

Djelovanje PID regulatora

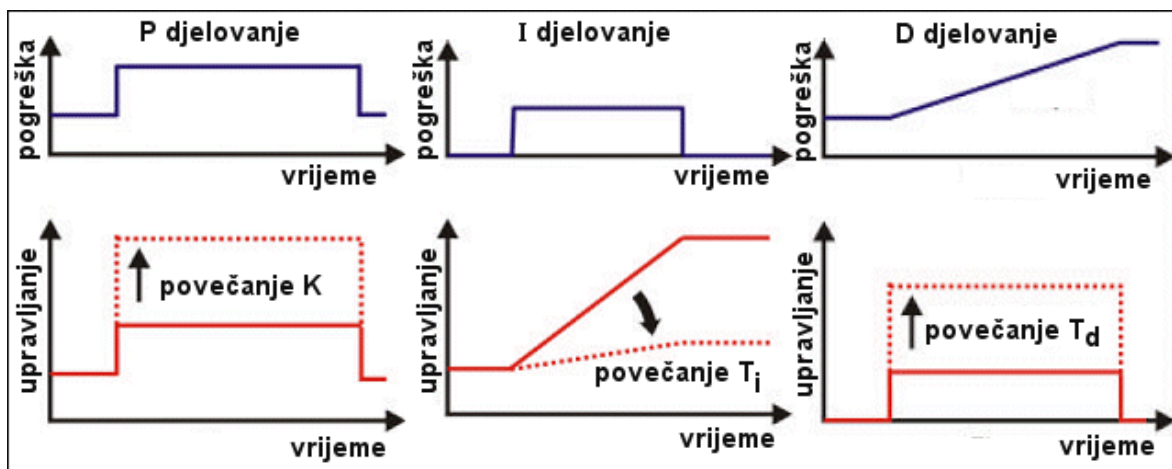
PID regulator nije ništa drugo nego gruba matematička kopija postupka kojeg bi iskusni čovjek operater koristio pri vođenju.

Zamislamo primjer vođenja broda. Kormilar promatra trenutni kurs i željeni kurs u kojem bi brod trebao voziti. Na temelju njihove razlike (pogreške $e(t)$) on provodi upravljačku akciju – zakret lista kormila (upravljanje $u(t)$) koje mu je obično proporcionalno s iznosom pogreške – što je razlika između željenog i stvarnog kursa veća to će više zakrenuti kormilo (P – proporcionalno djelovanje). Upravljački signal proporcionalnog djelovanja u svakom trenutku ovisi o trenutnoj vrijednosti pogreške pa je P djelovanje vezano sa **sadašnjosti**, s onim što se sada događa.

Dobar kormilar neće samo promatrati pogrešku kursa broda, on će pratiti i što se s brodom događa tijekom mijenjanja kursa, on će pamtiti prošlost pogreške. Zašto? Zato da bi kod određivanja upravljačkog signala uzeo u obzir i cijeli tijek mijenjanja pogreške. Kormilar prati što se događa u prošlosti pogreške, a najgrublji matematički model prošlosti je integral. Dakle I – integracijska komponenta na neki način modelira **prošlost**, a kroz prošlost i iskustvo kormilara.

Treći mogući način djelovanja je pokušati predvidjeti i budućnost, pokušati predvidjeti što će se s pogreškom zbivati u budućnosti. Upravljački signal se vezuje i s onim što će se u budućnosti dogoditi, a najjednostavniji matematički model budućnosti je derivacija. Zbog toga postoji i treća D – derivacijska konstanta koja na neki način modelira **budućnost**, a kroz nju i intuiciju kormilara.

PID regulator je prema tome grubi matematički model pokušaja da se kod određivanja upravljačke akcije uzme u obzir i sadašnjost (P – djelovanje) i prošlost (I – djelovanje) i budućnost (D – djelovanje). Upravljački se signal formira ovisno o trenutnoj vrijednosti pogreške (P – djelovanje), ovisno o tome kako se pogreška mijenjala u prošlosti (I – djelovanje) i ovisno o tome kakav je trenutni trend porasta pogreške (D-djelovanje). Slika 5.1.14a to zorno prikazuje za primjer nezavisnog djelovanja pojedinih komponenti PID regulatora. Ne smijemo zaboraviti da kod PID regulatora sva tri dijela djeluje istovremeno, pa je upravljačka akcija rezultata njihovog zajedničkog djelovanja što unosi probleme kod određivanja konstanti regulatora.



