Primer. Funkcija povratnog prenos sistema je $W(s) = \frac{K}{s(s+2)(s+3)}$. Skicirati GMK sistema.

Rešenje:

$\boxed{1.}$ Broj grana GMK je jednak redu sistema, n=3.

$\boxed{2.}$ Polovi sistema su: $p_1=0$; $p_2= -2$; $p_3= -3$.

$\boxed{3.}$ Konačnih nula nema, m=0.

$\boxed{4.}$ GMK je simetrično u odnosu na Re-osu.

$\boxed{5.}$ Asimptote GMK.

Tačka preseka asimptota: $\sigma_a = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i - \sum_{j=1}^{n} z_j}{n - m} = \frac{0 - 2 - 3}{3 - 0} = -\frac{5}{3}$.

Uglovi asimptota: $\phi_k = \frac{(2k+1)\pi}{n - m}$, k=0,1,2. $\phi_0 = \frac{(2\cdot 0+1)\pi}{3} = \frac{\pi}{3} = 60^o$; $\phi_1 = \frac{(2\cdot 1+1)\pi}{3} = \pi = 180^o$;

$\phi_2 = \frac{(2\cdot 2+1)\pi}{3} = \frac{5\pi}{3} = 300^o = -60^o$

$\boxed{6.}$ Ugao polaska grana iz polova.

Za pol $p_1=0$ ugao polaska grane GMK je $\beta(p_1)$. Pol p_1 se iz polova $p_2=-2$ i $p_3=-3$ vidi pod uglom 0°, tako da je: $\beta(p_1) = -180^o - (0^o + 0^o) = -180^o$.

Za pol $p_2=-2$ ugao polaska grane GMK je $\beta(p_2)$. Pol p_2 se iz pola $p_1=0$ vidi pod uglom 180° i iz pola $p_3=-3$ vidi pod uglom 0°, tako da je: $\beta(p_2) = -180^o - (180^o + 0^o) = -360^o = 0^o$.

Za pol $p_3=-3$ ugao polaska grane GMK je $\beta(p_3)$. Pol p_3 se iz polova $p_2=-2$ i $p_3=-3$ vidi pod uglom 180°, tako da je: $\beta(p_3) = -180^o - (180^o + 180^o) = -180^o$.

$\boxed{7.}$ Nema konačnih nula sistema, sve grane završavaju u beskonačnosti.

$\boxed{8.}$ Intervali preklapanja grana GMK i Re ose su $[0,-2] \cup [-3,\infty)$.

$\boxed{9.}$ Tačke spajanja i razdvajanja grana GMK i Re ose.

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\sigma_0 - p_j} - \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{\sigma_0 - z_j} = \frac{1}{\sigma_0} + \frac{1}{\sigma_0 + 2} + \frac{1}{\sigma_0 + 3} = 0 \Rightarrow 3\sigma_0^2 + 10\sigma_0 + 6 = 0 \Rightarrow \quad \sigma_{01}=-0.785 \text{ i}$$

$\sigma_{02}=-2.55$. Tačka $\sigma_{02}=-2.55$ ne pripada geometrijskom korenu sistema, tako da je tačka razdvajanja grana GMK i Re ose $\sigma_0=-0.785$.

$\boxed{10.}$ Nema višestrukih polova i nula.

$\boxed{11.}$ Presek grana GMK i Im ose.

Karakteristični polinom sistema je $f(s) = s^3 + 5s^2 + 6s + K$. Rausova šema koeficijenata je:

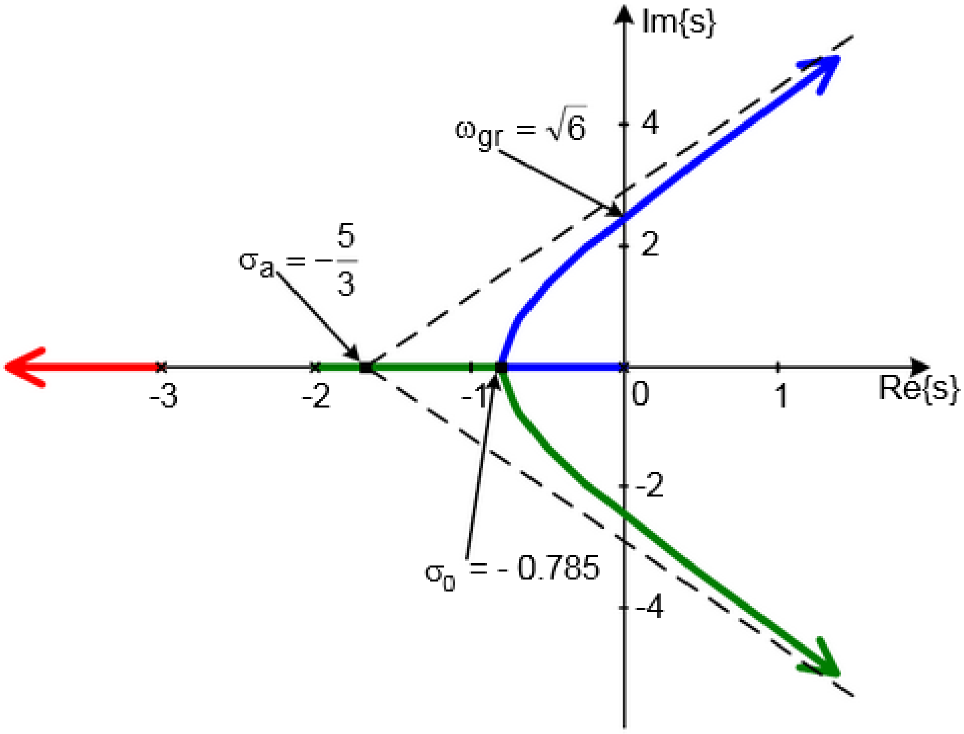
$$\begin{array}{ll|ll} R_1 & s^3 & 1 & 6 \\ R_2 & s^2 & 5 & K \\ R_3 & s^1 & \frac{30-K}{5} & \\ R_4 & s^0 & K & \end{array}$$

Napomena. Kada se Rausov kriterijum primenjuje u okviru metode GMK, ne vrši se množenje cele kolone nekim pozitivnim brojem!!!

Na osnovu elemenata Rausove kolone, sistem je granično stabilan kada je $K_{gr}=0$ i $K_{gr}=30$. $K_{gr}=0$ odgovara graničnom, početnom stanju, odnosno polu $P_1=0$, tako da se ova vrednost ne razmatra. Granično pojačanja je $K_{gr}=30$. Dalje je $a_0= K_{gr}=30$, $R_{n-1}=R_2=5$, pa je

$\omega_{gr} = \sqrt{\frac{a_0}{R_{n-1}}} = \sqrt{\frac{30}{5}} \approx \pm 2.46$rad/sec.

Skica GMK je:



Primer. Funkcija povratnog prenos sistema je $W(s) = K\frac{s+2}{(s+1)(s^2+6s+10)}$. Skicirati GMK sistema.

Rešenje:

1. Broj grana GMK je jednak redu sistema, n=3.
2. Polovi sistema su: $p_1 = -1$; $p_{2,3} = -3 \pm j1$.
3. Broj konačnih nula je m=1; $z_1 = -2$.
4. GMK je simetrično u odnosu na Re-osu.
5. Asimptote GMK.

Tačka preseka asimptota: $\sigma_a = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i - \sum_{j=1}^{n} z_j}{n-m} = \frac{-1 - 3 + j1 - 3 - j1 - (-2)}{3-1} = -\frac{5}{2} = -2.5$.

Uglovi asimptota: $\phi_k = \frac{(2k+1)\pi}{n-m}$, k=0,1.

$\phi_0 = \frac{(2\cdot 0+1)\pi}{2} = \frac{\pi}{2} = 90°$; $\phi_1 = \frac{(2\cdot 1+1)\pi}{2} = \frac{3\pi}{2} = 270° = -90°$.

