Universidade Federal de Uberlândia
Prof. Aldicio J. Miranda

FUNÇÃO EXPONENCIAL

1. POTÊNCIA COM EXPOENTE RACIONAL

1.1 DEFINIÇÕES

Sendo a um número real qualquer ($a \in R$) e n um número inteiro ($n \in Z$);

para n > 1, $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{\text{n fatores}}$

para n = 1, $a^1 = a$;

para n = 0, $a^0 = 1$;

e ainda, $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$ para $a \neq 0$.

onde a^n é uma *potência* de base <u>a</u> e expoente *inteiro* <u>n</u>.

1.2 PROPRIEDADES DAS POTÊNCIAS

As *potências* com expoente racional gozam das seguintes propriedades:

P_1 $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

P_2 $a^m : a^n = a^{m-n}$ para $a \neq 0$

P_3 $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$

P_4 $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$ para $b \neq 0$

P_5 $\left(a^m\right)^n = a^{m \cdot n}$

Além disso, se a é um número real e positivo, temos:

$a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{x^p}$, onde $p \in Z$ e $q \in Z_+^*$

Exemplo 1:

Calcular, reduzindo, se possível, a uma só potência:

a) $2^3.2^4 = 2^{3+4} = 2^7$

c) $2^4 : 2^5 = 2^{4-5} = 2^{-1} = \frac{1}{2}$

b) $5^4 : 5^3 = 5^{4-3} = 5^1 = 5$

Exemplo 2:

a) $\left(a^3\right)^2 = a^{3.2} = a^6$

b) $2^{-x} : 2^x = 2^{-x-x} = 2^{-2x}$

c) $3^{\frac{1}{3}}.\sqrt{3} = 3^{\frac{1}{3}}.3^{\frac{1}{2}} = 3^{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}} = 3^{\frac{5}{6}} = \sqrt[6]{3^5}$

2. POTÊNCIAS COM EXPOENTE REAL

É importante saber que as propriedades das potências para expoentes racionais permanecem válidas para expoentes irracionais.

Então, lembrando que a reunião dos números racionais, com os números irracionais, dá o conjunto dos números reais. Assim, têm significado em R potências do tipo:

$$2^{\frac{7}{5}},\quad 3^{-0,75},\quad 3^{\sqrt{2}},\quad 2^{\pi},\quad \text{etc.}$$

Seus valores racionais aproximados dependem de tabelas e gráficos especiais que se baseiam no estudo das funções *exponencial e logarítmica*.

EXERCÍCOS PROPOSTOS

1) Efetue, reduzindo a uma só potência.

a) $x \div x^3$

b) $\left(\frac{3}{2}\right) \div \left(\frac{3}{2}\right)^{-5}$

c) $2^3 - 2^4$

d) $3^4 \cdot 3^3$

e) $2^3 + 2^4$

f) $\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2$

2) Efetue:

a) $\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{0}$ b) $3^{x-2} \div 3^{x-3}$ c) $(0{,}2)^4 \cdot 5^4 \cdot (0{,}2)^{-2}$

d) $\left(\sqrt{2}\right)^{-2}$ e) $1024^{\,0{,}4}$ f) $\left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{2}}$

3) Obter x nas equações:

a) $x^{\frac{2}{3}} = 16$ b) $x^{\frac{5}{2}} = 25\sqrt{5}$ c) $x^{-0{,}5} = \frac{4}{5}$

3. COMPARAÇÃO DE POTÊNCIAS

Vimos anteriormente que:

1) Potência de expoente real deve ter base positiva.
2) Toda potência de base 1 é igual a 1.

Para compararmos potências de mesma base saber se a^n é maior, menor , igual a a^m devemos considerar dois casos:

1º caso: a base é real e maior que 1 (a > 1)
2º caso: a base é real e está compreendida entre 0 e 1 (0 < a < 1).

No 1º caso, vale a propriedade: “se a é um número real maior que 1” ($a \in R$ e a > 1) e b e c são números reais, então:

$$a^b < a^c \Leftrightarrow b < c$$

Por exemplo,

$2^7 > 2^4$, pois, a base 2 é maior que 1 e 7 > 4.
$5^{\frac{1}{3}} < 5^{\frac{1}{2}}$, pois a base 5 é maior que 1 e 1/3 < 1/2.

Em outras palavras, se a é um número real maior que 1 ($a \in R$ e a > 1), a potência a^x cresce com o crescer do expoente real x.

