Sveučilište u Zagrebu
Fakultet elektrotehnike
i računarstva

Automatsko upravljanje

Zbirka zadataka

Treće izdanje (verzija 3.0)

Uredili:
Doc.dr.sc. Nikola Mišković
Dr.sc. Tamara Hadjina
Nikola Hure, mag.ing.
Izv.prof.dr.sc. Mato Baotić

Zagreb, prosinac 2015.

Autori zbirke se zahvaljuju djelatnicima Zavoda za automatiku i računalno inženjerstvo, autorima zadataka, bez čijeg doprinosa ne bi bilo ni ove zbirke.

Verzija 3.0 je nastavak na verziju 2.0 zbirke čiji su urednici bili doc.dr.sc. Nikola Mišković, Srećko Jurić-Kavelj, dipl.ing., dr.sc. Marija Đakulović i dr.sc. Vlaho Petrović.

Također, autori se zahvaljuju studentima koji su svojim primjedbama omogućili treće, točnije izdanje ove zbirke. Konstruktivnim primjedbama doprinijeli su (abecednim redom): Dario Antolović, Mihovil Bartulović, Josip Ivanković, Matej Krpan, Simon Najman, Deni Pavlinović, Matija Ruk, Albert Škegro, Mladen Tomljanović, Nataša Vasilj i Tobias Zvonc.

Autori zadataka (abecednim redom): dr.sc. Toni Bjažić, dr.sc. Mišel Brezak, dr.sc. Marija Đakulović, dr.sc. Tamara Hadjina, Nikola Hure, mag.ing. Srećko Jurić-Kavelj, dipl.ing., Filip Mandić, mag.ing., izv.prof.dr.sc. Jadranko Matuško, doc.dr.sc. Nikola Mišković, Branimir Novoselnik, mag.ing. dr.sc. Vlaho Petrović, izv.prof.dr.sc. Mario Vašak.

Sadržaj

1 Formalni prikaz sustava automatskog upravljanja 1

2 Matematičko modeliranje procesa 8

3 Linearizacija nelinearnih sustava 27

4 Laplaceova transformacija i prikaz sustava pomoću težinske i prijelazne funkcije 53

5 Prikaz sustava u prostoru stanja 64

6 Prikaz sustava pomoću frekvencijske karakteristike 70

7 Polovi, nule i vremenski odzivi 124

8 Stabilnost linearnih kontinuiranih sustava upravljanja 144

9 Pokazatelji kvalitete SAU u ustaljenom stanju 156

10 Preslikavanje polova i nula iz s u z ravninu 162

11 Postupci diskretizacije kontinuiranih sustava 167

12 Stabilnost linearnih diskretnih sustava upravljanja 175

13 Parametriranje PID regulatora 185

Poglavlje 1

Formalni prikaz sustava automatskog upravljanja

Zadatak 1.1

a) Zadani su sljedeći elementi sustava automatskog upravljanja:

   i) izvršni član, prijenosne funkcije $G_a(s)$;

   ii) regulator, prijenosne funkcije $G_R(s)$, s izlaznim signalom u;

   iii) mjerni član, prijenosne funkcije $G_m(s)$;

   iv) objekt upravljanja, prijenosne funkcije $G_p(s)$, s izlaznim signalom y.

   Organizirajte ove elemente u tipičnu strukturu sustava automatskog upravljanja te tu strukturu prikažite blokovskim dijagramom.

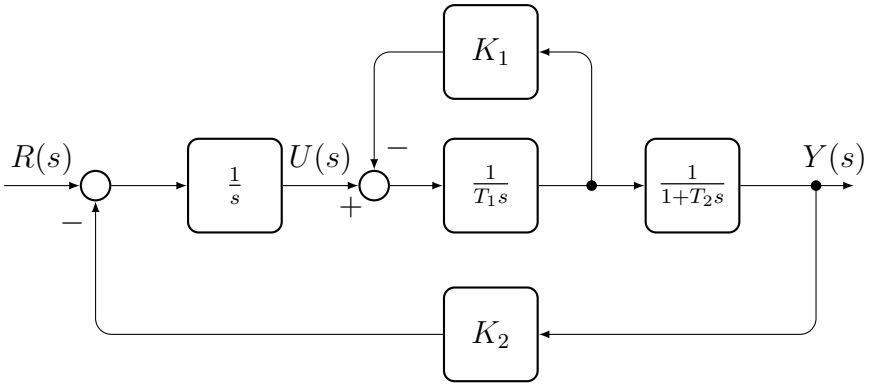
b) Za prikazani sustav upravljanja preko navedenih prijenosnih funkcija izrazite prijenosne funkcije $G_1(s) = \frac{Y(s)}{R(s)}$ i $G_2(s) = \frac{U(s)}{R(s)}$, pri čemu je r referentna veličina.

Zadatak 1.2

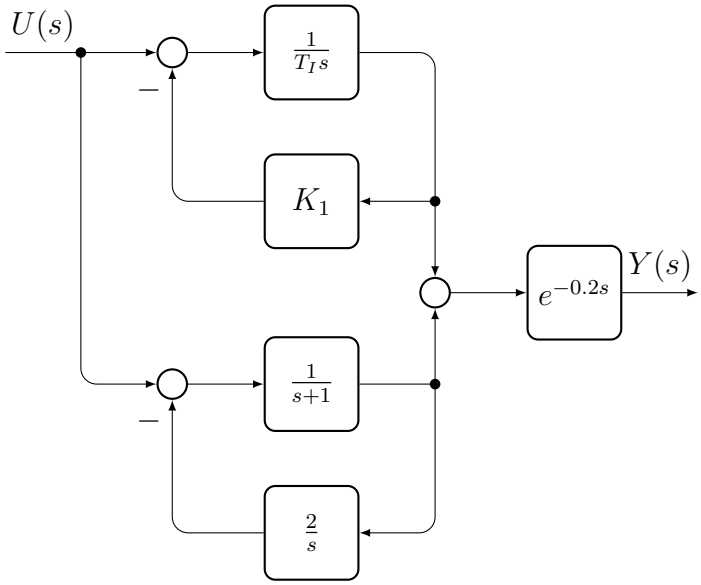
Za sustav čiji je blokovski dijagram prikazan na slici 1.1 potrebno je odrediti prijenosnu funkciju $G(s) = \frac{U(s)}{R(s)}$.

Zadatak 1.3

Za sustav čiji je blokovski dijagram prikazan na slici 1.2 potrebno je odrediti prijenosnu funkciju $G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$.



Slika 1.1: Blokovski dijagram sustava.



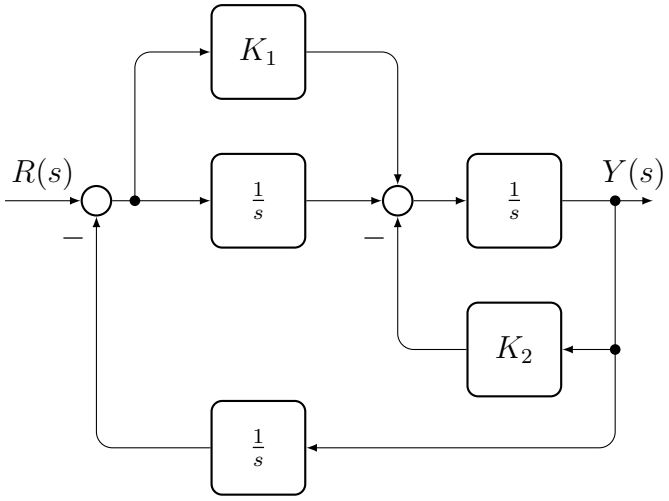
Slika 1.2: Blokovski dijagram sustava.

Zadatak 1.4

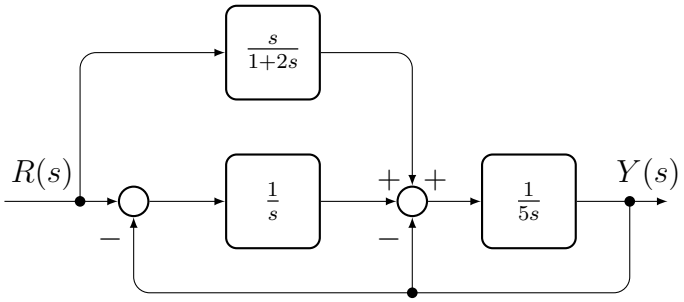
Za sustav čiji je blokovski dijagram prikazan na slici 1.3 potrebno je odrediti prijenosnu funkciju $G(s) = \frac{Y(s)}{R(s)}$.

Zadatak 1.5

Za sustav čiji je blokovski dijagram prikazan na slici 1.4 potrebno je odrediti prijenosnu funkciju $G(s) = \frac{Y(s)}{R(s)}$.



Slika 1.3: Blokovski dijagram sustava.



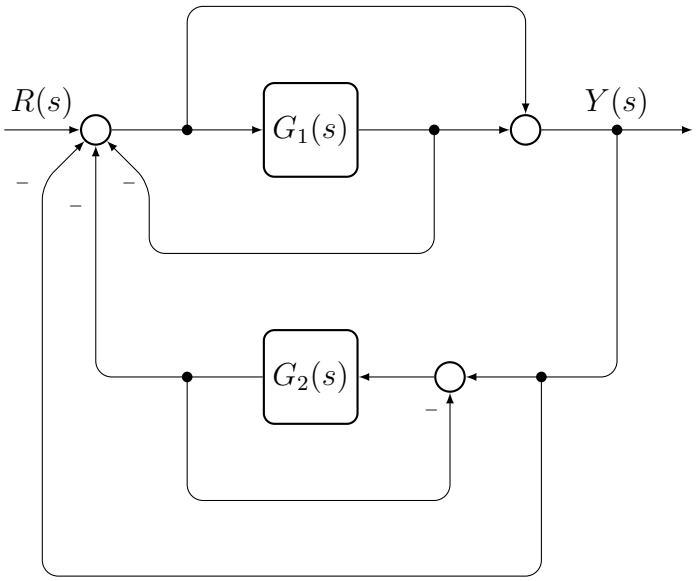
Slika 1.4: Blokovski dijagram sustava.

Zadatak 1.6

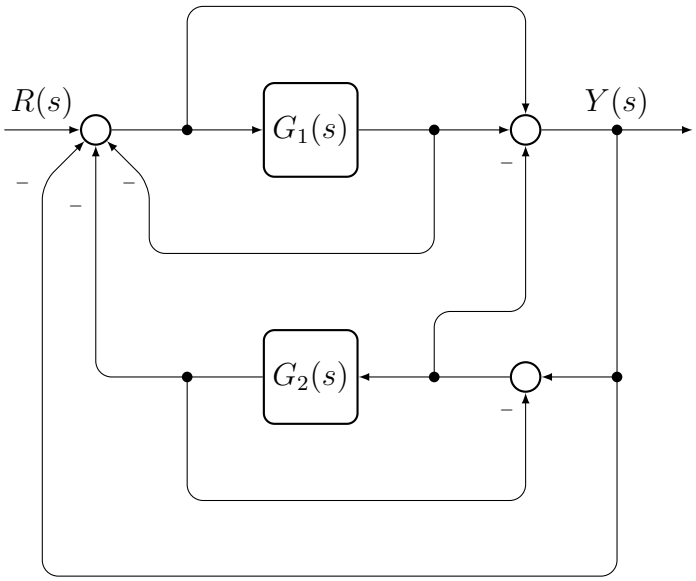
Za sustav čiji je blokovski dijagram prikazan na slici 1.5 potrebno je odrediti prijenosnu funkciju $G(s) = \frac{Y(s)}{R(s)}$.

Zadatak 1.7

Za sustav čiji je blokovski dijagram prikazan na slici 1.6 potrebno je odrediti prijenosnu funkciju $G(s) = \frac{Y(s)}{R(s)}$.



Slika 1.5: Blokovski dijagram sustava.

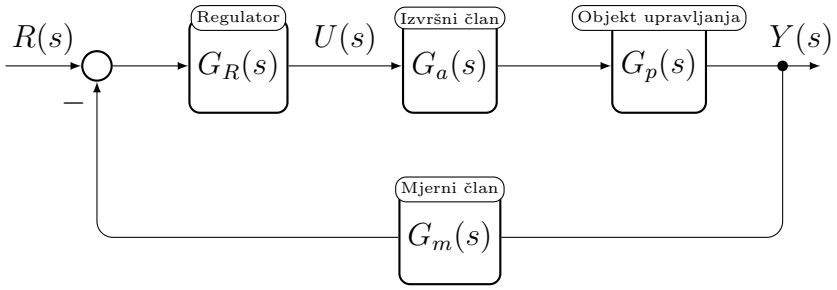


Slika 1.6: Blokovski dijagram sustava.

1.1 Rješenja

Rješenje 1.1

a) Traženi blokovski prikaz dan je na slici 1.7.



Slika 1.7

b)

$$G_1(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G_R(s)G_a(s)G_p(s)}{1 + G_R(s)G_a(s)G_p(s)G_m(s)}$$
$$G_2(s) = \frac{U(s)}{R(s)} = \frac{G_R(s)}{1 + G_R(s)G_a(s)G_p(s)G_m(s)}$$

Rješenje 1.2

$$G(s) = \frac{U(s)}{R(s)} = \frac{\frac{1}{s}}{1 + G_o(s)}$$
$$G_o(s) = K_2 \cdot \frac{1}{s} \cdot \frac{\frac{1}{K_1}}{1 + \frac{T_1}{K_1}s} \cdot \frac{1}{1 + T_2 s}$$
$$\boxed{G(s) = \frac{\left(1 + \frac{T_1}{K_1}s\right)(1 + T_2 s)}{s(1 + \frac{T_1}{K_1}s)(1 + T_2 s) + \frac{K_2}{K_1}}}$$

Rješenje 1.3

Prijenosna funkcija "gornje" grane:

$$G_1(s) = \frac{\frac{1}{T_1 s}}{1 + K_1 \frac{1}{T_1 s}} = \frac{1}{T_1 s + K_1}$$

Prijenosna funkcija "donje" grane:

$$G_2(s) = \frac{\frac{1}{s+1}}{1 + \frac{2}{s}\frac{1}{s+1}} = \frac{s}{s^2 + s + 2}$$

Zbroj "gornje" i "donje" grane:

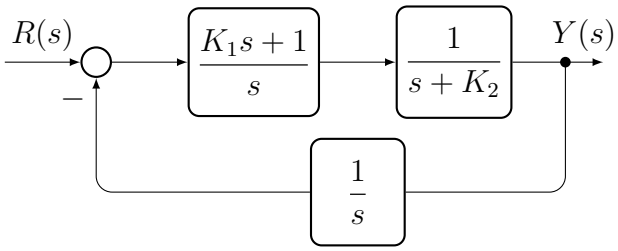
$$G_3(s) = G_1(s) + G_2(s) = \frac{(T_1+1)s^2 + (K_1+1)s + 2}{T_1 s^3 + (K_1+T_1)s^2 + (2T_1+K_1)s + 2K_1}$$

Ukupna prijenosna funkcija:

$$G(s) = G_3(s)\, e^{-0.2s} = \frac{(T_1+1)s^2 + (K_1+1)s + 2}{T_1 s^3 + (K_1+T_1)s^2 + (2T_1+K_1)s + 2K_1} e^{-0.2s}$$

Rješenje 1.4

Blokovskom algebrom sustav se može svesti na oblik prikazan na slici 1.8. Tada je:



Slika 1.8: Modificirana blokovska shema sustava.

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\frac{1}{s+K_2} \cdot \frac{K_1 s+1}{s}}{1 + \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{s+K_2} \cdot \frac{K_1 s+1}{s}} = \frac{s(K_1 s+1)}{s^3 + K_2 s^2 + K_1 s + 1}$$

Rješenje 1.5

$$R(s) = \frac{1}{1+5s}\left[\frac{s}{1+2s}U(s) + \frac{1}{s}\left(U(s) - R(s)\right)\right]$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{s^2 + 2s + 1}{10s^3 + 7s^2 + 3s + 1}$$

Rješenje 1.6

$$\begin{aligned}
A(s) &= \frac{G_1}{1 + G_1} + \frac{1}{1 + G_1} = 1 \\
B(s) &= \frac{G_2}{1 + G_2} \\
C(s) &= \frac{A}{1 + AB} = \frac{1 + G_2}{1 + 2G_2} \\
G(s) &= \frac{C}{1 + C} = \frac{1 + G_2}{2 + 3G_2}
\end{aligned}$$

Rješenje 1.7

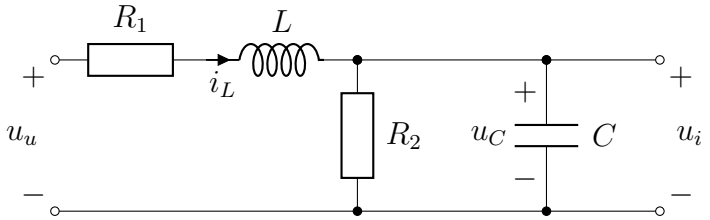
$$\begin{aligned}
A(s) &= \frac{G_1}{1 + G_1} + \frac{1}{1 + G_1} = 1 \\
B(s) &= \frac{1}{1 + G_2} \\
C(s) &= \frac{1}{1 + B(s)} = \frac{1 + G_2}{2 + G_2} \\
D(s) &= \frac{G_2}{1 + G_2} \\
E(s) &= \frac{A(s)C(s)}{1 + A(s)C(s)D(s)} = \frac{1}{2} \\
G(s) &= \frac{E(s)}{1 + E(s)} = \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

Poglavlje 2

Matematičko modeliranje procesa

Zadatak 2.1

Na slici 2.1 prikazana je shema električnog kruga. Napišite diferencijalnu jednadžbu koja opisuje ovisnost izlaznog napona $u_i(t)$ o ulaznom naponu $u_u(t)$. Jednadžbu svedite na oblik u kojem je koeficijent uz $u_i(t)$ jednak 1.



