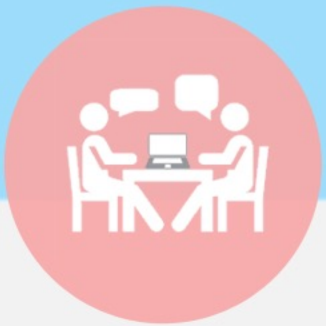
8. Transformasi linear



MODUL E-LEARNING ALJABAR LINIER
FAKULTAS ILMU KOMPUTER, UNIVERSITAS INDONESIA

DR. Kasiyah Junus, MSc

8. Transformasi linear (Bagian 2)

MODUL E-LEARNING ALJABAR LINIER
FAKULTAS ILMU KOMPUTER, UNIVERSITAS INDONESIA

DR. Kasiyah Junus, MSc

Pengertian transformasi linear

Transformasi linear pada ruang Euclid

Komposisi transformasi linear

Kernel dan *range*

Inverse transformasi linear

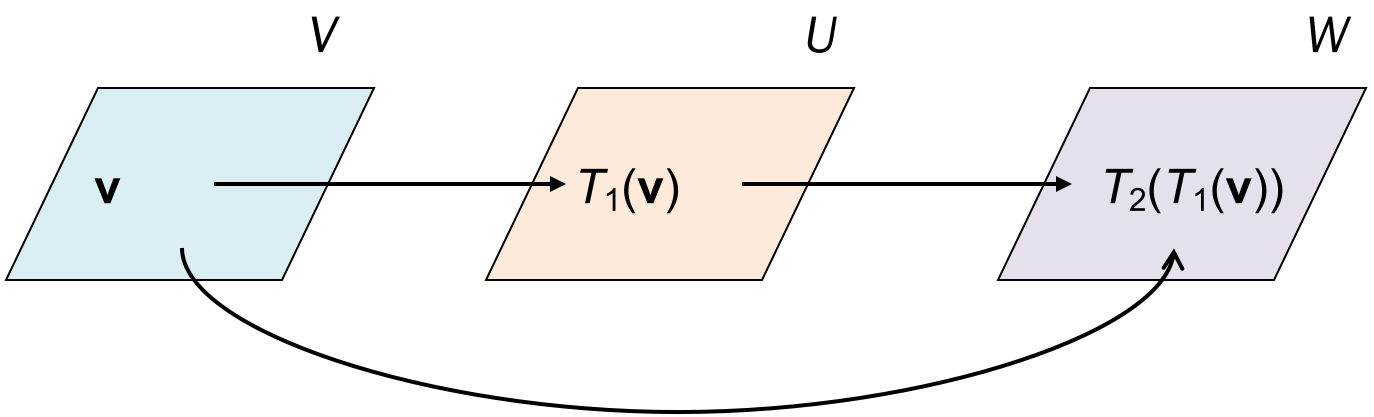
Similaritas

8.3 Komposisi Transformasi Linear

Komposisi transformasi linear

Teorema 8.3 : Komposisi transformasi linear

Jika $T_1: V \rightarrow U$ dan $T_2: U \rightarrow W$ adalah transformasi-transformasi linear, maka komposisi T_2 dan T_1 ditulis $T_2 o T_1$ ("T_2 bulatan T_1") adalah transformasi linear yang didefinisikan sebagai $(T_2 o T_1)(\mathbf{v}) = T_2(T_1(\mathbf{v}))$, dengan $\mathbf{v}$ vektor di V



Contoh 8: komposisi dua transformasi linear

$$T_1 : R^2 \to P^3;\ T_1 : \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \mapsto a + bx + (a+2b)x^2$$

$$T_2 : P^3 \to M^{2x2}; T_2 : c_0 + c_1 x + c_2 x^2 \mapsto \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \\ 0 & c_1 + 2c_3 \end{bmatrix}$$

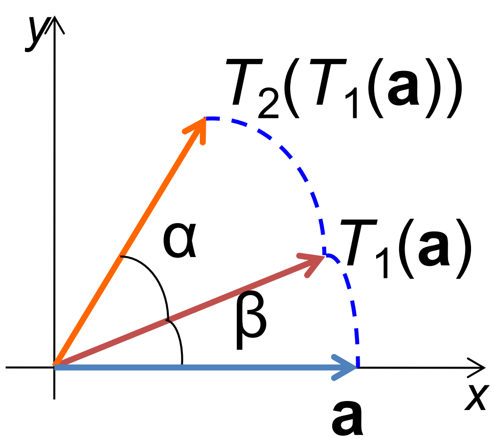
$$T_2 \circ T_1 : R^2 \to M^{2x2};$$

$$T_2 \circ T_1 : \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \mapsto a + bx + (a+2b)x^2 \mapsto \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a + 2(a+2b) \end{bmatrix}$$

$$(T_2 \circ T_1)\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 + 2.(2+2.1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$$