No 2º caso, vale a propriedade: “se a é um número real compreendido entre 0 e 1 ($a \in R$ e 0 < a < 1) e b e c são números reais, então.

$$a^b < a^c \Leftrightarrow b > c$$

Por exemplo,

$\left(\frac{1}{2}\right)^5 < \left(\frac{1}{2}\right)^3$, pois, a base 1/2 está compreendida entre 0 e 1 e 5 > 3.

$(0{,}32)^2 > (0{,}32)^3$, pois, a base 0,32 está compreendida entre 0 e 1 e 2 < 3.

Em outras palavras, se a é um número real compreendido entre 0 e 1 ($a \in R$ e $0 < a < 1$), a potência a^x decresce com o crescer do expoente x.

Resultado:

Se a, b, c $\in$ **R**, então,
para a > 1 tem-se $a^b < a^c \Leftrightarrow b < c$
para 0 < a < 1 tem-se $a^b < a^c \Leftrightarrow b > c$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1) Classificar em V (verdadeiro) ou F (falso):

a) $2^{0,3} < 2^{0,4}$ b) $3^{-0,001} < 0$ c) $\left(\frac{3}{7}\right)^{-1,5} < 1$

d) $\left(\frac{1}{5}\right) - 5 > \left(\frac{1}{5}\right)^5$ e) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{2}} > \left(\frac{1}{3}\right)^{1,4}$ f) $\left(\frac{1}{2}\right)^{0,5} < \left(\frac{1}{2}\right)^{0,6}$

4. FUNÇÃO EXPONENCIAL

Dado um número real a, tal que a > 0 e a ≠ 1, denominamos *função exponencial* de base a à função $f(x) = a^x$ definida para todo x real.

O domínio de $y = a^x$ é R e o conjunto-imagem é R^*_+.

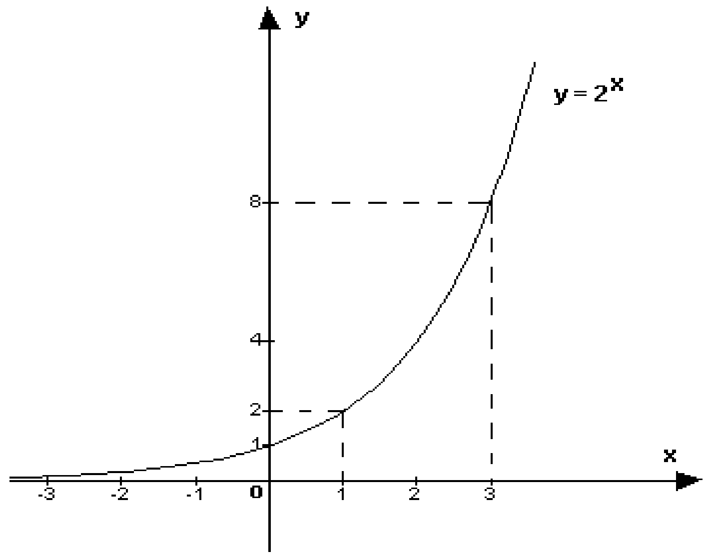
4.1 GRÁFICO DA FUNÇÃO EXPONENCIAL

1º exemplo: $f(x) = 2^x$ ou $y = 2^x$.

Tabela

x	$y = 2^x$
-3	1/8
-2	1/4
-1	1/2
0	1
1	2
2	4
3	8

Gráfico



Observemos que:

a) O domínio é R
b) O conjunto-imagem é R^*_+.
c) A curva passa pelo ponto (0, 1).
d) Como a base 2 é maior que 1, a função $y = 2^x$ é crescente, pois,

