Universidade Federal de Uberlândia
Prof. Aldicio J. Miranda

TRIGONOMETRIA

INTRODUÇÃO

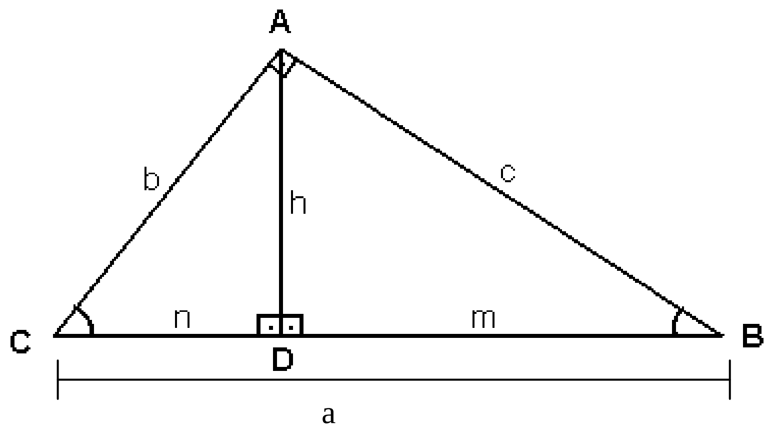
As primeiras noções de trigonometria estão ligadas às relações existentes entre os lados e os ângulos de um triângulo retângulo. Foram exatamente os estudos das relações entre as medidas de lados e de ângulos de um triângulo retângulo que motivaram os primeiros estudos de Trigonometria.

Sobre triângulos retângulos sabemos que:
um de seus ângulos tem medida 90º;
a soma das medidas dos outros dois ângulos é também 90º;
o lado oposto ao ângulo de 90º se chama *hipotenusa*, que é o maior lado;
os outros lados se chamam *catetos;*
o quadrado da hipotenusa é igual a soma dos quadrados dos catetos (Teorema de Pitágoras).

1. RELAÇÕES MÉTRICAS NO TRIÂNGULO RETÂNGULO

Seja ABC um triângulo retângulo com ângulo reto no vértice A.
Trace a altura AD do vértice A relativa ao lado BC.
Sejam as seguintes medidas: a = BC, b = AC, c = AB, h = AD, m = BD, n = DC.

Temos a seguinte figura:



Onde:
m $\rightarrow$ é a projeção do cateto c sobre a hipotenusa e
n $\rightarrow$ é a projeção do cateto b sobre a hipotenusa

AD é perpendicular a BC, então ADB e ADC são triângulos retângulos.

$$\left.\begin{matrix}\hat{C}+\hat{B}=90^{\circ}\\ \hat{B}+B\hat{A}D=90^{\circ}\end{matrix}\right\}\Rightarrow B\hat{A}D=\hat{C} \quad \text{e} \quad D\hat{A}C+\hat{C}=90^{\circ}\Rightarrow D\hat{A}C=\hat{B}$$

logo os triângulos ADB e ADC são semelhantes e ambos são semelhantes ao triângulo ABC.

Destas semelhanças podemos deduzir relações entre as medidas a, b, c, h, m e n acima mencionadas.

Como conseqüência podemos escrever as seguintes relações:

$$\frac{m}{h}=\frac{h}{n} \rightarrow h^2 = m \cdot n \qquad (1) \qquad\qquad \frac{m}{c}=\frac{c}{a} \rightarrow c^2 = a \cdot m \qquad (2)$$

$$\frac{n}{b}=\frac{b}{a} \rightarrow b^2 = a \cdot n \qquad (3) \qquad\qquad \frac{c}{a}=\frac{h}{b} \rightarrow b \cdot c = a \cdot h \qquad (4)$$

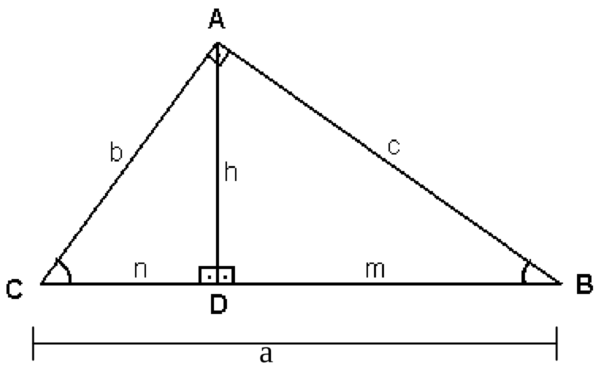
De (2) e (3), temos que: $a \cdot m = c^2$ e $a \cdot n = b^2$.

Logo: $a(m+n) = b^2 + c^2$, como $m+n=a$, então $a^2 = b^2 + c^2$, donde provamos o Teorema de Pitágoras.

Exemplo:

Um dos catetos de um triângulo retângulo mede 12 cm e a hipotenusa mede 20 cm. Determinar quanto mede o outro cateto, a altura relativa à hipotenusa e os segmentos determinados na hipotenusa.

Solução:



b = 12 cm
a = 20 cm

c = ?
h = ?
m = ?
n = ?

Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo retângulo ABC temos:

$$c^2 + 144 = 400 \Rightarrow c^2 = 400 - 144 \Rightarrow c^2 = 256 \Rightarrow c = 16\text{cm}$$

Como $a \cdot m = c^2 \Rightarrow 20.m = 256 \Rightarrow m = \frac{256}{20} \Rightarrow m = 12{,}8\text{cm}$

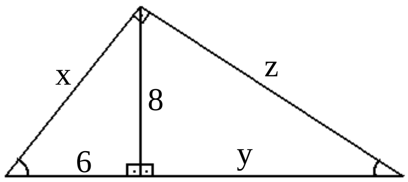
Temos $m + n = a \Rightarrow n + 12{,}8 = 20 \Rightarrow n = 7{,}2\text{cm}$

Como a.h = b.c, temos: $20.h = 16.12 \Rightarrow h = \frac{16 \cdot 12}{20} \Rightarrow h = \frac{48}{5} \Rightarrow h = 9{,}6cm$.

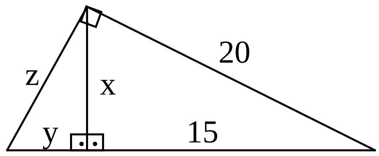
EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1) Determine o valor de x, y, e z nos triângulos abaixo:

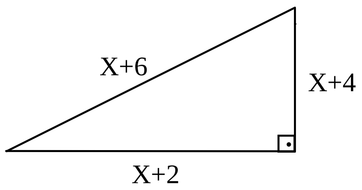
a)



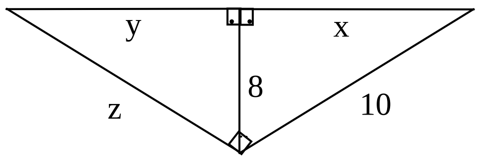
b)



c)



d)



2) Se a diagonal de um quadrado mede d, quanto mede o seu lado, o seu perímetro e a sua área?

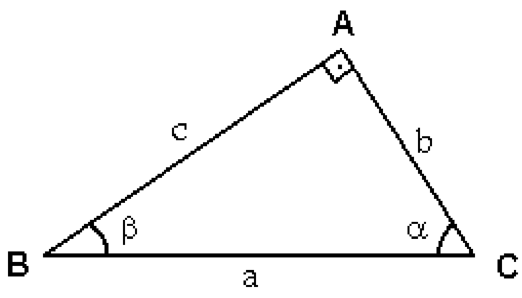
3) Se a área de um quadrado mede A, quanto mede o seu lado, a diagonal e o perímetro?

4) Quanto mede a altura de um triângulo equilátero de perímetro 30 cm?

5) Um observador está a 140 m de distância do topo de uma torre. Andando 60 m na direção do pé dessa torre, sua distância do topo passa a ser 100 m. Qual é a altura da torre?

2. RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS NO TRIÂNGULO RETÂNGULO

Consideremos o triângulo retângulo, reto em A e seus ângulos agudos α e β



Lembrete:

Em relação ângulo α :	Em relação ao ângulo β :
C é o cateto oposto	b é o cateto oposto
B é o cateto adjacente	c é o cateto adjacente

"Dois ângulos são ditos complementares se a sua soma for igual a 90º"
Da figura acima:

$\alpha + \beta = 90^\circ$ (α e β são complementares)

2.1 DEFINIÇÃO DE SENO, COSENO E TANGENTE

seno de um ângulo agudo = $\dfrac{\text{medida do cateto oposto ao ângulo}}{\text{medida da hipotenusa}}$

coseno de um ângulo agudo = $\dfrac{\text{medida do cateto adjacente ao ângulo}}{\text{medida da hipotenusa}}$

tangente de um ângulo agudo = $\dfrac{\text{medida do cateto oposto ao ângulo}}{\text{medida do cateto adjacente ao ângulo}}$

logo:

Sen $\alpha = \dfrac{c}{a}$	sen $\beta = \dfrac{b}{a}$	sen α = cos β
Cos $\alpha = \dfrac{b}{a}$	cos $\beta = \dfrac{c}{a}$	cos α = sen β
Tan $\alpha = \dfrac{c}{b}$	tan $\beta = \dfrac{b}{c}$	tan α = 1/tan β

2.2 RELAÇÕES ENTRE SENO E COSSENO

Vamos fixar-nos agora no triângulo retângulo ABC da figura anterior. Já sabemos que $\beta + \alpha = 90^\circ$, ou seja $\alpha = 90^\circ - \beta$.

Notamos então que $\cos\beta = \text{sen}\,\alpha$ e que $\cos\alpha = \text{sen}\,\beta$;
mais geralmente temos sempre:

$$\cos\beta = \text{sen}(90^\circ - \beta)$$

ou, equivalentemente:

$$\text{sen}\,\beta = \cos(90^\circ - \beta)$$

onde $90^\circ - \beta$ é o complementar de β.

Lembrando que $a^2 = b^2 + c^2$, e calculando $\text{sen}^2\beta + \cos^2\beta$, temos:

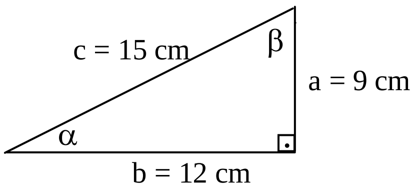
$$\text{sen}^2\beta + \cos^2\beta = \frac{b^2}{a^2} + \frac{c^2}{a^2} = \frac{b^2 + c^2}{a^2} = \frac{a^2}{a^2} = 1,$$

ou, seja, para qualquer β: $\text{sen}^2\beta + \cos^2\beta = \beta$, que é a identidade trigonométrica.

<u>Exemplo 1:</u>

De um triângulo retângulo ABC sabemos que a = 9 cm, b = 12 cm, c = 15 cm. Determinar seno, cosseno e tangente de cada ângulo.

Solução:



$$\text{sen}\,\alpha = \frac{a}{c} \Rightarrow \text{sen}\,\alpha = \frac{9}{15} \Rightarrow \text{sen}\,\alpha = 0{,}6$$

$$\cos\alpha = \frac{b}{c} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{12}{15} \Rightarrow \cos\alpha = 0{,}8$$

$$\tan\alpha = \frac{a}{b} \Rightarrow \tan\alpha = \frac{9}{12} \Rightarrow \tan\alpha = 0{,}75$$

$$\text{sen}\,\beta = \frac{b}{c} \Rightarrow \text{sen}\,\beta = \frac{12}{15} \Rightarrow \text{sen}\,\beta = 0{,}8$$

$$\cos\beta = \frac{a}{c} \Rightarrow \cos\beta = \frac{9}{15} \Rightarrow \cos\beta = 0{,}6$$

$$\tan\beta = \frac{b}{a} \Rightarrow \tan\beta = \frac{12}{9} \Rightarrow \tan\beta = \frac{4}{3}$$

<u>Exemplo 2:</u>

Se α e β são as medidas de dois ângulos agudos de um triângulo retângulo e sen $\alpha = \frac{1}{3}$, determinar sen β, cos β, cos α, tan α e tan β.

Solução:

Como $\alpha + \beta = 90^{o}$ temos que sen α = cos β, então: cos $\beta = \frac{1}{3}$.

Como $\text{sen}^2\,\alpha + \cos^2\,\alpha = 1$

$$\Rightarrow \cos^2\alpha = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 \Rightarrow \cos^2\alpha = 1 - \frac{1}{9} \Rightarrow \cos^2 = \frac{8}{9} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Sendo cos α = sen β temos que sen β $= \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

Calculando as tangentes, temos:

$$\tan\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2\sqrt{2}}{3}} \Rightarrow \tan\alpha = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

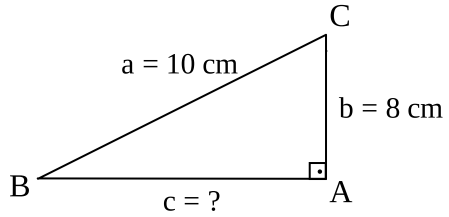
$$\tan\beta = \frac{\operatorname{sen}\beta}{\cos\beta} = \frac{\frac{2\sqrt{2}}{3}}{\frac{1}{3}} \Rightarrow \tan\beta = 2\sqrt{2}$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1) Determine seno, cosseno e tangente de cada um dos ângulos agudos do triângulo retângulo ABC nos casos abaixo, onde a, b e c são as medidas dos seus lados:
   a) a = 30 cm; b = 40 cm; c = 50 cm
   b) a = 4 cm; b = 3 cm; c = $\sqrt{7}$ cm
   c) a = 1 cm; b = 1 cm; e o ângulo C é reto
   d) a = 5 cm; b = 8 cm; e o ângulo B é reto

2) Ache seno, cosseno e tangente do maior dos ângulos agudos de um triângulo retângulo ABC, sabendo que:
   a) o perímetro mede 36 cm e a hipotenusa 15 cm.
   b) a hipotenusa mede 5 cm e o triângulo é isósceles.
   c) os catetos medem 6 cm e 4,5 cm.

3) Determine o que se pede:

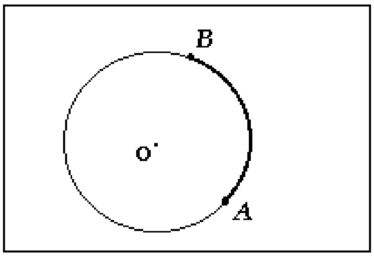


sen B = ? tan C = ?
sen C = ? cos B = ?
tan B = ? cos C = ?

4) Sendo α e β as medidas dos dois ângulos agudos de um triângulo retângulo, determine:
   a) cos α, sen β, cos β e tan β, conhecendo sen α = $\dfrac{3}{5}$
   b) cos α, sen β, sen α , tan α , tan β, conhecendo cos β $= \dfrac{\sqrt{5}}{5}$

3. ARCOS E ÂNGULOS DE CIRCUNFERÊNCIA

Consideremos dois pontos A e B de uma circunferência:



Chamaremos de arco AB a qualquer uma das partes dessa circunferência, compreendida entre os pontos A e B, o qual indicaremos por **AB** ou **BA.** Os pontos A e B são as extremidades do arco AB e pertencem a ele.

Quando A=B, dizemos que uma das partes é o *arco nulo* e a outra é o *arco de uma volta.*

Para cada arco AB, de uma circunferência existe em correspondência um ângulo central AOB.

3.1 MEDIDA DE ARCOS

Imagine uma circunferência dividida em 360 partes iguais. Cada uma destas partes é um arco de medida 1º (um grau) e é usado para medir, em graus, qualquer arco contido na mesma circunferência .

Definição:
Grau: um grau (1º) é o arco unitário que corresponde a 1/360 da circunferência.
Grado: um grado (1gr) é o arco unitário que corresponde a 1/400 da circunferência.
Radiano: um radiano (1 rad) é o arco que tem o mesmo comprimento do raio da circunferência que o contém.

Consequentemente, *radiano (1 rad)* é o arco unitário que corresponde a $1/2\pi$ da circunferência. Assim estamos dizendo que se pudéssemos esticar o arco de 1 *rad* , o valor desta medida seria exatamente o raio da circunferência .

Uma circunferência (arco de uma volta) mede 360º ou 2π rad. E o seu comprimento vale: $C = 2\pi R$ sendo R, a medida do raio.
As unidades estão relacionadas pela correspondência:

$$360^\circ \longrightarrow 2\pi\text{rad}$$

ou, ainda:

$$180^\circ \longrightarrow \pi\text{rad}$$

3.2 CONVERSÃO DE GRAUS EM RADIANOS

Como as medidas (radianos e graus) são diretamente proporcionais, podemos estabelecer a seguinte regra de três simples:

Exemplo:

Converter em **radianos** a medida do arco 30º.