Slika 2.1: Shema električnog kruga.

Zadatak 2.2

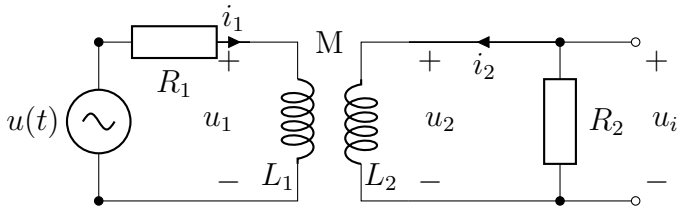
Zadan je električni krug prikazan slikom 2.2. Odredite diferencijalnu jednadžbu koja opisuje ovisnost izlaznog napona u_i o ulaznom naponu u:

$$u_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di2}{dt}$$

$$u_2 = M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di2}{dt}$$

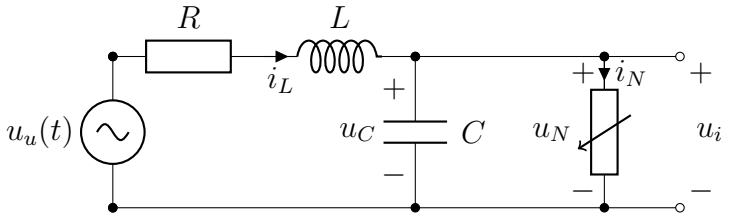
Zadatak 2.3

Zadan je električni krug prikazan slikom 2.3. Nelinerni element ima karak-



Slika 2.2: Shema električnog kruga.

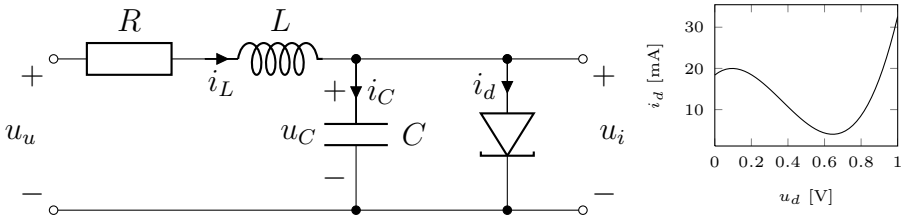
teristiku $u_N = k_N\sqrt{i_N}$ gdje su u_N napon i i_N struja kroz nelinearni element te $k_N = 10\ \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{A}^{\frac{1}{2}}}$. Ostali parametri električnog kruga su: $R = 10\ \Omega$, $L = 10\ \mu\mathrm{H}$, $C = 10$ pF. Odredite diferencijalne jednadžbe $\dot{i}_L = f_1(i_L, u_C, u_u)$ te $\dot{u}_C = f_2(i_L, u_C, u_u)$.



Slika 2.3: Shema električnog kruga.

Zadatak 2.4

Zadan je elektronički sklop s nelinearnim elementom (tunel-diodom) prikazan na slici 2.4a, pri čemu je UI-karakteristika tunel-diode u širem rasponu oko radnog područja prikazana na slici 2.4b. Taj dio UI-krakteristike tunel-diode



(a) Elektronički sklop.

(b) UI-karakteristika tunel-diode.

Slika 2.4: Slike uz četvrti zadatak.

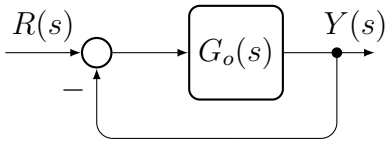
može se opisati sljedećom relacijom:

$$i_d = a_1(u_d - b)^3 - a_2(u_d - b) + a_3,$$

gdje je $u_d = u_i$ napon na tunel-diodi, i_d struja kroz nju, $a_1 = 0.1923\ \frac{\text{A}}{\text{V}^3}$, $a_2 = 0.0436\ \frac{\text{A}}{\text{V}}$, $a_3 = 0.012$ A i $b = 0.37$ V. Ostali parametri elektroničkog sklopa su: $R = 10\ \Omega$, $L = 10\ \mu$H, $C = 10$ pF. Odredite nelinearne diferencijalne jednadžbe za ovaj elektronički sklop $\dot{i}_L = f_1(i_L, u_C, u_u)$ te $\dot{u}_C = f_2(i_L, u_C, u_u)$.

Zadatak 2.5

Električna shema regulatora sustava automatskog upravljanja prikazana je na slici 2.5.



Slika 2.5: Izvedba regulatora s elektroničkim komponentama.

Odredite diferencijalnu jednadžbu koja opisuje vladanje upravljačkog signala regulatora u prema shemi na slici 2.5.

Zadatak 2.6

Zadan je proces prikazan slikom 2.6. Pritom je:

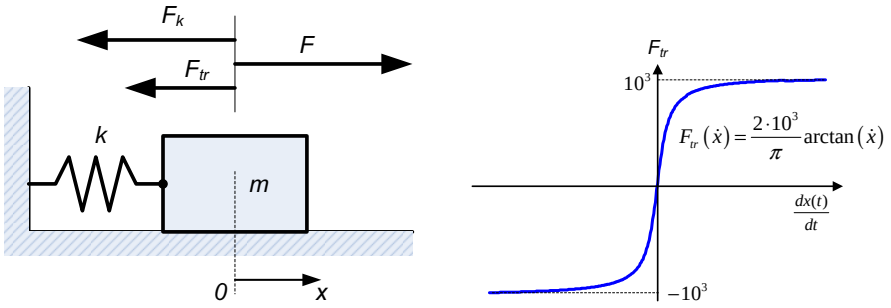
$m = 5$ kg	–	masa tijela,
x [m]	–	pomak u odnosu na ishodište (vidi sliku 2.6a),
$F_k(x) = kx^3$	–	sila opruge,
$k = 10^5\ \frac{\text{N}}{\text{m}^3}$	–	konstanta opruge,
$F_{tr}(\dot{x})$	–	sila trenja oblika prikazanog slikom 2.6b,
$F(t)$	–	pobudna sila paralelna s podlogom.

Postavite diferencijalnu jednadžbu koja prikazuje dinamičku ovisnost pomaka u odnosu na ishodište $x(t)$ o pobudnoj sili $F(t)$.

Zadatak 2.7

Letjelica koja lebdi iznad Zemljine površine ima masu $m = 5000$ kg i prikazana je slikom 2.7. Sile koje djeluju na raketu su: potisna sila F, gravitacijska sila F_g i aerodonamični otpor zraka F_a. Gravitacijska sila je dana izrazom

$$F_g = G\frac{Mm}{(R+x)^2}$$



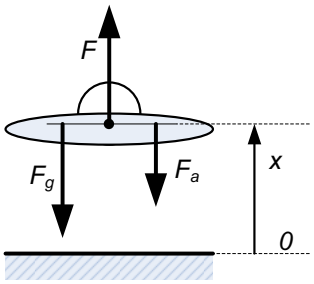
(a) Načelna shema procesa. (b) Sila trenja.

Slika 2.6: Shema mehaničkog sustava.

gdje je $G = 6.67 \cdot 10^{-11}\ \frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kgs}^2}$ gravitacijska konstanta Zemlje, $M = 5.97 \cdot 10^{24}$ kg masa Zemlje, $R = 6.37 \cdot 10^6$ m polumjer Zamlje te je x udaljenost rakete od Zemljine površine. Aerodinamični otpor zraka je dan izrazom

$$F_a = k_1(\dot{x})^3 + k_2\dot{x}$$

gdje su konstante $k_1 = 0.02\ \frac{\mathrm{Ns}^3}{\mathrm{m}^3}$ i $k_2 = 200\ \frac{\mathrm{Ns}}{\mathrm{m}}$. Postavite diferencijalnu



Slika 2.7: Shema mehaničkog sustava.

jednadžbu koja prikazuje dinamičku ovisnost udaljenosti od Zemlje $x(t)$ o potisnoj sili $F(t)$.

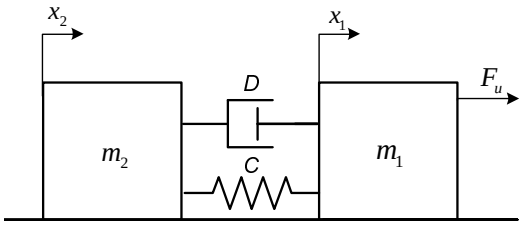
Zadatak 2.8

Dva tijela spojena su oprugom i prigušnicom kako je prikazano slikom 2.8. Na prvo tijelo mase m_1 djeluje sila F_u. Sila opruge ovisi o međusobnoj udaljenosti dvaju tijela Δx, a sila prigušnice ovisi o relativnoj brzini dvaju tijela $\Delta\dot{x}$:

$$F_{opruga} = C \cdot \Delta x,$$
$$F_{prigusnica} = D \cdot \Delta\dot{x}.$$

Vrijednosti sa slike 2.8 su:

x_1	–	položaj prvog tijela [m],
x_2	–	položaj drugog tijela [m],
m_1	–	masa prvog tijela [kg],
m_2	–	masa drugog tijela [kg],
C	–	konstanta krutosti opruge [N/m],
D	–	konstanta prigušenja prigušnice [Ns/m].

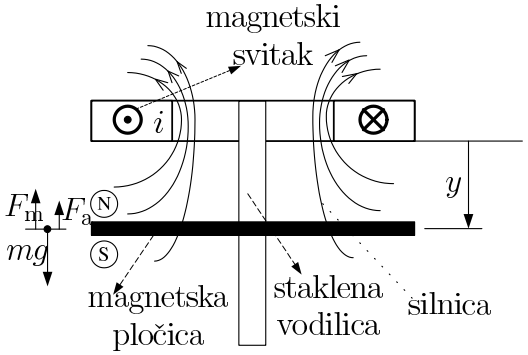


Slika 2.8: Shema mehaničkog sustava.

Potrebno je odrediti diferencijalne jednadžbe koje opisuju gibanje dvaju tijela.

Zadatak 2.9

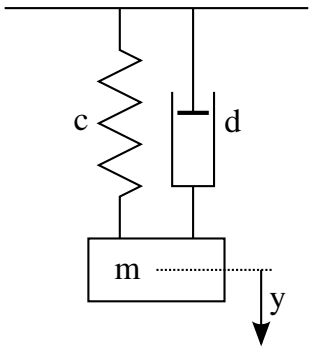
Proces magnetske levitacije shematski je prikazan slikom 2.9. Struja koja



Slika 2.9: Shema mehaničkog sustava - magnetska levitacija.

protječe svitkom stvara magnetsko polje koje magnetskom silom djeluje na pločicu od permanentnog magneta. Pločica se nalazi na staklenoj vodilici pa se može gibati samo duž nje. Magnetska sila koja djeluje na pločicu u smjeru vodilice dana je relacijom (referentni smjerovi ucrtani su na slici 2.9):

$$F_{\mathrm{m}} = \frac{k_1 i}{(y + k_2)^3},$$



Slika 2.10: Mehanički sustav.

gdje je i struja kroz svitak, y je pomak pločice, a k_1 i k_2 su konstante. Proces se nalazi u Zemljinoj atmosferi pa na pločicu, uz silu težu, djeluje još i aerodinamički otpor zraka izražen silom

$$F_{\mathrm{a}} = k_3 \left(\dot{y}\right)^3 + k_4 \dot{y}.$$

Zadane su sljedeće veličine: masa pločice $m = 0.1$ kg, ubrzanje sile teže $g = 9.81\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$, konstante $k_1 = 2.12 \cdot 10^{-4}\ \frac{\mathrm{Nm}^3}{\mathrm{A}}$, $k_2 = 0.05$ m, $k_3 = 1\ \frac{\mathrm{Ns}^3}{\mathrm{m}^3}$, $k_4 = 2\ \frac{\mathrm{Ns}}{\mathrm{m}}$.
Postavite diferencijalnu jednadžbu koja prikazuje dinamičku ovisnost pomaka pločice $y(t)$ o narinutoj struji $i(t)$ kroz svitak.

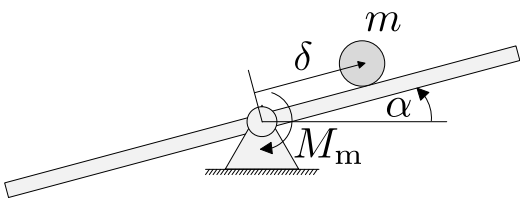
Zadatak 2.10

Mehanički sustav prikazan slikom 2.10 nalazi se u zemljinom gravitacijskom polju ($g = 9.81\frac{m}{s^2}$). Prikazan je u trenutku dok gravitacijska sila još nije počela djelovati na sustav ($y = 0$). Napišite diferencijalu jednadžbu koja opisuje dinamičko vladanje sustava. Ako je konstanta opruge $c = 98.1\frac{N}{m}$ izračunajte pomak (y) mase $m = 100g$ u stacionarnom stanju.

Zadatak 2.11

Na slici 2.11 prikazan je sustav upravljanja poloĹĺajem kuglice δ na klackalici u gravitacijskom polju, uz zanemariv otpor kotrljanja i centrifugalnu silu na kuglicu. Proizvoljan nagib klackalice α ostvaruje se motorom. Moment motora oznaÄŤen je s M_{m}. Kuglica je nezanemarive mase m, a moment inercije cijelog sustava oko osi rotacije pribliĹĺnog je iznosa $J_k + m\delta^2$, gdje je J_k moment inercije klackalice te $m\delta^2$ moment inercije kuglice. Referentni smjerovi varijabli naznaÄŤeni su na slici.

Napomena (fizika): $\sum_i F_i = m \cdot \ddot{\delta}$, $\sum_i M_i = J \cdot \ddot{\alpha}$.



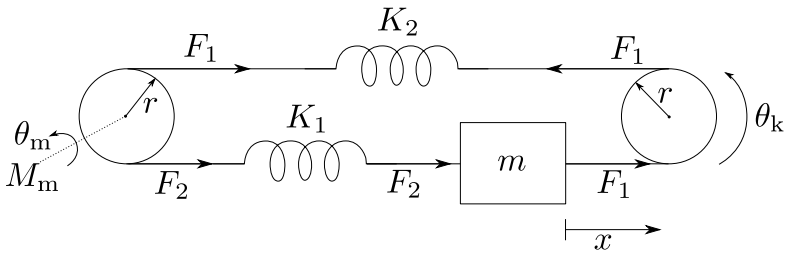
Slika 2.11: Sustav pozicioniranja kuglice na klackalici

a) NapiĹ˘ite sustav nelinearnih diferencijalnih jednadĹĭbi kojim se modelira sustav prikazan slikom 2.11.

Zadatak 2.12

Slika 2.12 prikazuje sustav upravljanja položajem glave pisača (mase m) pomoću sustava kolotura i remenja. Remeni su modelirani kao linearne opruge s koeficijentima elastičnosti K_1 i K_2. Polumjer obje koloture je r. Kutom zakreta lijeve koloture θ_m se upravlja pomoću motora i njegovog zakretnog momenta M_m. Moment inercije motora je J_m.

Napomena: $J \cdot \ddot{\theta} = \sum_i M_i$.



Slika 2.12: Sustav kolotura.

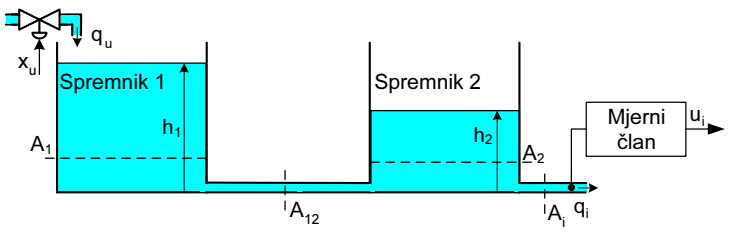
a) Napišite diferencijalne jednadžbe sustava po kutu zakreta θ_m i položaju glave pisača x.

b) Odredite prijenosnu funkciju sustava $G(s) = \frac{X(s)}{M_\mathrm{m}(s)}$.

c) Uz vektor varijabli stanja $\mathbf{x} = \begin{bmatrix}\theta_\mathrm{m} & \dot{\theta}_\mathrm{m} & x & \dot{x}\end{bmatrix}^\mathrm{T}$, ulaz $\mathbf{u} = M_\mathrm{m}$ te izlaz $\mathbf{y} = x$, zapišite sustav u prostoru stanja (odredite matrice $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ i $\mathbf{D}$).

