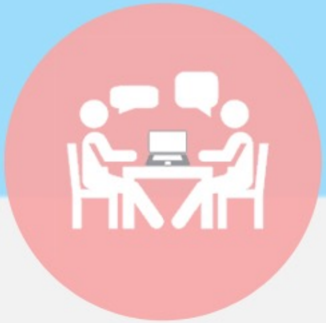
7. Nilai dan Vektor Eigen (Bagian 2)



MODUL E-LEARNING ALJABAR LINIER
FAKULTAS ILMU KOMPUTER, UNIVERSITAS INDONESIA

DR. Kasiyah Junus, MSc

- Nilai dan vektor eigen
  - Ruang eigen
  - Diagonalisasi
    - Similaritas
    - Matriks ortogonal
    - Diagonalisasi ortogonal

7.3 Diagonalisasi

Review

- Bagaimana menghitung determinan matiks diagonal?
- Bagaimana menentukan inverse matriks diagonal?
- Bagaimana menentukan rank dan nulitas matiks diagonal?
- Sebutkan besaran dan operasi apa saja yang mudah dilakukan pada matriks diagonal?

Diagonalisasi

Definisi 7.2: diagonalisasi

Matriks persegi A dapat didiagonalkan jika terdapat matriks yang mempunyai inverse sedemikian hingga $P^{-1}AP = D$ adalah matriks diagonal.

Contoh 2:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Matriks diagonal

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}}_{P^{-1}} \underbrace{\begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{P} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}_{D}$$

A dapat didiagonalkan

Kapan matriks *A* dapat didiagonalkan?

Teorema 7.3.

Jika *A* adalah matriks *nxn*, maka kalimat-kalimat berikut ini ekuivalen:

1. *A* dapat didiagonalkan
2. *A* mempunyai *n* vektor-vektor eigen yang bebas linier

Bukti (1) → (2)

Diberikan *A*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Misalkan *A* dapat didiagonalkan, maka terdapat matriks P yang mempunyai inverse

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix} \qquad AP = PD = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix}$$

Sedemikian hingga $P^{-1} AP = D$ matriks diagonal

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Kapan matriks *A* dapat didiagonalkan? (lanjutan)

$P^{-1}AP = D$, kalikan dengan P^{-1},

$AP = PD$

$$PD = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 p_{11} & \lambda_2 p_{12} & \cdots & \lambda_n p_{1n} \\ \lambda_1 p_{21} & \lambda_2 p_{22} & \cdots & \lambda_n p_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1 p_{n1} & \lambda_2 p_{n2} & \cdots & \lambda_n p_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \mathbf{p}_1 & \lambda_2 \mathbf{p}_2 & \cdots & \lambda_n \mathbf{p}_n \end{pmatrix}$$

$$AP = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A\mathbf{p}_1 & A\mathbf{p}_2 & \cdots & A\mathbf{p}_n \end{pmatrix}$$

$AP = PD$, jadi $\quad A\mathbf{p}_1 = \lambda_1 \mathbf{p}_1 \quad A\mathbf{p}_2 = \lambda_2 \mathbf{p}_2 \quad \cdots \quad A\mathbf{p}_n = \lambda_n \mathbf{p}_n$

Karena *P* mempunyai inverse, maka kolom-kolomnya bukan kolom nol. Berdasarkan definisi nilai eigen, maka $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n$ merupakan nilai-nilai eigen *A*, dan kolom-kolom *P* adalah vektor-vektor eigen *A* yang bebas linier (karena *P* mempunyai inverse)

Bukti untuk (2) → (1) kerjakanlah sebagai latihan untuk memperdalam pemahaman.

Prosedur mendiagonalkan matriks

Diberikan matriks A_{nxn}. Akan dicari P sedemikian hingga $PAP^{-1} = D$.

