Sveučilište u Splitu
Pomorski fakultet u Splitu

Radovan Antonić
Ante Cibilić
Ivana Golub

OSNOVE AUTOMATIZACIJE I UPRAVLJANJE

- riješeni zadaci -

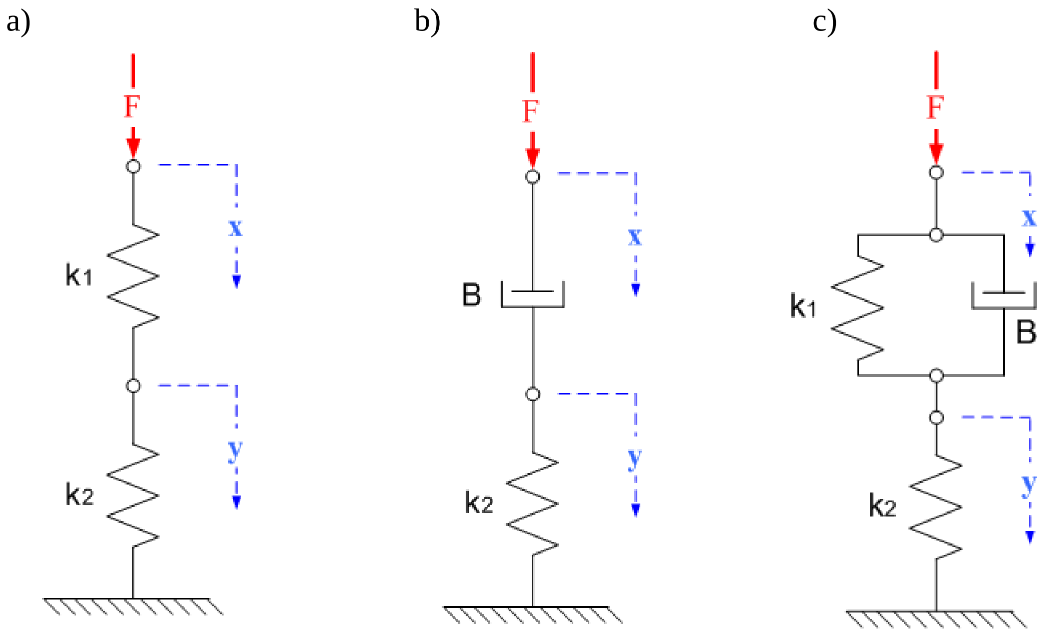
SADRŽAJ:

1. Komponente sustava automatike i njihove analogije

U ovom dijelu riješeni su neki primjeri jednostavnijih mehaničkih translacijskih, mehaničkih rotacijskih i električnih sustava, na način da je određena prijenosna funkcija sustava. Također je pokazana analogija između pojedinih sustava, te kako je moguće mehanički sustav zamijeniti ekvivalentnim električnim modelom i obrnuto.

Primjer 1:

Za mehaničke sustave na slici 1., odrediti jednadžbu koja povezuje:
- x i F
- y i F
- x i y



Slika 1. Zadani mehanički translacijski sustavi

Rješenje:

a) Jednadžbe koje opisuju sustav sa slike 1. a) su:

$$\begin{aligned} F &= k_1(x-y) \\ k_1(x-y) &= k_2 y \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} F &= k_1(x-y) \\ 0 &= -k_1(x-y)+k_2 y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F &= k_1 x - k_1 y \\ 0 &= -k_1 x + \left(k_1+k_2\right) y \end{aligned}$$

Zapis jednadžbi u matričnom obliku:

$$\begin{bmatrix} F \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 \\ -k_1 & k_1+k_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \underline{F} = \underline{\underline{K}} \cdot \underline{x}$$

gdje su: F = vektor pobudnih funkcija
K = matrica koeficijenata
x = vektor pomaka

Sustav jednadžbi može se riješiti primjenom determinanti:

$$\Delta = \begin{vmatrix} k_1 & -k_1 \\ -k_1 & k_1+k_2 \end{vmatrix} = k_1^2 + k_1 k_2 - k_1^2 = k_1 k_2 \quad \ldots \text{ glavna determinanta sustava}$$

Determinanta Δ_1 dobije se tako da se prvi stupac glavne determinante zamijeni s vektorom pobudne funkcije:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} F & -k_1 \\ 0 & k_1 + k_2 \end{vmatrix} = F \cdot (k_1 + k_2)$$

Detarminanta Δ_2 dobije se tako da se drugi stupac glavne determinante zamijeni s vektorom pobudne funkcije:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} k_1 & F \\ -k_1 & 0 \end{vmatrix} = k_1 F$$

Jednadžbe koje povezuju F sa x, F sa y, x sa y, slijede iz jednakosti:

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad y = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad \frac{y}{x} = \frac{\Delta_2}{\Delta_1}$$

Rješenja zadatka glasi:

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{F \cdot (k_1 + k_2)}{k_1 k_2} \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{F} = \frac{k_1 + k_2}{k_1 k_2}$$

$$y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{k_1 F}{k_1 k_2} = \frac{F}{k_2} \quad \Rightarrow \quad \frac{y}{F} = \frac{1}{k_2}$$

$$\frac{y}{x} = \frac{\Delta_2}{\Delta_1} = \frac{k_1 F}{(k_1 + k_2) F} = \frac{k_1}{(k_1 + k_2)}$$

b) Jednadžbe koje opisuju sustav sa slike 1. b) su:

$$\begin{aligned} F &= BD(x-y) \\ BD(x-y) &= ky \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} F &= BD(x-y) \\ 0 &= -BD(x-y)+ky \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F &= BDx - BDy \\ 0 &= -BDx + \left(BD+k\right)y \end{aligned}$$

Zapis jednadžbi u matričnom obliku:

$$\begin{bmatrix} F \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} BD & -BD \\ -BD & BD+k \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Glavna determinanta sustava je:

$$\Delta = \begin{vmatrix} BD & -BD \\ -BD & BD+k \end{vmatrix} = \left(BD\right)^2 + BD\cdot k - \left(BD\right)^2 = BD\cdot k$$

Odgovarajućom zamjenom stupaca glavne determinante dobije se:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} F & -BD \\ 0 & BD+k \end{vmatrix} = F\cdot\left(BD+k\right)$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} BD & F \\ -BD & 0 \end{vmatrix} = BD\cdot F$$

Rješenje zadatka glasi:

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{F\cdot\left(BD+k\right)}{kBD} \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{F} = \frac{BD+k}{kBD}$$

$$y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{BD\cdot F}{kBD} = \frac{F}{k} \quad \Rightarrow \quad \frac{y}{F} = \frac{1}{k}$$

$$\frac{y}{x} = \frac{\Delta_2}{\Delta_1} = \frac{BD\cdot F}{\left(BD+k\right)\cdot F} = \frac{BD}{BD+k}$$

c) Jednadžbe koje opisuju sustav sa slike 1. c) su:

$$\begin{aligned} &F=\left(k_1+BD\right)(x-y) \\ &\left(k_1+BD\right)(x-y)=k_2 y \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} &F=\left(k_1+BD\right)\cdot x-\left(k_1+BD\right)\cdot y \\ &\underline{0=-\left(k_1+BD\right)\cdot x+\left(k_1+k_2+BD\right)\cdot y} \\ &F=k_1 x-k_1 y+BDx+BDy \\ &\underline{0=-k_1 x-BDx+k_1 y+k_2 y+BDy} \end{aligned}$$

Zapis jednadžbi u matričnom obliku:

$$\begin{bmatrix} F \\ 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \left(k_1+BD\right) & -\left(k_1+BD\right) \\ -\left(k_1+BD\right) & \left(k_1+k_2+BD\right) \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Glavna determinanta sustava je:

$$\Delta=\begin{vmatrix} \left(k_1+BD\right) & -\left(k_1+BD\right) \\ -\left(k_1+BD\right) & \left(k_1+k_2+BD\right) \end{vmatrix}=\left(k_1+BD\right)\left(k_1+k_2+BD\right)-\left(k_1+BD\right)^2 = k_2\left(k_1+BD\right)$$

Odgovarajućom zamjenom stupaca glavne determinante dobije se:

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} F & -\left(k_1+BD\right) \\ 0 & \left(k_1+k_2+BD\right) \end{vmatrix}=F\left(k_1+k_2+BD\right)$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix} \left(k_1+BD\right) & F \\ -\left(k_1+BD\right) & 0 \end{vmatrix}=F\cdot\left(k_1+BD\right)$$

Rješenje zadatka glasi:

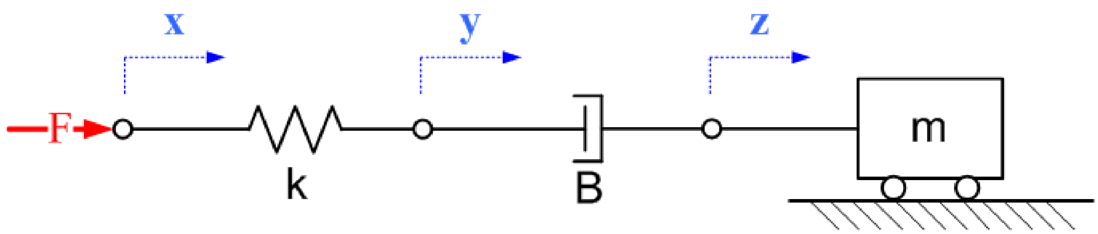
$$x=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{F\left(k_1+k_2+BD\right)}{k_2\left(k_1+BD\right)} \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{F}=\frac{k_1+k_2+BD}{k_2\left(k_1+BD\right)}$$

$$y=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{F\cdot\left(k_1+BD\right)}{k_2\left(k_1+BD\right)}=\frac{F}{k_2} \quad \Rightarrow \quad \frac{y}{F}=\frac{1}{k_2}$$

$$\frac{y}{x}=\frac{\Delta_2}{\Delta_1}=\frac{k_1+BD}{k_1+k_2+BD}$$

Primjer 2:

Za mehanički sustav sa slike 2. odrediti jednadžbe koje povezuju F i x, F i y, te F i z .



Slika 2. Zadani mehanički translacijski sustav

Zanemariti trenje mase o podlogu!

Rješenje:

Jednadžbe koje opisuju sustav sa slike 2. su:

$$
\begin{aligned}
F &= k(x-y) \\
k(x-y) &= BD(y-z) \\
BD(y-z) &= mD^2z
\end{aligned}
\quad \Rightarrow \quad
\begin{aligned}
F &= k(x-y) \\
0 &= -k(x-y) + BD(y-z) \\
0 &= -BD(y-z) + mD^2z
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
F &= kx - ky \\
0 &= -kx + ky + BDy - BDz \\
0 &= -BDy + BDz + mD^2z
\end{aligned}
$$

Zapis jednadžbi u matričnom obliku:

$$
\begin{bmatrix} F \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k & -k & 0 \\ -k & (k+BD) & -BD \\ 0 & -BD & (BD + mD^2) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}
$$

Glavna determinanta sustava je:

$$
\Delta = \begin{vmatrix} k & -k & 0 \\ -k & (k+BD) & -BD \\ 0 & -BD & (BD + mD^2) \end{vmatrix}
$$

$$\Delta = k\cdot\left[\left(k+BD\right)\cdot\left(BD+mD^2\right)-B^2D^2\right]+k\cdot\left[-k\cdot\left(BD+mD^2\right)-0\right]+0=$$
$$=k\cdot\left(kBD+B^2D^2+kmD^2+BDmD^2-B^2D^2\right)-k^2BD-k^2mD^2=$$
$$=k^2BD+k^2mD^2+kBDmD^2-k^2BD-k^2mD^2=$$
$$=\ k\cdot BD\cdot MD^2$$

Odgovarajućom zamjenom stupaca glavne determinante dobije se:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} F & -k & 0 \\ 0 & \left(k+BD\right) & -BD \\ 0 & -BD & \left(BD+mD^2\right) \end{vmatrix} = F\left(kBD+kMD^2+BDmD^2\right)$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} k & F & 0 \\ -k & 0 & -BD \\ 0 & 0 & \left(BD+mD^2\right) \end{vmatrix} = F\left[-k\left(BD+mD^2\right)\right]$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} k & -k & F \\ -k & \left(k+BD\right) & 0 \\ 0 & -BD & 0 \end{vmatrix} = F\cdot k\cdot BD$$

Tražene jednadžbe su :

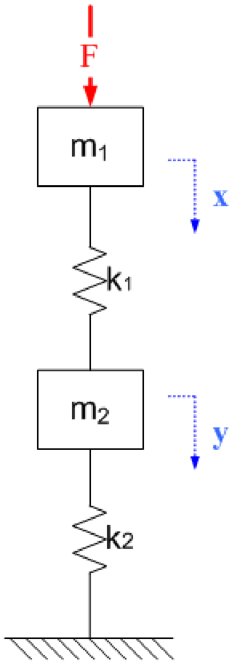
$$x=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{F\left(kBD+kmD^2+BDmD^2\right)}{k\cdot BD\cdot mD^2} \quad\Rightarrow\quad \frac{x}{F}=\frac{kBD+kmD^2+BDmD^2}{k\cdot BD\cdot mD^2}=\frac{1}{mD^2}+\frac{1}{BD}+\frac{1}{k}$$

$$y=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{F\left[-k\left(BD+mD^2\right)\right]}{k\cdot BD\cdot mD^2} \quad\Rightarrow\quad \frac{y}{F}=\frac{kBD+kmD^2}{k\cdot BD\cdot mD^2}=\frac{1}{mD^2}+\frac{1}{BD}$$

$$z=\frac{\Delta_3}{\Delta}=\frac{F\cdot kBD}{k\cdot BD\cdot mD^2} \quad\Rightarrow\quad \frac{z}{F}=\frac{kBD}{k\cdot BD\cdot mD^2}=\frac{1}{mD^2}$$

Primjer 3:

Za mehanički sustav sa slike 3. odrediti jednadžbe koje povezuju F i x, F i y, te x i y .



Slika 3.
Zadani translacijski sustav

Rješenje:

Jednadžbe koje opisuju sustav sa slike 3. su:

$$F = m_1 D^2 x + k_1 (x - y)$$

$$\underline{k_1 (x - y) = m_2 D^2 y + k_2 y}$$

$$F = m_1 D^2 x + k_1 x - k_1 y$$

$$\underline{0 = -k_1 x + k_1 y + m_2 D^2 y + k_2 y}$$

$$F = (m_1 D^2 + k_1) \cdot x - k_1 \cdot y$$

$$\underline{0 = -k_1 \cdot x + (k_1 + k_2 + m_2 D^2) \cdot y}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{bmatrix} F \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (k_1 + m_1 D^2) & -k_1 \\ -k_1 & (k_1 + k_2 + m_2 D^2) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Glavna determinanta sustava je:

$$\Delta = \begin{vmatrix} (k_1 + m_1 D^2) & -k_1 \\ -k_1 & (k_1 + k_2 + m_2 D^2) \end{vmatrix}$$

$$\Delta = k_1{}^2 + k_1 m_1 D^2 + k_1 k_2 + k_2 m_1 D^2 + k_1 m_2 D^2 + m_1 D^2 m_2 D^2 - k_1^2 =$$

$$= m_1 m_2 D^4 + (k_1 m_1 + k_2 m_1 + k_1 m_2) D^2 + k_1 k_2$$

Odgovarajućom zamjenom stupaca glavne determinante dobije se:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} F & -k_1 \\ 0 & (k_1 + k_2 + m_2 D^2) \end{vmatrix} = F \cdot (k_1 + k_2 + m_2 D^2)$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} (k_1 + m_1 D^2) & F \\ -k_1 & 0 \end{vmatrix} = F \cdot (-k_1)$$

Rješenje zadatka je:

$$x=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{F\left(k_1+k_2+m_1D^2\right)}{m_1m_2D^4+\left(k_1m_1+k_2m_1+k_1m_2\right)D^2+k_1k_2}$$

$$\frac{x}{F}=\frac{k_1+k_2+m_1D^2}{m_1m_2D^4+\left(k_1m_1+k_2m_1+k_1m_2\right)D^2+k_1k_2}$$

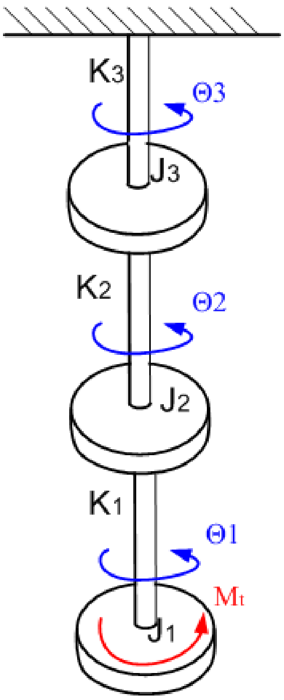
$$y=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{F\cdot\left(k_1\right)}{m_1m_2D^4+\left(k_1m_1+k_2m_1+k_1m_2\right)D^2+k_1k_2}$$

$$\frac{y}{F}=\frac{k_1}{m_1m_2D^4+\left(k_1m_1+k_2m_1+k_1m_2\right)D^2+k_1k_2}$$

$$\frac{y}{x}=\frac{\Delta_2}{\Delta_1}=\frac{F\left(k_1\right)}{F\left(k_1+k_2+m_1D^2\right)}=\frac{k_1}{k_1+k_2+m_1D^2}$$

Primjer 4:

Odrediti matematički model mehaničkog rotacijskog sustava sa slike 4., tj. jednadžbu koja povezuje veličine Θ_1 i Θ_3 .



Slika 4. Zadani mehanički rotacijski sustav

Rješenje:

Dakle, potrebno je naći omjer $\frac{\Theta_3}{\Theta_1}$

Jednadžbe koje opisuju sustav sa slike 4. su:

$$M_t=J_1D^2\Theta_1+K_1\left(\Theta_1-\Theta_2\right)$$

$$K_1\left(\Theta_1-\Theta_2\right)=J_2D^2\Theta_2+K_2\left(\Theta_2-\Theta_3\right)$$

$$K_2\left(\Theta_2-\Theta_3\right)=J_3D^2\Theta_3+K_3\Theta_3$$

$$M_t=J_1D^2\Theta_1+K_1\left(\Theta_1-\Theta_2\right)$$

$$0=-K_1\left(\Theta_1-\Theta_2\right)+J_2D^2\Theta_2+K_2\left(\Theta_2-\Theta_3\right)$$

$$0=-K_2\left(\Theta_2-\Theta_3\right)+J_3D^2\Theta_3+K_3\Theta_3$$

$$M_t=\left(K_1+J_1D^2\right)\Theta_1-K_1\Theta_2$$

$$0=-K_1\Theta_1+\left(K_1+J_2D^2+K_2\right)\Theta_2-K_2\Theta_3$$

$$0=-K_2\Theta_2+\left(K_2+K_3+J_3D^2\right)\Theta_3$$

Zapis jednadžbi u matričnom obliku:

$$\begin{bmatrix} M_t \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(K_1 + J_1 D^2\right) & -K_1 & 0 \\ -K_1 & \left(K_1 + J_2 D^2 + K_2\right) & -K_2 \\ 0 & -K_2 & \left(K_2 + K_3 + J_3 D^2\right) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Theta_1 \\ \Theta_2 \\ \Theta_3 \end{bmatrix}$$

Iz čega slijedi, da je glavna determinanta sustava:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \left(K_1 + J_1 D^2\right) & -K_1 & 0 \\ -K_1 & \left(K_1 + J_2 D^2 + K_2\right) & -K_2 \\ 0 & -K_2 & \left(K_2 + K_3 + J_3 D^2\right) \end{vmatrix}$$

Omjer $\dfrac{\Theta_3}{\Theta_1}$ moguće je izračunati primjenom kofaktora determinante:

$$\frac{\Theta_3}{\Theta_1} = \frac{\Delta_{13}}{\Delta_{11}}$$

Δ_{13} dobije se križanjem prvog redka i trećeg stupca glavne determinante, a Δ_{11} se dobije križanjem prvog redka i prvog stupca:

$$\Delta_{13} = \begin{vmatrix} -K_1 & \left(K_1 + J_2 D^2 + K_2\right) \\ 0 & -K_2 \end{vmatrix} = K_1 K_2$$

$$\Delta_{11} = \begin{vmatrix} \left(K_1 + J_2 D^2 + K_2\right) & -K_2 \\ -K_2 & \left(K_2 + K_3 + J_3 D^2\right) \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} \Delta_{11} &= \left(K_1 + J_2 D^2 + K_2\right) \cdot \left(K_2 + K_3 + J_3 D^2\right) - K_2^2 = \\ &= K_1 K_2 + K_2^2 + K_2 J_2 D^2 + K_1 K_3 + K_2 K_3 + K_3 J_2 D^2 + K_1 J_3 D^2 + K_2 J_3 D^2 + J_2 D^2 J_3 D^2 - K_2^2 = \\ &= J_2 J_3 \cdot D^4 + \left(K_2 J_2 + K_3 J_2 + K_1 J_3 + K_2 J_3\right) \cdot D^2 + K_1 K_2 + K_1 K_3 + K_2 K_3 \end{aligned}$$

Rješenje zadatka je:

$$\frac{\Theta_3}{\Theta_1} = \frac{\Delta_{13}}{\Delta_{11}} = \frac{K_1 K_2}{J_2 J_3 \cdot D^4 + \left(K_2 J_2 + K_3 J_2 + K_1 J_3 + K_2 J_3\right) \cdot D^2 + K_1 K_2 + K_1 K_3 + K_2 K_3}$$

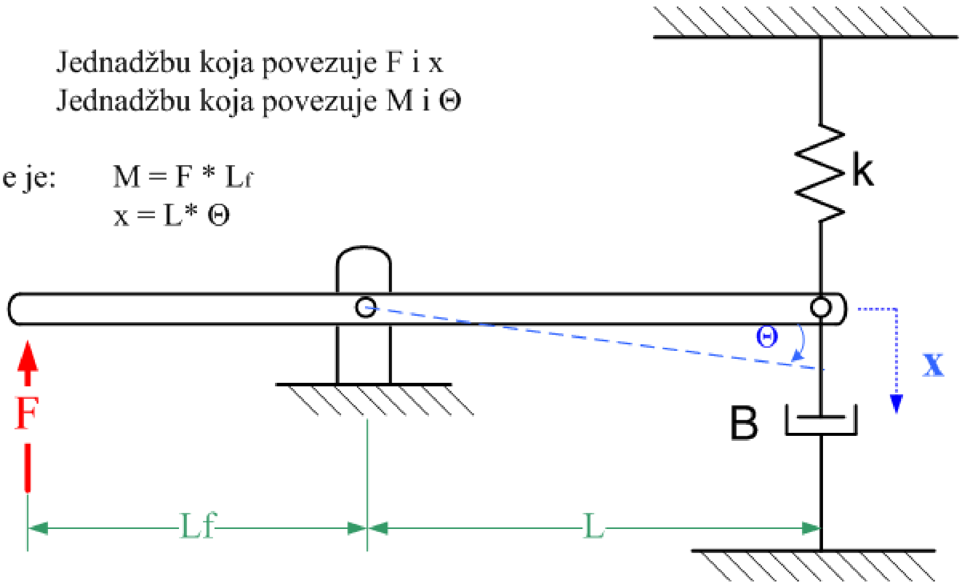
Primjer 5:

Sustav poluga prikazan na slici 5. pomaknut je iz referentnog položaja pod djelovanjem sile F. Translacijski pomak označen je sa x, a rotacijski pomak, tj. kut zakreta poluge iz referentnog položaja sa Θ.

Odrediti:

a) Jednadžbu koja povezuje F i x
b) Jednadžbu koja povezuje M i Θ

gdje je: $M = F * L_f$
$x = L * \Theta$



Slika 5. Zadani mehanički sustav

Rješenje:

Sila koja djeluje na drugoj strani poluge odredi se iz ravnoteže momenata poluge (umnožak sile i kraka) :

$$M = M' \quad \Rightarrow \quad F \cdot L_f = F' \cdot L \quad \Rightarrow \quad F' = F \cdot \frac{L_f}{L}$$

Sada se može postaviti translacijska jednadžba sustava:

$$F' = k \cdot x + BD \cdot x \quad \Rightarrow \quad F \cdot \frac{L_f}{L} = (k + BD) \cdot x$$

Iz čega slijedi rješenje zadatka pod a):

$$\frac{x}{F} = \frac{L_f}{L} \cdot \frac{1}{k + BD}$$

Ako se u rješenje zadatka pod a) uvrste slijedeći izrazi:

$$M = F \cdot L_f \quad \text{i} \quad x = L \cdot \Theta$$

dobije se rješenje zadatka pod b):

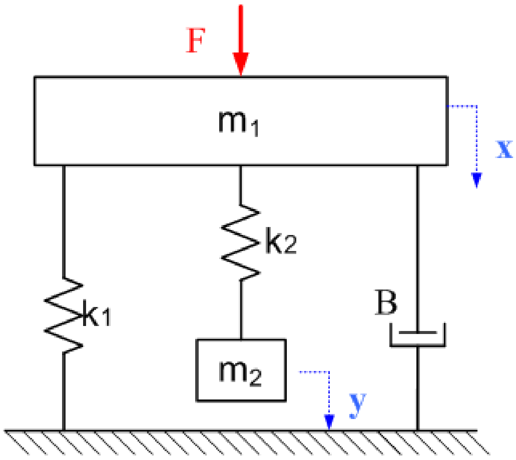
$$\frac{\Theta}{M} = \frac{1}{L^2 \cdot (k + BD)}$$

Primjer 6:

Za mehanički sustav sa slike 6.
odrediti:

a) jednadžbu koja povezuje F sa x

b) jednadžbu koja povezuje F sa y



Slika 6. Zadani mehanički sustav

Jednadžbe koje opisuju sustav sa slike 6. su:

$$F = m_1D^2x + k_1x + k_2\left(x - y\right) + BDx$$

$$\underline{k_2\left(x - y\right) = m_2D^2y}$$

$$F = \left(m_1D^2 + BD + k_1 + k_2\right)x - k_2y$$

$$0 = -k_2x + \left(k_2 + m_2D^2\right)y$$

Jednadžbe sustava u matričnom obliku:

$$\begin{bmatrix} F \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(m_1D^2 + BD + k_1 + k_2\right) & -k_2 \\ -k_2 & \left(k_2 + m_2D^2\right) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Glavna determinanta sustava je:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \left(m_1D^2 + BD + k_1 + k_2\right) & -k_2 \\ -k_2 & \left(k_2 + m_2D^2\right) \end{vmatrix}$$

$$\Delta = \left(m_1D^2 + BD + k_1 + k_2\right) \cdot \left(k_2 + m_2D^2\right) - k_2^2 =$$

$$= k_2m_1D^2 + k_2BD + k_2k_1 + k_2^2 + m_1D^2m_2D^2 + BDm_2D^2 + k_1m_2D^2 + k_2m_2D^2 - k_2^2 =$$

$$= m_1m_2 \cdot D^4 + Bm_2 \cdot D^3 + \left(k_2m_1 + k_1m_2 + k_2m_2\right) \cdot D^2 + k_2B \cdot D + k_2k_1$$

Odgovarajućom zamjenom stupaca glavne determinante dobije se:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} F & -k_2 \\ 0 & \left(k_2 + m_2 D^2\right) \end{vmatrix} = F \cdot \left(k_2 + m_2 D^2\right)$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \left(m_1 D^2 + BD + k_1 + k_2\right) & F \\ -k_2 & 0 \end{vmatrix} = F \cdot k_2$$

Rješenje zadatka:

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{F\left(k_2 + m_2 D^2\right)}{m_1 m_2 D^4 + B m_2 D^3 + \left(k_1 m_1 + k_2 m_1 + k_1 m_2\right) D^2 + k_2 BD + k_1 k_2}$$

$$\frac{x}{F} = \frac{k_2 + m_2 D^2}{m_1 m_2 D^4 + B m_2 D^3 + \left(k_1 m_1 + k_2 m_1 + k_1 m_2\right) D^2 + k_2 BD + k_1 k_2}$$

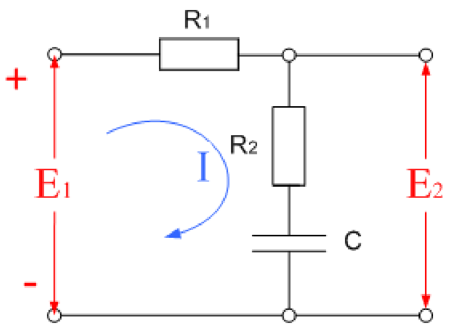
$$y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{F \cdot \left(k_2\right)}{m_1 m_2 D^4 + B m_2 D^3 + \left(k_1 m_1 + k_2 m_1 + k_1 m_2\right) D^2 + k_2 BD + k_1 k_2}$$

$$\frac{y}{F} = \frac{k_2}{m_1 m_2 D^4 + B m_2 D^3 + \left(k_1 m_1 + k_2 m_1 + k_1 m_2\right) D^2 + k_2 BD + k_1 k_2}$$

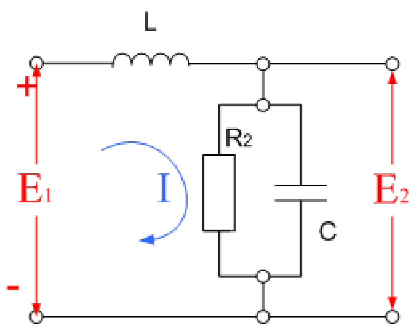
Primjer 7:

Za električne mreže na slikama 7. i 8. odrediti:

a) jednadžbu koja povezuje E_1 i I
b) jednadžbu koja povezuje E_1 i E_2



Slika 7. Zadana električna mreža



Slika 8. Zadana električna mreža

Rješenje za sustav sa slike 7.:

a) Iz 2. Kirchoffovog zakona proizlazi jednadžba:

$$E_1 = U_{R_1} + U_{R_2} + U_C$$

$$E_1 = I \cdot R_1 + I \cdot R_2 + \frac{I}{CD}$$

$$E_1 = I \cdot \left(R_1 + R_2 + \frac{1}{CD} \right) \qquad \Rightarrow \qquad \frac{I}{E_1} = \frac{CD}{1 + CD\left(R_1 + R_2\right)}$$

b) Ako se struja I zapiše kao funkcija napona E_2 i uvrsti u omjer I/E_1 dobije se matematički model sustava za slučaj kad je izlazna veličina napon E_2 .

$$E_2 = I \cdot R_2 + \frac{I}{CD} \qquad \Rightarrow \qquad I = \frac{E_2}{R_2 + \frac{1}{CD}} = \frac{E_2 \cdot CD}{1 + R_2 CD}$$

$$\frac{I}{E_1} = \frac{CD}{1 + CD\left(R_1 + R_2\right)}$$

$$\frac{E_2}{E_1} = \frac{1 + R_2 CD}{1 + CD\left(R_1 + R_2\right)}$$

Rješenje za sustav sa slike 8.:

a) Iz 2. Kirchoffovog zakona proizlazi jednadžba:

$$E_1 = U_L + U_{R\|C}$$

$$E_1 = I \cdot LD + I \cdot \frac{R \cdot \frac{1}{CD}}{R + \frac{1}{CD}}$$

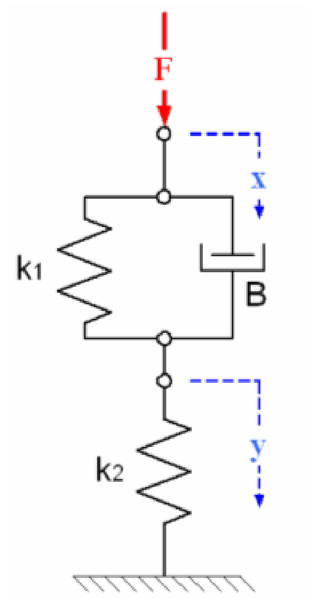
$$E_1 = I \cdot \left(LD + \frac{R}{1 + RCD} \right) \qquad \Rightarrow \qquad \frac{I}{E_1} = \frac{RCD + 1}{RLCD^2 + LD + R}$$

b) Ako se struja I izrazi preko napona E_2 i uvrsti u omjer I/E_1 dobije se matematički model sustava za slučaj kad je izlazna veličina napon E_2 .

$$E_2 = I \cdot \frac{R \cdot \frac{1}{CD}}{R + \frac{1}{CD}} \;\Rightarrow\; I = E_2 \cdot \frac{1 + RCD}{R} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{E_2}{E_1} = \frac{R}{RLCD^2 + LD + R}$$

Primjer 8:

Za mehanički sustav sa slike 9. konstruirati analogan (ekvivalentan) električni krug. Odrediti jednadžbu koja povezuje I_1 sa E .