Solução:

$$\left.\begin{matrix} 180^\circ \to \pi\,\text{rad} \\ 30^\circ \to x\,\text{rad} \end{matrix}\right\} \Rightarrow x = \frac{30\pi}{180} = \frac{\pi}{6}\text{rad}$$

logo:

30º correspondem a $\frac{\pi}{6}$rad

3.3 CONVERSÃO DE RADIANOS EM GRAU

Exemplo:

Converter em graus a medida do arco de $\frac{3\pi\pi}{2}$rad

Solução:

Substitui-se π rad por 180º e, em seguida, efetuam-se as operações indicadas.
Isto é:

$$\frac{3\pi}{2}\text{rad} = \frac{3}{2}\pi\text{rad} = \frac{3}{2}\cdot 180^\circ = 270^\circ$$

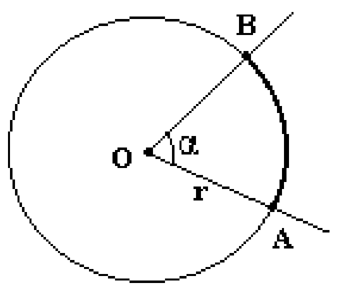
Portanto:

270º correspondem a $\frac{3\pi\pi}{2}$rad .

3.4 COMPRIMENTO DE UM ARCO

Considerando a figura abaixo, seja ϑ a medida em radianos do ângulo $A\hat{O}B$ e procuramos calcular o comprimento ℓ do arco AB
Sabemos que a medida de um arco em radianos é o número que indica quantas vezes um arco, de comprimento igual ao raio, cabe no arco medido, isto é:

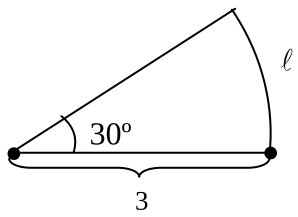
$\alpha = \frac{\ell}{r}$ e, então: $\ell = r \cdot \alpha$



isto é, o comprimento do arco AB é o produto do raio da circunferência que o contém pela medida (em radianos) do ângulo central correspondente.

<u>Exemplo:</u>

Calcular ℓ, na figura.



Solução:

Exprimindo 30º em radianos,

temos que 30º = $\frac{\pi}{6}$rad

portanto: $\ell = r.\ \frac{\pi}{6}\text{rad} \ = 3.\ \frac{\pi}{6}\text{rad} \ = \frac{\pi}{2}\text{rad} \cong\ 1{,}57$ cm

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1) Exprimir em radianos:

a) 36º b) 135º c) 300º

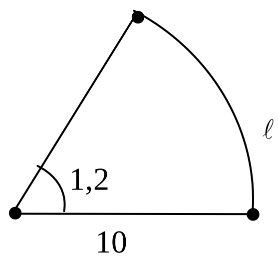
2)Exprimir em graus:

a) $\frac{\pi}{6}$rad b) $\frac{\pi}{4}$rad c) $\frac{7\pi}{4}$rad

3) Mostre que um arco de 1 rad mede aproximadamente 57º.

4) Qual o comprimento de uma circunferência de raio 5 cm?

5) Calcular ℓ na figura:



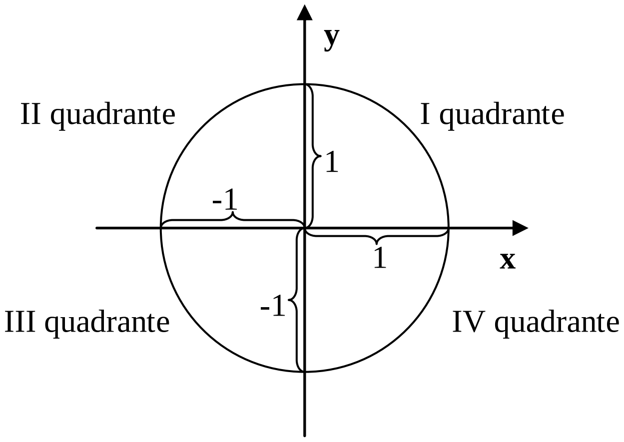
6) Um móvel faz um percurso de meio quilômetro sobre uma circunferência de diâmetro 200 metros. Qual a medida do ângulo central correspondente ao percurso?

7) Calcular o menor ângulo entre os ponteiros de um relógio nos seguintes instantes:

a) 10h 30min b) 2h 15min c) 13h 35min

4. CICLO TRIGONOMÉTRICO

Agora Considere esta figura:



a) o centro da circunferência coincide com a origem de um sistema de coordenadas cartesianas;

b) o raio da circunferência corresponde a uma unidade de medida dos eixos perpendiculares.

Ciclo trigonométrico é uma circunferência à qual se associa um sistema de coordenadas ortogonais com origem no centro, tendo como raio a unidade de medida dos eixos.

A medida de um arco num ciclo trigonométrico é feita através destas convenções usuais:

a) adota-se um ponto de origem, o ponto A, como a origem do percurso de qualquer arco trigonométrico;

b) a todo arco trigonométrico se associa um sinal + (positivo) ou – (negativo), conforme o sentido do seu percurso;

c)consideram-se positivos os arcos gerados no sentido anti-horário, e negativos os arcos gerados no sentido horário.

Observações:

a) Na Geometria, o maior arco é o de 360º (uma volta), e o menor é o de 0º (arco nulo).
b) Na Trigonometria, podemos ter não só arcos maiores que 360º (arcos de mais de uma volta), mas também arcos negativos (menores que 0º).
c) A medida de um arco trigonométrico pode ser qualquer número real.

4.1 LOCALIZAÇÃO GRÁFICA DA EXTREMIDADE DE ARCOS NOS QUADRANTES

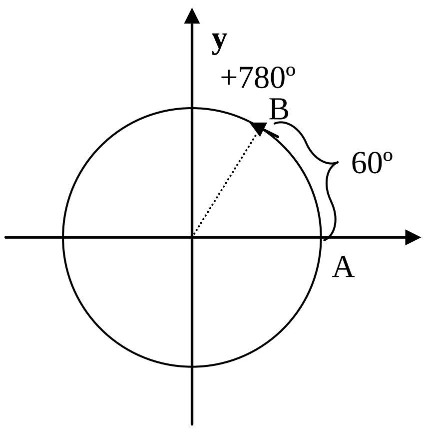
Exemplo 1:

a) Em qual dos quadrantes está localizada a extremidade do arco de 780º ?

Solução: $\frac{780º}{360º} = 2 \cdot 360º + 60º$

O quociente 2 representa o número de voltas (duas voltas) completas no sentido anti-horário, a partir da origem.
O resto 60º significa que, após duas voltas completas, o arco ainda percorreu 60º (no mesmo sentido: anti-horário).
Como o arco de 60º é menor que 360º, ele determina o quadrante em que está localizada a extremidade do arco de 780º.

Portanto, a extremidade do arco de 780º está localizada no primeiro quadrante.



<u>Exemplo 2:</u>

Ache a primeira determinação positiva, e a primeira determinação negativa do ciclo correspondente ao número x, sendo x = $\frac{17\pi}{4}$:

Solução:

$$x = \frac{17\pi}{4} = \frac{\pi + 16\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + \underbrace{4\pi}_{2\,\text{voltas}}$$

$$\frac{\pi}{4} = \frac{2\pi}{8} = \frac{1}{8} \cdot 2\pi \ \ (\text{um oitavo do ciclo})$$

Logo, a primeira determinação positiva é $\frac{\pi}{4}$ rad. O arco trigonométrico é: $\frac{\pi}{4} + k \cdot 360º,\ k \in Z$.
A primeira determinação negativa ocorre para k = -1. Então, a = 30º + (-1).360º => a = -330º.
Portanto a primeira determinação negativa é –330º.

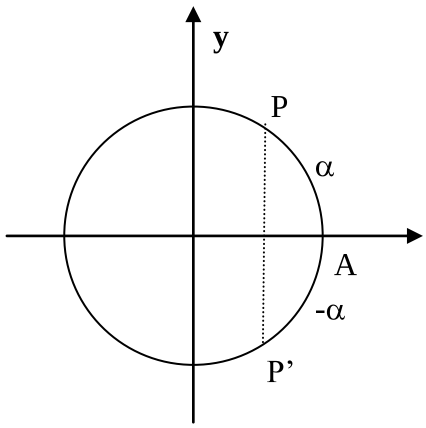
EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1) Ache a primeira determinação positiva, a primeira determinação negativa dos arcos cujas medidas são:

a) 75º	b) 1240º	c) 720º	d) 300º
e) 24πrad	f) $\frac{33\pi}{5}$rad	g) $\frac{17\pi}{3}$rad	h) $\frac{\pi}{6}$rad
i) –60º	j) –1254º	k) $-\frac{5\pi}{3}$rad	l) $-\frac{15\pi}{2}$rad

4.2 EXPRESSÃO DO TERMO GERAL DE UM ARCO

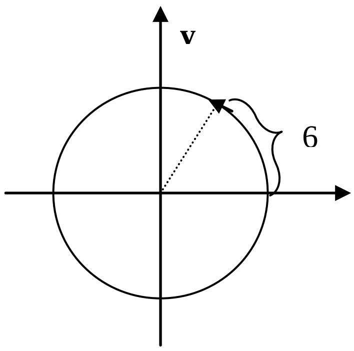
Considerando o ciclo trigonométrico, a cada número real ϑ, positivo, corresponde um único ponto P, que é a extremidade de um arco no sentido anti-horário de origem A. Analogamente, a cada número real $-\vartheta$, negativo, corresponde um único ponto P', que é a extremidade de um arco no sentido horário de origem A.



Podemos dizer também que um ponto P pertencente ao ciclo trigonométrico é imagem de infinitos números reais, pois existem infinitos arcos com origem em A e extremidade P, diferindo entre si através do número de voltas ou do sentido das voltas.

Sendo assim, se P é imagem do número real ϑ, todos os números reais que "coincidem com P" são do tipo: $x = \alpha + 2k\pi,\ k \in Z$

<u>Exemplo:</u>



$$x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in Z$$

5. A FUNÇÃO SENO

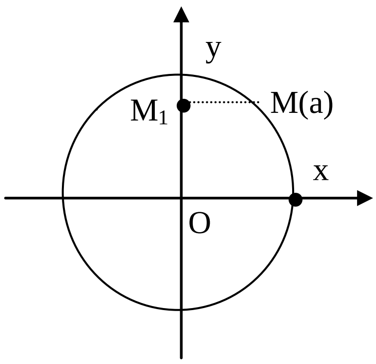
Sabemos que a todo número real <u>a</u> corresponde um único ponto M do ciclo trigonométrico; a ordenada de M, $\overline{OM_1}$, em relação ao sistema cartesiano x x y, é a função de a, isto é, a cada a corresponde um único número $\overline{OM_1}$. Esta função é denominada *função seno.*

Definição:

Seja M a imagem, no ciclo, do número real a. Por definição:

Seno de x é a ordenada de M.

Representação: $\operatorname{sen} a = \overline{OM_1}$



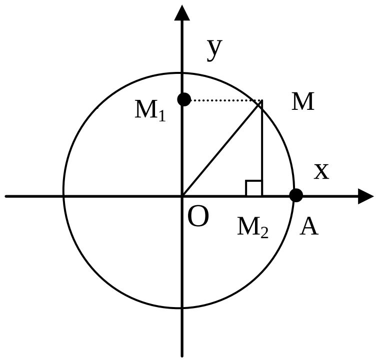
Observações: A definição do seno de um ângulo agudo, no triângulo retângulo, é coerente com a definição acima, restringindo-se aos valores de a pertencentes ao intervalo $]0, \frac{\pi}{2}[$, então, sua imagem M está no 1º quadrante do ciclo e $\operatorname{sen} a = \overline{OM_1}$ (ver figura).

Por outro lado, a é a medida em radianos do ângulo agudo $A\hat{O}M$ e considerando o triângulo M_2OM conforme indica a figura, temos:

$$\operatorname{sen} a = \frac{\overline{OM_1}}{1}$$

como $\overline{M_2M} = \overline{OM_1}$ e $\overline{OM} = 1$ (raio) segue que:

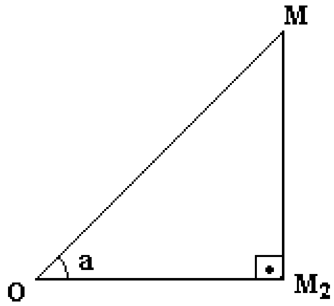
$$\operatorname{sen} a = \frac{\overline{OM_1}}{1} = \overline{OM_1}$$



Devemos notar, ainda, o uso freqüente da unidade grau em medidas de ângulos. Neste caso, o seno do número real que se obtém exprimindo a medida em radianos;
por exemplo:

$\operatorname{sen} 30^\circ = \operatorname{sen}\frac{\pi}{6}$, $\operatorname{sen} 90^\circ = \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}$, etc...

As mesmas observações são válidas para as demais funções trigonométricas.



5.1 VALORES NOTÁVEIS

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
sen x	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	0	-1	0

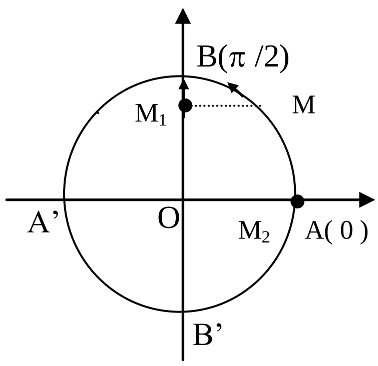
5.2 GRÁFICO DA FUNÇÃO Y = SEN X

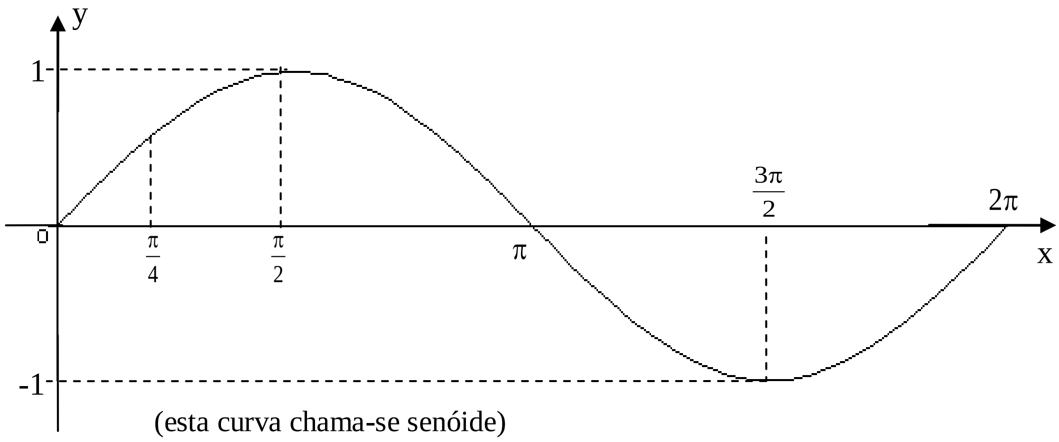
A tabela anterior fornece alguns pontos do gráfico da função seno. Por outro lado, vamos supor que um ponto M percorra o ciclo trigonométrico, a partir de A no sentido anti-horário.

Quando M percorre o 1º quadrante (de A até B) o ponto M_1 percorre o segmento OB (de O para B).

Assim, se x percorre o intervalo $0 \mapsto \frac{\pi}{2}$ então

y = sen x é crescente e percorre o intervalo $0 \mapsto 1$.
Analisando-se uma volta completa do ponto M, é razoável admitirmos o seguinte gráfico para a função y = sen x:





(esta curva chama-se senóide)

Observemos que:

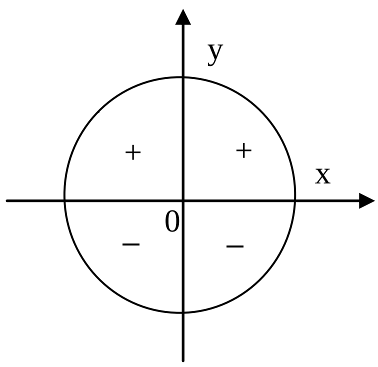
1) Pela definição, o domínio da função seno é R (reais). A imagem da função seno é o intervalo [-1 , 1].
   Para todo x temos: $-1 \leq \text{sen } x \leq 1$.
2) A função seno é ímpar, pois sen(-x) = -sen(x)
3) A função seno é periódica de período 2π
4) Analisando os sinais da ordenada de M, em cada quadrante, temos:

1º) $Q: x \in]0; \frac{\pi}{2}[\Rightarrow \text{sen } x > 0$

2º) $Q: x \in]\frac{\pi}{2}, \pi[\Rightarrow \text{sen} x > 0$

3º) $Q: x \in]\pi; \frac{3\pi}{2}[\Rightarrow \text{sen } x < 0$

4º) $Q: x \in]\frac{3\pi}{2}; 2\pi[\Rightarrow \text{sen } x < 0$



5) A função seno é limitada, porque $|\text{sen } x| \leq 1$, para todo x.

A partir de 2π a função seno começa a repetir os seus valores.

As funções que se comportam de maneira semelhante ao seno, isto é, repetem sua variação, são chamadas *funções periódicas.*

Definição: Uma função $f: A \to B$ é periódica se existir um número p que satisfaz a condição:
$f(x+p) = f(x)$ para todo $x \in A$.

