# Pré-Cálculo

Prof. Dr. Aldicio José Miranda

Universidade Federal de Uberlândia

outubro de 2020

Prof. Aldicio

# Pré-cálculo



Prof. Aldicio

# Números reais

Uma grande parte da disciplina de cálculo $1$, baseia-se nas propriedades dos números reais. Assim, ao estudarmos limite, continuidade, derivada e integral de funções, usaremos os fatos elementares a respeito dos números reais, onde essas funções são definidas e assumem valores nesse conjunto.

1. O conjunto dos números naturais é dado por
$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}.$$
2. O conjunto dos números inteiros é dado por
$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}.$$
3. O conjunto dos números racionais é dado por
$$\mathbb{Q} = \{x = \frac{p}{q},\ p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\}.$$

Prof. Aldicio

# Números reais

Um número racional pode ser representado sobre a forma decimal. Por exemplo,

$$\frac{1}{2} = 0,5.$$

Existem números que não podem ser representados na forma de fração. Por exemplo, não existem $p, q \in \mathbb{Z}$, tais que

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q}.$$

Esses números formam o conjunto dos números irracionais e denotado por $\mathbb{I}$. Mais exemplos de números irracionais são:

$$e, \quad \pi, \quad \sqrt{3}, \quad \sqrt[3]{4}.$$

Chamamos de conjunto dos números reais, a união do conjunto dos números racionais com o conjunto dos números irracionais, e denotamos por:

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}.$$

Prof. Aldicio

# Intervalos e desigualdades

Podemos representar geometricamente um número real utilizando-se um eixo, chamada de reta real, orientado geralmente para a direita.


Neste gráfico, o ponto $O$ representa a origem e o ponto $P$ um ponto a direita da origem, onde a coordenada $x$ do ponto $P$ é tal que $x > 0$.

Prof. Aldicio

# Intervalos e desigualdades

## Definição

*Intervalos são subconjuntos de números reais. Sejam* $a, b \in \mathbb{R}$*, tais que* $a < b$*. Definimos os seguintes tipos de intervalos.*

1. 

$(a, b) = \{x \in \mathbb{R}; a < x < b\}$, *(interv. aberto).*
2. 

$[a, b] = \{x \in \mathbb{R}; a \leq x \leq b\}$, *(interv. fechado).*
3. 

$[a, b) = \{x \in \mathbb{R}; a \leq x < b\}$, *(interv. semiaberto).*
4. 

$(a, b] = \{x \in \mathbb{R}; a < x \leq b\}$, *(interv. semiaberto).*
5. 

$(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R}; a < x\}$, *(interv. aberto).*
6. 

$[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R}; a \leq x\}$, *(interv. fechado).*
7. 

$(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R}; x < b\}$, *(interv. aberto).*
8. 

$(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R}; x \leq b\}$, *(interv. fechado).*
9. 
$(-\infty, \infty) = \mathbb{R}$, *(aberto e fechado).*

# Intervalos e desigualdades

Os valores $a$ e $b$ acima, também são chamados de extremos dos intervalos. Podemos ter intervalos limitados por $a$ e $b$ e também intervalos infinitos. Os intervalos aparecem como soluções de inequações ou desigualdades.

## Exemplo

*Determinar os intervalos de números reais que satisfazem as desigualdades abaixo e fazer a representação geométrica.*

1. $7 < 5x + 3 \leq 9$.
2. $\frac{x}{x+7} < 5$.

**Resolução de (1):**

$$\begin{array}{ccccc} 7 & < & 5x+3 & \leq & 9 \\ 7-3 & < & 5x+3-3 & \leq & 9-3 \\ 4 & < & 5x & \leq & 6 \\ \\ \frac{4}{5} & < & \frac{5x}{5} & \leq & \frac{6}{5} \\ \frac{4}{5} & < & x & \leq & \frac{6}{5} \end{array}$$

Solução: $S_1 := (\frac{4}{5}, \frac{6}{5}]$.