Utjecaji proporcionalnog, integracijskog i derivacijskog dijela PID regulatora mogu se promatrati i u odnosu na [specifikacije vremenskog odziva](#) zatvorenog regulacijskog sustava. Proporcionalni član djeluje na vrijeme porasta, ali se njegovim povećanjem ne može ukloniti pogreška ustaljenog stanja. Integracijski član djeluje na smanjenje pogreške ustaljenog stanja, ali može pogoršati dinamička svojstva sustava (usporiti sustav). Derivacijski dio utječe na povećanje stabilnosti sustava, smanjuje prebačaj i poboljšava karakteristike prijelaznog dijela odziva. Kako pojedine konstante utječu na svojstva vremenskog odziva zatvorenog regulacijskog sustava sumira tablica. Prikazan je utjecaj povećanja K , smanjenja T_i i povećanja T_d . Pri tome je potrebno naglasiti da se tablica uzme samo okvirno, a treba se voditi računa i o tome da su konstante međusobno ovisne. Mijenjanje jedne od njih može promijeniti tip utjecaja ostalih konstanti.

	VRIJEME PORASTA	MAKSIMALNI PREBAČAJ	VRIJEME SMIRIVANJA	POGREŠKE UST. STANJA
K raste	smanjuje	povećava	malo utječe	smanjuje, ali ne može potpuno ukloniti
T_i smanjuje	smanjuje	povećava	povećava	potpuno uklanja
T_d raste	malo utječe	smanjuje	smanjuje	malo utječe

Tablica 5.1. Utjecaji pojedinih parametara PID regulatora na vremenski odziv

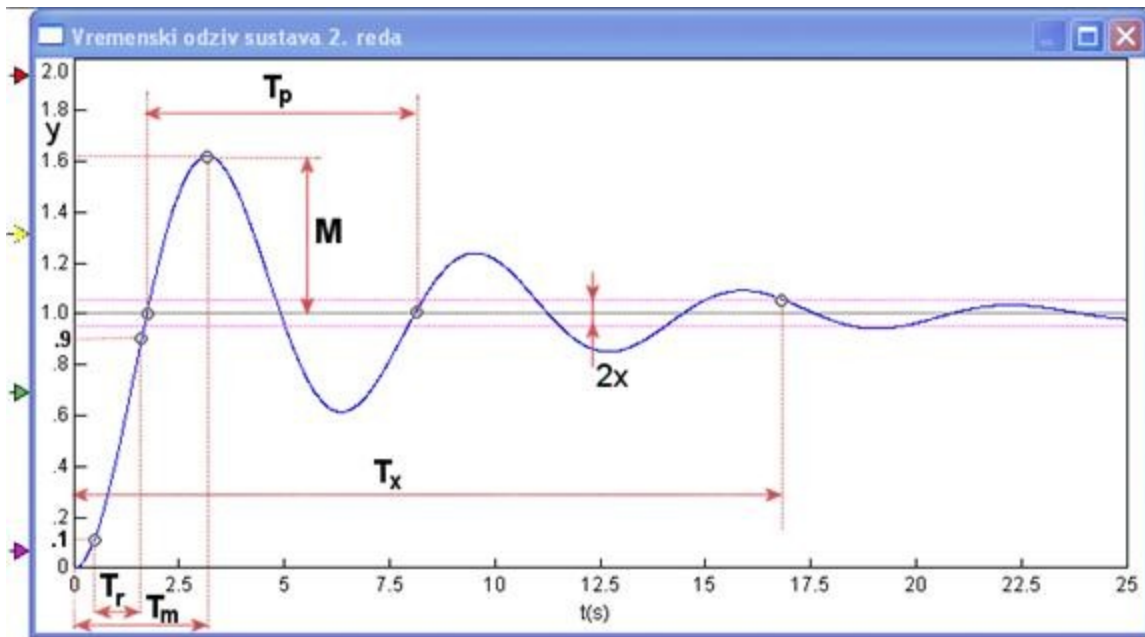
Ponekad je dovoljno djelovati samo na statički ili samo na dinamički dio odziva, pa se definiraju varijante PID regulatora kod kojih nema derivacijskog ili integracijskog djelovanja. Takvi su regulatori poznati pod nazivom PI (proporcionalno – integracijski) i PD (proporcionalno – derivacijski) regulatori, a najjednostavnija verzija su samo P (proporcionalni) regulatori kod kojih nema ni integracijskog, ni derivacijskog djelovanja.

