Date 04 · 05 · 23

12.1

→ Turunan fungsi dengan 2 atau lebih variabel

- contoh fungsi :
  1. $f(x,y) = x^2 + 3y^2$
  2. $g(x,y) = 2x\sqrt{y}$

→ $f(x,y) = z$ (membentuk selimut bangun ruang)
  ↳ x dan y variabel independen
  ↳ z variabel dependen

12.2

→ Turunan Parsial

WLOG :

$$f_x(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

↓

turunan $f(x,y)$ terhadap x (y dianggap konstan)

→ notasi turunan parsial : $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \ldots$

→ karena $f(x,y)$ membentuk selimut bangun ruang, jika kita set salah satu x atau y sebagai konstan, maka akan terbentuk sebuah kurva bidang datar yang merupakan irisan selimut bangun ruang $f(x,y)$

No.

Date 04 · 05 · 23

→ Higher Partial derivatives (diturunin lagi)

① $f_{xx}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$

② $f_{xy}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$

③ $f_{yx}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$

④ $f_{yy}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$

→ bisa lebih dari 2 variabel

ex :

↳ $f(x,y,z) = w$

→ (turunan parsialnya sama, one variable at a time)

→ Limit dan kekontinuan (12.3)

· Definisi limit fungsi dengan 2 atau lebih variabel

$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L \leftrightarrow \forall_{\varepsilon>0} \exists \delta > 0 \, (|f(x,y) - L| < \varepsilon \to$

$0 < \|(x,y) - (a,b)\| < \delta)$

· Teorema A

· jika $f(x,y)$ polinom

↳ $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b)$

· jika $f(x,y) = \frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$

↳ $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = \frac{P(a,b)}{Q(a,b)}$

· linear, jadi (+, -, dan perkalian konstan berlaku)

No.

Date 04 · 05 · 23

→ Peta kontur (kelewat dari 12.1)

· representasi $f(x,y)=z$ pada bidang datar, dibuat dengan menentukan nilai z sebagai konstan

→ Syarat kontinuitas fungsi

① f terdefinisi di (a,b)

② $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ ada

③ $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b)$

Limit note : tidak berlaku removable discontinuity

kalo limitnya $\frac{a}{0}$ misal, berarti limitnya tidak ada untuk $a \neq 0$

→ Teorema Clairaut

jika $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ dan $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ kontinu maka $f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y)$

→ fungsi komposisi

→ sama seperti 1 variabel, $f \circ g(x,y) = f(g(x,y))$

↓

f fungsi 1 variabel

(12.4)

→ Differentiability

f is locally linear di a jika ada konstanta m sehingga $f(a+h) = f(a) + hm + h\varepsilon(h)$

No.

Date 04 · 05 · 23

dengan $\varepsilon(h) \to 0$ ketika $h \to 0$

→ linearity lokal untuk fungsi 2 atau lebih variabel

→ f linear lokal di (a,b) $\leftrightarrow f(a+h_1, b+h_2) = f(a,b) + h_1 f_x(a,b) + h_2 f_y(a,b) + h_1 \varepsilon_1(h_1,h_2) + h_2 \varepsilon_2(h_1,h_2)$

dimana $\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \varepsilon_1(x,y) = 0$ dan $\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \varepsilon_2(x,y) = 0$

syarat : f diferensiabel di (a,b) jika f linear lokal di (a,b)

→ Gradien (∇f) sebuah vektor

- ∇ disebut operator del
- Syarat linear lokal sama saja hanya saja pake operasi vektor
- $\nabla f(p) = \langle f_x(p), f_y(p) \rangle \ni$ vektor

↳ Teorema A

jika $f_x(x,y)$ dan $f_y(x,y)$ kontinu di bidang yang mengandung titik (a,b) maka $f(x,y)$ diferensiabel di (a,b)

→ Konsepnya sama seperti garis singgung but with 2 variables dimensinya naik 1

→ sifat ∇

→ ~~+, -, konstan~~ +, −, perkalian konstanta berlaku

→ $\nabla f(p)g(p) = f(p)\nabla g(p) + g(p)\nabla f(p)$

No.

Date 04 · 05 · 23

→ Jika f diferensiabel di p, maka f kontinu di p (sama kayak kalkulus 1)

→ medan gradien

→ set dari $\nabla f(p)$ dari semua p di domain

12.5

turunan terarah dan gradien

↳ Untuk semua vektor satuan u ~~be~~

jika $\lim_{h\to 0} \frac{f(p+uh) - f(p)}{h}$ ada maka $D_u f(p)$ disebut turunan berarah $f(p)$ pada u

→ intinya pake vektor satuan karena mau nunjukin arahnya aja, ~~tada~~ interpretasi $D_u f(p) = u \cdot \nabla f(p)$ juga valid

$u = u_1 i + u_2 j$ maka $D_u f(x,y) = u_1 f_x(x,y) + u_2 f_y(x,y)$ ~

→ laju perubahan maksimum

pake perkalian vektor dot $a \cdot b = |a||b| \cos\theta$

θ = sudut antara a dan b

↳ teorema B

Sebuah fungsi berubah paling cepat (laju ~~s~~ $\|\nabla f(p)\|$) searah gradien dan paling lambat ($\text{laju } -\|\nabla f(p)\|$) berlawanan gradien

No.