O menor valor positivo de p chama-se período da função f. Intuitivamente, período é o comprimento do menor intervalo no qual a função passa por um ciclo completo de variação.

Observando o gráfico da função seno vemos que seu período é $\mathbf{p = 2\pi}$.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1) Dê o domínio, a imagem e o período das funções:

a) $y = \text{sen } \frac{x}{2}$ b) $y = \text{sen}(-x)$

2) Na função y = sen(mx), determinar m tal que o período da função seja:

a) π b) $\frac{\pi}{4}$

3) Dê o período de cada uma das funções abaixo:

a) $y = 6 + \text{sen}\,\frac{x}{2}$ b) $f(x) = -3 + 2\,\text{sen}\,x$

c) $y = \frac{2}{3} + \pi\,\text{sen}(2x)$ d) $y = -\,\text{sen}(-3x)$

4) Analise as funções abaixo, dando o domínio, a imagem, o período e o gráfico de cada uma delas:

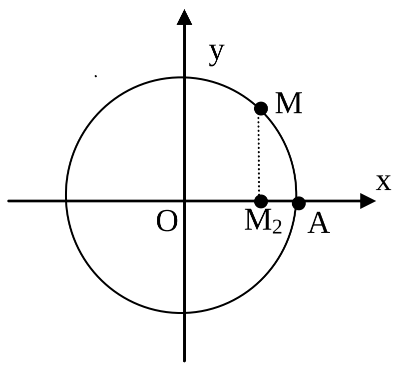
a) $y = \text{sen}\,(x - \frac{\pi}{2})$ b) $f(x) = -1 + \text{sen}\,x$

b) $y = -1 + 3\text{sen}(x + \pi)$ d) $y = -3\,\text{sen}(\frac{x}{2})$

6. FUNÇÃO COSSENO

Sabemos que a todo número real x corresponde um único ponto M do ciclo trigonométrico; a abscissa de M, OM_1, em relação ao sistema cartesiano X x Y, é a função de x, isto é, a cada x corresponde um único número OM_2.
Esta função é denominada *função cosseno* .

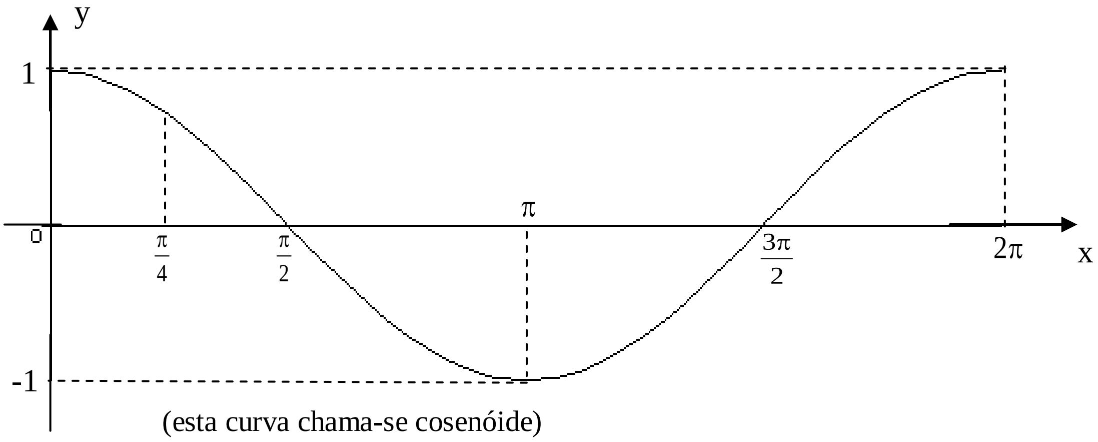
Definição:

Seja M a imagem, no ciclo, do número real x. Por definição: *cosseno de x* é a abscissa de M. representação: $\cos\ x = \overline{OM_2}$	

6.1VALORES NOTÁVEIS

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
cos x	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	-1	0	1

6.2 GRÁFICO DA FUNÇÃO Y = COS X



(esta curva chama-se cosenóide)

Observemos que:

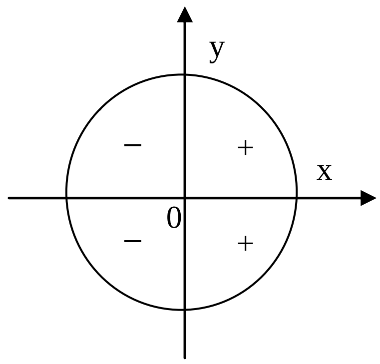
1) O domínio da função cosseno é R.
2) A imagem é o intervalo [-1 , 1].
3) A função cosseno é periódica e de período p = 2π
4) A função cosseno é função par, pois cos(-x) = cos x
5) Sinais:

1º) $Q : x \in]0, \frac{\pi}{2}[\;\Rightarrow\; \cos x > 0$

2º) $Q : x \in]\frac{\pi}{2}, \pi[\;\Rightarrow\; \cos x < 0$

3º) $Q : x \in]\pi, \frac{3\pi}{2}[\;\Rightarrow\; \cos x < 0$

4º) $Q : x \in]\frac{3\pi}{2}, 2\pi[\;\Rightarrow\; \cos x > 0$



6) A função cosseno é limitada, porque $|\cos x| \leq 1$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1) Dê o período das funções definidas por:

a) y = 6 + cos x
b) y = cos(x - π)
c) y = cos(-4x)
d) $y = \cos(\frac{5x}{2})$

2) Analise as funções abaixo, dando o domínio, a imagem, o período e o gráfico de cada uma delas:

a) $y = \cos(x - \frac{\pi}{2})$
b) y = cos(-2x)
c) f(x) = cos(2x - π)
d) y = -1 + 3cos(x + π)

3) Dada a função y = m +n.cos bx:

a) ache m, n e b de modo que a imagem seja [-3, 4] e o período 4π

4) Determine para que valores de m, existe x tal que:

a) sen x = 5m + 12 b) sen x = $\frac{5m+1}{3}$

c) cos x = $\frac{3m+1}{m-3}$ d) cos x = $\frac{m^2-9m+10}{10}$

7. A FUNÇÃO TANGENTE

Os únicos pontos do ciclo que têm abscissa zero são B e B' (interseções do ciclo com o eixo das ordenadas).

Então :

$$\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

Sendo assim, a expressão $\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$ só tem significado para $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$.

Definição:

Denominamos *função tangente* à função $f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$

definida para todo x real diferente de $\frac{\pi}{2} + k\pi$.

representação: $\tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$

7.1 INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA

Por definição, seno e cosseno são, respectivamente, ordenada e abscissa de pontos do ciclo trigonométrico. Poderíamos dizer, então, que o eixo das ordenadas é o "eixo dos senos" e o eixo das abscissas é o "eixo dos cossenos".

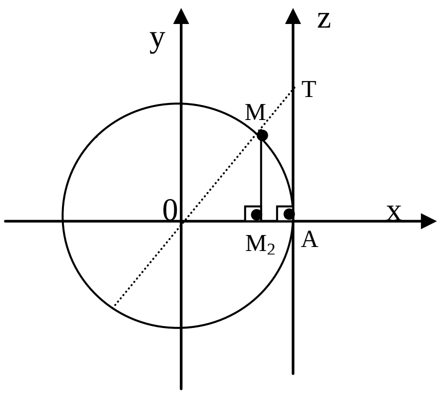
Seja z a reta tangente ao ciclo no ponto A (origem). Chamaremos "eixo das tangentes" o eixo z com as seguintes características:

1º) é orientado no mesmo sentido do eixo das ordenadas.

2º) sua origem é A.

Se M é o ponto do ciclo associado a um número real x, $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, então a reta OM intercepta o eixo das tangentes em algum ponto T.

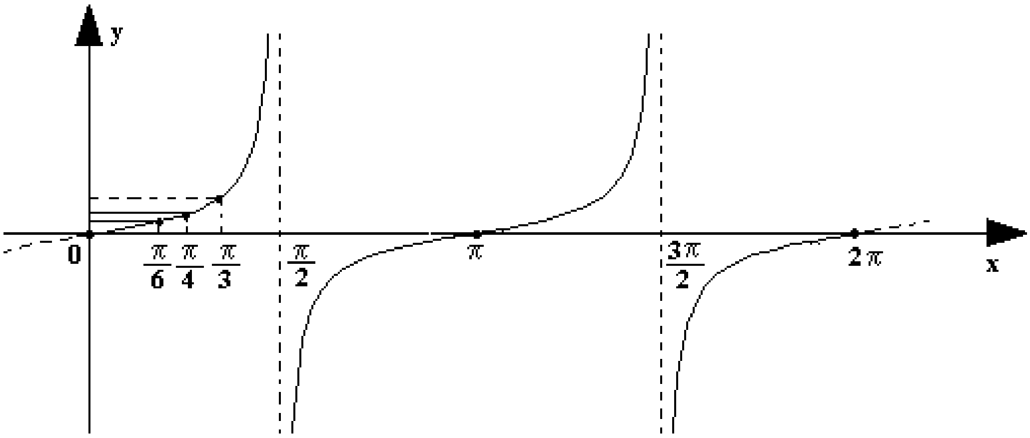
$$\overline{AT} = \operatorname{tg} x$$



7.2 VALORES NOTÁVEIS

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
tan x	0	1	$\nexists$	0	$\nexists$	0

7.3 GRÁFICO DA FUNÇÃO Y = tg x



Observemos que:

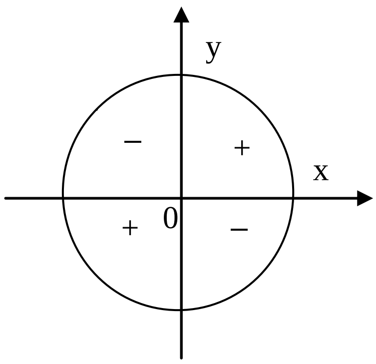
1) O domínio da função tangente é $D = R - \{x \mid x = \frac{\pi}{2} + k\pi$
2) A imagem é R.
3) A função tangente é periódica e de período p = π.
4) A função tangente é função ímpar, pois tan(-x) = -tan(x)
5) Sinais:

$1^o)\ Q: x \in]0, \frac{\pi}{2}[\quad \Rightarrow \quad tg\,x > 0$

$2^o)\ Q: x \in]\frac{\pi}{2}, \pi[\quad \Rightarrow \quad tg\,x < 0$

$3^o)\ Q: x \in]\pi, \frac{3\pi}{2}[\quad \Rightarrow \quad tg\,x > 0$

$4^o)\ Q: x \in]\frac{3\pi}{2}, 2\pi[\quad \Rightarrow \quad tg\,x < 0$



EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1) Determine o domínio e o período das funções abaixo:

a) $y = 2\tan(2x - \pi)$

b) $y = \tan(\frac{\pi}{4} + x)$

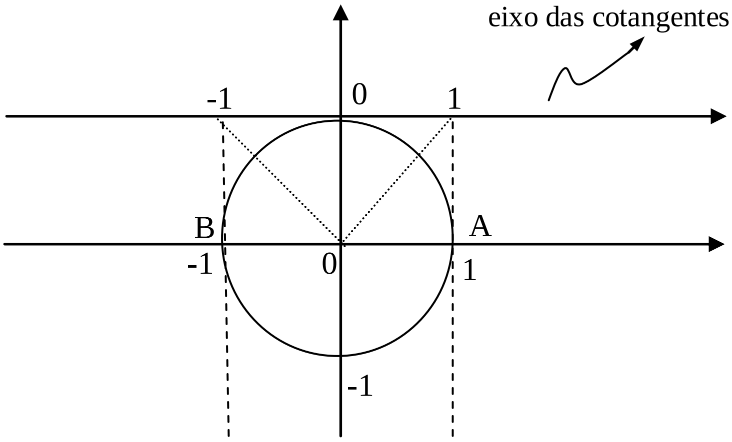
b) $y = 3 + \tan(x + \frac{\pi}{6})$

d) $f(x) = 3\tan(\frac{x}{4} + \frac{\pi}{10})$

8. FUNÇÃO COTANGENTE

Note que os arcos com extremidades nos pontos A e B não possuem cotangente, porque a reta AB não intercepta o eixo das cotangentes.

A expressão geral dos arcos com extremidades e A e B é $k\pi$ ($k \in Z$) e para os demais restantes é uma expressão geral diferente de $k\pi$ ($k \in Z$) .



cot 45º = 1
cot 135º = 1

Então podemos dizer:

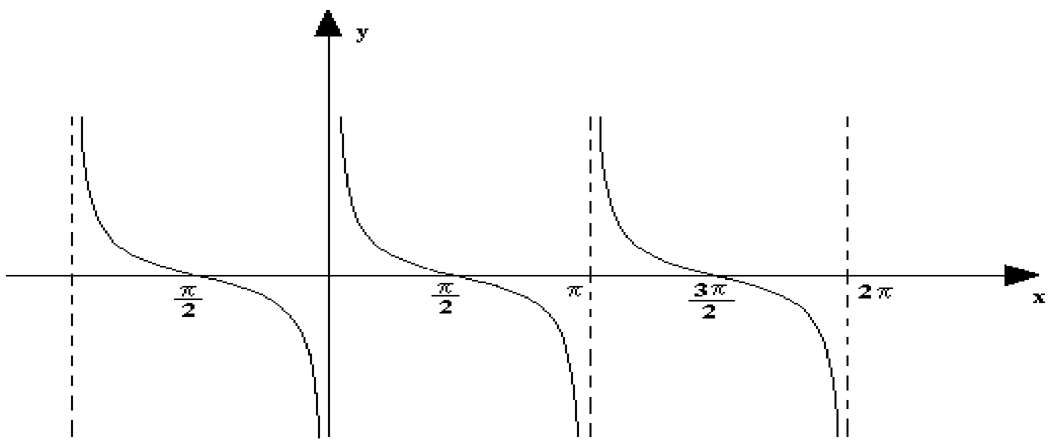
Função cotangente é a função que associa a cada arco $x \in R$ e $x \neq k\pi$ ($k \in Z$) o número cot x.

$$f(x) = \cot x \qquad \text{ou} \qquad y = \cot x$$

Observemos que:

1) $D(f) = \{x \in R / x \neq k\pi,\ k \in Z\}$ (para todo arco $x \in R$ diferente de $k\pi$, existe sempre o número cot x).
2) $Im(f) = R$ (o número cot x pode assumir qualquer valor real).
3) *Período* p = π
4) *Paridade:* É função ímpar, pois cot(-x) = -cot(x)

8.1 GRÁFICO DA FUNÇÃO Y = COT X



$$\cot x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}, \text{ ou seja:}$$

$$\cot x = \frac{1}{\tan x} \quad \forall x \in R \text{ onde existam as funções}$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS:

1) Dê o domínio e o período de cada uma das funções abaixo:

a) $y = \cot(3x - \pi)$ b) $f(x) = \cot(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3})$

2) Determine o que se pede em cada caso:

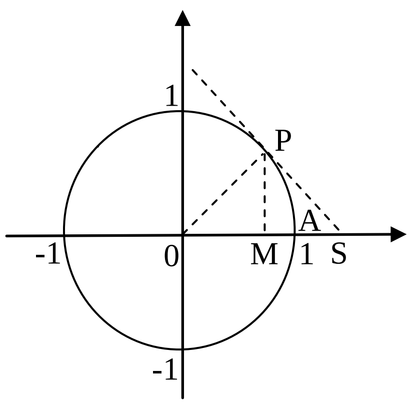
a) tan x, dados sen x = $\frac{-3}{8}$ e cos x = $\frac{\sqrt{55}}{8}$. Ache também o quadrante de x.

b) cot x, dados cos x = $\frac{-\sqrt{5}}{3}$ e tan x = $\frac{-2\sqrt{5}}{5}$, ache o quadrante de x.

9. FUNÇÃO SECANTE

Seja um arco x e uma tangente à circunferência trigonométrica no ponto P, interceptando o eixo das abcissas, em S.

O segmento OS representa a secante do arco x, que se abrevia por sec x e que se lê "secante de x".



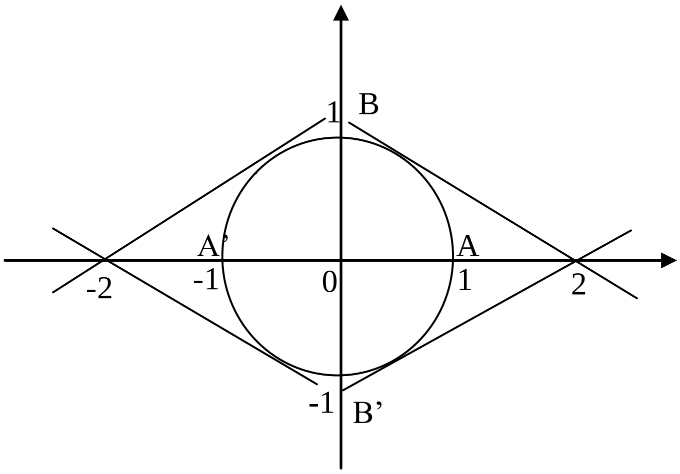
A secante de um arco é também um número trigonométrico que se define através do inverso do número cosseno desse mesmo arco.