6. Ugao polaska grana iz polova.

Za pol $p_1 = -1$ ugao polaska grane GMK je $\beta(p_1)$. Pol p_1 se iz pola $p_2 = -3+j1$ vidi pod uglom $-26.56°$ i iz pola $p_3 = -3-j1$ pod uglom $26.56°$. Pol p_1 se iz nule $z_1 = -2$ vidi pod uglom $0°$.
Sada je: $\beta(p_1) = -180° - (-26.56° + 26.56°) + 0° = -180°$.
Za pol $p_2 = -3+j1$ ugao polaska grane GMK je $\beta(p_2)$. Pol p_2 se iz pola $p_1 = -1$ vidi pod uglom $153.44°$ i iz pola $p_3 = -3-j1$ vidi pod uglom $90°$. Pol p_2 se iz nule $z_1 = -2$ vidi pod uglom $135°$.
Sada je: $\beta(p_2) = -180° - (153.44° + 90°) + 135° = -288.44° = 71.56°$.

Za pol p_3=-3 ugao polaska grane GMK je $\beta(p_3)$. Zbog simetrije je: $\beta(p_3) = -\beta(p_2) = -71.56^\circ$.

7. Postoji jedna konačna nula sistema, u njoj se završava jedna grana GMK, dok preostale dve grane završavaju u beskonačnosti.

Za nulu $z_1 = -2$, ugao ulaska grane GMK je $\alpha(z_1)$. Nula z_1 se iz pola $p_1 = -1$ vidi pod uglom 180°, iz pola $p_2 = -3+j1$ vidi pod uglom -45° i iz pola $p_3 = -3-j1$ pod uglom 45°.

Sada je $\alpha(z_1) = 180^\circ + (0^\circ - 45^\circ + 45^\circ) = 180^\circ$.

8. Interval preklapanja grana GMK i Re ose je [-1,-2].

9. Tačke spajanja i razdvajanja grana GMK i Re ose ne moraju da se određuju pošto na intervalu preklapanja grana GMK i Re ose postoji samo jedna grana, i ona mora ostati na Re osi.

10. Nema višestrukih polova.

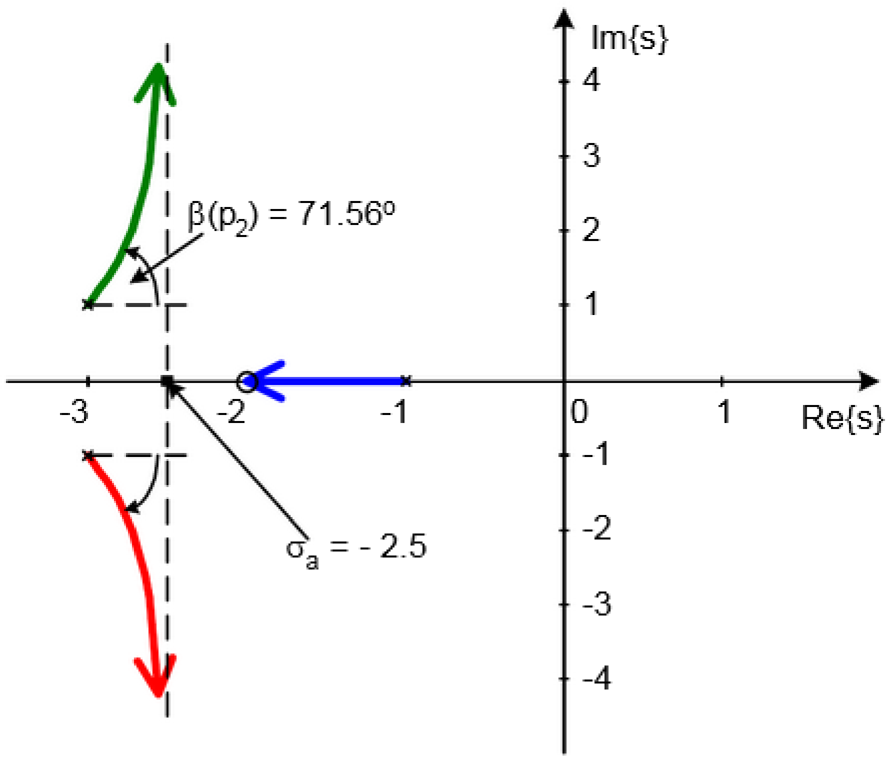
11. Presek grana GMK i Im ose.

Karakteristični polinom sistema je $f(s) = s^3 + 7s^2 + (16+K)s + 10 + 2K$. Rausova šema koeficijenata je:

R_1	s^3	1	$16+K$
R_2	s^2	7	$10+2K$
R_3	s^1	$\frac{102+5K}{7}$	
R_4	s^0	$10+2K$	

Na osnovu elemenata Rausove kolone vidi se da je $\forall K>0$ sistem stabilan, tako da preseka grana GMK i Re ose nema.

Skica GMK je:



Primer. Funkcija povratnog prenos sistema je $W(s) = K\dfrac{s+32}{s(s+11)^2}$. Metodom GMK odrediti pojačanje K za koje je odskočni odziv sistema kritično (granično) aperiodičan.

Rešenje:

1. Broj grana GMK je jednak redu sistema, n=3.
2. Polovi sistema su: $p_1 = 0$; $p_2 = p_3 = -11$.
3. Broj konačnih nula je m=1; $z_1 = -32$.
4. GMK je simetrično u odnosu na Re-osu.
5. Asimptote GMK.

Tačka preseka asimptota: $\sigma_a = \dfrac{0 - 11 - 11 - (-32)}{3 - 1} = 5$.

Uglovi asimptota: $\phi_{0,1} = \pm 90^o$.

6. Ugao polaska grana iz polova. $\beta(p_1) = -180^o$.
7. Ugao ulaska grana u konačne nule. $\alpha(z_1) = 180^o$.
8. Interval preklapanja grana GMK i Re ose je [0,-32].
9. Tačke spajanja i razdvajanja grana GMK i Re ose.

$\dfrac{1}{\sigma_0} + \dfrac{2}{\sigma_0 + 11} - \dfrac{1}{\sigma_0 + 32} = 0 \Rightarrow \sigma_0^2 + 48\sigma_0 + 176 = 0 \Rightarrow$ $\sigma_{01} = -4$ i $\sigma_{02} = -44$. Tačka $\sigma_{02} = -44$ ne pripada geometrijskom korenu sistema, tako da je tačka razdvajanja grana GMK i Re ose $\sigma_0 = -4$.

10. Uglovi izlaska grana GMK iz dvostrukog pola $p_{2,3} = -11$.

$\beta_k = \dfrac{2k\pi}{r}$; k = 0,1; r = 2. $\beta_1(p_2) = 0^o$, $\beta_2(p_3) = 180^o$.

11. Presek grana GMK i Im ose.

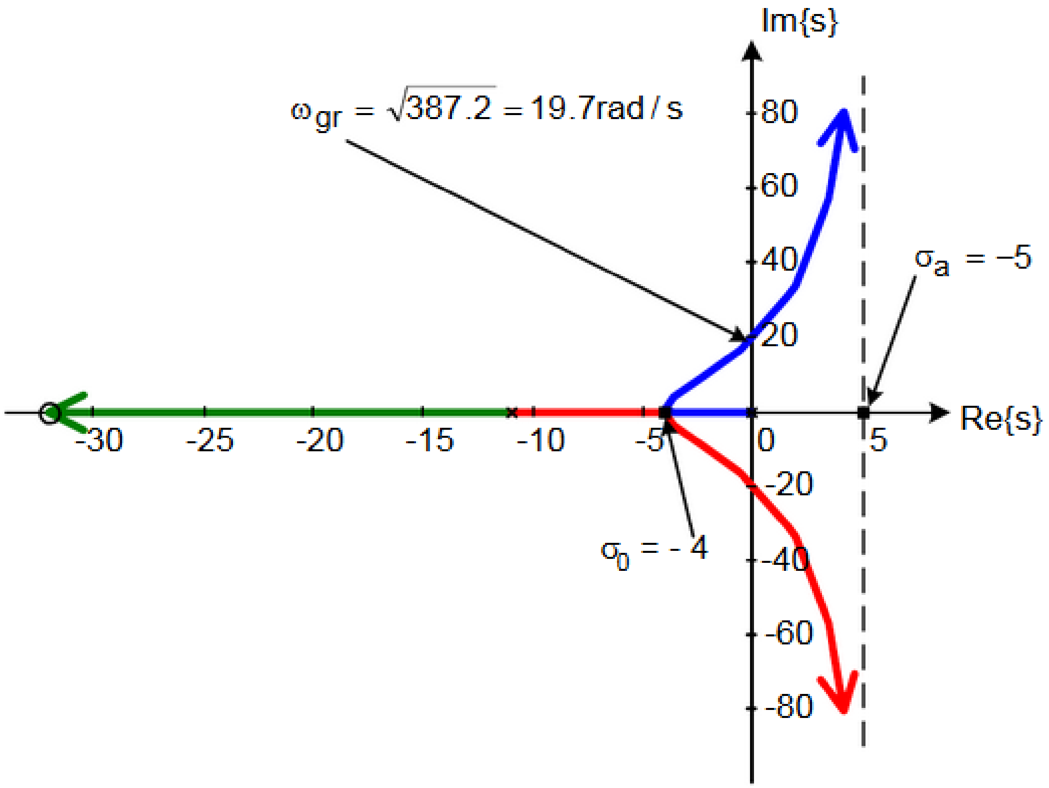
Karakteristični polinom sistema je $f(s) = s^3 + 22s^2 + (121+K)s + 32K$. Rausova šema koeficijenata je:

R_1	s^3	1	121+K
R_2	s^2	22	32K
R_3	s^1	$\dfrac{2662-10K}{22}$	
R_4	s^0	32K	

Na osnovu elemenata Rausove kolone, sistem je granično stabilan kada je $K_{gr}=0$ i $K_{gr}=266.2$.