Contoh 9: Komposisi dua rotasi

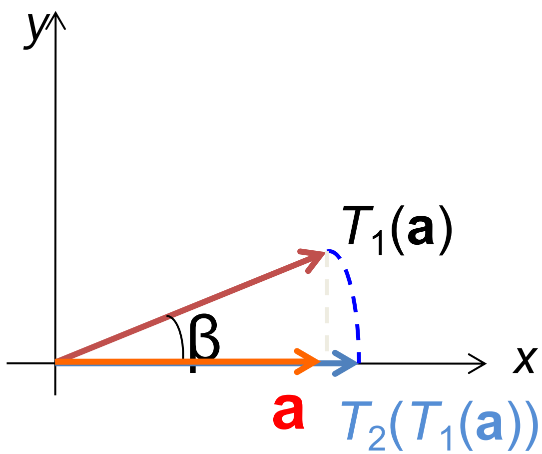
Rotasi kemudian rotasi



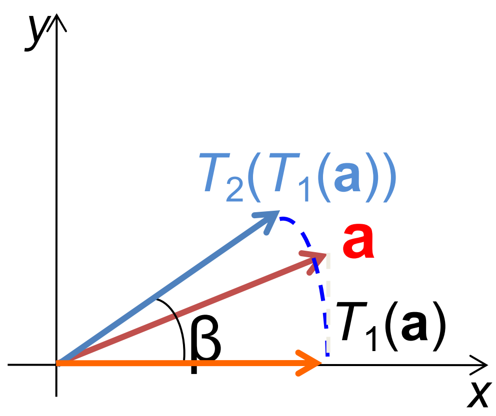
Apakah $T_2(T_1(\mathbf{a})) = T_1(T_2(\mathbf{a}))$?

Contoh 10: Komposisi rotasi dan proyeksi

a. Rotasi kemudian proyeksi



b. Proyeksi kemudian rotasi



Kesimpulan:

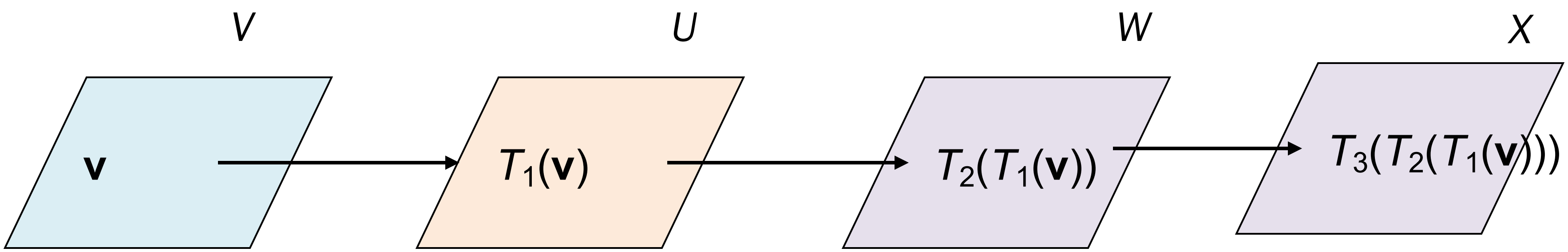
Komposisi transformasi linear tidak komutatif

Komposisi tiga transformasi linear

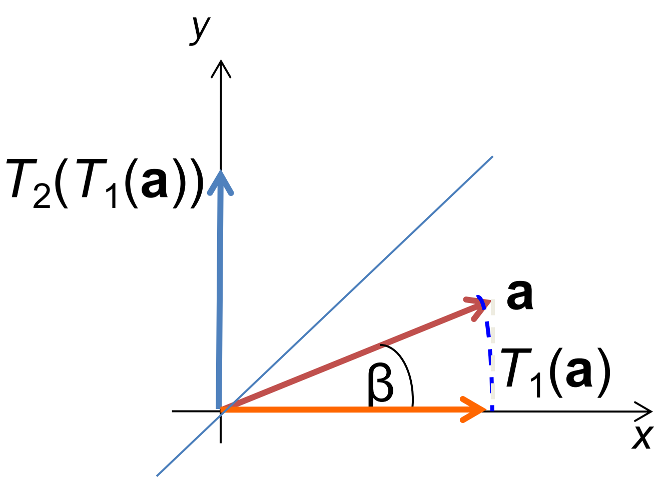
Diberikan transformasi linear T_1, T_2, dan T_3.

Domain dari T_3 adalah *range* dari T_2.

Domain dari T_2 adalah *range* dari T_1.