Prosedur

1. Tentukan n vektor eigen A yang bebas linier, misalkan $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$, $\mathbf{p}_3$, ..., $\mathbf{p}_n$
2. Dibentuk matriks P yang kolom-kolomnya adalah $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$, $\mathbf{p}_3$, ..., $\mathbf{p}_n$
3. Mariks $D = P^{-1}AP$ adalah matriks diagonal yang entri diagonal utamanya adalah λ_1, λ_2, λ_3, ...,λ_n dengan λ_j adalah nilai eigen bersesuaian dengan $\mathbf{p}_j$ untuk $j = 1, 2, 3, ..., n$

Contoh 3: mendiagonalkan matriks

Diberikan matriks A_{nxn}. Akan dicari P sedemikian hingga $PAP^{-1} = D$.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$$

Prosedur

1. Tentukan 2 vektor eigen A yang bebas linier. Pertama kita tentukan nilai-nilai eigennya yaitu $\lambda_1 = 2$ dan $\lambda_2 = -1$ (telah dihitung sebelumnya). Tentukan vektor eigen bersesuaian dengan nilai eigen, dengan menyelesaiakn spl $(A - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Diperoleh

$$\mathbf{p}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{p}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2. Dibentuk matriks P yang kolom-kolomnya adalah vektor-vektor eigen di atas.

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

3. Matriks $D = P^{-1}A\,P$ adalah matriks diagonal yang entri diagonal utamanya adalah λ_1, λ_2 berturut-turut

$$D = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Masalah diagonalisasi dan masalah vektor eigen

- **Masalah vektor eigen**

  Diberikan matriks A_{nxn}, apakah terdapat basis di R^n terdiri atas vektor-vektor eigen dari A?

- **Masalah diagonalisasi**

  Diberikan matriks A_{nxn} apakah terdapat matriks yang mempunyai inverse P sedemikian hingga $P^{-1}AP$ adalah matriks diagonal?

Teorema 7.4:

A_{nxn} dapat didiagonalkan jika dan hanya jika terdapat n vektor eigen yang bebas linier.

Setiap n vektor yang saling bebas linier di R^n merupakan basis R^n.

Kesimpulan: **masalah vektor eigen sama dengan masalah diagonalisasi**

Masalah diagonalisasi matriks (lanjutan)

$\mathscr{T}$eorema 7.5:

Jika $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ adalah vektor-vektor eigen dari *A* yang berpadanan dengan nilai-nilai eigen yang berbeda $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_k$, maka $\{ \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k \}$ adalah himpunan bebas linier.

Akibat dari teorema tersebut dituangkan pada teorema berikut ini.

$\mathscr{T}$eorema 7.6.:

Jika matriks A_{nxn} mempunyai *n* nilai eigen yang berbeda-beda, maka *A* dapat didiagonalkan.

Contoh : Matriks dapat didiagonalikan

a. Diberikan

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & -17 & 8 \end{pmatrix}$$

mempunyai tiga nilai eigen yang berbeda yaitu, $\lambda = 4$, $\lambda = 2+\sqrt{3}$, $\lambda = 2 - \sqrt{3}$. Dengan demikian, A dapat didiagonalkan.

b. Matriks B memiliki persamaan karakteristik $\lambda^4 + 6\lambda^3 + 11\lambda^2 - 6\lambda = 0$.

Jadi B memiliki nilai–nilai eigen: $\lambda = 0$, $\lambda = 1$, $\lambda = 2$, dan $\lambda = 3$. maka B dapat didiagonalkan.

c. Matriks C memiliki persamaan karakteristik $(5-\lambda)^4 (2-\lambda)^3 = 0$.

C memiliki nilai–nilai eigen: $\lambda = 5$ dan $\lambda = 2$. Ternyata jika $\dim(E_5) = 4$ DAN $\dim(E_2) = 3$ maka C dapat didiagonalkan.

Multiplisitas geometris dan aljabar

𝒟efinisi 7.3.:

- Jika suatu λ_0 adalah nilai eigen matriks *A*, *nxn*, maka dimensi ruang eigen yang berpadanan dengan λ_0 disebut multiplisitas ***geometri*** dari λ_0.
- Jumlah berapa kali $\lambda - \lambda_0$ muncul sebagai suatu faktor dalam polinom karakteristik dari *A* disebut multiplisitas ***aljabar*** dari *A.*

Misalkan *A* adalah matriks 6x6 yang memiliki persamaan karakteristik $\lambda^2 (\lambda-1)(\lambda-2)^3 = 0$. Multiplisitas **aljabar** untuk nilai-nilai eigen eigen 0, 1, dan 2 berturut-turut 2, 1, dan 3.