Kod definiranja željenog ponašanja sustava obično najprije definiramo par konjugirano-kompleksnih polova koji bi trebali određivati svojstva sustava. Nazivamo ih **dominantni polovi**. Oni su u s-ravnini najbliže imaginarnoj osi. Ukoliko sustav treba imati više od dva pola ostale polove nastojimo udaljiti što više prema negativnom dijelu realne osi s-ravnine, kako bi njihov utjecaj na ponašanje sustava bio što manji. Dominantni su polovi oni koji u najvećoj mjeri definiraju svojstva sustava, pa željeni vremenski odziv sustava (specifikacije odziva u vremenskoj domeni) definiramo za odziv sustava drugog reda s konjugirano-kompleksnim

polovima. Pri tome se obično izabire da pojačanje sustava za istosmjerni signal ($\omega=0$) bude jednako jedinici, što znači da statička prijenosna funkcija sustava treba biti

$$|G(j\omega)| = 1 \text{ za } \omega = 0$$

Odziv takvog sustava na jedinični skok nazivamo **oscilatorno prigušeni odziv**. Prikazuje ga slika A-2.1.



Slika A-2.1. Oscilatorno prigušeni odziv sustava drugog reda

Na slici su označene i neke veličine kojima karakteriziramo vremenski odziv sustava i nazivamo ih **specifikacije u vremenskoj domeni**:

T_r - vrijeme porasta (eng. *RiseTime*) koje se definira kao vrijeme u kojem izlazna veličina zatvorenog regulacijskog sustava naraste sa 10% na 90% svoje vrijednosti ustaljenog stanja ukoliko je na ulazu dovedena jedinična odskočna pobuda. Ponekad se vrijeme porasta definira od 0 do trenutka kada odziv prvi put dođe do vrijednosti ustaljenog stanja, a prije definirano vrijeme se zove vrijeme porasta 10/90 (eng. *10/90 Rise Time*)

T_x - vrijeme smirivanja na x % vrijednost (eng. *x% Settling Time*) koje se definira kao vrijeme za koje odziv sustava uđe u $\pm x$ % konačne vrijednosti odziva. Na primjer za situaciju sa slike A-2.1 vrijeme smirivanja na 2% vrijednost je vrijeme za koje odziv sustava uđe u pojas između 0.98 i 1.02 vrijednosti izlaznog signala.

T_p - period prigušenih oscilacija i s njim povezana frekvencija prigušenih oscilacija $f_p = 1/T_p$ i kružna frekvencija prigušenih oscilacija $\omega_p = 2\pi f_p$

T_m - vrijeme prvog, maksimalnog prebačaja u odzivu sustava (*eng. Peak Time*) i

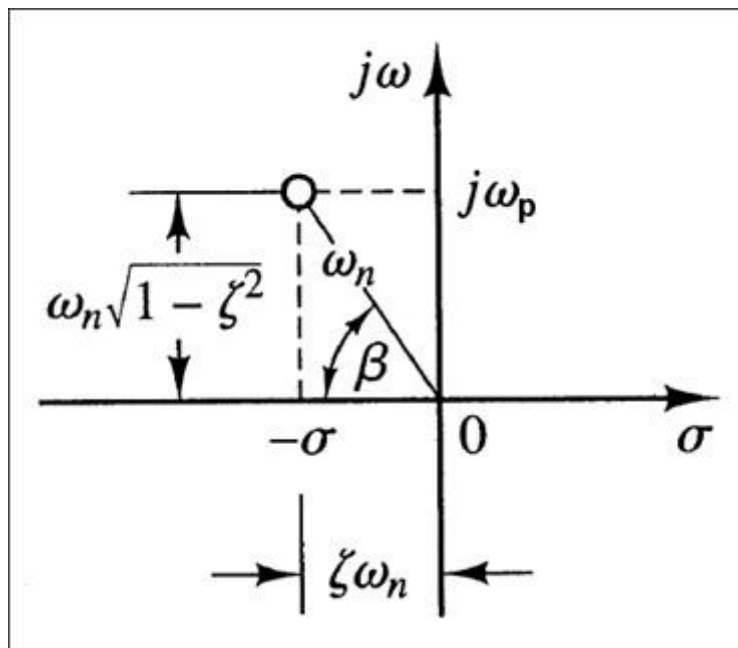
M – iznos prvog, maksimalnog prebačaja (*eng. Maximal Overshoot*) koji se često definira i u postocima konačne vrijednosti odziva i naziva **maksimalni postotni prebačaj** (*eng. Maximal Percent Overshoot*).