$K_{gr}=0$ odgovara graničnom, početnom stanju, odnosno polu $P_1=0$, tako da se ova vrednost ne razmatra. Granično pojačanja je $K_{gr}=266.2$. Dalje je $a_0 = 32K_{gr} = 8518.4$, $R_{n-1} = R_2 = 22$, pa je $\omega_{gr} = \sqrt{\dfrac{a_0}{R_{n-1}}} = \sqrt{\dfrac{8518.4}{22}} \approx \pm 19.7$rad/sec.

Skica GMK je:



Odskočni odziv sistema je aperiodičan ako su svi polovi realni. Oscilatoran odziv nastaje ako postoje i konjugovano kompleksni polovi. Kritično (granično) aperiodičan odziv predstavlja granicu između aperiodičnog i oscilatornog odziva i nastaje ako sistem poseduje polove koji su na granici između realnih i konjugovano kompleksnih vrednosti. Na skici GMK ta situacija odgovara tački razdvajanja (spajanja) grana GMK i Re ose. Ovde je to tačka $\sigma_0 = -4$. Pojačanje $K_{\sigma 0}$ koje odgovara toj tački predstavlja traženo pojačanje za koje sistem ima kritično aperiodičan odziv. Pojačanje $K_{\sigma 0}$ se određuje primenom izraza za određivanje pojačanja u proizvoljnoj tački GMK

$$K = \frac{|p_1-\sigma_0||p_2-\sigma_0||p_3-\sigma_0|}{|z_1-\sigma_0|} = \frac{|0-(-4)||-11-(-4)||-11-(-4)|}{|-32-(-4)|} = 7$$

Primer. Funkcija povratnog prenos sistema je $W(s) = \frac{K}{s(s^2 + 4s + 8)}$. Metodom GMK odrediti pojačanje K za koje svi polovi spregnutog prenosa imaju realni deo manji ili jednak sa -1.

Rešenje:

1. Broj grana GMK je jednak redu sistema, n=3.
2. Polovi sistema su: $p_1 = 0$; $p_2 = -2+j2$, $p_3 = -2-j2$.
3. Broj konačnih nula je m=0, sve grane GMK završavaju u beskonačnosti.
4. GMK je simetrično u odnosu na Re-osu.
5. Asimptote GMK.

Tačka preseka asimptota: $\sigma_a = -\frac{4}{3}$.

Uglovi asimptota: $\phi_0 = 60^\circ$, $\phi_1 = 180^\circ$, $\phi_2 = -60^\circ$.

6. Ugao polaska grana iz polova. $\beta(p_1) = -180^\circ$, $\beta(p_2) = -45^\circ$, $\beta(p_3) = 45^\circ$.
7. Nema konačnih nula.
8. Interval preklapanja grana GMK i Re ose je $[0,-\infty)$.

$\boxed{9.}$ Tačke spajanja i razdvajanja grana GMK i Re ose ne moraju se određivati pošto na Re osi postoji samo jedna grana. Ipak, može se proveriti

$$\frac{1}{\sigma_0} + \frac{2}{\sigma_0 + 2 + j2} - \frac{1}{\sigma_0 + 2 - j2} = 0 \Rightarrow 3\sigma_0^2 + 8\sigma_0 + 8 = 0 \Rightarrow \qquad \sigma_{01,2} = \frac{-4 \pm j2\sqrt{2}}{3}.$$

Tačke $\sigma_{01,2}$ su konjugovano kompleksne i ne predstavljaju tačke razdvajanja. U nekim slučajevima je moguće da kompleksna rešenja $\sigma_{01,2}$ pripadaju GMK i tada mogu da postoje kompleksne tačke spajanja i razdvajanja grana GMK u kompleksnoj s-ravni.

$\boxed{10.}$ Višestruki polovi i nule ne postoje.

$\boxed{11.}$ Presek grana GMK i Im ose.

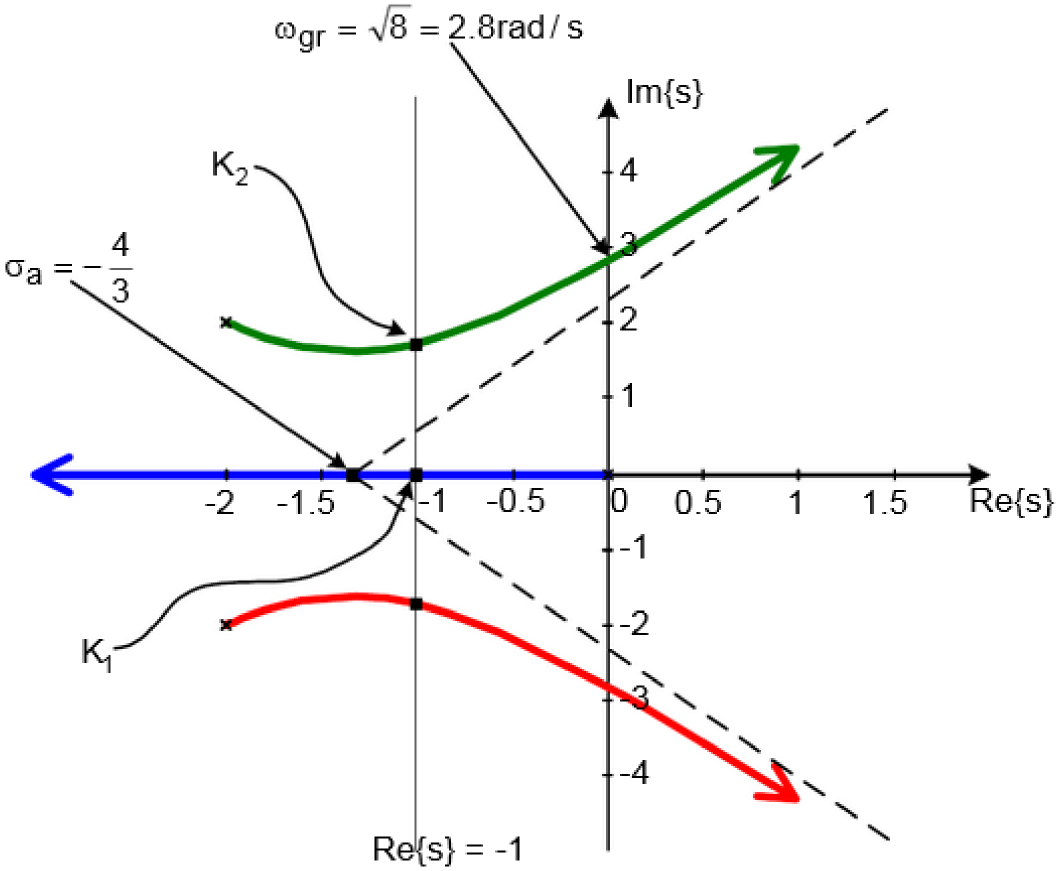
Karakteristični polinom sistema je $f(s) = s^3 + 4s^2 + 8s + K$. Rausova šema koeficijenata je:

R^1	s^3	1	8
R^2	s^2	4	K
R^3	s^1	$\frac{32-K}{4}$	
R^4	s^0	K	

Na osnovu elemenata Rausove kolone, sistem je granično stabilan kada je $K^{gr}=0$ i $K^{gr}=32$. $K^{gr}=0$ odgovara graničnom, početnom stanju, odnosno polu $P^1=0$, tako da se ova vrednost ne razmatra. Granično pojačanja je $K^{gr}=32$. Dalje je $a^0=K^{gr}=32$, $R^{n-1}=R^2=4$, pa je

$$\omega_{gr} = \sqrt{\frac{a^0}{R^{n-1}}} = \sqrt{\frac{32}{4}} \approx \pm 2.83\text{rad/sec}.$$

Skica GMK je:



Posmatra se grana koja polazi iz pola $p^1=0$. Sa slike se vidi da će za vrednosti pojačanja K manju od K^1 pol koji se kreće po toj grani imati realni deo veći od -1. Na osnovu toga se zaključuje da pojačanje mora biti veće ili jednako sa K^1. Ako se posmatraju grane GMK koje izlaze iz kompleksnih polova $p^{2,3}=-2\pm j2$, vidi sa da će za vrednosti pojačanja manje od K^2, realni deo tih polova biti manji od -1. To znači da pojačanja mora biti manje od K^2. Objedinjavanjem prethodna dva uslova dobija se konačni uslov koji pojačanje mora da ispuni a to je $K^1 \le K \le K^2$. Sada samo još treba odrediti K^1 i K^2. Naravno, uočava se da će problem imati rešenje jedino u slučaju kada je $K^1 \le K^2$.

Pojačanje K^1 odgovara tački $s^1=(-1,0)$ koja pripada GMK. Pojačanje u toj tački se određuje prema izrazu $K^1 = \frac{|s^1-p^1||s^1-p^2||s^1-p^2|}{1} = \frac{|-1-0||-1-(-2-j2)||-1-(-2+j2)|}{1} = 5$

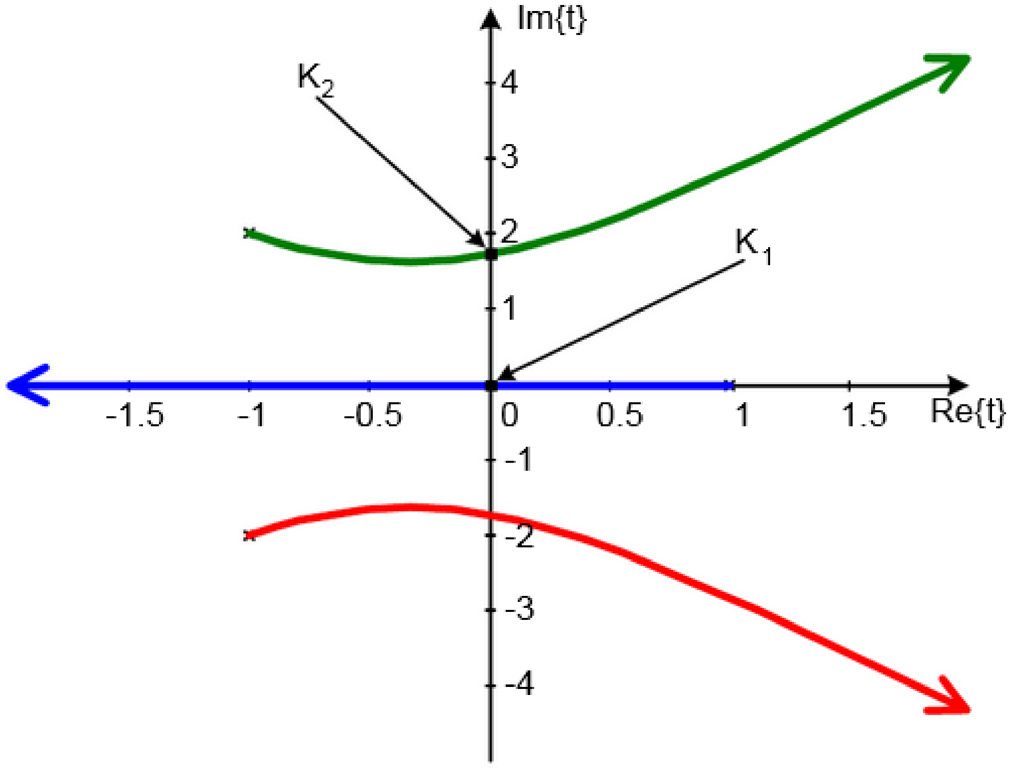
Pojačanje K^2 odgovara nekoj tački s^2, za koju je poznat samo realni deo -1, dok je imaginarni deo nepoznat. Sada se može pisati $s^2=-1+jx$, gde je x nepoznati imaginarni deo koji treba odrediti. Pošto tačka s^2, pripada GMK ona je pol sistema a samim tim i nula karakterističnog polinoma. Tačka $s^3=-1-jx$ je takođe pol sistema, tako da karakteristični polinom mora biti deljiv polinomom $A(s)=(s-s^2)(s-s^3)=(s+1-jx)(s+1+jx)=s^2+2s+1+x^2$. Karakteristični polinom je $f(s) = s^3 + 4s^2 + 8s + K$.

$$f(s):A(s) = (s^3+4s^2+8s+K):(s^2+2s+1+x^2) = s+2+\frac{(3-x^2)s + (K-2-2x^2)}{s^2+2s+1+x^2}$$

Da bi bio f(s) deljiv sa A(s), ostatak deljenja mora biti jednak nuli, što se svodi na uslov: $3-x^2=0 \wedge K-2-2x^2=0$, odakle je: $x=\sqrt{3}$ i $K=8$. Sada je $s^3=-1+j\sqrt{3}$. Pojačanje K=8, odgovara rešenju $s^3=-1+j\sqrt{3}$, tako da je upravo to pojačanje $K^2=8$.

Objedinjavanjem prethodnih rešenja se dobija konačno rešenje zadatka. Da bi sistem imao sve polove sa realnim delovima manjim ili jednakim sa -1 potrebno je da pojačanje K zadovolji uslov $6 \le K \le 8$.

Zadatak se može rešiti na drugi način. Moguće je izvršiti transformaciju koordinata uvođenjem smene s=t-1. Sada se formira nova funkcija povratnog prenosa $W(s) = \frac{K}{(t-1)\left((t-1)^2 + 4(t-1) + 8\right)} = \frac{K}{(t-1)\left(t^2 - 2t + 5\right)}$, za koju se skicira GMK. Pojačanja K^1 i K^2 su pojačanja koja odgovaraju tačkama preseka grana GMK i Im ose kao što je prikazano na slici, i određuju se prilikom skiciranja GMK.



Primer. Funkcija povratnog prenos sistema je $W(s) = \frac{K}{s(s+5)(s+17)}$.

a) Skicirati GMK sistema;
b) Analitički odrediti vrednost pojačanja K za koju je relativni koeficijent prigušenja sistema sa zatvorenom povratnom spregom $\zeta=\sqrt{0.2}$.

Rešenje: a)

1. Broj grana GMK je jednak redu sistema, n=3.
2. Polovi sistema su: $p^1 = 0$; $p^2 = -5$, $p^3 = -17$.
3. Broj konačnih nula je m=0, sve grane GMK završavaju u beskonačnosti.
4. GMK je simetrično u odnosu na Re-osu.
5. Asimptote GMK.

Tačka preseka asimptota: $\sigma_a = -\frac{22}{3}$;
Uglovi asimptota: $\phi_0 = 60^\circ$, $\phi_1 = 180^\circ$, $\phi_2 = -60^\circ$.

6. Ugao polaska grana iz polova. $\beta(p^1) = -180^\circ$, $\beta(p^2) = 0$, $\beta(p^3) = -180^\circ$.
7. Nema konačnih nula.
8. Interval preklapanja grana GMK i Re ose je $[0,-5] \cup [-17,-\infty)$.
9. Tačke spajanja i razdvajanja grana GMK i Re ose.

$\frac{1}{\sigma_0} + \frac{2}{\sigma_0+5} - \frac{1}{\sigma_0+17} = 0 \Rightarrow 3\sigma_0^2 + 44\sigma_0 + 85 = 0 \Rightarrow$ $\sigma_{01} = -2.29$ i $\sigma_{02} = -12.38$. Tačka σ_{02} ne pripada geometrijskom korenu sistema, tako da je tačka razdvajanja grana GMK i Re ose $\sigma_0 = -2.29$.