Matriks standar komposisi transformasi linear pada ruang Euclid



T_1 proyeksi ortogonal pada sumbu-x
T_2 pencerminan terhadap garis $y = x$

$$[T_1] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad [T_2] = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Matriks standar $T_2 o T_1$ diperoleh sebagai berikut:

$$T_2 \circ T_1\left(\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}\right) = T_2\left(\begin{bmatrix} a_1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ a_1 \end{bmatrix}$$

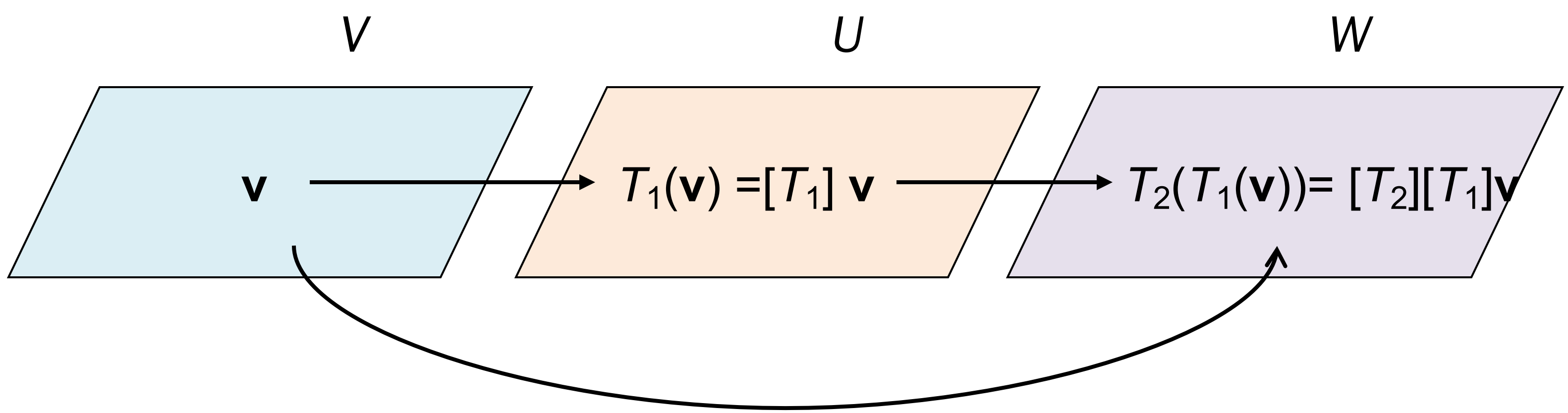
$$T_2 \circ T_1\left(\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$$

$$[T_2 \circ T_1] = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Matriks standar komposisi transformasi linear di ruang Euclid

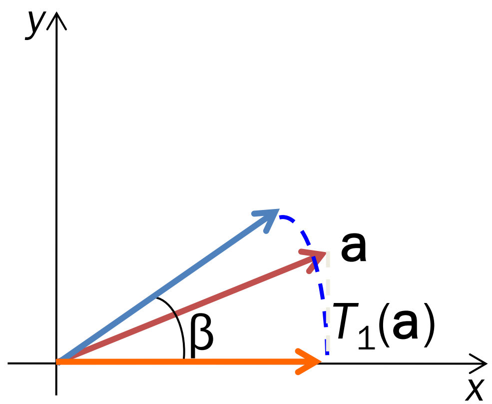
*T*eorema 8.4 : Komposisi transformasi linear

Jika $T_1: R^n \rightarrow R^m$ dan $T_2: R^m \rightarrow R^k$, maka $[T_2 o T_1] = [T_2][T_1]$.



Matriks standard proyeksi - rotasi

Proyeksi kemudian rotasi



$$[T_1] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad [T_2] = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

$$[T_2 \circ T_1] = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

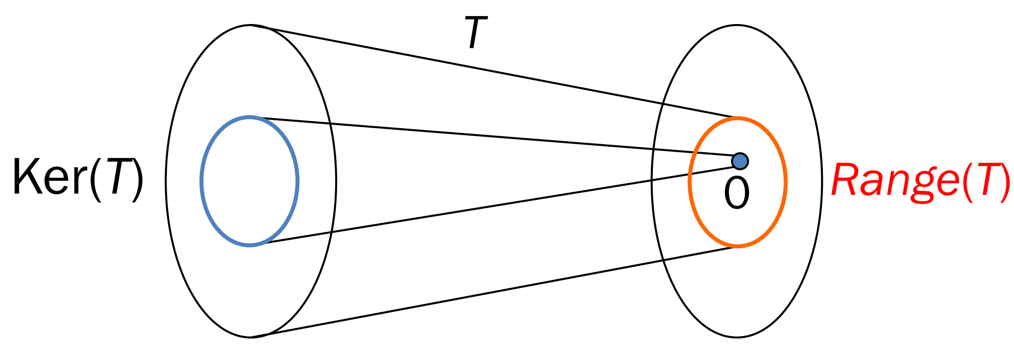
- Pengertian transformasi linear
- Transformasi linear pada ruang Euclid
- Komposisi transformasi linear
- Kernel dan *range*
- Inverse transformasi linear
- Similaritas