Jika dimensi ruang eigen E_0 adalah 2, maka multiplisitas **geometri** untuk nilai eigen 0 adalah 2.

Multiplisitas geometri dan aljabar

Teorema 7.4:

Jika A adalah matriks bujur sangkar, maka:

1. Untuk setiap nilai eigen dari A, multiplisitas geometrisnya kurang dari atau sama dengan multiplisitas aljabarnya.
2. A dapat didiagonalkan jika dan hanya jika multiplisitas geometrisnya sama dengan multiplisitas aljabarnya untuk setiap nilai eigen.

Teorema di atas menyatakan bahwa matriks dapat didiagonalkan apabila jumlahan semua multiplisitas geometri sama dengan jumlahan semua multiplisitas aljabar.

Latihan 10: informasi dari persamaan karakteristik

Misalkan A adalah matriks 6x6 yang memiliki persamaan karakteristik $\lambda^2 (\lambda-1) (\lambda-2)^3 = 0$. Sebutkan kemungkinan-kemungkinan dimensi dari ruang-ruang eigen dari A?

Jawab:

Ruang eigen untuk $\lambda = 0$ dapat memiliki dimensi 1 atau 2.

Selanjutnya, ruang eigen untuk $\lambda = 1$ harus memiliki dimensi 1.

Ruang eigen untuk $\lambda = 2$ dapat memiliki dimensi 1, 2, atau 3.

Multiplisitas geometris dan aljabar

Persamaan karakteristik dari A adalah $(1-\lambda)(6-\lambda)^2 = 0$. Jadi A memiliki nilai–nilai eigen: $\lambda = 1$, $\lambda = 6$. Misalnya diketahui bahwa basis ruang-ruang eigennya adalah:

$$\text{basis } E_1 : \; B_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \qquad \text{basis } E_6 : B_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 2/3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1/4 \\ 3/4 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \text{ atau } \; B_2^* = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \right\}$$

Maka A dapat didiagonalkan karena multiplisitas geometri = multiplisitas aljabar masing-masing nilai Eigen,

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Diagonalisasi matriks dipangkatkan

Diagonalisasi dapat dipakai untuk menyederhanakan perhitungan berikut ini:

1. Jika A adalah suatu matriks *nxn* dan P adalah matriks yang *invertible*, maka:

$$(P^{-1}AP)^2 = P^{-1}APP^{-1}AP = P^{-1}AIAP = P^{-1}A^2P$$

2. Secara umum, untuk bilangan bulat positif k:

$$(P^{-1}AP)^k = P^{-1}A^kP$$

3. Jika A dapat didiagonalkan, dan $P^{-1}AP = D$ adalah suatu matriks diagonal, maka:

$$P^{-1}A^kP = (P^{-1}AP)^k = D^k$$

4. Sehingga A^k dapat didiagonalisasi menjadi D^k, oleh matriks P:

$$A^k = PD^kP^{-1}$$

Latihan 12: diagonalisasi

Diberikan matriks *A*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a. Selidiki apakah *A* dapat didiagonalisasi.

b. Jika demikian, maka cari matriks *P* yang mendiagonalkan *A* serta tentukan $P^{-1}AP$.