Zadatak 2.13

Proces skladištenja kapljevine prikazan je shemom na slici 2.13. Ulazni pro-



Slika 2.13: Proces skladištenja kapljevine.

tok q_u $[\frac{\text{kg}}{\text{s}}]$ ovisi o otvorenosti ulaznog ventila x_u na sljedeći način:

$$q_u = k_u\sqrt{x_u}.$$

Izlazni protok iz Spremnika 2, q_i $[\frac{\text{kg}}{\text{s}}]$, mjeri se pomoću mjernog člana. Izlaz iz mjernog člana je napon u_i [V] koji o protoku q_i ovisi na sljedeći način:

$$u_i(t) = k_i q_i(t - T_t),$$

pri čemu je s T_t označeno mrtvo vrijeme (transportno kašnjenje) mjernog člana. Potrebno je:

a) Odrediti nelinearne diferencijalne jednadžbe $\frac{\text{d}h_1}{\text{d}t} = f_1(h_1, h_2, x_u)$ i $\frac{\text{d}h_2}{\text{d}t} = f_2(h_1, h_2, x_u)$ za visine kapljevine u spremnicima h_1 [m] i h_2 [m];

b) Odrediti visine kapljevine u spremnicima, izlazni protok procesa i izlazni napon mjernog člana u radnoj točki $X_{u0} = 0.5$;

Zadano je:

$k_u = 50\ \frac{\text{kg}}{\text{s}}$	–	konstanta ventila,
$A_1 = 5\ \text{m}^2$	–	površina poprečnog presjeka spremnika 1,
$A_2 = 5\ \text{m}^2$	–	površina poprečnog presjeka spremnika 2,
$A_{12} = 0.01\ \text{m}^2$	–	površina poprečnog presjeka spojne cijevi između spremnika,
$A_i = 0.01\ \text{m}^2$	–	površina poprečnog presjeka izlazne cijevi drugog spremnika,
$\rho = 1000\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$	–	gustoća kapljevine,
$g = 9.81\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$	–	ubrzanje sile teže,
$k_i = 0.125\ \frac{\text{Vs}}{\text{kg}}$	–	konstanta mjernog člana,
$T_t = 10\ \text{s}$	–	mrtvo vrijeme (transportno kašnjenje) mjernog člana.

Zadatak 2.14

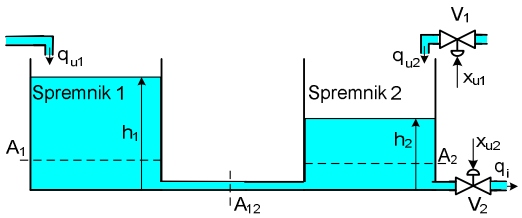
Shema sustava skladištenja tekućine prikazana je slikom 2.14. Ventilima V_1

i V_2 moguće je mijenjati ulazni i izlazni protok drugog spremnika. Karakteristika ventila opisana je izrazima:

$$q_{u2}(t) = A_v\sqrt{\rho}\sqrt{2\Delta p_1}\cdot x_{u1},$$
$$q_i(t) = A_v\sqrt{\rho}\sqrt{2\Delta p_2}\cdot x_{u2},$$

pri čemu je:

x_{u1} – otvorenost ventila V_1,
x_{u2} – otvorenost ventila V_2,
A_v – poprečni presjek potpuno otvorenih ventila V_1 i V_2 [m^2],
Δp – razlika tlakova na krajevima ventila [Pa],
ρ – gustoća tekućine [kg/m^3],
q_{u2} – maseni protok kroz ventil V_1 [kg/s],
q_i – maseni protok kroz ventil V_2 [kg/s].



Slika 2.14: Proces skladištenja tekućine.

Potrebno je odrediti nelinearne diferencijalne jednadžbe koja opisuje vladanje visine tekućine u spremnicima.

Zadani su parametri sustava:

$q_{u1} = 50$ kg/s – ulazni maseni protok u prvi spremnik,
$A_1 = 5$ m^2 – površina poprečnog presjeka spremnika 1,
$A_2 = 10$ m^2 – površina poprečnog presjeka spremnika 2,
$A_{12} = 0.005$ m^2 – površina poprečnog presjeka spojne cijevi između spremnika,
$A_v = 0.01$ m^2 – površina poprečnog presjeka potpuno otvorenog ventila,
$\rho = 1000$ $\frac{kg}{m^3}$ – gustoća tekućine,
$\Delta p_1 = 50 \cdot 10^3$ Pa – razlika tlakova na krajevima prvog ventila,
$g = 9.81$ $\frac{m}{s^2}$ – ubrzanje sile teže.

Zadatak 2.15

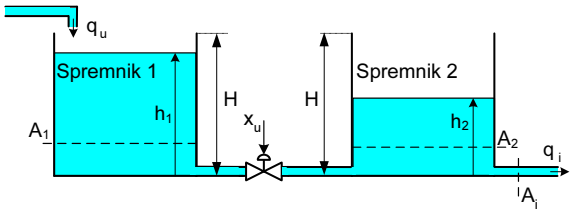
Shema sustava skladištenja fluida prikazana je slikom 2.15. Razina fluida u spremnicima regulira se promjenom otvorenosti ventila $x_u(t)$ koja može

poprimiti vrijednosti između 0 i 1. Karakteristika ventila opisana je izrazom

$$q(t) = A_v \sqrt{\rho} \sqrt{2\Delta p} \cdot x_u,$$

pri čemu je:

x_u	–	otvorenost ventila,
A_v	–	poprečni presjek potpuno otvorenog ventila [m^2],
Δp	–	razlika tlakova na krajevima ventila [Pa],
ρ	–	gustoća fluida [kg/m^3],
q	–	maseni protok kroz ventil [kg/s].



Slika 2.15: Sustav skladištenja fluida.

Odredite diferencijalne jednadžbe koje opisuju ponašanje razine fluida u spremnicima ($h_1(t)$ i $h_2(t)$).

Parametri sustava su:

$q_u = Q_{u0} = 30$ kg/s	–	ulazni protok u spremnik 1,
$A_1 = 5$ m^2	–	površina poprečnog presjeka spremnika 1,
$A_2 = 5$ m^2	–	površina poprečnog presjeka spremnika 2,
$A_i = 0.01$ m^2	–	površina poprečnog presjeka izlazne cijevi drugog spremnika,
$\rho = 1000\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$	–	gustoća fluida,
$A_v = 0.008$ m^2	–	poprečni presjek potpuno otvorenog ventila,
$g = 9.81\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$	–	ubrzanje sile teže.

Kod računanja izlaznih protoka iz spremnika može se uzeti da je $A_v \ll A_1$ i $A_i \ll A_2$.

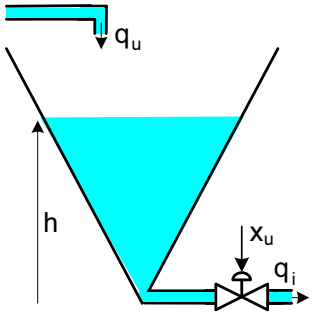
Zadatak 2.16

Na slici 2.16 prikazan je spremnik tekućine u obliku stošca. Polumjer poprečnog presjeka na vrhu spremnika (na visini $h = H = 10$ m) iznosi $R_H = 2$ m. Ulazni protok u spremnik je konstantan i iznosi $q_u = 10$ kg/s, dok je izlazni protok moguće mijenjati pomoću ventila:

$$q_i(t) = A_v \sqrt{\rho} \sqrt{2\Delta p} \cdot x_u,$$

gdje je:

q_i	–	maseni protok kroz ventil [kg/s],
x_u	–	otvorenost ventila,
Δp	–	razlika tlakova na krajevima ventila [Pa],
$A_v = 0.01$ m^2	–	poprečni presjek potpuno otvorenog ventila,
$\rho = 1000$ $\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$	–	gustoća tekućine.

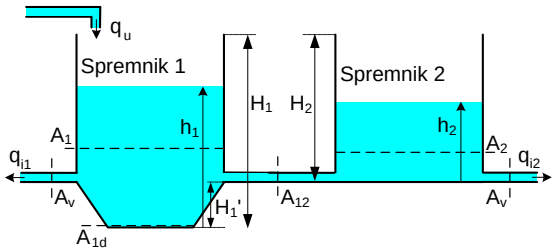


Slika 2.16: Proces skladištenja tekućine.

Odredite diferencijalnu jednadžbu koja opisuje vladanje visine tekućine u spremniku.

Zadatak 2.17

Na slici 2.17 prikazan je sustav skladištenja fluida.



Slika 2.17: Sustav skladištenja fluida.

Uz poznatu funkcijsku ovisnost površine presjeka prvog spremnika

$$A_1(h_1) = \begin{cases} A_{1d} + \frac{h_1}{H_1'}(A_1 - A_{1d}), \text{ ako } h_1 \leq H_1', \\ A_1, \text{ ako } h_1 > H_1', \end{cases} \tag{2.1}$$

potrebno je:

a) napisati sustav diferencijalnih jednadžbi $\dot{h}_1 = f_1(q_u, h_1, h_2)$ i $\dot{h}_2 = f_2(q_u, h_1, h_2)$ koje modeliraju dinamiku sustava,

b) izvesti izraz za proračun iznosa stacionarnog ulaznog protoka q_{u0} u ovisnosti o stacionarnom iznosu visine prvog spremnika H_{10}.

2.1 Rješenja

Rješenje 2.1

$$C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = i_L - i_1 \;\rightarrow\; \frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{R_2C}u_C + \frac{1}{C}i_L,$$
$$L\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t} = u_u - i_L R_1 - u_C \;\rightarrow\; \frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{L}u_C - \frac{R_1}{L}i_L + \frac{1}{L}u_u$$

$$LC\frac{R_2}{R_1+R_2}\frac{\mathrm{d}^2u_i}{\mathrm{d}t^2} + \left(\frac{L}{R_1+R_2} + \frac{R_1R_2}{R_1+R_2}C\right)\frac{\mathrm{d}u_i}{\mathrm{d}t} + u_i = \frac{R_2}{R_1+R_2}u_u$$

Rješenje 2.2

$$M\frac{di_1}{dt} = u_2 + \frac{L_2}{R_2}\frac{du_2}{dt}$$
$$L_1\frac{di_1}{dt} = \frac{M}{R_2}\frac{du_2}{dt} + u - R_1i_1$$

Deriviranjem druge jednadžbe te uvrštavanjem prve, dobije se:

$$\frac{du}{dt} = \frac{d^2u_i}{dt^2}\left(\frac{L_1L_2}{R_2M} - \frac{M}{R_2}\right) + \frac{du_i}{dt}\left(\frac{L_1}{M} - \frac{L_2R_1}{R_2M}\right) + u_i\frac{R_1}{M}$$

Rješenje 2.3

Jednadžbe kruga:

$$\frac{d}{dt}i_L = \frac{1}{L}u_u - \frac{R}{L}i_L - \frac{1}{L}u_C$$
$$\frac{d}{dt}u_C = \frac{1}{C}i_L - \frac{1}{Ck_N^2}u_C^2$$

Rješenje 2.4

$$\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t} = -\frac{R}{L}i_L - \frac{1}{L}u_C + \frac{1}{L}u_\mathrm{u}$$
$$\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{C}i_L - \frac{1}{C}\left[a_1(u_C - b)^3 - a_2(u_C - b) + a_3\right]$$

Rješenje 2.5

Budući da su operacijska pojačala idealna, ulazna struja pojačala jednaka je 0. Također, za svako pojačalo vrijedi $u_- = u_+$. Slijedi

$$\frac{e}{R_1} = C\frac{du_C}{dt}, \frac{u - u_{-,2}}{R} = \frac{u_{-,2} - u_{i,1}}{R},$$

pri čemu je $u_{-,2}$ napon minus pola drugog pojačala, a $u_{i,1}$ napon izlaznog spoja prvog pojačala. Vrijedi

$$u_{+,2} = u_{-,2} = 0,$$
$$u = -u_{i,1},$$
$$u_C = u_{i,1} - u_{R_2} = -u + R_2\frac{e}{R_1},$$
$$R_2C\frac{de}{dt} + e = R_1C\frac{du}{dt}.$$

Rješenje 2.6

Sile koje djeluju na tijelo su trenje, sila opruge i vučna sila:

$m\ddot{x} = -F_{tr}(\dot{x}(t)) - F_k(x(t)) + F(t)$
$m\ddot{x} + \frac{2\cdot10^3}{\pi}\arctan\dot{x}(t) + kx^3(t) = F(t)$
$5\ddot{x} + \frac{2\cdot10^3}{\pi}\arctan\dot{x}(t) + 10^5x^3(t) = F(t)$

Rješenje 2.7

Sile koje djeluju na tijelo su potisna sila, gravitacija i aerodinamični otpor

zraka:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= F - F_g - F_a \\ \ddot{x} &= \frac{1}{m}F - G\frac{M}{(R+x)^2} - \frac{k_1}{m}(\dot{x})^3 - \frac{k_2}{m}\dot{x} \\ \ddot{x} &= 2\cdot 10^{-4}F - \frac{3.982\cdot 10^{14}}{(6.37\cdot 10^6 + x)^2} - 4\cdot 10^{-6}(\dot{x})^3 - 4\cdot 10^{-2}\dot{x} \end{aligned}$$

Rješenje 2.8

$$\begin{aligned} m_1\ddot{x}_1(t) &= F_u(t) - D(\dot{x}_1(t) - \dot{x}_2(t)) - C(x_1(t) - x_2(t)) \\ m_2\ddot{x}_2(t) &= D(\dot{x}_1(t) - \dot{x}_2(t)) + C(x_1(t) - x_2(t)) \end{aligned}$$

Rješenje 2.9

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} = g - \frac{k_1 i}{m(y+k_2)^3} - \frac{1}{m}\left[k_3(\dot{y})^3 + k_4\dot{y}\right] = f(\dot{y}, y, i)$$

Rješenje 2.10

$$m\ddot{y} = mg - cy - d\dot{y}$$

$$y_s = \frac{mg}{c} = 0.01 \text{ m}$$

Rješenje 2.11

a) DinamiÄŤki opis sustava obuhvaÄ‡a gibanje kuglice na klackalici i promjenu nagiba klackalice:

$$m\ddot{\delta} = -mg\sin\alpha, \tag{2.2}$$

$$(J_k + m\delta^2)\ddot{\alpha} = -M_\mathrm{m} - \delta m\cos\alpha. \tag{2.3}$$

Rješenje 2.12

a) Jednadžba ravnoteže momenata daje:

$$J_{\mathrm{m}}\ddot{\theta}_{\mathrm{m}} = T_{\mathrm{m}} + r(F_2 - F_1). \tag{2.4}$$

Sile elastičnosti F_1 i F_2 su redom:

$$F_1 = K_2(r\theta_{\mathrm{m}} - r\theta_{\mathrm{k}}) = K_2(r\theta_{\mathrm{m}} - x), \tag{2.5}$$
$$F_2 = K_1(x - r\theta_{\mathrm{m}}). \tag{2.6}$$

Ravnoteža sila na tijelu mase M daje:

$$M\ddot{x} = F_1 - F_2. \tag{2.7}$$

Konačno imamo:

$$J_{\mathrm{m}}\ddot{\theta}_{\mathrm{m}} = T_{\mathrm{m}} - r(K_1 + K_2)(r\theta_{\mathrm{m}} - x), \tag{2.8}$$
$$M\ddot{x} = (K_1 + K_2)(r\theta_{\mathrm{m}} - x). \tag{2.9}$$

b) Nakon Laplaceove transformacije sustava diferencijalnih jednadžbi te eliminacije $\Theta_{\mathrm{m}}(s)$, dobivamo traženu prijenosnu funkciju:

$$G(s) = \frac{1}{s^2}\frac{r(K_1 + K_2)}{J_{\mathrm{m}}Ms^2 + (K_1 + K_2)(J_{\mathrm{m}} + rM)}. \tag{2.10}$$

c) Zapis u prostoru stanja:

$$\dot{x}_1 = x_2, \tag{2.11}$$
$$\dot{x}_2 = \frac{1}{J_{\mathrm{m}}}T_{\mathrm{m}} - r\frac{K_1 + K_2}{J_{\mathrm{m}}}(rx_1 - x_3), \tag{2.12}$$
$$\dot{x}_3 = x_4, \tag{2.13}$$
$$\dot{x}_4 = \frac{K_1 + K_2}{M}(rx_1 - x_3), \tag{2.14}$$
$$y = x_3. \tag{2.15}$$

Tražene matrice su:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -r^2\frac{K_1+K_2}{J_{\mathrm{m}}} & 0 & r\frac{K_1+K_2}{J_{\mathrm{m}}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ r\frac{K_1+K_2}{M} & 0 & -\frac{K_1+K_2}{M} & 0 \end{bmatrix} \mathbf{B},= \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{J_{\mathrm{m}}} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{2.16}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{D} = 0. \tag{2.17}$$