Slika 9. Zadani mehanički sustav

Jednadžbe koje opisuju sustav sa slike 9. su:

$$F=(k_1+BD)(x-y)$$

$$\underline{(k_1+BD)(x-y)=k_2y}$$

$$F=(k_1+BD)\cdot x-(k_1+BD)\cdot y$$

$$\underline{0=-(k_1+BD)\cdot x+(k_1+k_2+BD)\cdot y}$$

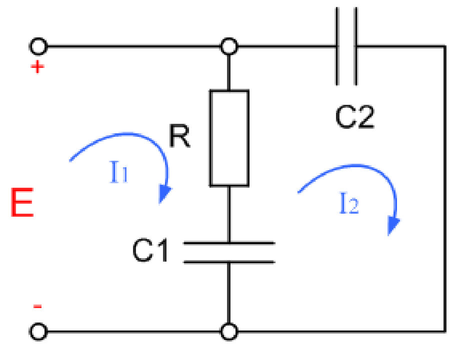
Budući da vrijede analogije:

$$k=\frac{1}{CD} \qquad F=E$$

$$BD=R \qquad x=I_1$$

$$y=I_2$$

Ekvivalentan električni sustav prikazan je na slici 10.



slika 10. Ekvivalentan električni sustav

Analogne električne jednadžbe su:

$$E=\left(\frac{1}{C_1D}+R\right)\cdot I_1-\left(\frac{1}{C_1D}+R\right)\cdot I_2$$

$$0=-\left(\frac{1}{C_1D}+R\right)\cdot I_1+\left(\frac{1}{C_1D}+\frac{1}{C_2D}+R\right)\cdot I_2$$

Jednadžbe električnog sustava sa slike 10. u matričnom obliku su:

$$\begin{bmatrix}E\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\left(\frac{1}{C_1D}+R\right) & -\left(\frac{1}{C_1D}+R\right)\\ -\left(\frac{1}{C_1D}+R\right) & \left(\frac{1}{C_1D}+\frac{1}{C_2D}+R\right)\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}I_1\\I_2\end{bmatrix}$$

Glavna determinanta je:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \left(\frac{1}{C_1D} + R\right) & -\left(\frac{1}{C_1D} + R\right) \\ -\left(\frac{1}{C_1D} + R\right) & \left(\frac{1}{C_1D} + \frac{1}{C_2D} + R\right) \end{vmatrix}$$

$$\Delta = \left(\frac{1}{C_1D} + R\right) \cdot \left(\frac{1}{C_1D} + \frac{1}{C_2D} + R\right) - \left(\frac{1}{C_1D} + R\right)^2 = \left(\frac{1}{C_1D} + R\right)\left(\frac{1}{C_1D} + \frac{1}{C_2D} + R - \frac{1}{C_1D} - R\right) =$$

$$= \frac{1}{C_2D} \cdot \left(\frac{1}{C_1D} + R\right)$$

Odgovarajućom zamjenom stupaca glavne determinante dobije se:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} E & -\left(\frac{1}{C_1D} + R\right) \\ 0 & \left(\frac{1}{C_1D} + \frac{1}{C_2D} + R\right) \end{vmatrix} = E \cdot \left(\frac{1}{C_1D} + \frac{1}{C_2D} + R\right)$$

Rješenje zadatka:

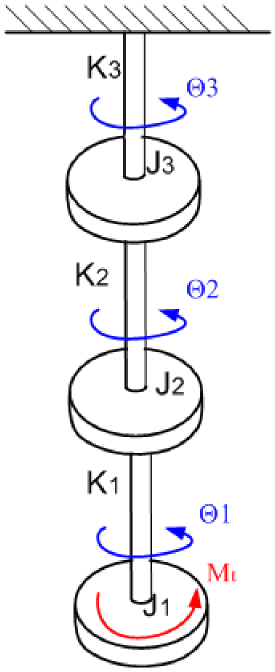
$$I_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{E \cdot \left(\frac{1}{C_1D} + \frac{1}{C_2D} + R\right)}{\frac{1}{C_2D} \cdot \left(\frac{1}{C_1D} + R\right)}$$

$$\frac{I_1}{E} = \frac{\frac{1}{C_1D} + \frac{1}{C_2D} + R}{\frac{1}{C_2D} \cdot \left(\frac{1}{C_1D} + R\right)} = \frac{\frac{C_2D + C_1D + R \cdot C_1D \cdot C_2D}{C_1D \cdot C_2D}}{\frac{1}{C_2D} \cdot \frac{1 + R \cdot C_1D}{C_1D}}$$

$$\frac{I_1}{E} = \frac{C_2D + C_1D + R \cdot C_1D \cdot C_2D}{1 + R \cdot C_1D}$$

Primjer 9:

Napisati diferencijalne jednadžbe koje opisuju mehanički rotacijski sustav sa slike 11. Odrediti analogne električne jednadžbe i nacrtati analogni električni sustav. Koristiti u električnoj shemi oznake za mehaničke veličine.



Slika 11. Zadani mehanički sustav

Jednadžbe koje opisuju zadani sustav su:

$$M_t = J_1 D^2 \Theta_1 + K_1(\Theta_1 - \Theta_2)$$

$$K_1(\Theta_1 - \Theta_2) = J_2 D^2 \Theta_2 + K_2(\Theta_2 - \Theta_3)$$

$$K_2(\Theta_2 - \Theta_3) = J_3 D^2 \Theta_3 + K_3 \Theta_3$$

$$M_t = J_1 D^2 \Theta_1 + K_1(\Theta_1 - \Theta_2)$$

$$0 = -K_1(\Theta_1 - \Theta_2) + J_2 D^2 \Theta_2 + K_2(\Theta_2 - \Theta_3)$$

$$0 = -K_2(\Theta_2 - \Theta_3) + J_3 D^2 \Theta_3 + K_3 \Theta_3$$

$$M_t = (K_1 + J_1 D^2)\Theta_1 - K_1 \Theta_2$$

$$0 = -K_1 \Theta_1 + (K_1 + J_2 D^2 + K_2)\Theta_2 - K_2 \Theta_3$$

$$0 = -K_2 \Theta_2 + (K_2 + K_3 + J_3 D^2)\Theta_3$$

Ako se u gornjim jednadžbama obavi supstitucija mehaničkih rotacijskih veličina analognim električnim veličinama:

$$M_t = E \qquad \Theta_1 = I_1 \qquad K_1 = \frac{1}{C_1 D} \qquad J_1 D^2 = L_1 D$$

$$\Theta_2 = I_2 \qquad K_2 = \frac{1}{C_2 D} \qquad J_2 D^2 = L_2 D$$

$$\Theta_3 = I_3 \qquad K_3 = \frac{1}{C_3 D} \qquad J_3 D^2 = L_3 D$$

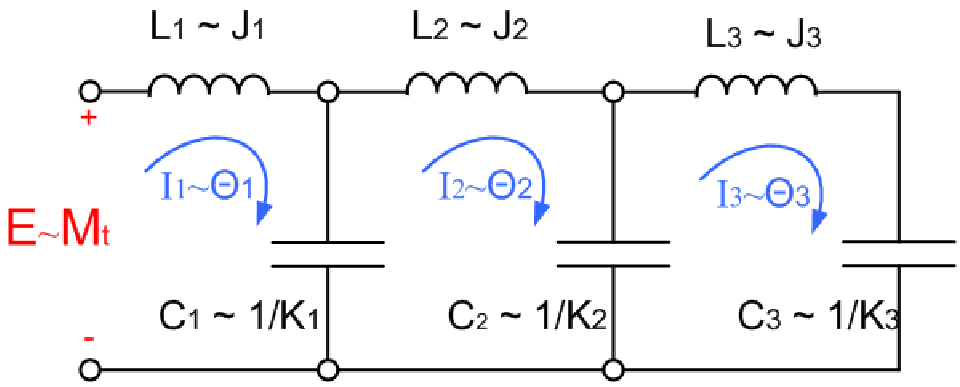
Dobiju se analogne električne jednadžbe na temelju kojih se crta električni ekvivalent zadanog mehaničkog sustava.

$$E = \left(\frac{1}{C_1 D} + L_1 D \right) \cdot I_1 - \frac{1}{C_1 D} \cdot I_2$$

$$0 = -\frac{1}{C_1 D} \cdot I_1 + \left(\frac{1}{C_1 D} + L_2 D + \frac{1}{C_2 D} \right) \cdot I_2 - \frac{1}{C_2 D} \cdot I_3$$

$$0 = -\frac{1}{C_2 D} \cdot I_2 + \left(\frac{1}{C_2 D} + \frac{1}{C_3 D} + L_3 D \right) \cdot I_3$$

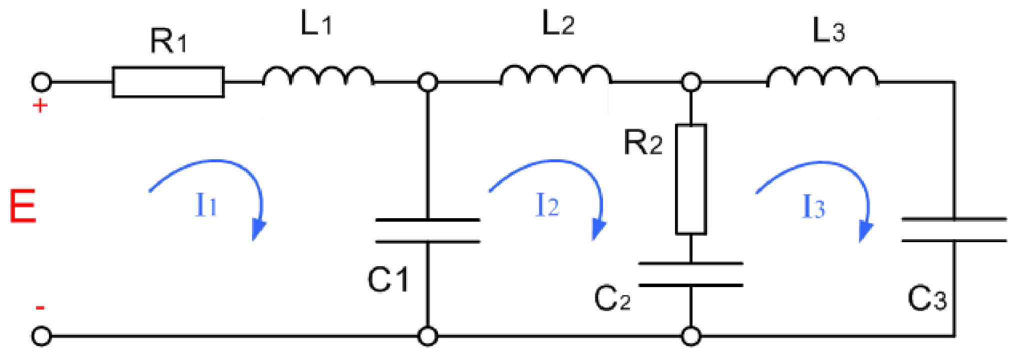
Ekvivalentan električni sustav prikazan je na slici 12.



Slika 12. Ekvivalentan električni sustav

Primjer 10:

Napisati jednadžbe koje opisuju zadani sustav na slici 13. i nacrtati analognu mehaničku translacijsku mrežu.



Slika 13. Zadani električni sustav

Mreža sa slike 13. opisana je slijedećim jednadžbama:

$$E = \left(R_1 + L_1 D + \frac{1}{C_1 D}\right)\cdot I_1 - \frac{1}{C_1 D}\cdot I_2$$

$$0 = -\frac{1}{C_1 D}\cdot I_1 + \left(R_2 + L_2 D + \frac{1}{C_1 D} + \frac{1}{C_2 D}\right)\cdot I_2 - \left(R_2 + \frac{1}{C_2 D}\right)\cdot I_3$$

$$0 = -\left(R_2 + \frac{1}{C_2 D}\right)\cdot I_2 + \left(R_2 + L_3 D + \frac{1}{C_2 D} + \frac{1}{C_3 D}\right)\cdot I_3$$

Ako se u gornjim jednadžbama obavi supstitucija električnih veličina analognim mehaničkim translacijskim veličinama:

$E = F$

$I_1 = x$

$I_2 = y$

$I_3 = z$

$\frac{1}{C_1 D} = k_1$

$\frac{1}{C_2 D} = k_2$

$\frac{1}{C_3 D} = k_3$

$R_1 = B_1 D$

$R_2 = B_2 D$

$L_1 D = m_1 D^2$

$L_2 D = m_2 D^2$

$L_3 D = m_3 D^2$

Dobiju se analogne mehaničke translacijske jednadžbe:

$$F = \left(B_1 D + m_1 D^2 + k_1\right)\cdot x - k_1 \cdot y$$

$$0 = -k_1 \cdot x + \left(B_2 D + m_2 D^2 + k_1 + k_2\right)\cdot y - \left(B_2 D + k_2\right)\cdot z$$

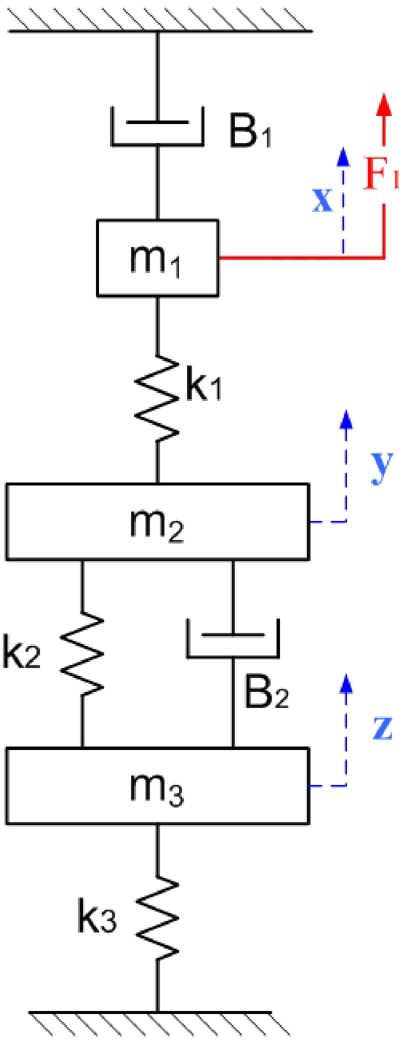
$$0 = -\left(B_2 D + k_2\right)\cdot y + \left(B_2 D + m_3 D^2 + k_2 + k_3\right)\cdot z$$

$$F = (x - y) \cdot k_1 + B_1 D \cdot x + m_1 D^2 \cdot x$$

$$(x - y) \cdot k_1 = (y - z) \cdot k_2 + (y - z) \cdot B_2 D + m_2 D^2 \cdot y$$

$$(y - z) \cdot k_2 + (y - z) \cdot B_2 D = k_3 \cdot z + m_3 D^2 \cdot z$$

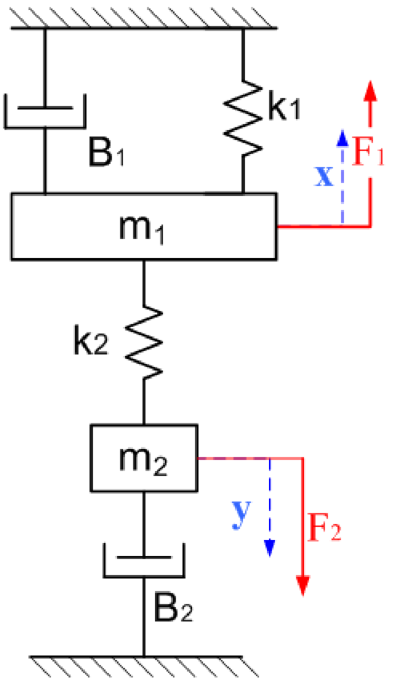
Ekvivalentan translacijski sustav prikazan je na slici 14. :



Slika 14. Ekvivalentan mehanički translacijski sustav

Primjer 11:

Napisati jednadžbe koje opisuju zadani sustav sa slike 15. i nacrtati analognu električnu shemu.



Slika 15. Zadani mehanički sustav

Jednadžbe koje opisuju zadani sustav su:

$$F_1 = m_1D^2x + (k_1 + B_1D)x + k_2(x+y)$$

$$F_2 = m_2D^2y + B_2Dy + k_2(x+y)$$

$$F_1 = (m_1D^2 + B_1D + k_1 + k_2)x + k_2y$$

$$F_2 = k_2x + (m_2D^2 + B_2D + k_2)y$$

vrijedi analogija:

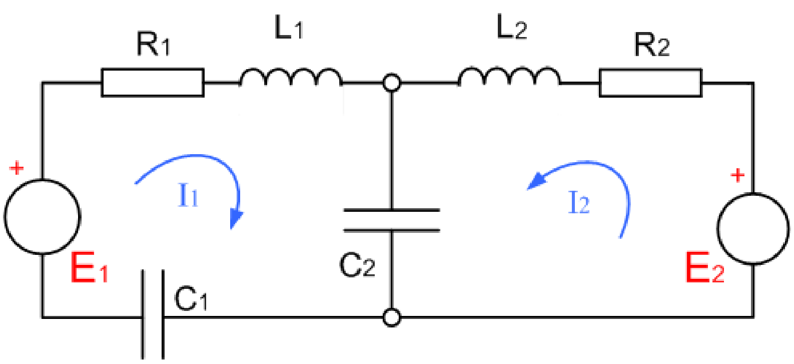
$F_1 = E_1$	$m_1D^2 = L_1D$	$m_2D^2 = L_2D$
$F_2 = E_2$	$B_1D = R_1$	$B_2D = R_2$
$x = I_1$	$k_1 = \dfrac{1}{C_1D}$	$k_2 = \dfrac{1}{C_2D}$
$y = I_2$		

Analogne električne jednadžbe su:

$$E_1 = \left(L_1D + R_1 + \frac{1}{C_1D} + \frac{1}{C_2D}\right)\cdot I_1 + \frac{1}{C_2D}\cdot I_2$$

$$E_2 = \frac{1}{C_2D}\cdot I_1 + \left(L_2D + R_2 + \frac{1}{C_2D}\right)\cdot I_2$$

Ekvivalentan električni sustav prikazan je na slici 16.



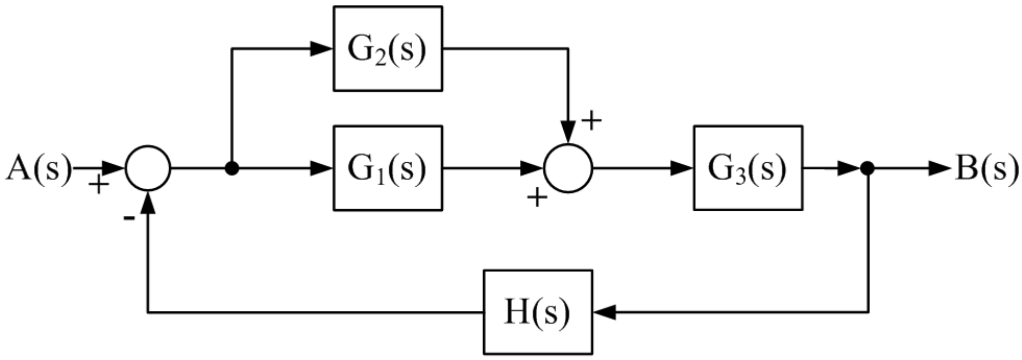
Slika 16. Ekvivalentan električni sustav

2. Strukturni prikaz sustava automatike (algebra blokova)

2.1. Riješeni primjeri blok dijagrama sustava s jednim ulazom

Primjer 1:

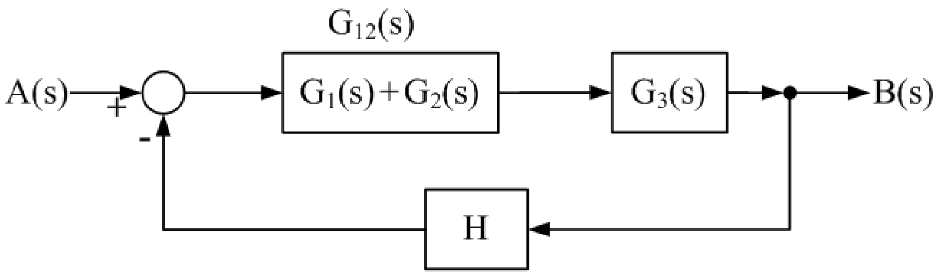
U blok shemi zadanoj na slici 17. naći prijenosni omjer izlaznog i ulaznog signala B/A



Slika 17. Blok dijagram zadanog sustava

Rješenje:

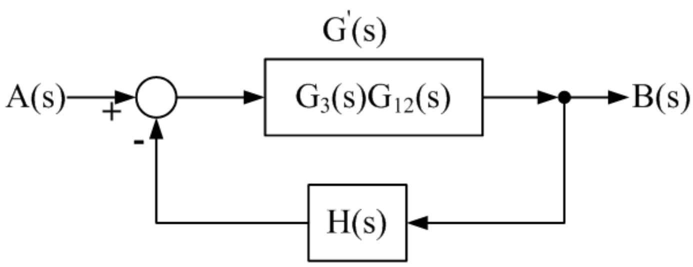
Blokovi $G_1(s)$ i $G_2(s)$ su u paralelnoj vezi, pa se primjenom transformacijskog pravila zadana blok shema može pojednostavniti. Prikaz pojednostavljenog blok dijagrama nakon prvog koraka prikazan je na slici 18.



Slika 18. Pojednostavljeni blok dijagram zadanog sustava nakon prvog koraka

Novi blok $G_1(s)$+$G_2(s)$ može se označiti oznakom$G_{12}(s)$.

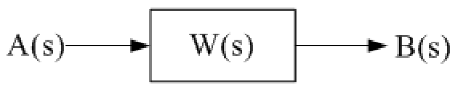
Slijedeći korak u postupku sažimanja blok dijagrama je sređivanje izravne grane. Blokovi $G_{12}(s)$ i $G_3(s)$ su očito serijski vezani, pa se primjenom odgovarajućeg pravila dobije još sažetiji oblik blok dijagrama zadanog sustava, prikazan na slici 19.



Slika 19. Pojednostavljeni blok dijagram zadanog sustava nakon drugog koraka

Novi blok se može označiti sa G'(s).

Shema se svodi na dva bloka koji su u spoju povratne veze, pa ako se primjeni pravilo za povratnu vezu, dobije se jedan blok s jednim ulazom i jednim izlazom koji predstavlja zadani sustav i prikazan je na slici 20.



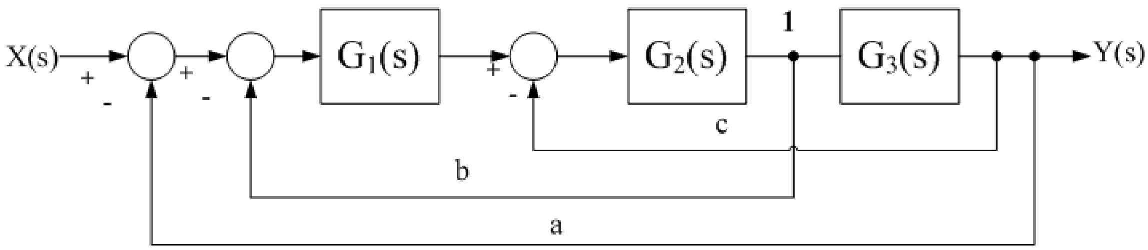
Slika 20. Zadani sustav u sažetom obliku prikazan jednim blokom

Prijenosna funkcija zadanog sustava je:

$$W(s)=\frac{B(s)}{A(s)}=\frac{G^{'}(s)}{1+G^{'}(s)\cdot H(s)}=\frac{G_3(s)\cdot\left[G_1(s)+G_2(s)\right]}{1+H(s)\cdot G_3(s)\cdot\left[G_1(s)+G_2(s)\right]}$$

Primjer 2:

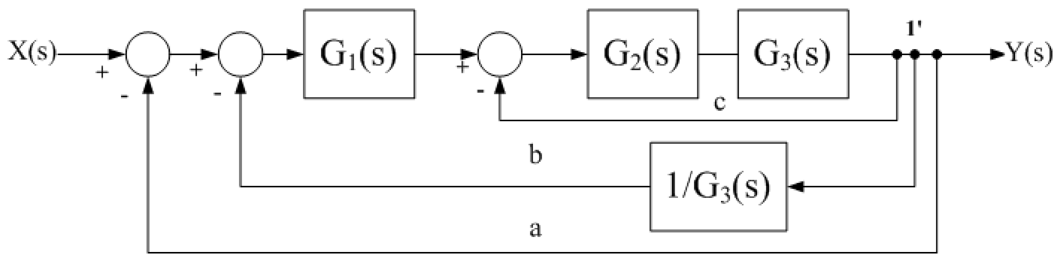
Naći prijenosnu funkciju sustava prikazanog blok dijagramom na slici 21.



Slika 21. Blok dijagram zadanog sustava

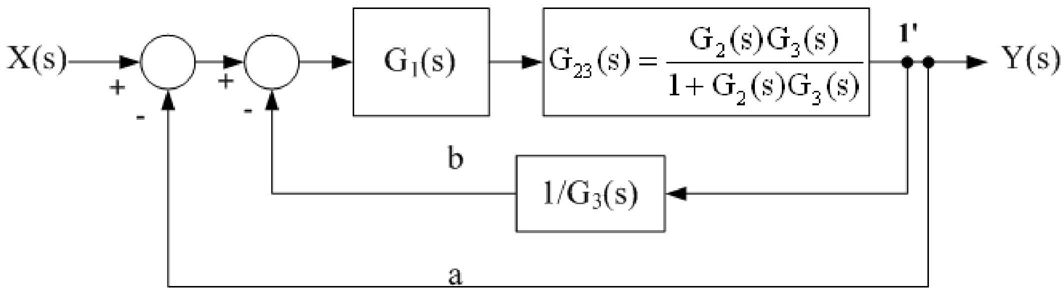
Rješenje:

Prvi korak u rješavanju zadatka je srediti povratne grane, tako da se ne sijeku (unutar jedne veze može biti ugnježđena druga povratna veza, ali da bi se moglo odrediti prijenosnu funkciju, povratne grane se ne smiju isprepletati). Ovaj problem rješava se prebacivanjem čvora 1 preko bloka $G_3(s)$, sukladno pravilu o prebacivanju točke grananja preko bloka u smjeru toka signala, a rezultat ove operacije prikazan je na slici 22.