Ponekad se definira i **T_d** – vrijeme kašnjenja (*eng. Delay Time*) kao vrijeme od 0 do trenutka kada odziv dosegne 50 % konačne vrijednosti.

Zanimljivo je ove veličine povezati s položajem polova u s-ravnini sustava drugog reda čiji je to vremenski odziv. Prijenosna funkcija sustava je

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{\omega_n^2}{(s + \sigma - j\omega_p)(s + \sigma + j\omega_p)} \quad (\text{A.2.1})$$

Slika D-1.2 prikazuje osnovne veličine kojima se karakterizira položaj polova. Prikazan je samo pol u II kvadrantu. Njemu pripada i odgovarajući konjugirano – kompleksni pol u III kvadrantu.



Slika A-2.2. Karakteristične veličine vezane uz položaj konjugirano kompleksnih polova sustava drugog reda

Oznake na slici znače sljedeće:

ω_n - kružna frekvencija neprigušenih oscilacija (frekvencija oscilacija sustava na rubu stabilnosti)

ω_p - kružna frekvencija prigušenih oscilacija definirana periodom prigušenih oscilacija vremenskog odziva

σ - faktor prigušenja (apsolutna vrijednost realnog dijela položaja pola)

ζ - stupanj prigušenja – veličina između 0 i 1 kojom se definira stupanj prigušenja odziva. Ukoliko je jednak 0, polovi leže na imaginarnoj osi i oscilacije su neprigušene, a ukoliko je jednak 1 polovi leže na realnoj osi i odziv je granično aperioidički pa nema oscilacija.

Lako se pokaže da vrijedi:

$$\begin{aligned}\omega_p &= \omega_n \cdot \sqrt{1 - \zeta^2} \\ \sigma &= \zeta \cdot \omega_n \\ \beta &= \arccos(\zeta)\end{aligned}\quad (\text{A.2.2})$$

a iz ovih veličina možemo izračunati i druge specifikacije vremenskog odziva:

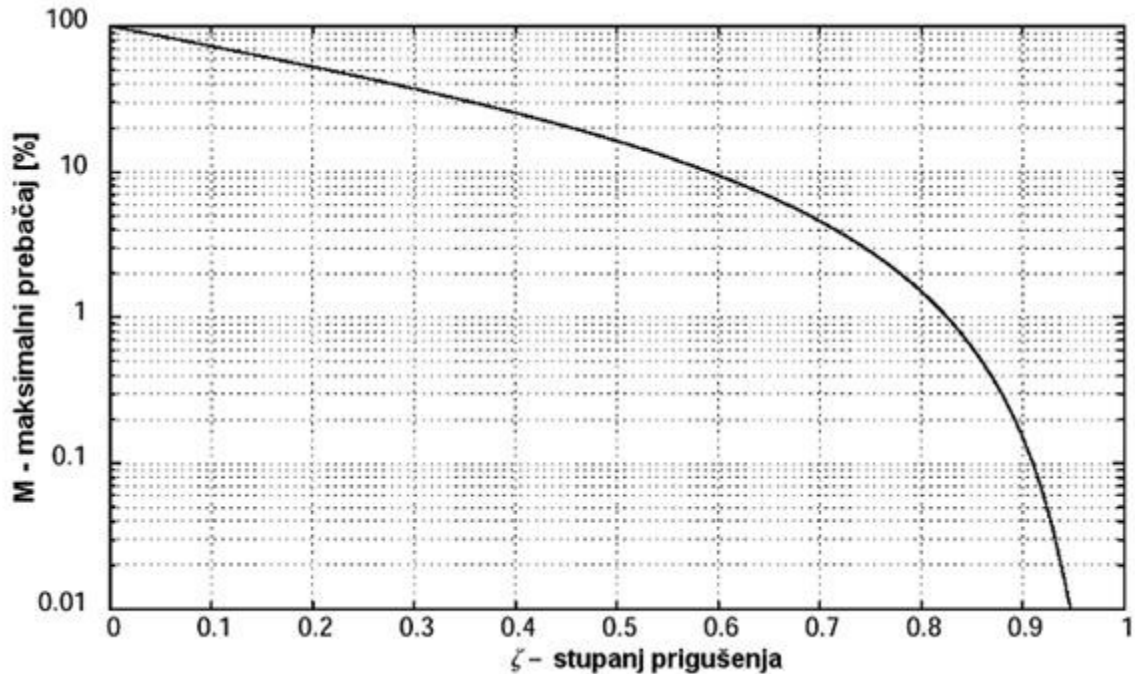
M – maksimalni prebačaj

$$M = e^{-\frac{\pi \cdot \zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}}}, \quad 0 \leq \zeta \leq 1$$