Observe:

$$\Delta OMP \sim \Delta OSP \Rightarrow \frac{\overline{OP}}{\overline{OM}} = \frac{\overline{OS}}{\overline{OP}},$$

$$\text{e como } \left\{ \begin{array}{lcl} \overline{OP} & = & 1 \\ \overline{OM} & = & \cos x \\ \overline{OS} & = & \sec x \end{array} \right\} \text{ então: } \frac{1}{\cos x} = \frac{\sec x}{1} \Rightarrow \sec x = \frac{1}{\cos x}$$

Observe:



arco	*secante*
0º	1
60º	2
90º	$\nexists$
120º	-2
180º	-1
240º	-2
270º	$\nexists$
300º	2
360º	1

Função secante é a função que associa a cada arco x ∈ R e $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, (k ∈ Z) o número sec x.

$f(x) = \sec x$ ou $y = \sec x$

Domínio:

D(f) = $\left\{ x \in R \,/\, x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z \right\}$ (para todo arco x ∈ R e diferente de $\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z$, existe sempre o número sec x).

Imagem:

Analisemos o valor absoluto da fração $\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$.

O denominador representado por cos x é um número cujo valor está entre –1 e 1, ou seja $-1 \leq \cos x \leq 1$.

Logo:

$$\sec x \leq -1 \quad \text{ou} \quad \sec x \geq 1$$

E com isso:

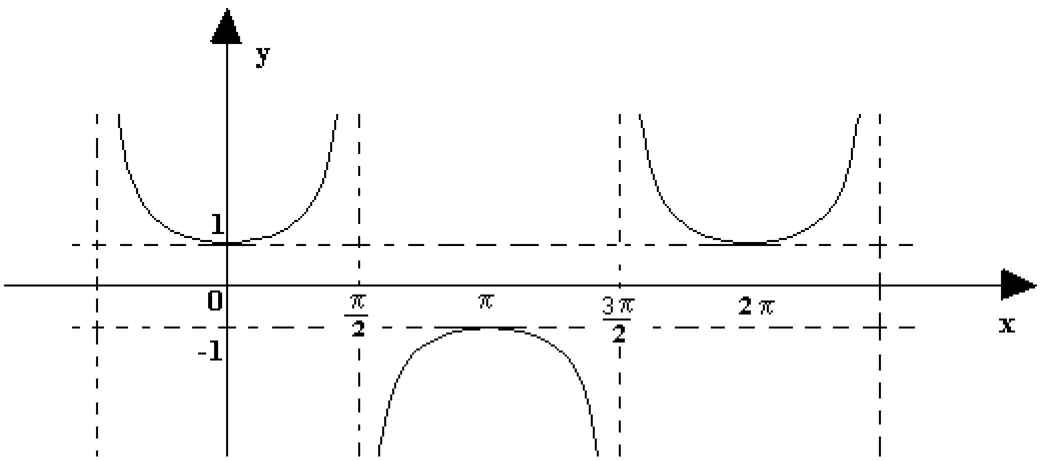
$$\operatorname{Im}(f) = \{ y \in R \,/\, y \leq -1 \;\text{ ou }\; y \geq 1 \}$$

Período: p = 2π

Paridade: É função par, pois sec x = sec (-x)

9.1 GRÁFICO DA FUNÇÃO SECANTE

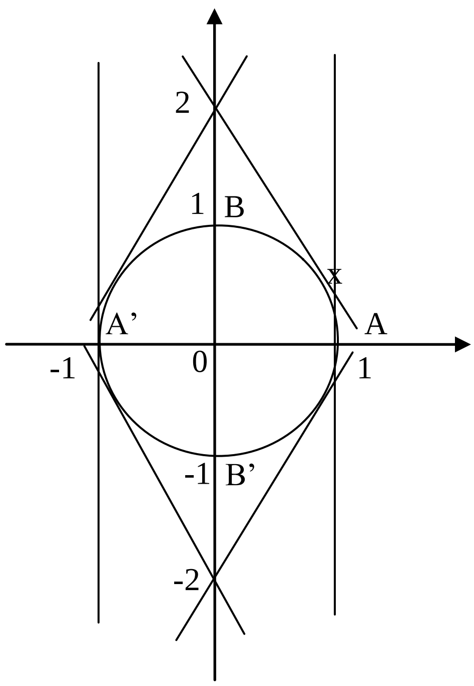
A representação gráfica da função y = sec x, no plano cartesiano, é uma curva descontínua para $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ (k ∈ Z), denominada secantóide, e que passa pelo ponto (0,1).



Período: 2π (o mesmo da função cosseno).

10. FUNÇÃO COSSECANTE

Observe:



arco	*secante*
0º	∄
30º	2
90º	1
150º	2
180º	∄
210º	-2
270º	-1
330º	-2
360º	∄

Função cossecante é a função que associa a cada arco x ∈ R e x ≠ kπ (k ∈ Z) o número cossecx

$f(x) = \text{cossec}\,x$ ou $y = \text{cossec}\,x$

Domínio:

D(f) = {x ∈ R / x ≠ kπ, k ∈ Z} (para todo x ∈ R e diferente de kπ, k ∈ Z, existe sempre o número cossec x).

Imagem:

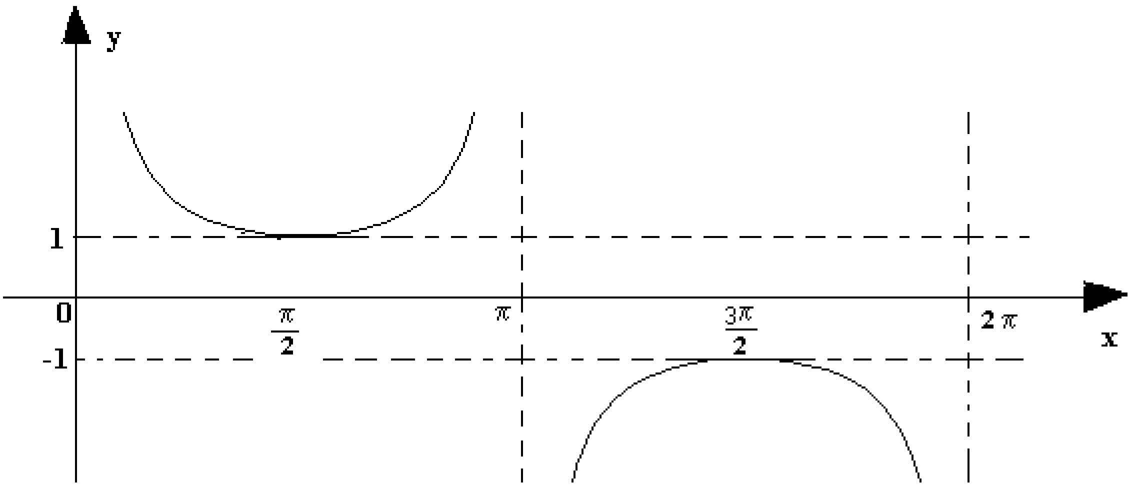
Analogamente ao que fizemos com relação à secante, se $\operatorname{cossec} x = \dfrac{1}{\operatorname{sen} x}$ e $-1 \leq \operatorname{sen} x \leq 1$, então $\operatorname{cossec} x \leq 1$ ou $\operatorname{cossec} x \geq 1$.

Logo:

$$\operatorname{Im}(f) = \{y \in R \,/\, y \leq -1 \text{ ou } y \geq 1\}$$

Paridade: É função par, pois cossec (x) = cossec(-x)

10.1 GRÁFICO DA FUNÇÃO COSSECANTE



Período: 2π (o mesmo da função seno).

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1) Determine sec x nos casos abaixo:

a) cos x = $\dfrac{1}{2}$ b) cos x = $\dfrac{-3}{8}$

2) Determine cos x nos casos abaixo:

a) sec x = 5 b) sec x = $\dfrac{-\sqrt{5}}{2}$

3) Determine cossec x nos casos abaixo:

a) sen x = $\dfrac{-\sqrt{3}}{2}$ b) sen x = $\dfrac{1}{5}$

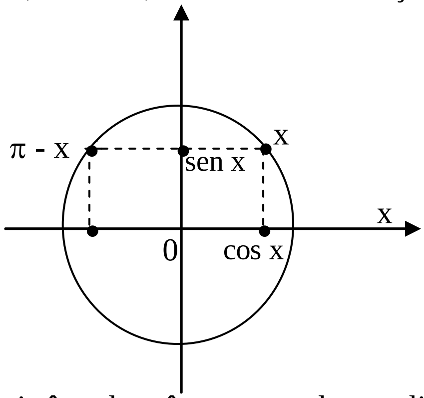
11. REDUÇÃO DE QUADRANTES

11.1 REDUÇÃO AO PRIMEIRO QUADRANTE

As fórmulas que veremos a seguir permitem calcular o seno e o cosseno de um número real qualquer, desde que sejam conhecidos os valores destas funções para números x $\in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ (isto é, com imagens no 1º quadrante do ciclo). São chamadas fórmulas de redução ao 1º quadrante e, por sua causa, as *tábuas trigonométricas* , só contém os valores de *sen* x, *cos* x e *tan* x para x $\in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ *(ângulos de 0º a 90º)*

11.2 REDUÇÃO DO 2º AO 1º QUADRANTE

Como os números reais x e π - x têm imagens, no ciclo, simétricas em relação ao eixo das ordenadas, temos:



sen (π - x) = sen x , para todo x

cos (π - x) = -cos x , para todo x

tan (π - x) = -tan x , se x $\neq \frac{\pi}{2} + k\pi$.

Observemos que a soma de (π - x) com x é π. Se dois ângulos têm a soma das medidas igual a π rad ou 180º dizemos que eles são ângulos suplementares.

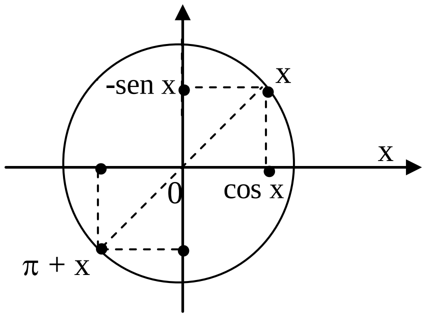
Do estudo feito decorre que para reduzir um ângulo, do 2º ao 1º quadrante, basta achar o seu suplemento. Por exemplo:

1) O suplemento de um ângulo de 150º é um ângulo de 30º porque
150º + 30º = 180º. Então: sen 150º = sen 30º e cos 150º = - cos 30º

2) sen $\frac{3\pi}{4}$ = sen $\frac{\pi}{4}$ e cos $\frac{3\pi}{4}$ = - cos $\frac{\pi}{4}$ (porque $\frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \pi$)

11.3 REDUÇÃO DO 3º AO 1º QUADRANTE

Como os números reais x e π + x têm, no ciclo, imagens diametralmente opostas, temos:



sen (π + x) = - sen x, para todo x

cos (π + x) = - cos x, para todo x

tan (π + x) = tan x, se x $\neq \frac{\pi}{2} + k\pi$.

Observemos que a diferença entre (π + x) e x é π .

Para reduzir um ângulo do 3º ao 1º quadrante é suficiente subtrair 180º do ângulo inicial. Por exemplo:

1) sen 230º = - sen 50º e cos 230º = - cos 50º
(porque 230º - 180º = 50º)

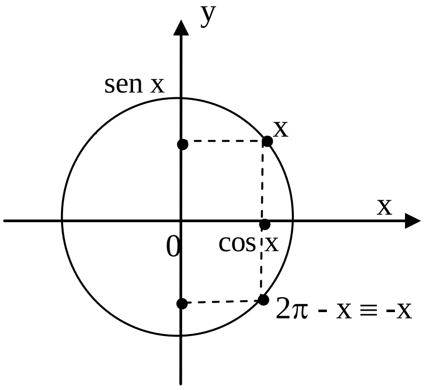
11.4 REDUÇÃO DO 4º AO 1º QUADRANTE

Como os números reais x e 2π - x têm, imagens, no ciclo, simétricas em relação ao eixo das abcissas, temos:

sen (2π - x) = - sen x, para todo x

cos (2π - x) = cos x, para todo x

tan (2π - x) = - tan x, se x $\neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$.



Devemos observar que –x e 2π - x têm a mesma imagem no ciclo, pois 2π - x corresponde a –x mais uma volta.
Então

sen (2π - x) = sen (-x) = - sen x,

cos (2π - x) = cos (-x) = cos x,

tan (2π - x) = tan (-x) = - tan x.

A soma de (2π - x) com x é 2π. Se dois ângulos têm a soma das medidas igual a 2π rad, ou 360º, dizemos que eles são *ângulos replementares.*

Do estudo feito decorre que para reduzir um ângulo, do 4º ao 1º quadrante, basta achar o seu replemento. Por exemplo:

1) o replemento de um ângulo de 300º é um ângulo de 60º porque
300º + 60º = 360º. Então: sen 300º = - sen 60º e cos 300º = cos 60º.

11.5 ÂNGULOS COMPLEMENTARES

Já sabemos que dois ângulos são complementares quando a soma de suas medidas é 90º, e conhecemos as seguintes relações entre ângulos complementares:

sen (90º - x) = cos x
cos (90º - x) = sen x

Generalizando temos:

$\text{sen}\,(\frac{\pi}{2} - x) = \cos x$, para todo x

$\cos\,(\frac{\pi}{2} - x) = \text{sen}\, x$, para todo x

$\tan\,(\frac{\pi}{2} - x) = \cot x$, se $x \neq k\pi$.

(Observe que os números $\frac{\pi}{2} - x$ e x têm imagens, no ciclo, simétricas em relação à reta que contém as bissetrizes do 1º e 3º quadrantes. A demonstração destas fórmulas baseia-se na congruência dos triângulos assinalados na figura.)

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1) Calcular, por redução ao 1º quadrante:

a) sen 120º b) sen 225º c) $\cos \frac{11\pi}{6}$

d) $\cos \frac{5\pi}{4}$ e) $\sec \frac{11\pi}{6}$ f) $\text{cossec}\, \frac{5\pi}{6}$

g) $\tan \frac{15\pi}{4}$ h) tan 330º i) sec 210º

2) Simplificar as expressões:

a) $y = \dfrac{\text{sen}(\frac{\pi}{2} - x)\cdot \text{sen}(\pi + x)}{\cos(\pi - x)\cdot\cos(2\pi - x)}$ b) $y = \dfrac{\text{sen}(\pi - x)\cdot\tan(\pi + x)\cdot\cos(4\pi + x)}{\cos(\frac{\pi}{2} - x)\cdot\tan(3\pi - x)}$

3) Verificar que:

a) $\text{sen}\,(\frac{\pi}{2} + x) = \cos x$ e $\cos\,(\frac{\pi}{2} + x) = -\,\text{sen}\, x$

b) $\text{sen}\,(\frac{3\pi}{2} - x) = -\cos x$ e $\cos\,(\frac{3\pi}{2} - x) = -\,\text{sen}\, x$

12. RELAÇÕES FUNDAMENTAIS

Chamaremos relações fundamentais as fórmulas que estudaremos a seguir; elas relacionam entre si os valores das funções trigonométricas num mesmo número x.

12.1 AS CINCO RELAÇÕES PRINCIPAIS

1- $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$, para todo x.

Se M é a imagem, no ciclo, do número real x, então por definição, a ordenada de M é sen x e a abscissa de M é cos x, isto é, M(cos x, sen x). O raio do ciclo é 1. Então temos $d_{OM} = 1$, onde O é a origem do sistema cartesiano. Lembremos que a distância entre dois pontos $A(x_1 , y_1)$ e $B(x_2 , y_2)$ é dada pela fórmula:

$$d_{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}\ .$$

Assim,

$$d_{OM} = 1 \ \Rightarrow\ \sqrt{(\cos x - 0)^2 + (\operatorname{sen} x - 0)^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 1,$$

e fica demonstrada a primeira relação fundamental.

Das definições das funções trigonométricas temos:

2- $\tan x = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$ para todo $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$

3- $\cot x = \dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$ para todo $x \neq k\pi$

4- $\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$ para todo $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$

5- $\operatorname{cossec} x = \dfrac{1}{\operatorname{sen} x}$ para todo $x \neq k\pi$

12.2 RELAÇÕES DECORRENTES

6- $\cot x = \dfrac{1}{\tan x}$ para todo $x \neq k\dfrac{\pi}{2}$

(Decorre das relações (2) e (3)).