# Intervalos e desigualdades

**Resolução de (2):**

Caso 1: $x + 7 > 0.$

$$\begin{aligned} x &< 5(x+7) \\ x &< 5x + 35 \\ x - 5x &< 35 \\ -4x &< 35 \\ x &> \frac{-35}{4} \end{aligned}$$

$$S_1 := \{x \in \mathbb{R}; x > -7\} \cap \{x \in \mathbb{R}; x > \tfrac{-35}{4}\}$$

$$S_1 := (-7, \infty)$$

Caso 2: $x + 7 < 0.$

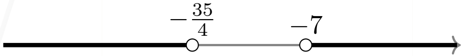
$$\begin{aligned} x &> 5(x+7) \\ x &> 5x + 35 \\ x - 5x &> 35 \\ -4x &> 35 \\ x &< \frac{-35}{4} \end{aligned}$$

$$S_2 := \{x \in \mathbb{R}; x < -7\} \cap \{x \in \mathbb{R}; x < \tfrac{-35}{4}\}$$

$$S_2 := (-\infty, \tfrac{-35}{4})$$

A solução final é a união desses dois casos:

$$S := S_1 \cup S_2 = (-\infty, \frac{-35}{4}) \cup (-7, \infty).$$



# Valor absoluto

O valor absoluto ou módulo de um número real $x$, denotado por $|x|$, é definido por

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0 \\ -x, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

**Exemplos:** $|7| = 7$, $|0| = 0$, $|-7| = -(-7) = 7$.

## Propriedades

**i.** $|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a$

**ii.** $|x| > a \Leftrightarrow x > a$ *ou* $x < -a$, *onde* $a > 0$

**iii.** $|a.b| = |a|.|b|$, $a, b \in \mathbb{R}$

**iv.** $|\frac{a}{b}| = \frac{|a|}{|b|}$, $a, b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$

**v.** $|a+b| \leq |a| + |b|$, $a, b \in \mathbb{R}$, *(desigualdade triangular).*

Prof. Aldicio

# Valor absoluto

## Exemplo

*Resolva a equação* $|2x-3| = 7.$

**Resolução:** Como $|x| = a \Leftrightarrow x = \pm a$, então

$$|2x-3| = 7 \Leftrightarrow 2x-3 = \pm 7$$

Caso 1: se $2x-3 = 7$, então $x = 5$.

Caso 2: se $2x-3 = -7$, então $x = -2$.

Portanto, a solução é: $S := \{-2,\ 5\}$.

## Exercício

*Resolva a desigualdade* $|5 - \frac{2}{x}| < 1.$

Prof. Aldicio

# Funções: domínio, contra-domínio e imagem

Um dos conceitos mais fundamentais da matemática é o de **função**. Esse conceito refere-se à correspondência entre conjuntos, que nesta disciplina sempre serão subconjuntos de $\mathbb{R}$. Vamos trabalhar com funções reais (imagem e contradomínio real) e dependendo de uma variável real.

## Definição

*Sejam $A, B \subseteq \mathbb{R}$. Uma função $f : A \to B$ é uma lei ou regra geral que associa cada elemento $x \in A$, no máximo um único elemento $y = f(x) \in B$. O conjunto dos elementos de $A$ que associa um único elemento de $B$ é chamado de domínio de $f$ e denotado por $D(f)$ e $B$ é chamado de contradomínio de $f$.*

Algumas notações para funções:

$$\begin{array}{rcl} f : A & \longrightarrow & B \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array} \; ; \qquad \begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ x & \longmapsto & y = f(x) \end{array} \; ; \qquad f : A \longrightarrow B, \quad y = f(x)$$

# Funções: domínio, contradomínio e imagem

## Observação

*Seja* $f : A \longrightarrow B$

1. *Dado* $x \in A$, *o elemento* $f(x) \in B$ *é chamado de valor de* $f$ *em* $x$ *ou de imagem de* $x$ *por* $f$.
2. *O conjunto de todos os valores assumidos por* $f$ *é chamado de* **conjunto imagem** *de* $f$ *e é denotado por* $Im(f)$

**Exemplo:** $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \ \ f(x) = x^2.$

Temos que, $D(f) = \mathbb{R}$ e $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}_+ = [0, \infty).$