Jawaban Latihan 12

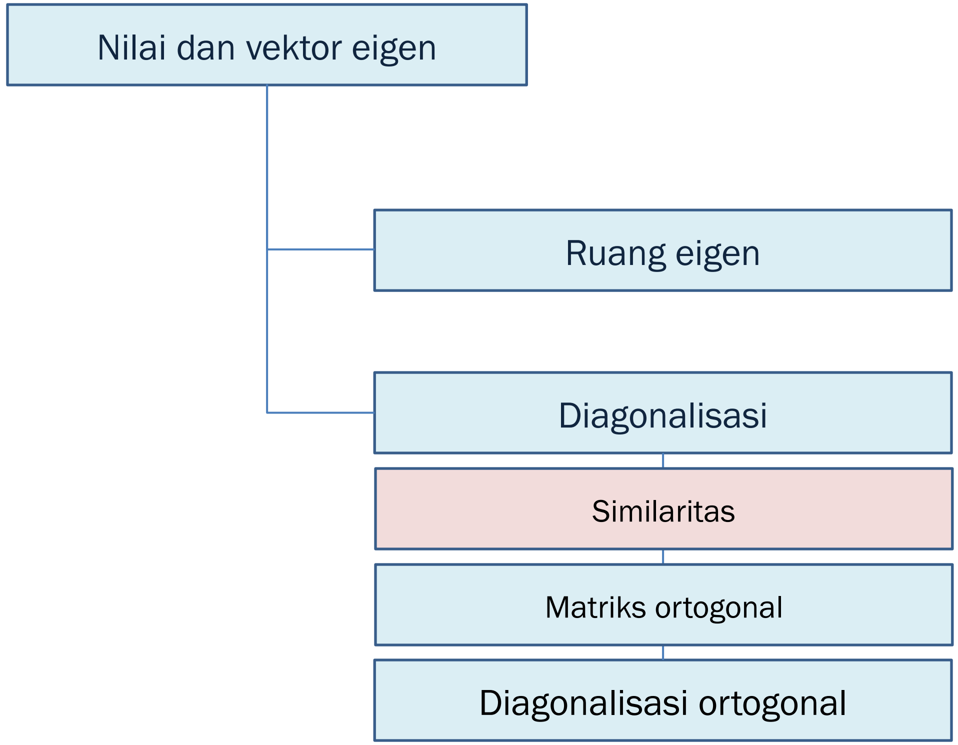
Persamaan karakteristiknya adalah $\lambda^2 (\lambda - 1) = 0$, sehingga nilai eigennya hanya $\lambda = 0$ dan $\lambda = 1$. Basis ruang eigen yang berasosiasi dengan $\lambda = 0$ $(E_{\lambda = 0})$ adalah

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

Basis $E_{\lambda = 1}$ adalah

$$\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Maka $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ dan $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = D$



7.4 Similaritas

Dua matriks similar

Definisi 8.8.:

Jika A dan B dua matriks berukuran nxn, A dikatakan similar dengan B jika terdapat matriks P yang mempunyai inverse sedemikian hingga $B = P^{-1}AP$

Jika A similar B, maka B similar dengan A karena $A = PBP^{-1}$ dan dikatakan A dan B saling similar.

Contoh 17:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \quad P = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A = PBP^{-1}$$

A dan B similar

Contoh 18: dua matriks similar

Matriks A dan D berikut ini saling similar.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Matriks diagonal

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}}_{P^{-1}} \underbrace{\begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{P} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}_{D}$$

A dapat didiagonalkan menjadi *D*, artinya *A* similar dengan matriks diagonal *D*

Contoh 19: dua matriks similar

Matriks *A* dan *B* berikut ini similar

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}_{P} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}}_{P^{-1}}$$

Perhatikan bahwa det(A) = det(B) = -2; trace(A) =trace(B) = 5

Invarian similaritas

Dua matriks similar memiliki persamaan, antara lain determinannya sama.

Misalkan A dan B saling similar, maka terdapat matriks P sedemikian hingga $B = P^{-1}AP$

$$\begin{aligned}\det(B) &= \det(P^{-1}AP)\\ &= \det(P^{-1})\det(A)\det(P)\\ &= \det(P^{-1})\det(P)\det(A)\\ &= \det(A)\end{aligned}$$

Selain determinannya sama, dua matriks similar juga memiliki persamaan-persamaan lain.

Invarian similaritas

KARAKTERISTIK YANG SAMA	PENJELASAN
Determinan	$\mathrm{Det}(A) = \det(P^{-1}AP)$
Singularitas	A dan $P^{-1}AP$ sama-sama mempunyai inverse atau sama-sama tidak mempunyai inverse
Rank dan nulitas	$\mathrm{Rank}(A) = \mathrm{rank}(P^{-1}AP)$; Nulitas (A) = nilitas$(P^{-1}AP)$;
Trace	$\mathrm{Trace(A)} = \mathrm{trace(P^{-1}AP)}$
Sukubanyak karakteristik	A dan $P^{-1}AP$ memiliki sukubanyak karakteristik yang sama
Nilai eigen	A dan $P^{-1}AP$ memiliki nilai-nilai eigen yang sama (vektor-vektor eigennya bisa berlainan)