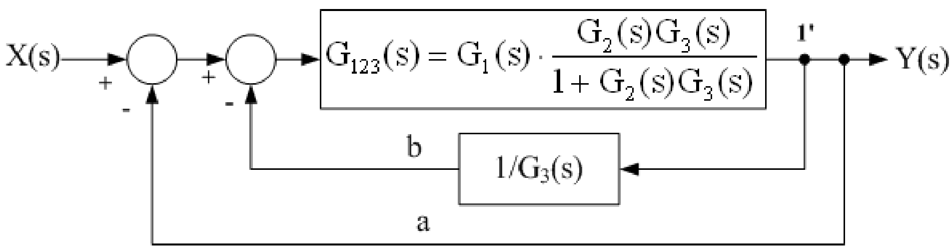
Slika 22. Blok dijagram zadanog sustava nakon prebacivanja točke 1

Sustav se očito sastoji od tri ugnježđene petlje s negativnom povratnom vezom (a, b i c). Vanjski regulacijski krug (petlja a) rješava se zadnja. Prva se rješava unutarnja petlja c po pravilu za negativnu povratnu vezu, nakon čega se dobije blok dijagram prikazan na slici 23.



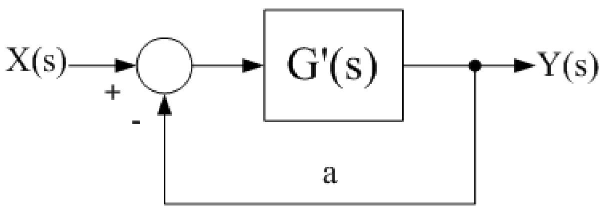
Slika 23. Blok dijagram zadanog sustava
nakon primjene pravila za negativnu povratnu vezu na petlju c

Slijedi rješavanje serijske veze blokova $G_1(s)$ i $G_{23}(s)$. Dobije se jedan blok prijenosne funkcije $G_{123}(s)$ kao što je prikazano na slici 24.



Slika 24. Blok dijagram zadanog sustava
nakon primjene pravila sažimanja za serijski vezane blokove u izravnoj grani

Slijedi rješavanje petlje b, po pravilu za negativnu povratnu vezu, čime se dobije blok $G'(s)$ u izravnoj grani, a sustav se sažme na jedan jednostavan regulacijski krug s jediničnom negativnom povratnom vezom, kao što je prikazano na slici 25.



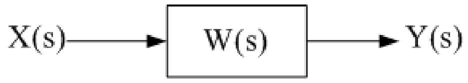
gdje je:

Slika 25. Blok dijagram zadanog sustava nakon primjene pravila za negativnu povratnu vezu na petlju b

$$G^{'}(s)=\frac{\dfrac{G_1(s)G_2(s)G_3(s)}{1+G_2(s)G_3(s)}}{1+\dfrac{1}{G_3(s)}\cdot\dfrac{G_1(s)G_2(s)G_3(s)}{1+G_2(s)G_3(s)}}=$$

$$=\frac{G_1(s)G_2(s)G_3(s)}{1+G_2(s)G_3(s)+G_1(s)G_2(s)}$$

Nakon što se riješi i petlja a (regulacijska petlja s jediničnom negativnom povratnom vezom), dobije se jedan blok koji predstavlja zadani sustav, a prikazan je na slici 26.



Slika 26. Zadani sustav u sažetom obliku prikazan jednim blokom

Prijenosna funkcija zadanog sustava:

$$W(s)=\frac{G'(s)}{1+G'(s)}=\frac{\dfrac{G_1(s)G_2(s)G_3(s)}{1+G_2(s)G_3(s)+G_1(s)G_2(s)}}{1+\dfrac{G_1(s)G_2(s)G_3(s)}{1+G_2(s)G_3(s)+G_1(s)G_2(s)}}=$$

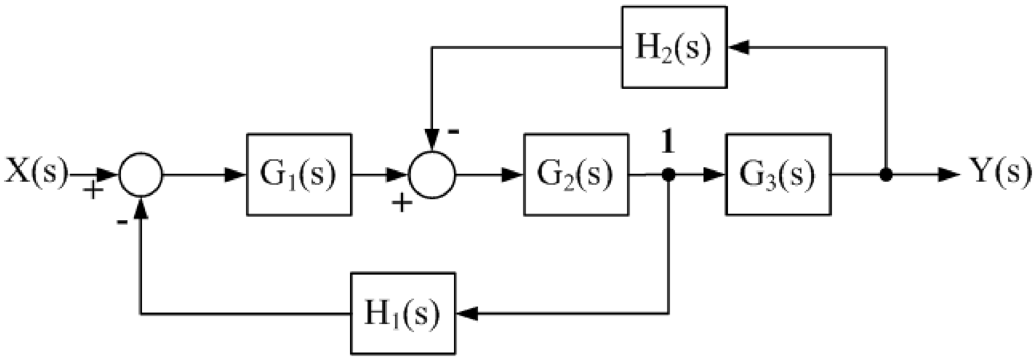
$$=\frac{G_1(s)G_2(s)G_3(s)}{1+G_2(s)G_3(s)+G_1(s)G_2(s)+G_1(s)G_2(s)G_3(s)}$$

Komentar zadatka:

U brojniku izraza za prijenosnu funkciju uvijek dolazi umnožak svih prijenosnih funkcija blokova koji se nalaze u izravnoj grani. U nazivniku dolazi jedinica i zbroj ili razlika umnožaka svih prijenosnih funkcija pojedinačnih petlji povratnih veza, ovisno o tome je li povratna veza pozitivna ili negativna.

Primjer 3:

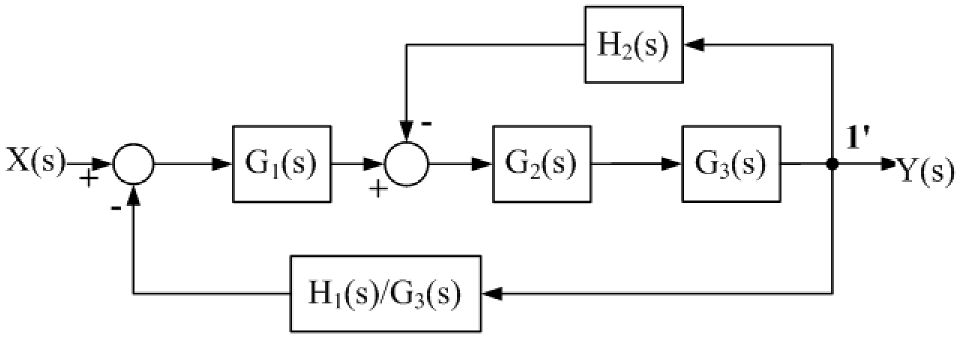
Odrediti prijenosnu funkciju sustava čija je strukturna blok shema prikazana na slici 27.



Slika 27. Blok dijagram zadanog sustava

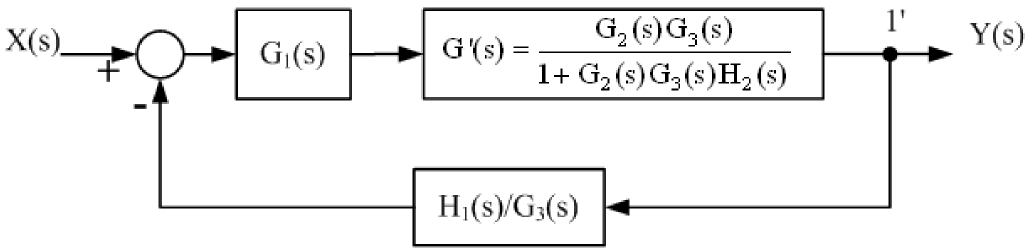
Rješenje:

Prvi korak je izmještanje točke grananja 1 preko bloka $G_3(s)$, zbog čega je prijenosnu funkciju povratne grane $H_1(s)$ potrebno podijeliti s $G_3(s)$. Rezultat ove operacije prikazan je na slici 28.



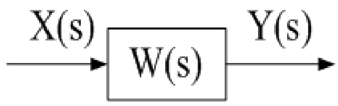
Slika 28. Pojednostavljeni blok dijagram zadanog sustava nakon prvog koraka

Sustav se očito sastoji od dvije petlje. Prvo se rješava petlja koja sadrži elemente $G_2(s)$ i $G_3(s)$ u izravnoj, te H_2 u povratnoj grani. I to tako da se na blokove $G_2(s)$ i $G_3(s)$ primjeni pravilo za serijsku vezu ($G_{23}(s) = G_2(s)G_3(s)$), a nakon toga i pravilo za povratnu vezu blokova $G_{23}(s)$ i $H_2(s)$, dobije se jednostavniji dijagram prikazan na slici 29.



Slika 29. Pojednostavljeni blok dijagram zadanog sustava nakon drugog koraka

Rezultat ovih operacija je regulacijska petlja s negativnom povratnom vezom koja se sastoji od tri bloka, dva serijski vezana u izravnoj grani $G_1(s)$ i $G'(s)$ i jedan blok u povratnoj grani $H_1(s)/G_3(s)$. Dakle, primjenom pravila za serijsku i povratnu vezu dobije se blok s jednim ulazom i izlazom koji predstavlja zadani sustav, prikazan na slici 30.



Slika 30. Zadani sustav u sažetom obliku prikazan jednim blokom

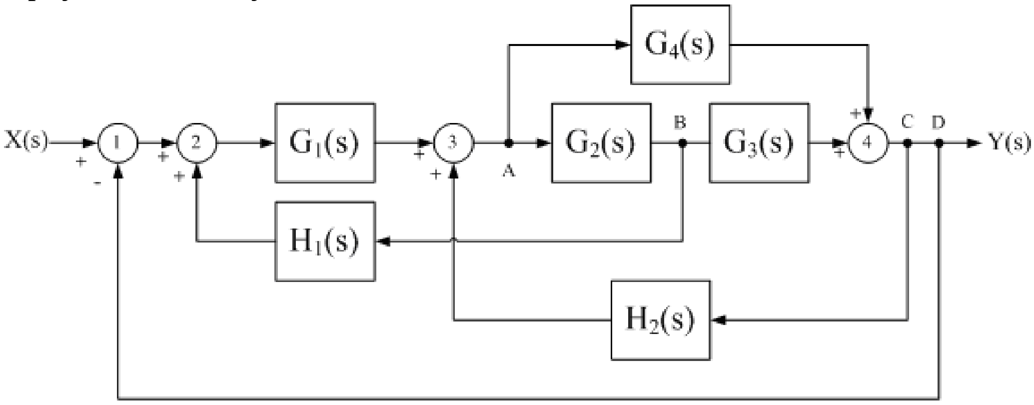
Prijenosna funkcija zadanog sustava:

$$W(s)=\frac{G_1(s)\cdot G'(s)}{1+G_1(s)\cdot G'(s)\cdot\dfrac{H_1(s)}{G_3(s)}}=\frac{\dfrac{G_1(s)G_2(s)G_3(s)}{1+G_2(s)G_3(s)H_2(s)}}{1+\dfrac{G_1(s)G_2(s)G_3(s)}{1+G_2(s)G_3(s)H_2(s)}\cdot\dfrac{H_1(s)}{G_3(s)}}=$$

$$=\frac{G_1(s)G_2(s)G_3(s)}{1+G_2(s)G_3(s)H_2(s)+G_1(s)G_2(s)H_1(s)}$$

Primjer 4:

Odrediti prijenosnu funkciju sustava sa slike 31.



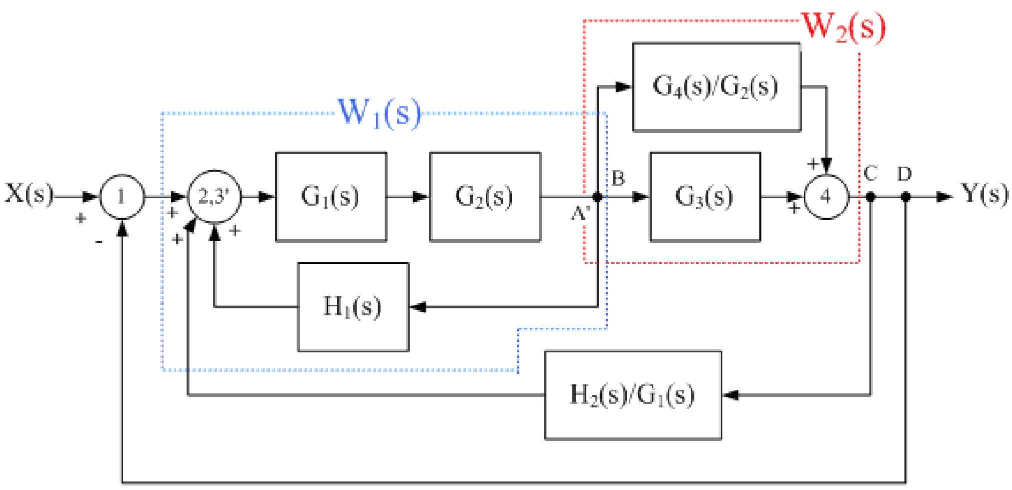
Slika 31. Blok dijagram zadanog sustava

Rješenje:

Prvi korak:

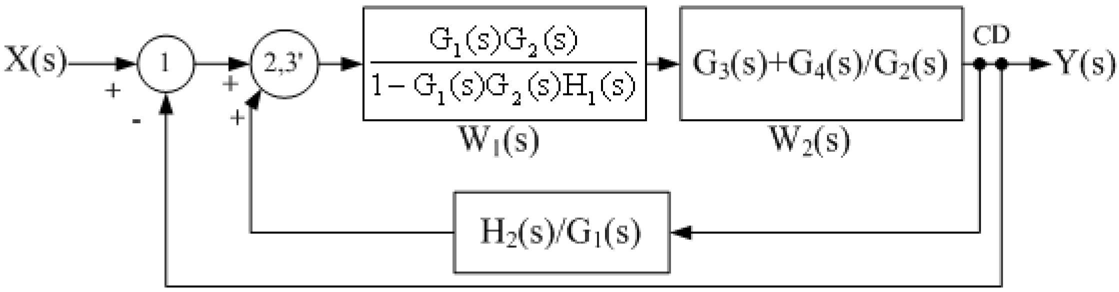
- izmjestiti točku zbrajanja 3 ispred bloka $G_1(s)$,
- izmjestiti točku grananja A iza bloka $G_2(s)$.

Dobije se blok dijagram prikazan na slici 32.

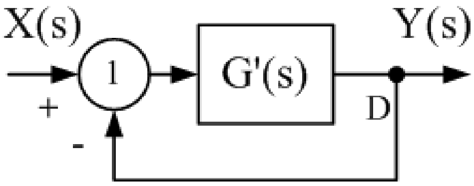


Slika 32. Pojednostavljeni blok dijagram zadanog sustava nakon prvog koraka

Ovim radnjama dobiju se dvije petlje u glavnoj grani, prijenosnih funkcija $W_1(s)$ i $W_2(s)$. Prijenosna funkcija $W_1(s)$ se riješi primjenom pravila za serijsku vezu [blokovi $G_1(s)$ i $G_2(s)$] i pozitivnu povratnu vezu [blokovi $G_{12}(s)$ i $H_1(s)$]. $W_2(s)$ se dobije primjenom pravila paralelno vezanih blokova $G_3(s)$ i $G_4(s)/G_2(s)$, a rezultat ovih operacija je blok dijagram prikazan na slici 33. Blokovi izravne grane $W_1(s)$ i $W_3(s)$ su u serijskoj vezi, a zajedno s blokom $H_2(s)/G_1(s)$ tvore zatvoreni regulacijski krug s pozitivnom povratnom vezom. Primjenom odgovarajućih pravila dobije se blok dijagram sustava koji se sastoji od jednog bloka u izravnoj grani, zatvorenog u jediničnu negativnu povratnu vezu, prikazan na slici 34.



Slika 33. Pojednostavljeni blok dijagram zadanog sustava nakon drugog koraka



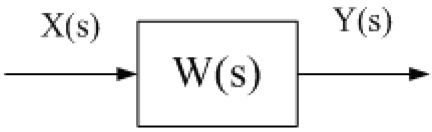
Slika 34. Pojednostavljeni blok dijagram zadanog sustava nakon trećeg koraka

$$G' = \frac{W_1(s)\cdot W_2(s)}{1-W_1(s)\cdot W_2(s)\cdot \dfrac{H_2(s)}{G_1(s)}} =$$

$$= \frac{\dfrac{G_1(s)G_2(s)\left[G_3(s)+G_4(s)/G_2(s)\right]}{1-G_1(s)G_2(s)H_1(s)}}{1-\dfrac{G_1(s)G_2(s)\left[G_3(s)+G_4(s)/G_2(s)\right]}{1-G_1(s)G_2(s)H_1(s)}\cdot\dfrac{H_2(s)}{G_1(s)}} =$$

$$= \frac{G_1(s)G_2(s)G_3(s)+G_1(s)G_4(s)}{1-G_1(s)G_2(s)H_1(s)-H_2(s)G_2(s)G_3(s)-H_2(s)G_4(s)}$$

Blok G'(s) zatvoren je u regulacijsku petlju jediničnom negativnom povratnom vezom, pa ako se primjeni odgovarajuće pravilo dobije se jedan blok s jednim ulazom i jednim izlazom koji predstavlja zadani sustav. Slikom 35. prikazan je konačni rezultat postupka sažimanja.



Slika 35. Zadani sustav u sažetom obliku prikazan jednim blokom

Ukupna prijenosna funkcija sustava je:

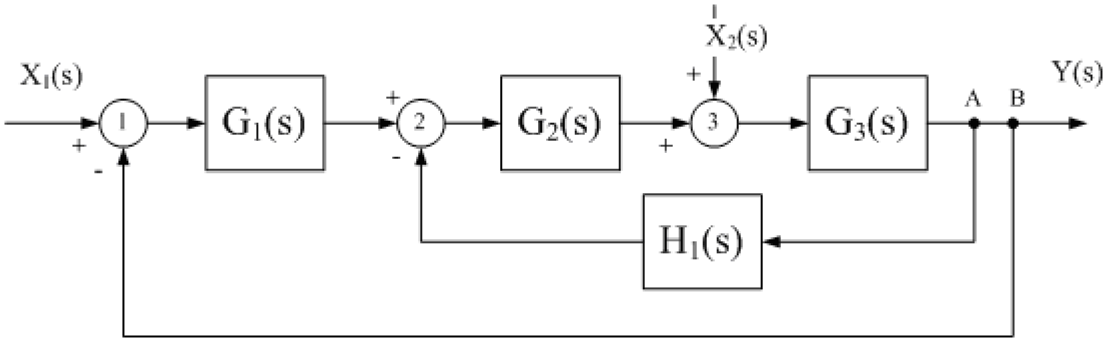
$$W(s)=\frac{G'(s)}{1+G'(s)}=\frac{\dfrac{G_1(s)G_2(s)G_3(s)+G_1(s)G_4(s)}{1-G_1(s)G_2(s)H_1(s)-H_2(s)G_2(s)G_3(s)-H_2(s)G_4(s)}}{1+\dfrac{G_1(s)G_2(s)G_3(s)+G_1(s)G_4(s)}{1-G_1(s)G_2(s)H_1(s)-H_2(s)G_2(s)G_3(s)-H_2(s)G_4(s)}}=$$

$$=\frac{G_1(s)G_2(s)G_3(s)+G_1(s)G_4(s)}{1-G_1(s)G_2(s)H_1(s)-H_2(s)G_2(s)G_3(s)-H_2(s)G_4(s)+G_1(s)G_2(s)G_3(s)+G_1(s)G_4(s)}$$

2.2. Riješeni primjeri sustava s više ulaza

Primjer 1:

Odrediti prijenosnu funkciju sustav prikazanog blok shemom na slici 36.

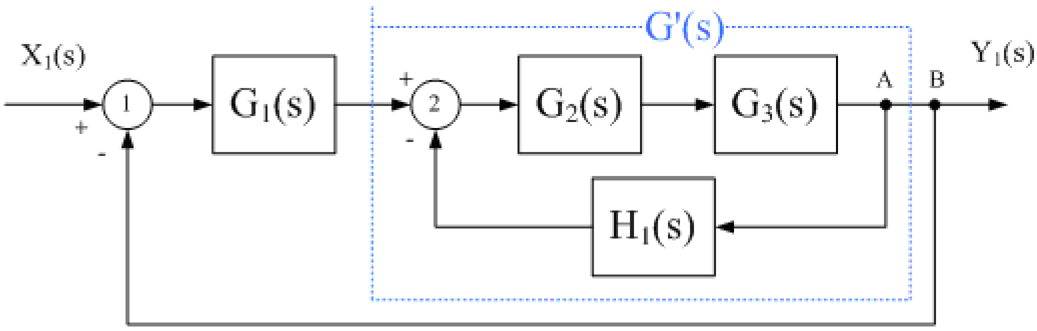


Slika 36. Blok dijagram zadanog sustava

Rješenje:

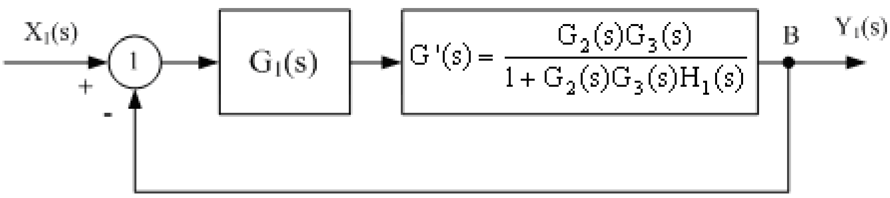
a) za $X_2(s) = 0 \quad \Rightarrow \quad W_1(s) = \dfrac{Y_1(s)}{X_1(s)} = ?$

Komponente $G_2(s)$, $G_3(s)$ i $H_1(s)$ čine regulacijsku petlju s negativnom povratnom vezom koju je moguće predstaviti jednim blokom G'(s) , kao što je to prikazano na slici 37.



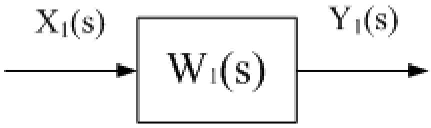
Slika 37. Blok dijagram zadanog sustava za slučaj $X_2(s) = 0$

Primjenom odgovarajućih pravila dobije se blok shema prikazana na slici 38.



Slika 38. Pojednostavljeni blok dijagram zadanog sustava za slučaj $X_2(s) = 0$

Ostaju dva bloka u serijskoj vezi, zatvorena u regulacijsku petlju preko jedinične negativne povratne veze, koji se primjenom odgovarajućih pravila mogu sažeti na jedan blok s jednim ulazom i jednim izlazom, prikazan na slici 39.



Slika 39. Sažeti blok dijagram zadanog sustava za slučaj $X_2(s) = 0$

Prijenosna funkcija u slučaju kada je ulaz $X_2(s) = 0$ je:

$$W_1(s) = \frac{Y_1(s)}{X_1(s)} = \frac{G_1(s)\cdot G'(s)}{1+G_1(s)\cdot G'(s)} = \frac{\dfrac{G_1(s)G_2(s)G_3(s)}{1+G_2(s)G_3(s)H_1(s)}}{1+\dfrac{G_1(s)G_2(s)G_3(s)}{1+G_2(s)G_3(s)H_1(s)}} =$$

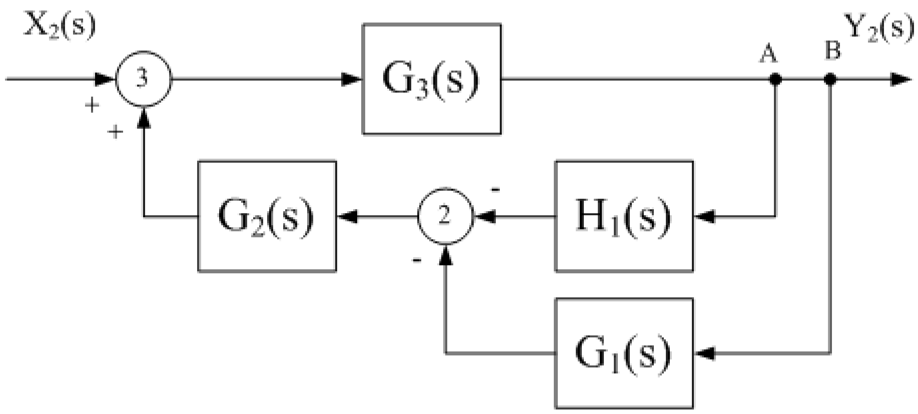
$$= \frac{G_1(s)G_2(s)G_3(s)}{1+G_2(s)G_3(s)H_1(s)+G_1(s)G_2(s)G_3(s)}$$

Izlazna funkcija je u tom slučaju određena je sljedećim izrazom:

$$Y_1(s) = \frac{G_1(s)G_2(s)G_3(s)}{1+G_2(s)G_3(s)H_1(s)+G_1(s)G_2(s)G_3(s)} X_1(s)$$

b) za $X_1(s) = 0 \quad \Rightarrow \quad W_2(s) = \dfrac{Y_2(s)}{X_2(s)} = ?$

U ovom slučaju blok dijagram se nacrta tako da se prati tok signala sa od ulaza do izlaza i njegov povrat natrag na ulaz, uz napomenu da je sad ulazni signal $X_2(s)$, a prikazan je na slici 40.

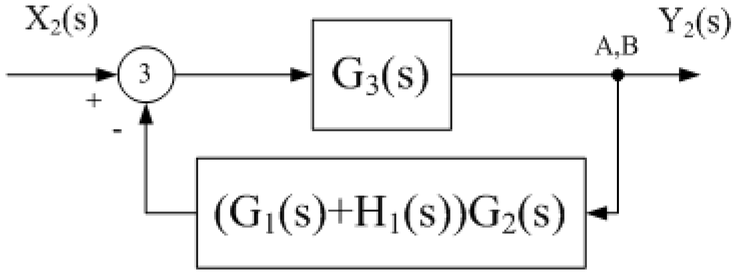


Slika 40. Blok dijagram zadanog sustava za slučaj $X_1(s) = 0$

Ako se promatra tok signala od ulaza ka izlazu očito je da signal na putu do izlaza prolazi samo kroz blok $G_3(s)$, dakle u izravnoj grani je samo blok $G_3(s)$, dok ostali blokovi sudjeluju u formiranju povratnih grana.

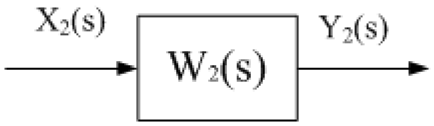
Prva povratna grana počinje u točki grananja A blokom H_1, a druga u točki grananja B

blokom $G_1(s)$, nakon čega se ove dvije grane spajaju u jednu koja se nastavlja djelovanjem bloka $G_2(s)$. Izlaz bloka $G_2(s)$ predstavlja povratni signal pozitivne povratne veze.
Međutim, kako je suma signala na izlazu iz točke zbrajanja 2 zapravo signal s negativnim predznakom, tako će i signal povratne veze također biti negativnog predznaka što je isto kao da se radi o pozitivnom signalu, a negativnoj povratnoj vezi.
Inače, blokovi $H_1(s)$ i $G_1(s)$ su u paralelnoj vezi, a na njih je serijski vezan blok $G_2(s)$. Ova tri bloka zajedno čine povratnu granu i ostvaruju negativnu povratnu vezu (ako se uzme da je signal pozitivnog predznaka). Nakon provedenih operacija dobije se blok shema prikazana na slici 41.



Slika 41. Pojednostavljeni blok dijagram zadanog sustava za slučaj $X_1(s) = 0$

U slučaju kada je signal $X_1(s) = 0$ sustav se može sažeti na jedan blok s jednim ulazom i jednim izlazom, kao što je prikazano na slici 42.