(A.2.3)

Važno je primijetiti da će prebačaj ovisiti samo o β , odnosno ζ . Prema tome linija maksimalnog prebačaja je linija konstantnog stupnja prigušenja i ona je u s-ravnini polupravac iz ishodišta koji s negativnim dijelom realne osi zatvara kut β (Ovo koristimo u [Poglavlju o preslikavanju s-ravnine u z-ravninu](#)).

Slika A-2.3 prikazuje ovisnost maksimalnog prebačaja o stupnju prigušenja za vrijednosti stupnja prigušenja od 0 do 1



Slika A-2.3. Ovisnost maksimalnog prebačaja o stupnju prigušenja

T_r - vrijeme porasta

Vrijeme porasta od 0 do 100% vrijednosti odziva u ustaljenom stanju računa se izrazom

$$T_{r(0/100)} = \frac{\pi - \beta}{\omega_p} \quad (\text{A.2.4})$$

a vrijeme porasta od 10% do 90% računa se iz nelinearne jednadžbe:

$$0.9\sqrt{1-\zeta^2} = e^{-\zeta \cdot T_{r(10/90)}} \cdot \sin(\omega_p \cdot T_{r(10/90)} + \beta) \quad (\text{A.2.5})$$

Za brzi proračun vrijeme porasta od 10% do 90% obično se koriste aproksimacijske formule nultog, prvog i drugog reda. Aproksimacija nultog reda određuje samo gornju granicu, a aproksimacija drugog reda je bliže stvarnim vrijednostima:

Aproksimacija nultog reda:

$$T_{r(10/90)} \leq \frac{3.358}{\omega_n}, \quad 0 < \zeta < 1 \quad (\text{A.2.6})$$

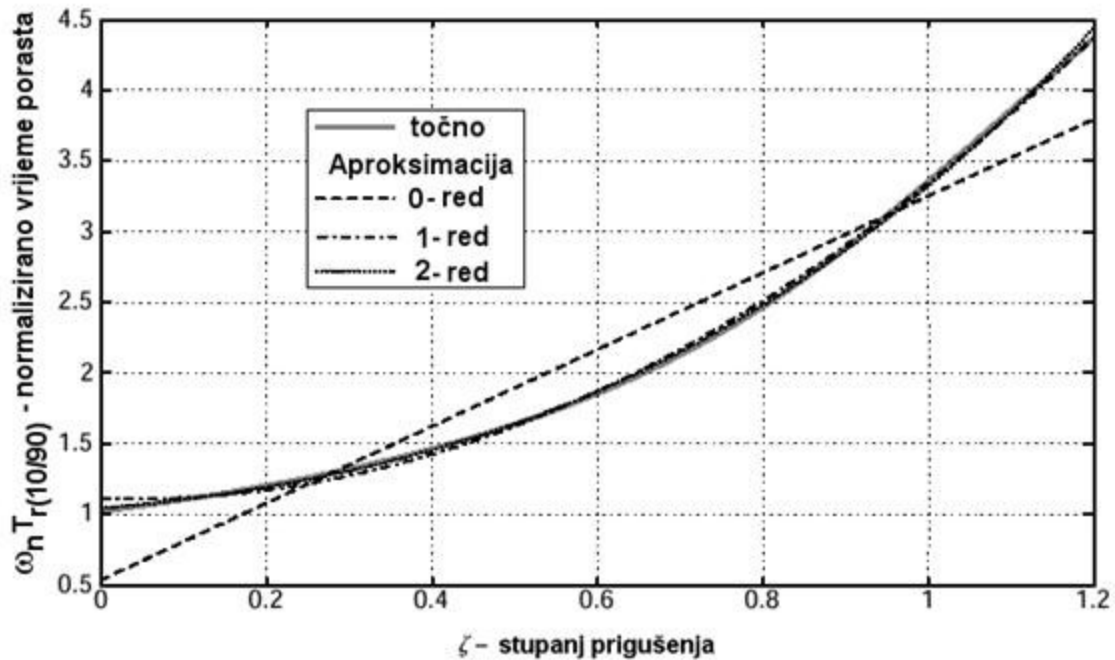
Aproksimacija prvog reda:

$$T_{r(10/90)} \approx \frac{2.7154 \cdot \zeta + 0.537}{\omega_n}, \quad \text{za } 0 < \zeta < 1.2 \quad (\text{A.2.7})$$