Date

→ kurva level

→ gradien f pada titik p tegak lurus kurva level f yang melewati P

(12.6)

→ Chain Rule

→ parameternya cuma 1 (t)

$z = f(x(t), y(t))$

maka $\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}$

→ parameternya 2 (t dan s)

$z = f(x(t,s), y(t,s))$

maka turunan parsialnya

① $\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}$

② $\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}$

Fungsi implicit

jika fungsi $F(x,y)$ dengan $y = g(x)$ maka

$\frac{dy}{dx} = g'(x) = -\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial y}$

No.

Date

(12.7)

bidang singgung

fungsi $F(x,y,z)$ yang diferensiabel di p dan $\nabla F(p) \neq 0$ maka bidang yang melalui p dan sejajar $\nabla F(p)$ disebut bidang singgung

→ bidang $F(x,y,z) = k$

- bidang singgungnya

$\nabla F(x_0, y_0, z_0) \langle x - x_0, y - y_0, z - z_0 \rangle$

atau

$F_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0) + F_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0) + F_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)$

→ bidang $f(x,y) = z$

- bidang singgungnya $f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0) = z - z_0$

→ bidang singgung dapat digunakan untuk aproksimasi nilai suatu fungsi multivariabel

No.

Date

SOAL:

BAGIAN A (12.1)

(5.) Domain $f(x,y) = \sqrt{xy}$

maka $f: R \rightarrow R^{+} \cup \{0\}$ domainya $0 \leq xy < \infty$

atau $[0, \infty) \ni xy$

BAGIAN B (12.2)

(9.)

$$F(x,y) = \frac{x}{(x+y)^2} = \frac{x}{x^2+y^2+2xy} = x \cdot (x+y)^{-2}$$

division rule $\frac{d}{dx}\frac{u}{v} = \frac{u'v - v'u}{v^2}$

$$\frac{dF}{dx} = F_x(x,y) = \frac{(x+y)^2 - 2(x+y) \cdot x}{(x+y)^4} = \frac{x+y-2x}{(x+y)^3} = \frac{y-x}{(x+y)^3}$$

$$\frac{dF}{dy} = F_y(x,y) = -2x \cdot (x+y)^{-3} = -\frac{2x}{(x+y)^3}$$

BAGIAN C (12.3)

(3.) $$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \ln\left(\frac{1+y^2}{x^2+xy}\right) = \lim_{(x,y)\to(1,0)} \ln\frac{1}{x} + \lim_{(x,y)\to(1,0)} \ln\left(\frac{1+y^2}{1+y}\right)$$

$$= \lim_{(x,y)\to(1,0)} \ln\frac{1}{x} + \ln(1)$$

$$= 0$$

No.

Date

BAGIAN D (12.4)

(4.) $\nabla f(p) = f_x(p)i + f_y(p)j$, $f(x,y) = \sin^3(x^2y)$

$\nabla f = \langle 3\sin^2(x^2y)\cos(x^2y)\, 2xy \; , \; 3\sin^2(x^2y)\cos(x^2y)\, x^2 \rangle$

BAGIAN E (12.5)

(3.) $\nabla g(p,q) = \langle 4p^3 - 2q^3p \; , \; 3p^2q^2 \rangle$

$\nabla g(2,1) = \langle 28, 12 \rangle$

$v = \langle 1, 3 \rangle$

$D_u \nabla f(2,1) = 28 + 36 = 64$ //

BAGIAN F (12.6)

(3.) $\frac{dz}{dt} = \frac{dz}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dt}$, $z = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$

$\frac{dz}{dx} = -\frac{y}{x^2+y^2}$, $\frac{dz}{dy} = \frac{x}{y^2+x^2}$

$\frac{dx}{dt} = e^t$, $\frac{dy}{dt} = e^t$

$\frac{dz}{dt} = \frac{xe^t}{y^2+x^2} - \frac{ye^t}{x^2+y^2} = \frac{x^2 - xy}{x^2+y^2}$ //

BAGIAN G (12.7)

(4.) $F_x(x,y,z) = e^{xy} + xye^{xy}$, $F_y(x,y,z) = x^2e^{xy}$, $F_z = 0$

bidang singgung $\Rightarrow (z-2)\,0 = (x-2) + 4(y)$

titik (2,0,2) $\quad 0 = 4y + x - 2$ //