7- $\tan^2 x + 1 = \sec^2 x$ para todo $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$

(Decorre de (1), (2) e (4): $\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 1 \ \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{sen^2 x}{cos^2 x} + \frac{cos^2 x}{cos^2 x} = \frac{1}{cos^2 x} \quad \Rightarrow \quad tan^2 x + 1 = sec^2 x \;)$$

8- $1 + cot^2 x = cos\,sec^2 x$ para todo $x \neq k\pi$

(Decorre de (1), (3) e (5): $cos^2 x + sen^2 x = 1 \;\Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{sen^2 x}{sen^2 x} + \frac{cos^2 x}{sen^2 x} = \frac{1}{sen^2 x} \quad \Rightarrow \quad 1 + cot^2 x = cos\,sec^2 x \;)$$

Exemplos:

Dado sen x = $\frac{4}{5}$, $0 < x < \frac{\pi}{2}$, calcular as demais funções trigonométricas de x.

solução:

I $\quad cos^2 x + sen^2 x = 1 \;\Rightarrow\; \left(\frac{4}{5}\right)^2 + cos^2 x = 1 \;\Rightarrow\; cos^2 x = \frac{9}{25} \;\Rightarrow$ cos x = $+\frac{3}{5}$

II $\quad \tan x = \frac{sen\,x}{cos\,x} = \frac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} \Rightarrow \tan x = \frac{4}{3}$

IIII $\quad \cot x = \frac{cos\,x}{sen\,x} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} \Rightarrow \cot x = \frac{3}{4}$

IV $\quad sec\,x = \frac{1}{cos\,x} = \frac{1}{\frac{3}{5}} \Rightarrow sec\,x = \frac{5}{3}$

V $\quad cos\,sec\,x = \frac{1}{sen\,x} = \frac{1}{\frac{4}{5}} \Rightarrow cos\,sec\,x = \frac{5}{4}$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1) Dado cos x = $\frac{1}{2}$, $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$, calcular as demais funções trigonométricas de x.

2) Dado sec x = $-\sqrt{5}$, $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, calcular as demais funções trigonométricas de x.

3) Calculara tan x sabendo que 4 sen^2 x + 2 cos^2 x = 3

4) Determinar o valor de m para que se tenha simultaneamente
sen x = m – 1 e cos x = m. $\sqrt{3}$

13. TRANSFORMAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

13.1 FÓRMULAS DE ADIÇÃO

Sabemos que $\cos 30^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos 60^\circ = \dfrac{1}{2}$ e $\cos 90^\circ = 0$; portanto:

$$\cos 90^\circ \neq \cos 60^\circ + \cos 30^\circ.$$

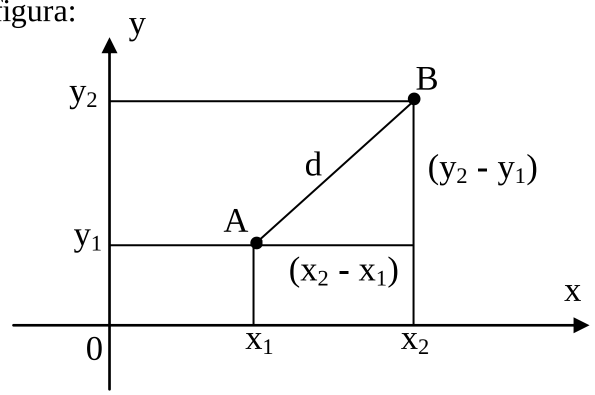
Fazendo-se a = 60º e b = 30º, o exemplo acima mostra que

$$\cos(a + b) \neq \cos a + \cos b.$$

Conhecendo os valores das funções trigonométricas de um arco que mede a e de um outro que mede b, queremos encontrar os valores das funções trigonométricas do arco que mede (a + b) e do arco que mede (a – b).

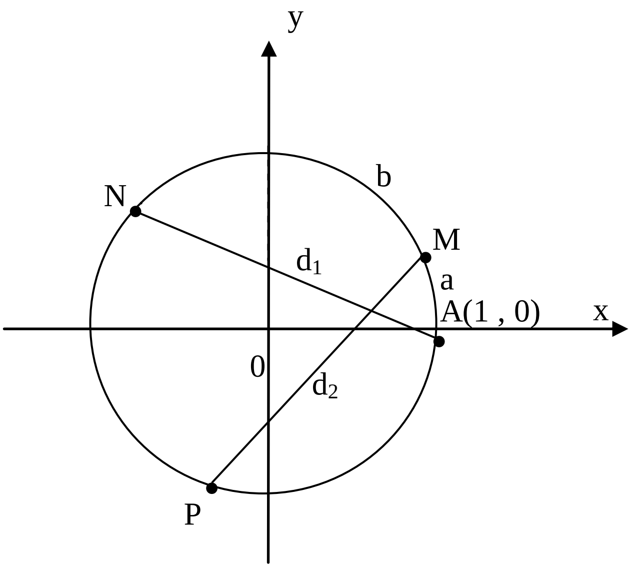
13.1.1 COSSENO DA SOMA

Já vimos como achar distância entre os pontos $A(x_1,y_1)$ e $B(x_2,y_2)$.
Observe a figura:



A distância é dada por: $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

Veremos inicialmente como encontrar o valor de cos(a+b). Veja a figura.



Essa figura é um ciclo trigonométrico, onde o arco AM mede a, o arco MN mede b, o arco AP mede –b. Então o arco AN mede (a + b).

Nessas condições, temos que as coordenadas cartesianas dos pontos A, M, N, e P são:
A(1 , 0)
M(cos a , sen a)
N(cos (a + b), sen (a + b))
P(cos (-b), sen (-b)), ou seja P(cos b, -sen b)

Notemos que $d_1 = d_2$, pois são cordas relativas a arcos de mesma medida.
Então $d_1^2 = d_2^2$.

$$[1-\cos(a+b)]^2+[0-\operatorname{sen}(a+b)]^2=[\cos a-\cos b]^2+[\operatorname{sen} a-(-\operatorname{sen} b)]^2$$

$$\Rightarrow 1-2\cos(a+b)+\cancel{\cos^2(a+b)}+\cancel{\operatorname{sen}^2(a+b)}=\cancel{\cos^2 a}-2\cos a\cdot\cos b+\cancel{\cos^2 b}+$$
$$+\cancel{\operatorname{sen}^2 a}+2\operatorname{sen} a\cdot\operatorname{sen} b+\cancel{\operatorname{sen}^2 b}$$

Como $\cos^2(a+b)+\operatorname{sen}^2(a+b)=1$, $\cos^2 a+\operatorname{sen}^2 a=1$

e $\cos^2 b+\operatorname{sen}^2 b=1$, temos

$$\cancel{1}-\cos(a+b)+\cancel{1}=\cancel{1}+\cancel{1}-2\cos a\cdot\cos b+2\operatorname{sen} a\cdot\operatorname{sen} b\Rightarrow$$
$$\Rightarrow -2\cos(a+b)=-2\cos a\cdot\cos b+2\operatorname{sen} a\cdot\operatorname{sen} b$$

(simplifica por (-2))

temos finalmente:

$$\cos(a+b)=\cos a\,.\,\cos b-\operatorname{sen} a\,.\,\operatorname{sen} b$$

13.1.2 COSSENO DA DIFERENÇA

Substituindo a – b por a + (-b), e lembrando que sen(-b) = - sen b, cos (-b) = cos b, temos:

cos (a – b) = cos [a + (-b)]
cos (a – b) = cos a . cos (-b) - sen a . sen (-b)

logo: $\cos(a-b)=\cos a\,.\,\cos b+\operatorname{sen} a\,.\,\operatorname{sen} b$

13.1.3 SENO DA SOMA

Sabemos que sen $(\frac{\pi}{2}-x)$ = cos x e cos $(\frac{\pi}{2}-x)$ = sen x para todo x. Então:

sen (a + b) = cos[$\frac{\pi}{2}$ - (a + b)]

$$\text{sen}(a+b) = \cos[(\frac{\pi}{2} - a) - b)]$$

$$\text{sen}(a+b) = \cos(\frac{\pi}{2} - a)\cos b + \text{sen}(\frac{\pi}{2} - a)\,\text{sen}\, b$$

logo: $\text{sen}(a+b) = \text{sen}\, a \,.\, \cos b + \text{sen}\, b \,.\, \cos a$

13.1.4 SENO DA DIFERENÇA

$\text{sen}(a-b) = \text{sen}[a + (-b)]$
$\text{sen}(a-b) = \text{sen}\, a \,.\, \cos(-b) + \text{sen}(-b) \,.\, \cos a$

logo: $\text{sen}(a-b) = \text{sen}\, a \,.\, \cos b - \text{sen}\, b \,.\, \cos a$

13.1.5 TANGENTE DA SOMA

$$\tan(a+b) = \frac{\text{sen}(a+b)}{\cos(a+b)}$$

$$\tan(a+b) = \frac{\text{sen}\, a \cos b + \text{sen}\, b \cos a}{\cos a \cos b - \text{sen}\, a\, \text{sen}\, b}$$

Dividindo-se o numerador e o denominador do 2º membro por cos a . cos b,

$$\tan(a+b) = \frac{\frac{\text{sen}\, a \cos b}{\cos a \cos b} + \frac{\text{sen}\, b \cos a}{\cos a \cos b}}{\frac{\cos a \cos b}{\cos a \cos b} + \frac{\text{sen}\, a\, \text{sen}\, b}{\cos a \cos b}}$$

logo: $\tan(a+b) = \dfrac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a . \tan b}$

13.1.6 TANGENTE DA DIFERENÇA

$$\tan(a-b) = \tan[a + (-b)]$$

$$\tan(a-b) = \frac{\tan a + \tan(-b)}{1 - \tan a \cdot \tan(-b)}$$

logo: $\tan(a-b) = \dfrac{\tan a - \tan b}{1 - \tan a \cdot \tan(-b)} = \dfrac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \cdot \tan b}$

Exemplos:

Calcular cos 75º:

solução:

cos 75º = cos (45º + 30º) $\Rightarrow$ cos 75º = cos 45º . cos 30º – sen 45º . sen 30º $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \cos 75^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1) Calcular usando as fórmulas de adição:

a) cos 105º b) sen 15º c) tan $\frac{\pi}{12}$

d) tan 75º e) sen $\frac{5\pi}{12}$ f) sen $\frac{\pi}{12}$

2) Dados cos x = $\frac{5}{13}$, $0 < x < \frac{\pi}{2}$, calcular cos ($\frac{\pi}{3} - x$)

3) sendo tan y = 2 e x + y = $\frac{3\pi}{4}$, calcular tan x.

4) Calcular o valor de:

$$y = \frac{\text{sen}(x - \frac{\pi}{6}) + \cos(\frac{\pi}{3} - x)}{\text{sen}(x + \frac{\pi}{3}) + \text{sen}(x - \frac{\pi}{3})}$$

13.2 ARCO DUPLO

As fórmulas para calcular as funções trigonométricas do número 2a, conhecendo os seus valores para o número a, são conseqüências das fórmulas de adição:

1- **sen (a + b) = sen a . cos b + sen b . cos a**
2- **cos(a + b) = cos a . cos b – sen a . sen b**
3- tan (a +b) = $\frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a . \tan b}$

Fazendo-se b = a, obtemos:

em 1) **sen (a + a) = sen a . cos a + sen a . cos a**

logo: $\text{sen } 2a = 2 \text{ sen } a . \cos a$

em 2) **cos(a + a) = cos a . cos a – sen a . sen a**

logo: $\cos 2a = \cos^2 a - \text{sen}^2 a$

em 3) tan (a +a) = $\frac{\tan a + \tan a}{1 - \tan a . \tan a}$

logo: **tan 2a =** $\dfrac{2\tan a}{1-\tan^2 a}$

Na fórmula cos 2a = $\cos^2$ a – sen^2 a podemos fazer as substituições:

$\cos^2$ a = 1 – sen^2 a ou sen^2 a = 1 – $\cos^2$ a,

obtendo as fórmulas:

$$\cos 2a = 2\cos^2 a - 1$$

$$\cos 2a = 1 - 2\,\text{sen}^2\, a$$

Exemplo1:

Calcular sen 2a e cos 2a, sendo dado cos a = $\dfrac{2}{3}$, $0 < a < \dfrac{\pi}{2}$.

solução:

1- cálculo de sen a:

$\text{sen}^2 a + \cos^2 a = 1 \Rightarrow \text{sen}^2 a + \dfrac{4}{9} = 1 \Rightarrow \text{sen}^2 a = \dfrac{5}{9}$

sendo $0 < a < \dfrac{\pi}{2}$ temos que: sen a = $+\dfrac{\sqrt{5}}{3}$

2- cálculo de sen 2a:

sen 2a = 2 sen a cos a

sen 2a = $2 \cdot \dfrac{\sqrt{5}}{3} \cdot \dfrac{2}{3} = \dfrac{4\sqrt{5}}{9}$

3- cálculo de cos 2a:

cos 2a = 2 $\cos^2$ 2a – 1

cos 2a = $2 \cdot \dfrac{4}{9} - 1 = -\dfrac{1}{9}$

Exemplo 2:

Qual o período da função y = 2 sen^2 x?

solução:

cos 2x = 1 – 2 sen^2 x $\Rightarrow$ 2 sen^2 x = 1 – cos 2x

então y = 1 – cos 2x e o período é p = $\dfrac{2\pi}{2} \Rightarrow p = \pi$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1) Dado sen a = $\dfrac{4}{5}$, $0 < a < \dfrac{\pi}{2}$, calcular sen 2a.

2) Dados sen a = $\dfrac{1}{3}$ e sen b = $\dfrac{1}{2}$, $0 < a, b < \dfrac{\pi}{2}$, calcular cos(2a + b)

3) Calcular sen 2a sabendo que sen a – cos a = $\dfrac{3}{4}$

4) Qual o período das funções abaixo?

a) $y = 2\cos^2 x$ b) $y = \text{sen } x \cdot \cos x$

5) Calcular sen 2x sabendo que tan x + cot x = 3

13.3 O ARCO METADE

Nosso objetivo agora é achar os valores das funções trigonométricas do arco que mede a/2, conhecendo os valores das funções trigonométricas do arco que mede a.

Suponhamos que se conheça ***cos a.*** A partir desse valor determinaremos os valores de $\text{sen}\frac{a}{2}$, $\cos\frac{a}{2}$, $\tan\frac{a}{2}$, utilizando a seguinte fórmula:

$$\cos\ 2x = \cos^2 x - \text{sen}^2 x$$

Ajustamos essa fórmula ao nosso problema, fazendo 2x = a, temos:

$$\cos a = \cos^2\frac{a}{2} - \text{sen}^2\frac{a}{2} \qquad (\ \text{I}\ )$$

Como $\cos^2\frac{a}{2} = 1 - \text{sen}^2\frac{a}{2}$, temos:

$$\cos a = 1 - \text{sen}^2\frac{a}{2} - \text{sen}^2\frac{a}{2} \Rightarrow 2\,\text{sen}^2\frac{a}{2} = 1 - \cos a \Rightarrow$$

$$\text{sen}^2\frac{a}{2} = \frac{1-\cos a}{2} \Rightarrow \text{sen}\frac{a}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos a}{2}}$$

Se em (I) substituirmos $\text{sen}^2\frac{a}{2}$ por $1-\cos^2\frac{a}{2}$, obteremos:

$$\cos a = \cos^2\frac{a}{2} - (1-\cos^2\frac{a}{2}) \Rightarrow \cos a = 2\cos^2\frac{a}{2} - 1 \Rightarrow$$

$$\cos 2\,\frac{a}{2} = \frac{1+\cos a}{2} \Rightarrow \cos\frac{a}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos a}{2}}$$

Como $\tan\frac{a}{2} = \dfrac{\text{sen}\frac{a}{2}}{\cos\frac{a}{2}}$, (com $\frac{a}{2} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z$)

temos: $\tan\frac{a}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos a}{1+\cos a}}$

14. TRANSFORMAÇÃO DE SOMA EM PRODUTO

Usaremos neste item todos os resultados obtidos anteriormente, fazendo uma relação entre eles.

