Universidade Federal de Uberlândia
Prof. Aldicio J. Miranda

FUNÇÃO LOGARÍTMICA

1. PRELIMINARES

Já resolvemos algumas *equações exponenciais*, que recaem em equações mas simples, como $2^x = 8$, $3^x = 1$ (que se verificam para x = 3, x = 0 respectivamente). Vamos supor agora que chegássemos à equação $3^x = 17$.
Como $3^2 < 17 < 3^3$, temos:

$$3^2 < 3^x < 3^3$$

e então: $2 < x < 3$

Existe um único valor de x, $x \in \mathbf{R}$, que verifica a equação $3^x = 17$ e é um número compreendido entre 2 e 3, isto é, do intervalo]2 , 3[. Para determinarmos este valor de x, com uma aproximação desejada, recorremos a teoria dos logarítmicos, teoria importante que se encontra frequentes aplicações na prática. Na equação $3^x = 17$, o expoente x será o logarítmico de 17 na base 3.

Vamos supor que necessitamos saber qual o número inteiro que mais se aproxima de $10^{1,7}$?

Evidentemente, essa potência de 10 é um número real compreendido entre 10 e 100 ($10^1 < 10^{1,7} < 10^2$). Com o auxílio dos logaritmos, resolveremos este problema e iremos verificar, talvez com surpresa, que 50 é a melhor aproximação inteira de $10^{1,7}$.

2. DEFINIÇÃO

Vamos considerar o número a, positivo e diferente de 1, e um número b positivo. Chama-se *logaritmo* de b na base a ao expoente x que se deve dar à base a de modo que a potência obtida seja igual a b

Em símbolos: $\boxed{\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b}$ $(0 < a \neq 1,\ b > 0)$

Diz-se ainda:
b é o logaritmando ou antilogaritmo
a é a base
x é o logaritmo

Exemplos:

$\log_2 8 = 3$ pois $2^3 = 8$

$\log_3 3 = 1$ pois $3^1 = 3$

$\mathbf{log}_2 \frac{1}{8} = -3$ pois $2^{-3} = \frac{1}{8}$ $\mathbf{log}_{10} 0{,}1 = -1$ pois $10^{-1} = 0{,}1$

Podemos observar, em todos estes exemplos, que sempre foram levadas em consideração as condições da definição: o logaritmando **b** positivo e a base **a** positiva e diferente de 1.

$$\boxed{\begin{array}{ll} b > 0 & (b \in R_+^*) \\ 0 < a \neq 1 & (a \in R_+^* - \{1\}) \end{array}}$$

Não existe, por exemplo, $\log_2(-4)$, mesmo porque a equação $2^x = -4$ não se verifica para $x \in \mathbf{R}$ (sabemos, do estudo feito da função exponencial, que $2^x > 0$, $\forall\ x \in \mathbf{R}$) Também não foram definidos $\log_2 0$, $\log_1 5$, $\log_0 5$, $\log_{-2} 5$.

3. PROPRIEDADES

São úteis, nos exercícios, as *propriedades* seguintes, que decorrem da definição de logaritmo. Para $0 < a \neq 1$, $b > 0$, $c > 0$ e $m \in \mathbf{R}$, tem-se:

P_1 $\log_a 1 = 0$ (o logaritmo de 1 é zero)

P_2 $\log_a a = 1$ (o logaritmo da própria base é 1)

P_3 $\log_a a^m = m$ (o logaritmo de uma potência da base é o expoente)

P_4 $\log_a b = \log_a c \Leftrightarrow b = c$ (número iguais tem logaritmos iguais e reciprocamente)

Observação: **P_1** e **P_2** são casos particulares de **P_3**, pois teríamos:

P_1 $\log_a 1 = \log_a a^0 = 0$

P_2 $\log_a a = \log_a a^1 = 1$

Exercícios resolvidos

1- Determinar, pela definição, o logaritmo de $\sqrt{8}$ na base 2.

Solução:

Trata-se de determinar $x = \log_2 \sqrt{8}$.

$\log_2 \sqrt{8} = x \Rightarrow 2^x = \sqrt{8} \Rightarrow 2^x = \sqrt{2^3} \Rightarrow 2^x = 2^{\frac{3}{2}} \Rightarrow x = \frac{3}{2}$.

Observação — pela propriedade **P_3**:

$$\log_2 \sqrt{8} = \log_2 \sqrt{2^3} = \log_2 2^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2}$$

2- Determinar o logaritmo de 0,5 na base 2.

Solução:
(pela definição)

$$\log_2 0{,}5 = x \Rightarrow 2^x = 0{,}5 \Rightarrow 2^x = \frac{1}{2} \Rightarrow 2^x = 2^{-1} \Rightarrow x = -1$$

(pela propriedade)

$$\log_2 0{,}5 = \log_2 \frac{1}{2} = \log_2 2^{-1} = -1$$

3- Resolver a equação $\log_2(x^2 + 2x) = 3$.

Solução:

$$\log_2(x^2 + 2x) = 3 \Rightarrow x^2 + 2x = 2^3 \Rightarrow x^2 + 2x - 8 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -4 \\ x_2 = 2 \end{cases}$$

$$S = \{-4,\ 2\}$$

4- Para que valores de x existe $\log_2(2x - 1)$?

Solução:

Para que o logaritmo exista, devemos ter 2x – 1 > 0 $\Rightarrow$ x > $\frac{1}{2}$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1- Determinar

a) $\log_2 16$ b) $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{4}$ c) $\log_{\frac{1}{4}} 16$

d) $\log_{10} 0{,}01$ e) $\log_{\sqrt{3}} 27$ f) $\log_8 2\sqrt{2}$

2- Resolver as equações:

a) $\log_5(x-1) = 1$ b) $\log_5(2x^2 - 5x + 3) = 0$

c) $\log_x(2x^2 - 3x + 2) = 0$ d) $\log_{x-1} 4 = 2$

e) $\log_5 \frac{x}{x+1} = \log_5 \frac{4}{3}$ f) $\log_2(x^2 - x) = \log_2 3$

3- Dar o domínio das funções:

a) f(x) = $\log_2(2x - 3)$ b) y = $\log_5(x^2 - x + 3)$

4- Determinar a para que a equação $2x^2 - 4x + \log_2 a = 0$ tenha raízes reais e iguais.