Aproksimacija drugog reda:

$$T_{r(10/90)} \approx \frac{2.4183\zeta^2 - 0.1866 \cdot \zeta + 1.1126}{\omega_n}, \quad \text{za } 0 < \zeta < 1.2 \quad (\text{A.2.8})$$

Slika A-2.4. prikazuje ovisnost normiranog vremena porasta $\omega_n \cdot T_{r(10/90)}$ o stupnju prigušenja za različite aproksimacije



Slika A-2.4. Ovisnost normiranog vremena porasta $\omega_n \cdot T_{r(10/90)}$ o stupnju prigušenja za različite aproksimacije

Napomena: Definira li se vrijeme porasta razlikom vremena u kojima tangenta povučena u točki infleksije siječe pravce $y=1$ i $y=0$ trebamo ga računati izrazom:

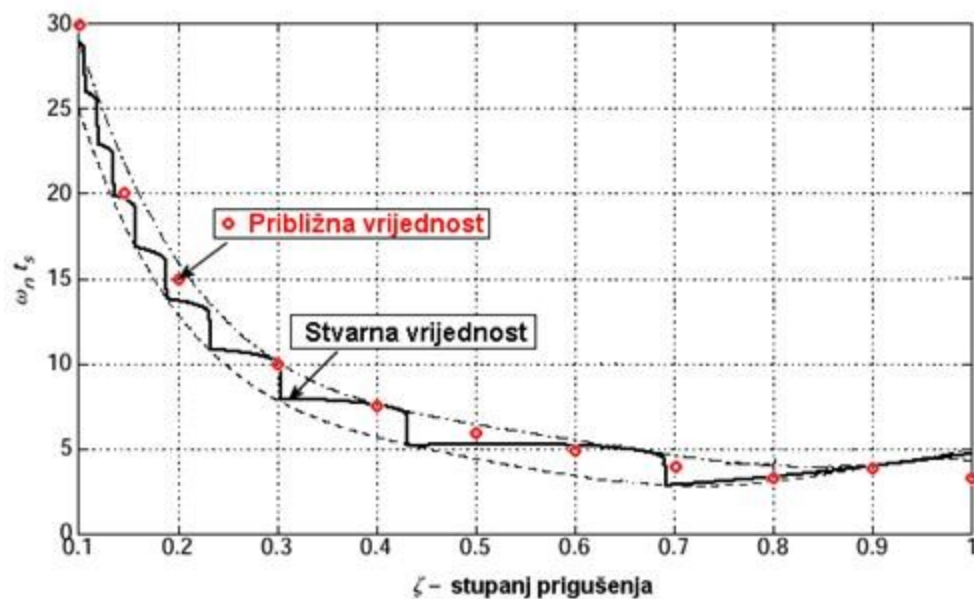
$$T_r = \frac{1}{\omega_n} e^{\beta / \tan \beta} \quad (\text{A.2.9})$$

T_x - vrijeme smirivanja

Vrijeme smirivanja obrnuto proporcionalno ovisi o faktoru prigušenja ζ koji je po definiciji produkt stupnja prigušenja i neprigušene frekvencije $\zeta \omega_n$. Stvarni se proračun ponovo temelji na nelinearnoj jednadžbi, a približne vrijednosti se mogu proračunati približnim jednadžbama:

$$T_{5\%} \approx \frac{3}{|\sigma|}, \quad T_{2\%} \approx \frac{4}{|\sigma|}, \quad T_{1\%} \approx \frac{4.6}{|\sigma|} \quad (\text{A.2.10})$$

Slika A-2.5. prikazuje vrijednosti normiranog vremena smirivanja na 5% vrijednost $\omega_n T_{5\%}$ u ovisnosti o stupnju prigušenja. Na slici su ucrtane i točke aproksimacije.