Rješenje 2.13

a)

$$\frac{\mathrm{d}h_1}{\mathrm{d}t} = \frac{k_u}{\rho A_1}\sqrt{x_u} - \frac{A_{12}}{A_1}\sqrt{2g(h_1 - h_2)}$$
$$\frac{\mathrm{d}h_2}{\mathrm{d}t} = \frac{A_{12}}{A_2}\sqrt{2g(h_1 - h_2)} - \frac{A_i}{A_2}\sqrt{2gh_2}$$

b)

$$Q_{u0} = Q_{120} = Q_{i0} = k_u\sqrt{X_{u0}} = 35.3553\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{s}}$$
$$H_{20} = \frac{k_u^2 X_{u0}}{2A_i^2\rho^2 g} = 0.637\ \mathrm{m}$$
$$H_{10} = 2H_{20} = 1.274\ \mathrm{m}$$
$$U_{i0} = k_i Q_{i0} = 4.42\ \mathrm{V}$$

Rješenje 2.14

$$\frac{\mathrm{d}h_1}{\mathrm{d}t} = \frac{q_{u1}}{\rho A_1} - \frac{A_{12}}{A_1}\sqrt{2g(h_1 - h_2)}$$
$$= 0.01 - 0.00443\sqrt{h_1 - h_2}$$

$$\frac{\mathrm{d}h_2}{\mathrm{d}t} = \frac{A_{12}}{A_2}\sqrt{2g(h_1 - h_2)} + \frac{A_v}{\rho A_2}\sqrt{2\rho\Delta p_1}\cdot x_{u1} - \frac{A_v}{A_2}\sqrt{2gh_2}\cdot x_{u2}$$
$$= 0.00221\sqrt{h_1 - h_2} + 0.01x_{u1} - 0.00443\sqrt{h_2}\cdot x_{u2}$$

Rješenje 2.15

$$\frac{\mathrm{d}h_1}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{\rho A_1}Q_{u0} - \frac{A_v}{A_1}\sqrt{2g(h_1 - h_2)}\cdot x_u$$
$$\frac{\mathrm{d}h_2}{\mathrm{d}t} = \frac{A_v}{A_2}\sqrt{2g(h_1 - h_2)}\cdot x_u - \frac{A_i}{A_2}\sqrt{2gh_2}$$

Rješenje 2.16

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = \rho\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = q_u - q_i.$$

Volumen tekućine u spremniku:

$$V(h) = \frac{1}{3}A(h)h = \frac{\pi}{3}\left(\frac{R_H}{H}\right)^2 h^3.$$

Uvrštavajnem u početnu diferencijalnu jednadžbu, dobije se:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} &= \frac{q_u}{\rho\pi\left(\frac{R_H}{H}\right)^2 h^2} - \frac{A_v\sqrt{2gh}}{\pi\left(\frac{R_H}{H}\right)^2 h^2}x_u \\ &= 0.080\frac{1}{h^2} - 0.352h^{-\frac{3}{2}}x_u\end{aligned}$$

Rješenje 2.17

a) Matematički model treba vrijediti za dva slučaja: I. $h_1 > H_1'$ i II. $h_1 \leq H_1'$.

I.

$$\rho A_1\frac{dh_1}{dt} = q_u - \rho A_{12}\mathrm{sign}(h_1 - H_1' - h_2)\sqrt{2g|h_1 - H_1' - h_2|} - \rho A_v\sqrt{2g(h_1 - H_1')},$$

$$\rho A_2\frac{dh_2}{dt} = \rho A_{12}\mathrm{sign}(h_1 - H_1' - h_2)\sqrt{2g|h_1 - H_1' - h_2|} - A_v\rho\sqrt{2gh_2}.$$

Sređivanjem se dobije

$$\begin{aligned}\frac{dh_1}{dt} =& \frac{1}{A_1\rho}q_u - \frac{A_{12}}{A_1}\mathrm{sign}(h_1 - H_1' - h_2)\sqrt{2g|h_1 - H_1' - h_2|} \\ &- \frac{A_v}{A_1}\sqrt{2g\,(h_1 - H_1')}, \\ \frac{dh_2}{dt} =& \frac{A_{12}}{A_2}\mathrm{sign}(h_1 - H_1' - h_2)\sqrt{2g|h_1 - H_1' - h_2|} - \frac{A_v}{A_2}\sqrt{2gh_2}.\end{aligned}$$

II.

$$A_1(h) = \left[A_{1d} + \frac{h_1}{H_1'}\left(A_1 - A_{1d}\right)\right],$$

$$V(h_1) = h_1\frac{1}{2}\left(A_{1d} + A_{1d} + \frac{h_1}{H_1'}(A_1 - A_{1d})\right),$$

$$\frac{dV(h_1)}{dt} = \left(A_{1d} + \frac{h_1}{H_1'}(A_1 - A_{1d})\right)\frac{dh_1}{dt} = A_1(h)\frac{dh_1}{dt},$$

$$\rho A_1(h)\frac{dh_1}{dt} = q_u + \rho A_{12}\sqrt{2gh_2}$$

$$\rho A_2\frac{dh_2}{dt} = -\rho A_{12}\sqrt{2gh_2} - \rho A_v\sqrt{2gh_2}$$

Sređivanjem se dobije

$$\frac{dh_1}{dt} = \frac{q_u}{\rho A_1(h)} + \frac{A_{12}}{A_1(h)}\sqrt{2gh_2},$$
$$\frac{dh_2}{dt} = -\frac{A_{12} + A_v}{A_2}\sqrt{2gh_2}.$$

b) Traži se $q_{u0}(H_{10})$.

(i) $H_{10} \leq H_1' \rightarrow q_{u0} = 0.$

(ii) $H_{10} > H_1'$,

$$q_{i1} = q_{i2},$$

uvijek vrijedi $h_1 - H_1' > h_2$,

$$A_{12}\sqrt{2g(h_1 - H_1' - h_2)} = A_v\rho\sqrt{2gh_2},$$

$$h_2 = \frac{A_{12}^2}{A_v^2 + A_{12}^2}(h_1 - H_1'),$$

$$q_{u0} = \rho A_v\sqrt{2g(H_{10} - H_1')} + \rho A_{12}\sqrt{2g\left[H_{10} - H_1' - \frac{A_{12}^2}{A_v^2 + A_{12}^2}(H_{10} - H_1')\right]}.$$

$$q_{u0} = \rho\left(A_v + A_{12}\sqrt{\frac{A_v^2}{A_{12}^2 + A_v^2}}\right)\sqrt{2g(H_{10} - H_1')}.$$

Poglavlje 3

Linearizacija nelinearnih sustava

Zadatak 3.1

Dinamički sustav opisan je nelinearnom diferencijalnom jednadžbom:

$$u(t) \cdot \ddot{y}(t) + \dot{y}(t) + y^2(t) = e^{u(t)-y(t)}.$$

Sustav se nalazi u radnoj točki određenoj s $y(t) = y_0 = 2$. Potrebno je:

a) Linearizirati diferencijalnu jednadžbu za radnu točku.

b) Odrediti prijenosnu funkciju $G(s) = \frac{\Delta Y(s)}{\Delta U(s)}$ za radnu točku.

c) Ukoliko se ulaz poveća za $\Delta u = 0.3$, odrediti novu vrijednost $y(t)$ u ustaljenom stanju.

Zadatak 3.2

Sljedeće nelinearne diferencijalne jednadžbe je potrebno linearizirati oko zadanih radnih točki te odrediti prijenosne funkcije $G(s) = \frac{\Delta Y(s)}{\Delta U(s)}$ za radnu točku.

a) $\dot{y}(t) + [y(t)]^2 = \frac{u^2(t)}{y(t)}$, (u_0, y_0)

b) $\dot{y}(t) + [y(t)]^4 = u^2(t)y(t)$, (u_0, y_0)

c) $\ddot{y}(t) + \dot{y}(t) + [y(t)]^3 = [u(t)]^3 - \dot{u}(t)y(t)$, $u_0 = 1$

d) $\ddot{y}(t) + \dot{y}(t) - \frac{1}{y(t)} = u(t) - y(t)\dot{u}(t)$, $y_0 = 1$

e) $\ddot{y}(t) + \dot{y}(t) + \ln y(t) = u(t) - y(t)e^{\dot{u}(t)}$, $y_0 = 1$

f) $\ddot{y}(t) + \dot{y}(t) - \frac{1}{y(t)} = u(t) - y(t)e^{\dot{u}(t)}$, $y_0 = 1$

Zadatak 3.3

Dinamički sustav zadan je sljedećim nelinearnim diferencijalnim jednadžbama:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 1.6x(1 - \frac{x}{125}) - 3.2\frac{xy}{50+x}, \ x \geq 0, \\ \dot{y} &= 1.92\frac{xy}{50+x} - 0.56y, \ y \geq 0. \end{aligned} \tag{3.1}$$

a) Za zadani sustav odredite stacionarno stanje $(x_\mathrm{e}, y_\mathrm{e})$, gdje su x_e i y_e različiti od nula.

b) Linearizirajte sustav oko radne točke određene u podzadatku a).

c) Linearizirani sustav iz podzadatka b) zapišite u prostoru stanja.

Zadani sustav opisuje dinamiku interakcije dvije životinjske vrste, gdje je jedna vrsta predator, a druga plijen (npr. risovi i zečevi).

Zadatak 3.4

Jednadžba rakete lansirane vertikalno s površine Zemlje dana je sljedećim izrazom:

$$\dot{v} = -G\frac{m_Z}{(r+h)^2} - \frac{v_e}{m}\dot{m} \ ,$$

gdje je $G = 6.673\,84 \times 10^{-11}\,\mathrm{m^3\,kg^{-1}\,s^{-2}}$ gravitacijska konstanta, $m_Z = 5.9736 \times 10^{24}\,\mathrm{kg}$ masa Zemlje, $r = 6.371 \times 10^6\,\mathrm{m}$ srednji radijus Zemlje, $v_e = 4500\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ izlazna brzina raketnog goriva. Masa rakete (zajedno s gorivom) dana je s m, visina rakete s h, a $\dot{v}$ označava akceleraciju rakete i $\dot{m} = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}$ maseni protok raketnog goriva.

Masenim protokom raketnog goriva ($\dot{m}$) upravlja se preko aktuatora koji se može aproksimirati PT1 članom, pa prijenosna funkcija ovisnosti mase rakete o upravljačkom signalu glasi:

$$G_M(s) = \frac{M(s)}{X_u(s)} = -\frac{0.2}{s(T_1 s + 1)} \ .$$

a) Napišite nelinearne diferencijalne jednadžbe stanja sustava, uz varijable stanja $\dot{m}$, m, h i v te ulaznu varijablu x_u.

b) Uz $x_u(t) = 2.5S(t)$ i $\dot{m}(0) = -0.5\,\mathrm{kg\,s^{-1}}$ raketa u prvih 10 s leta dostiže otprilike $h(10) \approx 653\,\mathrm{m}$. Ako je $m(0) = 100\,\mathrm{kg}$ odredite $m(10)$ i linearizirajte sustav u radnoj točki određenoj s $t = 10\,\mathrm{s}$. Zapišite linearizirani sustav u prostoru stanja (odredite matrice **A**, **B**, **C** i **D**).

Zadatak 3.5

Zadan je električni krug prikazan slikom 2.3. Parametri električnog kruga su: $R = 10\ \Omega$, $L = 10\ \mu\mathrm{H}$, $C = 10\ \mathrm{pF}$ i $k_N = 10\ \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{A}^{\frac{1}{2}}}$. Nelinearne diferencijalne jednadžbe koje opisuju ovaj krug su dane s

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t} &= \frac{1}{L}u_u - \frac{R}{L}i_L - \frac{1}{L}u_C \\ \frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} &= \frac{1}{C}i_L - \frac{1}{Ck_N^2}u_C^2 \end{aligned}$$

Linearizirajte ovaj model za radnu točku kruga određenu sa $i_{L0} = 1.6$ mA.

Zadatak 3.6

Nelinearni elektronički sklop prikazan slikama 2.4a i 2.4b je opisan s:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t} &= -\frac{R}{L}i_L - \frac{1}{L}u_C + \frac{1}{L}u_\mathrm{u} \\ \frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} &= \frac{1}{C}i_L - \frac{1}{C}\left[a_1(u_C - b)^3 - a_2(u_C - b) + a_3\right] \end{aligned}$$

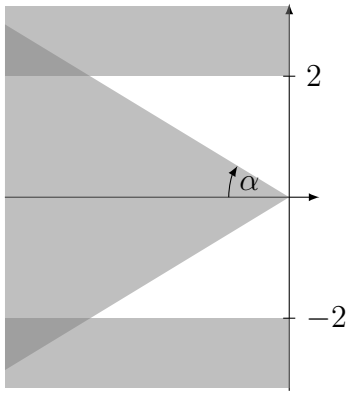
gdje su $a_1 = 0.1923\ \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{V}^3}$, $a_2 = 0.0436\ \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{V}}$, $a_3 = 0.012$ A i $b = 0.37$ V. Ostali parametri elektroničkog sklopa su: $R = 10\ \Omega$, $L = 10\ \mu$H, $C = 10$ pF. Linearizirajte ovaj model za radnu točku sklopa određenu s $u_{C0} = 0.40$ V.

Zadatak 3.7

Zadan je električni krug prikazan na slici 3.1. Nelinearni element ima karakteristiku $i_\mathrm{N} = i_0 e^{\frac{u_\mathrm{N}}{u_0}}$, gdje su u_N i i_N napon i struja kroz nelinearni element. Parametri električnog kruga su: $R = 10$ [Ω], $L = 10$ [μH], $C = 10$ [pF], $i_0 = 2$ [A], $u_0 = 4$ [V].

Diferencijalne jednadžbe koje opisuju sustav sa slike 3.1 su:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}i_\mathrm{L} &= \frac{1}{L}\left(u_\mathrm{u} - Ri_\mathrm{L} - u_\mathrm{C}\right), \\ \frac{d}{dt}u_\mathrm{C} &= \frac{1}{C}\left(i_\mathrm{L} - i_\mathrm{N}\right) = \frac{1}{C}\left(i_\mathrm{L} - i_0 e^{\frac{u_\mathrm{C}}{u_0}}\right). \end{aligned}$$



Slika 3.1: Shema električnog kruga.

a) Linearizirajte zadane nelinearne diferencijalne jednadžbe oko radne točke zadane sa $u_{\mathrm{u}0} = 1$ [V], $u_{\mathrm{C}0} = 0.75$ [V] i $i_{\mathrm{L}0} = 2.4$ [A] te odredite prijenosnu funkciju $G(s) = \frac{U_{\mathrm{i}}(s)}{U_{\mathrm{u}}(s)}$.

b) Zapišite u prostoru stanja (odredite matrice $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ i $\mathbf{D}$ tog zapisa) linearizirani model iz prethodnog podzadatka ako su varijable stanja $\mathbf{x} = [i_{\mathrm{L}}, u_{\mathrm{C}}]^{\mathrm{T}}$, ulaz $u = u_{\mathrm{u}}$ i izlaz $y = u_{\mathrm{i}}$.

Zadatak 3.8

Zadan je mehanički sustav prikazan slikom 2.6 koji je opisan diferencijalnom jednadžbom

$$5\ddot{x} + \frac{2 \cdot 10^3}{\pi} \arctan \dot{x}(t) + 10^5 x^3(t) = F(t)$$

gdje je x [m] pomak mase i $F(t)$ pobudna sila paralelna s podlogom. Potrebno je:

a) Odrediti linearizirani diferencijalnu jednadžbu za radnu točku $x_0 = 0.1$ m;

b) Na temelju linearizirane diferencijalne jednadžbe pod b) odrediti prijenosnu funkciju $G(s) = \frac{X(s)}{F(s)}$;

c) Odrediti pomak $x(\infty)$ za promjenu sile iz radne točke (x_0, F_0) opisanu s $\Delta F(t) = 50S(t)$ N na osnovi (1) linearizirani modela i (2) nelinearnog modela.

Napomena: $\frac{d}{dy}\{\arctan(y)\} = \frac{1}{1+y^2}$

Zadatak 3.9

Letjelica koja lebdi iznad Zemljine površine ima masu $m = 5000$ kg i prikazana je slikom 2.7. Nelinearna diferencijalna jednadžba po visini letjelice od površine Zemlje $x(t)$ je dana s

$$\ddot{x} = 2 \cdot 10^{-4} F - \frac{3.982 \cdot 10^{14}}{(6.37 \cdot 10^6 + x)^2} - 4 \cdot 10^{-6} (\dot{x})^3 - 4 \cdot 10^{-2} \dot{x}$$

gdje je F potisna sila. Odredite visinu na kojoj letjelica lebdi uz konstantan potisak $F_0 = 49 \cdot 10^3$ N te oko te radne točke linearizirajte diferencijalnu jednadžbu. Odredite prijenosnu funkciju $G(s) = \frac{X(s)}{F(s)}$.