5- Que valor de x verifica a equação:

$$\frac{2-\log x}{1-\log x}=3\ ?$$ (logaritmo de base 10)

PROPRIEDADE

Nas mesmas condições da definição de logaritmo dada anteriormente, isto é, para $0 < a \neq 1$ e $b > 0$, podemos escrever

pois, o logaritmo de b na base a é o expoente que se deve dar à base a para que a potência obtida seja igual a b.

$$\boxed{a^{\log_a b}=b}$$

Exemplos:

$2^{\log_2 8}=8$, $\quad 10^{\log_{10} 100}=100$

Observação: e = 2,718..., é o chamado número de Euler (Leonhard EULER (1707 – 1783)), base do sistema de logaritmos *neperianos.*

4. SISTEMAS DE LOGARITMOS

Ao conjunto dos logaritmos de todos os números positivos, em certa base a, chamamos de sistema de logaritmos de base **a**. Assim, o conjunto dos logaritmos, na base 2, de todos os números positivos constitui o sistema de logaritmos de base 2.

São particularmente importantes dois *sistemas de logaritmos*:

1º) SISTEMA DE LOGARITMOS DECIMAIS é o sistema de base 10, também chamados sistema de logaritmos *comuns*, ou vulgares, ou de Briggs (Henry Briggs, matemático inglês (1561 – 1630), foi quem primeiro destacou a vantagem do emprego dos logaritmos de base 10 para os cálculos).

De ora em diante, quando escrevermos log x, sem indicar a base em relação à qual se toma o logaritmo, entederemos $\log_{10} x$.

2º) SISTEMA DE LOGARITMOS NEPERIANOS é o sistema de base e. (e = 2,718..., número irracional), também chamado de sistema de logaritmos naturais. O nome Neperiano lembra John Neper (1550 – 1617), autor de um dos primeiros trabalhos desenvolvendo a teoria dos logaritmos. Diz-se também sistema de logaritmos naturais, uma vez que em estudo de fenômenos naturais surge, muitas vezes, uma lei exponencial de base e. Os logaritmos neperianos são usados na Análise Matemática e em estudos técnicos.

Indica-se, em geral, com um dos símbolos: $\log_e x$, ou $\ln x$.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS:

1- Completar

a) $3^{\log_3 9}$ b) $2^{\log_2 4{,}9}$ c) $5^{\log_5 \frac{1}{5}}$

d) $2^{1+\log_2 5}$ e) $e^{\ln 8}$ f) $3^{2+\log_3 10}$

2- Dar o conjunto dos valores de x que tornam verdadeiras as sentenças:

a) $10^{\log(x^2-5x+6)} = x^2 - 5x + 6$ b) $e^{\ln(2x-1)} = 2x - 1$

3- Para que valores reais de a e x é verdadeira a sentença x = $a^{\log_a x}$?

4- Calcular os logaritmos de 4 nos sistemas de base:

a) 2 b) 16 c) $\frac{1}{2}$

5- Calcular o domínio de cada uma das funções seguintes:

a) f(x) = $\log(1-x)$

b) f(x) = $\log(3x-1)+\log(4x-5)$

c) f(x) = $\log\sqrt{2x+1}+\log\dfrac{1}{x-1}$

d) f(x) = $\log\dfrac{-x^2+2x-2}{x-5}$

5. PROPRIEDADES OPERATÓRIAS

Consideremos por exemplo, $\log_2(8\cdot 16)$, isto é, o logaritmo na base 2 do produto ($8\cdot 16$). Temos:

$$\log_2(8\cdot 16)=\log_2(2^3\cdot 2^4)=\log_2 2^{3+4}=3+4=\log_2 8+\log_2 16$$

isto é, concluímos que

$$\log_2(8\cdot 16)=\log_2 8+\log_2 16$$

ou seja: o logaritmo do produto 8 . 16 é igual a soma dos logaritmos dos fatores (no mesmo sistema de logaritmos, de base 2 no caso).

Para o logaritmo de um quociente, por exemplo $\log_2\dfrac{4}{32}$, temos:

$$\log_2\frac{4}{32}=\log_2\frac{2^2}{2^5}=\log_2 2^{2-5}=2-5=\log_2 4-\log_2 32$$

isto é, $\log_2 \frac{4}{32} = \log_2 4 - \log_2 32$

ou seja, o logaritmo na base 2 do quociente $\frac{4}{32}$ é igual a diferença $\log_2 4 - \log_2 32$

5.1 **P$_1$. LOGARITMO DO PRODUTO**

Sendo 0 < a ≠ 1, b > 0 e c > 0, temos:

$$\boxed{\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c}$$

(*o logaritmo do produto é igual à soma dos logaritmos dos fatores*).

De fato: vamos fazer $\log_a (b.c) = x$, $\log_a b = y$ e $\log_a c = z$ e provemos que x = y +z. Temos:

$$\log_a (b.c) = x \Rightarrow a^x = b.c \qquad (1)$$
$$\log_a b = y \Rightarrow a^y = b \qquad (2)$$
$$\log_a c = z \Rightarrow a^z = c \qquad (3)$$

Substituindo (2) e (3) em (1), obtemos

$$a^x = a^y \cdot a^z \Rightarrow a^x = a^{y+z} \Rightarrow x = y + z$$

Esta propriedade se estende ao caso do logaritmo de um produto de três ou mais fatores:

Exemplos:

a) $\log_2 (8 \cdot 16) = \log_2 8 + \log_2 16 = 3 + 4 = 7$
b) $\log x + \log(x+1) = \log x(x+1)$, desde que x > 0
c) Se a soma dos logaritmos de dois números, na base 9, é 1/2, determinar o produto desses números.