Slika A-2.5. Ovisnost normiranog vremena smirivanja $\omega_n T_{5\%}$ o stupnju prigušenja

Kod diskretnih sustava vrijedi

$$|z| = e^{\sigma T}$$

$$\sigma = \frac{1}{T} \ln(|z|)$$

pa se vrijeme smirivanja može računati približnim formulama:

$$T_{5\%} \approx \frac{3 \cdot T}{\ln(|z|)}, \quad T_{2\%} \approx \frac{4 \cdot T}{\ln(|z|)}, \quad T_{1\%} \approx \frac{4.6 \cdot T}{\ln(|z|)} \quad (\text{A.2.11})$$

T_m - vrijeme maksimalnog prebačaja

Ovo je najjednostavnija specifikacija. Vrijeme prvog maksimuma odgovara jednoj polovici periode prigušenih oscilacija

$$T_m = \frac{\pi}{\omega_p} \quad (\text{A.2.12})$$

Posebnu skupinu specifikacija čine integrali pogreške kojima se definira sveukupna kvaliteta odziva sustava. Ima ih više:

Integral pogreške -IE (*eng. Integral of Error*) - ne koristi se koristi zato što postoji mogućnost da IE bude jednak nuli i u slučaju kad su površine ispod pozitivnog i negativnog dijela signala pogreške podjednake

$$IE = \int_0^t e(t) \cdot dt \quad (\text{A.2.13})$$

Integral kvadrata pogreške – ISE (*eng. Integral of Square Error*) – koristi se kako bi se u obzir uzele i pozitivne i negativne pogreške.

$$ISE = \int_0^t [e(t)]^2 \cdot dt \quad (\text{A.2.14})$$

Integral apsolutne pogreške – IAE (*eng. Integral of Absolute Error*) – slično kao i u prethodnom slučaju s tim da ga je ovaj integral teže izračunati

$$IAE = \int_0^t |e(t)| \cdot dt \quad (A.2.15)$$

Ponekad se definira i integral vremenski otežane pogreške tako da se u pod-integralnu funkciju doda i množenje s varijablom t (eng. *Weighted Integral Performance Criteria*), kako bi se veći značaj dao pogreškama s većim vremenom (bliže stacionarnom stanju). To je pokušaj definiranja mjere koja bi karakterizirala cjelokupni odziv sustava i preferirala sustave s brzim odzivom i što bržim smirivanjem na referentnu vrijednost. Primjeri su

Integral apsolutne vremenski otežane pogreške – ITAE (eng. *Integral of Time Avaraging Absolute Error*)

$$ITAE = \int_0^t t \cdot |e(t)| \cdot dt \quad (A.2.16)$$

Integral kvadratne vremenski otežane pogreške – ITSE (eng. *Integral of Time Avaraging Square Error*) (Napomena: Ponekad se krivo označava i kraticom **ISTE** koju mi koristimo za integralni kvadrat pogreške otežan kvadratom vremena)

$$ITSE = \int_0^t t \cdot [e(t)]^2 \cdot dt \quad (A.2.17)$$

Integral kvadratne pogreške otežane kvadratom vremenom – ISTE (eng. *Integral of Squared Time Avaraging Error*)

$$ISTE = \int_0^t [t \cdot e(t)]^2 \cdot dt \quad (A.2.18)$$

i općenito sve vremenski otežane kvadratne pogreške mogu se izraziti jednadžbom

$$IST^n E = \int_0^t [t^n \cdot e(t)]^2 \cdot dt \quad (A.2.19)$$

Za $n = 0$ dobijemo ISE (A.2.14), a za $n = 1$ izraz ISTE (A.2.18), dok se ITSE (A.2.17) dobije za $n = 1/2$.