8.4 Kernel dan *Range* Transformasi Linear

Kernel dan range

𝒟efinisi 8.6: Kernel dan range

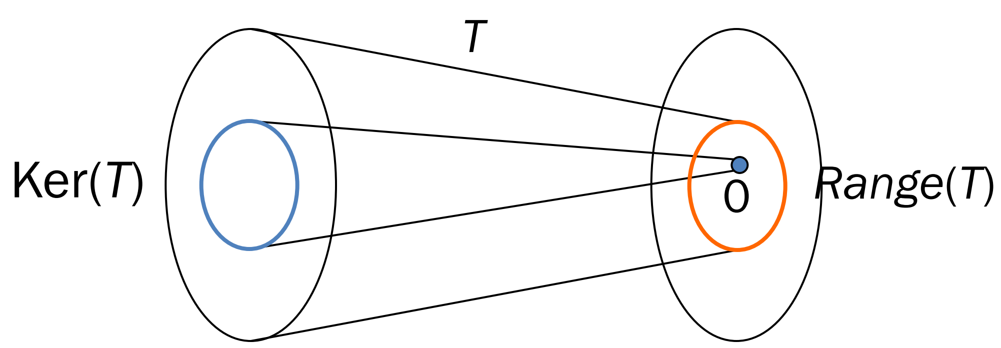
Jika T: $V \rightarrow W$ adalah transformasi linear, maka himpunan vektor di V yang dipetakan ke **0** disebut kernel dari T (dinotasikan: ker(T)). Himpunan vektor-vektor di W yang mempunyai kawan di V disebut *range* dari T (dinotasikan: *Range*(T))



Rank dan nulitas

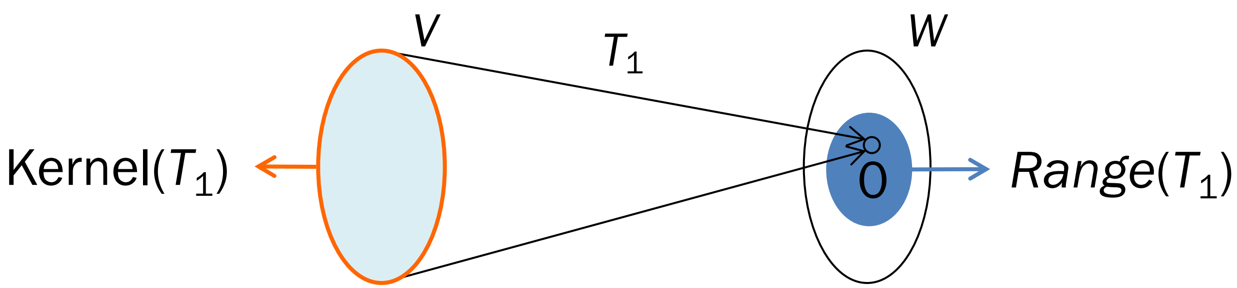
*D*efinisi 8.7: rank dan nulitas

Jika $T: V \rightarrow W$ adalah transformasi linear, maka dimensi dari *range* T disebut rank(T) dan dimensi dari kernel T adalah nulitas(T).



Contoh 11: Kernel, *range*, nullitas, dan rank

Transformasi nol T_1: $V \rightarrow W$, dengan $T(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$ untuk setiap $\mathbf{v}$ di V

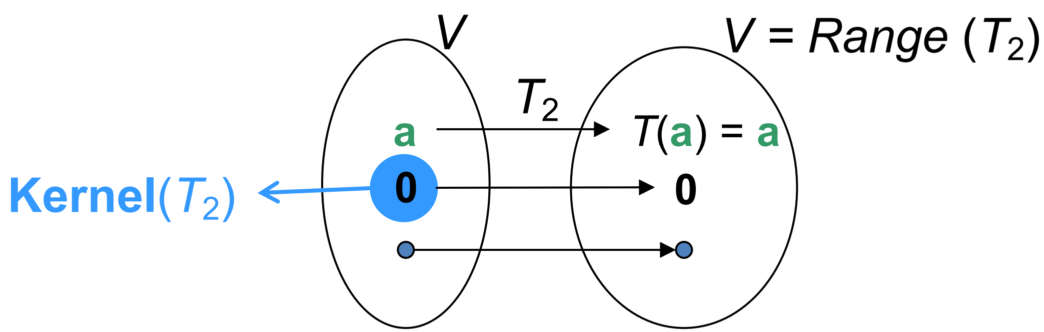


Kernel(T_1) = V, nulitas (T_1) = dim(V)