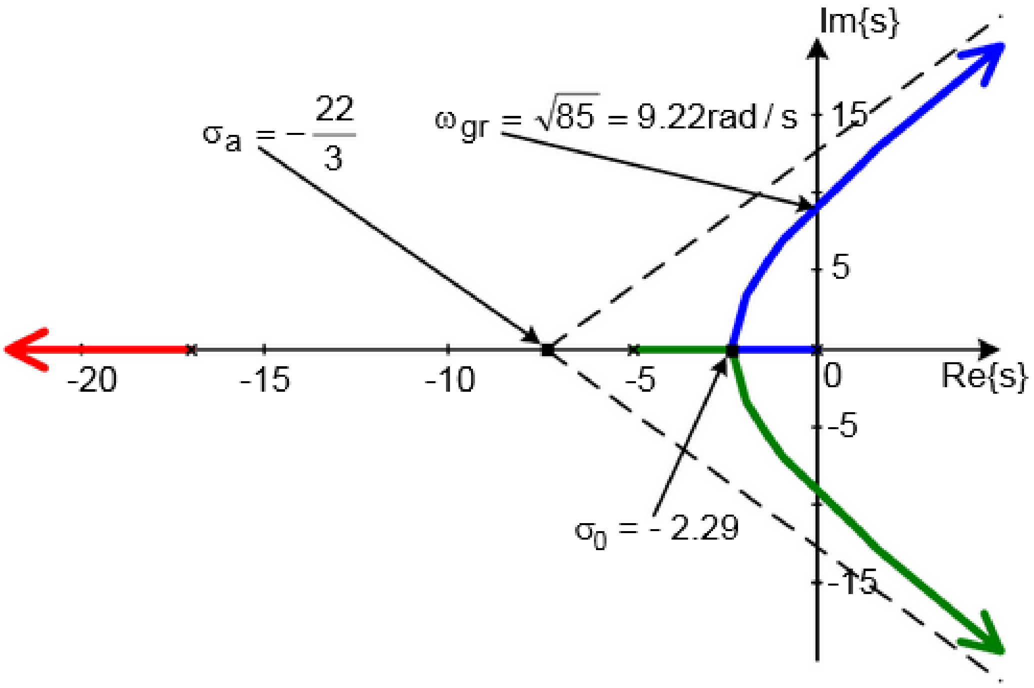
10. Višestruki polovi i nule ne postoje.
11. Presek grana GMK i Im ose.

Karakteristični polinom sistema je $f(s) = s^3 + 22s^2 + 85s + K$. Rausova šema koeficijenata je:

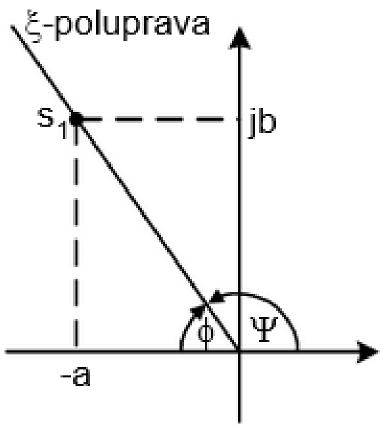
$$
\begin{array}{ll|ll}
R^1 & s^3 & 1 & 85 \\
R^2 & s^2 & 22 & K \\
R^3 & s^1 & \dfrac{1870-K}{22} & \\
R^4 & s^0 & K &
\end{array}
$$

Na osnovu elemenata Rausove kolone, sistem je granično stabilan kada je $K^{gr}=0$ i $K^{gr}=1870$. $K^{gr}=0$ odgovara graničnom, početnom stanju, odnosno polu $p^1=0$, tako da se ova vrednost ne razmatra. Granično pojačanja je $K^{gr}=1870$. Dalje je $a^0=K^{gr}=1870$, $R^{n-1}=R^2=22$, pa je $\omega_{gr}=\sqrt{\dfrac{a^0}{R^{n-1}}}=\sqrt{\dfrac{1870}{22}}\approx\pm 9.22$rad/sec.

Skica GMK je:



b) Realni koeficijent prigušenja je karakteristika sistema i zavisi od položaja njegovih polova. Traženi relativni koeficijent prigušenja će sistem posedovati za dominantni par polova $s^{1,2}=-a\pm jb$, gde su a i b nepoznate veličine koje treba odrediti. Položaj tačke s^2 u kompleksnoj s-ravni je prikazan na slici.



ξ-polupravoj, povučenoj iz koordinatnog početka odgovara vrednost $\xi=\sqrt{0.2}$, pa je prema definiciji relativnog koeficijenta prigušenja $\Psi=\arccos(-\xi)=116.6^\circ$. Tada je $\phi=180^\circ-\Psi=63.4^\circ$.

Sa slike se vidi da je tg$\phi = \frac{b}{a} = 2$, odnosno b=2a. Sada je $s_{1,2}=-a\pm j2a$. Pored uslova da leži na ξ-polupravoj tačka s_1 mora da pripada i geometrijskom mestu korena, pošto je ona pol sistema. Pošto su tačke $s_{1,2}$ polovi sistema, one su i nule karakterističnog polinoma, tako da karakteristični polinom mora biti deljiv polinomom $A(s)=(s-s_1)(s-s_2)=(s+a-j2a)(s+a+j2a)=s^2+2as+5a^2$. Karakteristični polinom je $f(s) = s^3 + 22s^2 + 85s + K$.

$$f(s):A(s) = (s^3+22s^2+85s+K):(s^2+2as+5a^2) = s+22-2a + \frac{(85-44a-a^2)s + (K+10a^3-110a^2)}{s^2+2as+5a^2}$$

Da bi bio $f(s)$ deljiv sa $A(s)$, ostatak deljenja mora biti jednak nuli, što se svodi na uslov: $85-44a-a^2=0 \wedge K+10a^3-110a^2=0$. Iz prve jednačine se dobijaju rešenja $a_1=1.85$ i $a_2=-45.85$, od kojih se usvaja prvo (drugo rešenje se odbacuje na osnovu skice GMK, jer tačka sa realnim delom -45.85 ne može da pripada geometrijskom korenu sistema). Sada se na osnovu druge jednačine određuje traženo pojačanje K=313.16.

Primer. Funkcija povratnog prenosa sistema je

$$W(s) = \frac{10(s+12)}{s^4+20s^3+(5p+116)s^2+50(p+3)s+120(p-1)}$$

a) Skicirati GMK sistema kada se parametar p menja u intervalu od 0 do $+\infty$.
b) Odrediti vrednost parametra p za koju je dominantna vremenska konstanta Td najmanja moguća, a pri tome relativni koeficijent prigušenja ξ maksimalan.
Napomena: Polinom $s^3+20s^2+116s+160$ ima jedan koren s=-2.

a) Da bi se primenila metoda GMK potrebno je formirati novu funkciju povratnog prenosa u obliku $W^1(s) = p\frac{M(s)}{N(s)}$, gde su M(s) i N(s) polinomi koji ne zavise od p. Takođe, potrebno je da karakteristični polinomi sistema opisanih sa W(s) i $W^1(s)$ nakon zatvaranja povratne sprege budu jednaki. Karakteristični polinom polaznog sistema je

$$f(s) = s^4+20s^3+(5p+116)s^2+(50p+160)s+120p.$$

Sada se mogu grupisati svi članovi koji u sebi sadrže p, i p se može izvući ispred zagrade

$$f(s) = 5p(s^2+10s+24)+s^4+20s^3+116s^2+160s.$$

Sada je nova funkcija povratnog prenosa $W^1(s) = 5p\frac{s^2+10s+24}{s(s^3+20s^2+116s+160)}$.