Zadatak 3.10

Proces magnetske levitacije shematski je prikazan slikom 2.9 a diferencijalna jednadžba koja prikazuje dinamičku ovisnost pomaka pločice $y(t)$ o narinutoj struji $i(t)$ kroz svitak je dana s:

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} = g - \frac{k_1 i}{m(y + k_2)^3} - \frac{1}{m}\left[k_3(\dot{y})^3 + k_4 \dot{y}\right] = f(\dot{y}, y, i)$$

gdje je i struja kroz svitak, y je pomak pločice, a k_1 i k_2 su konstante. Zadane su sljedeće veličine: masa pločice $m = 0.1$ kg, ubrzanje sile teže $g = 9.81\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$, konstante $k_1 = 2.12 \cdot 10^{-4}\ \frac{\mathrm{Nm}^3}{\mathrm{A}}$, $k_2 = 0.05$ m, $k_3 = 1\ \frac{\mathrm{Ns}^3}{\mathrm{m}^3}$, $k_4 = 2\ \frac{\mathrm{Ns}}{\mathrm{m}}$.
Linearizirajte zadanu diferencijalnu jednadžbu oko radne točke određene pomakom pločice $y_0 = 0.01$ m.

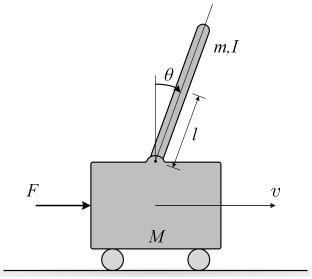
Zadatak 3.11

Sustav prikazan na slici 3.2 čini obrnuto njihalo postavljeno na pokretna kolica. Dinamika sustava može se opisati sljedećim nelinearnim diferencijalnim jednadžbama:

$$\begin{aligned}
&(M + m)\dot{v} + bv - ml\ddot{\theta}\cos\theta - ml\dot{\theta}^2 = F, \\
&(I + ml^2)\ddot{\theta} + mgl\sin\theta = ml\dot{v}\cos\theta.
\end{aligned}$$

Pritom su:

$M = 0.5$ [kg]	–	masa kolica,
$m = 0.2$ [kg]	–	masa njihala,
$b = 0.1\,[\frac{\text{Ns}}{\text{m}}]$	–	koeficijent trenja kolica,
$l = 0.3$ [m]	–	udaljenost centra mase njihala do točke njegova učvršćenja,
$I = 0.006\ [\frac{\text{kg}}{\text{m}^2}]$	–	moment inercije njihala oko njegovog centra mase,
F	–	sila koja djeluje na kolica,
v	–	brzina kolica,
θ	–	kut otklona njihala od vertikalne osi.

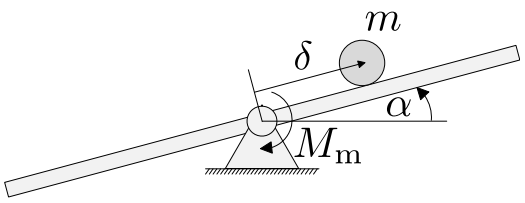


Slika 3.2: Inverzno njihalo postavljeno na pokretna kolica.

Linearizirajte jednadžbe koje opisuju vladanje brzine kolica v i kuta otklona njihala θ u radnoj točki određenoj s $\theta_0 = 0\,[^\circ]$ i $v_0 = 2\,[\frac{\text{m}}{\text{s}}]$. Kolika sila mora djelovati na kolica da bi se sustav održao u ovoj radnoj točki?

Zadatak 3.12

Na slici 3.3 prikazan je sustav upravljanja položajem kuglice δ na klackalici u gravitacijskom polju, uz zanemariv otpor kotrljanja i centrifugalnu silu na kuglicu. Proizvoljan nagib klackalice α ostvaruje se motorom. Moment motora označen je s M_m. Kuglica je nezanemarive mase m, a moment inercije cijelog sustava oko osi rotacije približnog je iznosa $J_k + m\delta^2$, gdje je J_k moment inercije klackalice te $m\delta^2$ moment inercije kuglice. Referentni smjerovi varijabli naznačeni su na slici.



Slika 3.3: Sustav pozicioniranja kuglice na klackalici

Sustav nelinearnih diferencijalnih jednadžbi kojim se modelira sustav je:

$$m\ddot{\delta} = -mg\sin\alpha, \tag{3.2}$$

$$(J_k + m\delta^2)\ddot{\alpha} = -M_\mathrm{m} - \delta m\cos\alpha. \tag{3.3}$$

a) Linearizirajte sustav u okolini ravnotežnog položaja određenog s $\delta_0 = 0.2$ te ga prikažite u prostoru stanja. Pritom pretpostavite: ulaz modela $\Delta u = \Delta M_\mathrm{m}$, vektor varijabli stanja $\Delta x = \left[\Delta\alpha, \Delta\dot{\alpha}, \Delta\delta, \Delta\dot{\delta}\right]^\top$, izlaz modela $\Delta y = [\Delta\alpha, \Delta\delta]^\top$.

Zadatak 3.13

Proces skladištenja kapljevine prikazan je shemom na slici 2.13 a nelinearne diferencijalne jednadžbe koje opisuju visine kapljevine u spremnicima h_1 [m] i h_2 [m] su dane s:

$$\begin{aligned}\tfrac{\mathrm{d}h_1}{\mathrm{d}t} &= \tfrac{k_u}{\rho A_1}\sqrt{x_u} - \tfrac{A_{12}}{A_1}\sqrt{2g(h_1-h_2)} = f_1(h_1,h_2,x_u),\\ \tfrac{\mathrm{d}h_2}{\mathrm{d}t} &= \tfrac{A_{12}}{A_2}\sqrt{2g(h_1-h_2)} - \tfrac{A_i}{A_2}\sqrt{2gh_2} = f_2(h_1,h_2,x_u)\end{aligned}$$

Izlazni protok iz Spremnika 2, q_i $[\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{s}}]$, mjeri se pomoću mjernog člana. Izlaz iz mjernog člana je napon u_i [V] koji o protoku q_i ovisi na sljedeći način:

$$u_i(t) = k_i q_i(t - T_t),$$

pri čemu je s T_t označeno mrtvo vrijeme (transportno kašnjenje) mjernog člana. Potrebno je:

a) Linearizirati proces u okolini radne točke zadane s $X_{u0} = 0.5$ te naći matrice $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}$ lineariziranog modela procesa u prostoru stanja uz

$$x = \begin{bmatrix} \Delta h_1 \\ \Delta h_2 \end{bmatrix}, \quad u = \Delta x_u, \quad y = \Delta q_i;$$

b) Odrediti prijenosnu funkciju $G(s) = \frac{U_i(s)}{X_u(s)}$ za radnu točku zadanu pod b).

Zadano je:

$k_u = 50\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{s}}$	–	konstanta ventila,
$A_1 = 5\ \mathrm{m}^2$	–	površina poprečnog presjeka spremnika 1,
$A_2 = 5\ \mathrm{m}^2$	–	površina poprečnog presjeka spremnika 2,
$A_{12} = 0.01\ \mathrm{m}^2$	–	površina popr. pres. spojne cijevi između spremnika,
$A_i = 0.01\ \mathrm{m}^2$	–	površina popr. pres. izlazne cijevi drugog spremnika,
$\rho = 1000\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$	–	gustoća kapljevine,
$g = 9.81\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$	–	ubrzanje sile teže,
$k_i = 0.125\ \frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{kg}}$	–	konstanta mjernog člana,
$T_t = 10\ \mathrm{s}$	–	mrtvo vrijeme (transportno kašnjenje) mjernog člana.

Zadatak 3.14

Shema sustava skladištenja tekućine prikazana je slikom 2.14 a diferencijalne jednadžbe koje opisuju vladanje visine tekućine u spremnicima su:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}h_1}{\mathrm{d}t} &= \frac{q_{u1}}{\rho A_1} - \frac{A_{12}}{A_1}\sqrt{2g(h_1-h_2)}\\ \frac{\mathrm{d}h_1}{\mathrm{d}t} &= 0.01 - 0.00443\sqrt{h_1-h_2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}h_2}{\mathrm{d}t} &= \frac{A_{12}}{A_2}\sqrt{2g(h_1-h_2)} + \frac{A_v}{\rho A_2}\sqrt{2\rho\Delta p_1}\cdot x_{u1} - \frac{A_v}{A_2}\sqrt{2gh_2}\cdot x_{u2}\\ \frac{\mathrm{d}h_2}{\mathrm{d}t} &= 0.00221\sqrt{h_1-h_2} + 0.01x_{u1} - 0.00443\sqrt{h_2}\cdot x_{u2}\end{aligned}$$

Ventilima V_1 i V_2 moguće je mijenjati ulazni i izlazni protok drugog spremnika. Karakteristika ventila opisana je izrazima:

$$\begin{aligned}q_{u2}(t) &= A_v\sqrt{\rho}\sqrt{2\Delta p_1}\cdot x_{u1},\\ q_i(t) &= A_v\sqrt{\rho}\sqrt{2\Delta p_2}\cdot x_{u2},\end{aligned}$$

pri čemu je:

x_{u1}	–	otvorenost ventila V_1,
x_{u2}	–	otvorenost ventila V_2,
A_v	–	poprečni presjek potpuno otvorenih ventila V_1 i V_2 [m^2],
Δp	–	razlika tlakova na krajevima ventila [Pa],
ρ	–	gustoća tekućine [$\mathrm{kg/m}^3$],
q_{u2}	–	maseni protok kroz ventil V_1 [kg/s],
q_i	–	maseni protok kroz ventil V_2 [kg/s].

Potrebno je:

a) Linearizirati jednadžbe koje opisuju vladanje visine tekućine u spremnicima u radnoj točki određenoj s $x_{u10} = 0.2$ i $x_{u20} = 0.8$.

b) Odrediti matrice $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{D}$ lineariziranog modela procesa prikazanog u prostoru stanja uz:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta h_1 \\ \Delta h_2 \end{bmatrix},\ \mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta x_{u1} \\ \Delta x_{u2} \end{bmatrix},\ \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta h_1 \\ \Delta q_i \end{bmatrix}.$$

c) Odrediti prijenosnu funkciju $G(s) = \frac{Y_2(s)}{U_1(s)}$.

Zadani su parametri sustava:

$q_{u1} = 50$ kg/s	–	ulazni maseni protok u prvi spremnik,
$A_1 = 5$ m^2	–	površina poprečnog presjeka spremnika 1,
$A_2 = 10$ m^2	–	površina poprečnog presjeka spremnika 2,
$A_{12} = 0.005$ m^2	–	površina poprečnog presjeka spojne cijevi između spremnika,
$A_v = 0.01$ m^2	–	površina poprečnog presjeka potpuno otvorenog ventila,
$\rho = 1000\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$	–	gustoća tekućine,
$\Delta p_1 = 50000$ Pa	–	razlika tlakova na krajevima prvog ventila,
$g = 9.81\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$	–	ubrzanje sile teže.

Zadatak 3.15

Shema sustava skladištenja fluida prikazana je slikom 2.15. Razina fluida u spremnicima regulira se promjenom otvorenosti ventila $x_u(t)$ koja može poprimiti vrijednosti između 0 i 1. Karakteristika ventila opisana je izrazom

$$q(t) = A_v \sqrt{\rho} \sqrt{2\Delta p} \cdot x_u,$$

pri čemu je:

x_u	–	otvorenost ventila,
A_v	–	poprečni presjek potpuno otvorenog ventila [m^2],
Δp	–	razlika tlakova na krajevima ventila [Pa],
ρ	–	gustoća fluida [kg/m^3],
q	–	maseni protok kroz ventil [kg/s].

Diferencijalne jednadžbe koje opisuju ponašanje razine fluida u spremnicima ($h_1(t)$ i $h_2(t)$) su

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}h_1}{\mathrm{d}t} &= \frac{1}{\rho A_1} Q_{u0} - \frac{A_v}{A_1} \sqrt{2g(h_1 - h_2)} \cdot x_u, \\ \frac{\mathrm{d}h_2}{\mathrm{d}t} &= \frac{A_v}{A_2} \sqrt{2g(h_1 - h_2)} \cdot x_u - \frac{A_i}{A_2} \sqrt{2gh_2} \end{aligned}$$

a) Odredite razine fluida u spremnicima 1 i 2 u stacionarnoj radnoj točki određenoj otvorenošću ventila $X_{u0} = 0.7$.

b) Linearizirajte nelinearni matematički model iz a) u stacionarnoj radnoj točki određenoj pod b).

c) Odredite prijenosnu funkciju $G(s) = \frac{H_1(s)}{X_u(s)}$ za model dobiven pod c).

d) Odredite razinu fluida u prvom spremniku $h_1(t)$ u ustaljenom stanju koristeći linearizirani model procesa iz c) uz promjenu otvorenosti ventila $\Delta x_u(t) = 0.1S(t)$.

Parametri sustava su:

$q_u = Q_{u0} = 30$ kg/s	–	ulazni protok u spremnik 1,
$A_1 = 5$ m^2	–	površina poprečnog presjeka spremnika 1,
$A_2 = 5$ m^2	–	površina poprečnog presjeka spremnika 2,
$A_i = 0.01$ m^2	–	površ. popr. pres. izl. cijevi spremnika 2,
$\rho = 1000\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$	–	gustoća fluida,
$A_v = 0.008$ m^2	–	popr. pres. potpuno otvorenog ventila,
$g = 9.81\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$	–	ubrzanje sile teže.

Kod računanja izlaznih protoka iz spremnika može se uzeti da je $A_v \ll A_1$ i $A_i \ll A_2$.

Zadatak 3.16

Na slici 2.16 prikazan je spremnik tekućine u obliku stošca. Polumjer poprečnog presjeka na vrhu spremnika (na visini $h = H = 10$ m) iznosi $R_H = 2$ m. Ulazni protok u spremnik je konstantan i iznosi $q_u = 10$ kg/s, dok je izlazni protok moguće mijenjati pomoću ventila:

$$q_i(t) = A_v\sqrt{\rho}\sqrt{2\Delta p}\cdot x_u,$$

gdje je:

q_i	–	maseni protok kroz ventil [kg/s],
x_u	–	otvorenost ventila,
Δp	–	razlika tlakova na krajevima ventila [Pa],
$A_v = 0.01$ m^2	–	poprečni presjek potpuno otvorenog ventila,
$\rho = 1000\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$	–	gustoća tekućine.

Diferencijalna jednadžba koja opisuje vladanje visine tekućine u spremniku je

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = \frac{q_u}{\rho\pi\left(\frac{R_H}{H}\right)^2 h^2} - \frac{A_v\sqrt{2gh}}{\pi\left(\frac{R_H}{H}\right)^2 h^2}x_u$$

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = 0.080\frac{1}{h^2} - 0.352h^{-\frac{3}{2}}x_u.$$

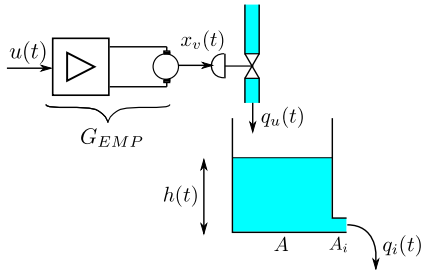
Potrebno je:

a) *(1 bod)* Odrediti otvorenost ventila x_{u0} i izlazni protok q_{i0} takav da visina tekućine u ustaljenom stanju bude $h_0 = 5$ m.

b) *(2 boda)* Linearizirati jednadžbu u radnoj točki određenoj pod a).

Zadatak 3.17

Na slici 3.4 prikazan je sustav skladištenja fluida u spremniku cilindričnog oblika. Razina fluida u spremniku regulira se promjenom ulaznog napona istosmjernog elektromotornog pogona kojim se zakreće ventil. Otvorenost ventila $x_v(t)$ može poprimiti vrijednosti između 0 i 1.



Slika 3.4: Sustav skladištenja fluida.

Karakteristika ventila opisana je sljedećim izrazom:

$$T_v \frac{\mathrm{d}q_u(t)}{\mathrm{d}t} + q_u(t) = k_v \sqrt{x_v(t)},$$

gdje je:
$x_v(t)$ - otvorenost ventila;
k_v - konstrukcijska konstanta ventila [m^3/s];
T_v - vremenska konstanta ventila [s];
$q_u(t)$ - ulazni protok [m^3/s].

Dinamika istosmjernog elektromotornog pogona pojednostavljeno je opisana integracijskim djelovanjem:

$$G_{EMP}(s) = \frac{X_v(s)}{U(s)} = \frac{1}{T_i s},$$

gdje je T_i vremenska konstanta integracijskog djelovanja.

Zadano je: $A = 5\,\mathrm{m}^2$, $A_i = 0.02\,\mathrm{m}^2$, $g \approx 10\,\mathrm{m/s}^2$, $k_v = 0.2\,\mathrm{m}^3/\mathrm{s}$, $T_v = 0.1\,\mathrm{s}$, $T_i = 5\,\mathrm{s}$.

a) Odredite prijenosnu funkciju procesa skladištenja fluida $G_p(s) = \dfrac{H(s)}{X_v(s)}$, ako je radna točka određena s $q_{u0} = 0.1\,\mathrm{m}^3/\mathrm{s}$.

b) Nacrtajte blokovsku shemu lineariziranog sustava skladištenja fluida i na njoj označite signale.