Range(T_1) = {**0**}, rank(T_1) = 0

Contoh 12: kernel, range, nullitas, dan rank

2. Transformasi identitas T_2 (**v**) = **v**

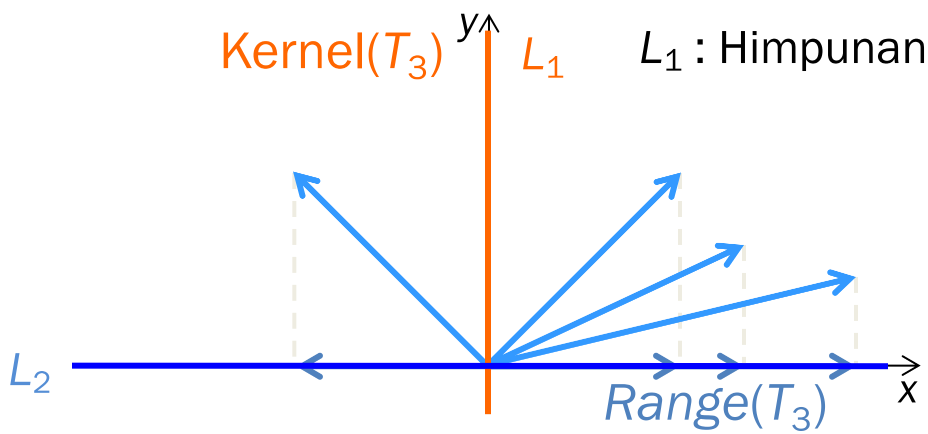


Kernel(T_2) = {**0**}, nulitas (T_2) = 0

Range(T_2) = V, rank(T_2) = dim (V)

Contoh 13: kernel, range, nullitas, dan rank

3. Transformasi T_3:$R^2 \rightarrow R^2$ proyeksi pada sumbu-x



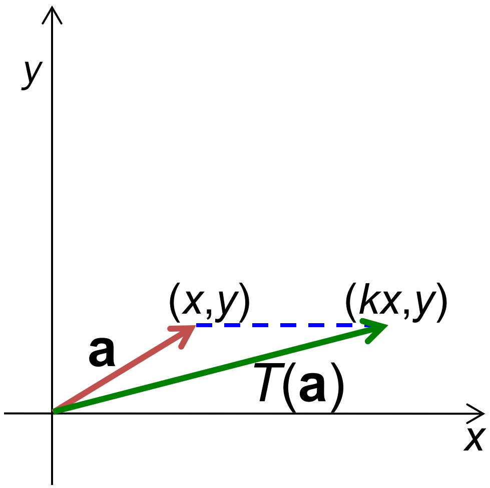
L_1 : Himpunan semua vektor vertikal

L_2 : Himpunan semua vektor horisontal

Kernel(T_3) = L_1, nulitas (T_3) = 1

Range(T_3) = L_2, rank(T_3) = 1

Latihan 2: Kernel dan range *shear* terhadap sumbu-x



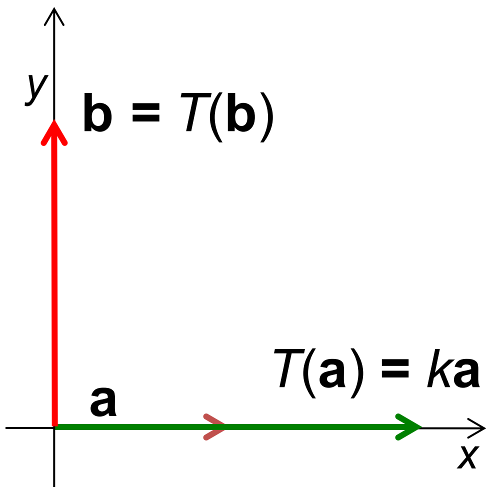
$(kx, y) = (0, 0)$ hanya jika $x = 0$ dan $y = 0$, maka Kernel(T) = $\{\mathbf{0}\}$

Latihan:

1. Tentukan range dan rank T
2. Tentukan nilai dan vektor eigen T

Jawaban Latihan 2

1. Range (T) = R^2



Matriks standar

$$\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Nilai eigen T adalah k dan 1. Vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen k adalah vektor-vektor tak nol horizontal. Vektor-vektor tak nol vertikal merupakan vektor-vektor eigen bersesuaian dengan nilai eigen 1.