Solução: (c)
Sejam x e y os números (x, y > 0),temos:

$$\log_9 x + \log_9 y = \frac{1}{2} \Rightarrow \log_9 (x.y) = \frac{1}{2} \Rightarrow x.y = 9^{\frac{1}{2}} \Rightarrow x.y = 3$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1) Qual é a expressão V cujo logaritmo decimal é $\log V = \log \frac{\pi}{2} + \log r^2 + \log h$?
2) Se, no sistema de logaritmos de base 8, a soma dos logaritmos de três números é 1/3, qual é o produto destes três números?
3) Sendo $\log(m+n) = a$ e $m = n + 10$ dê $\log(m^2 - n^2)$ em função de a.
4) Resolva a equação: $\log_2 (x+1) + \log_2 (x-1) = 3$
5) Aplique a propriedade de logaritmo de um produto para achar o valor de N:

a) $N = \log_3 10 + \log_3 20$

b) $N = \log_5 \frac{20}{3} + \log_5 \frac{3}{4}$

5.2 P_2. LOGARITMO DO QUOCIENTE

Sendo $0 < a \neq 1, b > 0 \ e \ c > 0$, temos:

$$\boxed{\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c}$$

(o logaritmo do quociente é o logaritmo do dividendo menos o logaritmo do divisor.)

De fato: vamos fazer $\log_a \frac{b}{c} = x$, $\log_a b = y \ e \ \log_a c = z$ e provar que $x = y - z$. Temos:

$$\log_a \frac{b}{c} = x \Rightarrow a^x = \frac{b}{c} \qquad (1)$$

$$\log_a b = y \Rightarrow a^y = b \qquad (2)$$

$$\log_a c = z \Rightarrow a^z = c \qquad (3)$$

Substituindo (2) e (3) em (1), obtemos:

$$a^x = \frac{a^y}{a^z} \Rightarrow a^x = a^{y-z} \Rightarrow x = y - z$$

Exemplos:

a) $\log_2 \frac{4}{32} = \log_2 4 - \log_2 32 = 2 - 5 = -3$

b) $\log_a x - \log_a 5 = \log_a \frac{x}{5}$, sendo x > 0 (0 < a ≠ 1)

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1) Se a diferença dos logaritmos, base 4, de dois números x e y, nesta ordem, é 1/2, pergunta-se: que relação existe entre x e y?
2) Desenvolver por logaritmos decimais a expressão X = $\frac{11{,}71 \cdot 0{,}02}{1{,}41}$
3) Resolva a equação: $\log(x^2 + 1) - \log x = \log 2$
4) Utilize a propriedade do logaritmo de um quociente nos casos abaixo:

a) $\log_{12} 3 - \log_{12} 5$ b) $\log_5 10 - \log_5 100$ c) $\log_2 32{,}5 - \log_2 0{,}1$

5.3 LOGARITMO DE UMA POTÊNCIA

Calculemos agora o valor de $\log_a b^m$, conhecendo o valor de $\log_a b$, o valor de **m** e sabendo que a, b ∈ $\mathbf{R}^*_+$, a ≠ 1 e m ∈ **R**.

Solução:

Seja $\log_a b^m = x \quad e \quad \log_a b = y$

Queremos, portanto, calcular o valor de x. Aplicando a definição de logaritmos, temos:

$$\log_a b^m = x \Rightarrow b^m = a^x \qquad \text{(I)}$$

$$\log_a b^m = y \Rightarrow b^m = a^y \qquad \text{(II)}$$

Elevando (II) à potência **m,** obtemos:

$$b^m = (a^y)^m \Rightarrow b^m = a^{my} \qquad \text{(III)}$$

Comparando (I) e (II) temos $a^x = a^{my}$. Portanto: x = m.y. Então, substituindo x e y pelos seus valores, concluímos que:

$$\boxed{\log_a b^m = m \cdot \log_a b}$$

Exemplos:

1- Calcule $\log_{15} 3^2$

Solução:

$$\log_{15} 3^2 = 2 \cdot \log_{15} 3$$

2- Calcule $\log \sqrt[3]{2}$

Solução:

$$\log \sqrt[3]{2} \ = \ \log 2^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} \log 2$$

3- Calcule $0{,}1 \cdot \log_3 7$

Solução:

$$0{,}1 \cdot \log_3 7 = \frac{1}{10} \log_3 7 = \log_3 \sqrt[10]{7}$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1- Com base nos exemplos acima calcule:

a) $\log_3 121^2$

b) $\log_{0,4} \left(\frac{2}{3}\right)^{-1}$

c) $\log_3 \sqrt[5]{3^2}$

d) $3 \cdot \log_3 0{,}2$

e) $-1 \cdot \log_{12} 2$

f) $\frac{3}{5} \cdot \log_3 4$

Agora vejamos um exemplo de aplicação das propriedades até aqui estudadas:

Exemplo1:

Sendo N = $\frac{3a^2}{2b}$, com a, b $\in \mathbf{R}^*_+$, calcular o valor de $\log_7 N$

Solução:

$$\log_7 N = \log_7 \frac{3a^2}{2b} = \log_7 (3a^2) - \log_7 (2b)$$

Temos: $\log_7 N = \log_7 3 + \log_7 a^2 - (\log_7 2 + \log_7 b) \quad \Rightarrow$

$$\log_7 N = \log_7 3 + 2 \cdot \log_7 a - \log_7 2 - \log_7 b$$

EXERCÍCIO PROPOSTO

1- Sendo a, b, c $\in \mathbf{R}^*_+$, calcule log N desenvolvendo e simplificando até onde for possível:

a) N = $\dfrac{5a^3}{3b^2}$ b) N = $\dfrac{\sqrt{3}}{ab^2}$ c) N = $\dfrac{10b^3c^2}{a \cdot \pi}$

Exemplo2:

Determine o valor de N, onde $\log_3 N = 2 \cdot \log_3 5 + \log_3 2$:

Solução:

$$\log_3 N = 2 \cdot \log_3 5 + \log_3 2 \;\Rightarrow\; \log_3 N = \log_3 25 \cdot 2 \;\Rightarrow\; \log_3 N = \log_3 50$$

Como a função logaritma é injetora $\Rightarrow$ N = 50

EXERCÍCIO PROPOSTO

1- Determine P nos casos abaixo:

a) $\log_3 P = \log_3 2 - \log_3 5$ b) $\log_4 P = 5 + \log_4 1$

6. MUDANÇA DE BASE

Suponha que no último bloco de exercícios o problema fosse achar N sabendo que $\log_2 N = \log_5 3$. Nesse caso os logaritmos não possuem a mesma base!