**Exemplo:** $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \ \ f(x) = -\sqrt{x-1}.$

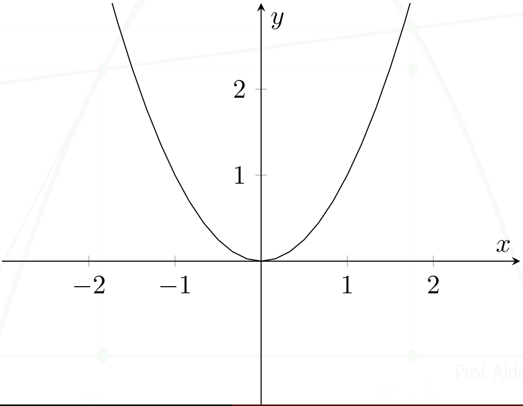
Temos que, $D(f) = [1, \infty)$ e $\mathrm{Im}(f) = (-\infty, 0].$

# Funções: gráfico

## Definição

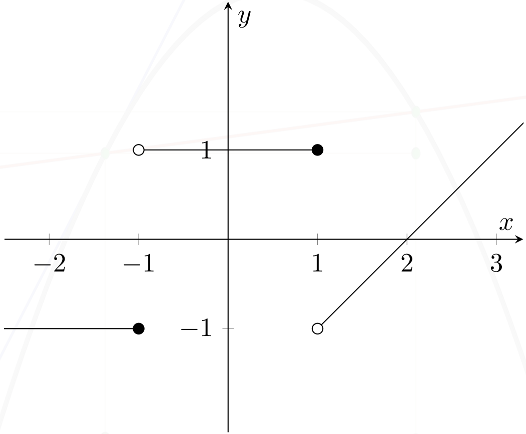
*Seja $f$ uma função. O gráfico de $f$ é o conjunto de todos os pontos da forma $(x, f(x))$ de um plano coordenado, onde $x \in D(f)$. Também podemos escrever da seguinte forma:* $\mathrm{Graf}(f) = \{(x, f(x)) \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R},\ x \in D(f)\}$.

**Exemplo:** $f(x) = x^2$



# Funções: gráfico

**Exemplo:** $f(x) = \begin{cases} -1, & \text{se} \quad x \leq -1 \\ 1, & \text{se} \quad -1 < x \leq 1 \\ x-2, & \text{se} \quad x > 1 \end{cases}$



# Funções lineares

## Definição

*Uma função da forma $y = f(x) = ax + b$, onde $a$ e $b$ são constantes reais é chamada de função afim.*

Se $a \neq 0$ e $b = 0$, chamamos de função linear, isto é, o gráfico de $f(x) = ax$ é uma reta que passa pela origem.

Se $a = 0$, temos a função constante $f(x) = b$, cujo gráfico é uma reta horizontal passando por $b$.

$D(f) = \mathbb{R}$.

Prof. Aldicio

# Funções polinomiais

## Definição

*Uma função polinomial $p$ é definida da seguinte maneira*

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} \cdots + a_1 x + a_0,$$

*onde $a_i's$ são constantes reais e chamados de coeficientes de $p(x)$.*

Se $a_n \neq 0$, dizemos que $p(x)$ tem grau $n$.

$D(f) = \mathbb{R}$.

Funções lineares ou afins com $a \neq 0$, são funções polinômias de grau $1$.

Polinômios de grau $2$, $p(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ ou $p(x) = ax^2 + bx + c$, são chamadas de funções quadráticas, de grau $3$, funções cúbicas...

# Funções racionais

## Definição

*Uma função racional é o quociente ou razão de dois polinômios,*

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)},$$

*onde $p$ e $q$ são polinômios.*

$D(f) = \{x \in \mathbb{R}; \;\; q(x) \neq 0\}.$

**Exemplo:**

$f(x) = \frac{2x^2-3}{7x+4}$ é uma função racional, cujo domínio é $D(f) = \{x \in \mathbb{R}; \;\; x \neq -\frac{4}{7}\}$.

# Funções potências de expoentes racionais

Qualquer função que pode ser escrita na forma

$$f(x) = ax^k,$$

onde $a \neq 0$ e $k \neq 0$ são contantes reais, é chamada de função potência. O número $k$ é chamado de expoente. No caso de $k$ ser um número inteiro positivo, teremos um caso particular de polinômio e no caso de $k$ ser negativo, teremos uma função racional. Se $k$ é uma fração então temos uma função potência com expoente racional.