Slika 42. Sažeti blok dijagram zadanog sustava za slučaj $X_1(s) = 0$

Prijenosna funkcija u slučaju kada je ulaz $X_1(s) = 0$ je:

$$W_2(s) = \frac{Y_2(s)}{X_2(s)} = \frac{G_3(s)}{1 + G_3(s)G_2(s)\left(G_1(s) + H_1(s)\right)}$$

Izlazna funkcija je u tom slučaju određena izrazom:

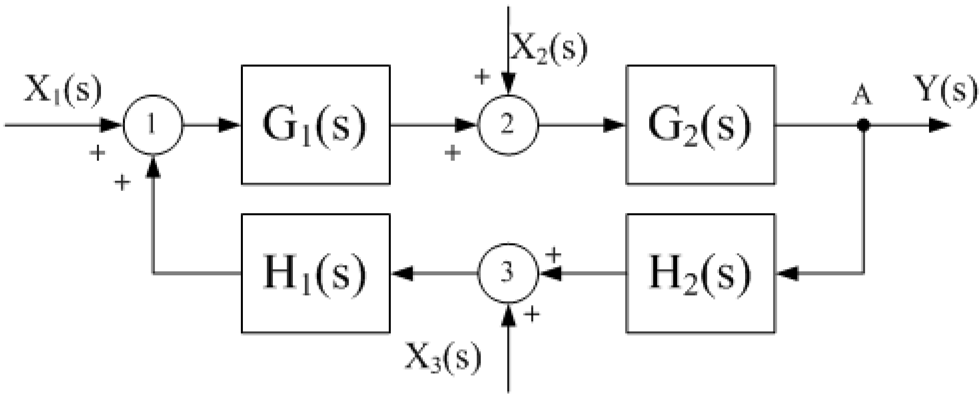
$$Y_2(s) = \frac{G_3(s)}{1 + G_3(s)G_2(s)\left(G_1(s) + H_1(s)\right)} \cdot X_2(s)$$

Konačno, izlaz $Y(s)$ kao funkcija oba ulaza dobije se superpozicijom, odnosno zbrajanjem izraza:

$$Y(s) = \frac{G_1(s)G_2(s)G_3(s)}{1 + G_2(s)G_3(s)H_1(s) + G_1(s)G_2(s)G_3(s)} \cdot X_1(s) + \frac{G_3(s)}{1 + G_3(s)G_2(s)\left(G_1(s) + H_1(s)\right)} \cdot X_2(s)$$

Primjer 2:

Odrediti izlaznu funkciju $Y(s)$ složenog sustava sa tri ulaza, prikazanog na slici 43.

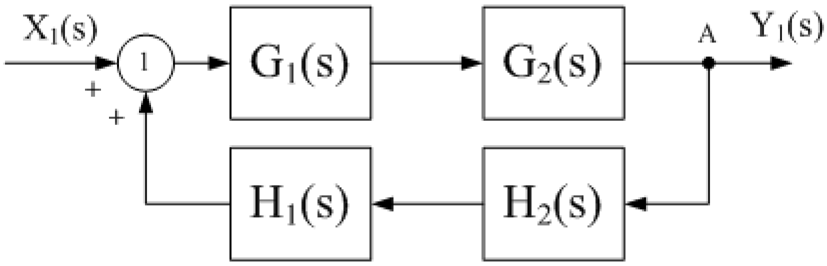


Slika 43. Blok dijagram zadanog sustava

Rješenje :

1.) za $X_2(s) = X_3(s) = 0 \quad \Rightarrow \quad W_1(s) = \dfrac{Y_1(s)}{X_1(s)} \quad \Rightarrow \quad Y_1(s) = W_1(s) \cdot X_1(s)$

Prijenosna funkcija, a potom i izlaz sustava u slučaju kad su sve vrijednosti na ulazu osim ulaza $X_1(s)$ jednake nuli, dobije se računanjem prijenosne funkcije sustava prikazanog blok dijagramom na slici 44.



Slika 44. Blok dijagram zadanog sustava
za slučaj $X_2(s) = X_3(s) = 0$

Prijenosna funkcija sustava za slučaj $X_2(s) = X_3(s) = 0$ je:

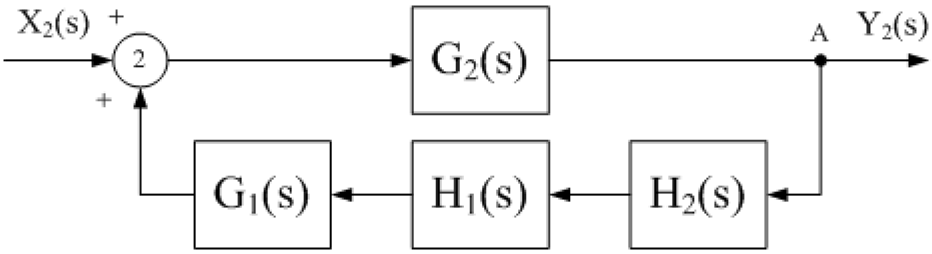
$$W_1(s) = \frac{G_1(s)G_2(s)}{1 - G_1(s)G_2(s)H_1(s)H_2(s)}$$

Izlazna funkcija sustava u slučaju $X_2(s) = X_3(s) = 0$ određena je izrazom (3.10)

$$Y_1(s) = \frac{G_1(s)G_2(s)}{1 - G_1(s)G_2(s)H_1(s)H_2(s)} \cdot X_1(s)$$

2.) za $X_1(s) = X_3(s) = 0 \quad \Rightarrow \quad W_2(s) = \dfrac{Y_2(s)}{X_2(s)} \quad \Rightarrow \quad Y_2(s) = W_2(s) \cdot X_2(s)$

Prijenosna funkcija, a potom i izlaz sustava u slučaju kad su sve vrijednosti na ulazu osim ulaza $X_2(s)$ jednake nuli, dobije se računanjem prijenosne funkcije sustava prikazanog blok dijagramom na slici 45.



Slika 45. Blok dijagram zadanog sustava
za slučaj $X_1(s) = X_3(s) = 0$

Prijenosna funkcija sustava za slučaj $X_1(s) = X_3(s) = 0$ je:

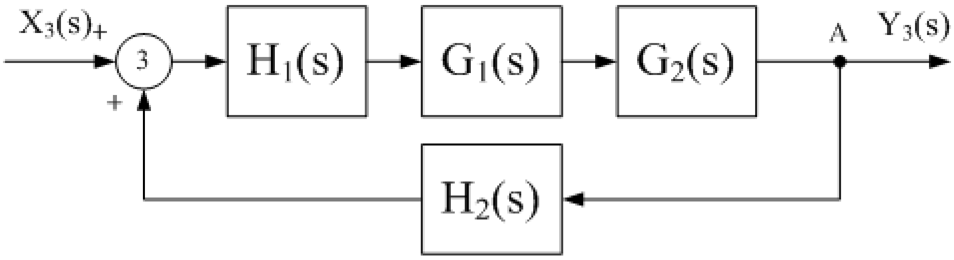
$$W_2(s) = \frac{G_2(s)}{1 - G_1(s)G_2(s)H_1(s)H_2(s)}$$

Izlazna funkcija sustava u slučaju $X_1(s) = X_3(s) = 0$ određena je izrazom

$$Y_2(s) = \frac{G_2(s)}{1 - G_1(s)G_2(s)H_1(s)H_2(s)} \cdot X_2(s)$$

3.) za $X_1(s) = X_2(s) = 0 \quad \Rightarrow \quad W_3(s) = \frac{Y_3(s)}{X_3(s)} \quad \Rightarrow \quad Y_3(s) = W_3(s) \cdot X_3(s)$

Prijenosna funkcija, a potom i izlaz sustava u slučaju kad su sve vrijednosti na ulazu osim ulaza $X_3(s)$ jednake nuli, dobije se računanjem prijenosne funkcije sustava prikazanog blok dijagramom na slici 46.



Slika 46. Blok dijagram zadanog sustava
za slučaj $X_1(s) = X_2(s) = 0$

Prijenosna funkcija sustava za slučaj $X_1(s) = X_2(s) = 0$ je:

$$W_3(s) = \frac{G_1(s)G_2(s)H_1(s)}{1 - G_1(s)G_2(s)H_1(s)H_2(s)}$$

Izlazna funkcija sustava u slučaju $X_1(s) = X_2(s) = 0$ određena je izrazom

$$Y_3(s) = \frac{G_1(s)G_2(s)H_1(s)}{1 - G_1(s)G_2(s)H_1(s)H_2(s)} \cdot X_3(s)$$

Ukupan izlazni signal dobije se superpozicijom, tj. zbrajanjem izraza:

$$Y(s) = Y_1(s) + Y_2(s) + Y_3(s) =$$

$$= \frac{G_1(s)G_2(s)}{1 - G_1(s)G_2(s)H_1(s)H_2(s)} X_1(s) + \frac{G_2(s)}{1 - G_1(s)G_2(s)H_1(s)H_2(s)} X_2(s)$$

$$+ \frac{G_1(s)G_2(s)H_1(s)}{1 - G_1(s)G_2(s)H_1(s)H_2(s)} X_3(s)$$

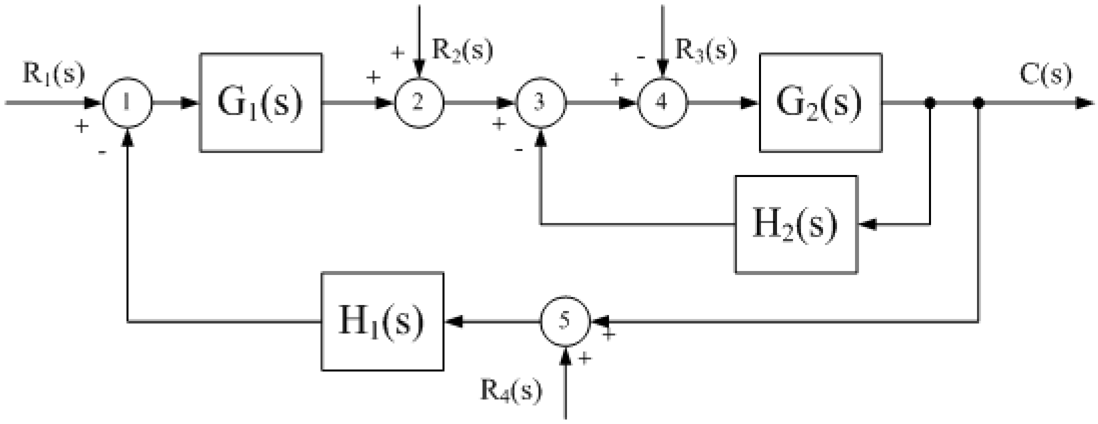
$$Y(s) = \frac{G_1(s)G_2(s) \cdot X_1(s) + G_2(s) \cdot X_2(s) + G_1(s)G_2(s)H_1(s) \cdot X_3(s)}{1 - G_1(s)G_2(s)H_1(s)H_2(s)}$$

Napomena!

Kod sustava s više ulaza sve pojedine prijenosne funkcije imaju jednake nazivnike, što može biti svojevrsna kontrola ispravnosti rješavanja.

Primjer 3:

Odrediti izlaz sustava (C) prikazanog blok shemom na slici 47.



Slika 47. Blok dijagram zadanog sustava

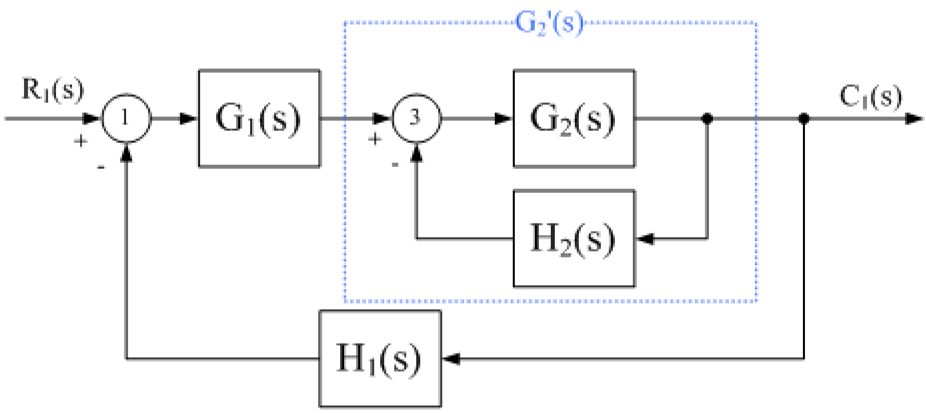
Rješenje:

Izlazni signal C(s) dobije se superpozicijom, dakle zbrajanjem vrijednosti izlaznih signala dobivenih pod utjecajem pojedinih ulaznih signala:

$$C(s) = C_1(s) + C_2(s) + C_3(s) + C_4(s)$$

1.) $R_2(s) = R_3(s) = R_4(s) = 0$

Prijenosna funkcija, a potom i izlaz sustava u slučaju kad su sve vrijednosti na ulazu osim ulaza $R_1(s)$ jednake nuli, dobije se računanjem prijenosne funkcije sustava prikazanog blok dijagramom na slici 48.



Slika 48. Blok dijagram zadanog sustava za slučaj $R_2(s) = R_3(s) = R_4(s) = 0$

Prijenosna funkcija je u tom slučaju jednaka:

$$W_1(s)=\frac{C_1(s)}{R_1(s)}=\frac{G_1(s)\cdot G_2'(s)}{1+G_1(s)\cdot G_2'(s)\cdot H_1(s)}=\frac{G_1(s)\cdot\dfrac{G_2(s)}{1+G_2(s)H_2(s)}}{1+G_1(s)\cdot\dfrac{G_2(s)}{1+G_2(s)H_2(s)}\cdot H_1(s)}=$$

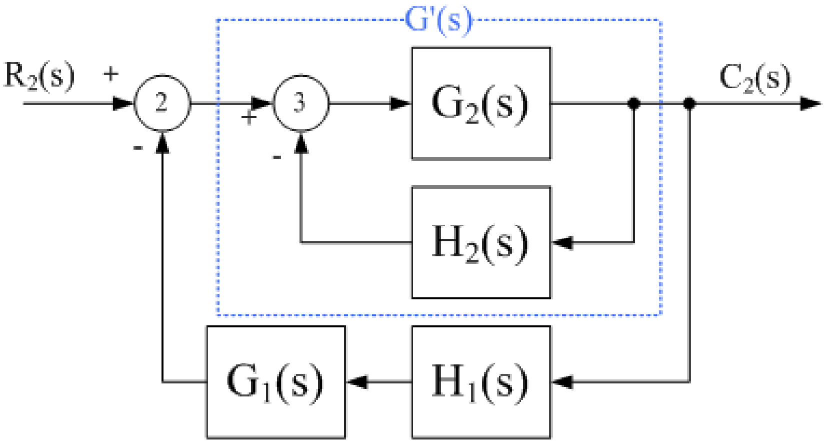
$$=\frac{G_1(s)G_2(s)}{1+G_2(s)H_2(s)+G_1(s)G_2(s)H_1(s)}$$

Izlazni signal određen je izrazom (3.13).

$$C_1(s)=\frac{G_1(s)G_2(s)}{1+G_2(s)H_2(s)+G_1(s)G_2(s)H_1(s)}\cdot R_1(s)$$

2.) $R_1(s)=R_3(s)=R_4(s)=0$

Prijenosna funkcija, a potom i izlaz sustava u slučaju kad su sve vrijednosti na ulazu osim ulaza $R_2(s)$ jednake nuli, dobije se računanjem prijenosne funkcije sustava prikazanog blok dijagramom na slici 49.



Slika 49. Blok dijagram zadanog sustava za slučaj $R_1(s) = R_3(s) = R_4(s) = 0$

Prijenosna funkcija je u tom slučaju jednaka:

$$W_2(s)=\frac{C_2(s)}{R_2(s)}=\frac{G'(s)}{1+G'(s)G_1(s)H_1(s)}=\frac{\dfrac{G_2(s)}{1+G_2(s)H_2(s)}}{1+\dfrac{G_2(s)}{1+G_2(s)H_2(s)}\cdot G_1(s)H_1(s)}=$$

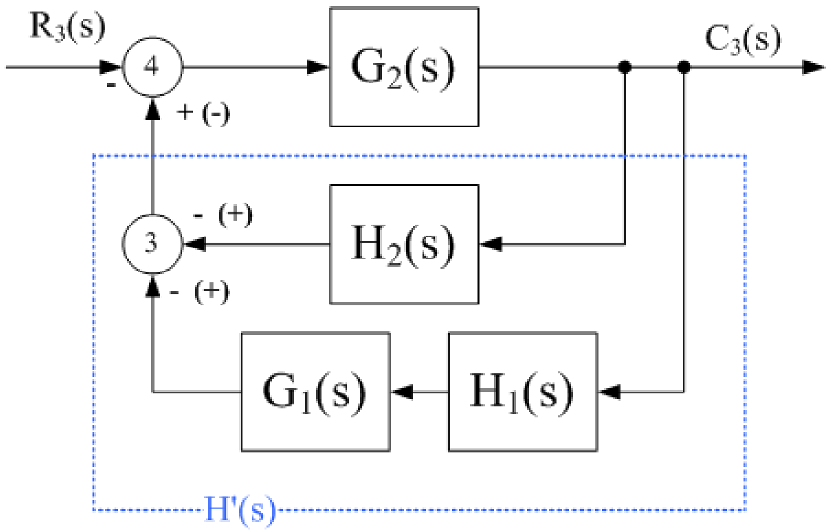
$$=\frac{G_2(s)}{1+G_2(s)H_2(s)+G_1(s)G_2(s)H_1(s)}$$

Izlazni signal određen je izrazom:

$$C_2(s)=\frac{G_2(s)}{1+G_2(s)H_2(s)+G_1(s)G_2(s)H_1(s)}\cdot R_2(s)$$

3.) $R_1(s)=R_2(s)=R_4(s)=0$

Prijenosna funkcija, a potom i izlaz sustava u slučaju kad su sve vrijednosti na ulazu osim ulaza $R_3(s)$ jednake nuli, dobije se računanjem prijenosne funkcije sustava prikazanog blok dijagramom na slici 50.



Slika 50. Blok dijagram zadanog sustava za slučaj $R_1(s) = R_2(s) = R_4(s) = 0$

Prijenosna funkcija je u tom slučaju jednaka:

$$W_3(s) = \frac{C_3(s)}{-R_3(s)} = \frac{G_2(s)}{1+G_2(s)H'(s)} = \frac{G_2(s)}{1+G_2(s)\cdot\left(H_2(s)+G_1(s)H_1(s)\right)} =$$

$$= \frac{G_2(s)}{1+G_2(s)H_2(s)+G_1(s)G_2(s)H_1(s)}$$

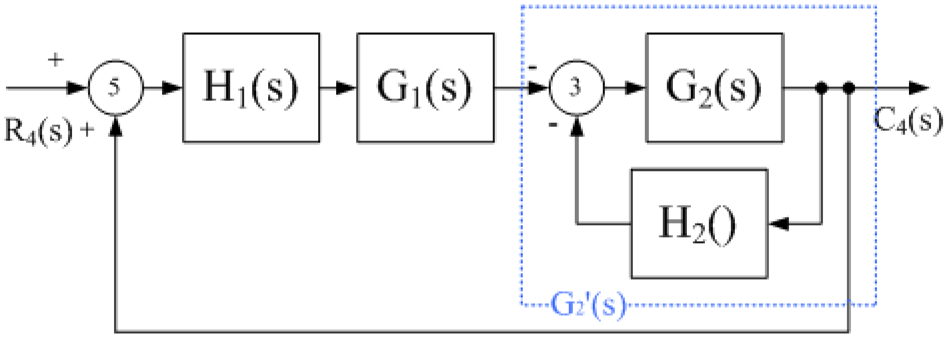
Izlazni signal određen je izrazom:

$$C_3(s) = -\frac{G_2(s)}{1+G_2(s)H_2(s)+G_1(s)G_2(s)H_1(s)}\cdot R_3(s)$$

Zbrajanje signala u točki 3 je u stvari oduzimanje signala koje se može tretirati kao zbrajanje negativnih signala, zbog čega će signal povratne veze biti negativan. Povratna veza je pozitivna, a signal povratne veze negativnog predznaka, što se može tretirati kao negativnu povratnu vezu, a signal povratne veze je u tom slučaju pozitivan. Drugim riječima, minus signala prebačen je u točku zbrajanja.

4.) $R_1(s) = R_2(s) = R_3(s) = 0$

Prijenosna funkcija, a potom i izlaz sustava u slučaju kad su sve vrijednosti na ulazu osim ulaza $R_4(s)$ jednake nuli, dobije se računanjem prijenosne funkcije sustava prikazanog blok dijagramom na slici 51.



Slika 51. Blok dijagram zadanog sustava za slučaj $R_1(s) = R_2(s) = R_3(s) = 0$

Prijenosna funkcija je u tom slučaju jednaka:

$$W_4(s) = \frac{C_4(s)}{R_4(s)} = \frac{\left(-H_1(s)G_1(s)\right)G_2'(s)}{1-\left(-H_1(s)G_1(s)\right)G_2'(s)} = -\frac{H_1(s)G_1(s)\cdot\dfrac{G_2(s)}{1+G_2(s)H_2(s)}}{1+H_1(s)G_1(s)\cdot\dfrac{G_2(s)}{1+G_2(s)H_2(s)}} =$$

$$= -\frac{H_1(s)G_1(s)G_2(s)}{1+G_2(s)H_2(s)+H_1(s)G_1(s)G_2(s)}$$

Izlazni signal određen je izrazom:

$$C_4(s) = -\frac{H_1(s)G_1(s)G_2(s)}{1+G_2(s)H_2(s)+H_1(s)G_1(s)G_2(s)}\cdot R_4(s)$$

Izlazni signal (odziv) sustava dobije se superpozicijom, dakle zbrajanjem izraza:

$$C(s) = C_1(s)+C_2(s)+C_3(s)+C_4(s) =$$

$$= \frac{G_1(s)G_2(s)}{1+G_2(s)H_2(s)+G_1(s)G_2(s)H_1(s)}\cdot R_1(s) + \frac{G_2(s)}{1+G_2(s)H_2(s)+G_1(s)G_2(s)H_1(s)}\cdot R_2(s) -$$

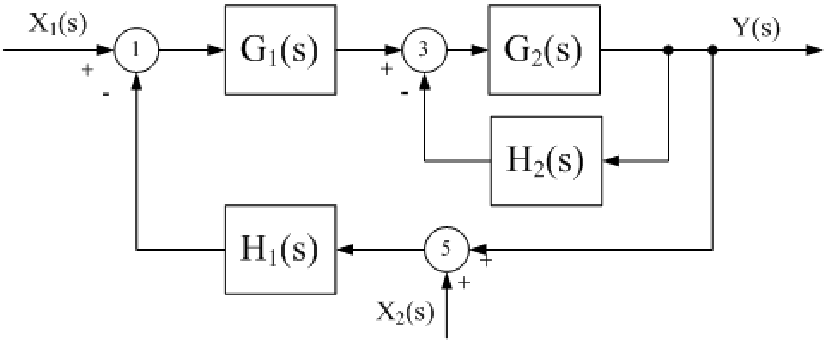
$$- \frac{G_2(s)}{1+G_2(s)H_2(s)+G_1(s)G_2(s)H_1(s)}\cdot R_3(s) - \frac{H_1(s)G_1(s)G_2(s)}{1+G_2(s)H_2(s)+H_1(s)G_1(s)G_2(s)}\cdot R_4(s) =$$

$$C(s) = \frac{G_1(s)G_2(s)\cdot R_1(s) + G_2(s)\cdot\left(R_2(s)-R_3(s)\right) - H_1(s)G_1(s)G_2(s)\cdot R_4(s)}{1+G_2(s)H_2(s)+G_1(s)G_2(s)H_1(s)}$$

2.3. Ispitni primjeri

Zadatak 1:

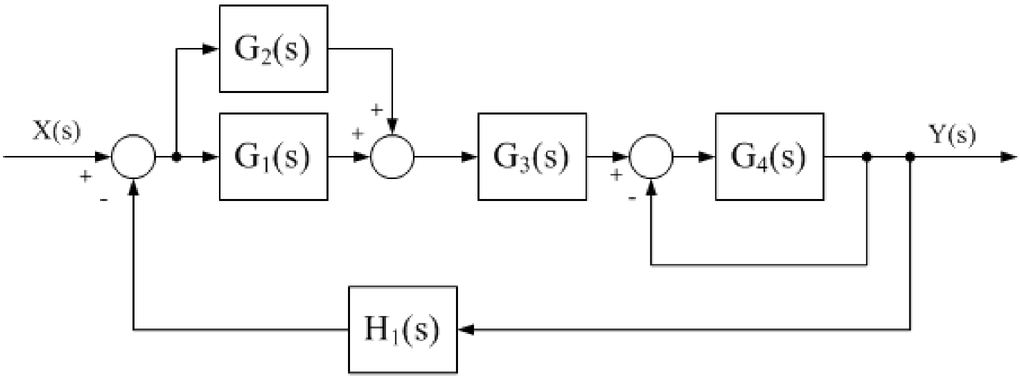
Za sustav na slici 52 odrediti ukupni odziv, Y(s).



Slika 52. Blok dijagram zadanog sustava

Zadatak 2:

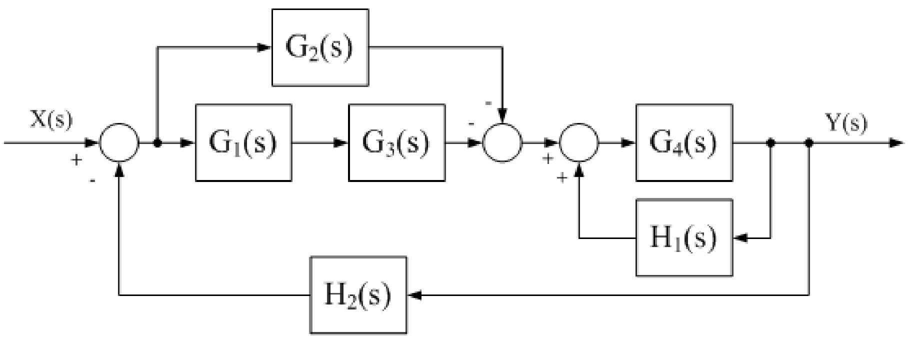
Odrediti prijenosnu funkciju sustava prikazanog blok shemom na slici 53.



Slika 53. Blok dijagram zadanog sustava

Zadatak 3:

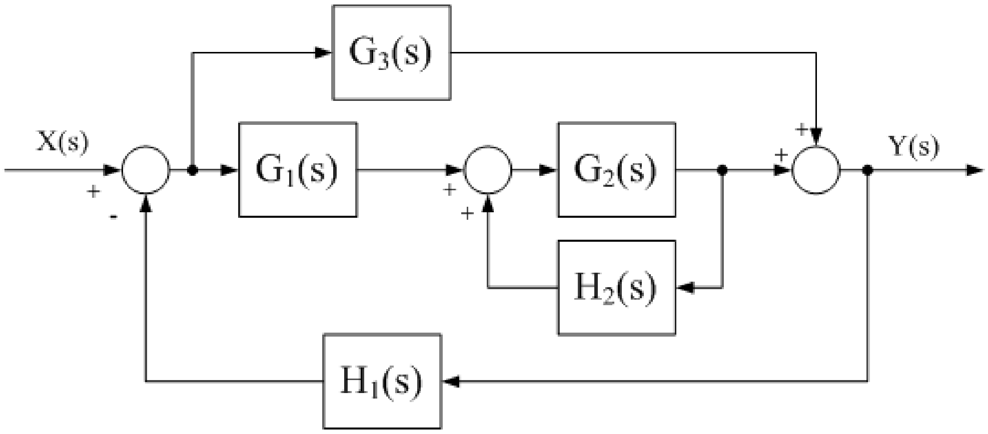
Odrediti prijenosnu funkciju sustava prikazanog blok shemom na slici 54.



Slika 54. Blok dijagram zadanog sustava

Zadatak 4:

Odrediti prijenosnu funkciju sustava prikazanog blok shemom na slici 55.



Slika 55. Blok dijagram zadanog sustava

3. Analiza sustava stabilnosti

3.1. Analitičko kriteriji stabilnosti

Primjer 1.