Vejamos como proceder quando isso ocorre, ou seja, vamos aprender uma maneira de reduzir à mesma base. Mostremos que, sendo a, b, c $\in \mathbf{R}^*_+$, a $\neq$ 1 e c $\neq$ 1, é verdadeira a afirmação:

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

Chamando $\log_a b = x,\ \log_c b = y\ e\ \log_c a = z$, o problema consiste em mostrar que $x = \dfrac{y}{z}$. Aplicando a definição de logaritmo, temos:

$$\left.\begin{aligned} \log_a b = x \;&\Rightarrow\; b = a^x \\ \log_c b = y \;&\Rightarrow\; b = c^y \end{aligned}\right\} \; a^x = c^y \qquad (\text{ I })$$

$\log_c a = z \;\Rightarrow\; a = c^z$ (elevando os dois membros a x ésima potência) $\Rightarrow$ $a^x = (c^z)^x$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $a^x = c^{c \cdot z}$ (II)

Comparando (I) e (II) $\Rightarrow$ $c^{c\,.\,z} = c^{y}$ $\Rightarrow$ x . z = y $\Rightarrow$ $x = \dfrac{y}{z}$

Portanto:

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

CASO PARTICULAR: se a, b $\in \mathbf{R}^{*}_{+} - \{1\}$, podemos transformar $\log_a$ b para a base b.
Temos:

$$\log_a b = \frac{\log_b b}{\log_b a} \;\Rightarrow\; \log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

Exemplo 1:

Passar para a base 5.

a) $\log_3 2$ b) $\log_3 \dfrac{1}{5}$

Solução:

a) $\log_3 2 = \dfrac{\log_5 2}{\log_5 3}$

b) $\log_3 \dfrac{1}{5} = \dfrac{\log_5 \frac{1}{5}}{\log_5 3} = \dfrac{\log_5 1 - \log_5 5}{\log_5 3} = \dfrac{-1}{\log_5 3}$

Exemplo 2:

Vamos resolver agora o problema sugerido quando falamos em mudança de base. Achar N, sabendo que $\log_2 N = \log_5 3$

Solução:

Vamos passar o primeiro membro para a base 5. Temos:
$\dfrac{\log_5 N}{\log_5 2} = \log_5 3 \;\Rightarrow\; \log_5 N = \log_5 2 \cdot \log_5 3$ (Isso é um produto de logaritmos e não o logaritmo de um produto!) Podemos escrever:

$$\log_5 N = \log_5 3^{\log_5 2} \;\Rightarrow\; N = 3^{\log_5 2}$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1- Sabendo-se que $\log_2 N = \log_5 3$, transforme o 2º membro em logaritmo de base 2 e calcule N.

2- Transforme em logaritmos de base 10 (decimais):

a) $\log_2 3$ b) $\log_{0,2} 5$ c) $\log_{\sqrt{3}} \sqrt{2}$

3-Transforme para a base pedida:

a) $\log_2 5$ para a base 5 e para a base **e**

b) $\log e$ para a base *e*.

c) $\ln 10$ para a base 10

c) $\log_b a$ para a base $\frac{1}{a}$

7. EQUAÇÕES LOGARÍTMICAS

São equações que apresentam logaritmos com a incógnita figurando no logaritmo, no logaritmando ou na base.

São exemplos de equações logarítimicas:

a) $\log_2(3x+1) = 3$

b) $\log_x 5 = 12$

A bem da verade, já resolvemos alguma equações bem simples quando vimos a definição de logaritmos.

Observação: quando resolvemos uma equação logarítmica, devemos tomar cuidado com as restrições a que dever estar submetidos os logaritmandos, as bases e, consequentemente, a incógnita. Determinamos as restrições da equação, impondo que:

1) o logaritmando seja positivo;

2) a base seja positiva e diferente de 1.

O conjunto universo é o subconjunto dos números reais que tornam as condições (1) e (2) verdadeiras.

No exemplo a, acima, teríamos:

Restrição: $3x + 1 > 0 \Rightarrow 3x > -1 \Rightarrow x > -\frac{1}{3}$

O conjunto universo é $U = \{x \in \mathbf{R} \mid x > -\frac{1}{3}\}$

Solução: (a)

$\log_2(3x+1)=3 \;\Rightarrow\; 3x+1=2^3 \;\Rightarrow\; 3x+1=8 \;\Rightarrow\; 3x=7 \;\Rightarrow\; x=\frac{7}{3}$

O conjunto solução é S = { $\frac{7}{3}$ }

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1- Resolva as equações logarítmicas:

a) $\log_2(3x+5)=1$

b) $\log_5(5x+7)=-1$

c) $\log_5 x^2=2$

d) $\log_2(x^2-5x+14)=3$

e) $\log_x(2x-13)=1$

f) $\log_{(x-1)}(x^2-x-9)=1$

Exemplo:

Resolver a equação $\log_2(3x+1)+\log_2(9-x)=5$

Solução:

Restrições: 3x + 1 > 0 e 9 – x > 0

Temos que $\log_2(3x+1)+\log_2(9-x)=5 \;\Rightarrow\; \log_2(3x+1)\cdot(9-x)=5$

$(3x+1)\cdot(9-x)=2^5 \;\Rightarrow\; 27x-3x^2+9-x=32 \;\Rightarrow\; 3x^2-26x+23=0$

$x_1=1 \;\; e \;\; x_2=\frac{23}{3}$

Verificação:

a) x = 1 $\Rightarrow$ $3\cdot 1+1>0$ (verdadeiro)

9 – 1 > 0 (verdadeiro) $\Rightarrow$ 1 é uma raíz

b) $x=\frac{23}{3}$ $\Rightarrow$ $3\cdot\frac{23}{3}+1>0$ (verdadeiro)

$9-\frac{23}{3}>0$ (verdadeiro) $\Rightarrow$ $\frac{23}{3}$ é outra raíz

O conjunto solução é S = {1, $\frac{23}{3}$ }.