$x_1 < x_2 \Rightarrow 2^{x_1} < 2^{x_2}$, $\forall\ x_1, x_2 \in R$

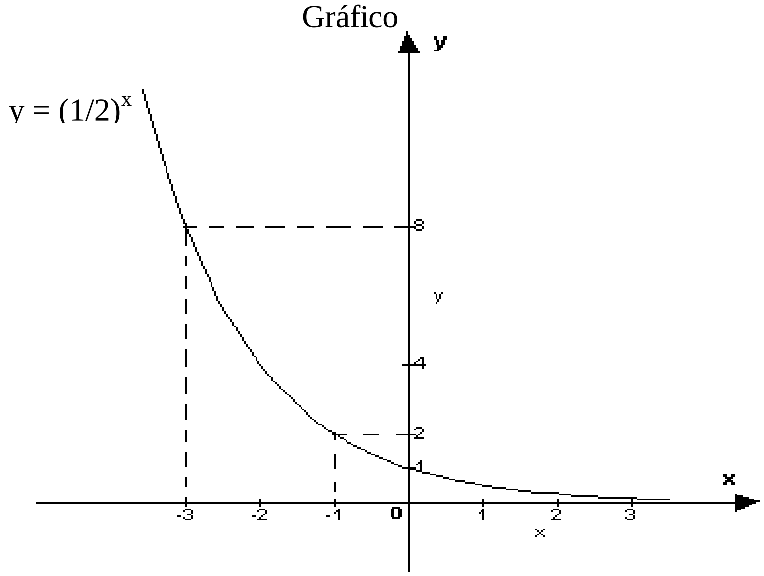
(quando x cresce, em correspondência, $y = 2^x$ cresce)

2º exemplo: $f(x) = (1/2)^x$ ou $y = (1/2)^x$

Tabela

x	$y = (1/2)^x$
-3	8
-2	4
-1	2
0	1
1	1/2
2	1/4
3	1/8

Gráfico



Observemos que:

a) O domínio é R
b) O conjunto-imagem é R^{*}_{+}
c) A curva passa pelo ponto (0, 1)
d) Como a base 1/2 está compreendida entre 0 e 1, a função $y = (1/2)^x$ é decrescente, pois

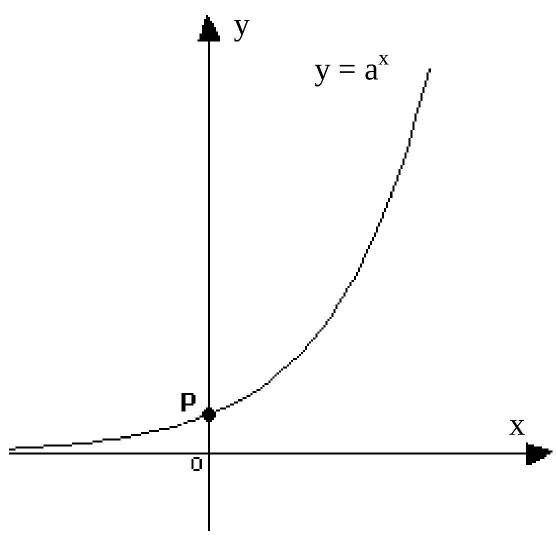
$$x_1 < x_2 \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{x_1} > \left(\frac{1}{2}\right)^{x_2}, \ \forall\, x_1, x_2 \in R$$

(quando x cresce, em correspondência, $y = (1/2)^x$ decresce)

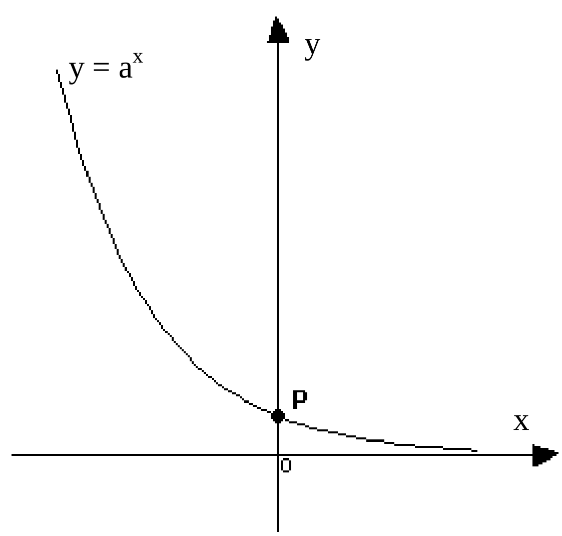
Conclusão:

1- Domínio da função: o domínio é R, ou seja: D(f) = R.
2- Imagem: o conjunto-imagem é R^{*}_{+}, ou seja: Im(f) = R^{*}_{+}
3- Em qualquer dos casos, o ponto P(0, 1) pertence ao gráfico da função.
4- A função é injetora, pois se $x_1 \neq x_2 \Rightarrow a^{x_1} \neq a^{x_2}$.
5- A função é sobrejetora, pois $\forall\, y \in R^{*}_{+}$ existe $x \in R$ tal que $y = a^x$.
6- A função é bijetora, pois é injetora e sobrejetora.
7- No caso a > 1 a função é crescente, pois se $x_1 > x_2 \Rightarrow a^{x_1} > a^{x2}$.
8- No caso 0 < a < 1 a função é decrescente, pois $x_1 > x_2 \Rightarrow a^{x1} < a^{x2}$.