**Exemplos:** $f(x) = \sqrt{x} = x^{1/2}$, $\quad f(x) = \sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{2}{3}}$.

Faça gráficos destas e outras funções usando o computador.

Prof. Aldicio

# Composta de duas funções

## Definição

*Dadas duas funções $f$ e $g$, definimos a função composta, $f \circ g$, (lê-se: $f$ composta com $g$), por*

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)).$$

*O domínio de $f \circ g$, são os $x \in D(g)$, tal que $g(x) \in D(f)$.*

Um diagrama pode ser útil:
Se $f : B \to C$, $g : A \to B$, então temos a composta $f \circ g : A \to C$.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "g"] \arrow[rr, bend right, "f \circ g"'] & B \arrow[r, "f"] & C \end{tikzcd}$$

Prof. Aldicio

# Composta de duas funções

**Exemplo:** A função $y = \sqrt{1 - x^2}$, pode ser pensada calculando-se, primeiro $1 - x^2$ e, depois, tomando a raíz quadrada do resultado. Neste caso, $y$ é a composta de $g(x) = 1 - x^2$ com $f(x) = \sqrt{x}$, e $D(f \circ g) = [-1, 1]$.

Em geral $f \circ g \neq g \circ f$.

Prof. Aldicio

# Funções pares, ímpares, crescentes, decrescentes e periódicas

Dizemos que uma função $f$ é par se, $f(-x) = f(x)$, e ímpar se $f(-x) = -f(x)$.

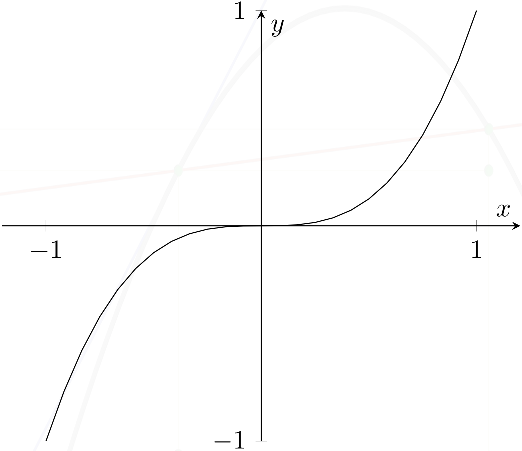
**Exemplo:** $f(x) = x^2$ é uma função par, enquanto que $f(x) = x^3$ é ímpar.

## Definição

1. *Dizemos que uma função $f$ é crescente em um intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$, se dados $x_1, x_2 \in I$, com $x_1 < x_2$, então devemos ter $f(x_1) < f(x_2)$.*
2. *Dizemos que uma função $f$ é decrescente em um intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$, se dados $x_1, x_2 \in I$, com $x_1 < x_2$, então devemos ter $f(x_1) > f(x_2)$.*
3. *Dizemos que uma função $f$ é periódica se, $f(x+p) = f(x)$, onde $0 < p \in \mathbb{R}$. O menor valor de $p$ é chamado de período da função.*

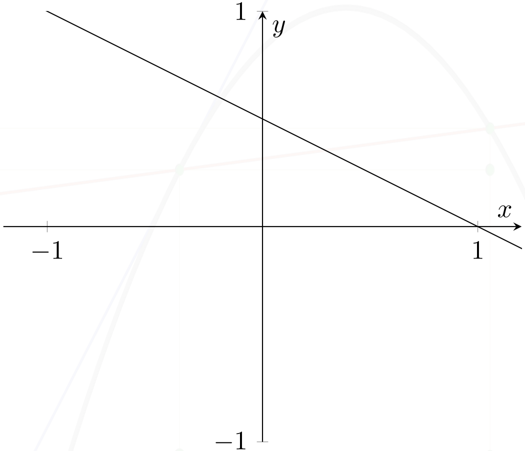
# Funções pares, ímpares, crescentes, decrescentes e periódicas