- Nilai dan vektor eigen
  - Ruang eigen
  - Diagonalisasi
    - Similaritas
    - Matriks ortogonal
    - Diagonalisasi ortogonal

Review: Matriks ortogonal

Proses Gram-Schmidt pada matriks persegi dan mempunyai inverse

- A matriks persegi yang mempunyai inverse
- Himpunan kolom-kolom A $\{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_n\}$ membentuk basis Coll(A)
- Coll(A) = R^n
- Setelah dilakukan proses G-S dan normalisasi pada B, maka diperoleh basis dari R^n yang normal standard

Matriks ortogonal

Definisi 6.8:

Matriks *nxn* A disebut ortogonal jika $A^T = A^{-1}$

akibat

$A^TA = I$ $\quad\quad$ $A = [\ \mathbf{c}_1 \ \ \mathbf{c}_2 \ \ \ldots \ \mathbf{c}_n]$

$(\mathbf{I})ij = \mathbf{c}_i^T \mathbf{c}_j = \mathbf{c}_{i.}\mathbf{c}_j$

Jadi $\mathbf{c}_i.\mathbf{c}_j = 0$ jika $i \neq j$

$\mathbf{c}_i.\mathbf{c}_j = 1$ jika $i = j$, padahal $\mathbf{c}_i.\mathbf{c}_i = \|\mathbf{c}_i\|^2$.

Kesimpulan:

Himpunan vektor-vektor kolom A adalah ortonormal; demikian juga himpunan baris-baris dari A juga ortonormal.

Sifat-sifat matriks ortogonal

1. Jika A ortogonal, maka det(A) = 1 atau det(A) = -1.
2. Jika A *ortogonal, maka* A^{-1} juga ortogonal
3. Jika A ortogonal, & **x** vektor di R^n maka $\|\mathbf{x}\| = \|A\mathbf{x}\|$
   (vektor **x** dan hasil transformasinya memiliki panjang yang sama)

Bukti:

- Det(A) = det(A^T) = det(A^{-1}) = 1/det(A). Maka det(A) = 1 atau -1
- $(A^{-1})^{-1} = A = (A^T)^T = (A^{-1})^T$
- $\|A\mathbf{x}\| = \sqrt{(A\mathbf{x})^T A\mathbf{x}} = \sqrt{\mathbf{x}^T A^T A\mathbf{x}} = \sqrt{\mathbf{x}^T I\mathbf{x}} = \sqrt{\mathbf{x}^T\mathbf{x}} = \|\mathbf{x}\|$

Contoh: matriks-matriks ortogonal

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Latihan: Hitunglah determinannya

Sifat-sifat matriks orthogonal (lanjutan)

4. Tanspose matriks ortogonal adalah matriks orthogonal

5. Hasil kali matriks-matriks ortogonal akan menghasilkan matriks ortogonal.

6. Matriks ortogonal memiliki kolom-kolom yang ortonormal (buktikan)

$$A = [\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2 \ \ldots \ \mathbf{a}_n]$$

$$[I]_{ij} = \left[A^T A\right]_{ij} = \mathbf{a}_i{}^T \mathbf{a}_j = \begin{cases} 1, \text{ jika } i = j \\ 0, \text{ jika } i \neq j \end{cases}$$

- Nilai dan vektor eigen
  - Ruang eigen
  - Diagonalisasi
    - Similaritas
    - Matriks ortogonal
    - Diagonalisasi ortogonal

7.5 Diagonalisasi Ortogonal

Diagonalisasi ortogonal

Teorema 7.7:

Jika A adalah matriks nxn, maka pernyataan berikut ekuivalen:

a. A merupakan matriks yang terdiagonalisasi secara ortogonal

b. A memiliki himpunan ortonormal yang terdiri atas n vektor eigen

c. A simetris

- Matriks orthogonal adalah matriks persegi yang kolom-kolomnya (baris-barisnya) **ortonormal.**
- A ortonormal, maka $\det(A) = 1$ atau $\det(A) = -1$
- A orthogonal jika dan hanya jika $A^{-1} = A^{T}$

Contoh 6: Diagonalisasi ortogonal

Karakteristik persamaan A adalah:

$$\det(\lambda I - A) = \det\begin{bmatrix} \lambda-4 & -2 & -2 \\ -2 & \lambda-4 & -2 \\ -2 & -2 & \lambda-4 \end{bmatrix} = (\lambda-2)^2(\lambda-8) = 0$$

Sehingga, nilai eigen dari A adalah $\lambda_{1,2} = 2$ dan $\lambda_3 = 8$. Tentukan ruang eigen dari masing-masing nilai eigen. Setelah ditentukan ruang eigen ternyata diperoleh

vektor- vektor $\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ dan $\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ membentuk basis dari ruang eigen $E_{\lambda = 2}$.