Façamos inicialmente $a + b = p$ e $a - b = q$
Desse modo, temos:

$$\begin{array}{ccccccccc} a & + & b & = & p \\ a & - & b & = & q \\ 2a & = & p & + & q & \Rightarrow & a & = & \dfrac{p+q}{2} \end{array}$$

Portanto: $b = p - \dfrac{p+q}{2} \Rightarrow b = \dfrac{2p-p-q}{2} \Rightarrow b = \dfrac{p-q}{2}$

Logo:

$$\operatorname{sen}(a+b) + \operatorname{sen}(a-b) = 2\operatorname{sen} a \cos b$$
$$\operatorname{sen}(a+b) - \operatorname{sen}(a-b) = 2\operatorname{sen} b \cos a$$
$$\cos(a+b) + \cos(a-b) = 2\cos a \cos b$$
$$\cos(a+b) - \cos(a-b) = -2\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$$

Substituindo-se os valores de a e b, teremos:

$$\operatorname{sen} p + \operatorname{sen} q = 2\operatorname{sen}\frac{p+q}{2}.\cos\frac{p-q}{2}$$

$$\operatorname{sen} p - \operatorname{sen} q = 2\operatorname{sen}\frac{p-q}{2}.\cos\frac{p+q}{2}$$

$$\cos p + \cos q = 2\cos\frac{p+q}{2}.\cos\frac{p-q}{2}$$

$$\cos p - \cos q = -2\operatorname{sen}\frac{p+q}{2}.\operatorname{sen}\frac{p-q}{2}$$

Exemplo:

Transforme em produto: N = sen 4x + sen 2x

Solução:

Usando a primeira das fórmulas acima, obtemos:

$$N = 2\operatorname{sen}\frac{4x+2x}{2}\cdot\cos\frac{4x-2x}{2} \Rightarrow N = 2\cdot\operatorname{sen}3x\cdot\cos 4x$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1) Transforme em produto

a) $y = \text{sen}\,8x + \text{sen}\,4x$ b) $y = \cos 10x + \cos x$ c) $y = \text{sen}\,4x - \text{sen}\,3x$

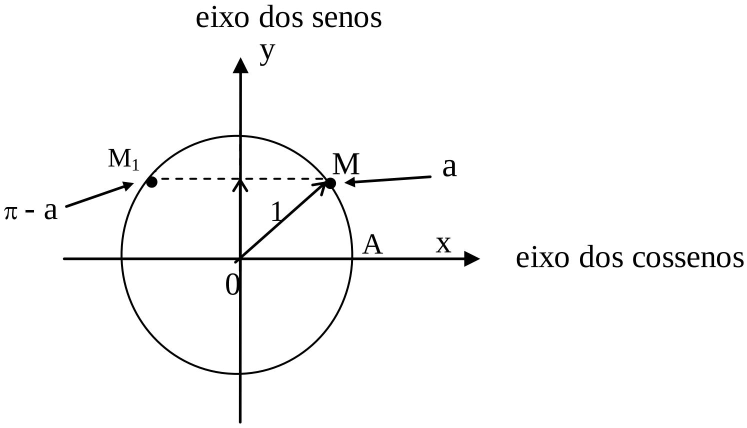
d) $y = 1 + \text{sen}\,3x$ f) $y = \cos 5x - 1$ g) $y = \text{sen}(x + \frac{\pi}{4}) - \text{sen}\,x$

15. EQUAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

Chamaremos de *Equação Trigonométrica* a qualquer equação na qual a incógnita faz parte do arco de alguma função trigonométrica.

15.1 EQUAÇÃO DO TIPO $\text{sen}\,x = \text{sen}\,a$

Seja M a extremidade de um arco cuja medida é *a*.



Note que todos os arcos de extremidade em M possuem o mesmo seno do arco a. Também possuem o mesmo seno de a, todos os arcos de extremidade M_1, onde M_1 é simétrico de M com relação ao eixo dos senos.

Dessa forma, concluímos:

$$\text{sen}\,x = \text{sen}\,a \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = a + k2\pi \\ \quad \text{ou} \\ x = \pi - a + k2\pi, \quad k \in Z \end{cases}$$

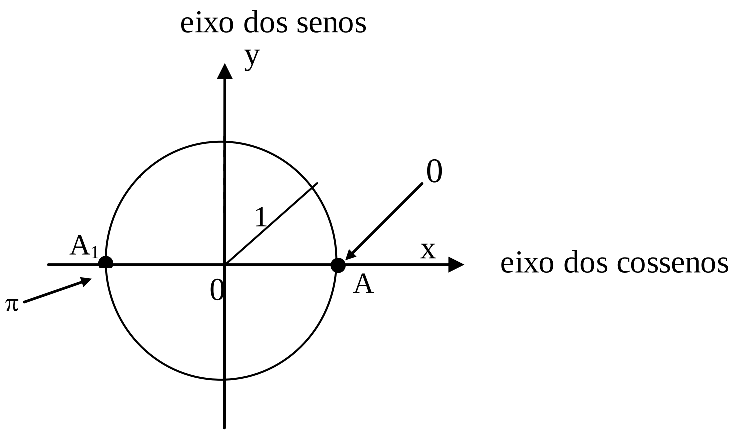
<u>**Exemplo 1:**</u>

Resolver a equação: sen x = 0

Solução:

uma solução é 0, pois sen 0 = 0. Portanto temos sen x = sen 0

Observe na figura abaixo que todos os arcos que possuem extremidades em A são soluções, assim como todos os arcos de extremidade A_1.



Dessa forma, concluímos que:

$$\operatorname{sen} x = \operatorname{sen} 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 + k \cdot 2\pi \\ \text{ou} \\ x = \pi + k \cdot 2\pi, \quad k \in Z \end{cases}$$

$$S = \{x \in R \mid x = k \cdot \pi, \quad k \in Z\}$$

<u>Exemplo 2:</u>

Resolver a equação $2\operatorname{sen} 2x + 1 = 0$

Solução:

$$\operatorname{sen} 2x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \operatorname{sen} 2x = -\operatorname{sen}\frac{\pi}{6} \Rightarrow \operatorname{sen} 2x = \operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \Rightarrow x = -\frac{\pi}{12} + k\pi \\ \text{ou} \\ 2x = \pi - \left(-\frac{\pi}{6}\right) + 2k\pi \Rightarrow 2x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \Rightarrow x = \frac{7\pi}{12} + k\pi \end{cases}$$

$$S = \left\{x \mid x = -\frac{\pi}{12} + k\pi \ \text{ ou } \ x = \frac{7\pi}{12} + k\pi\right\}$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

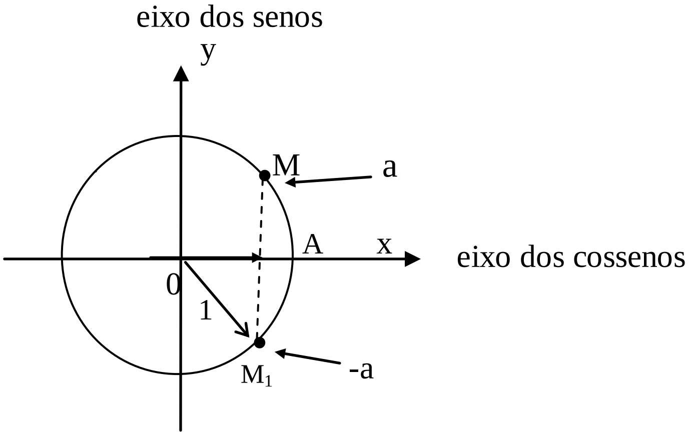
1) Resolver as equações

a) $\operatorname{sen} x = \frac{1}{2}$ b) $2\operatorname{sen} 3x + \sqrt{2} = 0$ c) $\operatorname{sen} x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

d) $4\operatorname{sen}^2 x - 8\operatorname{sen} x + 3 = 0$ e) $2\operatorname{sen} 2x - \sqrt{3} = 0$ f) $\operatorname{sen}\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = -\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}$

15.2 EQUAÇÃO DO TIPO $\cos x = \cos a$

Seja M a extremidade de um arco cuja medida é <u>a.</u>



Note que todos os arcos de extremidade M possuem o mesmo cosseno do arco a. Também possuem o mesmo cosseno de a, todos os arcos de extremidade M_1, onde M_1 é simétrico de M com relação ao eixo dos cossenos.

Assim concluímos:

$$\cos x = \cos a \Leftrightarrow x = \pm a + k2\pi,\ k \in Z$$

<u>Exemplo:</u>

Resolver a equação $\cos(2x - \pi) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Solução:

$$\cos(2x - \pi) = -\cos\frac{\pi}{4} \Rightarrow \cos(2x - \pi) = \cos\frac{3\pi}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x - \pi = \dfrac{3\pi}{4} + 2k\pi \Rightarrow 2x = \dfrac{7\pi}{4} + 2k\pi \Rightarrow x = \dfrac{7\pi}{8} + k\pi \\ \text{ou} \\ 2x - \pi = -\dfrac{3\pi}{4} + 2k\pi \Rightarrow 2x = \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{8} + k\pi \end{cases}$$

$$S = \left\{ x \mid x = \frac{7\pi}{8} + k\pi \ \text{ ou } \ x = \frac{\pi}{8} + k\pi \right\}$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

2) Resolver as equações

a) $2\cos x = -\sqrt{3}$

b) $\cos 4x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

c) $\cos^2 x + \cos x = 0$

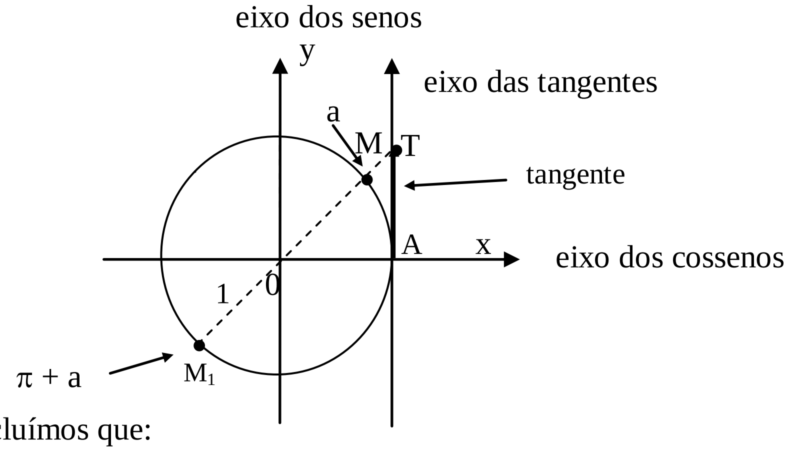
d) $\cos(x - \dfrac{\pi}{3}) = \cos\dfrac{\pi}{8}$

e) $\cos 7x + 1 = 0$

f) $\cos 5x - \cos\dfrac{3\pi}{5} = 0$

15.3 EQUAÇÃO DO TIPO $\tan x = \tan a$

Seja M a extremidade de um arco de medida a. Note que todos os arcos de extremidade em M possuem a mesma tangente de a. Também possuem a mesma tangente de a todos os arcos de extremidade em M_1, onde M_1 é simétrico de M com relação ao centro do ciclo.



Dessa forma concluímos que:

$$\tan x = \tan a \begin{cases} x = a + k2\pi \\ ou \\ x = \pi + a + k2\pi, k \in Z \end{cases}$$

Resumindo temos:

$$\tan x = \tan a \Leftrightarrow x = a + k\pi, k \in Z$$

Exemplo:

Resolver a equação $\tan 2x + 1 = 0$

Solução:

$$\tan 2x = -1 \Rightarrow \tan 2x = -\tan\frac{\pi}{4} \Rightarrow \tan 2x = \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \Rightarrow x = -\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}$$

$$S = \left\{ x \mid x = -\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2} \right\}$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

3) Resolver as equações

a) $\tan 2x - \sqrt{3} = 0$ b) $\tan x - \tan\frac{\pi}{7} = 0$ c) $\tan 5x = -1$

d) $\tan x = \sqrt{3}$ e) $3\tan x + \sqrt{3} = 0$ f) $\tan\left(4x - \frac{\pi}{5}\right) + \tan\frac{\pi}{5} = 0$

15.4 OUTROS TIPOS DE EQUAÇÕES

Vejamos agora outros tipos de equações trigonométricas

Exemplo 1:

Resolver a equação $\operatorname{sen} x + \cos 4x = 0$

Solução:

Observe que agora aprecem funções diferentes, mas podemos trocar $\operatorname{sen} x$ por $\cos(\frac{\pi}{2} - x)$ ou trocar $\cos(4x)$ por $\operatorname{sen}(\frac{\pi}{2} - 4x)$. Fazendo esta ultima troca, obtemos:

$$\operatorname{sen} x + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - 4x\right) = 0 \Rightarrow \operatorname{sen} x = -\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - 4x\right) \Rightarrow \operatorname{sen} x = \operatorname{sen}\left(4x - \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \operatorname{sen}\left(4x - \frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{sen} x$$

$$\text{então } \begin{cases} 4x - \dfrac{\pi}{2} = x + k\pi \text{ ou} \\ 4x - \dfrac{\pi}{2} = \pi - x + 2k\pi, \ k \in Z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ ou} \\ 5x = \pi + \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi, \ k \in Z \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{6} + k\dfrac{2\pi}{3} \quad \text{ou} \\ x = \dfrac{3\pi}{10} + k\dfrac{2\pi}{5}, \quad k \in Z \end{cases}$$

Poranto, o conjunto solução é :

$$S = \left\{ x \in R \mid x = \frac{\pi}{6} + k\frac{2\pi}{3} \ \text{ ou } \ x = \frac{3\pi}{10} + k\frac{2\pi}{5}, \quad k \in Z \right\}$$

Exemplo 2:

Resolver a equação $2\cos^2 x + 3\operatorname{sen} x - 3 = 0$

Solução:

Substituímos $\cos^2 x$ por $1 - \operatorname{sen}^2 x$, temos :

$$2(1 - \operatorname{sen}^2 x) + 3\operatorname{sen} x - 3 = 0 \Rightarrow -2\operatorname{sen}^2 x + 3\operatorname{sen} x - 1 = 0$$

$$2\operatorname{sen}^2 x - 3\operatorname{sen} x + 1 = 0 \Rightarrow \operatorname{sen} x = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{4} = \frac{3 \pm 1}{4}$$

então, temos que:

$$\begin{cases} \text{sen } x = 1 \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ \text{sen } x = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \text{sen } x = \text{sen}\dfrac{\pi}{6} \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi \quad \text{ou} \quad x = \dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi \end{cases}$$

$$S = \left\{ x \mid x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad \text{ou} \quad x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad \text{ou} \quad x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \right\}$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

4) Resolver as equações

a) $\text{sen}\,5x + \text{sen}\,2x = 0$

b) $\tan x + \cot x = 2$

c) $\cos^2 x = 1 - \text{sen}\,x$

d) $4\text{sen}^2 x - 8\text{sen}\,x + 3 = 0$

e) $\sec x + \text{cossec}\,x = 0$

f) $\tan^2 x + \tan x = 0$

g) $\cos 2x = 3 - 5\text{sen}\,x$

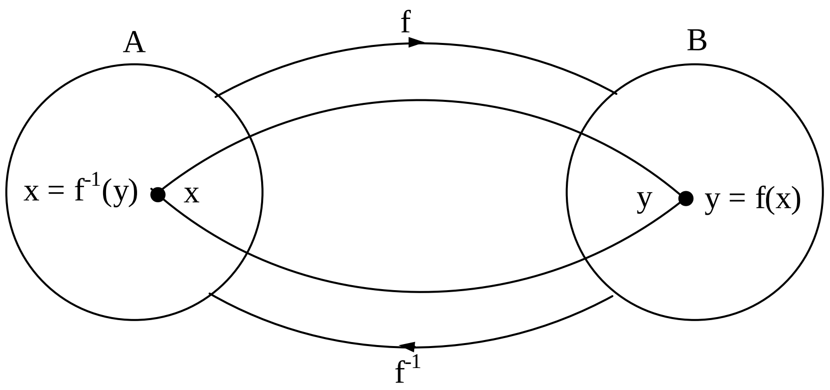
h) $\sec^2 x + \tan x - 1 = 0$

i) $\text{sen}\,x + \cos x = 1$

16. FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

16.1 INTRODUÇÃO

Considerando uma função bijetora f: A $\rightarrow$ B, definida por y = f(x), a função inversa de f é a função f^{-1}: B $\rightarrow$ A, definida por $f^{-1}(y) = x$.



Note que A é o domínio de f e contradomínio de f^{-1} e B é o domínio de f^{-1} e contradomínio de f. Além disso, os gráficos de f(x) e de $f^{-1}(x)$, num mesmo sistema cartesiano, são curvas simétricas com relação à reta de equação y = x.

16.2 FUNÇÃO ARCO-SENO

Vamos ajustar os conceitos da função inversa para as nossas funções trigonométricas. Seja inicialmente a função seno f: R → R, definida por f(x) = sen x.

Notemos que a função não é sobrejetora, pois para qualquer x ∈ R, temos $-1 \le \text{sen } x \le 1$, sendo R o contradomínio da função.

A função também não é injetora pois, para um valor $x_1 \in R$ qualquer, existem infinitos valore de x tais que sen x = sen x_1 (veja a figura).

A função f(x) = sen x não é bijetora e, portanto, não tem inversa. No entanto, podemos restringir o contradomínio ao conjunto [-1, 1]; neste intervalo estão todos os valores de sen x para qualquer x ∈ R. Desse modo a função é sobrejetora.

Vamos agora restringir o domínio de modo que a função seja injetora. Convencionamos adotar para o domínio o intervalo $\left[\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$.

Dessa forma temos a função $F:\left[\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\to[-1,1]$ definida por f(x) = sen x.