**Exemplo:** 1. $f(x) = x^3$. Esta função é crescente em todo seu domínio.



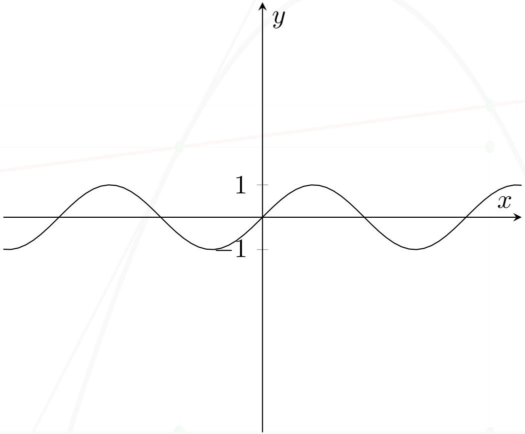
# Funções pares, ímpares, crescentes, decrescentes e periódicas

**Exemplo:** 2. $f(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x$. Esta função é decrescente em todo seu domínio.



# Funções pares, ímpares, crescentes, decrescentes e periódicas

**Exemplo:** 2. $f(x) = \text{sen}(x)$. Esta função é periódica. Em quais intervalos essa função é crescente?



# Funções sobrejetoras, injetoras, bijetoras e função inversa

## Definição

1. *Dizemos que* $f : A \longrightarrow B$ *é sobrejetora se, e somente se,* $\mathrm{Im}(f) = B$.
2. *Dizemos que* $f : A \longrightarrow B$ *é injetora se, e somente se,* $f(x_1) = f(x_2)$ *implica que* $x_1 = x_2$, *para todo* $x_1, x_2 \in D(f)$. *Ou, de modo equivalente,* $x_1 \neq x_2$ *implica que* $f(x_1) \neq f(x_2)$.
3. *Dizemos que* $f : A \longrightarrow B$ *é bijetora se,* $f$ *for sobrejetora e injetora.*

## Exercício

*Dê exemplos de funções que são somente injetora, somente sobrejetoras, bijetora, e ao mesmo tempo nem sobrejetora e nem injetora.*

Prof. Aldicio

# Função inversa

## Definição

*Seja* $f : A \longrightarrow B$ *uma função bijetora. Logo,* $D(f) = A$ *e* $\mathrm{Im}(f) = B$*. Definimos a função inversa de* $f$*, por* $f^{-1} : B \longrightarrow A$ *com* $D(f^{-1}) = B$ *e* $\mathrm{Im}(f^{-1}) = A$*, onde*

$$y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y).$$

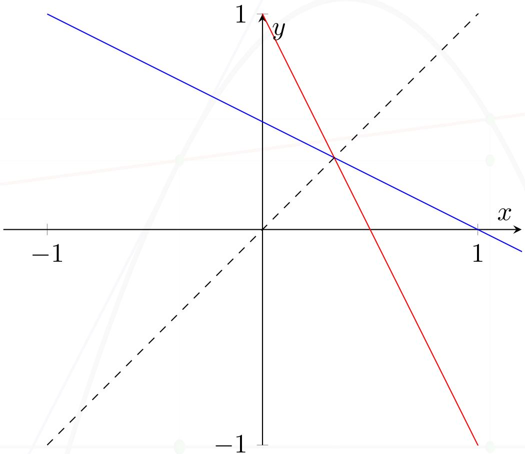
Note que, $f^{-1}(f(x)) = x$ e $f(f^{-1}(y)) = y$.

**Observação:** Não confundir **função inversa** $f^{-1}(x)$ com $\frac{1}{f(x)}$.

(se $f(x) = x$, então, $f^{-1}(x) = x \neq \frac{1}{x} = \frac{1}{f(x)}$).

# Funçã inversa

**Exemplo:** Dada $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, por $f(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x$, sua inversa $f^{-1} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, é dada por $f^{-1}(x) = 1 - 2x$. Existe uma simetria entre os gráficos de uma função e sua inversa em relação a função identidade $g(x) = x$.