função $y = a^x$



caso a > 1



caso 0 < a < 1

Exemplo:

Verificar se as funções exponenciais abaixo são crescentes ou decrescentes (em R).

a) $f(x) = 5^x$ b) $y = (0,35)^x$ c) $f(x) = \left(\frac{3}{8}\right)^{-x}$

solução:

a) $f(x) = 5^x$ é crescente, pois $5 > 1$

b) Como $\left(\frac{3}{8}\right)^{-x} = \left(\frac{8}{3}\right)^{x}$ a função é crescente, pois $\frac{8}{3} > 1$

c) $y = (0,35)^x$ é decrescente, pois $0 < 0,35 < 1$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1) Verifique se as funções abaixo são crescentes ou decrescentes em **R**. Justifique:

a) $f(x) = (1,6)^x$ b) $f(x) = \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^x$ c) $\left(\sqrt{2} - 1\right)^x$

d) $f(x) = \left(\frac{3}{\sqrt{5}}\right)^{-x}$ e) $f(x) = \pi^x$ f) $\left(10^{-1}\right)^x$

2) Faça a representação gráfica das funções:

a) $y = 3^x - 1$ b) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+2}$ c) $y = \left(\frac{2}{3}\right)^x$

5. EQUAÇÕES EXPONENCIAIS

Chamamos de equação exponencial a toda equação que apresenta a incógnita no expoente.

São exemplos de equações exponenciais:

a) $3^x = 1$ b) $5^{x-3} = 10.2^{x-1}$ c) $\pi^x = 3$

Resolver uma equação significa achar o valor (ou valores) da incógnita que torne a equação uma sentença numérica verdadeira. Por exemplo, na equação $2^x = 32$, o valor $x = 5$ é uma raiz, pois $2^5 = 32$.

É possível transformar (através da propriedades) algumas equações exponenciais em outras equivalente que possuam, nos dois membros, potências de mesma base (maior que zero e difente de 1). Obtido isso, e lembrando que a função y = a^x é injetora, chegamos a uma equação que envolve somente os expoentes dos dois membros.

Quando não for possível obter potências de mesma base nos dois membros utilizaremos outros métodos, em especial os Logaritmos.

Exemplo 1: Resolver a equação $3^x = 9$

solução:

$9 = 3^2 \Rightarrow 3^x = 3^2 \Rightarrow x = 2$ O conjunto solução é S = {2}.

Exemplo 2: Resolver a equação $\sqrt{3} = 27^x$

Solução:

Como $\sqrt{3} = 3^{\frac{1}{2}}$ e $27 = 3^3$, temos:

$3^{\frac{1}{2}} = \left(3^3\right)^x \Rightarrow 3^{\frac{1}{2}} = 3^{3x} \Rightarrow 3x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{1}{6}$ O conjunto solução é S = { $\frac{1}{6}$ }

Exemplo 3: Resolver a equação $2^x + 2^{x+1} = 24$

solução:

A equação também pode ser escrita assim: $2^x + 2^x \cdot 2 = 24$.
Substituindo 2^x por y, temos:

$y + 2y = 24 \Rightarrow y = 8$

então, $2^x = 8 \Rightarrow x = 3$

O conjunto solução = S = {3}

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1) Resolva as seguintes equações:

a) $2^{x+2} + 2^x = 80$ b) $3^{x-4} + 3^x = \frac{82}{27}$ c) $\frac{5^{5x}}{5^4} = \left(\frac{1}{5}\right)^{x+1}$

d) $1000 = \sqrt[5]{(0,01)^{x-1}}$ e) $4^{\frac{x-2}{3}} = 4^{\frac{2x+1}{4}}$ f) $5^{x-2} + 3 \cdot 5^{x+1} = 351 + 5^x$

6. INEQUAÇÕES EXPONENCIAIS

Chamamos de inequação exponencial a toda inequação que apresenta a incógnita no expoente.