3.1 Rješenja

Rješenje 3.1

a)

$$u_0\Delta\ddot{y}(t) + \Delta\dot{y}(t) + \left(2y_0 + e^{u_0-y_0}\right)\Delta y(t) = e^{u_0-y_0}\Delta u(t)$$

Uz $e^{u_0-y_0} = y_0^2 = 4$ i $u_0 = y_0 + \ln y_0^2 = 3.386$ slijedi:

$$3.386\Delta\ddot{y}(t) + \Delta\dot{y}(t) + 8\Delta y(t) = 4\Delta u(t)$$

b)

$$G(s) = \frac{0.5}{0.423s^2 + 0.125s + 1}$$

c)

$$\Delta y(\infty) = \lim_{s\to 0} sG(s)U(s) = \frac{1}{2}\cdot 0.3 = 0.15$$

Nova vrijednost izlaza iznosi:

$$y(\infty) = y_0 + \Delta y(\infty) = 2.15.$$

Rješenje 3.2

a) $\Delta\dot{y} + 2y_0\Delta y = \frac{2u_0}{y_0}\Delta u - \frac{u_0^2}{y_0^2}\Delta y$,
$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\frac{2u_0}{y_0}}{s+2y_0+\frac{u_0^2}{y_0^2}}$

b) $\Delta\dot{y} + 4y_0^3\Delta y = 2u_0y_0\Delta u + u_0^2\Delta y$,
$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{2u_0y_0}{s+4y_0^3-u_0^2}$

c) $y_0^3 = u_0^3 \Rightarrow y_0 = 1$,
$\Delta\ddot{y} + \Delta\dot{y} + 3y_0^2\Delta y = 3u_0^2\Delta u - y_0\Delta\dot{u}$,
$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{3u_0^2-y_0s}{s^2+s+3y_0^2}$

d) $-\frac{1}{y_0} = u_0 \Rightarrow u_0 = -1$,
$\Delta\ddot{y} + \Delta\dot{y} + \frac{1}{y_0^2}\Delta y = \Delta u - y_0\Delta\dot{u}$,
$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1-y_0s}{s^2+s+\frac{1}{y_0^2}}$

e) $\ln y_0 = u_0 - y_0 \Rightarrow u_0 = 1,$
$\Delta\ddot{y} + \Delta\dot{y} + \frac{1}{y_0}\Delta y = \Delta u - e^{\dot{u}_0}\Delta y - y_0 e^{\dot{u}_0}\Delta\dot{u},$
$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1-y_0 s}{s^2+s+\frac{1}{y_0}+1}$

f) $-\frac{1}{y_0} = u_0 - y_0 \Rightarrow u_0 = 0,$
$\Delta\ddot{y} + \Delta\dot{y} + \frac{1}{y_0^2}\Delta y = \Delta u - e^{\dot{u}_0}\Delta y - y_0 e^{\dot{u}_0}\Delta\dot{u},$
$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1-y_0 s}{s^2+s+\frac{1}{y_0^2}+1}$

Rješenje 3.3

a) Stacionarno stanje dobijemo tako da obje derivacije izjednačimo s nulom i riješimo dobivene nelinearne jednadžbe. Budući da je u zadatku zadano $x_e > 0$ i $y_e > 0$, prvu jednadžbu možemo podijeliti s x, a drugu s y. Tako dobivamo:

$$1.6\left(1 - \frac{x_\mathrm{e}}{125}\right) = 3.2\frac{y_\mathrm{e}}{50 + x_\mathrm{e}},$$
$$1.92\frac{x_\mathrm{e}}{50 + x_\mathrm{e}} = 0.56.$$

Iz druge jednadžbe odmah slijedi $x_\mathrm{e} \approx 20.58$, što možemo uvrstiti u prvu jednadžbu iz čega dobijemo y_e:

$$y_\mathrm{e} = 0.5(50 + x_\mathrm{e})\left(1 - \frac{x_\mathrm{e}}{125}\right) \approx 29.48.$$

b)

$$\Delta\dot{x} = 0.1263\Delta x - 0.9331\Delta y,$$
$$\Delta\dot{y} = 0.5681\Delta x - 1.5869 \cdot 10^{-4}\Delta y.$$

c)

$$\begin{bmatrix}\Delta\dot{x}\\ \Delta\dot{y}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0.1263 & -0.9331\\ 0.5681 & -1.5869 \cdot 10^{-4}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Delta x\\ \Delta y\end{bmatrix}$$

Rješenje 3.4

a) Nelinearne diferencijalne jednadžbe stanja sustava glase:

$$\begin{aligned}
\ddot{m} &= f_{\ddot{m}}(\dot{m}, m, h, v, x_u) = -\frac{1}{T_1}\dot{m} - \frac{0.2}{T_1}x_u \quad \text{uz } \dot{m}(t) \leq 0 \text{ i } m(t) \geq m_r \\
\dot{m} &= f_{\dot{m}}(\dot{m}, m, h, v, x_u) = \dot{m} \\
\dot{h} &= f_{\dot{h}}(\dot{m}, m, h, v, x_u) = v \\
\dot{v} &= f_{\dot{v}}(\dot{m}, m, h, v, x_u) = -G\frac{m_Z}{(r+h)^2} - \frac{v_e}{m}\dot{m}
\end{aligned}$$

Iako je ovisnost mase rakete i goriva o upravljačkom signalu aktuatora dana u linearnom obliku, nakon lansiranja rakete maseni protok goriva ne može biti pozitivan ($\dot{m}(t) \leq 0$) te masa rakete i goriva ne može biti manja od m_r—mase rakete bez goriva.

b) Ovisnost masenog protoka raketnog goriva o upravljačkom signalu dana je prijenosnom funkcijom $sG_M(s)$. Statičko pojačanje te prijenosne funkcije iznosi -0.2, tj. za pobudu $x_u(t) = 2.5S(t)$ imat ćemo $\dot{m}(\infty) = -0.5\,\mathrm{kg\,s^{-1}}$, što je jednako početnom uvjetu $\dot{m}(0)$. Drugim riječima, neće biti nikakve prijelazne pojave u vezi masenog protoka raketnog goriva: $\dot{m}(t) = -0.5S(t)$. Iz prethodnog razmatranja lako možemo zaključiti kako je

$$m(10) = m(0) - 0.5\,\mathrm{kg\,s^{-1}} \cdot 10\,\mathrm{s} = 95\,\mathrm{kg} \tag{3.4}$$

Do istog rješenja može se doći i bez prethodnog razmatranja, određivanjem $M(s)$ i prebacivanjem iz Laplaceove u vremensku domenu. Iz prijenosne funkcije $G_M(s)$ prvo odredimo diferencijalnu jednadžbu.

$$\ddot{m}T_1 + \dot{m} = -0.2x_u \tag{3.5}$$

Uz zadan $X_u(s) = \frac{2.5}{s}$ i početne uvjete, prebacimo diferencijalnu jednadžbu u donje područje, vodeći računa o slobodnom odzivu.

$$\begin{aligned}
T_1\left(s^2M(s) - sm(0) - \dot{m}(0)\right) + sM(s) - m(0) &= -0.2X_u(s) \\
M(s)\left(T_1s^2 + s\right) - 100T_1s + 0.5T_1 - 100 &= -\frac{0.5}{s} \\
M(s)\left(T_1s^2 + s\right) &= 100\left(T_1s + 1\right) - 0.5\frac{T_1s+1}{s} \\
M(s) &= 100\frac{\cancel{T_1s+1}}{s\cancel{(T_1s+1)}} - 0.5\frac{\cancel{T_1s+1}}{s^2\cancel{(T_1s+1)}} \\
M(s) &= \frac{100}{s} - \frac{0.5}{s^2}
\end{aligned}$$

Računanjem $m(t) = \mathcal{L}^{-1}\{M(s)\}$ dobivamo $m(t) = (100 - 0.5t)S(t)$, odnosno $m(10) = 95\,\text{kg}$.

Prve tri jednadžbe stanja sustava su linearne, pa nam ostaje pozabaviti se jednadžbom $f_{\dot{v}}$.

$$\left.\frac{\partial f_{\dot{v}}}{\partial h}\right|_{\text{R.T.}} = 2G\frac{m_Z}{(r+h(10))^3} = 3.0824 \times 10^{-06}$$
$$\left.\frac{\partial f_{\dot{v}}}{\partial m}\right|_{\text{R.T.}} = \frac{v_e}{m^2(0)}\dot{m}(0) = -0.2493$$
$$\left.\frac{\partial f_{\dot{v}}}{\partial \dot{m}}\right|_{\text{R.T.}} = -\frac{v_e}{m(0)} = -47.3684$$

Jednadžbe lineariziranog sustava u prostoru stanja glase:

$$\begin{bmatrix}\Delta\ddot{m}\\ \Delta\dot{m}\\ \Delta\dot{h}\\ \Delta\dot{v}\end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix}-\frac{1}{T_1} & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ -\frac{v_e}{m(0)} & \frac{v_e}{m^2(0)}\dot{m}(0) & 2G\frac{m_Z}{(r+h(10))^3} & 0\end{bmatrix}}_{\mathbf{A}}\begin{bmatrix}\Delta\dot{m}\\ \Delta m\\ \Delta h\\ \Delta v\end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix}-\frac{0.2}{T_1}\\ 0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}}_{\mathbf{B}}\Delta x_u$$
$$y = \underbrace{\mathbf{I}_{4\times4}}_{\mathbf{C}}\begin{bmatrix}\Delta\dot{m} & \Delta m & \Delta h & \Delta v\end{bmatrix}^{\mathrm{T}} + \underbrace{\mathbf{0}_{4\times1}}_{\mathbf{D}}\Delta x_u$$

Napomena: U zadatku nije zadano što imamo na izlazu lineariziranog sustava, pa smo pretpostavili da imamo sve varijable stanja.

Rješenje 3.5

a)

$$u_{C0} = k_N\sqrt{i_{L0}} = 0.4V$$

Linearizacija:

$$\frac{d}{dt}\Delta i_L = \frac{1}{L}\Delta u_u - \frac{R}{L}\Delta i_L - \frac{1}{L}\Delta u_C$$
$$\frac{d}{dt}\Delta u_C = \frac{1}{C}\Delta i_L - \frac{2}{Ck_N^2}u_{C0}\Delta u_C$$
$$\Delta u_i = \Delta u_C$$

Zapis u prostoru stanja

$$\begin{bmatrix} (\Delta\dot{i}_L) \\ (\Delta\dot{u}_C) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & -\frac{2}{Ck_N^2}u_{C0} \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} \Delta i_L \\ \Delta u_C \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix}}_{B} \Delta u_u$$

$$\Delta u_i = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}}_{C} \begin{bmatrix} \Delta i_L \\ \Delta u_C \end{bmatrix} + \underbrace{[0]}_{D} \Delta u_u$$

Uvršteni brojevi:

$$A = \begin{bmatrix} -10^6 & -10^5 \\ 10^{11} & -8 \cdot 10^8 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 10^5 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = [0]\,.$$

Rješenje 3.6

$$i_{L0} = a_1(u_{C0} - b)^3 - a_2(a_{C0} - b) + a_3 = 0.0107 \text{ A}$$
$$u_{u0} = u_{C0} + Ri_{L0} = 0.507 \text{ V}$$

Linearizirane jednadžbe:

$$\frac{\mathrm{d}\Delta i_L}{\mathrm{d}t} = -\frac{R}{L}\Delta i_L - \frac{1}{L}\Delta u_C + \frac{1}{L}\Delta u_\mathrm{u}$$
$$\frac{\mathrm{d}\Delta u_C}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{C}\Delta i_L + \frac{-3a_1(u_{C0} - b)^2 + a_2}{C}\Delta u_C$$
$$\Delta u_\mathrm{i} = \Delta u_C$$

Prostor stanja:

$$\begin{bmatrix} (\Delta\dot{i}_L) \\ (\Delta\dot{u}_C) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & \frac{-3a_1(u_{C0}-b)^2+a_2}{C} \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} \Delta i_L \\ \Delta u_C \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix}}_{B} \Delta u_\mathrm{u}$$

$$\Delta u_\mathrm{i} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}}_{C} \begin{bmatrix} \Delta i_L \\ \Delta u_C \end{bmatrix} + \underbrace{[0]}_{D} \Delta u_\mathrm{u}$$

Numeričke vrijednosti:

$$A = \begin{bmatrix} -10^6 & -10^5 \\ 10^{11} & 4.3 \cdot 10^9 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 10^5 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = [0].$$

Rješenje 3.7

a) Potrebno je linearizirati samo drugu diferencijalnu jednadžbu (prva je već linearna) pa se dobije:

$$\frac{d}{dt}\Delta i_{\mathrm{L}} = K_1\Delta i_{\mathrm{L}} + K_2\Delta u_{\mathrm{C}} + K_3\Delta u_{\mathrm{u}},$$
$$\frac{d}{dt}\Delta u_{\mathrm{C}} = K_4\Delta i_{\mathrm{L}} + K_5\Delta u_{\mathrm{C}},$$

gdje su:

$$K_1 = -\frac{R}{L} \qquad K_2 = -\frac{1}{L}$$
$$K_3 = \frac{1}{L} \qquad K_4 = \frac{1}{C}$$
$$K_5 = -\frac{i_0}{Cu_0}e^{\frac{u_{\mathrm{C}0}}{u_0}}$$

Da bi se odredila prijenosna funkcija $G(s) = \frac{U_{\mathrm{i}}(s)}{U_{\mathrm{u}}(s)}$ potrebno je linearizirane diferencijalne jednadžbe prebaciti u Laplaceovu domenu:

$$sI_{\mathrm{L}}(s) = K_1 I_{\mathrm{L}}(s) + K_2 U_{\mathrm{C}}(s) + K_3 U_{\mathrm{u}}(s),$$
$$sU_{\mathrm{C}}(s) = K_4 I_{\mathrm{L}}(s) + K_5 U_{\mathrm{C}}(s).$$

Iz dobivenog sustava jednadžbi potrebno je eliminirati $I_{\mathrm{L}}(s)$, nakon čega se dobije tražena prijenosna funkcija:

$$G(s) = \frac{U_{\mathrm{i}}(s)}{U_{\mathrm{u}}(s)} = \frac{U_{\mathrm{C}}(s)}{U_{\mathrm{u}}(s)} = \frac{K_3K_4}{s^2 - s(K_1+K_5) + K_1K_5 - K_2K_4}.$$

b) Traženi zapis u prostoru stanja glasi:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \\ K_4 & K_5 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} K_3 \\ 0 \end{bmatrix} u_{\mathrm{u}},$$
$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}\mathbf{x} + [0]u_{\mathrm{u}}$$

Rješenje 3.8

a) $F_0 = kx_0^3 = 10^5 \cdot 10^{-3} = 100$ N

$m\Delta\ddot{x} = -\frac{2\cdot 10^3}{\pi}\Delta\dot{x} - 3k \cdot 10^{-2}\Delta x + \Delta F(t)$
$5\Delta\ddot{x} + 636.62\Delta\dot{x} + 3 \cdot 10^3\Delta x = \Delta F(t)$

b) $G(s) = \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{ms^2 + \frac{2\cdot 10^3}{\pi}s + 3k\cdot 10^{-2}} = \frac{1}{5s^2 + 636.62s + 3000}$

c) $kx^3(\infty) = F_0 + \Delta F(\infty)$
$x(\infty) = 0.11447$ m

Konačni odmak od radne točke predviđen linearnim modelom:
$\Delta x(\infty) = \lim_{s\to 0} sG(s) \cdot \frac{50}{s} = \frac{50}{3\cdot 10^3} = 0.01667m$
Konačni odmak predviđen linearnim modelom:
$x(\infty) = x_0 + \Delta x(\infty) = 0.11667m$

Rješenje 3.9

Radna točka (ustaljeno stanje, tj. $\ddot{x}_0 = 0$ i $\dot{x}_0 = 0$) uz $F_0 = 49 \cdot 10^3 N$:

$$x_0 = \sqrt{\frac{GMm}{F_0}} - R = 4366.67m$$

Linearizacija oko radne točke:

$$m\Delta\ddot{x} + k_2\Delta\dot{x} - \frac{2F_0\sqrt{F_0}}{\sqrt{GMm}}\Delta x = \Delta F$$
$$5000\Delta\ddot{x} + 200\Delta\dot{x} - 0.0154\Delta x = \Delta F$$