Pengertian transformasi linear

Transformasi linear pada ruang Euclid

Komposisi transformasi linear

Kernel dan *range*

Inverse transformasi linear

Similaritas

8.5 Inverse Transformasi Linear

Transformasi linear satu-satu

*D*efinisi 8.6.: transformasi linear satu-satu

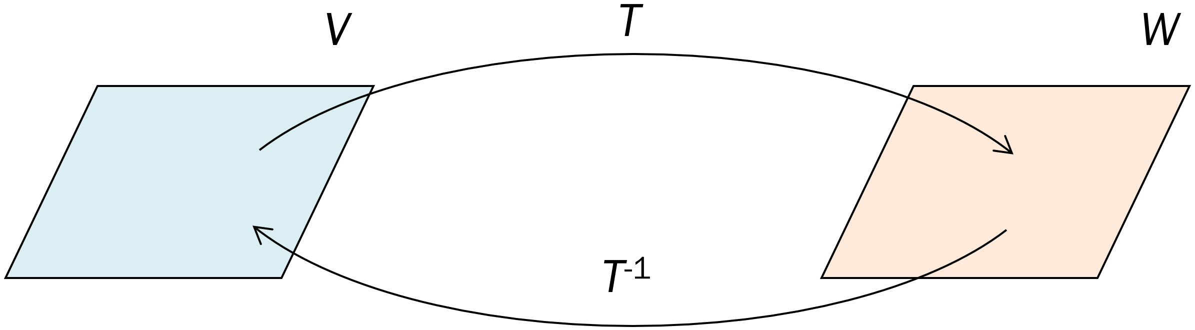
T: *V* → *W* adalah transformasi linear satu-satu jika vektor yang berbeda di *V* dipetakan ke vektor-vektor yang berbeda di *W*

Contoh 14: transformasi linear satu-satu

- rotasi
- pencerminan
- operator identitas

Proyeksi ortogonal pada sumbu-x bukan operator linear satu-satu

Inverse transformasi linear



T: $V \rightarrow W$ adalah transformasi linear bijektif (satu-satu dan pada)
T^{-1}: $W \rightarrow V$ inverse dari T merupakan transformasi linear

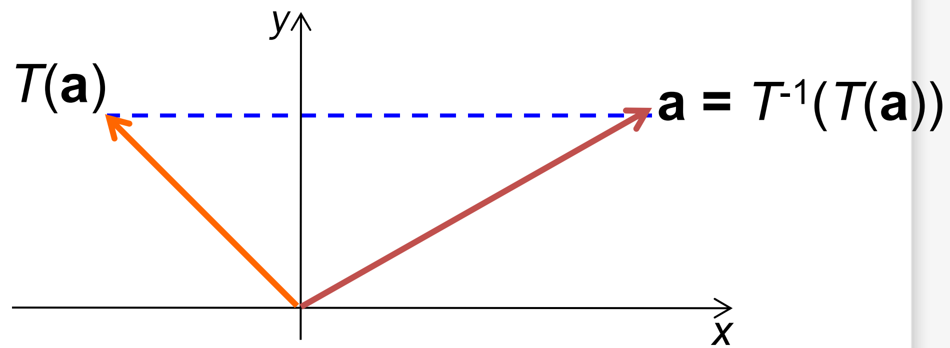
$T^{-1}(T(\mathbf{v})) = T^{-1}(\mathbf{w}) = \mathbf{v}$
$T(T^{-1}(\mathbf{w})) = T(\mathbf{v}) = \mathbf{w}$

Catatan: Jika fungsi satu-satu tetapi tidak onto (surjektif) maka kita dapat mendefinisikan inverse dari range transformasi linear:

$$T^{-1}: \text{Range}(T) \rightarrow V$$

Contoh 15: Inverse transformasi linear

$T : R^2 \rightarrow R^2$ dan didefinisikan $T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -y \\ \frac{x}{2} \end{bmatrix}$



matriks standar $T : \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1/2 & 0 \end{bmatrix}$

saling inverse

matriks standar $T^{-1} : \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

$$T^{-1}\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2y \\ -x \end{bmatrix}$$

$$T^{-1}\left(T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right)\right) = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -y \\ \frac{x}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Sifat transformasi linear satu-satu

- Jika $T: R^n \rightarrow R^m$ mempunyai matriks standar $[T]$ yang mempunyai inverse, maka $[T]\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$ konsisten dengan tepat satu solusi untuk setiap **b** di R^n.

- $[T]\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$ konsisten maka untuk setiap **b** di R^n terdapat **x** di R^n sedemikian hingga $[T]\mathbf{x} = T(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$. Range($T$) = R^n.

- Solusi $[T]\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tunggal, maka T adalah satu-satu.

Sifat operator linear satu-satu

*T*eorema 8.5. :

Jika A matriks nxn yang mempunyai inverse dan merupakan matriks standar operatorlinear $T_A : R^n \rightarrow R^n$ maka kalimat-kalimat berikut ini memiliki kebenaran yang sama.