# Funçã inversa

Dependendo da função, encontrar sua inversa pode ser complicado, mas no caso de funções afins uma maneira de calcular a inversa é a seguinte:

Seja $f(x) = ax + b$, com $a \neq 0$. A inversa de $f$ também é uma função afim. Seja $f^{-1}(x) = cx + d$, devemos encontrar $c$ e $d$ tal que $f(f^{-1}(x)) = x$. Temos que

$$f(f^{-1}(x)) = x \Leftrightarrow$$

$$f(cx + d) = x \Leftrightarrow$$

$$a(cx + d) + b = x \Leftrightarrow$$

$$a(cx + d) = x - b \Leftrightarrow$$

$$cx + d = \frac{x}{a} - \frac{b}{a} \Leftrightarrow$$

Portanto, $f^{-1}(x) = \frac{x}{a} - \frac{b}{a}$. (Repita estas contas com o exemplo do slide anterior).

Prof. Aldicio

# Funções trigonométricas

Antes de definir as funções trigonométricas, vamos primeiro definir Ciclo trigonométrico.

**Ciclo trigonométrico:** Tomemos sobre um plano um sistema cartesiano ortogonal $x \times y$. Consideremos a circunferência $C = C(O, 1)$ de centro $O$ e raio $r = 1$.

Definimos uma aplicação de $\mathbb{R} \longrightarrow C$ que a cada $x \in \mathbb{R}$ associa-se um único ponto $P \in C$, tal que:

1. Se $x = 0$, então $P$ coincide com $A$.

2. Se $x > 0$, então realizamos a partir de $A$ um percurso de comprimento $x$, no sentido anti-horário e marca-se o ponto $P$.

3. Se $x < 0$, então realizamos a partir de $A$ um percurso de comprimento $|x|$, no sentido horário e marca-se o ponto $P$.

A circunferência assim definida chama-se *ciclo trigonométrico*.

Prof. Aldicio

# Funções trigonométricas

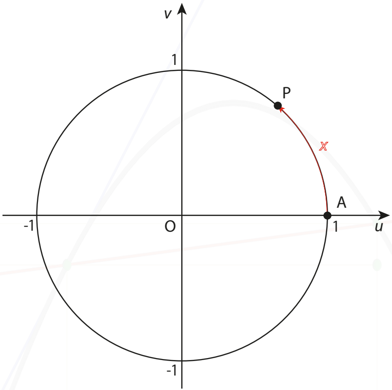



**Figura:** Ciclo trigonométrico.

**Observação:** se $P$ é a imagem de $x_0$, então $P$ é a imagem de

$$\{x \in \mathbb{R};\quad x = x_0 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}.$$

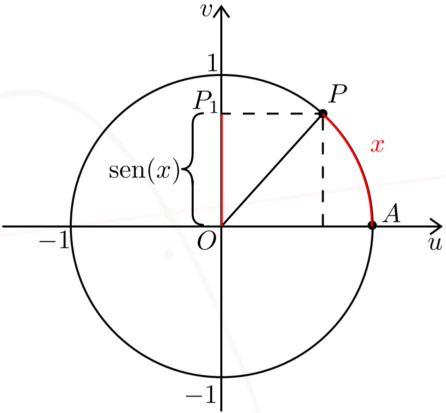
# Função $y = \operatorname{sen}(x)$

**Função seno:** Dado $x \in \mathbb{R}$, seja $P$ sua imagem no ciclo. Denominamos seno de $x$ a ordenada $\overline{OP_1}$ do ponto $P$, onde $P_1$ é a projeção ortogonal de $P$ sobre o eixo $v$. Assim, a função seno é definida e denotada por:

$$\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \operatorname{sen}(x) = \overline{OP_1} \end{array}$$

Note que a função seno é positiva no primeiro e segundo quadrante, pois a ordenada de $P$ é maior do que zero e é negativa no terceiro e quarto quadrante, pois a ordenada de $P$ é menor do que zero.

Onde esta função se anula?