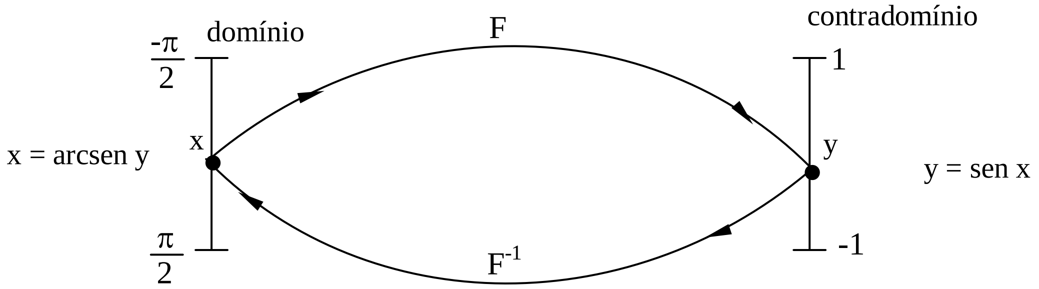
Nessas condições a função é bijetora e, portanto, tem inversa. Ela é definida assim:

$F^{-1}:[-1,1]\to\left[\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ tal que $F^{-1}(x)$ = arcsen y

(lê-se: arco cujo seno é y)

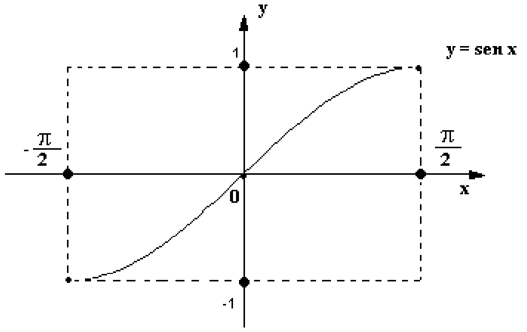
logo: $y = \text{arcsen } x \Leftrightarrow \text{sen } y = x$ e $-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$

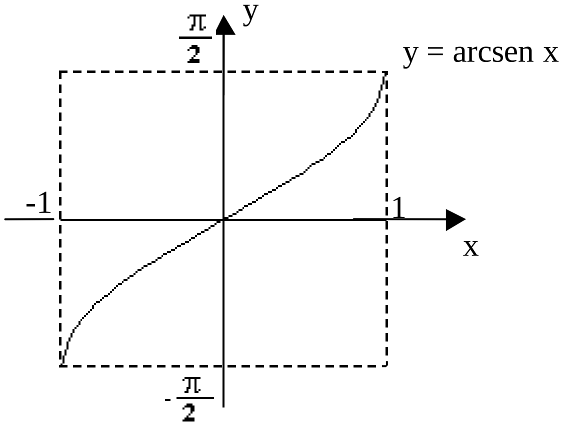
Veja o esquema.



Assim, temos: F(x) = sen x e $F^{-1}(x)$ = arcsen x

Vejamos os gráficos dessas funções.





Exemplo:

Calcular $\cos(\text{arcsen}\,\frac{1}{3})$

Solução:

Façamos $\alpha = \text{arcsen}\,\frac{1}{3}$ e calculemos, então, $\cos\alpha$

Por definição, $\text{sen}\,\alpha = \frac{1}{3}$ e $-\frac{\pi}{2} \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$. Logo:

$$\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \frac{1}{9} + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \cos^2\alpha = \frac{8}{9}$$

Sendo $-\frac{\pi}{2} \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$, $\cos\alpha > 0$ e, portanto, $\cos\alpha = +\sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

XERCÍCIOS PROPOSTOS

1) Ache y nos casos abaixo:

a) $y = \text{arcsen}\,\frac{\sqrt{2}}{2}$ b) $y = \frac{1}{2}\text{arcsen}\,1$ c) $y = \text{arcsen}(-1)$

2) Calcular $\cos(2\,\text{arcsen}\,\frac{1}{\sqrt{3}})$

3) Ache y nos casos abaixo:

a) $y = \tan(\text{arcsen}\,\frac{5}{8})$ b) $y = \frac{1}{2}\cos(2\,\text{arcsen}(-\frac{2}{7}))$

16.3 FUNÇÃO ARCO-COSSENO

Do mesmo modo que a função seno, a função cosseno, definida por f: R $\to$ R tal f(x) = cos x, não é bijetora, e portanto, não tem inversa.

Restringindo o contradomínio ao intervalo [-1, 1], a função é sobrejetora.

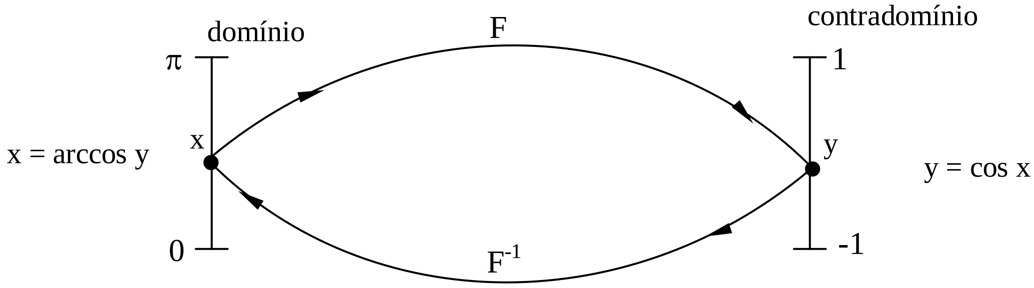
Convencionamos restringir o domínio ao intervalo [0, π], no qual a função é injetora.
Dessa forma temos a função:

F: [0, π] $\to$ [-1, 1] tal que F(x) = cos x

Agora, então, a função é bijetora e, portanto, tem inversa:

F^{-1}: [-1, 1] tal que $F^{-1}(y)$ = arccos y (lê-se: arco cujo cosseno é y)

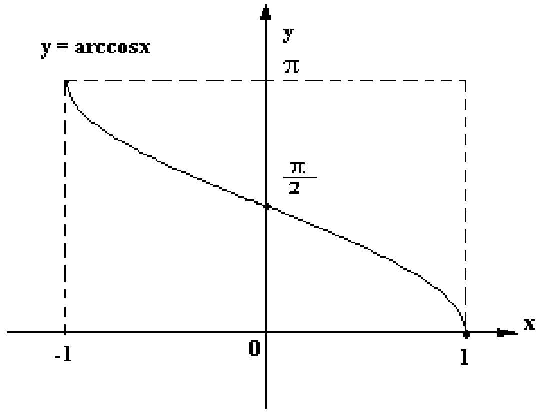
Veja o esquema:

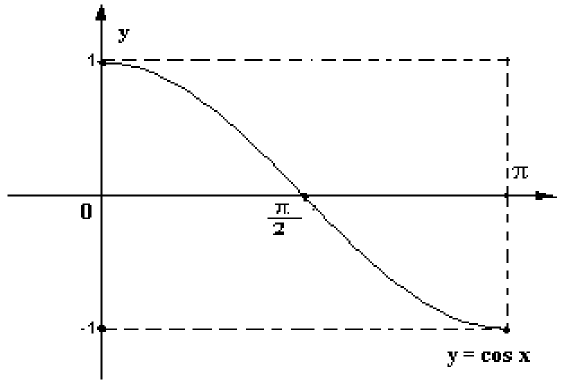


Deixando x como variável livre temos as funções

F(x) = cos x e $F^{-1}(x)$ = arccos x

Vejamos os gráficos dessas funções.





Exemplo:

Calcular $\cos(\arccos\frac{3}{5}+\arccos\frac{4}{5})$

Solução:

Façamos $\alpha = \text{ar}\cos\frac{3}{5}$, $\beta = \text{ar}\cos\frac{4}{5}$ e calculemos $\cos(\alpha+\beta)$.

Por definição, temos:

$$\cos\alpha = \frac{3}{5} \text{ e } 0 \le \alpha \le \pi \Rightarrow \text{sen}\,\alpha = \frac{4}{5}$$

$$\cos\beta = \frac{4}{5} \text{ e } 0 \le \beta \le \pi \Rightarrow \text{sen}\,\beta = \frac{3}{5}$$

Logo: $\cos(\alpha+\beta) = \frac{3}{5}\cdot\frac{4}{5} - \frac{4}{5}\cdot\frac{3}{5} = 0$

Resposta: $\cos(\arccos\frac{3}{5}+\arccos\frac{4}{5}) = 0$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1) Calcular y nos casos abaixo:

a) $y = \arccos 1$

b) $y = \arccos\frac{\sqrt{2}}{2}$

c) $y = \arccos(-\frac{1}{2})$

2) Calcule y

a) $y = \text{sen}(2\arccos\frac{2}{3})$

b) $y = \cos\left[\text{arcsen}(-\frac{4}{5}) + \arccos(-\frac{1}{4})\right]$

c) $y = \tan(2\text{ar}\cos\frac{5}{8})$

d) $y = \text{sen}(\arccos\frac{12}{13})$

16.4 FUNÇÃO ARCO-TANGENTE

A função arco-tangente foi definida assim:

f: $R_1 \to R$ tal que f(x) = tan x e $R_1 = \left\{ x \in R \,/\, x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in R \right\}$

Nessas condições a função é sobrejetora, pois tan x assume qualquer valor real, mas não é injetora. Desse modo não é bijetora e, portanto, não tem inversa.

Vamos restringir o domínio ao intervalo aberto $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. A função fica assim determinada:

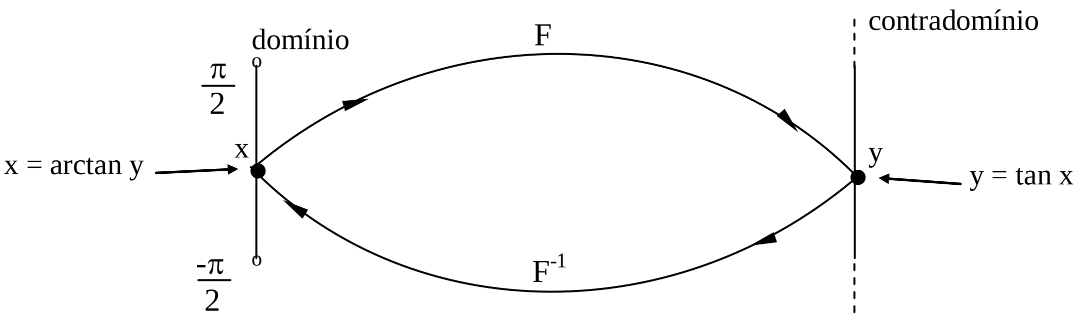
$$F: \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\to R, \text{ definida por } F(x) = \tan x$$

A função agora é bijetora e, portanto, tem inversa:

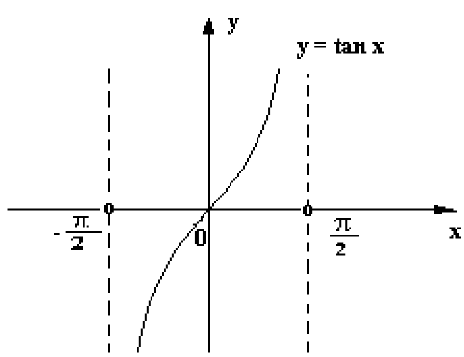
$$F^{-1}: R \to \left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\text{ definida por } F^{-1}: (y) = \arctan (x)$$

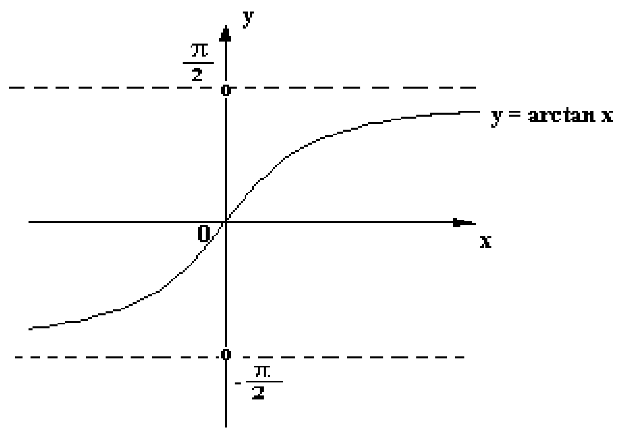
(lê-se: arco cuja tangente é y)

Veja o esquema.



Os gráficos dessas funções são:





Exemplo:

Mostrar que $\arctan\frac{1}{2}+\arctan\frac{1}{3}=\frac{\pi}{4}$

Solução:

Façamos $\alpha=\arctan\frac{1}{2}$, $\beta=\arctan\frac{1}{3}$ e provemos que $(\alpha+\beta)=\frac{\pi}{4}$

Observando o gráfico da função $y=\arctan x$ podemos concluir que $0<\alpha<\frac{\pi}{4}$ e $0<\beta<\frac{\pi}{4}$. Portanto $0<\alpha+\beta<\frac{\pi}{2}$

Por definição temos: $\tan\alpha=\frac{1}{2}$, $\tan\beta=\frac{1}{3}$, então:

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha.\tan\beta}\Rightarrow\tan(\alpha+\beta)=\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}}=\frac{\frac{5}{6}}{\frac{5}{6}}=1$$

Sendo $0<\alpha+\beta<\frac{\pi}{2}$ e $\tan(\alpha+\beta)=1$, concluímos que $\alpha+\beta=\frac{\pi}{4}$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1) Determinar y nos casos abaixo:

a) $y=\arctan(-1)$

b) $y=\arctan(0)$

c) $y=\tan[2\arctan 5]$

d) $y=\tan[\arctan(-2)-\arctan 3]$

2) Demonstrar que:

a) $\arctan 1+\arctan 2+\arctan 3=\pi$

3) Determinar o domínio das funções:

a) $y=\arccos(3x+2)$

b) $\arctan(5x^2-3x)$

17. INEQUAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

Inequação trigonométrica são desigualdades onde comparecem funções circulares da incógnita ou de expressões contendo a incógnita. Também estudaremos apenas as principais inequações trigonométricas:

17.1 INEQUAÇÃO: $\operatorname{sen} x>a$ ou $\operatorname{sen} x<a$

Considerando a $\in$ [-1, 1], lembrando que $-1\le\operatorname{sen} x\le 1$, $\forall$ x, temos:

1º caso: a = 1

$$\operatorname{sen} x > 1 \Rightarrow \nexists\ x \Rightarrow S = \phi$$

$$\operatorname{sen} x < 1 \Rightarrow S = R - \left\{ x \,/\, x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \right\}$$

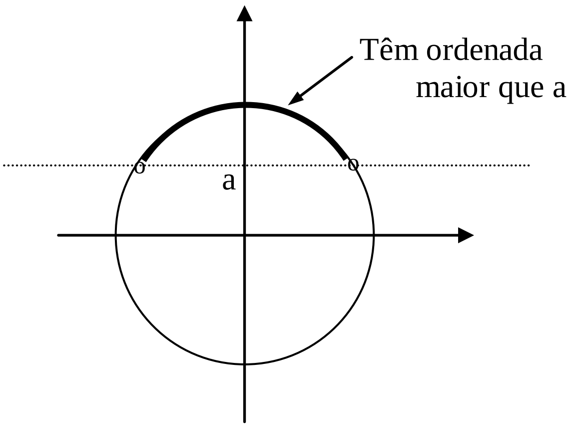
2º caso: a = -1

$$\operatorname{sen} x > -1 \Rightarrow S = R - \left\{ x \,/\, x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \right\}$$

$$\operatorname{sen} x < -1 \Rightarrow \nexists\ x \Rightarrow S = \phi$$

CASO GERAL:

Para todo a $\in$ [-1, 1], traçamos a reta paralela ao eixo das abscissas tal que todos os seus pontos têm ordenada igual a a. Verificamos quais pontos do ciclo têm ordenada maior (ou menor) que a e os destacamos.



Para dar a resposta, percorremos uma volta no ciclo, no sentido anti-horário, partindo da origem do ciclo. Anotamos os intervalos percorridos que fazem parte do conjunto solução e, finalmente, somamos 2kπ aos extremos do intervalo.