1. A mempunyai inverse
2. $Range(T_A) = R^n$
3. Kernel(T_A) = {**0**}
4. T_A satu-satu

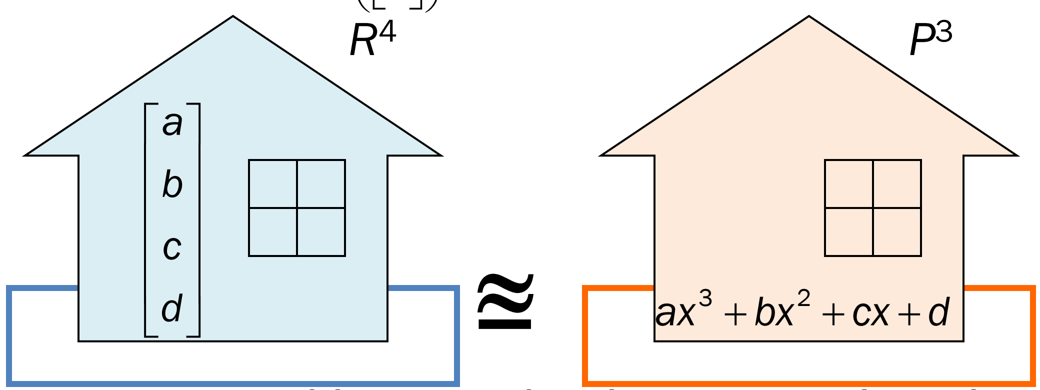
- Setiap operator linear yang satu-satu (injektif) pasti mempunyai matriks standar yang mempunyai inverse. Misalnya rotasi dan delatasi.
- Fungsi satu-satu belum tentu surjektif, tetapi operator linear satu-satu pasti merupakan korespondensi satu-satu (surjektif dan injektif).

Isomorfisma

Definisi 8.7.:

Isomorfisma adalah transformasi linear yang bersifat satu-satu (injektif) dan pada (surjektif). Jika terdapat isomorfisma dari ruang vektor *V* ke *W*, maka *V* dan *W* dikatakan isomorfis.

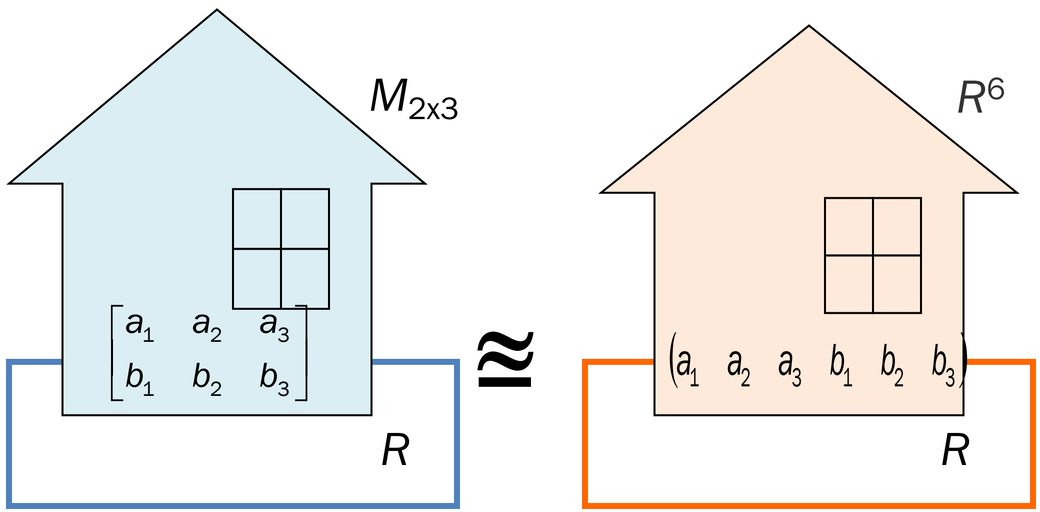
Contoh 16: $T: R^4 \rightarrow P^3$ dengan $T\left(\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}\right) = ax^3 + bx^2 + cx + d$



Isomorfisma mempunyai inverse dan inversenya juga isomorfisma

Contoh 17: Isomorfisma

$$T: M_{2x3} \rightarrow R^6, \ \text{didefinisikan}\ T\left(\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}$$



M_{2x3} isomorfis dengan R^6

Latihan 3

Jawablah BENAR atau SALAH:

1. Setiap transformasi linear satu-satu merupakan isomorfisma.
2. $T : R \to R$ dengan $T(x) = 2x$ adalah transformasi linier.
3. Proyeksi pada sumbu-x pada sistem koordinat bidang adalah isomorfisma.
4. $T : R^2 \to R^3$ dengan $T(a,b) = (0,a,b)$ adalah isomorfisma.
5. $T : P^3 \to M_{2x2}$ dengan $T\left(ax^3 + bx^2 + cx + d\right) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ adalah isomorfisma.