Terapkan Proses Gram-Schmidt pada $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ sehingga menghasilkan

Himpunan vektor eigen ortonormal sebagai berikut: $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ dengan

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix} \text{ dan } \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \end{bmatrix}$$

Diagonalisasi ortogonal (lanjutan)

Ruang untuk $\lambda = 8$ memiliki basis $B = \{\, \mathbf{u}_3 \} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

Terapkan normalisasi ke $\{\mathbf{u}_3\}$ sehingga menghasilkan: $B = \{\mathbf{v}_3\} = \left\{ \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{bmatrix} \right\}$

Terakhir, dengan menggunakan $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, dan $\mathbf{v}_3$ sebagai kolom vektor, kita memperoleh:

$$P = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

yang mendiagonalisasi A secara ortogonal.

Prosedur diagonalisasi ortogonal

Berikut ini merupakan prosedur untuk mendiagonalisasi matriks simetris *A* secara ortogonal:

1. Untuk setiap nilai eigen dari *A*, tentukan basis untuk setiap ruangnya.
2. Terapkan proses Gram-Schmidt dan normalisasi pada masing masing basis tersebut untuk membentuk basis orthonormal.
3. Bentuk matrik *P* yang kolomnya adalah vektor yang membentuk basis orthonormal di langkah 2. Maka *P* akan mendiagonalkan *A* secara orthogonal

Refleksi

Buatlah diagram yang menggambarkan keterkaitan konsep-konsep yang telah kamu pelajari: vektor pada bidang dan ruang, perkalian matriks dan vektor, sistem persamaan linier homogen, determinan, persamaan suku banyak, nilai eigen, vektor eigen, ruang eigen, diagonalisasi.

Ringkasan materi

Buatlah ringkasan materi yang baru saja kamu pelajari.

Periksalah hasil ringkasanmu, apakah sudah mencakup semua konsep kunci berikut ini?

- ✓ nilai eigen
- ✓ vektor eigen
- ✓ persamaan karakteristik
- ✓ ruang eigen
- ✓ multiplisitas geometri
- ✓ multiplisitas aljabar
- ✓ diagonalisasi
- ✓ diagonalisasi ortogonal

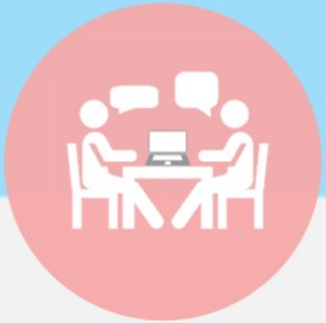
Post-test modul

MODUL E-LEARNING ALJABAR LINIER
FAKULTAS ILMU KOMPUTER, UNIVERSITAS INDONESIA

Post-test

1. Bagaimana menentukan nilai-nilai eigen matriks *A*?
2. Jika diberikan matriks *A* dan nilai eigen *k*, bagaimana menentukan ruang eigennya?
3. Apakah ruang eigen memuat hanya vektor eigen?
4. Dua matriks mempunyai persamaan karakteristik sama, apa kesimpulanmu? Apakah mereka memiliki ruang-ruang eigen yang sama?
5. Terdapat basis dari R^n yang terdiri atas vektor-vektor eigen dari *A*. Apa kesimpulannya?
6. *A* dapat didiagonalkan secara ortogonal, apa kesimpulanmu?

Selamat, Anda telah menyelesaikan modul 7.
Bersiaplah untuk modul selanjutnya:
Transformasi linear



MODUL E-LEARNING ALJABAR LINIER
FAKULTAS ILMU KOMPUTER, UNIVERSITAS INDONESIA