Pomoću Hurwitzovog kriterija odrediti je li stabilan sustav čija je karakteristična jednadžba:

$$s^3 + 8s^2 + 14s + 24 = 0$$

Rješenje:

$$a_3 = 1 \quad a_2 = 8 \quad a_1 = 14 \quad a_0 = 24 \quad \Rightarrow \quad H_{33} = \begin{vmatrix} a_2 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_1 & 0 \\ 0 & a_2 & a_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8 & 24 & 0 \\ 1 & 14 & 0 \\ 0 & 8 & 24 \end{vmatrix}$$

Glavna determinanta je određena uvrštavanjem koeficijenata karakteristične jednadžbe sustava u (4.2). Za n = 3, a na temelju izraza izračunaju se subdeterminante H_1, H_2 i H_3.

$$H_1 = 8$$

$$H_2 = \begin{vmatrix} 8 & 24 \\ 1 & 14 \end{vmatrix} = 8 \cdot 14 - 1 \cdot 24 = 112 - 24 = 88$$

$$H_3 = \begin{vmatrix} 8 & 24 & 0 \\ 1 & 14 & 0 \\ 0 & 8 & 24 \end{vmatrix} = 8 \cdot 14 \cdot 24 - 24 \cdot 24 = 2688 - 576 = 2112$$

Stabilnost sustava određuje se prema Hurwitzovom kriteriju stabilnosti, predstavljen nejednadžbama.

Koeficijenti karakteristične jednadžbe su veći od nule, pa je prvi uvjet zadovoljen. Računanjem subdeterminanti dobiju se vrijednosti veće od nule, pa je očito i drugi uvjet zadovoljen. Budući oba uvjeta udovoljavaju kriteriju stabilnosti, može se zaključiti da je **sustav apsolutno stabilan**.

Primjer 2

Pomoću Routhovog kriterija odrediti je li stabilan sustav čija je karakteristična jednadžba:

$$s^4 + 2s^3 + 3s^2 + 4s + 5 = 0$$

Rješenje :

Na temelju izraza, iz koeficijenata karakteristične jednadžbe izračunaju se članovi Routhova rasporeda:

$$
\begin{aligned}
&a_4 = 1 \\
&a_3 = 2 \\
&a_2 = 3 \\
&a_1 = 4 \\
&a_0 = 5
\end{aligned}
\quad \Rightarrow \quad
\begin{aligned}
&b_1 = \frac{a_3 \cdot a_2 - a_4 \cdot a_1}{a_3} = 1 \qquad b_2 = \frac{a_3 \cdot a_0 - a_4 \cdot 0}{a_3} = a_0 = 5 \\
&c_1 = \frac{b_1 \cdot a_1 - a_3 \cdot b_2}{b_1} = 1 \\
&d_1 = \frac{c_1 \cdot b_2 - b_1 \cdot c_2}{c_1} = 2
\end{aligned}
$$

Routhov raspored je:

R4	1	3	5
R3	2	4	0
R2	1	5	0
R1	-6	0	
R0	5		

Sustav je apsolutno nestabilan.
Predznak članova prvog stupca Routhovog rasporeda mijenja se dvaput (sa 1 na -6, te sa -6 na 5), što znači da sustav ima dva korijena s pozitivnim realnim dijelom, pa je očito sustav nestabilan.

Primjer 3:

Odrediti vrijednost pojačanja K za koji je sustav stabilan, ako je karakteristična jednadžba sustava:

$$s^2 + Ks + 2K - 1 = 0$$

Rješenje:

Glavna determinanta se odredi uvrštavanjem koeficijenata karakteristične jednadžbe sustava u izraz. Za n = 2, vrijedi:

$$
\begin{aligned}
&a_2 = 1 \\
&a_1 = K \\
&a_0 = 2K - 1
\end{aligned}
\quad \Rightarrow \quad
H_{22} = \begin{vmatrix} K & 0 \\ 1 & 2K-1 \end{vmatrix}
$$

Na temelju izraza izračunaju se subdeterminante H_1 i H_2 .

$$H_1 = K$$

$$H_2 = \begin{vmatrix} K & 0 \\ 1 & 2K-1 \end{vmatrix} = K(2K-1)$$

Iz izraza za subdeterminantu H_2, te primjenom Hurwitzovog kriterija stabilnosti, nejednadžbi, slijedi:

$$K > 0,5$$

Očito će sustav biti stabilan za iznos pojačanja veći od 0,5!

Primjer 4:

Odrediti vrijednost α za koji je sustav stabilan , ako je karakteristična jednadžba sustava:

$$s^4 + \alpha s^3 + 3s^2 + s + 2 = 0$$

Rješenje:

Na temelju izraza, iz koeficijenata karakteristične jednadžbe izračunaju se članovi Routhova rasporeda:

$$a_4 = 1 \qquad b_1 = \frac{a_3 \cdot a_2 - a_4 \cdot a_1}{a_3} = 3 - 1/\alpha \qquad b_2 = \frac{a_3 \cdot a_0 - a_4 \cdot 0}{a_3} = a_0 = 5$$

$$a_3 = \alpha$$

$$a_2 = 3 \qquad \Rightarrow \qquad c_1 = \frac{b_1 \cdot a_1 - a_3 \cdot b_2}{b_1} = 1$$

$$a_1 = 1$$

$$a_0 = 2 \qquad d_1 = \frac{c_1 \cdot b_2 - b_1 \cdot c_2}{c_1} = 2$$

Routhov raspored je:

R4	1	3	2
R3	α	1	0
R2	3-1/α	2	0
R1	1	0	
R0	2		

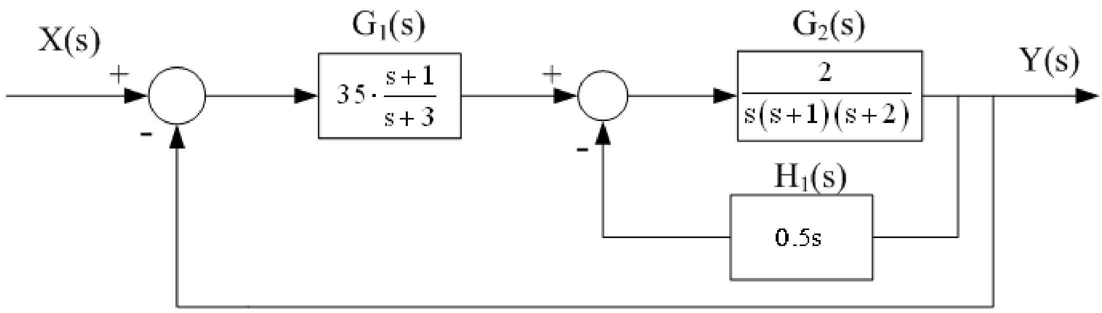
Prema Ruthovom kriteriju sustav je apsolutno stabilan ako svi članovi prvog stupca Routhovog rasporeda imaju jednak predznak. Stoga, budući da su 1 i 2 pozitivni brojevi veći od nule, sustav će biti stabilan za:

$$\begin{aligned} &\alpha > 0 \\ &\frac{3\alpha - 1}{\alpha} > 0 \end{aligned} \qquad \Rightarrow \qquad \alpha > 0,33$$

Dakle, sustav je apsolutno stabilan za $\alpha > 0,33$

Primjer 5:

Zadan je linearan sustav blok shemom na slici 56.



Slika 56. Blok shema linearnog sustava

Pomoću Routhovog kriterija odrediti je li sustav stabilan!

Rješenje:

Budući da se Routhova metoda temelji na karakterističnoj jednadžbi, koja se dobije izjednačavanjem nazivnika prijenosne funkcije zatvorene petlje s nulom, prvo je potrebno odrediti prijenosnu funkciju sustava:

$$W(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{G_1(s)\cdot G_2^{'}(s)}{1+G_1(s)\cdot G_2^{'}(s)}$$

gdje je:

$$G_2^{'}(s)=\frac{G_2(s)}{1+G_2(s)\cdot H_1(s)}$$

Postoji ugnježđena regulacijska petlja s negativnom povratnom vezom unutar glavne grane, te slijedi:

$$W(s)=\frac{G_1(s)\cdot\dfrac{G_2(s)}{1+G_2(s)\cdot H_1(s)}}{1+G_1(s)\cdot\dfrac{G_2(s)}{1+G_2(s)\cdot H_1(s)}}=\frac{\dfrac{G_1(s)\cdot G_2(s)}{1+G_2(s)\cdot H_1(s)}}{\dfrac{1+G_2(s)\cdot H_1(s)+G_1(s)\cdot G_2(s)}{1+G_2(s)\cdot H_1(s)}}=\frac{G_1(s)G_2(s)}{1+G_2(s)H_1(s)+G_1(s)G_2(s)}$$

Ako se uvrste zadani izrazi elemenata glavne i povratne grane, dobije se:

$$W(s)=\frac{70\cdot\dfrac{s+1}{s(s+3)(s+2)(s+1)}}{1+35\cdot\dfrac{s+1}{s+3}\cdot\dfrac{2}{s(s+2)(s+1)}+\dfrac{2\cdot 0.5s}{s(s+2)(s+1)}}=$$

$$=\frac{70(s+1)}{s(s+3)(s+2)(s+1)+70(s+1)+s(s+3)}=\frac{G(s)}{1+W_0(s)}$$

Nazivnik prijenosne funkcije izjednačen s nulom dat će karakterističnu jednadžbu sustava:

$$F(s) = 1 + W_0(s) = 0$$

$$s(s+3)(s+2)(s+1) + 70(s+1) + s(s+3) = 0$$

$$s^4 + 6s^3 + 12s^2 + 79s + 70 = 0$$

Na temelju izraza, iz koeficijenata karakteristične jednadžbe izračunaju se članovi Routhova rasporeda:

$$a_4 = 1 \qquad a_3 = 6 \qquad a_2 = 12 \qquad a_1 = 79 \qquad a_0 = 70 \quad \Rightarrow$$

$$b_1 = \frac{a_3 \cdot a_2 - a_4 \cdot a_1}{a_3} = -\frac{7}{6} \qquad b_2 = \frac{a_3 \cdot a_0 - a_4 \cdot 0}{a_3} = a_0 = 70$$

$$c_1 = \frac{b_1 \cdot a_1 - a_3 \cdot b_2}{b_1} = 439 \qquad c_1 = \frac{b_1 \cdot 0 - a_3 \cdot 0}{b_1} = 0$$

$$d_1 = \frac{c_1 \cdot b_2 - b_1 \cdot c_2}{c_1} = 70$$

Routhov raspored je:

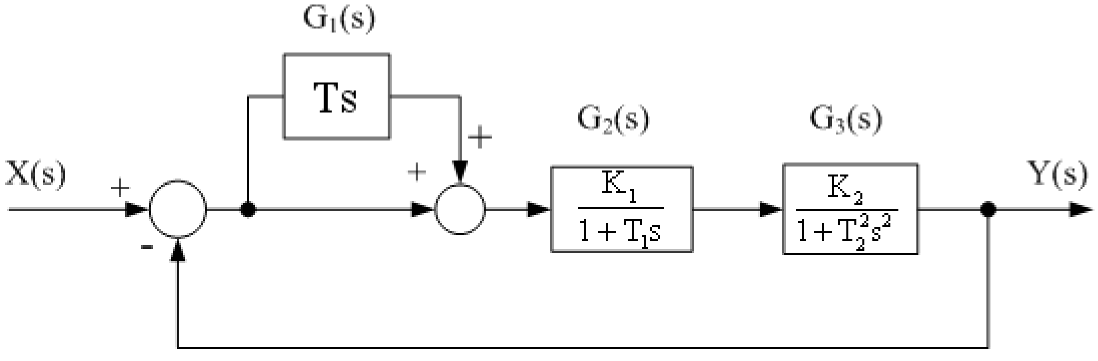
R_4	1	12	70
R_3	6	79	0
R_2	-7/6	70	0
R_1	439	0	
R_0	70		

Sustav je apsolutno nestabilan!

Predznak članova prvog stupca Routhovog rasporeda mijenja se dvaput (sa 6 na -7/6, te sa -7/6 na 439), što znači da sustav ima dva korijena s pozitivnim realnim dijelom, pa je očito nestabilan.

Primjer 6:

Blok shemom na slici 57. prikazan je sustav za koji je potrebno pomoću Hurwitzovog kriterija odrediti je li stabilan.



Slika 57. Blok shema sustava

Zadano je:

$$K_1 = 10, \quad K_2 = 1, \quad T_1 = 0{,}05\text{s}, \quad T_2 = 2\text{s}, \quad T = 0{,}1\text{s}$$

Rješenje:

Prijenosna funkcija sustava, koja se dobije sažimanjem blok dijagrama sustava, jednaka je:

$$W(s) = \frac{\left[1 + G_1(s)\right] \cdot G_2(s) \cdot G_3(s)}{1 + \left[1 + G_1(s)\right] \cdot G_2(s) \cdot G_3(s)} = \frac{G_2(s)G_3(s) + G_1(s)G_2(s)G_3(s)}{1 + G_2(s)G_3(s) + G_1(s)G_2(s)G_3(s)}$$

Karakteristična jednadžba sustava dobije se izjednačavanjem nazivnika prijenosne funkcije sustava s nulom:

$$F(s) = 1 + G_2(s)G_3(s) + G_1(s)G_2(s)G_3(s) = 0$$

Nakon što se uvrste zadani podaci, dobije se:

$$1 + \frac{K_1}{1 + T_1 s} \cdot \frac{K_2}{1 + T_2^2 s^2} + Ts \cdot \frac{K_1}{1 + T_1 s} \cdot \frac{K_2}{1 + T_2^2 s^2} = 0$$

$$\left(1 + T_1 s\right)\left(1 + T_2^2 s^2\right) + K_1 K_2 + K_1 K_2 Ts = 0$$

$$T_1 T_2^2 s^3 + T_2^2 s^2 + \left(K_1 K_2 T + T_1\right)s + K_1 K_2 + 1 = 0$$

$$0.2s^3 + 4s^2 + 1.05s + 11 = 0$$

Glavna determinanta se odredi uvrštavanjem koeficijenata karakteristične jednadžbe sustava u izraz. Za n = 3, vrijedi:

$$\begin{aligned} a_3 &= 0{,}2 \\ a_2 &= 4 \\ a_1 &= 1{,}05 \\ a_0 &= 11 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad H_{33} = \begin{vmatrix} 4 & 11 & 0 \\ 0{,}2 & 1{,}05 & 0 \\ 0 & 4 & 11 \end{vmatrix}$$

Na temelju izraza izračunaju se subdeterminante H_1, H_2 i H_3.

$$H_1 = 4$$

$$H_2 = \begin{vmatrix} 4 & 11 \\ 0{,}2 & 1{,}05 \end{vmatrix} = 4 \cdot 1{,}05 - 11 \cdot 0{,}2 = 4{,}2 - 2{,}2 = 2$$

$$H_{33} = \begin{vmatrix} 4 & 11 & 0 \\ 0{,}2 & 1{,}05 & 0 \\ 0 & 4 & 11 \end{vmatrix} = 4 \cdot \left(1{,}05 \cdot 11 - 0\right) - 11 \cdot \left(0{,}2 \cdot 11 - 0\right) + 0 = 46{,}2 - 24{,}2 = 20$$

Stabilnost sustava određuje se prema Hurwitzovom kriteriju stabilnosti, predstavljen nejednadžbama.

Koeficijenti karakteristične jednadžbe su veći od nule, pa je prvi uvjet zadovoljen. Računanjem subdeterminanti dobiju se vrijednosti veće od nule, pa je očito i drugi uvjet zadovoljen.

Budući oba uvjeta udovoljavaju kriteriju stabilnosti, može se zaključiti da je **sustav apsolutno stabilan**!

3.2. Grafo-analitički kriteriji stabilnosti - Bodeovi dijagrami

Nacrtati Bodeove asimptotske dijagrame za sustav čija je prijenosna funkcija otvorene petlje:

$$W_0(s) = \frac{2}{s(1+0.5s)(1+0.2s)}$$

Rješenje:

1. **Korak:** Prelazak u frekvencijsko područje

Supstitucija: $s = j\omega \quad \Rightarrow \quad W_0(j\omega) = \dfrac{2}{j\omega(1+0.5j\omega)(1+0.2j\omega)}$

2. **Korak:** Rastaviti funkciju na elementarne članove

$$W_0(j\omega) = \frac{2}{j\omega(1+0.5j\omega)(1+0.2j\omega)} = 2\cdot\frac{1}{j\omega}\cdot\frac{1}{1+0.5j\omega}\cdot\frac{1}{1+0.2j\omega} = A\cdot B\cdot C\cdot D$$

A, B, C i D su elementarni članovi zadane prijenosne funkcije otvorenog regulacijskog kruga.

Prijenosna funkcija je kompleksan broj, koji je u potpunosti određen intezitetom (amplitudom) i argumentom (kutom ili fazom). Budući da crtanje Bodeovih dijagrama predstavlja crtanje amplitudne i fazne karakteristike, očito je potrebno odrediti amplitudu i fazu zadane prijenosne funkcije.

- ***Amplituda:***

$$|W_0(j\omega)| = \left|\frac{2}{j\omega(1+0.5j\omega)(1+0.2j\omega)}\right| = |2|\cdot\left|\frac{1}{j\omega}\right|\cdot\left|\frac{1}{1+0.5j\omega}\right|\cdot\left|\frac{1}{1+0.2j\omega}\right| = |A|\cdot|B|\cdot|C|\cdot|D|$$

Prelazak u logaritamsko područje dobije se prema logaritmiranjem i množenjem lijeve i desne strane gornje jednadžbe s 20. S obzirom na logaritamska pravila, logaritam umnoška moguće je zapisati kao zbroj logaritama, te slijedi:

$$L(\omega) = 20\log|W_0(j\omega)| = 20\log\left[|2|\cdot\left|\frac{1}{j\omega}\right|\cdot\left|\frac{1}{1+0.5j\omega}\right|\cdot\left|\frac{1}{1+0.2j\omega}\right|\right] =$$

$$= 20\log(2) + 20\log\left|\frac{1}{j\omega}\right| + 20\log\left|\frac{1}{1+0.5j\omega}\right| + 20\log\left|\frac{1}{1+0.2j\omega}\right| =$$

$$= L_A(\omega) + L_B(\omega) + L_C(\omega) + L_D(\omega)$$

gdje su $L_A(\omega), L_B(\omega), L_C(\omega)$ i $L_D(\omega)$ amplitudne karakteristike elementarnih članova, izražene u dB. Dakle, amplitudna-frekvencijska karakteristika zadane prijenosne funkcije u području decibela dobije se zbrajanjem amplitudnih karakteristika elementarnih članova.

- ***Faza:***

Pri određivanju faze koristi se pravilo za argument funkcije, koje kaže da se argument umnoška može zapisati kao zbroj argumenata.

$$\varphi(\omega) = \arg\left[W_0(j\omega)\right] = \arg\left[2 \cdot \frac{1}{j\omega} \cdot \frac{1}{1+0.5j\omega} \cdot \frac{1}{1+0.2j\omega}\right] =$$

$$= \arg(2) + \arg\left[\frac{1}{j\omega}\right] + \arg\left[\frac{1}{1+0.5j\omega}\right] + \arg\left[\frac{1}{1+0.2j\omega}\right] =$$

$$= \varphi_A(\omega) + \varphi_B(\omega) + \varphi_C(\omega) + \varphi_D(\omega)$$

gdje su $\varphi_A(\omega), \varphi_B(\omega), \varphi_C(\omega)$ i $\varphi_D(\omega)$ fazne karakteristike elementarnih članova.
Dakle, fazno-frekvencijska karakteristika zadane prijenosne funkcije bit će jednaka zbroju faznih karakteristika elementarnih članova.

3. **Korak:** "Priprema" za crtanje dijagrama

Priprema za crtanje Bodeovih dijagrama sastoji se od ispunjavanja tablice ključnih podataka, a to su lomna ili presječna frekvencija i nagib (za amplitudne dijagrame), te iznos faznog pomaka pri graničnim frekvencijama (za fazne dijagrame). Svakom elementarnom članu dodijeljen je po jedan redak tablice.

Elementarni član	**Amplitudni dijagram**		**Fazni dijagram**
	NAGIB [dB/dek]	LOMNA FREK. [rad/s]	
$A = 2 \Rightarrow L = 6\text{dB}$	0	-	$\varphi_A = 0°$
$B = \dfrac{1}{j\omega}$	-20	$\omega_B = 1$	$\varphi_B = -90°$
$C = \dfrac{1}{(1+0.5j\omega)}$	0 za $\omega<\omega_C$	$\omega_C = 2$	$\varphi_C = 0°$ za $\omega \le 0.2$
	-20 za $\omega>\omega_C$		$\varphi_C = -90°$ za $\omega \ge 20$
$D = \dfrac{1}{(1+0.2j\omega)}$	0 za $\omega<\omega_D$	$\omega_D = 5$	$\varphi_D = 0°$ za $\omega \le 0.5$
	-20 za $\omega>\omega_D$		$\varphi_D = -90°$ za $\omega \ge 50$

4. **Korak:** Crtanje Bodeovih dijagrama elementarnih članova

Bodeovi dijagrami elementarnih članova crtaju se na temelju podataka iz tablice. Svi podaci osim iznosa lomnih frekvencija su stereotipni, pa ih nije potrebno računati. Ipak, način računanja tih podataka predstavljen je prilikom analize svakog elementarnog člana. Prije početka crtanja Bodeovih dijagrama elementarnih članova potrebno je formirati koordinatni sustav i ucrtati pomoćne pravce. Pomoćni pravci crtaju se lijevo od osi ordinata i služe kao referentne vrijednosti nagiba.

Organizacija frekvencijske osi:
Dužina jedne dekade u milimetrima na mm papiru se bira što veća, radi preciznijeg crtanja. Ako je najmanja frekvencija koju je potrebno ucrtati 0.1, a najveća 50, očito su potrebne tri dekade, a kako se uzima i jedna dekada lijevo od osi ordinate (pomoć pri crtanju), znači da frekvencijska os mora sadržavati najmanje 4 dekade. Dužina mm papira iznosi 250 mm, što znači da je moguće odabrati duljinu dekade od 60 mm. U slučaju kad je frekvencijsku os potrebno podijeliti na 5 dekada, duljina jedne dekade iznosi 50 mm, za 6 dekada 40 mm, itd.

Organizacija osi ordinata:
Ovisno o iznosima pojačanja, odnosno kutova faznog pomaka, te prema procjeni položaja Bodeovih dijagrama moguće je postaviti koordinatne osi tako da više prostora za crtanje ostane u pozitivnom ili negativnom dijelu ravnine. Koordinatni sustav se naravno može podijeliti i simetrično. Ipak, preporučuje se ostaviti više prostora za crtanje dijagrama u negativnom dijelu ravnine (ispod osi apscisa).

5. **Korak :** Crtanje Bodeovih dijagrama zadane funkcije

Bodeovi dijagrami prijenosne funkcije otvorene petlje dobiju se kao zbroj Bodeovih dijagrama elementarnih članova. Pri tom se koristi **metoda zbrajanja nagiba**, a sam postupak provodi se u nekoliko koraka:

➢ Amplitudno-frekvencijski dijagram

- Odrediti početnu točku to jest početan iznos pojačanja na osi ordinata (u ovom primjeru: 20 dB + 6 dB = 26 dB)
- Povući vertikale u lomnim frekvencijama (u ovom primjeru vertikale u točkama 2 i 5 na frekvencijskoj osi). To su mjesta promjene nagiba ukupne amplitudne karakteristike.
- Iscrtati Bodeov amplitudni dijagram na sljedeći način: od početne točke povući pravac s odgovarajućim nagibom do prve vertikale (u ovom primjeru to je nagib -20 dB/dek). Od prve do druge vertikale nagib će biti drugačiji (u ovom primjeru to je nagib -40 dB/dek), pa treba vući pravac između prve i druge vertikale s tim nagibom. Nakon druge vertikale dijagram nastavlja padati novim nagibom koji u ovom primjeru iznosi -60 dB/dek

Na ovaj način nacrtan je Bodeov amplitudni dijagram zbrajanjem nagiba pojedinačnih dijagrama elementarnih članova u svakom od segmenata frekvencijske osi. Segmenti su pri tom određeni vertikalama koje prolaze kroz lomne frekvencije. U ovom primjeru postoje tri segmenata (jer je ω_B samo formalno lomna frekvencija, tj. presječna frekvencija) u kojima vrijede nagibi -20, -40, -60 dB/dek.

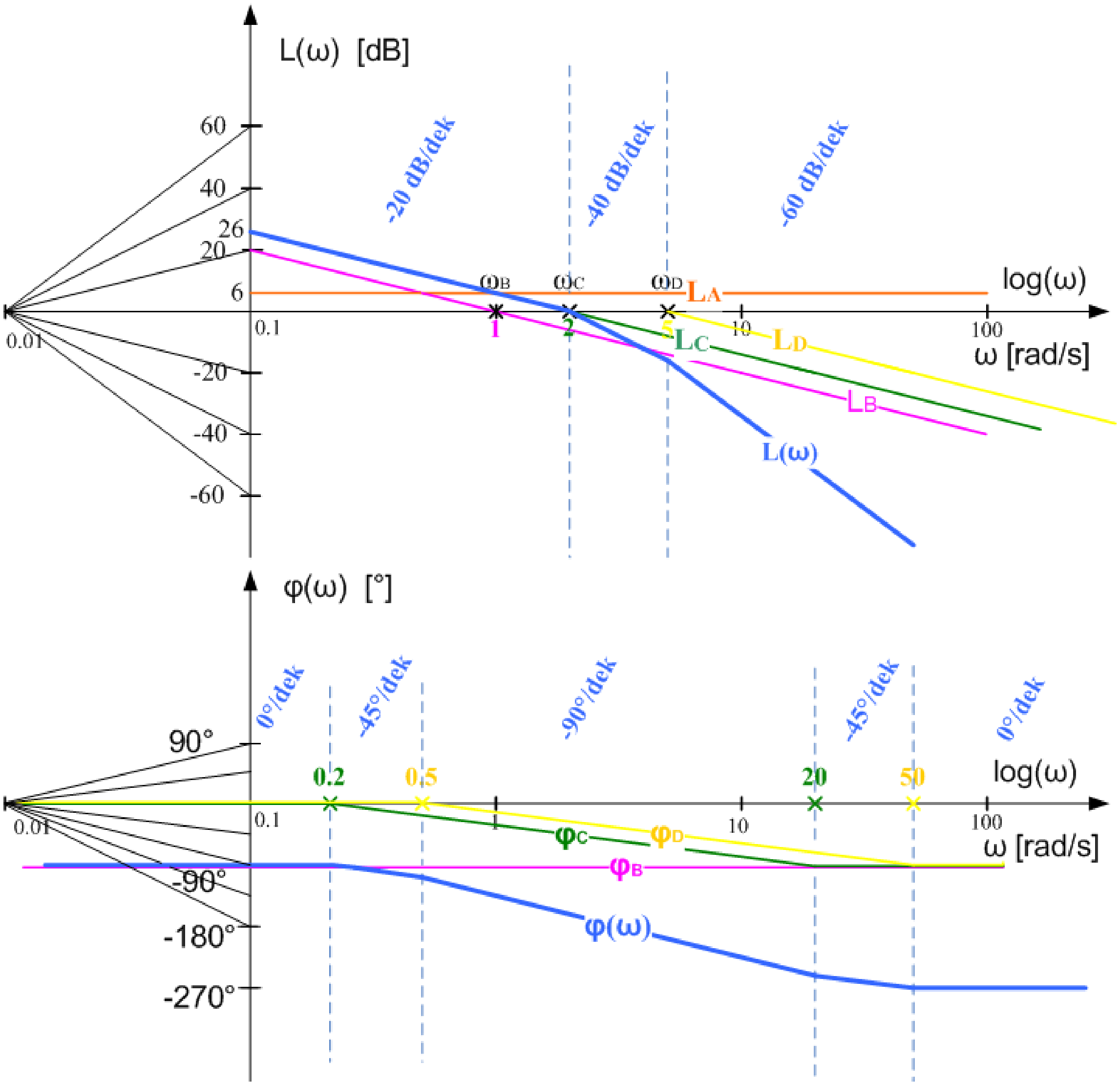
- Fazno-frekvencijski dijagram

- Na frekvencijskoj osi označiti granične frekvencije(u ovom primjeru to su: 0.2, 0.5, 20 i 50 rad/s)
- Povući vertikale u graničnim frekvencijama. To su mjesta promijene nagiba ukupne fazne karakteristike (prijelomnice). Izvan granica fazna karakteristika elementarnog člana ima konstantan iznos, a između granica to je pravac s nagibom izraženim u stupnjevima po dekadi. Odrediti nagib fazne karakteristike svakog elementarnog člana.
- Iscrtati Bodeov fazni dijagram na slijedeći način: odrediti početnu i konačnu točku, tj. vrijednost faze kojom počinje i vrijednost kojom završava fazni dijagram. Spajati pravcima određenog nagiba od vertikale do vertikale. Vertikalama je određen segment. U svakom od segmenata različit je nagib karakteristike. Ukupan nagib karakteristike u određenom segmentu dobije se zbrajanjem pojedinačnih nagiba svake od elementarnih funkcija.