São exemplos de inequações exponenciais:

$5^x > 5^2$, $3^{x-1} < 9$,

Resolver uma inequação significa achar valor (ou valores) da incógnita que torne a inequação uma desigualdade numérica verdadeira.

É possível mostrar através das propriedades algumas inequações exponenciais em outras equivalentes que possuam, nos dois membros, potências de mesma base (maior que zero e diferente de 1). Feito isso, e lembrando que a função $y = a^x$ é crescente quando $a > 1$ e decrescente quando $0 < a < 1$, obtemos uma inequação que envolve apenas os expoentes.

Caso não seja possível a obtenção de bases iguais, usaremos outros métodos.

Exemplo 1: Resolver a inequação $10^x > 1000$.

Solução:

Temos: $1000 = 10^3 \Rightarrow 10^x > 10^3$
Como as bases são iguais e maiores que 1 o sinal > é mantido para os expoentes pois, nessas condições, a função exponencial é crescente. Então $x > 3$.
O conjunto solução é $S = \{x \in R \ / \ x > 3\}$

Exemplo 2: Resolver a inequação $(0{,}7)^x \leq \frac{7}{10}$

Solução:
Temos: $(0{,}7)^x \leq (0{,}7)^1$
Como as bases são iguais, positivas e menores que 1, o sinal $\leq$ será trocado por $\geq$ pois, nessas condições, a função exponencial é decrescente. Então $x \geq 1$.
O conjunto solução é $S = \{x \in R \ / \ x \geq 1\}$.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1) Resolva as seguintes inequações exponenciais:

a) $5^x < 125$ b) $3^x \geq \frac{1}{3}$ c) $\left(\frac{3}{4}\right)^x < \frac{9}{16}$

d) $10^{4-2x} \geq 1000$ e) $\sqrt[3]{(0{,}1)^{x+1}} < 10^{-4}$ f) $16^{\frac{x}{2}+\frac{1}{3}} \leq 32^{x-1}$

Exemplo 3: Resolver a inequação $2^x < 2^3 < 2^{2x}$. (inequação dupla)

Solução:

Devemos ter simultaneamente:

$2^x < 2^3$ (I) e $2^3 < 2^{2x}$ (II)

(I) $2^x < 2^3 \Rightarrow x < 3$, pois as bases são iguais e maior que 1

(II) $2^3 < 2^{2x} \Rightarrow 3 < 2x \Rightarrow x > \dfrac{3}{2}$, mesmo motivo.

O conjunto solução é S = $\left\{ x \in R \mid \dfrac{3}{2} < x < 3 \right\}$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1) Resolva as seguintes inequações exponenciais:

a) $5 < 5^x < 125$ b) $\dfrac{8}{3} \leq \left(\dfrac{3}{8}\right)^{x-2} < \left(\dfrac{3}{8}\right)^{2x+3}$ c) $8 < \left(\dfrac{1}{2}\right)^x < 64$

7. COMENTÁRIO DE POTÊNCIA DE EXPOENTE IRRACIONAL

Veremos agora como é possível interpretar uma potência de base positiva (e diferente de 1), mas de expoente irracional. Para isso usaremos aproximações com potências de expoente racional.

Exemplo:

Seja o número $5^{\sqrt{2}}$, onde a base é 5 (maior que 1) e o expoente $\sqrt{2}$, irracional.

Uma tabela com valores aproximados (por falta e por excesso) de $\sqrt{2}$ é:

$$1 < \sqrt{2} < 2$$

$$1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5$$

$$1{,}41 < \sqrt{2} < 1{,}42$$

$$\begin{matrix} . & . & . \\ . & . & . \\ . & . & . \end{matrix}$$

Como a função y = 5^x é crescente em R, pois a base é maior que 1, teremos em correspondência uma tabela de valores aproximados de $5^{\sqrt{2}}$.

$$5^1 < 5^{\sqrt{2}} < 5^2$$

$$5^{1.4} < 5^{\sqrt{2}} < 5^{1,5}$$

$$5^{1,41} < 5^{\sqrt{2}} < 5^{1,42}$$

$$\begin{matrix} . & . & . \\ . & . & . \\ . & . & . \end{matrix}$$

Observação: na coluna da esquerda estão os valores de $5^{\sqrt{2}}$, por falta, e na direita, por excesso.

Desse modo, o número $5^{\sqrt{2}}$ fica definido por esses dois conjuntos de valores aproximados (por falta e por excesso), nos quais foram utilizados expoentes racionais.