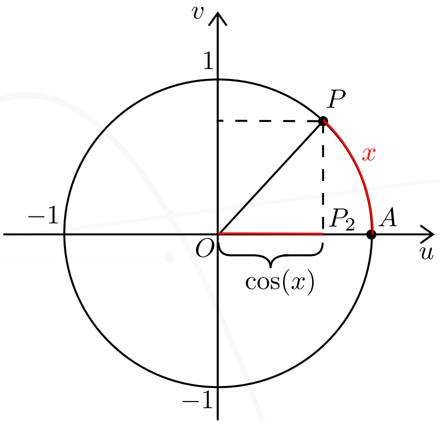



Função seno

# Função $y = \cos(x)$

**Função cosseno:** Dado $x \in \mathbb{R}$, seja $P$ sua imagem no ciclo. Denominamos cosseno de $x$ a abscissa $\overline{OP_2}$ do ponto $P$, onde $P_2$ é a projeção ortogonal de $P$ sobre o eixo $u$. Assim, a função cosseno é definida e denotada por:

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \cos(x) = \overline{OP_2} \end{array}$$

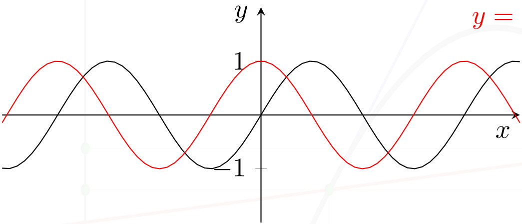


Função cosseno

Note que a função seno é positiva no primeiro e quarto quadrante, pois a abscissa de $P$ é maior do que zero e é negativa no segundo e terceiro quadrante, pois a abscissa de $P$ é menor do que zero.

Para quais valores de $x$, esta função se anula?

# Função $y = \cos(x)$




$y = cos(x)$ e $y = \text{sen}(x)$.

## Exercício

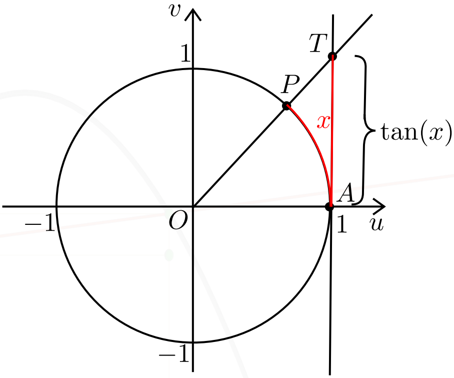
*Determine o domínio, imagem, período, intervalos de crescimento e decrescimento das funções circulares seno e cosseno.*

# Função $y = \tan(x)$

**Função tangente:** Dado $x \in \mathbb{R}$, $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$, e seja $P$ sua imagem no ciclo. Considere a reta $\overleftrightarrow{OP}$ e seja $T$ sua interseção com o eixo das tangentes (paralelo ao eixo $v$ passando por $A$). Denominamos tangente de $x$ a ordenada $\overline{AT}$ do ponto $T$. Assim, a função tangente é definida e denotada por:

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \tan(x) = \overline{AT} \end{array}$$

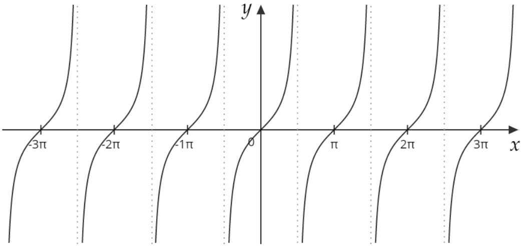
Note que a função tangente é positiva no primeiro e terceiro quadrante, pois a ordenada de $T$ é maior do que zero e é negativa no segundo e quarto quadrante, pois a ordenada de $T$ é menor do que zero.




Função tangente

# Função $y = \tan(x)$

Gráfico da função $y = \tan(x)$.




## Exercício

**i.** *Determine o domínio, imagem, período, intervalos de crescimento e decrescimento da função* $y = \tan(x)$.

**ii.** *Analisando o ciclo trigonométrico das funções seno, cosseno e tangente e usando semelhança de triângulos, conclua que* $\tan(x) = \dfrac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}$.