U ovom primjeru vrijednost faze kojom počinje fazna karakteristika iznosi -90° (zbroj iznosa faznih dijagrama elementarnih članova do prve prijelomnice), a vrijednost kojom završava fazni dijagram iznosi -270° (zbroj iznosa faznih dijagrama elementarnih članova iza zadnje prijelomnice).
Postoji pet segmenata. U prvom segmentu zbroj nagiba jednak je nuli, a zbroj vrijednosti svih faznih karakteristika elementarnih članova jednak je -90°. Dakle, potrebno je povući pravac iznosa -90°, nagiba 0°/dek do prve prijelomnice, tj. frekvencije 0.2 rad/s.
U drugom segmentu zbroj nagiba iznosi -45°/dek, pa je potrebno povući pravac tog nagiba do druge prijelomnice, tj. do frekvencije 0.5 rad/s.
U trećem segmentu (između druge i treće prijelomnice) nagib je -90°/dek, jer u ovom segmentu postoje dvije karakteristike elementarnih članova s nagibom od po -45°/dek, a kako je nagib ukupne karakteristike jednak sumi pojedinačnih, tako on iznosi -90°/dek. Dakle, potrebno je povući pravac nagiba -90°/dek do treće prijelomnice.
U četvrtom segmentu (između treće i četvrte prijelomnice) nagib je -45°/dek, jer u ovom segmentu postoji samo jedna karakteristika elementarnih članova s nagibom od -45°/dek, ostale su karakteristike nagiba 0°. Dakle, potrebno je povući pravac nagiba -45°/dek do četvrte prijelomnice.
Sjecište fazne karakteristike i četvrte prijelomnice (vertikale) trebalo bi se dogoditi pri -270°. Od ove točke nadalje fazna karakteristika je konstantna i iznosi -270°, jer je zbroj vrijednosti faznih karakteristika elementarnih članova jednak 0° + (-90°) + (-90°) + (-90°) = -270°.

Postupak zbrajanja pojedinačnih dijagrama elementarnih članova postupkom zbrajanja nagiba koristi se jer je jednostavniji od klasične metode zbrajanja krivulja.

Rješenje zadatka prikazano je na slici 58.



Slika 58. Bodeovi dijagrami (rješenje primjera 1)

3.2.1. Primjer određivanja relativne stabilnosti sustava pomoću Bodeovog kriterija stabilnosti

Nacrtati Bodeove asimptotske dijagrame, te odrediti AP i FP sustava čija je prijenosna funkcija otvorene petlje:

$$W_0(s) = \frac{10(1+0.1s)}{(1+0.2s)(1+0.33s)^2(1+0.5s)}$$

Zaključiti o stabilnosti sustava!

Rješenje:

$$s = j\omega \;\Rightarrow\; W_0(j\omega) = 10 \cdot (1+0.1j\omega) \cdot \frac{1}{1+0.2j\omega} \cdot \frac{1}{(1+0.33j\omega)^2} \cdot \frac{1}{(1+0.5j\omega)} =$$

$$= A \cdot B \cdot C \cdot D \cdot E$$

- ***Amplituda:***

$$A(\omega) = |W_0(j\omega)| = |A| \cdot |B| \cdot |C| \cdot |D| \cdot |E|$$

$$L(\omega) = 20\log|W_0(j\omega)| = 20\log\left[|A| \cdot |B| \cdot |C| \cdot |D| \cdot |E|\right] =$$

$$= 20\log|A| + 20\log|B| + 20\log|C| + 20\log|D| + 20\log|E| =$$

$$= L_A(\omega) + L_B(\omega) + L_C(\omega) + L_D(\omega) + L_E(\omega)$$

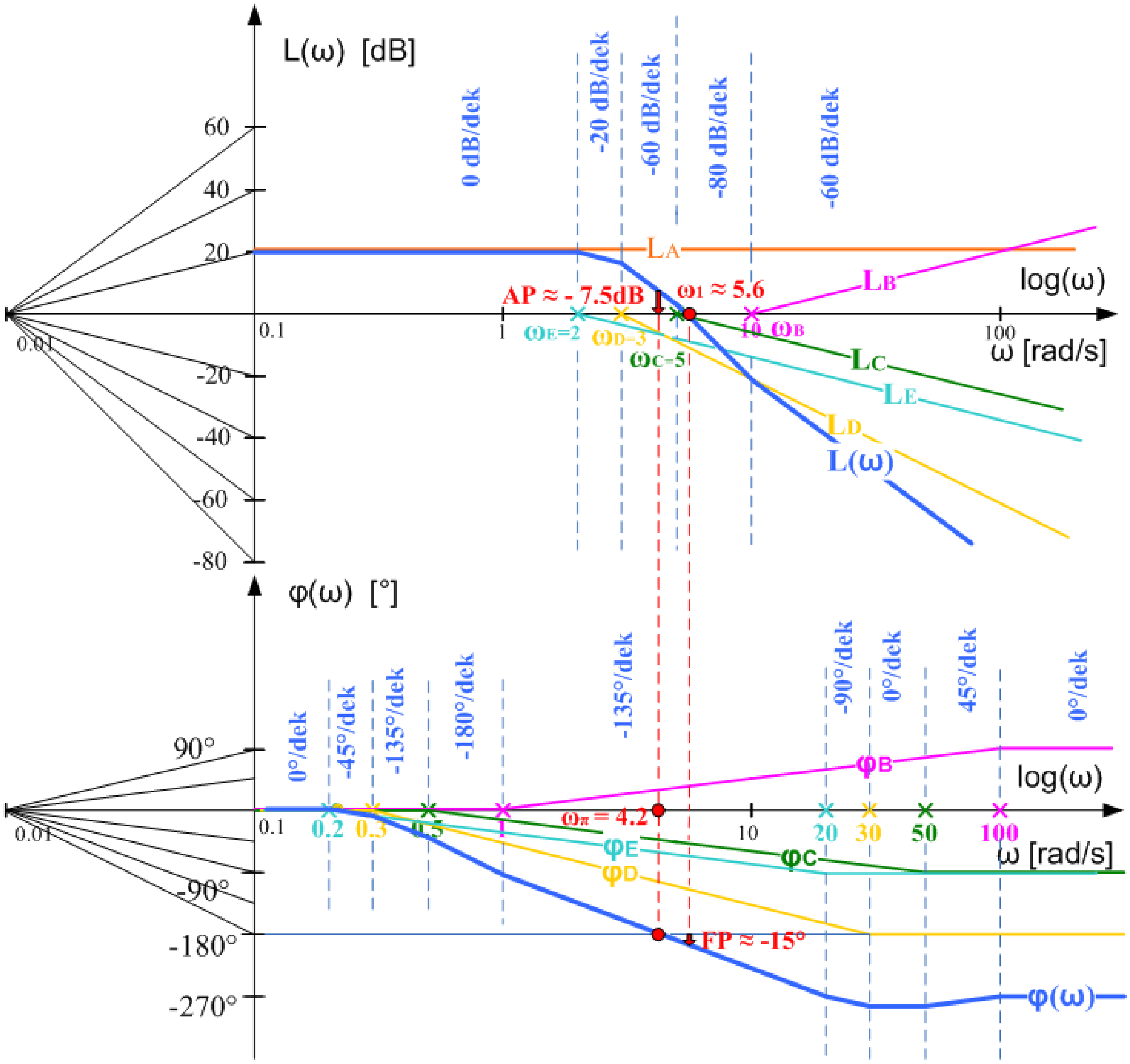
- ***Faza:***

$$\varphi(\omega) = \arg[W_0(j\omega)] = \arg[A \cdot B \cdot C \cdot D \cdot E] = \arg(A) + \arg(B) + \arg(C) + \arg(D) + \arg(E)$$

$$= \varphi_A(\omega) + \varphi_B(\omega) + \varphi_C(\omega) + \varphi_D(\omega) + \varphi_E(\omega)$$

"Priprema":

Elementarni član	Amplitudni dijagram: NAGIB [dB/dek]	Amplitudni dijagram: LOMNA FREK. [rad/s]	Fazni dijagram
$A = 10 \Rightarrow L = 20dB$	0	-	$\varphi_A = 0°$
$B = 1 + 0.1j\omega$	0 za $\omega < \omega_B$	$\omega_B = 10$	$\varphi_B = 0°$ za $\omega \le 1$
	20 za $\omega > \omega_B$		$\varphi_B = 90°$ za $\omega \ge 100$
$C = \frac{1}{1 + 0.2j\omega}$	0 za $\omega < \omega_C$	$\omega_C = 5$	$\varphi_C = 0°$ za $\omega \le 0.5$
	-20 za $\omega > \omega_C$		$\varphi_C = -90°$ za $\omega \ge 50$
$D = \frac{1}{(1 + 0.33j\omega)^2}$	0 za $\omega < \omega_D$	$\omega_D = 3$	$\varphi_D = 0°$ za $\omega \le 0.3$
	-40 za $\omega > \omega_D$		$\varphi_D = -180°$ za $\omega \ge 30$
$E = \frac{1}{1 + 0.5j\omega}$	0 za $\omega < \omega_E$	$\omega_E = 2$	$\varphi_E = 0°$ za $\omega \le 0.2$
	-20 za $\omega > \omega_E$		$\varphi_E = -90°$ za $\omega \ge 20$



Slika 59. Bodeovi dijagrami (rješenje primjera)

Rezultati:

$$\left.\begin{aligned}\omega_1 &= 5.6\ \text{rad/s}\\ \omega_\pi &= 4.2\ \text{rad/s}\end{aligned}\right. \Rightarrow \quad \omega_1 > \omega_\pi \quad , \qquad \left.\begin{aligned}AP &= -7.5\text{dB}\\ FP &= -15^\circ\end{aligned}\right. \Rightarrow \quad AP,\ FP < 0$$

Sustav je relativno nestabilan.

Iznos amplitudne pričuve od -7.5 dB znači da je postojeći iznos pojačanja A=10 potrebno smanjiti 2.37 puta, dakle smanjiti sa A = 10 na A = 4.21 da bi sustav postao granično stabilan!

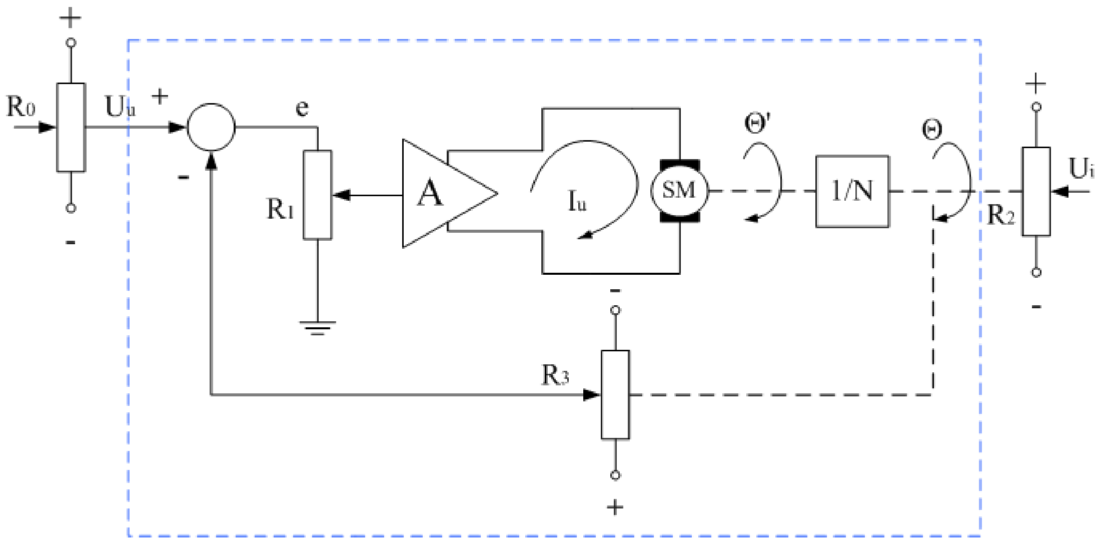
$$20\log x = 7.5\text{dB} \qquad \Rightarrow \qquad x = 10^{\frac{7.5}{20}} = 2.37$$

Ili djelovati na fazu tako da se poveća za 15°.

3.3. Riješeni primjeri određivanja stabilnosti sustava

Primjer 1:

Elektromehanički istosmjerni servo sustav prikazan je blok shemom na slici 60.

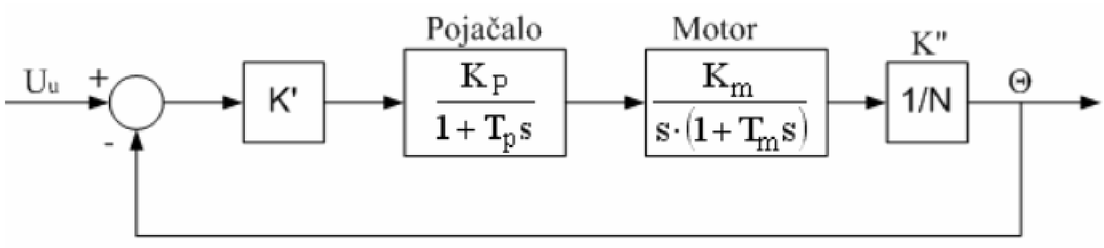


Slika 60. Blok shema elektromehaničkog sustava

a) Nacrtati strukturnu blok shemu za taj sustav i odrediti prijenosnu funkciju zatvorenog kruga,
b) Pomoću Hurwitzovog kriterija odrediti iznos pojačanja K za koji je sustav stabilan,
c) Za vrijednost pojačanja K = 80 nacrtati Bodeove dijagrame i zaključiti o relativnoj stabilnosti sustava.

Rješenje :

a) Strukturna blok shema sustava:



Slika 61. Strukturna blok shema elektromehaničkog sustava

Povratna veza je jedinična jer je postojanje mjernog pretvornika iz povratne veze, zajedno s mjernim pretvornikom na ulazu predstavljeno pojačanjem K' koje se sad nalazi u izravnoj grani i predstavlja detektor pogreške.

b) Prijenosna funkcija sustava je:

$$W_Z(s)=\frac{\Theta(s)}{U_u(s)}=\frac{K'\cdot\frac{K_p}{1+T_p s}\cdot\frac{K_m}{s(1+T_m s)}\cdot K''}{1+\left(K'\cdot\frac{K_p}{1+T_p s}\cdot\frac{K_m}{s(1+T_m s)}\cdot K''\right)}= \qquad \left\{K'\cdot K''\cdot K_p\cdot K_m=K\right\}$$

$$=\frac{\frac{K}{s(1+T_p s)(1+T_m s)}}{1+\frac{K}{s(1+T_p s)(1+T_m s)}}=\frac{K}{s(1+T_p s)(1+T_m s)+K}$$

Nazivnik prijenosne funkcije predstavlja karakteristični polinom koji kad se izjednači s nulom postaje **karakteristična jednadžba sustava**:

$$F(s)=s(1+T_p s)(1+T_m s)+K=0$$

$$s\left(1+T_p s+T_m s+T_p T_m s^2\right)+K=0$$

$$T_p T_m s^3+(T_p+T_m)s^2+s+K=0$$

Poznato je: $T_p = 0.02$ s …. vremenska konstanta pojačala
$T_m = 0.16$ s …. vremenska konstanta motora

Karakteristična jednadžba predstavlja temelj analize stabilnosti sustava i Hurwitzovom metodom, ali i općenito, jer su karakterističnom jednadžbom definirani korijeni sustava. Karakteristična jednadžba, uz uvrštene poznate vrijednosti, glasi :

$$3.2\cdot 10^{-3}s^3+0.18s^2+s+K=0$$

Usporedbom ovog izraza i općeg oblika karakteristične jednadžbe sustava 3. reda:

$$a_3 s^3+a_2 s^2+a_1 s+a_0=0$$

Dobije se:

$$a_3=3.2\cdot 10^{-3} \qquad a_2=0.18 \qquad a_1=1 \qquad a_0=K$$

Hurwitzova determinanta glasi:

$$H_{33}=\begin{vmatrix} a_2 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_1 & 0 \\ 0 & a_2 & a_0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0.18 & K & 0 \\ 0.0032 & 1 & 0 \\ 0 & 0.18 & K \end{vmatrix}$$

Hurwitzov uvjet stabilnosti:

$$\begin{matrix} a_i>0 \\ H_i>0 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad K>0$$

Na temelju prvog Hurwitzovog uvjeta stabilnosti koji kaže da svi članovi uz potencije od "s" moraju biti veći od nule proizlazi zahtjev da K bude veći od nule.

$$H_1 = 0.18$$

$$H_2 = \begin{vmatrix} a_2 & a_0 \\ a_3 & a_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0.18 & K \\ 0.0032 & 1 \end{vmatrix} = 0.18 \cdot 1 - 0.0032 \cdot K > 0 \quad \Rightarrow \quad K < 56.25$$

Determinanta H2 imat će iznos veći od nule i time zadovoljavati 2. uvjet Hurwitzovog kriterija stabilnosti za iznos K manji od 56.25.

$$H_3 = \begin{vmatrix} a_2 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_1 & 0 \\ 0 & a_2 & a_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0.18 & K & 0 \\ 0.0032 & 1 & 0 \\ 0 & 0.18 & K \end{vmatrix} = 0.18 \cdot (K - 0) - K \cdot (0.0032K - 0) > 0$$

$$H_3 = 0.18 \cdot (K - 0) - K \cdot (0.0032K - 0)$$

Iz uvjeta H_3>0 dobije se:

$$0.18 \cdot K - 0.0032K^2 > 0$$

$$K \cdot (0.18 - 0.0032K) > 0 \quad \Rightarrow \quad K > 0 \quad i \quad 0.18 - 0.0032K > 0 \quad \Rightarrow \quad K < 56.25$$

Iz determinante H_3 se dobiju uvjeti jednaki 1. i 2. uvjetu, dakle ništa novo.

Na temelju 1. i 2. uvjeta može se zaključiti da je **sustav stabilan za 0 < K < 56.25**

c) Donošenje zaključka o relativnoj stabilnosti zadanog sustava pomoću Bodeovih dijagrama, uz zadan iznos pojačanja K = 80.

$$W_o(s) = \frac{K}{s(1+T_p s)(1+T_m s)}$$

Također je zadano: T_p = 0.02 s ….vremenska konstanta pojačala
T_m = 0.16 s …. vremenska konstanta motora

Slijedi:

$$W_o(s) = \frac{80}{s(1+0.02s)(1+0.16s)}$$

Prelazak u frekvencijsko područje:

$$s = j\omega \quad \Rightarrow \quad W_o(j\omega) = \frac{80}{j\omega(1+0.02j\omega)(1+0.16j\omega)} =$$

$$= 80 \cdot \frac{1}{j\omega} \cdot \frac{1}{(1+0.02j\omega)} \cdot \frac{1}{(1+0.16j\omega)} = A \cdot B \cdot C \cdot D$$

- ***Amplituda:***

$$A(\omega) = |W_0(j\omega)| = |A| \cdot |B| \cdot |C| \cdot |D|$$

$$L(\omega) = 20\log|W_0(j\omega)| = 20\log\left[|A| \cdot |B| \cdot |C| \cdot |D|\right] = 20\log|A| + 20\log|B| + 20\log|C| + 20\log|D| =$$

$$= L_A(\omega) + L_B(\omega) + L_C(\omega) + L_D(\omega)$$

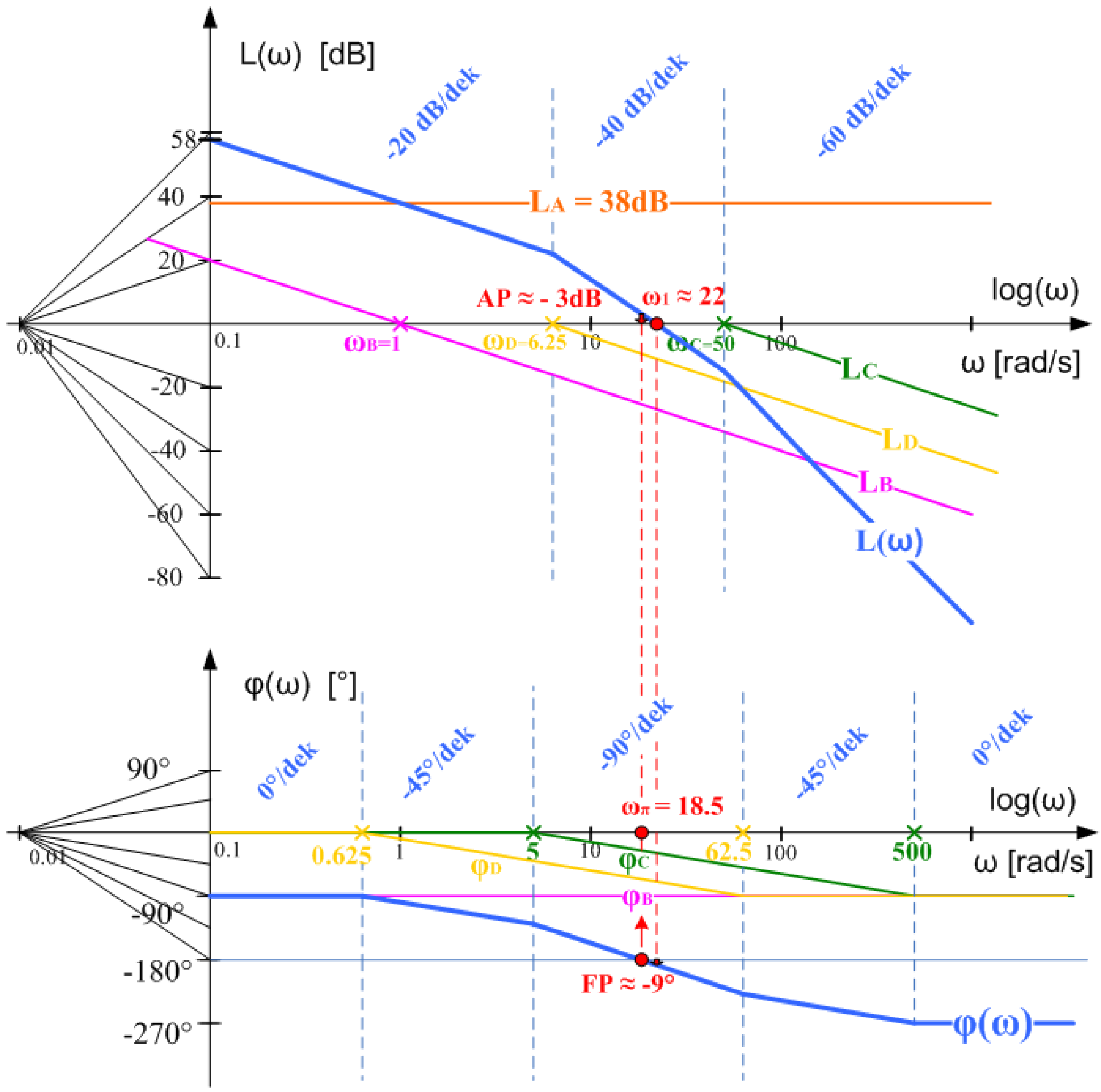
- ***Faza:***

$$\varphi(\omega) = \arg\left[W_0(j\omega)\right] = \arg\left[A \cdot B \cdot C \cdot D \cdot E\right] = \arg(A) + \arg(B) + \arg(C) + \arg(D)$$

$$= \varphi_A(\omega) + \varphi_B(\omega) + \varphi_C(\omega) + \varphi_D(\omega)$$

Priprema:

Elementarni član	**Amplitudni dijagram**		**Fazni dijagram**
	NAGIB [dB/dek]	LOMNA FREK. [rad/s]	
$A = 80 \Rightarrow L = 38dB$	0	-	$\varphi_A = 0°$
$B = \dfrac{1}{j\omega}$	-20	$\omega_B = 1$	$\varphi_B = -90°$
$C = \dfrac{1}{(1 + 0.02j\omega)}$	0 za $\omega<\omega_C$	$\omega_C = 50$	$\varphi_C = 0°$ za $\omega \le 5$
	-20 za $\omega>\omega_C$		$\varphi_C = -90°$ za $\omega \ge 500$
$D = \dfrac{1}{(1 + 0.16j\omega)}$	0 za $\omega<\omega_D$	$\omega_D = 6.25$	$\varphi_D = 0°$ za $\omega \le 0.625$
	-20 za $\omega>\omega_D$		$\varphi_D = -90°$ za $\omega \ge 62.5$



Slika 62. Bodeovi dijagrami (grafičko rješenje 1. zadatka)

Rezultati:

$$\left.\begin{array}{l}\omega_1 = 22 \text{ rad/s} \\ \omega_\pi = 18.5 \text{ rad/s}\end{array}\right. \Rightarrow \quad \omega_1 > \omega_\pi \quad , \qquad \left.\begin{array}{l}AP = -3\text{dB} \\ FP = -9°\end{array}\right. \Rightarrow \quad AP,\ FP < 0$$

Zaključak je da je sustav relativno nestabilan.

Iznos amplitudne pričuve od –3dB znači da pojačanje A = 80 treba smanjiti otprilike 1.4 puta, tj. 40% da bi sustav postao granično stabilan.

$$20\log(x) = 3\text{dB} \quad \Rightarrow \quad x = 10^{\frac{3}{20}} = 1.4$$

Smanjenjem pojačanja A = 80 za 40% dobije se iznos pojačanja A = 56. (80/1.4 = 56)
To očito odgovara uvjetu kojeg se dobije analitičkom Hurwitzovom metodom.

Primjer 2:

Donijeti zaključak o stabilnosti sustava za sustav zadan prijenosnom funkcijom zatvorenog kruga:

$$W(s) = \frac{1}{s^3 + 1.5s^2 + 0.5s + 1}$$

a) Hurwitzovom metodom,
b) Routhovom metodom,
c) pomoću Bodeovih dijagrama.

Rješenje:

a) Određivanje stabilnosti sustava Hurwitzovom metodom temelji se na karakterističnoj jednadžbi sustava:

$$s^3 + 1.5s^2 + 0.5s + 1 = 0$$

Karakteristična jednadžba se dobije kad se karakteristični polinom (nazivnik prijenosne funkcije zatvorene petlje) izjednači s nulom.

Karakteristična jednadžba trećeg reda u općem obliku glasi:

$$a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0 = 0$$

Usporedbom karakteristične jednadžbe zadanog sustava i karakteristične jednadžbe trećeg reda u općem obliku dobije se:

$$a_3 = 1 \quad a_2 = 1.5 \quad a_1 = 0.5 \quad a_0 = 1$$

Hurwitzova determinanta glasi:

$$H_{33} = \begin{vmatrix} a_2 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_1 & 0 \\ 0 & a_2 & a_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1.5 & 1 & 0 \\ 1 & 0.5 & 0 \\ 0 & 1.5 & 1 \end{vmatrix}$$

Hurwitzov uvjet stabilnosti:

$$a_i > 0$$

$$H_i > 0$$

- Prvi uvjet je očito ispunjen (svi koeficijenti uz potencije od "s" su veći od nule)!
- Drugi uvjet (poddeterminante moraju također biti veće od nule):

$$H_1 = 1.5 > 0$$

$$H_2 = \begin{vmatrix} a_2 & a_0 \\ a_3 & a_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1.5 & 1 \\ 1 & 0.5 \end{vmatrix} = 1.5 \cdot 0.5 - 1 \cdot 1 = -0.25 < 0$$

Kako je iznos determinante H_2 manji od nule, zbog čega uvjet stabilnosti nije zadovoljen, tako determinantu H_3 nije potrebno određivati. Moguće je već sad donijeti zaključak o stabilnosti sustava koji glasi: **sustav je nestabilan.**

b) Određivanje stabilnosti sustava Routhovom metodom također se temelji na karakterističnoj jednadžbi sustava:

$$s^3 + 1.5s^2 + 0.5s + 1 = 0$$

Potrebno je formirati Routhov raspored koeficijenata:

$$\begin{array}{c|ccc} R3 & a_3 & a_1 & 0 \\ R2 & a_2 & a_0 & 0 \\ R1 & b_1 & b_2 & 0 \\ R0 & c_1 & c_2 & 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c|ccc} R3 & 1 & 0.5 & 0 \\ R2 & 1.5 & 1 & 0 \\ R1 & -0.17 & 0 & 0 \\ R0 & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

↓

1. stupac Routhovog rasporeda

$$b_1 = \frac{a_2 \cdot a_1 - a_3 \cdot a_0}{a_2} = -0.17 \qquad b_2 = \frac{a_2 \cdot 0 - a_3 \cdot 0}{a_2} = 0$$

$$c_1 = \frac{b_1 \cdot a_0 - a_2 \cdot b_2}{b_1} = 1 \qquad c_2 = \frac{b_1 \cdot 0 - a_2 \cdot 0}{b_1} = 0$$

Prema Ruthovom kriteriju stabilnosti:

Sustav je stabilan ako svi članovi prvog stupca Routhovog rasporeda (Routhovi probni brojevi) imaju isti predznak.
Uvjet očito nije zadovoljen, znači da **sustav nije stabilan**.