EXERCÍCIO PROPOSTO

1- Resolva as equações logarítimicas

a) $\log(1+3x)+\log(x-2)=1$

b) $\log_4(7-x)+\log_4(10+x)=2$

c) $\log_2[2+\log_2(x-1)]=1$

d) $\log(x-5)+\log(2x-20)=1+\log(3x-35)$

8. INEQUAÇÕES LOGARÍTMICAS

Do mesmo modo que ocorrem equações logarítmicas ocorrem também inequações com logaritmos, às quais chamamos de **inequações logarítimicas.**

São exemplos de inequações logarítmicas:

a) $\log_2(x-3) - 2\log_2(x+1) < 1$ b) $\log_4(x^2-1) \geq 2$

Ao estudar as inequações logarítmicas, devemos ter cuidados especiais com as restrições a que devem estar submetidas a incógnita. Para resolvê-las, procuraremos obter nos dois membros logaritmos de mesma base.

Vejamos alguns exemplos:

Exemplo:

Resolver a inequações $\log_2(x-1) > 5$

Solução:

Temos que $\log_2(x-1) > 5 \Rightarrow \log_2(x-1) > 5 \cdot \log_2 2 \Rightarrow \log_2(x-1) > \log_2 2^5 \Rightarrow$

$\Rightarrow \log_2(x-1) > \log_2 32$

Como a base é 2 > 1, a função logarítmica é crescente e, portanto, o sinal > da inequação deve ser mantido para os logaritmandos, ou seja, devemos ter x – 1 > 32

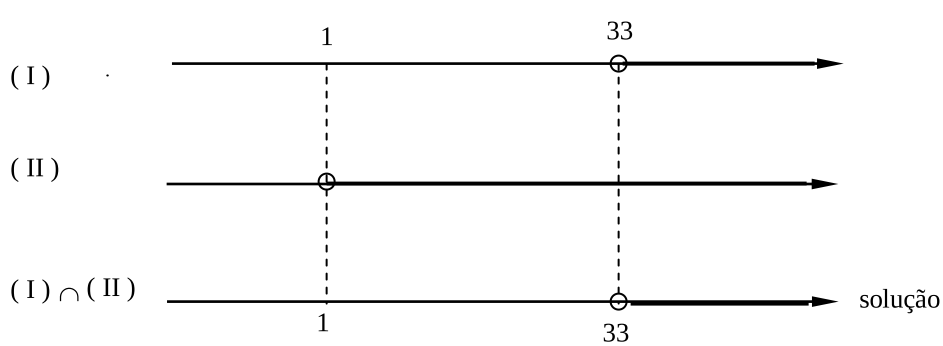
Então, x > 33 (I)

A solução é o conjunto dos valores de x que, além de tornar (I) verdadeiro, satisfazem também a restrição inicial.

Desse modo, a restrição deverá ser mais trabalhada, ou seja:

x – 1 > 0 $\Rightarrow$ x > 1 (II)

Resumindo, temos:



O conjunto solução é S = { x ∈ **R** | x > 33 }.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1) Resolva as inequações logarítmicas:

a) $\log_8(3x+5)\leq 2$

b) $\log_2(x-10)>1$

c) $\log_{\frac{1}{3}} x^2 \leq -2$

d) $\log_{\frac{2}{9}}(x^2-\frac{2}{9})>1$

e) $\log(x-1)\leq 2+\log(10-x)$

f) $3\cdot\log_{\frac{1}{3}} 2 > 2-\log_{\frac{1}{3}}(x+5)$

9. FUNÇÃO LOGARÍTMICA

Seja **a** um número real, positivo e diferente de 1 (quer dizer **a** $\in R_+^* - \{1\}$). Chamamos de função logarítmica de base a à função:

$$g : R_+^* \to R \text{ definida por } g(x) = \mathbf{log}_a\, x$$

Observe que o domínio da função é R_+^*, ou seja, somente valores positivos poderão ser atribuídos a x.

Vamos analisar dois exemplos. No primeiro a base é maior que 1 e no segundo a base está entre 0 e 1 (os dois únicos tipos possíveis de base).

Vamos verificar agora o gráfico de tipo de função.

Exemplo 1:

Consideremos a função definida por:

$$y = \mathbf{log}_3\, x \quad ou \quad f(x) = \mathbf{log}_3\, x$$

Atribuindo valores arbitrários a x e calculando f(x), vamos construir uma tabela de pontos que pertencem ao gráfico da função $y = \mathbf{log}_3\, x$.

Tabela

X	y	Ponto(x, y)
$\frac{1}{9}$	-2	$A(\frac{1}{9},-2)$
$\frac{1}{3}$	-1	$B(\frac{1}{3},-1)$
1	0	$C(1,0)$
3	1	$D(3,1)$
9	2	$E(9,2)$

$$\mathbf{log}_3 \frac{1}{9} = y \Rightarrow 3^y = 3^{-2} \Rightarrow y=-2$$

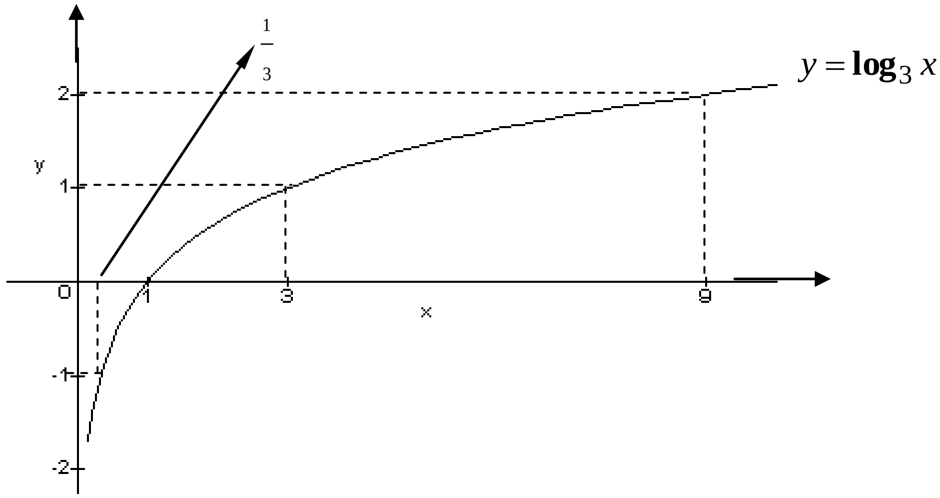
$$\mathbf{log}_3 \frac{1}{3} = y \Rightarrow 3^y = 3^{-1} \Rightarrow y=-1$$

$$\mathbf{log}_3 1 = y \Rightarrow 3^y = 1 \Rightarrow 3^y = 3^0 \Rightarrow y=0$$

$$\mathbf{log}_3 3 = y \Rightarrow 3^y = 3^1 \Rightarrow y=1$$

$$\mathbf{log}_3 9 = y \Rightarrow 3^y = 3^2 \Rightarrow y=2$$

Gráfico:



Observe, que quanto mais o valor de x (positivo) "se aproxima de zero", mais os pontos do gráfico, se aproxima do eixo Oy, sem, porém, atíngilo.

Exemplo 2:

Vejamos a função definida por $y = \mathbf{log}_{\frac{1}{3}}\, x$

Procedendo de maneira análoga, à do exemplo 1, uma tabela de pontos pertencentes ao gráfico da função pode ser esta:

Tabela:

x	y	Ponto(x, y)
$\frac{1}{9}$	-2	$A(\frac{1}{9},2)$
$\frac{1}{3}$	-1	$B(\frac{1}{3},1)$
1	0	$C(1,0)$
3	1	$D(3,-1)$
9	2	$E(9,-2)$

$$\mathbf{log}_{\frac{1}{3}} \frac{1}{9} = y \Rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^{y} = \left(\frac{1}{3}\right)^{2} \Rightarrow y = 2$$

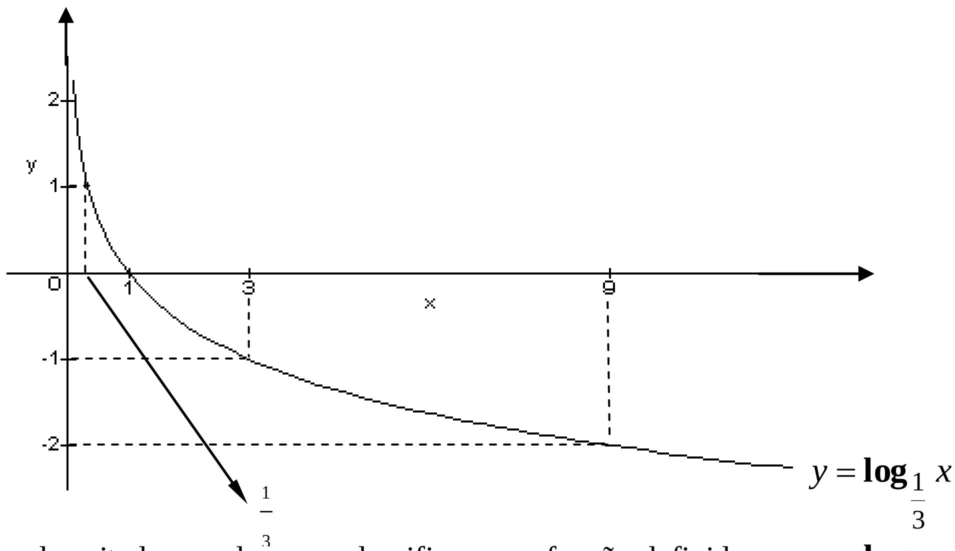
$$\mathbf{log}_{\frac{1}{3}} \frac{1}{3} = y \Rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^{y} = \left(\frac{1}{3}\right)^{1} \Rightarrow y = 1$$

$$\mathbf{log}_{\frac{1}{3}} 1 = y \Rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^{y} = 1 \Rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^{y} = \left(\frac{1}{3}\right)^{0} \Rightarrow y = 0$$

$$\mathbf{log}_{\frac{1}{3}} 3 = y \Rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^{y} = 3 \Rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^{y} = \left(\frac{1}{3}\right)^{-1} \Rightarrow y = -1$$

$$\mathbf{log}_{\frac{1}{3}} 9 = y \Rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^{y} = 9 \Rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^{y} \Rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} y = -2$$

Gráfico:



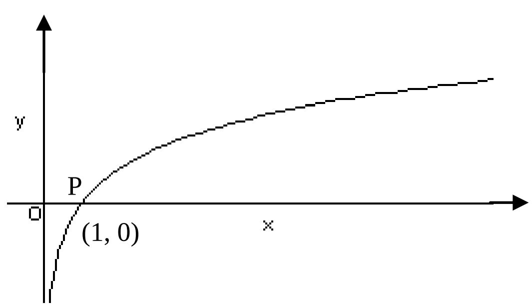
Os exemplos citados nos levam a classificar uma função definida por $y = \log_a x$ como:

– **crescente** quando a > 1
– **decrescente** quando 0 < a < 1

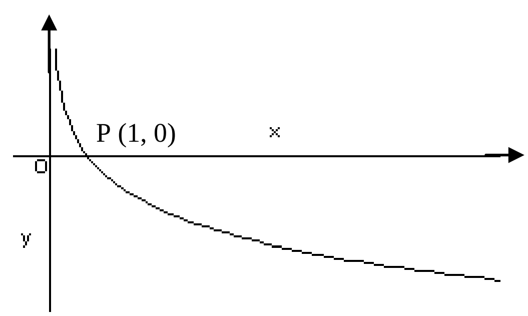
Podemos, então, resumir o estudo da função logarítmica da seguinte maneira:

Função $y = \log_a x$

1. Gráfico da função



Caso a > 1



Caso 0 < a < 1

2. O domínio da função é R_+^*, ou seja, somente os números positivos possuem logaritmo.
3. O conjunto-imagem da função é **R**, isto é, qualquer número real é logaritmo de algum número real positivo, numa certa base.
4. O gráfico da função fica todo à direita do eixo Oy.
5. Se $x = 1 \Rightarrow y = \log_a 1 = 0,\ \ pois\ a^0 = 1$, ou seja, o ponto P (1, 0) pertence ao gráfico da função.
6. Em qualquer base o logaritmo de 1 é 0.