# Funções exponenciais

## Definição

*Dado um número real $a$, com $0 < a \neq 1$, definimos a função exponencial de base $a$ por*

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto a^x \end{aligned}$$

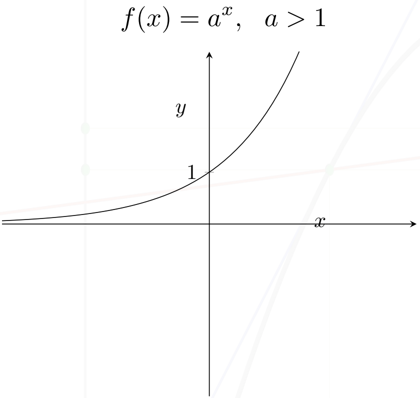
**Exemplo:** $f(x) = 3^x$, então $f(3) = 3^3 = 27$.

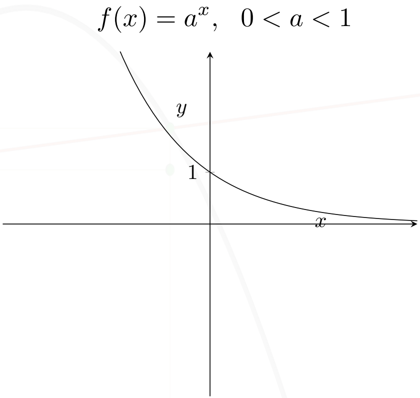
## Propriedades

1. $f(x) = a^x$ *é crescente (decrescente) se, e só se,* $a > 1$ *(*$0 < a < 1$*).*
2. $f(x) = a^x$, $0 < a \neq 1$ *é injetora.*
3. *Se* $f(x) = a^x$, $0 < a \neq 1$, *então* $D(f) = \mathbb{R}$ *e* $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}_+^* = (0, \infty)$.

Prof. Aldicio

# Funções exponenciais



# Logarítmo

**Logaritmos:** Sendo $a, b \in \mathbb{R}$, ambos positivos e $a \neq 1$, chama-se logaritmo de $b$ na base $a$, o expoente que se deve dar à base $a$ de modo que a potência obtida seja $b$. Em termos de notação temos:

Se $a, b \in \mathbb{R}$, $0 < a \neq 1$ e $b > 0$, então

$$\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b.$$

($a =$ base do logaritmo, $b =$ logaritmando, $x =$ logaritmo (x é único)).

**Exemplo:**

1. $\log_2 8 = 3$, pois $2^3 = 8$.
2. $\log_3 \frac{1}{9} = -2$, pois $3^{-2} = \frac{1}{9}$.

Prof. Aldicio

# Logarítmo

## Propriedades

*Sejam* $0 < a \neq 1$, $b > 0$, $c > 0$.

1. $\log_a bc = \log_a b + \log_a c$, *(logaritmo do produto).*
2. $\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$, *(logaritmo do quociente).*
3. $\log_a b^\alpha = \alpha \log_a b$, *(logaritmo da potência).*

   *Se* $a, b, c \in \mathbb{R}$ *são positivos,* $a \neq 1$, $c \neq 1$, *então*
4. $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$, *(mudança de base).*

# Funções logarítmicas

## Definição

*Dado $a \in \mathbb{R}$, com $0 < a \neq 1$, chamamos de função logarítmica de base $a$, a função:*

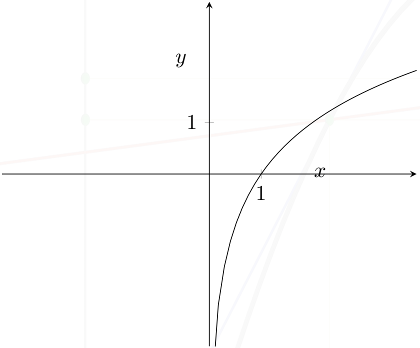
$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \log_a x \end{array}$$

## Propriedades

1. *Se $0 < a \neq 1$, as funções $f(x) = \log_a x$ e $g(x) = a^x$ são inversas uma da outra.*
2. $D(f) = \mathbb{R}_+^* = (0, \infty)$ *e* $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}$.
3. $f(x) = \log_a x$ *é crescente (decrescente) se, e só se,* $a > 1$ $(0 < a < 1)$.

# Funções logarítmicas

$f(x) = \log_a x, \quad a > 1$




$f(x) = \log_a x, \quad 0 < a < 1$