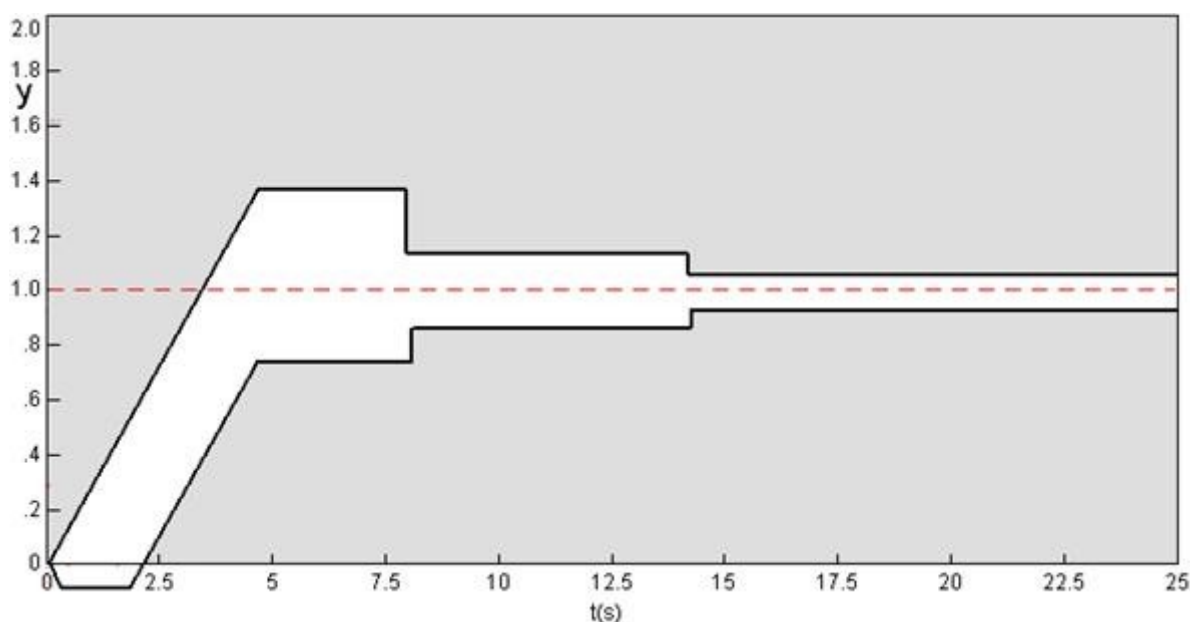
Kod diskretnih sustava definicije su analogne, s tim što se umjesto integrala može uvesti suma s obzirom da baratamo s diskretnim signalima, na primjer

Suma kvadrata pogreške SSE - (eng. Sum of Square Error)

$$SSE = \sum_{k=0}^{\infty} [e(kT)]^2 \quad (\text{A.2.20})$$

gdje je $e(kT)$ pogreška u diskretnom trenutku vremena kT .

Sve specifikacije u vremenskoj domeni uzimamo u obzir na način da definiramo dozvoljeno područje unutar kojega se treba naći odziv sustava na jedinični skok. Primjer područja prikazuje Slika A-2.6.



Slika A-2.6. Dozvoljeno područje odziva sustava na skokovitu pobudu

Pogreške ustaljenog stanja vezane su s dijelom odziva u stacionarnom stanju (kada vrijeme t teži u ∞), a vezuju se i sa ulaznom pobudom. Ukoliko je ulazna pobuda jedinični skok pogreška je **pogreška ustaljenog stanja pomaka ili položaja** (e_{ssp}), za jediničnu uzlaznu pravčastu pobudu, **pogreška je ustaljenog stanja brzine** (e_{ssv}), a za jediničnu uzlaznu paraboličnu pobudu **pogreška ustaljenog stanja ubrzanja** (e_{ssa}). Definiraju se odgovarajućim konstantama pogreški ustaljenog stanja:

$$e_{ssp} = \frac{1}{1 + K_p} = \frac{1}{1 + \lim_{s \rightarrow 0} G_o(s)} = \frac{1}{1 + \lim_{z \rightarrow 1} G_o(z)} \quad (\text{A.2.21})$$

$$e_{ssv} = \frac{1}{K_v} = \frac{1}{\lim_{s \rightarrow 0} s \cdot G_o(s)} = \frac{T}{\lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) G_o(z)} \quad (\text{A.2.22})$$

$$e_{ssa} = \frac{1}{K_a} = \frac{1}{\lim_{s \rightarrow 0} s^2 \cdot G_o(s)} = \frac{T^2}{\lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1})^2 G_o(z)} \quad (\text{A.2.23})$$

Konstante pogreški ustaljenog stanja vezane su i sa vremenskim karakteristikama odziva sustava drugog reda ([J.R.Leigh, Applied Digital Control, Prentice Hall 1984](#)):

- Vrijeme za koje odziv dosegne 50% konačne vrijednosti na skokovitu pobudu je približno $1/k_v$
- Konstantu pogreške ustaljenog stanja brzine se može i izračunati iz stupnja prigušenja i kružne frekvencije neprigušenih oscilacija

$$k_v = \frac{\omega_n}{2 \cdot \zeta} \quad (\text{A.2.24})$$

Koristeći [jednadžbu \(A.3.4\)](#) možemo je vezati i sa pojasom propuštanja sustava ω_B . Na primjer za $\zeta = 1/\sqrt{2} = 1/1.41$ imamo $k_v = 0.79 \omega_B$.

Postoje određena ograničenja na ova dva zadnja izraza (vidi literaturu), pa se i ne koriste toliko. Karakteristike odziva se uglavnom određuju nekim od gornjih specifikacija.