basis Null(A), maka nulitas (A) = 4.
- Basis Null(A) = {$\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4$}

Rank dan nulitas

- Jika A_{nxn} maka rank(A) = rank(A^T)

- Jika B suatu matriks dengan n kolom, maka rank(B)+nullitas(B)= n

- Jika A_{mxn} matriks koefisien spl $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, maka
  - Rank(A) = jumlah variabel utama (bersesuaian dengan satu-utama)
  - Nullitas(A) = jumlah parameter pada solusi umum $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$
  - Rank(A) $\leq$ min (m,n)

- Jika $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ adalah sistem linier yang konsisten dengan m persamaan dan *n unknown*, dan jika rank(A) = r, maka solusi umum sistem tersebut mempunyai n-r parameter bebas, nulitas(A) = n-r

Teorema konsistensi

Teorema 5.9:

Jika $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ adalah sistem linier dengan m persamaan dan n *unknown*, maka pernyataan berikut ekivalen

- $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ adalah konsisten
- $\mathbf{b}$ berada pada ruang kolom A
- Matrik koefisien A dan matrik *augmented* $[A|\mathbf{b}]$ mempunyai rank sama.

$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ konsisten jika dan hanya jika $\text{Rank}(A) = \text{rank}([A\,|\,\mathbf{b}])$

Contoh 24

Sistem linear berikut:

$$
\begin{aligned}
x_1 - 2x_2 &= b_1 \\
x_1 - x_2 &= b_2 \\
x_1 + x_2 &= b_3 \\
x_1 + 2x_2 &= b_4 \\
x_1 + 3x_2 &= b_5
\end{aligned}
$$

merupakan spl *overdetermined*, bisa konsisten atau tidak konsisten tergantung pada nilai b_1, b_2, b_3, b_4 dan b_5.

Solusi SPL dapat ditentukan dengan menerapkan metode Eliminasi Gauss-Jordan.

Contoh 24 (lanjutan)

Matriks *augmented*nya ekuivalen baris dengan:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2b_2 - b_1 \\ 0 & 1 & b_2 - b_1 \\ 0 & 0 & b_3 - 3b_2 + 2b_1 \\ 0 & 0 & b_4 - 4b_2 + 3b_1 \\ 0 & 0 & b_5 - 5b_2 + 4b_1 \end{bmatrix}$$

Sistem ini konsisten apabila b_1, b_2, b_3, b_4 dan b_5 memenuhi kondisi:

$$\begin{aligned} 2b_1 - 3b_2 + b_3 \qquad\qquad &= 0 \\ 3b_1 - 4b_2 \qquad + b_4 \qquad &= 0 \\ 4b_1 - 5b_2 \qquad\qquad + b_5 &= 0 \end{aligned}$$

atau, solusi sistem linier homogennya adalah:

$b_1 = 5r - 4s$, $b_2 = 3r - 3s$, $b_3 = 2r - s$, $b_4 = r$, $b_4 = s$ untuk sembarang r dan s

Teorema konsistensi

$\mathcal{T}$eorema 5.10:

Jika $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ adalah sistem linier yang konsisten dengan m persamaan dan n *unknown*, dan jika rank$(A) = r$, maka solusi umum sistem tersebut memiliki $n-r$ parameter bebas.

Contoh 25:

Jika A adalah matrik 5×7 dengan rank 4, dan jika $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ adalah sistem linier konsisten, maka solusi umum dari sistem tersebut memiliki $7 - 4 = 3$ parameter bebas.

Teorema konsistensi

Teorema 5.11: Jika A berordo m x n, maka pernyataan berikut ekivalen

- $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ hanya punya solusi trivial
- Himpunan vektor-vektor kolom dari A bebas linier
- $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ hanya punya paling banyak satu solusi (tidak ada atau satu) untuk setiap matriks **b** berukuran m x 1.

Contoh 26:

Jika A adalah matrik 5×7, maka untuk setiap matrik $\mathbf{b}_{7 \times 1}$, maka $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ merupakan sistem *underdetermined*.

Sehingga, $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ harus konsisten untuk beberapa **b**, dan untuk setiap **b**, solusi umumnya memiliki $7 - r$ parameter, dengan r adalah rank(A).

Refleksi

- Buatlah ringkasan materi yang sudah kamu pahami.

- Periksa hasil ringkasanmu dan bandingkan apakah sudah mencakup konsep penting berikut?
  - Pengertian ruang vektor umum dan contohnya
  - Subruang dan cara mengidentifikasinya
  - Dependensi linear dua vektor dan himpunan
  - Basis dan dimensi dan contoh-contohnya
  - Teorema plus minus
  - Ruang baris, kolom, dan null
  - Rank dan nulitas
  - Teorema konsistensi

MODUL E-LEARNING ALJABAR LINIER
FAKULTAS ILMU KOMPUTER, UNIVERSITAS INDONESIA

Post-test

Post-test

Tentukan pernyataan berikut benar/salah. Jelaskan alasannya.

1. Ruang vektor berdimensi tak hingga jika kardinalitasnya tak hingga.
2. R^2 adalah subruang dari R^3
3. Jika dimensi V adalah n dan S adalah himpunan yang merentang V maka S adalah basis V.
4. V ruang vektor berdimensi n, S adalah himpunan bagian dari V yang terdiri dari $n+1$ vektor, maka S memuat basis dari V.
5. Spl $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ konsisten jika dan hanya jika $\mathbf{b}$ adalah vektor dalam ruang kolom A.
6. Elemen nol pada ruang vektor adalah tunggal.
7. Negatif dari elemen adalah tunggal.
8. Himpunan semua vektor pada sumbu-x merupakan subruang dari R^2.
9. Setiap ruang vektor adalah subruang.
10. Himpunan semua vektor pada garis $y = x$ membentuk subruang dari R^2.

Selamat, Anda telah menyelesaikan Modul 5.
Topik berikutnya: ruang hasil kali dalam