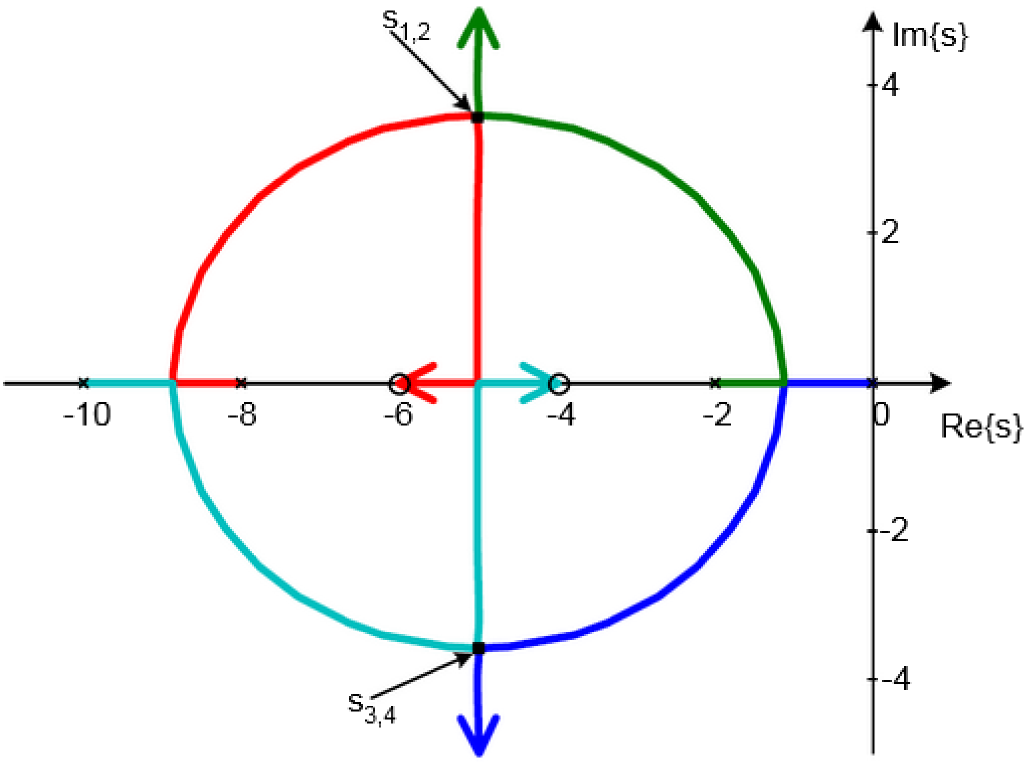
GMK sistema je prikazan na slici.

b) Na skici GMK se uočava da se početnim povećanjem p, dominantan pol sistema pomera ulevo, pa vremenska konstanta Td opada. Od momenta kada se sva četiri pola nađu na pravoj Re{s}=-5, daljim povećanjem p se dominantna vremenska konstanta ne menja, pa rešenja leži na navedenoj pravoj. Dalje, povećanjem p jedan par polova se udaljava od Re ose a drugi joj se približava. Dominantan par polova je onaj koji ima manje prigušenje ξ, a to je par polova koji se udaljava od Re ose. Znači daljim povećanjem p, relativni koeficijent prigušenja se smanjuje. Na osnovu navedenog, može se zaključiti da je situacija kada je u sistemu Td^{max} i ξ_{min} nastala i trenutku kada se grane susreću u kompleksnoj ravni, u tačkama $s_{1,2}$ i $s_{3,4}$. Zbog simetrije GMK u odnosu na Re osu, u navedenoj situaciji sistem poseduje dvostruki par konjugovano kompleksnih polova $s_{1,2}=s_{3,4}=-\xi\omega_n\pm j\omega_n\sqrt{1-\xi^2}$. Karakteristični polinom sistema mora biti deljiv polinomom $A(s) = (s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2)^2 = s^4+4\xi\omega_n s^3+(4\xi^2\omega_n^2+2\omega_n^2)s^2+4\xi\omega_n^3 s+\omega_n^4$. Pošto su polinomi f(s) i A(s) istog reda, uslov deljivosti se svodi na uslov jednakosti koeficijenata, odakle sledi sistem jednačina:

$$20 = 4\xi\omega_n$$
$$5p+116 = 4\xi^2\omega_n^2+2\omega_n^2$$
$$50p+160 = 4\xi\omega_n^3$$

$$120p = \omega_n^4$$

Rešavanjem navedenog sistema dobijaju se sledeća rešenja $p^1=0.86$ i $p^2=11.94$. Na osnovu skice GMK usvaja se rešenja p=11.94.



Primer. Funkcija povratnog prenosa sistema je $W(s) = \frac{s^2-4s+20}{s(s+8)(s^2+6s+34)}$.

a) Skicirati GMK sistema.
b) Odrediti pojačanje K tako da je Td=1sec i da je signal greške za jedinični nagibni ulazni signal u stacionarnom stanju minimalan.

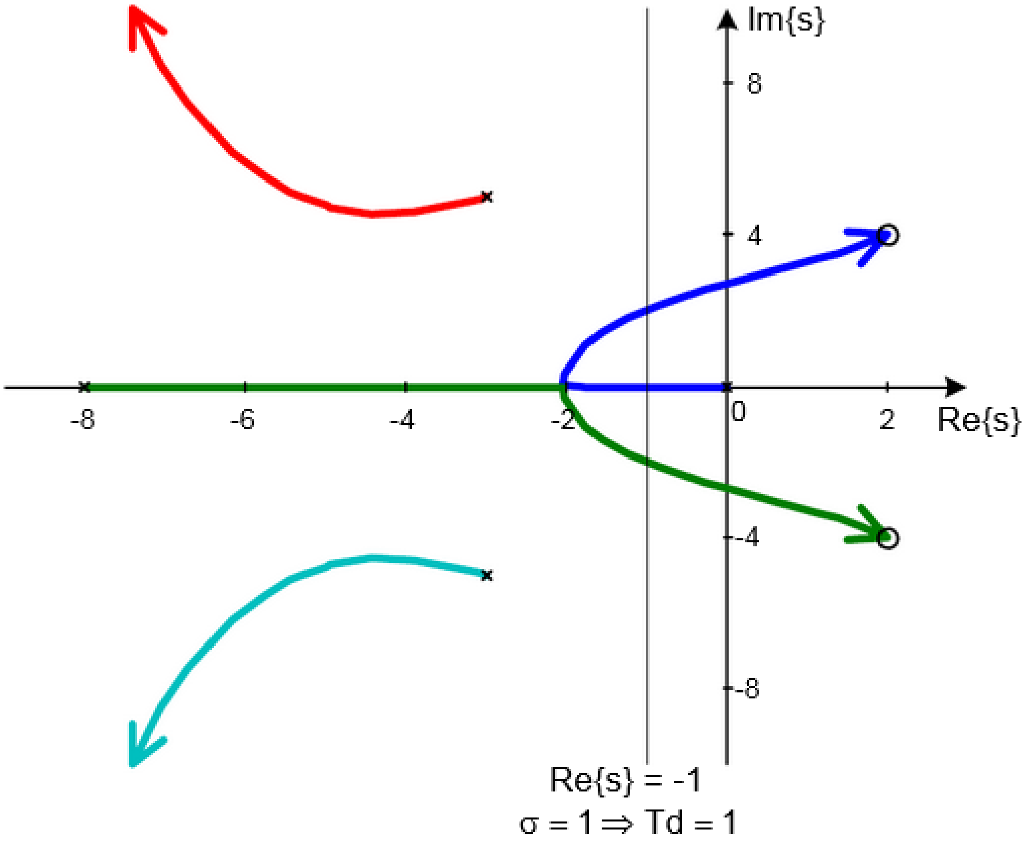
Rešenje. Skica GMK je prikazana na slici.
Pri skiciranju GMK se mogu pojaviti određeni problemi. Prvi je određivanje tačke razdvajanja grana GMK i Re ose. Na osnovu lokacije polova sistema može se zaključiti da na intervalu [0,-8] postoji tačka razdvajanja. Klasičan pristup analitičkog određivanja je ovde ne primeren jer se dobija algebarska jednačina visokog reda (6.). Ovde je pogodno primeniti približnu metodu. Prethodno je navedeno da se σ_0 traži na intervalu [0,-8]. Pošto su te tačke polovi sistema σ_0 je tačka razdvajanja, a prema osobinama GMK u tački razdvajanja pojačanje K ima maksimalnu vrednost na posmatranom intervalu. Drugim rečima σ_0 će biti tačka sa intervala [0,-8] u kojoj je pojačanje maksimalno. Za početak, sračuna se pojačanje u nekoliko tačaka datog intervala, kako je prikazano u narednoj tabeli:

s	-1	-2	-4	-6
K	8.12	9.75	8	5.1

U prethodnoj tabeli je maksimalno pojačanja K=9.75 za s= -2. Sada se izračunava pojačanje za nekoliko tačaka u okolini tačke s= -2, kako je to prikazano u sledećoj tabeli

s	-1.6	-1.8	-2.1	-2.2
K	9.53	9.69	9.74	9.73

Iz prethodne tabele se vidi da pomeranjem levo ili desno iz tačke s= -2 pojačanje opada, pa se za tačku razdvajanja može usvojiti σ_0= -2 (tačna vrednost je σ_0= -2.031 i K=9.751).