7. Se x = a (base) temos $y = \log_a a = 1, \quad pois \ a^1 = a$, ou seja, o logaritmo da base é 1.
8. A função é injetora, pois se $x_1 \neq x_2 \Rightarrow \log_a x_1 \neq \log_a x_2$.
9. A função é sobrejetora, pois para $\forall y \in R, \exists x \in R_+^* \mid y = \log_a x$
10. A função é bijetora, pois é ao mesmo tempo injetora e sobrejetora.
11. No caso de a > 1 a função é crescente, pois se $x_1 > x_2 \Rightarrow \log_a x_1 > \log_a x_2$
12. No caso 0 < a < 1 a função é decrescente, pois se $x_1 > x_2 \Rightarrow \log_a x_1 < \log_a x_2$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1) Construa o gráfico das funções abaixo:
   a) $y = \log_2 x$ b) $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ c) $y = \log_{2,3} x$

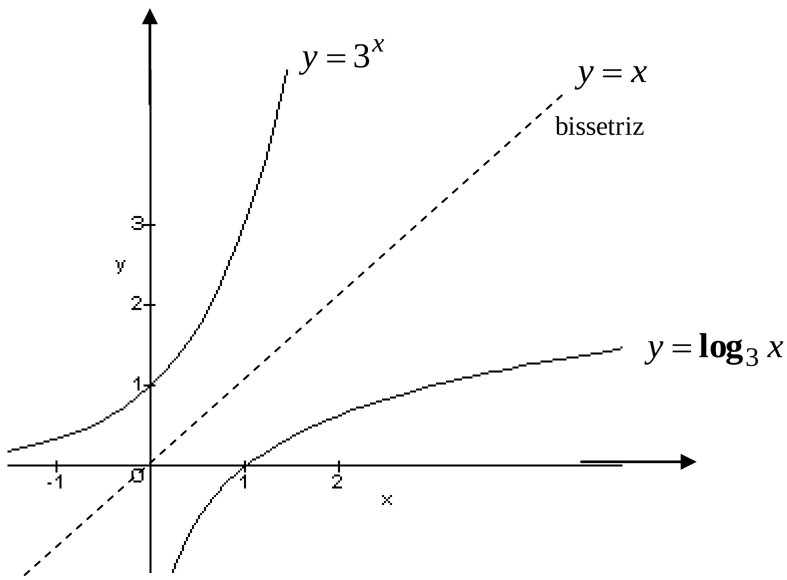
2) Verifique quais funções são crescentes e quais são decrescentes:
   a) $y = \log_5 x$ b) $y = \log_{\sqrt{2}} x$ c) $y = \log_{\sqrt{\frac{3}{2}}} x$
   d) $y = \log_{0,6} x$ e) $y = \log_{\frac{3}{8}} x$ f) $y = \log_{2^{-1}} x$

3) Para que valores de a, a função:
   a) $y = \log_{a-2} x$ é crescente?
   b) $y = \log_{a+4} x$ é decrescente?

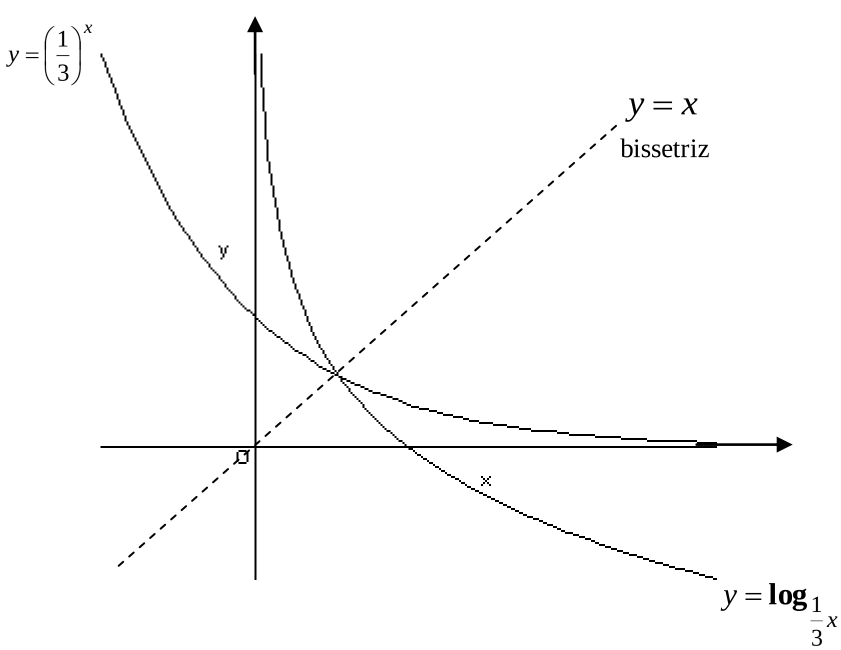
4) Verifique para que valores de a, a função $y = \log_{a^2 - 3} x$ e:
   a) crescente b) decrescente

10. FUNÇÃO LOGARÍTMICA COMO FUNÇÃO INVERSA

Vamos agora representar graficamente as funções definidas por $y = \mathbf{log}_3\, x$ e $y = 3^x$, utilizando um só sistema cartesiano.



Do mesmo modo, construindo num mesmo sistema cartesiano os gráficos das funções: $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ e $y = \mathbf{log}_{\frac{1}{3}}\, x$, temos:



Observe que nos dois casos, os gráficos são simétricos em relação à bissetriz do 1º e 3º quadrantes.

Portanto, $y = \mathbf{log}_3\, x \; e \; y = 3^x$ são funções inversas, o mesmo ocorrendo com $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x \; e \; y = \mathbf{log}_{\frac{1}{3}}\, x$. Como os casos vistos envolvem os únicos "tipos" de bases possíveis, podemos concluir: as funções $f(x) = a^x \; e \; g(x) = \mathbf{log}_a\, x$ são funções inversas.