Također vrijedi da je broj promjena predznaka u prvom stupcu jednak broju korijena s pozitivnim realnim dijelom, a kako u ovom slučaju postoje dvije promjene predznaka (sa +1.5 na -0.17, te s -0.17 na +1) znači da postoje dva korijena s pozitivnim realnim dijelom (korijeni karakteristične jednadžbe s pozitivnim realnim dijelom znače nestabilnost sustava).

Inače, Routhova metoda razvijena je kao zamjena za Hurwitzovu metodu koja u slučaju sustava četvrtog reda i više zahtjeva rješavanje determinanti četvrtog i višeg reda. Da bi se to izbjeglo koristi se Routhova metoda.

c) Određivanje stabilnosti sustava pomoću Bodeovih dijagrama temelji se na prijenosnoj funkciji otvorene petlje, pa je prvo potrebno iz prijenosne funkcije zatvorene petlje naći izraz za prijenosnu funkciju otvorene petlje:

Ako se i brojnik i nazivnik prijenosne funkcije zatvorenog kruga podijeli izrazom $s^3+1.5s^2+0.5s+1$, dobije se:

$$W(s) = \frac{1}{s^3 + 1.5s^2 + 0.5s + 1} = \frac{\dfrac{1}{s^3 + 1.5s^2 + 0.5s}}{\left(1 + \dfrac{1}{s^3 + 1.5s^2 + 0.5s}\right)}$$

Usporedbom ovako zapisane prijenosne funkcije zadanog sustava i općeg oblika prijenosne funkcije zatvorenog kruga, dobije se izraz za prijenosnu funkciju otvorenog kruga zadanog sustava:

$$W_0(s) = G(s)H(s) = \frac{1}{s^3 + 1.5s^2 + 0.5s}$$

Ovako zapisanu prijenosnu funkciju treba zapisati u obliku koji omogućava rastavljanje prijenosne funkcije na umnožak elementarnih članova:

$$W_0(s)=\frac{1}{s^3+1.5s^2+0.5s}=\frac{1}{s\left(s^2+s+0.5s+0.5\right)}=\frac{1}{s\left[s(s+1)+0.5(s+1)\right]}=$$

$$=\frac{1}{s(s+1)(s+0\;\;)}=\frac{1}{50\;\; s(s5+1)(2s+1)}=\frac{2}{s(s+1)(2s+1)}$$

Dakle, prijenosna funkcija otvorenog kruga, na temelju koje se crta Bodeov dijagram, glasi:

$$W_0(s)=\frac{2}{s(1+s)(1+2s)}$$

Prelazak u frekvencijsko područje obavlja se supstitucijom:

$$s=j\omega \qquad \Rightarrow \qquad W_0(j\omega)=\frac{2}{j\omega(1+j\omega)(1+2j\omega)}=2\cdot\frac{1}{j\omega}\cdot\frac{1}{1+j\omega}\cdot\frac{1}{1+2j\omega}=A\cdot B\cdot C\cdot D$$

- ***Amplituda:***

$$A(\omega)=\left|W_0(j\omega)\right|=\ |A|\cdot|B|\cdot|C|\cdot|D|$$

$$L(\omega)=20\log\left|W_0(j\omega)\right|=20\log\left[|A|\cdot|B|\cdot|C|\cdot|D|\right]=20\log|A|+20\log|B|+20\log|C|+20\log|D|=$$

$$=\ L_A(\omega)+L_B(\omega)+L_C(\omega)+L_D(\omega)$$

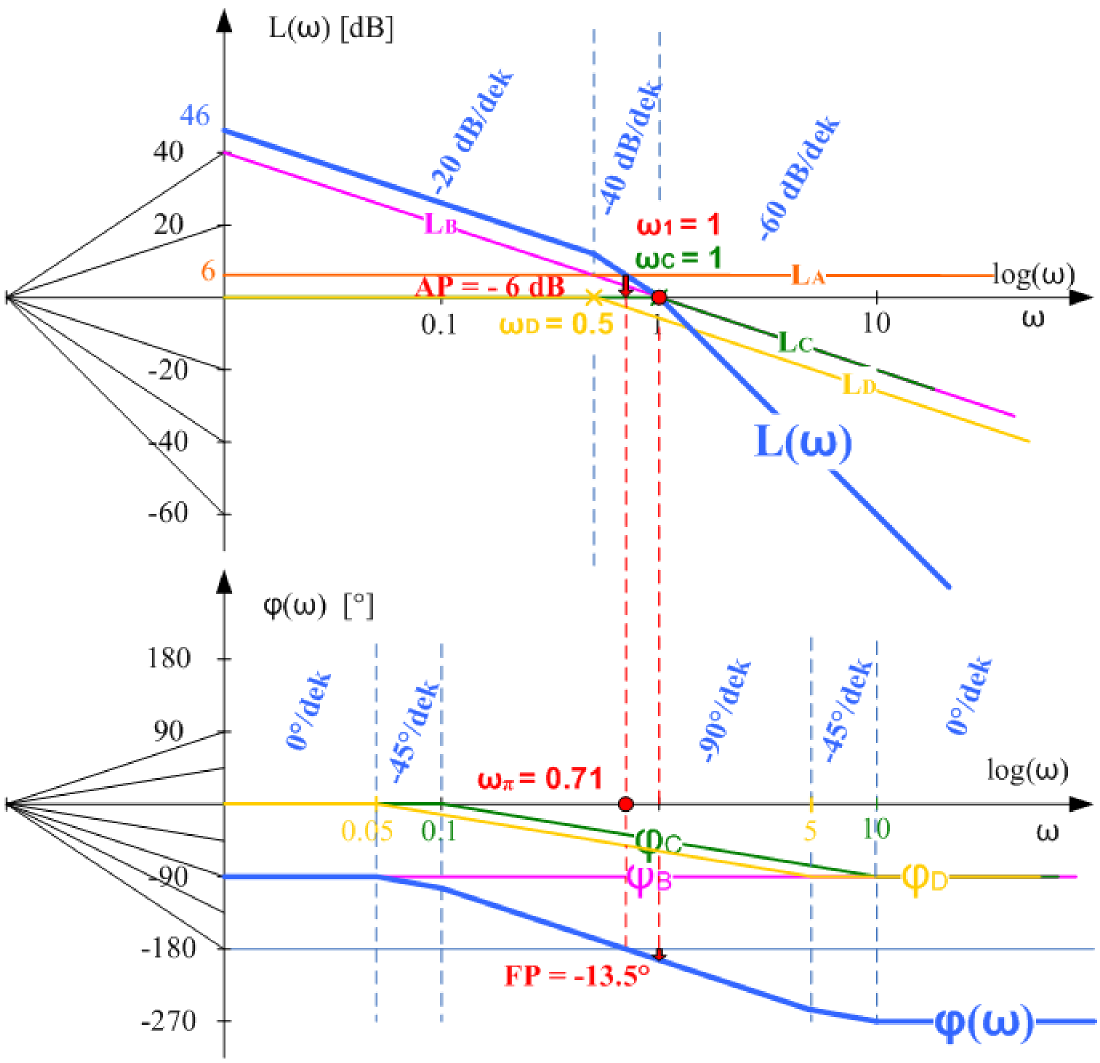
- ***Faza:***

$$\varphi(\omega)=\arg\left[W_0(j\omega)\right]=\arg\left[A\cdot B\cdot C\cdot D\cdot E\right]=\arg(A)+\arg(B)+\arg(C)+\arg(D)$$

$$=\ \varphi_A(\omega)+\varphi_B(\omega)+\varphi_C(\omega)+\varphi_D(\omega)$$

Priprema:

<table>
<tr><th rowspan="2">Elementarni član</th><th colspan="2">Amplitudni dijagram</th><th rowspan="2">Fazni dijagram</th></tr>
<tr><th>NAGIB [dB/dek]</th><th>LOMNA FREK. [rad/s]</th></tr>
<tr><td>$A = 2 \Rightarrow L = 6dB$</td><td>0</td><td>-</td><td>$\varphi_A = 0°$</td></tr>
<tr><td>$B = \frac{1}{j\omega}$</td><td>-20</td><td>$\omega_B = 1$</td><td>$\varphi_B = -90°$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$C = \frac{1}{(1 + j\omega)}$</td><td>0 za $\omega < \omega_C$</td><td rowspan="2">$\omega_C = 1$</td><td>$\varphi_C = 0°$ za $\omega \leq 0.1$</td></tr>
<tr><td>-20 za $\omega > \omega_C$</td><td>$\varphi_C = -90°$ za $\omega \geq 10$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$D = \frac{1}{(1 + 2j\omega)}$</td><td>0 za $\omega < \omega_D$</td><td rowspan="2">$\omega_D = 0.5$</td><td>$\varphi_D = 0°$ za $\omega \leq 0.05$</td></tr>
<tr><td>-20 za $\omega > \omega_D$</td><td>$\varphi_D = -90°$ za $\omega \geq 5$</td></tr>
</table>



Slika 63. Bodeovi dijagrami (grafičko rješenje 2. zadatka)

Rezultati:

$$\left.\begin{array}{l}\omega_1 = 1\ \mathrm{rad/s}\\ \omega_\pi = 0.71\ \mathrm{rad/s}\end{array}\right. \Rightarrow \quad \omega_1 > \omega_\pi\ , \qquad \begin{array}{l}AP = -6\ \mathrm{dB}\\ FP = -13.5°\end{array} \quad \Rightarrow \quad AP,\ FP < 0$$

Zaključak: sustav je relativno nestabilan.

Iznos amplitudne pričuve od –6 dB znači da pojačanje A = 2 treba smanjiti 2 puta, da bi sustav postao stabilan.

$$20\log(x) = 6\,\mathrm{dB} \qquad \Rightarrow \qquad x = 10^{\frac{3}{10}} = 2$$

Podatak o faznoj pričuvi (FP) kaže u kolikoj mjeri bi trebalo djelovati na fazu da sustav postane stabilan.

Primjer 3:

Zadana je prijenosna funkcija otvorenog sustava:

$$W_0(j\omega) = \frac{K}{j\omega(1+0.2j\omega)(1+0.05j\omega)(1+0.02j\omega)}$$

a) Routhovom metodom odrediti vrijednost pojačanja K za koje je ovaj sustav stabilan!
b) Za iznos pojačanja K=32 nacrtati Bodeove dijagrame i zaključiti o stabilnosti sustava.

Rješenje:

a) Prvo je potrebno odrediti karakterističnu jednadžbu sustava:

$$F(s) = 1 + W_0(s) = 1 + \frac{K}{s(1+0.2s)(1+0.05s)(1+0.02s)} = 0$$

$$\frac{s(1+0.2s)(1+0.05s)(1+0.02s)+K}{s(1+0.2s)(1+0.05s)(1+0.02s)} = 0 \quad \Big| \cdot s(1+0.2s)(1+0.05s)(1+0.02s)$$

$$s(1+0.2s)(1+0.05s)(1+0.02s)+K = 0$$

$$2\cdot 10^{-4}s^4 + 0.015s^3 + 0.27s^2 + s + K = 0$$

Na temelju karakteristične jednadžbe sustava, piše se Routhov raspored:

R4	a_4	a_2	a_0
R3	a_3	a_1	0
R2	b_1	b_2	0
R1	c_1	c_2	0
R0	d_1		

$\Rightarrow$

R4	0.0002	0.27	K
R3	0.015	1	0
R2	0.26	K	0
R1	1-0.057K	0	0
R0	K		

↓
1. stupac Routhovog rasporeda

$$b_1 = \frac{a_3\cdot a_2 - a_4\cdot a_1}{a_3} = 0.256 \qquad b_2 = \frac{a_3\cdot a_0 - a_4\cdot 0}{a_3} = a_0 = K$$

$$c_1 = \frac{b_1\cdot a_1 - a_3\cdot b_2}{b_1} = 1 - 0.057K \qquad c_2 = \frac{b_1\cdot 0 - a_3\cdot 0}{b_1} = 0$$

$$d_1 = \frac{c_1\cdot b_2 - b_1\cdot c_2}{c_1} = K$$

Da bi sustav bio stabilan prema Routhovom kriteriju svi članovi prvog stupca Routhovog rasporeda moraju imati isti predznak, pa s obzirom da su prvi, drugi i treći član pozitivnog predznaka, očito mora vrijediti:

$$1-0.0578K>0 \qquad \Rightarrow \qquad K<17.3$$

Dakle, sustav je stabilan za iznose pojačanja manje od 17.3.

b) Za K = 32:

$$W_0(j\omega)=\frac{32}{j\omega(1+0.2j\omega)(1+0.05j\omega)(1+0.02j\omega)}=$$

$$=32\cdot\frac{1}{j\omega}\cdot\frac{1}{1+0.2j\omega}\cdot\frac{1}{1+0.05j\omega}\cdot\frac{1}{1+0.02j\omega}=$$

$$=A\cdot B\cdot C\cdot D\cdot E$$

- ***Amplituda:***

$$A(\omega)=\left|W_0(j\omega)\right|= \left|A\right|\cdot\left|B\right|\cdot\left|C\right|\cdot\left|D\right|$$

$$L(\omega)=20\log\left|W_0(j\omega)\right|=20\log\left[\left|A\right|\cdot\left|B\right|\cdot\left|C\right|\cdot\left|D\right|\right]=$$

$$=20\log\left|A\right|+20\log\left|B\right|+20\log\left|C\right|+20\log\left|D\right|+20\log\left|E\right|=$$

$$= L_A(\omega)+L_B(\omega)+L_C(\omega)+L_D(\omega)+L_E(\omega)$$

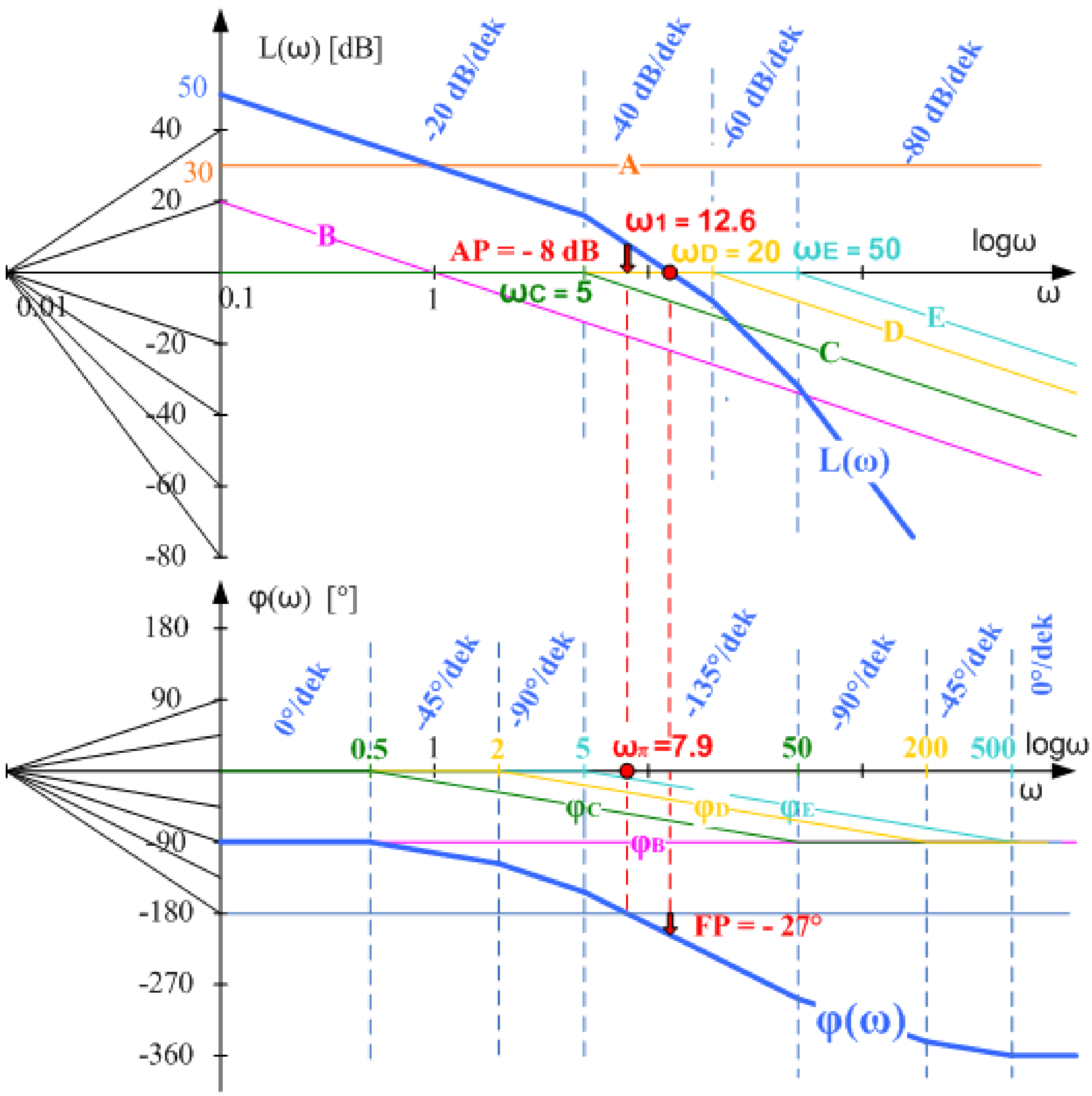
- ***Faza:***

$$\varphi(\omega)=\arg\left[W_0(j\omega)\right]=\arg\left[A\cdot B\cdot C\cdot D\cdot E\right]=\arg(A)+\arg(B)+\arg(C)+\arg(D)+\arg(E)$$

$$= \varphi_A(\omega)+\varphi_B(\omega)+\varphi_C(\omega)+\varphi_D(\omega)+\varphi_E(\omega)$$

Priprema:

Elementarni član	Amplitudni dijagram		Fazni dijagram
	NAGIB [dB/dek]	LOMNA FREK. [rad/s]	
$A = 32 \Rightarrow L = 30\text{dB}$	0	-	$\varphi_A = 0°$
$B = \frac{1}{j\omega}$	-20	$\omega_B = 1$	$\varphi_B = -90°$
$C = \frac{1}{(1+0.2j\omega)}$	0 za $\omega<\omega_C$	$\omega_C = 5$	$\varphi_C = 0°$ za $\omega \le 0.5$
	-20 za $\omega>\omega_C$		$\varphi_C = -90°$ za $\omega \ge 50$
$D = \frac{1}{(1+0.05j\omega)}$	0 za $\omega<\omega_D$	$\omega_D = 20$	$\varphi_D = 0°$ za $\omega \le 2$
	-20 za $\omega>\omega_D$		$\varphi_D = -90°$ za $\omega \ge 200$
$E = \frac{1}{(1+0.02j\omega)}$	0 za $\omega<\omega_E$	$\omega_E = 50$	$\varphi_D = 0°$ za $\omega \le 5$
	-20 za $\omega>\omega_E$		$\varphi_D = -90°$ za $\omega \ge 500$



Slika 64. Bodeovi dijagrami (grafičko rješenje 3. zadatka)

Rezultati:

$$\begin{matrix} \omega_1 = 12.6 \text{ rad/s} \\ \omega_\pi = 7.9 \text{ rad/s} \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \omega_1 > \omega_\pi \quad , \qquad \begin{matrix} AP = -8\,\text{dB} \\ FP = -27° \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad AP,\ FP < 0$$

Zaključak: sustav je relativno nestabilan.

Da bi sustav postao stabilan potrebno je smanjiti pojačanje za 8 dB, tj. otprilike 2.5 puta, pa bi granično pojačanje iznosilo 12.8 (32/2.5 =12.8). Očito se iznos ne poklapa s onim dobivenim Routhovom metodom. Ovo odstupanje može se pripisati činjenici da se radi s asimptotskim Bodeovim dijagramima. Rješenje dobiveno Routhovom metodom može se smatrati točnim.

$$20\log x = 8\,\text{dB} \qquad \Rightarrow \qquad x = 10^{\frac{8}{20}} = 2.51$$

Primjer 4:

Zadana je prijenosna funkcija otvorenog sustava:

$$W_0(s) = \frac{20}{s(s+2)(s+5)}$$

a) Hourwitzovom metodom odrediti je li sustav stabilan,
b) Routhovom metodom odrediti je li sustav stabilan,
c) nacrtati Bodeove dijagrame i zaključiti o stabilnosti sustava.

Rješenje:

a) Prvo je potrebno odrediti karakterističnu jednadžbu sustava:

$$F(s) = 1 + W_0(s) = 1 + W_0(s) = 1 + \frac{20}{s(s+2)(s+5)} = 0$$

$$\frac{s(s+2)(s+5)+20}{s(s+2)(s+5)} = 0 \qquad \Big| \cdot s(s+2)(s+5)$$

$$s(s+2)(s+5)+20 = 0$$

$$s^3 + 7s^2 + 10s + 20 = 0$$

Hourwitzova determinanta glasi:

$$H_{33} = \begin{vmatrix} 7 & 20 & 0 \\ 1 & 10 & 0 \\ 0 & 7 & 20 \end{vmatrix}$$

Hourwitzov uvjet stabilnosti:

$$a_i > 0$$

$$H_i > 0$$

- Prvi uvjet je očito ispunjen (svi koeficijenti uz potencije od "s" su veći od nule)!

- Drugi uvjet (poddeterminante moraju također biti veće od nule):

$$H_1 = 7 > 0$$

$$H_2 = \begin{vmatrix} 7 & 20 \\ 1 & 10 \end{vmatrix} = 70 - 20 = 50 > 0$$

$$H_3 = \begin{vmatrix} 7 & 20 & 0 \\ 1 & 10 & 0 \\ 0 & 7 & 20 \end{vmatrix} = 7 \cdot 200 - 20 \cdot 20 = 1400 - 400 = 1000 > 0$$

Hourwitzov kriterij stabilnosti je zadovoljen što znači da je **sustav stabilan.**

b) Određivanje stabilnosti sustava Routhovom metodom također se temelji na karakterističnoj jednadžbi:

$$s^3+7s^2+10s+20=0$$

Potrebno je formirati Routhov raspored koeficijenata:

R3	a_3	a_1	0
R2	a_2	a_0	0
R1	b_1	b_2	0
R0	c_1	c_2	0

$\Rightarrow$

R3	1	1,0	0
R2	7	20	0
R1	7.1	0	0
R0	20	0	0

↓ 1. stupac Routhovog rasporeda

$$b_1=\frac{a_2\cdot a_1-a_3\cdot a_0}{a_2}=7.1 \qquad b_2=\frac{a_2\cdot 0-a_3\cdot 0}{a_2}=0$$

$$c_1=\frac{b_1\cdot a_0-a_2\cdot b_2}{b_1}=20 \qquad c_2=\frac{b_1\cdot 0-a_2\cdot 0}{b_1}=0$$

Prema Ruthovom kriteriju stabilnosti:

Sustav je stabilan ako članovi prvog stupca Routhovog rasporeda imaju isti predznak. Dakle, zadani **sustav je stabilan**.

c) Na temelju analitičkih metoda (Routhova i Hurwitzova metoda) donesen je zaključak o apsolutnoj stabilnosti sustava, sustav je stabilan. Međutim, koliko je sustav stabilan, tj. koliko je od granice stabilnosti, nije poznato. To će biti određeno na temelju Bodeovih dijagrama.

Zadana je prijenosna funkcija otvorenog regulacijskog kruga. Prelazak u frekvencijsko područje obavlja se supstitucijom $s=j\omega$, slijedi:

$$W_0(j\omega)=\frac{20}{j\omega(j\omega+2)(j\omega+5)}=\frac{20}{2\cdot 5\cdot j\omega(1+0.5j\omega)(1+0.2j\omega)}=$$

$$=2\cdot\frac{1}{j\omega}\cdot\frac{1}{1+0.5j\omega}\cdot\frac{1}{1+0.2j\omega}=A\cdot B\cdot C\cdot D$$

- ***Amplituda:***

$$A(\omega)=\left|W_0(j\omega)\right|= \ |A|\cdot|B|\cdot|C|\cdot|D|$$

$$L(\omega)=20\log\left|W_0(j\omega)\right|=20\log\left[|A|\cdot|B|\cdot|C|\cdot|D|\right]=20\log|A|+20\log|B|+20\log|C|+20\log|D|=$$

$$= \ L_A(\omega)+L_B(\omega)+L_C(\omega)+L_D(\omega)$$

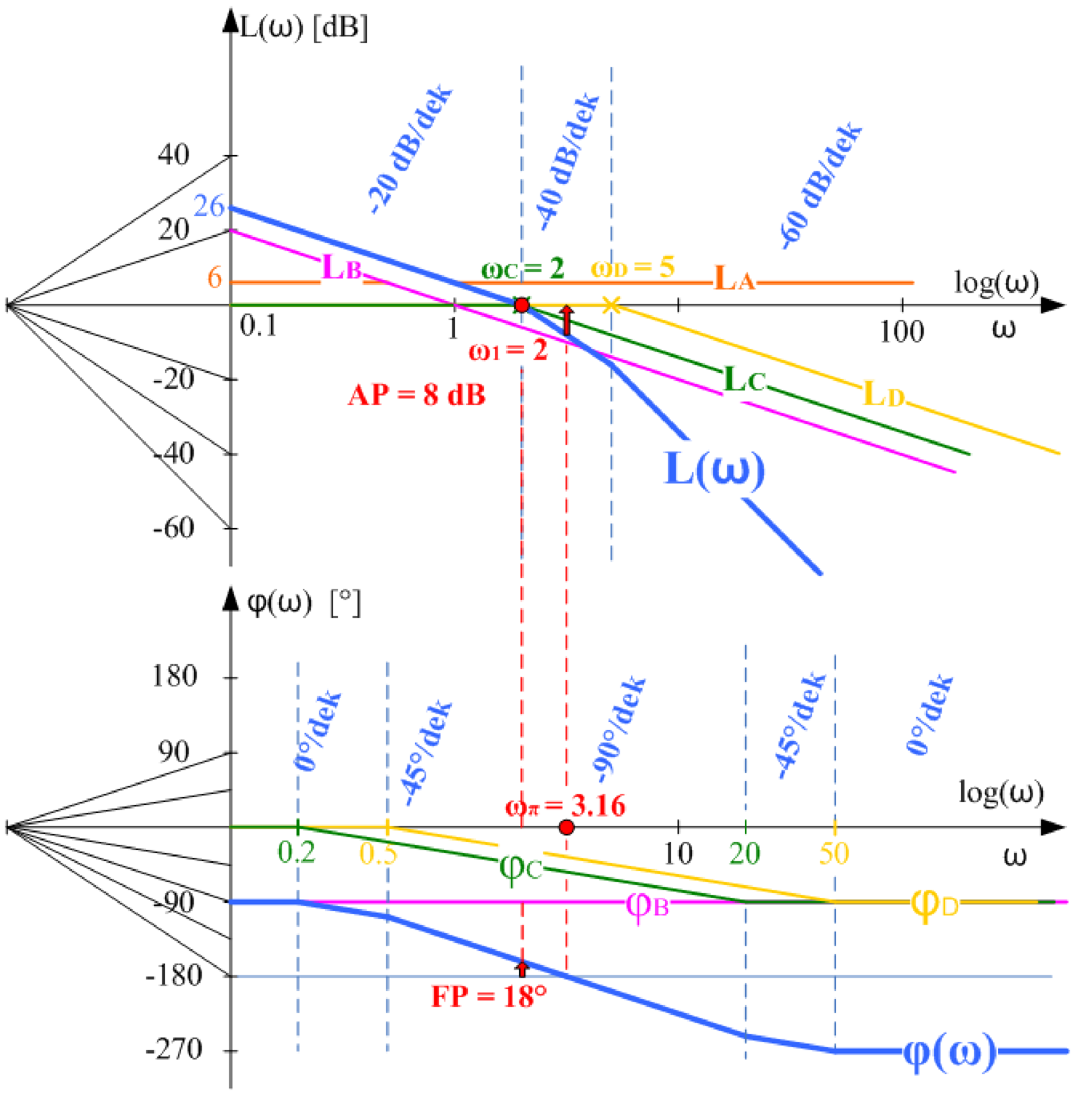
- ***Faza:***

$$\varphi(\omega)=\arg\left[W_0(j\omega)\right]=\arg\left[A\cdot B\cdot C\cdot D\right]=\arg(A)+\arg(B)+\arg(C)+\arg(D)$$

$$= \ \varphi_A(\omega)+\varphi_B(\omega)+\varphi_C(\omega)+\varphi_D(\omega)$$

Priprema:

Elementarni član	**Amplitudni dijagram**		**Fazni dijagram**
	NAGIB [dB/dek]	LOMNA FREK. [rad/s]	
$A=2\Rightarrow L=6\text{dB}$	0	-	$\varphi_A=0°$
$B=\dfrac{1}{j\omega}$	-20	$\omega_B=1$	$\varphi_B=-90°$
$C=\dfrac{1}{(1+0.5j\omega)}$	0 za $\omega<\omega_C$	$\omega_C=2$	$\varphi_C=0°$ za $\omega\le 0.2$
	-20 za $\omega>\omega_C$		$\varphi_C=-90°$ za $\omega\ge 20$
$D=\dfrac{1}{(1+0.2j\omega)}$	0 za $\omega<\omega_D$	$\omega_D=5$	$\varphi_D=0°$ za $\omega\le 0.5$
	-20 za $\omega>\omega_D$		$\varphi_D=-90°$ za $\omega\ge 50$



Slika 65. Bodeovi dijagrami (grafičko rješenje 4. zadatka)

Rezultati:

$$\begin{matrix} \omega_1 = 2\ \text{rad/s} \\ \omega_\pi = 3.16\ \text{rad/s} \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \omega_1 > \omega_\pi \quad , \qquad \begin{matrix} AP = 8\,dB \\ FP = 18^\circ \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad AP,\ FP > 0$$

Sustav je relativno stabilan!

$$AP = 8\,dB \quad \Rightarrow \quad 8\,dB = 20\log x$$

$$x = 10^{8/20} = 2.5$$

Znači, pojačanje se može povećati 2.5 puta, a da sustav ostane stabilan!