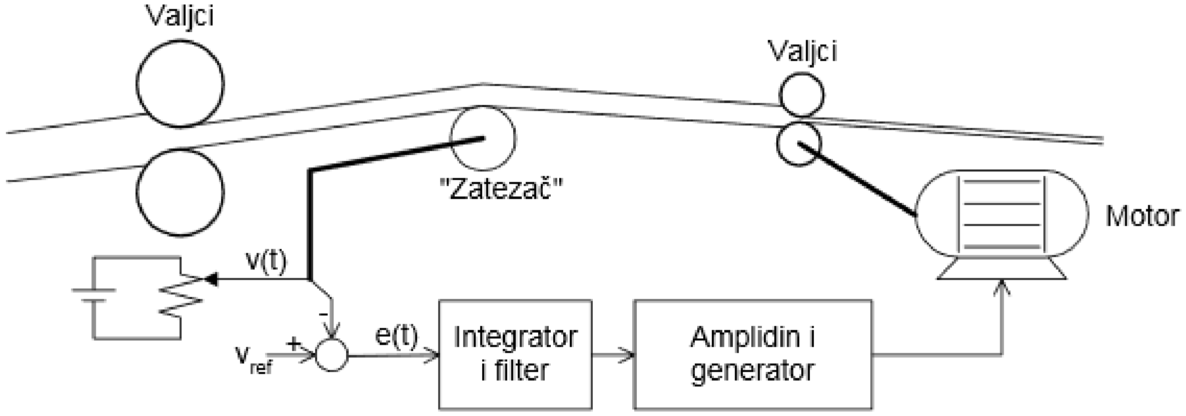
Drugi problem jeste koji par grana odlazi u ∞, a koji završava u konačnim nulama. To se može odrediti na osnovu ugla izlaska grana GMK iz polova. Iz polova -3$\pm$j5 grane izlaze pod uglom $\pm$225°, što se može okarakterisati kao izlazak "na levo", odnosno izlazak na intervalu uglova (90°,270°). Takođe, na osnovu tačke preseka asimptota (σ_a= - 9) i uglova asimptota ($\pm$90°) može se zaključiti da grane koje polaze iz polova -3$\pm$j5 završavaju u beskonačnosti, dok grane koje polaze iz polova 0 i -8 završavaju u konačnim nulama.

b) Sa grafika se vidi da postoje dva pojačanja za koje je Td= -1. Prvo pojačanje K^1, odgovara tački s^1= -1. K^1= 8.12, što je izračunato u jednoj od prethodnih tabela. Pojačanje K^2 odgovara tačkama $s^{2,3}$= -1$\pm$ja.
Karakteristični polinom sistema $f(s) = s^4+14s^3+(82+K)s^2+(272-4K)s+20K$, mora biti deljiv polinomom $A(s) = s^2+2s+1+a^2$, bez ostatka. Izjednačavanjem ostatka sa nulom formira se sistem jednačina, čija su rešenja a^1=9.6 i a^2=2.04. Na osnovu skice GMK usvaja se a=2.04, pa je traženo pojačanje $K^2\approx$17.

Minimalna greška rada sistema u stacionarnom stanju e^{ssmin} znači da sistem mora imati maksimalnu brzinsku konstantu K^{vmax} za zadate uslove (Td= -1). Maksimalna brzinska konstanta se ostvaruje usvajanjem maksimalnog pojačanja, odnosno K=max(K^1,K^2)=17.

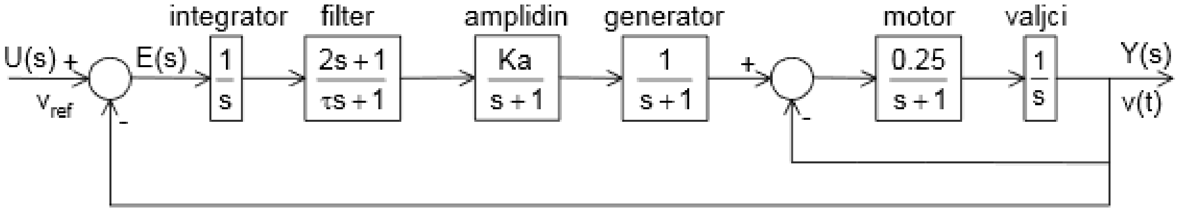
Brzinska konstanta sistema je $Kv = \frac{17 \cdot 20}{8 \cdot 34}$ = 1.25. Greška rada sistema u stacionarnom stanju je $e^{ss} = \frac{1}{K^v} = \frac{1}{1.25}$ = 0.8.

Primer 5: Na slici 5.1 je prikazan sistem za regulaciju zategnutosti čelične trake u "vrućoj" valjaonici lima (tipična brzina trake je ≈10m/s).



Slika 5.1.

Deo sistema koji služi za merenje zategnutosti trake je sastavljen od jedne "ruke" dužine ≈1m na čijem je jednom kraju valjak ("zatezač") preko koga prelazi traka, a na drugom klizni kontakt potenciometra. U zavisnosti od zategnutosti trake pritisak na "zatezač" se povećava ili smanjuje. Promena pritiska rezultuje pomeranjem "ruke" gore-dole a time i kliznog kontakta potencionetra. Na taj način se postiže da napon (*e(t)*) na kliznom kontaktu bude srazmeran položaju "zatezača". Upoređivanjem napona *v(t)* sa referentnim naponom v_{ref} se formira signal greške *e(t)*. Signal *e(t)* se filtrira, integrali radi eliminacije greške rada u stacionarnom stanju i vodi dalje do amplidina i generatora. Vidi se da je *e(t)* srazmerno promeni zategnutosti čelične trake. Blok dijagram sistema, sa odgovarajućim funkcijama prenosa, je prikazan na slici 5.2.



Slika 5.2.

Zadatak je:

a) formirati GMK sistema za $0 \leq K_a < \infty$;
b) Odrediti pojačanje K_a, tako da dominantni par polova ima relativni koeficijent prigušenja $\xi=0.707=\frac{\sqrt{2}}{2}$. Koliki je u tom slučaju preskok ($\Pi\%$) i vreme smirenja T_s?

Napomena: Vremenska konstanta filtera je zanemariva u odnosu na ostatak sistema (τ=0).

a) Funkcija povratnog prenosa sistema je:

$$W(s)=\frac{1}{s}\cdot(2s+1)\cdot\frac{Ka}{s+1}\cdot\frac{1}{s+1}\cdot\frac{\frac{0.25}{s(s+1)}}{1+\frac{0.25}{s(s+1)}}=\frac{K}{s(s+0.5)(s+1)^2},$$

gde je $K=0.5K_a$.

Pravilo 1. Broj grana GMK je $n=4$;

Pravilo 2. Grane GMK (n=4) izviru iz polova funkcije W(s): $p_1=0$, $p_2=-0.5$, $p_{3,4}=-1$.

Pravilo 3. $m=0$ grana GMK završavaju u konačnim nulama, a $n-m=4$ grane odlaze u beskonačnost.

Pravilo 4. Simetrija GMK u odnosu na realnu osu. OK

Pravilo 5. Broj asimptota je 4. Ugao ϕ_k:

$$\phi_k=\frac{(2k+1)\pi}{n-m};\quad k=0,1,2,3.$$

$$\phi_0=\frac{\pi}{4}=45^o;\ \phi_1=\frac{3\pi}{4}=135^o;\ \phi_2=\frac{5\pi}{4}=-135^o;\ \phi_3=\frac{7\pi}{4}=-45^o.$$

Tačka preseka asimptota σ_a:

$$\sigma_a=\frac{\sum_{j=1}^{n}p_j-\sum_{i=1}^{m}z_i}{n-m}=\frac{0-0.5-1-1}{4}=-0.625$$

Pravilo 6. Uglovi pod kojim grane GMK napuštaju polove:

$\beta_1(p_1=0)=-180^o-(0^o+0^o+0^o)=-180^o$;

$\beta_2(p_2=-0.5)=-180^o-(180^o+0^o+0^o)=-360^o=0^o$;

$\beta_3(p_3=-1)=-180^o-(180^o+180^o+90^o)=-90^o$; (ugao β_4 pod kojim se pol p_3 vidi iz pola p_4 je 90^o, kao da su p_3 i p_4 konjugovano kompleksni, odnosno $p_{3,4}=-1\pm j0$. Ovo će se pokazati kroz pravilo za interval preklapanje grana GMK i realne ose, tačku razdvajanja i ugao izlaska grana GNK iz višestrukih polova.)