Prijenosna funkcija:

$$\frac{\Delta x}{\Delta F} = \frac{1}{5000s^2 + 200s - 0.0154}$$

Rješenje 3.10

Za radnu točku određenu s $y_0 = 0.01$ m vrijedi:

$$i_0 = \frac{mg(y_0 + b)^3}{k_1} = 1 \text{ A}.$$

Linearizacija:

$$\frac{\mathrm{d}^2\Delta y}{\mathrm{d}t^2}+\frac{k_4}{m}\frac{\mathrm{d}\Delta y}{\mathrm{d}t}-\frac{3k_1i_0}{m(y_0+k_2)^4}\Delta y=-\frac{k_1}{m(y_0+k_2)^3}\Delta i$$
$$\frac{\mathrm{d}^2\Delta y}{\mathrm{d}t^2}+20.00\frac{\mathrm{d}\Delta y}{\mathrm{d}t}-490.74\Delta y=-9.81\Delta i$$

Rješenje 3.11

U radnoj točki sve su derivacije jednake nuli:

$$\dot{v}=\dot{\theta}=\ddot{\theta}=0\Rightarrow F_0=bv_0=0.2N.$$

U nastavku je izveden izraz koji opisuje $\ddot{\theta}$:

$$(I+ml^2)\ddot{\theta}+mgl\sin\theta=ml\dot{v}\cos\theta\quad\Rightarrow\quad\dot{v}=\frac{I+ml^2}{ml\cos\theta}\ddot{\theta}+g\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\ ,$$

$$(M+m)\dot{v}+bv-ml\ddot{\theta}\cos\theta-ml\dot{\theta}^2=F\ ,$$

$$\underbrace{\frac{(M+m)(I+ml^2)}{ml}}_{K}\frac{\ddot{\theta}}{\cos\theta}+(M+m)g\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+bv-ml\ddot{\theta}\cos\theta-ml\dot{\theta}^2\sin\theta=F\ ,$$

$$\left(\frac{K}{\cos\theta}-ml\cos\theta\right)\ddot{\theta}=F-(M+m)g\frac{\sin\theta}{\cos\theta}-bv+ml\dot{\theta}^2\sin\theta\ ,$$

$$\left(K-ml\cos^2\theta\right)\ddot{\theta}=F\cos\theta-(M+m)g\sin\theta-bv\cos\theta+\frac{1}{2}ml\dot{\theta}^2\sin2\theta\ ,$$

$$\ddot{\theta}=\frac{1}{K-ml\cos^2\theta}\left(F\cos\theta-(M+m)g\sin\theta-bv\cos\theta+\frac{1}{2}ml\dot{\theta}^2\sin2\theta\right)=f(v,\,\theta,\,\dot{\theta},\,F)\ ,$$

Linearizacija u zadanoj radnoj točki daje:

$$\begin{aligned}
\Delta\ddot{\theta} &= \tfrac{\partial f}{\partial v}\big|_0\,\Delta v+\tfrac{\partial f}{\partial\theta}\big|_0\,\Delta\theta+\tfrac{\partial f}{\partial\dot{\theta}}\Big|_0\,\Delta\dot{\theta}+\tfrac{\partial f}{\partial F}\big|_0\,\Delta F,\\
\tfrac{\partial f}{\partial v}\big|_0 &= \tfrac{-b\cos\theta_0}{K-ml\cos^2\theta_0}=\tfrac{-mlb}{I(M+m)+Mml^2}=-0.4545,\\
\tfrac{\partial f}{\partial\theta}\big|_0 &= \tfrac{ml\sin2\theta_0}{K-ml\cos^2\theta_0}\left(F\cos\theta_0-(M+m)g\sin\theta_0-bv_0\cos\theta_0+\tfrac{1}{2}ml\dot{\theta}_0^2\sin2\theta_0\right)\\
&\quad+\tfrac{1}{K-ml\cos^2\theta_0}\left(-F\sin\theta_0-(M+m)g\cos\theta_0+bv_0\sin\theta_0+ml\dot{\theta}_0^2\cos2\theta_0\right)\\
&= \tfrac{-mgl(M+m)}{I(M+m)+Mml^2}=-31.2136,\\
\tfrac{\partial f}{\partial\dot{\theta}}\Big|_0 &= \tfrac{1}{K-ml\cos^2\theta_0}\cdot ml\dot{\theta}_0\sin2\theta_0=0,\\
\tfrac{\partial f}{\partial F}\big|_0 &= \tfrac{\cos\theta_0}{K-ml\cos^2\theta_0}=\tfrac{ml}{I(M+m)+Mml^2}=4.5454.
\end{aligned}$$

Sličan izvod vrijedi i za $\dot{v}$:

$$
\begin{aligned}
\dot{v} &= \tfrac{I+ml^2}{ml\cos\theta}\ddot{\theta} + g\tan\theta = \tfrac{I+ml^2}{ml\cos\theta}\cdot f(v,\,\theta,\,\dot{\theta},\,F) + g\tan\theta = h(v,\,\theta,\,\dot{\theta},\,F),\\
\Delta\dot{v} &= \tfrac{\partial h}{\partial v}\big|_0\,\Delta v + \tfrac{\partial h}{\partial \theta}\big|_0\,\Delta\theta + \tfrac{\partial h}{\partial \dot{\theta}}\Big|_0\,\Delta\dot{\theta} + \tfrac{\partial h}{\partial F}\big|_0\,\Delta F,\\
\tfrac{\partial h}{\partial v}\big|_0 &= \tfrac{I+ml^2}{ml\cos\theta_0}\,\tfrac{\partial f}{\partial v}\big|_0 = \tfrac{-(I+ml^2)b}{I(M+m)+Mml^2} = -0.1818,\\
\tfrac{\partial h}{\partial \theta}\big|_0 &= \tfrac{\partial}{\partial\theta}\left(\tfrac{I+ml^2}{ml\cos\theta_0}\right)\Big|_0 \cdot \underbrace{f(v_0,\,\theta_0,\,\dot{\theta}_0,\,F_0)}_{=0} + \tfrac{I+ml^2}{ml\cos\theta_0}\,\tfrac{\partial f}{\partial\theta}\big|_0 + g\tfrac{1}{\cos^2\theta_0} = \tfrac{-m^2gl^2}{I(M+m)+Mml^2} = -2.675\\
\tfrac{\partial h}{\partial \dot{\theta}}\Big|_0 &= \tfrac{I+ml^2}{ml\cos\theta_0}\,\tfrac{\partial f}{\partial \dot{\theta}}\Big|_0 = 0,\\
\tfrac{\partial h}{\partial F}\big|_0 &= \tfrac{I+ml^2}{ml\cos\theta_0}\,\tfrac{\partial f}{\partial F}\big|_0 = \tfrac{I+ml^2}{I(M+m)+Mml^2} = 1.8181.
\end{aligned}
$$

Rješenje 3.12

a) Linearizacija se provodi u radnoj tožki određenoj s $\delta_0 = 0.2$, pri čemu je sustav u stacionarnom stanju:

$$\dot{\alpha}_0 = \ddot{\alpha}_0 = 0, \tag{3.6}$$

$$\dot{\delta}_0 = \ddot{\delta}_0 = 0. \tag{3.7}$$

Razvojem nelinearnog modela u Taylorov red uz zanemarenje članova reda većeg od 1 slijedi

$$m\Delta\ddot{\delta} = -mg\Delta\alpha, \tag{3.8}$$

$$(J_k + m\delta_0^2)\Delta\ddot{\alpha} = -\Delta M_\mathrm{m} - m\Delta\delta. \tag{3.9}$$

Uvrštenjem $\delta_0 = 0.2$ proizlazi sljedeći opis sustava u prostoru stanja

$$\begin{bmatrix} \Delta\dot{\delta} \\ \Delta\ddot{\delta} \\ \Delta\dot{\alpha} \\ \Delta\ddot{\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -g & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{-m}{J_k+0.04m} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\delta \\ \Delta\dot{\delta} \\ \Delta\alpha \\ \Delta\dot{\alpha} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{-1}{J_k+0.04m} \end{bmatrix} \Delta M_\mathrm{m}, \tag{3.10}$$

$$\Delta y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\delta \\ \Delta\dot{\delta} \\ \Delta\alpha \\ \Delta\dot{\alpha} \end{bmatrix}. \tag{3.11}$$

Rješenje 3.13

a)

$$\frac{\mathrm{d}\Delta h_1}{\mathrm{d}t} = \left.\frac{\partial f_1}{\partial h_1}\right|_0 \Delta h_1 + \left.\frac{\partial f_1}{\partial h_2}\right|_0 \Delta h_2 + \left.\frac{\partial f_1}{\partial x_u}\right|_0 \Delta x_u$$
$$\frac{\mathrm{d}\Delta h_2}{\mathrm{d}t} = \left.\frac{\partial f_2}{\partial h_1}\right|_0 \Delta h_1 + \left.\frac{\partial f_2}{\partial h_2}\right|_0 \Delta h_2 + \left.\frac{\partial f_2}{\partial x_u}\right|_0 \Delta x_u$$

$$\left.\frac{\partial f_1}{\partial h_1}\right|_0 = -\frac{\rho g A_i A_{12}}{k_u A_1 \sqrt{X_{u0}}} = -0.005549\ \frac{1}{\mathrm{s}},$$
$$\left.\frac{\partial f_1}{\partial h_2}\right|_0 = \frac{\rho g A_i A_{12}}{k_u A_1 \sqrt{X_{u0}}} = 0.005549\ \frac{1}{\mathrm{s}},$$
$$\left.\frac{\partial f_1}{\partial x_u}\right|_0 = \frac{k_u}{2\rho A_1 \sqrt{X_{u0}}} = 0.007071\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}},$$
$$\left.\frac{\partial f_2}{\partial h_1}\right|_0 = \frac{\rho g A_{12} A_i}{k_u A_2 \sqrt{X_{u0}}} = 0.005549\ \frac{1}{\mathrm{s}},$$
$$\left.\frac{\partial f_2}{\partial h_2}\right|_0 = -\frac{\rho g A_i}{A_2 k_u \sqrt{X_{u0}}} \left[A_i + A_{12}\right] = -0.011099\ \frac{1}{\mathrm{s}},$$
$$\left.\frac{\partial f_2}{\partial x_u}\right|_0 = 0,$$

$$\Delta q_i = \frac{A_i^2 \rho^2 g}{k_u \sqrt{X_{u0}}} \Delta h_2 = 27.7469 \Delta h_2$$

$$A = \begin{bmatrix} -0.005549 & 0.005549 \\ 0.005549 & -0.011099 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0.007071 \\ 0 \end{bmatrix},$$
$$C = \begin{bmatrix} 0 & 27.7469 \end{bmatrix}, \qquad D = [0].$$

b)

$$G_1(s) = \frac{Q_i(s)}{X_u(s)} = C(sI - A)^{-1}B + D = \frac{45.045}{32476.6s^2 + 550.396s + 1}$$

$$G(s) = \frac{U_i(s)}{X_u(s)} = G_1(s) \cdot k_i e^{-sT_t} = \frac{5.631e^{-10s}}{32476.6s^2 + 550.396s + 1}$$

Rješenje 3.14

a) Iz nelinearnih jednadžbi određujemo visine tekućine u stacionarnom stanju. Pritom je $\frac{\mathrm{d}h_1}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}h_2}{\mathrm{d}t} = 0$:

$$q_{u1} = A_{12}\rho\sqrt{2g(H_{10} - H_{20})}$$
$$A_1 2\rho\sqrt{2g(H_{10} - H_{20})} + A_v\sqrt{2\rho\Delta p_1}X_{u10} = A_v\rho\sqrt{2gH_{20}}X_{u20}$$

$$H_{20} = \frac{1}{2g}\left[\frac{1}{A_v\rho X_{u20}}\left(q_{u1} + A_v\sqrt{2\rho\Delta p_1}X_{u10}\right)\right]^2 = 3.9023\text{m}$$

$$H_{10} = H_{20} + \frac{1}{2g}\left(\frac{q_{u1}}{A_{12}\rho}\right)^2 = 8.9991\text{m}$$

Uz $\frac{\mathrm{d}h_1}{\mathrm{d}t} = f_1(h_1, h_2, x_{u1}, x_{u2})$ i $\frac{\mathrm{d}h_2}{\mathrm{d}t} = f_2(h_1, h_2, x_{u1}, x_{u2})$, linearizirane jednadžbe glase:

$$\frac{\mathrm{d}\Delta h_1}{\mathrm{d}t} = \left.\frac{\partial f_1}{\partial h_1}\right|_0 \Delta h_1 + \left.\frac{\partial f_1}{\partial h_2}\right|_0 \Delta h_2 + \left.\frac{\partial f_1}{\partial x_{u1}}\right|_0 \Delta x_{u1} + \left.\frac{\partial f_1}{\partial x_{u2}}\right|_0 \Delta x_{u2}$$
$$\frac{\mathrm{d}\Delta h_2}{\mathrm{d}t} = \left.\frac{\partial f_2}{\partial h_1}\right|_0 \Delta h_1 + \left.\frac{\partial f_2}{\partial h_2}\right|_0 \Delta h_2 + \left.\frac{\partial f_2}{\partial x_{u1}}\right|_0 \Delta x_{u1} + \left.\frac{\partial f_2}{\partial x_{u2}}\right|_0 \Delta x_{u2}$$

$$\left.\frac{\partial f_1}{\partial h_1}\right|_0 = -\frac{A_{12}}{A_1}\sqrt{\frac{g}{2(H_{10} - H_{20})}} = -9.81 \cdot 10^{-4},$$
$$\left.\frac{\partial f_1}{\partial h_2}\right|_0 = \frac{A_{12}}{A_1}\sqrt{\frac{g}{2(H_{10} - H_{20})}} = 9.81 \cdot 10^{-4},$$
$$\left.\frac{\partial f_1}{\partial x_{u1}}\right|_0 = 0,$$
$$\left.\frac{\partial f_1}{\partial x_{u2}}\right|_0 = 0,$$
$$\left.\frac{\partial f_2}{\partial h_1}\right|_0 = \frac{A_{12}}{A_2}\sqrt{\frac{g}{2(H_{10} - H_{20})}} = 4.905 \cdot 10^{-4},$$
$$\left.\frac{\partial f_2}{\partial h_2}\right|_0 = -\frac{A_{12}}{A_2}\sqrt{\frac{g}{2(H_{10} - H_{20})}} - \frac{A_v}{A_2}\sqrt{\frac{g}{2H_{20}}} \cdot X_{u20} = -1.387 \cdot 10^{-3},$$
$$\left.\frac{\partial f_2}{\partial x_{u1}}\right|_0 = \frac{A_v}{A_2}\sqrt{\frac{2\Delta p_1}{\rho}} = 0.01,$$
$$\left.\frac{\partial f_2}{\partial x_{u2}}\right|_0 = -\frac{A_v}{A_2}\sqrt{2gH_{20}} = -8.75 \cdot 10^{-3}.$$

b) Matrice $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ se iščitavaju iz lineariziranih jednadžbi:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -9.81 \cdot 10^{-4} & 9.81 \cdot 10^{-4} \\ 4.905 \cdot 10^{-4} & -1.387 \cdot 10^{-3} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0.01 & -8.75 \cdot 10^{-3} \end{bmatrix}.$$

Za izlaznu jednadžbu, potrebno je linearizirati relaciju za izlazni protok:

$$q_i = A_v \rho \sqrt{2gh_2} \cdot x_{u2}$$

$$\Delta q_i = A_v \rho \sqrt{\frac{g}{2H_{20}}} X_{u20} \Delta h_2 + A_v \rho \sqrt{2gH_{20}} \Delta x_{u2} = 8.969 \Delta h_2 + 87.5 \Delta x_{u2}$$

Tada matrice $\mathbf{C}$ i $\mathbf{D}$ iznose:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 8.969 \end{bmatrix}, \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 87.5 \end{bmatrix}.$$

c) Prvi način – linearizirane jednadžbe se prebacuju u Laplaceovu domenu uz $X_{u2}(s) = 0$:

$$\begin{aligned} &(s + 9.81 \cdot 10^{-4})\, H_1(s) = 9.81 \cdot 10^{-4} H_2(s) \\ &(s + 1.387 \cdot 10^{-3})\, H_2(s) = 4.905 \cdot 10^{-4} H_1(s) + 0.01 X_{u1}(s), \\ &Q_i(s) = 8.969 H_2(s). \end{aligned}$$

Kombiniranjem gornjih relacija dobiva se:

$$G(s) = \frac{100(1019s + 1)}{1136528s^2 + 2692s + 1}$$

Drugi način – pomoću matrica stanja:

$$G(s) = \mathbf{C}(\mathbf{sI} - \mathbf{A})^{-\mathbf{1}}\mathbf{B} + \mathbf{D}.$$

Na ovaj bi se način dobila matrica s četiri prijenosne funkcije (2 ulaza i 2 izlaza!). Pošto nas zanima samo veza drugog izlaza i prvog ulaza, tražena prijenosna funkcija se nalazi u drugom retku, prvom stupcu. Da bismo skratili računanje, možemo izbaciti $y_1 = \Delta h_1$ i $u_2 = \Delta x_{u2}$ iz opisa u prostoru stanja. Tada dobivamo nove matrice $\mathbf{B}$,$\mathbf{C}$,$\mathbf{D}$ bez odgovarajućeg stupca, odnosno retka:

$$\mathbf{B_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.01 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C_1} = \begin{bmatrix} 0 & 8.969 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D_1} = [\mathbf{0}].$$

Uvrštavanjem ovakvih matrica u relaciju:

$$G(s) = \mathbf{C_1}(\mathbf{sI} - \mathbf{A})^{-\mathbf{1}}\mathbf{B_1} + \mathbf{D_1},$$

dobiva se tražena prijenosna funkcija.