3.3. Ispitni primjeri

Zadatak 1:
Pomoću Bodeovih asimptotskih dijagrama odredite AP i FP sustava čija je prijenosna funkcija otvorene petlje:

$$W_0(s) = \frac{10(1+0.1s)}{(1+0.2s)(1+0.33s)^2(1+0.5s)}$$

Odrediti amplitudnu i faznu pričuvu i zaključiti o stabilnosti sustava.

Zadatak 2:
Zadana je prijenosna funkcija otvorene petlje:

$$W_0(s) = \frac{1+0.1s}{s(1+0.5s)(1+s)}$$

Odrediti amplitudnu i faznu pričuvu i zaključiti o stabilnosti sustava.

Zadatak 3:
Zadana je prijenosna funkcija otvorene petlje:

$$W_0(s) = \frac{1+0.4s}{s(1+0.2s)(1+s)}$$

Odrediti amplitudnu i faznu pričuvu i zaključiti o stabilnosti sustava.

Zadatak 4:
Zadana je prijenosna funkcija otvorene petlje:

$$W_0(s) = \frac{1+0.1s}{(1+0.02s)^2(1+0.05s)}$$

Odrediti amplitudnu i faznu pričuvu i zaključiti o stabilnosti sustava.

Zadatak 5:
Zadana je prijenosna funkcija otvorene petlje:

$$W_0(s) = \frac{10\cdot(1+s)}{s(1+2s)(1+5s)}$$

Odrediti amplitudnu i faznu pričuvu i zaključiti o stabilnosti sustava.

Zadatak 6:
Zadana je prijenosna funkcija otvorene petlje:

$$W_0(s) = \frac{100}{s(1+0.1s)(1+0.2s)}$$

Odrediti amplitudnu i faznu pričuvu i zaključiti o stabilnosti sustava.

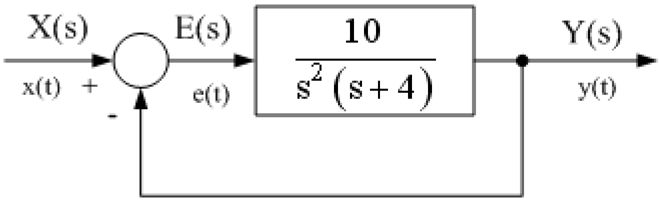
4. Kriteriji za ocjenu kvalitete sustava automatike

Koraci rješavanja zadataka:

1. odrediti prijenosnu funkciju otvorenog kruga,
2. odrediti pobudu u Laplaceovom području,
3. uvrstiti u formulu $e_{ss} = \lim\limits_{s\to 0}\left[s\cdot E(s)\right] = \lim\limits_{s\to 0}\left[s\cdot \dfrac{X(s)}{1+W_0(s)}\right]$.

Primjer 1:

Na ulazu sustava sa slike 66., djeluje signal $x(t) = 4 + 6\cdot t + 3\cdot t^2$.



Slika 66. Blok shema zadanog sustava

Odrediti pogrešku ustaljenog stanja.

Rješenje:

Prema definiciji, pogreška ustaljenog stanja je:

$$e_{ss} = \lim_{s\to 0}\left[s\cdot E(s)\right] = \lim_{s\to 0}\left[s\cdot \frac{X(s)}{1+W_0(s)}\right]$$

Dakle, prvo je potrebno odrediti Laplaceovu transformaciju ulaznog signala:

$$X(s) = \frac{4}{s} + \frac{6}{s^2} + \frac{6}{s^3}$$

Prijenosna funkcija otvorene petlje, uz napomenu da se radi o jediničnoj negativnoj povratnoj vezi, je:

$$W_0(s) = G(s) = \frac{10}{s^2\left(s+4\right)}$$

Sada je moguće izračunati pogrešku ustaljenog stanja, uvrštavanjem izraza za pobudu u Laplaceovom području i prijenosne funkcije otvorene petlje u izraz za pogrešku ustaljenog stanja:

$$e_{ss} = \lim_{s\to 0}\left[s\cdot E(s)\right] = \lim_{s\to 0}\left[s\cdot \frac{\frac{4}{s}+\frac{6}{s^2}+\frac{6}{s^3}}{1+\frac{10}{s^2\left(s+4\right)}}\right] = \lim_{s\to 0}\left[s\cdot \frac{\frac{4s^2+6s+6}{s^3}}{\frac{s^3+4s^2+10}{s^2\left(s+4\right)}}\right] = \lim_{s\to 0}\frac{\left(s+4\right)\left(4s^2+6s+6\right)}{s^3+4s^2+10}$$

$$e_{ss} = 2.4$$

Primjer 2 :

Odrediti vrijednost pogreške pri praćenju izlazne osovine slijednog sustava s jediničnom povratnom vezom, opisanog prijenosnom funkcijom otvorenog kruga:

$$W_0(s)=\frac{K}{s(1+T_1s)(1+T_2s)}$$

Ulazna osovina se okreće kutnom brzinom od 12°/s

Rješenje:

Prvo je potrebno odrediti pobudnu funkciju (ulazni kut zakreta osovine) u Laplaceovom području:

$$\Omega=12^\circ/s$$

$$\Theta(t)=\Omega\cdot t=12\cdot t \qquad \Rightarrow \qquad \Theta(s)=\frac{12}{s^2}$$

Uvrštavanjem izraza za pobudu u Laplaceovom području i prijenosne funkcije otvorene petlje u izraz za pogrešku ustaljenog stanja dobije se:

$$e_{ss}=\lim_{s\to0}\left[s\cdot\frac{X(s)}{1+W_0(s)}\right]=$$

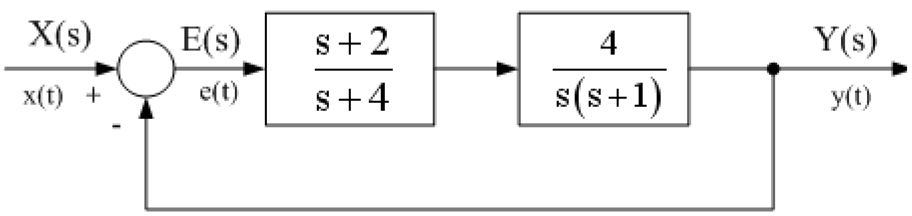
$$=\lim_{s\to0}\left[s\cdot\frac{\frac{12}{s^2}}{1+\frac{K}{s(1+T_1s)(1+T_2s)}}\right]=\lim_{s\to0}\left[\frac{1\cdot 12(1+T_1s)(1+T_2s)}{s(1+T_1s)(1+T_2s)+K}\right]=\frac{12}{K}$$

Za iznos pojačanja K = 100 dobije se pogreška ustaljenog stanja (brzine) od 0.12° ili 7,2'

Primjer 3 :

Za stabilan sustav zadan blok dijagramom na slici 67., Odrediti:

a) konstantu i pogrešku položaja, K_p i e_p,
b) konstantu i pogrešku brzine, K_v i e_v,
c) konstantu i pogrešku ubrzanja, K_a i e_a.



Slika 67. Blok shema zadanog sustava

Rješenje:

Budući da je sustav zatvoren u regulacijsku petlju jediničnom negativnom povratnom vezom, prijenosna funkcija otvorenog sustava jednaka je prijenosnoj funkciji izravne grane:

$$W_0(s) = \frac{4(s+2)}{s(s+4)(s+1)}$$

a) Da bi se odredile konstanta i pogreška položaja potrebno je zadani sustav pobuditi jediničnom odskočnom (step) funkcijom. U tom slučaju vrijedi:

$$K_p = \lim_{s\to 0}\left[W_0(s)\right] = \lim_{s\to 0}\frac{4(s+2)}{s(s+4)(s+1)} = \infty \qquad \Rightarrow \qquad e_p = \frac{1}{1+K_p} = \frac{1}{\infty} = 0$$

Do ovih iznosa može se doći i izravno primjenom tablice uz činjenicu da se radi o sustavu prve vrste!

b) Da bi se odredile konstanta i pogreška brzine potrebno je zadani sustav pobuditi jediničnom uzlaznom funkcijom.

$$K_v = \lim_{s\to 0}\left[s\cdot W_0(s)\right] = \lim_{s\to 0}\left[s\cdot\frac{4(s+2)}{s(s+4)(s+1)}\right] = 2 \qquad \Rightarrow \qquad e_v = \frac{1}{K_v} = \frac{1}{2} = 0.5$$

c) Da bi se odredile konstanta i pogreška ubrzanja potrebno je zadani sustav pobuditi paraboličnom funkcijom.

$$K_a = \lim_{s\to 0}\left[s^2\cdot W_0(s)\right] = \lim_{s\to 0}\left[s^2\cdot\frac{4(s+2)}{s(s+4)(s+1)}\right] = 0 \qquad \Rightarrow \qquad e_a = \frac{1}{K_a} = \frac{1}{0} = \infty$$

Do ovih iznosa može se doći i izravno primjenom tablice uz činjenicu da se radi o sustavu prve vrste!

Dobiveni rezultati znače da odziv promatranog sustava vjerno slijedi pobudu u slučaju jedinične odskočne funkcije na ulazu, a za jediničnu uzlaznu funkciju postoji trajno regulacijsko odstupanje. Ulazni signal oblika parabole ovaj sustav ne može slijediti.

Primjer 4:

Za servo-mehanizam čija je prijenosna funkcija otvorenog kruga

$$W_0(s) = \frac{20}{s^2(1+0.5s)(1+0.04s)}$$

odrediti:

a) konstantu i pogrešku položaja, K_p i e_p,
b) konstantu i pogrešku brzine, K_v i e_v,
c) konstantu i pogrešku ubrzanja, K_a i e_a.

Rješenje :

S obzirom da se radi o sustavu druge vrste nema potrebe računati pogreške ustaljenog stanja položaja i brzine, one su jednake nuli, a njihovi koeficijenti su beskonačni.

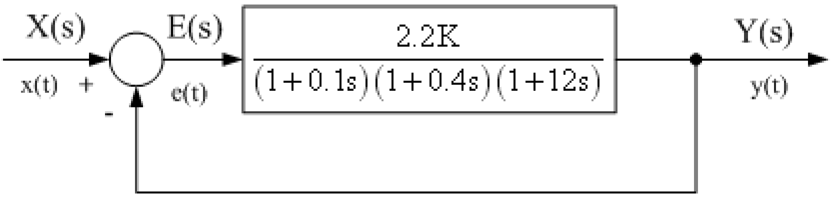
Koeficijent i pogreška ubrzanja su:

$$K_a = \lim_{s\to 0}\left[s^2 \cdot W_0(s)\right] = \lim_{s\to 0}\left[s^2 \cdot \frac{20}{s^2(1+0.5s)(1+0.04s)}\right] = 20 \quad \Rightarrow \quad e_a = \frac{1}{K_a} = \frac{1}{20} = 0.05$$

Na osnovu dobivenih rezultata može se zaključiti slijedeće:
Izlazni signal servo-mehanizama vjerno slijedi pobudu u slučaju kad su na ulazu jedinična odskočna, te jedinična uzlazna funkcija, dok za paraboličnu pobudu postoji trajno odstupanje izlaza u odnosu na ulazni signal (pobudu).

Primjer 5: (Sinteza sustava uz kriterij: pogreška položaja konačna)

Za sustav prikazan na slici 68. odrediti iznos pojačanja K, tako da pogreška ustaljenog stanja položaja iznosi $e_p = 0.1$.



Slika 68. Blok shema zadanog sustava

Rješenje:

Budući da je sustav zatvoren u regulacijsku petlju jediničnom negativnom povratnom vezom, prijenosna funkcija otvorenog sustava jednaka je prijenosnoj funkciji izravne grane:

$$W_0(s) = \frac{2.2K}{(1+0.1s)(1+0.4s)(1+12s)}$$

pojačanje K za koje sustav zadovoljava postavljeni kriterij određuje se pomoću jednadžbi za koeficijent (5.6) i grešku položaja (5.5), na slijedeći način:

$$e_p = \frac{1}{1+K_p} \quad \Rightarrow \quad K_p = \frac{1-e_p}{e_p} = \frac{1-0.1}{0.1} = 9$$

$$K_p = \lim_{s\to 0}\left[W_0(s)\right] = \lim_{s\to 0}\frac{2.2K}{(1+0.1s)(1+0.4s)(1+12s)} = 9$$

$$2.2K = 9$$

$$K = 4.091$$

Primjer 6:

Prijenosna funkcija otvorenog kruga za sustav s jediničnom povratnom vezom je:

$$W_0(s) = \frac{8}{s^2\left(s^2+4s+8\right)\left(s^2+3s+12\right)}$$

Odrediti pogrešku u praćenju sustava za tri različita slučaja ulaznih signala:

a) x(t) = 5
b) x(t) = 2t
c) x(t) = t ²

Rješenje:

$$e_{ss} = \lim_{s\to 0}\left[s\cdot\frac{X(s)}{1+W_0(s)}\right]$$

a)

$$x(t)=5 \quad\Rightarrow\quad X(s)=\frac{5}{s} \quad\Rightarrow\quad e_p = \lim_{s\to 0}\left[s\cdot\frac{X(s)}{1+W_0(s)}\right] = \lim_{s\to 0}\left[s\cdot\frac{\frac{5}{s}}{1+\frac{8}{s^2\left(s^2+4s+8\right)\left(s^2+3s+12\right)}}\right]$$

$$= \lim_{s\to 0}\left[\frac{5s^2\left(s^2+4s+8\right)\left(s^2+3s+12\right)}{s^2\left(s^2+4s+8\right)\left(s^2+3s+12\right)+8}\right] = \frac{0}{8} = 0$$

b)

$$x(t)=2t \quad\Rightarrow\quad X(s)=\frac{2}{s^2} \quad\Rightarrow\quad e_v = \lim_{s\to 0}\left[s\cdot\frac{X(s)}{1+W_0(s)}\right] = \lim_{s\to 0}\left[s\cdot\frac{\frac{2}{s^2}}{1+\frac{8}{s^2\left(s^2+4s+8\right)\left(s^2+3s+12\right)}}\right]c$$

$$= \lim_{s\to 0}\left[\frac{2s\left(s^2+4s+8\right)\left(s^2+3s+12\right)}{s^2\left(s^2+4s+8\right)\left(s^2+3s+12\right)+8}\right] = \frac{0}{8} = 0$$

)

$$x(t)=t^2 \quad\Rightarrow\quad X(s)=\frac{2}{s^3} \quad\Rightarrow\quad e_a = \lim_{s\to 0}\left[s\cdot\frac{X(s)}{1+W_0(s)}\right] = \lim_{s\to 0}\left[s\cdot\frac{\frac{2}{s^3}}{1+\frac{8}{s^2\left(s^2+4s+8\right)\left(s^2+3s+12\right)}}\right]$$

$$= \lim_{s\to 0}\left[\frac{2\left(s^2+4s+8\right)\left(s^2+3s+12\right)}{s^2\left(s^2+4s+8\right)\left(s^2+3s+12\right)+8}\right] = \frac{2\cdot 8\cdot 12}{8} = 24$$

Odziv sustava vjerno prati prve dvije pobude, dok u zadnjem slučaju postoji pogreška ustaljenog stanja, a radi se o pogrešci ustaljenog stanja ubrzanja, jer je pobuda paraboličnog oblika. Ako se ovi rezultati analiziraju i usporede s vrijednostima iz tablice 5.1, može se zaključiti da su dobiveni rezultati očekivani i točni s obzirom da se radi o sustavu druge vrste.

4.1. Riješeni primjeri

Koraci rješavanja zadataka:

1. Odrediti prijenosnu funkciju sustava u frekvencijskom području
2. Odrediti amplitudu $A(\omega)$

3.1. Određivanje rezonantne ω_r i M_r

- Derivirati amplitudnu karakteristiku po frekvenciji i izjednačiti s nulom
- Odrediti ω_r
- Odrediti M_r uvrštavanjem ω_r u $A(\omega)$

3.2. Određivanje frekvencijskog pojasa

- Formirati jednadžbu $A(\omega_g) = \dfrac{A(0)}{\sqrt{2}}$
- Iz ove jednadžbe odrediti ω_g

Primjer 1:

Odrediti rezonantnu frekvenciju ω_r i rezonantno izdizanje M_r za sustav zadan prijenosnom funkcijom:

$$W(s) = \frac{5}{s^2 + 2s + 5}$$

Rješenje:

1. način:

Prvi korak u rješavanju zadatka predstavlja prelazak u frekvencijsko područje, supstitucijom $s = j\omega$:

$$W(j\omega) = \frac{5}{-\omega^2 + 2j\omega + 5} = \frac{5}{5 - \omega^2 + 2j\omega}$$

Amplituda zadanog sustava jednaka je modulu prijenosne funkcije:

$$|W(j\omega)| = \left|\frac{5}{5 - \omega^2 + 2j\omega}\right| = \frac{|5|}{|5 - \omega^2 + 2j\omega|} = \frac{5}{\sqrt{\left(5 - \omega^2\right)^2 + (2\omega)^2}} = A(\omega)$$

Maksimalna amplituda računa se, prema (5.17), kao maksimum funkcije $M(\omega)$, dakle deriviranjem funkcije i njenim izjednačavanjem s nulom odakle se dobije ω_r, koji se potom uvrsti u izraz kojim je definirana amplitudna karakteristika.

$$\frac{dA(\omega)}{d\omega}=\frac{d}{d\omega}\left(\frac{5}{\sqrt{\left(5-\omega^2\right)^2+\left(2\omega\right)^2}}\right)=$$

$$=\frac{0-5\cdot\frac{1}{2}\cdot\left[\left(5-\omega^2\right)^2+\left(2\omega\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}}\cdot\left[2\cdot\left(5-\omega^2\right)\cdot\left(-2\omega\right)+2\cdot\left(2\omega\right)\cdot 2\right]}{\left(5-\omega^2\right)^2+\left(2\omega\right)^2}=$$

$$=\frac{-\frac{5}{2}\cdot\left[4\omega^3-20\omega+8\omega\right]}{\left[\left(5-\omega^2\right)^2+\left(2\omega\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}=$$

$$=\frac{-10\omega\cdot\left[\omega^2-3\right]}{\left[\left(5-\omega^2\right)^2+\left(2\omega\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}=0\quad\Rightarrow\quad -10\omega\cdot\left[\omega^2-3\right]=0\quad\Rightarrow\quad \omega_{1,2}=\pm\sqrt{3}$$

Matematički gledano postoji još jedno rješenje ove jednadžbe $\omega = 0$, ali ono praktično gledano nema smisla, pa se ne uzima u obzir. Dakle, $\omega_r = 1.73$. (u tehničkoj praksi nema negativnih frekvencija)
Uvrštavanjem rezonantne frekvencije u izraz za amplitudu $A(\omega)$ dobije se rezonantno izdizanje M_r .

$$M_r = A(\omega_r)=\frac{5}{\sqrt{\left(5-\omega_r^{\,2}\right)^2+\left(2\omega_r\right)^2}}=\frac{5}{\sqrt{\left(5-3\right)^2+\left(2\cdot\sqrt{3}\right)^2}}=\frac{5}{\sqrt{4+12}}=\frac{5}{4}=1.25$$

2. način:

Budući da se radi o sustavu drugog reda rezonantno izdizanje moguće je izračunati na jednostavniji način, pomoću formule :

$$M_r=\frac{K}{2\varsigma\sqrt{1-\zeta^2}}$$

Pri tom je naravno, potrebno odrediti faktor prigušenja sustava.

Da bi se odredio faktor prigušenja treba zadanu prijenosnu funkciju napisati u općem obliku:

$$W(s)=\frac{5}{s^2+2s+5}=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$$

Usporedbom lijeve i desne strane znaka jednakosti očite su slijedeće jednakosti:

$$\omega_n^2=5\quad\Rightarrow\quad\omega_n=\sqrt{5}=2.23$$

$$2\zeta\omega_n=2\quad\Rightarrow\quad\zeta=\frac{1}{\omega_n}=\frac{1}{\sqrt{5}}=0.45$$

Pa je rezonantno izdizanje:

$$M_r = \frac{K}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}} = \frac{1}{2\cdot 0.45\cdot\sqrt{1-0.45^2}} = \frac{1}{0.8} = 1.25$$

Rješenja se očito podudaraju.

Primjer 2:

Odrediti propusni opseg sustava čija je prijenosna funkcija:

$$W(s) = \frac{1}{1+s}$$

Rješenje:

Amplitudna karakteristika sustava je:

$$A(\omega) = |W(j\omega)| = \left|\frac{1}{1+j\omega}\right| = \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2}}$$

Granična frekvencija ω_g (kojom je određen propusni opseg sustava) odredi se iz jednadžbe, koja se dobije izjednačavanjem amplitudne karakteristike sustava i iznosa amplitude u graničnoj frekvenciji. Iznos amplitude u graničnoj frekvencije je po definiciji jednak 70% iznosa amplitude pri frekvenciji $\omega = 0$, tj.:

$$A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2}}$$

$$A(\omega_g) = \frac{A(0)}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.707$$

$$A(\omega)\big|_{\omega=\omega_g} = A(\omega_g)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+\omega_g{}^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad 1+\omega_g{}^2 = 2 \quad \Rightarrow \quad \omega_g = 1\,\mathrm{rad/s}$$

Primjer 3:

Zadana je sinusna prijenosna funkcija otvorene regulacijske petlje:

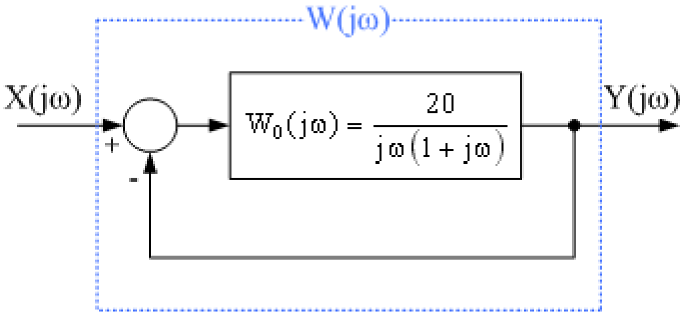
$$W_0(j\omega) = \frac{20}{j\omega \cdot (1 + j\omega)}$$

Odrediti za slučaj jedinične povratne veze:

a) rezonantnu frekvenciju ω_r,
b) rezonantno izdizanje (rezonantnu vrijednost amplitude) zatvorenog kruga M_r,
c) graničnu frekvenciju propusnog opsega zatvorenog sustava ω_g.

Rješenje:

S obzirom da je zadana prijenosna funkcija otvorenog kruga, a da je sustav zatvoren u regulacijsku petlju preko negativne jedinične povratne veze, potrebno je prvo odrediti prijenosnu funkciju zatvorenog kruga, prikazanog slikom 69.



Slika 69. Blok dijagram zatvorenog regulacijskog kruga

$$W(j\omega) = \frac{W_0(j\omega)}{1 + W_0(j\omega)} = \frac{\dfrac{20}{j\omega \cdot (1 + j\omega)}}{1 + \dfrac{20}{j\omega \cdot (1 + j\omega)}} = \frac{20}{j\omega \cdot (1 + j\omega) + 20} = \frac{20}{-\omega^2 + j\omega + 20} = \frac{20}{20 - \omega^2 + j\omega}$$

a) Određivanje rezonantne frekvencija ω_r

Prvi korak predstavlja određivanje amplitudne karakteristike:

$$|W(j\omega)| = \left| \frac{20}{20 - \omega^2 + j\omega} \right| = \frac{20}{\sqrt{(20 - \omega^2)^2 + \omega^2}} = A(\omega)$$

Da bi se odredila rezonantna frekvencija potrebno je prvu derivaciju amplitude izjednačiti s nulom, te slijedi:

$$\frac{dA(\omega)}{d\omega} = \frac{d}{d\omega}\left(\frac{20}{\sqrt{(20 - \omega^2)^2 + \omega^2}} \right) = \frac{0 - 20 \cdot \left[(20 - \omega^2)^2 + \omega^2 \right]^{-\frac{1}{2}} \cdot \left[2 \cdot (20 - \omega^2) \cdot (-2\omega) + 2\omega \right]}{(20 - \omega^2)^2 + \omega^2} =$$

$$\frac{dA(\omega)}{d\omega}=\frac{0-20\cdot\left[2\cdot\left(20-\omega^2\right)\cdot(-2\omega)+2\omega\right]}{\left[\left(20-\omega^2\right)^2+\omega^2\right]^{\frac{3}{2}}}=0 \quad\Rightarrow\quad -20\omega\cdot\left(2\omega^2-39\right)=0 \;\Rightarrow\; \omega_{1,2}=4.42\,\text{rad/s}$$

Dakle, rezonantna frekvencija je $\omega_r = 4.42\,\text{rad/s}$

b) Određivanje rezonantnog izdizanja M_r

Rezonantno izdizanje predstavlja vrijednost amplitude pri rezonantnoj frekvenciji, a dobije se uvrštenjem rezonantne frekvencije u izraz za amplitudu:

$$M_r = A(\omega)\big|_{\omega=\omega r}=\frac{20}{\sqrt{\left(20-\omega_r^{\;2}\right)^2+\omega_r^{\;2}}}=\frac{20}{\sqrt{\left(20-4.42^2\right)^2+4.42^2}}=4.5$$

Dakle, rezonantno izdizanje iznosi 4.5.

c) Granična frekvencija ω_g

Granična frekvencija dobije se izjednačavanjem amplitude u ovisnosti o frekvenciji s iznosom $1/\sqrt{2}=0.707$, te slijedi:

$$A(\omega)\big|_{\omega=\omega g}=\frac{20}{\sqrt{\left(20-\omega_g^{\;2}\right)^2+\omega_g^{\;2}}}=\frac{1}{\sqrt{2}} \quad\Rightarrow\quad 20\cdot\sqrt{2}=\sqrt{\left(20-\omega_g^{\;2}\right)^2+\omega_g^{\;2}}\Big/^2$$

$$800=\left(20-\omega_g^{\;2}\right)^2+\omega_g^{\;2}$$

$$800=\omega_g^{\;4}-40\omega_g^{\;2}+400+\omega_g^{\;2}$$

$$\omega_g^{\;4}-39\omega_g^{\;2}-400=0$$

$$\omega_g^2=\frac{39\pm\sqrt{39^2+4\cdot400}}{2}=\frac{39\pm55.87}{2}=47.43 \quad\Rightarrow\quad \omega_g=6.887\ \text{rad/s}$$

Granična frekvencija, koja određuje širinu propusnog opsega sustava, je $\omega_g = 6.887\ \text{rad/s}$.

Zaključak: Sustavi automatike su nisko frekvencijski sustavi, što znači da im je najčešće donja granična frekvencija nula (propusni opseg određen je gornjom graničnom frekvencijom).