$\beta_4(p_4=-1)=-\beta_3=90^o$;

Pravilo 7. Ugao ulaska grana GMK u konačne nule – ne primenjuje se, nema konačnih nula.

Pravilo 8. Interval preklapanja grana GMK i realne ose je $[0,-0.5]\cup\{-1\}$. Odavde se vidi da grane GMK moraju napustiti realnu osu u tački -1, odnosno da je ugao izlaska grana GMK iz polova $p_{3,4}$ jednak $\pm 90^o$.

Pravilo 9. Tačka spajanja – razdvajanja grana GMK i realne ose σ_0. Za funkciju povratnog prenosa:

$$W(\sigma_0)=\frac{K}{\sigma_0(\sigma_0+0.5)(\sigma_0+1)^2}=\frac{K}{\sigma_0^4+2.5\sigma_0^3+2\sigma_0^2+0.5\sigma_0},$$

se određuje prvi izvod, i izjednačava sa nulom:

$$\frac{dW(\sigma_0)}{d\sigma_0}=-K\frac{4\sigma_0^3+7.5\sigma_0^2+4\sigma_0+0.5}{(\sigma_0^4+2.5\sigma_0^3+2\sigma_0^2+0.5\sigma_0)^2}=0.$$

Prethodna jednačina se svodi na: $4\sigma_0^3+7.5\sigma_0^2+4\sigma_0+0.5=0$, čija su rešenja: $\boxed{\sigma_{01}=-1}$; $\sigma_{02}=-0.6952$; $\boxed{\sigma_{03}=-0.1798}$. Tačke σ_{o1} i σ_{o3} su tačke odvajanja, dok σ_{o2} ne pripada GMK (čime se potvrđuje činjenica da sve tačke σ_o zadovoljavaju jednačinu $\frac{dW(\sigma_0)}{d\sigma_0}=0$, ali da sva rešenja nisu tačke razdvajanja/spajanja). Tačka $\sigma_{01}=-1$ je tačka razdvajanja, što je još jedna potvrda za ugao izlaska grana GMK iz polova $p_{3,4}$. Ova poslednja činjenica je mogla biti iskorištena tokom određivanja σ_0, na sledeći način. Ako se nacrta lokacija polova sistema u kompleksnoj ravni, na osnovu pravila o intervalima preklapanja može se videti da će jedna tačka odvajanja biti $\sigma_0=-1$. To znači da $\sigma_0=-1$ mora biti jedno rešenje jednačine: $4\sigma_0^3+7.5\sigma_0^2+4\sigma_0+0.5=0$, čime se red jednačine smanjuje za jedan, i ostaje da se reši kvadratna jednačina što nije problem (valjda?).

U svim slučajevima neće biti moguće na analitički način odrediti σ_o, i tada se može koristiti ranije objašnjena približna metoda. Na osnovu prethodno određenih intervala preklapanja i poznatog smera grana GMK uočava se da tačka odvajanja mora da bude locirana na intervalu *[0,-0.5]* (pored tačke -1). Sada se može odrediti *max{K}* na datom intervalu i odgovarajuća tačka *s* se može usvojiti za σ_0. Pojačanja se sračunavaju prema pravilu 12 za konstrukciju GMK, što je u konkretnom slučaju izraz: $K=s(s+0.5)(s+1)^2$. Za početak se sračunavaju sledeća pojačanja:

s	0	-0.1	-0.2	-0.3	-0.4	-0.5
K	0	0.0324	0.0384	0.0294	0.0144	0

Iz prethodne tabele se vidi da je *max{K}* na intervalu *[-0.1.-0.3]*. Sada se mogu izračunati i pojačanja u sledećim tačkama:

s	-0.15	-0.25	-0.175	-0.225
K	0.0379	0.0352	0.0387	0.0372

Za tačku odvajanja se može usvojiti $\sigma_0=-0.175$ (gde je greška u odnosu na tačno rešenje ≈2.5%). Dovoljno tačno bi bilo i usvojiti $\sigma_0=-0.2$ (gde je greška u odnosu na tačno rešenje ≈11%)

Pravilo 10. Ugao polaska grana iz višestrukih realnih polova se određuje prema obrascu: $\beta_k=\frac{(2k+1)\pi}{2}$; $k=0,1$, pošto je pol -1 dvostruk i desno od njega se nalaze dva realna pola.

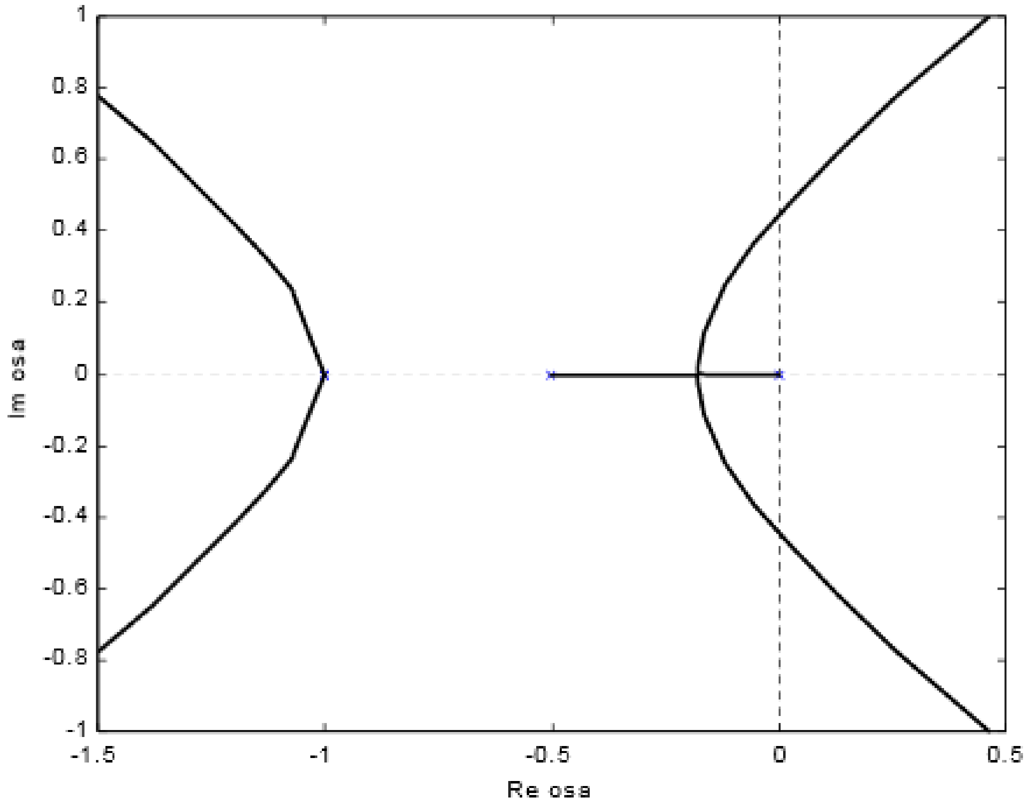
$\beta_0=\frac{\pi}{2}=90^o$; $\beta_1=\frac{3\pi}{2}=-90^o$.

Pravilo 11. Presek grana GMK sa imaginarnom osom. Karakteristični polinom spregnutog prenosa je: $f(s)=s^4+2.5s^3+2s^2+0.5s+K$. Odgovarajuća Routh-ova šema koeficijenata je:

R_1	s^4	1	2	K
R_2	s^3	2.5	0.5	
R_3	s^2	1.8	K	
R_4	s^1	$\frac{0.9-2.5K}{1.8}$		
R_5	s^0	K		

Na osnovu elemenata Routh-ove kolone se određuje K_{gr}. Jedno rešenje je $K_{gr}=0$ i ono se odbacuje. Drugo, prihvatljivo, rešenje je $K_{gr}=0.9/2.5=0.36$. Sada je tačka preseka grana GMK i imaginarne ose: $\omega_{gr}=\sqrt{\frac{a_0}{R_{n-1}}}=\sqrt{\frac{K_{gr}}{R_3}}=\sqrt{\frac{0.36}{1.8}}=0.447$.

GMK sistema je prikazano na slici 5.3.



1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1
Im osa
-1.5
-1
-0.5
0
0.5
Re osa