11. CARACTERÍSTICA E MANTISSA

Vamos considerar inicialmente $\log 20$, que não é número inteiro, pois 20 não é potência inteira de 10. O que se tem é o número 20 compreendido entre duas potências consecutivas de 10:

$$10^1 < 20 < 10^2$$

e, tomando logaritmos decimais, temos:

$$\log 10^1 < \log 20 < \log 10^2 \quad \Rightarrow \quad 1 < \log 20 < 2$$

o que nos permite escrever $\log 20 = 1,...$

Consultando a tábua de logaritmos, obtemos com precisão de seis casas decimais, $\log 20 = 1{,}301030$ e dizemos que tem *caraterística* igual a 1 (é o maior número inteiro que não supera o logaritmo) e *matissa* igual a 0,301030 (é o logaritmo menos a sua característica). A própria palavra mantissa, significa mesmo "excesso", "quebra"; é o que o logaritmo excede a sua característica.

Para generalizar, consideremos um número positivo $x \; (x \in R_+^*)$, que não seja potência inteira de 10, isto é,

$10^c < x < 10^{c+1}$, sendo c inteiro (c $\in$ **Z**)

Temos, então:

$$\log 10^c < \log x < \log 10^{c+1} \quad \Rightarrow \quad c < \log x < c+1$$

e podemos escrever $\log x$ como a soma,

$$\log x = c + 0{,}m$$

onde o número inteiro c é chamado caractrística do logaritmo e 0,m é um número decimal, compreendido entre 0 e 1, chamado mantissa do logaritmo.
No exemplo anterior, $\log 20 = 1 + 0{,}301030$

Se o número x for potência inteira de 10, caso em seu logaritmo decimal será inteiro, diz-se que a característica é esse mesmo inteiro e a mantissa é zero. Por exemplo, em $\log 1000 = 3$, a característica é 3 e a mantissa é zero.

Regra prática para o cálculo da característica e da mantissa

Podemos estabelecer uma regra prática para achar a característica do logaritmo decimal de um número n (positivo).

a) $n \geq 1$

Neste caso a característica é uma unidade menor que o número de algarismos da parte inteira (parte antes da vírgula).

b) $0 < n < 1$

Neste caso a característica é o número de zeros que precedem o primeiro algarismo não nulo, com o sinal trocado.

Essa propriedade permite concluir, por exemplo, que os logaritmos decimais dos números 43; 4,3; 430; 0,043; 43000, possuem, respectivamente, as seguintes características: 1, 0, 2, -2, 4.

Vejamos o que ocorre ao calcularmos o logaritmo do produto de n por uma potência de expoente inteiro de 10, ou seja, calcularemos o logaritmo de $n \cdot 10^a$, onde a pertence a **Z**
Temos:

$$\log\left(n \cdot 10^a\right) = \log n + \log 10^a = \log n + a\log 10 = \log n + a$$

Portanto:

$$\log\left(n \cdot 10^a\right) = c + m + a = (c + a) + m$$

Daí concluímos que:

Para qualquer número inteiro a, o log n e o log(n . 10^a) possuem a mesma mantissa.

Exemplos:

1) $\log 30$

$$10^1 < 30 < 10^2 \Rightarrow \log 10^1 < \log 30 < \log 10^2 \Rightarrow 1 < \log 30 < 2 \Rightarrow \log 30 = 1 + 0{,}m$$

sendo a característica c = 1 e a mantissa, com aproximação de seis casas é 0,477121, tem-se que $\log 30 = 1{,}477121$

2) $\log 3$

$$10^0 < 3 < 10^1 \Rightarrow \log 10^0 < \log 3 < \log 10^1 \Rightarrow 0 < \log 3 < 1 \Rightarrow \log 3 = 0 + 0,m$$

sendo a característica c = 0 e a mantissa da tábua, é 0,477121.
Então: $\log 3 = 0{,}477121$

3) $\log 0{,}2$

$$10^{-1} < 0{,}2 < 10^0 \Rightarrow -1 < \log 0{,}2 < 1 \Rightarrow \log 0{,}2 = -1 + 0,m$$

a característica é c = -1 e a mantissa é 0,301030.
Então: $\log 0{,}2 = -1 + 0{,}301030 = -0{,}698970$

Mais exemplos:

1) Calcular $\sqrt[3]{17}$, com aproximação até centésimos.
   Solução:
   Fazendo $x = \sqrt[3]{17}$, temos:
   $$\log x = \log \sqrt[3]{17} \Rightarrow \log x = \frac{1}{3}\log 17 \Rightarrow \log x = \frac{1{,}230449}{3} = 0{,}410149$$
   Devemos obter o antilogaritmo x; consultando a tábua, obtemos $x \cong 2{,}57$
   Então, $\sqrt[3]{17} \cong 2{,}57$

2) Resolver a equação exponencial $2^{2x} + 6 \cdot 2^x + 5 = 0$
   Solução:

   Fazendo $2^x = y\ (y > 0)$ fica a equação $y^2 - 6y + 5 = 0 \Rightarrow y = 1$ ou $y = 5$
   1º) $2^x = 1 \Rightarrow x = 0$
   2º) $2^x = 5 \Rightarrow \log 2^x = \log 5 \Rightarrow x \log 2 = \log 5 \Rightarrow x = \dfrac{\log 5}{\log 2} \Rightarrow x = \dfrac{0{,}699}{0{,}301} \Rightarrow x \cong 2{,}3$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1) Com o auxílio de uma tábua, determine os logaritmos:

a) log 194
b) log 1,94
c) log 0,194
d) log 0,025
e) log 983
f) log 3420
g) $\log_{12} 545$
h) $\log_4 148{,}3$
i) $\log_3 5{,}12$

2) Calcule o valor de n nos casos abaixo:

a) $\log n = 2{,}656673$
b) $\log n = -1{,}232102$
c) $\log_4 n = 1{,}792481$

3) Determine a aresta de um cubo cujo volume é 68,94 cm^3.

4) Seja $N = \sqrt[5]{\dfrac{6000 \cdot 0{,}064}{216}}$, entre quais potências consecutivas de 10 está compreendido o número N?

5) Calcule o raio da esfera de volume 2681 unidades.