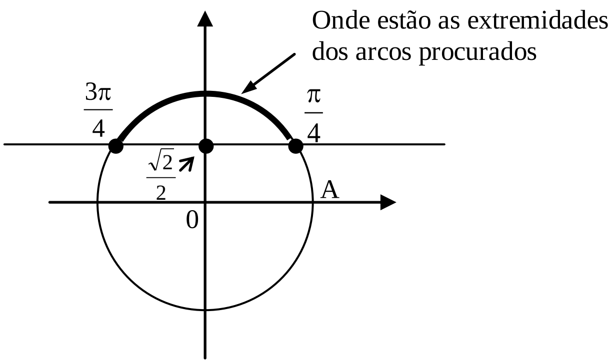
<u>Exemplo:</u>

Resolver a seguinte inequação: $\operatorname{sen} x \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$

Solução:

Percorrendo o ciclo no sentido positivo, a partir de A, observamos que $\operatorname{sen} \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ e $\operatorname{sen} \frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Veja a figura:



O conjunto solução é obtido percorrendo o ciclo no sentido positivo, a partir de A, até completar uma volta, e em seguida generalizando.

$$S = \left\{ x \in R \mid \frac{\pi}{4} + 2k\pi \le x \le \frac{3\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in Z \right\}$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1) Resolva as inequações trigonométricas abaixo:

a) $2\,\text{sen}\,x < \sqrt{2}$ b) $\text{sen}\,x \ge -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ c) $|\text{sen}\,x| < \dfrac{1}{2}$

d) $-\sqrt{3} < 2\,\text{sen}\,s < \sqrt{3}$ e) $4\,\text{sen}\,x\cos x > -\sqrt{3}$ d) $2\,\text{sen}\,4x \le 1$

(Sugestão: 2senx.cosx = sen 2x)

17.2 INEQUAÇÃO: $\cos x > a$ ou $\cos x < a$

Considerando a $\in$ [-1, 1], lembrando que $-1 \le \cos x \le 1, \forall x$, temos:

1º caso: a = 1

$\cos x > 1 \Rightarrow \nexists\ x \Rightarrow S = \phi$

$\cos x < 1 \Rightarrow S = R - \{x / x = \pi + 2k\pi\}$

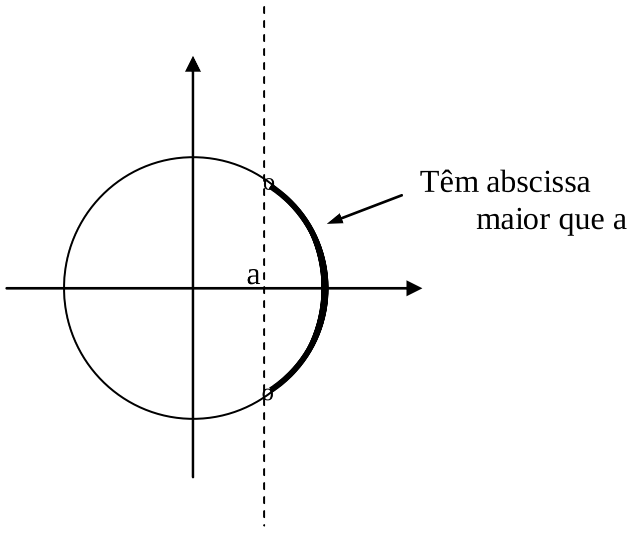
2º caso: a = -1

$\cos x > -1 \Rightarrow S = R - \{x / x = \pi + 2k\pi\}$

$\cos x < -1 \Rightarrow \nexists\ x \Rightarrow S = \phi$

CASO GERAL:

Resolve-se de modo análogo às inequações em seno, traçando-se a reta paralela ao eixo das ordenadas tal que todos os seus pontos têm abscissa igual a a. Hachuramos os pontos do ciclo que têm abscissa maior (ou menor) que a, e damos a resposta.



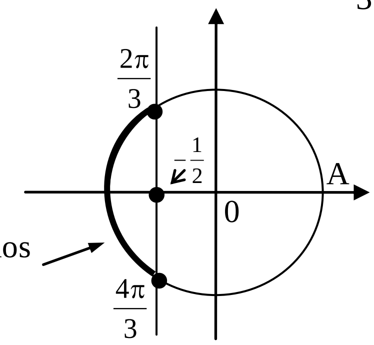
Exemplo:

Resolver a seguinte inequação: $\cos x \le -\dfrac{1}{2}$

Solução:

Da mesma forma que o exemplo anterior, temos que: $\cos\dfrac{2\pi}{3} = -\dfrac{1}{2}$ e $\cos\dfrac{4\pi}{3} = -\dfrac{1}{2}$

Veja a figura:



Onde estão as extremidades dos arcos procurados

O conjunto solução é: $$S = \left\{ x \in R \mid \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \prec x \le \frac{4\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in Z \right\}$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

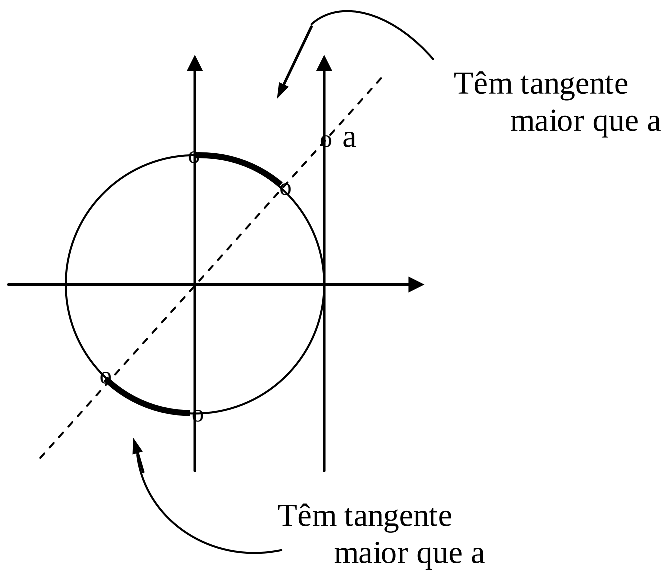
1) Resolva as inequações trigonométricas abaixo:

a) $\cos x < \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ b) $\cos x \ge 0$ c) $2\cos x > -\sqrt{3}$

d) $|\cos 2x| > \dfrac{1}{2}$ e) $\cos^2 x + \cos x < 0$ f) $4\operatorname{sen} x.\cos x < -\sqrt{2}$

17.3 INEQUAÇÃO: $\tan x > a$ ou $\tan x < a$

Marcamos no eixo das tangentes o ponto de ordenada a e traçamos a reta que contém tal ponto e o centro do ciclo. Hachuramos a região do ciclo cujos pontos ligados ao seu centro determinam retas que interceptam o eixo das tangentes em pontos de ordenada maior (ou menor) que a.



Exemplo:

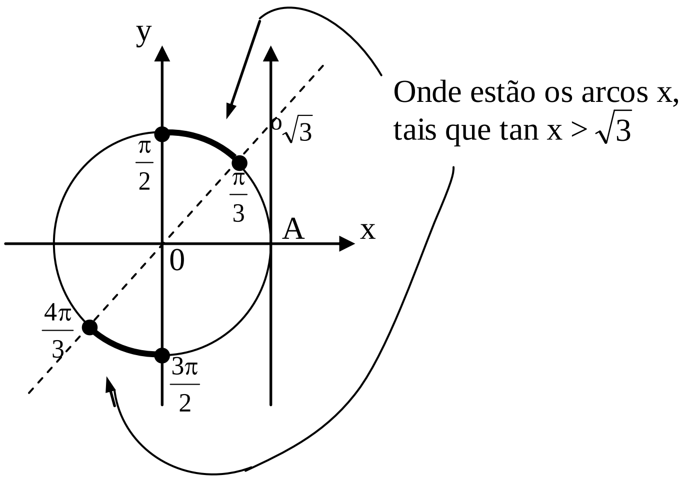
Resolver a seguinte inequação: $\tan x > \sqrt{3}$

Solução:

Percorrendo o ciclo no sentido positivo, a partir de A, temos:

$\tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$ e $\tan\frac{4\pi}{3} = \sqrt{3}$

Veja a figura:



O conjunto solução é: $S = \left\{ x \in R \mid \frac{\pi}{3} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ ou } \frac{4\pi}{3} + 2k\pi < x < \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, k \in Z \right\}$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1) Resolva as inequações

a) $\tan x \leq 1$ b) $\tan x > -1$ c) $3|\tan x| < \sqrt{3}$

d) $\tan x + \tan^2 x > 0$ e) $\tan 5x < 1$ f) $0 < \tan 4x < 1$

2) Se $\arctan(x+2) + \arctan x = \frac{3\pi}{4}$, então x^2 vale:

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

18. TRIÂNGULOS QUAISQUER

Ao iniciar o estudo das relações trigonométricas que permitem resolver um triângulo qualquer, vamos recordar a classificação dos triângulos quanto aos ângulos:

1- triângulos retângulos: são os que têm um ângulo reto (= 90º)

2- triângulos acutângulos: são os que têm todos os ângulos agudos (< 90º)

3- triângulos obtusângulos: são os que têm um ângulo obtuso (> 90º)

18.1 TEOREMA DOS SENOS

Num triângulo qualquer, as medidas dos lados são proporcionais aos senos dos ângulos opostos.

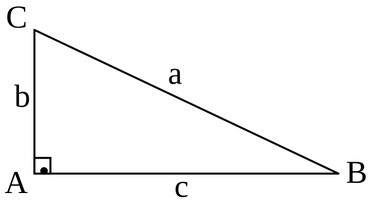
isto é: $\dfrac{a}{\operatorname{sen} A} = \dfrac{b}{\operatorname{sen} B} = \dfrac{c}{\operatorname{sen} C}$ em todo triângulo ABC.

Verifiquemos a validade deste teorema supondo inicialmente A = 90º (triângulo retângulo).

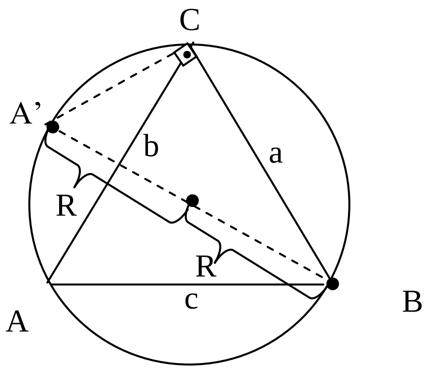
Neste caso, sen A = sen 90º = 1 e temos:

$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{sen} B = \dfrac{b}{a} \Rightarrow a = \dfrac{b}{\operatorname{sen} B} \Rightarrow \dfrac{a}{\operatorname{sen} A} = \dfrac{b}{\operatorname{sen} B} \\ \operatorname{sen} C = \dfrac{c}{a} \Rightarrow a = \dfrac{c}{\operatorname{sen} C} \Rightarrow \dfrac{a}{\operatorname{sen} A} = \dfrac{c}{\operatorname{sen} C} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \dfrac{a}{\operatorname{sen} A} = \dfrac{b}{\operatorname{sen} B} = \dfrac{c}{\operatorname{sen} C}$$



Se o triângulo ABC não for retângulo, consideremos a circunferência (de raio R) circunscrita ao triângulo. Traçamos o diâmetro BA' e unimos os pontos A' e C, obtendo o triângulo A'CB, retângulo em C (pois é inscrito numa semicircunferência). Evidentemente os ângulos BÂC e BÂ'C tem medidas iguais. Assim temos:



$$\left.\begin{array}{l} A = A' \\ \operatorname{sen} A' = \dfrac{a}{2R} \end{array}\right\} \Rightarrow \operatorname{sen} A = \dfrac{a}{2R} \Rightarrow \dfrac{a}{\operatorname{sen} A} = 2R$$

Analogamente, podemos provar que $\dfrac{b}{\operatorname{sen} B} = 2R$ e $\dfrac{c}{\operatorname{sen} C} = 2R$, donde concluímos que:

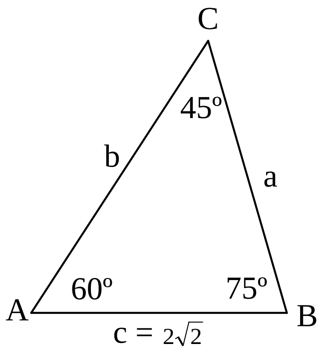
$$\dfrac{a}{\operatorname{sen} A} = \dfrac{b}{\operatorname{sen} B} = \dfrac{c}{\operatorname{sen} C}$$

Exemplo:

Num triângulo ABC são dados: A = 60º, B = 75º e c = $2\sqrt{2}$. Calcular o perímetro do triângulo:

Solução:

Como A + B + C = 180º, segue que C = 45º, logo:



$$\frac{a}{\text{sen}\,A} = \frac{c}{\text{sen}\,C} \Rightarrow \frac{a}{\text{sen}\,60º} = \frac{2\sqrt{2}}{\text{sen}\,45º} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a = \frac{2\sqrt{2}.\text{sen}\,60º}{\text{sen}\,45º} \Rightarrow a = 2\sqrt{3}$$

$$\frac{b}{\text{sen}\,B} = \frac{c}{\text{sen}\,C} \Rightarrow \frac{b}{\text{sen}\,75º} = \frac{2\sqrt{2}}{\text{sen}\,45º} \Rightarrow$$

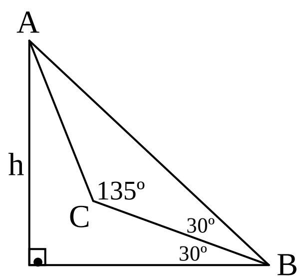
$$\Rightarrow b = \frac{2\sqrt{2}.\text{sen}\,75º}{\text{sen}\,45º} \Rightarrow b = \sqrt{6} + \sqrt{2}$$

Portanto o perímetro é: $a + b + c = 3\sqrt{2} + 2\sqrt{3} + \sqrt{6}$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1) Num triângulo ABC tem-se:
   a = 1, b = $1 + \sqrt{3}$ e A = 15º, Calcular os ângulos B e C.

2) Na abaixo lado, dado BC = $\sqrt{6} - \sqrt{2}$, calcular h.



3) Calcular o lado c de um triângulo ABC sendo dados: a = $\sqrt{2}$, b = 1, e o ângulo A é o dobro de B.

18.2 TEOREMA DOS COSSENOS

Num triângulo qualquer, o quadrado da medida de um lado é igual à soma dos quadrados das medidas dos outros dois lados, menos duas vezes o produto das medidas destes lados pelo cosseno do ângulo formado por eles.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos A$$

isto é: $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac.\cos B$ em todo triângulo ABC.

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab.\cos C$$

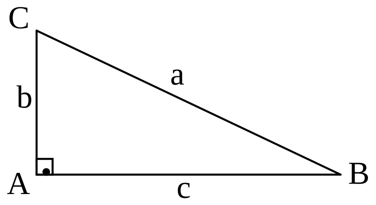
Demonstraremos este teorema para a primeira relação:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos A$$

As demais têm demonstração análoga. Vamos supor que A é o maior ângulo do triângulo.

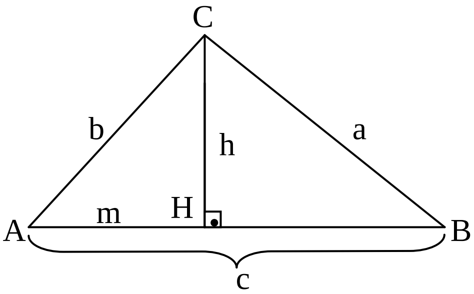
1º caso: A = 90º

Neste caso, cos A = cos 90º = 0 e sabemos que $a^2 = b^2 + c^2$ (*pitágoras*). Logo $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos A$ é verdade para triângulo retângulo em A.



2º caso: A < 90º

Neste caso, sendo h a medida da altura CH e m a medida de AH (conforme indica a figura) temos:



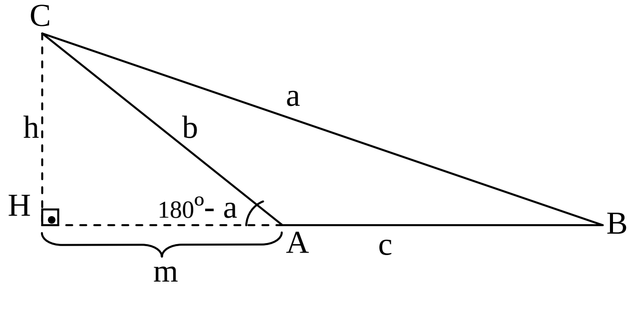
$$\left.\begin{array}{l}\text{No triângulo BHC}: a^2 = h^2 + (c-m)^2 \\ \text{No triângulo AHC}: b^2 = h^2 + m^2\end{array}\right\} \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2cm$$

$$\text{No triângulo AHC}: \cos A = \frac{m}{b} \Rightarrow m = b\cos A$$

$$\text{Então}: a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A.$$

3º caso: A > 90º

Neste caso, sendo h a medida da altura CH e m a medida de HA (conforme indica a figura) temos:



$$\left.\begin{array}{l}\text{No triângulo BHC}: a^2 = h^2 + (c+m)^2 \\ \text{No triângulo AHC}: b^2 = h^2 + m^2\end{array}\right\} \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 + 2cm$$

$$\text{No triângulo AHC}: \cos(180^\circ - A) = \frac{m}{b}$$

Sendo $\cos(180^\circ - A) = -\cos A$, vem: $m = -b\cos A$.

Então: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$.

Exemplo:

Calcule a diagonal maior de um paralelogramo cujos lados medem 10 cm e 5 cm, e formam um ângulo de 120º.

Solução:

Calculemos a diagonal maior, x, aplicando o teorema dos cossenos.

$$x^2 = 10^2 + 5^2 - 2 \cdot 10 \cdot 5 \cdot \cos 120^\circ$$

$$x^2 = 100 + 25 - 100(-\frac{1}{2}) = 175 \qquad \Rightarrow x = \sqrt{175} = 5\sqrt{7}\text{cm}$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1) Um triângulo tem dois lados, com medidas 5 cm e 3 cm, formando um ângulo de 60º. Calcular a medida do outro lado.
2) Num triângulo ABC tem-se: a = 5, b = 7, c = $\sqrt{39}$. Calcular o ângulo C.
3) Num triângulo ABC tem-se: a = x^2 + x +1, b = 2x + 1 e c = x^2 – 1. Calcular o ângulo A.
4) Na figura abaixo, ache o valor de cada ângulo e o comprimento de cada altura.