Kunci Jawaban:

1. Salah, 2. Benar 3.Salah, 4. Salah, 5. Benar

- Pengertian transformasi linear
- Transformasi linear pada ruang Euclid
- Komposisi transformasi linear
- Kernel dan *range*
- Inverse transformasi linear
- **Similaritas**

8.6 Similaritas

Dua matriks similar

𝒟efinisi 8.8.:

Jika A dan B dua matriks berukuran nxn, A dikatakan similar dengan B jika terdapat matriks P yang mempunyai inverse sedemikian hingga $B = P^{-1}AP$

Jika A similar B, maka B similar dengan A karena $A = PBP^{-1}$ dan dikatakan A dan B saling similar.

Contoh 17:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \qquad P = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \qquad P^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A = PBP^{-1}$$

A dan B similar

Contoh 18: dua matriks similar

Matriks A dan D berikut ini saling similar.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Matriks diagonal

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}}_{P^{-1}} \underbrace{\begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{P} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}_{D}$$

A dapat didiagonalkan menjadi *D*, maka*A* similar dengan matriks diagonal *D*

Contoh 19: dua matriks similar

Matriks *A* dan *B* berikut ini similar

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Perhatikan bahwa det(A) = det(B) = -2; trace(A) = trace(B) = 5

Invarian similaritas

Dua matriks similar memiliki persamaan, antara lain determinannya sama.

Misalkan A dan B saling similar, maka terdapat matriks P sedemikian hingga $B = P^{-1}AP$

$$\begin{aligned}\det(B) &= \det(P^{-1}AP)\\ &= \det(P^{-1})\det(A)\det(P)\\ &= \det(P^{-1})\det(P)\det(A)\\ &= \det(A)\end{aligned}$$

Selain determinannya sama, dua matriks similar juga memiliki persamaan-persamaan lain.

Invarian similaritas

Karakteristik yang sama	Penjelasan
Determinan	Det(A) = det($P^{-1}AP$)
Singularitas	A dan $P^{-1}AP$ sama-sama mempunyai inverse atau sama-sama tidak mempunyai inverse
Rank dan nulitas	Rank(A) = rank($P^{-1}AP$); Nulitas (A) = nilitas($P^{-1}AP$);
Trace	Trace(A) = trace($P^{-1}AP$)
Sukubanyak karakteristik	A dan $P^{-1}AP$ memiliki sukubanyak karakteristik yang sama
Nilai eigen	A dan $P^{-1}AP$ memiliki nilai-nilai eigen yang sama (vektor-vektor eigennya bisa berlainan)

Konsep kunci

Buatlah ringkasan materi yang baru saja kamu pelajari.

Periksalah hasil ringkasanmu, apakah sudah mencakup semua konsep kunci berikut ini?

- ❑ pengertian transformasi linear
- ❑ transformasi linear nol
- ❑ transformasi identitas
- ❑ transformasi linear dari dan ke ruang Euclid
  - matriks standar transformasi linear
  - metode menentukan matriks transformasi
  - Nilai dan vektor eigen transformasi linear
  - Rank dan nulitas transformasi linear
- ❑ sifat-sifat transformasi linear
- ❑ komposisi transformasi linear
- ❑ kernel dan range
- ❑ inverse transformasi linear
- ❑ transformasi linear umum
- ❑ matriks transformasi linear umum
- ❑ determinan transformasi linear
- ❑ Isomorfisma
- ❑ similaritas

Post-test modul

MODUL E-LEARNING ALJABAR LINIER
FAKULTAS ILMU KOMPUTER, UNIVERSITAS INDONESIA

Post-test

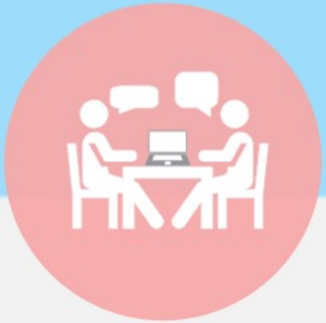
A Jawablah BENAR atau SALAH

1. Proyeksi pada sumbu-*x* adalah operator linear satu-satu.
2. *T* satu-satu jika dan hanya jika nullitas (*T*) = 0.
3. Pencerminan terhadap garis $y = x$ adalah adalah transformasi linear satu-satu
4. Rotasi sebesar α merupakan transformasi linear satu-satu.
5. Dua matriks saling similar, maka nilai-nilai eigennya sama.
6. Dua matriks mempunyai determinan dan trace yang sama, maka mereka saling similar.

B. Apa hubungan antara Kernel (*T*), Null(*T*), Null([*T*]); juga hubungan antara Rank([*T*]), Range(*T*) dan Coll([*T*]), jika diberikan operator linear *T* dari ruang Euclid ke ruang Euclid.

C. Apa kaitan Kernel suatu transformasi linear dengan ruang eigen?

Selamat, Anda telah menyelesaikan Modul 8.



MODUL E-LEARNING ALJABAR LINIER
FAKULTAS ILMU KOMPUTER, UNIVERSITAS INDONESIA