Rješenje 3.15

a)

$$H_{10} = \frac{1}{2g}\left[\left(\frac{Q_{u0}}{A_i\rho}\right)^2 + \left(\frac{Q_{u0}}{A_v\rho X_{u0}}\right)^2\right] = 1.922 \text{ m}$$
$$H_{20} = \frac{1}{2g}\left(\frac{Q_{u0}}{A_i\rho}\right)^2 = 0.459 \text{ m}$$

b)

$$\frac{\mathrm{d}h_1}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{\rho A_1}Q_{u0} - \frac{A_v}{A_1}\sqrt{2g(h_1-h_2)}\cdot x_u = f_1(h_1,h_2,x_u),$$
$$\frac{\mathrm{d}h_2}{\mathrm{d}t} = \frac{A_v}{A_2}\sqrt{2g(h_1-h_2)}\cdot x_u - \frac{A_i}{A_2}\sqrt{2gh_2} = f_2(h_1,h_2,x_u)$$

$$\frac{\mathrm{d}\Delta h_1}{\mathrm{d}t} = \left.\frac{\partial f_1}{\partial h_1}\right|_0 \Delta h_1 + \left.\frac{\partial f_1}{\partial h_2}\right|_0 \Delta h_2 + \left.\frac{\partial f_1}{\partial x_u}\right|_0 \Delta x_u$$
$$\frac{\mathrm{d}\Delta h_2}{\mathrm{d}t} = \left.\frac{\partial f_2}{\partial h_1}\right|_0 \Delta h_1 + \left.\frac{\partial f_2}{\partial h_2}\right|_0 \Delta h_2 + \left.\frac{\partial f_2}{\partial x_u}\right|_0 \Delta x_u$$

$$\left.\frac{\partial f_1}{\partial h_1}\right|_0 = -\frac{A_v^2\rho g}{A_1 Q_{u0}}X_{u0}^2 = -0.00205,$$
$$\left.\frac{\partial f_1}{\partial h_2}\right|_0 = \frac{A_v^2\rho g}{A_1 Q_{u0}}X_{u0}^2 = 0.00205,$$
$$\left.\frac{\partial f_1}{\partial x_u}\right|_0 = -\frac{Q_{u0}}{A_1\rho\ X_{u0}} = -0.00857,$$
$$\left.\frac{\partial f_2}{\partial h_1}\right|_0 = \frac{A_v^2\rho g}{A_2 Q_{u0}}X_{u0}^2 = 0.00205,$$
$$\left.\frac{\partial f_2}{\partial h_2}\right|_0 = -\frac{\rho g}{A_2 Q_{u0}}\left[A_v^2 X_{u0}^2 + A_i^2\right] = -0.00859,$$
$$\left.\frac{\partial f_2}{\partial x_u}\right|_0 = \frac{Q_{u0}}{A_2\rho X_{u0}} = 0.00857,$$

$$\frac{\mathrm{d}\Delta h_1}{\mathrm{d}t} = -0.0021\Delta h_1 + 0.0021\Delta h_2 - 0.00857\Delta x_u$$
$$\frac{\mathrm{d}\Delta h_2}{\mathrm{d}t} = 0.0021\Delta h_1 - 0.0086\Delta h_2 + 0.00857\Delta x_u$$

c)

$$G(s) = \frac{H_1(s)}{X_u(s)} = -4.08 \cdot \frac{1 + 153.9s}{1 + 783.9s + 73260.1s^2}$$

d)

$$X_u(s) = \tfrac{0.1}{s}$$
$$h_1(t) \approx H_{10} + \Delta h_1(t)$$
$$\lim_{t\to\infty} h_1(t) \approx H_{10} + \lim_{s\to 0} sG(s)X_u(s) = 1.514 \text{ m}$$

Rješenje 3.16

a)

$$\tfrac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = 0 \Rightarrow q_{i0} = q_{u0} = 10\text{kg/s}$$
$$q_{i0} = A_v\rho\sqrt{2gh}x_{u0} \Rightarrow x_{u0} = \tfrac{q_i}{A_v\rho\sqrt{2gh}} = 0.101$$

b) Radi jednostavnijeg zapisa, linearizaciju vršimo nad sljedećim zapisom diferencijalne jednadžbe:

$$\rho\pi\left(\frac{R_H}{H}\right)^2 h^2\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = q_u - A_v\rho\sqrt{2gh}x_u$$

Linearizirana jednadžba glasi:

$$\rho\pi\left(\tfrac{R_H}{H}h_0\right)^2 \tfrac{\mathrm{d}\Delta h}{\mathrm{d}t} = -A_v\rho x_{u0}\sqrt{\tfrac{g}{2h_0}}\Delta h - A_v\rho\sqrt{2gh_0}\Delta x_u,$$
$$\tfrac{\mathrm{d}\Delta h}{\mathrm{d}t} = -3.18\cdot 10^{-4}\Delta h - 0.0315\Delta x_u$$

Napomena: Naravno da se isti rezultat dobije direktnom linearizacijom jednadžbe:

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = \frac{q_u}{\rho\pi\left(\frac{R_H}{H}\right)^2 h^2} - \frac{A_v\sqrt{2gh}}{\pi\left(\frac{R_H}{H}\right)^2 h^2}x_u$$

$$\frac{\mathrm{d}\Delta h}{\mathrm{d}t} = \left[-2\frac{q_u}{\rho\pi\left(\frac{R_H}{H}\right)^2 h_0^3} + \frac{3}{2}\frac{A_v\sqrt{2g}}{\pi\left(\frac{R_H}{H}\right)^2}h_0^{-\frac{5}{2}}x_{u0}\right]\Delta h - \frac{A_v\sqrt{2gh_0}}{\pi\left(\frac{R_H}{H}\right)^2 h_0^2}\Delta x_u$$

Uvažavajući relaciju za ustaljeno stanje iz a) dijela zadatka, dobije se isti izraz kao gore.

Rješenje 3.17

1. Radna točka:

$$x_{v0} = 0.25, \quad q_{i0} = 0.1\text{m}^3/\text{s}, \quad h_0 = 1.25\text{m}.$$

Ventil:

$$G_v = \frac{Q_u}{X_v} = \frac{0.2}{1 + 0.1s}$$

Spremnik:

$$G_s = \frac{H}{Q_u} = \frac{25}{1 + 125s}$$

Oba skupa:

$$G_p = \frac{H}{X_v} = \frac{0.2}{1 + 0.1s} \frac{25}{1 + 125s}$$

2. Poredati G_{EMP}, G_v i G_p jedan pored drugog kao na slici u zadatku.

Poglavlje 4

Laplaceova transformacija i prikaz sustava pomoću težinske i prijelazne funkcije

Zadatak 4.1

Na sustav zadan prijenosnom funkcijom:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{2-s}{(s+1)(s+4)}$$

djeluje pobuda:

$$u(t) = 10\left(e^{-t} - e^{-5t}\right) S(t).$$

Potrebno je:

a) Odrediti diferencijalnu jednadžbu koja opisuje vladanje sustava.

b) Odrediti odziv $y(t)$ za $t > 0$ ako je poznato $y(0) = 1$ i $\dot{y}(0) = -1$.

Zadatak 4.2

Za sustav čiji je blokovski dijagram prikazan na slici 1.1 određena je prijenosna funkcija oblika

$$G\left(s\right) = \frac{\left(1 + \frac{T_1}{K_1}s\right)\left(1 + T_2 s\right)}{s\left(1 + \frac{T_1}{K_1}s\right)\left(1 + T_2 s\right) + \frac{K_2}{K_1}}.$$

Odredite za prijenosnu funkciju $G\left(s\right)$ nagib pripadne prijelazne funkcije u trenutku $t = 0^+$ s.

Zadatak 4.3

Sustav je zadan prijenosnom funkcijom

$$G(s) = \frac{1-s}{(s+2)^2(3s+9)} e^{-0.5s}.$$

Odredite nagib težinske funkcije ovog sustava u trenutku $t = 0.5^+$ s.

Zadatak 4.4

Na slici 1.2 prikazana je blokovska shema sustava čija je prijenosna funkcija dana s

$$G(s) = \frac{(T_1+1)\,s^2 + (K_1+1)\,s + 2}{T_1 s^3 + (K_1+T_1)\,s^2 + (2T_1+K_1)\,s + 2K_1} e^{-0.2s}.$$

Potrebno je odrediti parametre K_1 i T_1 ako je nagib pripadne prijelazne funkcije sustava u trenutku $t = 0.2^+$ s jednak 3 i prijelazna funkcija se ustali na vrijednosti 4.

Zadatak 4.5

Za sustav prikazan blokovskom shemom na slici 1.3 prijenosna funkcija je

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s(K_1 s + 1)}{s^3 + K_2 s^2 + K_1 s + 1}.$$

Odredite nagib izlaza u početnom trenutku $\dot{y}(0^+)$ te iznos u stacionarnom stanju $y(\infty)$ ako na ulazu djeluje pobuda oblika $u(t) = tS(t)$.

Zadatak 4.6

Na slici 1.4 prikazana je blokovska shema sustava čija je prijenosna funkcija

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s^2 + 2s + 1}{(1+2s)(1+s+5s^2)}.$$

a) Odredite iznos težinske funkcije u trenutku $t = 0^+$.

b) Odredite iznos prijelazne funkcije u ustaljenom stanju.

Zadatak 4.7

Zadana je prijenosna funkcija sustava $G(s) = \frac{s^2+2s+3}{s^3+3s^2+3s+1}$.

a) Odredite iznos prijelazne funkcije u ustaljenom stanju, $h(\infty)$.

b) Odredite nagib prijelazne funkcije u početnom trenutku, $\dot{h}(0^+)$.

c) Na temelju vrijednosti određenih pod a) i b), skicirajte prijelaznu funkciju.

Zadatak 4.8

Zadana je prijenosna funkcija oblika $G(s) = \frac{5}{s^2+5s+6}$.

a) Analitički odredite prijelaznu funkciju $h(t)$.

b) Odredite iznos prijelazne funkcije $h(t)$ u točki infleksije.

Zadatak 4.9

Snimljena je prijelazna funkcija linearnog vremenski nepromjenjivog sustava:

$$h(t) = \frac{1}{2}e^{-t}\left(\sin t - \cos t\right) S(t).$$

Potrebno je:

a) Odrediti težinsku funkciju sustava.

b) Odrediti odziv na pobudu $u(t) = e^{-t}\left(\sin t + 2\cos\left(2t\right)\right) S(t)$.

Zadatak 4.10

Snimljena je prijelazna funkcija linearnog vremenski nepromjenjivog sustava:

$$h(t) = \left(2 - e^{-t} - e^{-2t}\right) S(t).$$

a) Odredite težinsku funkciju sustava.

b) Odredite prijenosnu funkciju sustava.

c) Odredite odziv mirnog sustava na pobudu $u(t) = 2S(t) - S(t-2)$.

Zadatak 4.11

Snimljena je prijelazna funkcija linearnog vremenski nepromjenjivog sustava:

$$h(t) = \left(4 - e^{-t} - e^{-2t}\right) S(t).$$

a) Odredite težinsku funkciju sustava.

b) Odredite prijenosnu funkciju sustava.

c) Odredite odziv mirnog sustava na pobudu $u(t) = 2S(t) - S(t-2)$.

Zadatak 4.12

Zadana je prijenosna funkcija procesa:

$$G_p(s) = \frac{4(1-4s)}{(1+10s)(1+2s)}.$$

Izračunajte i skicirajte prijelaznu funkciju procesa. *Napomena:* Potrebno je naznačiti stacionarno stanje te točne vrijednosti nadvišenja i podbačaja ukoliko postoje, te pripadajuća vremena nadvišenja i podbačaja.

4.1 Rješenja

Rješenje 4.1

a)

$$\ddot{y}(t) + 5\dot{y}(t) + 4y(t) = 2u(t) - \dot{u}(t)$$

b) Laplaceova transformacija diferencijalne jednadzbe pod a) glasi:

$s^2Y(s) - sy(0) - \dot{y}(0) + 5\left(sY(s) - y(0)\right) + 4Y(s) = 2U(s) - sU(s) + u(0).$

Nakon uvrštavanja $y(0) = 1$, $\dot{y}(0) = -1$ i $u(0) = 0$, dobije se:

$$Y(s) = \frac{s+4}{(s+1)(s+4)} + \frac{(2-s)}{(s+1)(s+4)}U(s)$$

Laplaceova transformacija pobude:

$$U(s) = \frac{10}{s+1} - \frac{10}{s+5} = \frac{40}{(s+1)(s+5)}$$

Izraz za $U(s)$ uvrštavamo u izraz za $Y(s)$:

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{(s+1)(s+4)(s+5) + 40(2-s)}{(s+1)^2(s+4)(s+5)} \\ &= \frac{-\frac{49}{6}}{s+1} + \frac{10}{(s+1)^2} + \frac{\frac{80}{3}}{s+4} - \frac{\frac{35}{2}}{s+5} \end{aligned}$$

Prebacivanjem u vremensku domenu dobije se riješenje:

$$y(t) = -\frac{49}{6}e^{-t} + 10te^{-t} + \frac{80}{3}e^{-4t} - \frac{35}{2}e^{-5t}$$

Rješenje 4.2

$$\dot{u}\left(0^+\right) = \lim_{s\to\infty} s^2U\left(s\right) = \lim_{s\to\infty} \frac{s\left(1 + \frac{T_1}{K_1}s\right)\left(1 + T_2s\right)}{s\left(1 + \frac{T_1}{K_1}s\right)\left(1 + T_2s\right) + \frac{K_2}{K_1}} = 1$$

Rješenje 4.3

Promotrimo prijenosnu funkciju

$$G_1(s) = \frac{1-s}{(s+2)^2(3s+9)}.$$

Budući da je $G(s) = G_1(s)e^{-0.5s}$ vrijedi $g(t) = g_1(t-0.5)$ i $\dot{g}(t) = \dot{g}_1(t-0.5)$, pa stoga:

$$\dot{g}(0.5^+) = \dot{g}_1(0^+) = \lim_{s\to\infty} s \cdot sG_1(s) = -\frac{1}{3}$$

Rješenje 4.4

Nagib prijelazne funkcije od $G(s) = G_2(s)e^{-0.2s}$ u $t = 0.2^+$ je isto što i nagib prijelazne funkcije od $G_2(s)$ u $t = 0^+$. Razlog tome je činjenica da je prijelazna funkcija od $G(s)$ pomaknuta unaprijed za 0.2s u odnosu na $G_2(s)$ (transportno kašnjenje $e^{-0.2s}$).

Nagib prijelazne funkcije (tj. derivacija prijelazne funkcije):

$$\lim_{s\to\infty} s^2 G_2(s)\frac{1}{s} = \lim_{s\to\infty} \frac{(T_1+1)s^3 + (K_1+1)s^2 + 2s}{T_1s^3 + (K_1+T_1)s^2 + (2T_1+K_1)s + 2K_1} = \frac{T_1+1}{T_1} = 3$$

$$\Rightarrow T_1 = 0.5$$

Ustaljeno stanje:

$$\lim_{s\to 0} sG(s)\frac{1}{s} = \lim_{s\to 0} \frac{(T_1+1)s^2 + (K_1+1)s + 2}{T_1s^3 + (K_1+T_1)s^2 + (2T_1+K_1)s + 2K_1}e^{-0.2s} = \frac{1}{K_1} = 4$$

$$\Rightarrow K_1 = 0.25$$

Rješenje 4.5

$$U(s) = \frac{1}{s^2}$$

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{K_1s+1}{s(s^3+K_2s^2+K_1s+1)}$$

Nagib u početnom trenutku:

$$\lim_{t\to 0}\dot{y}(t) = \lim_{s\to\infty} s^2Y(s) = \lim_{s\to\infty}\frac{s(K_1s+1)}{s^3+K_2s^2+K_1s+1} = 0.$$

Iznos u stacionarnom stanju:

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} sY(s) = \lim_{s\to 0} \frac{K_1 s + 1}{s^3 + K_2 s^2 + K_1 s + 1} = 1.$$

Rješenje 4.6

a)

$$\lim_{t\to 0} g(t) = \lim_{s\to\infty} sG(s) = \frac{1}{10}$$

b)

$$\lim_{t\to\infty} h(t) = \lim_{s\to 0} sG(s)\frac{1}{s} = 1$$

Rješenje 4.7

a) Pobuda: $R(s) = \frac{1}{s}$ Iznos u stacionarnom stanju:

$$\lim_{t\to\infty} h(t) = \lim_{s\to 0} sR(s)G(s) = 3.$$

b) Nagib u početnom trenutku:

$$\lim_{t\to 0} \dot{h}(t) = \lim_{s\to\infty} s^2 R(s)G(s) = 1.$$

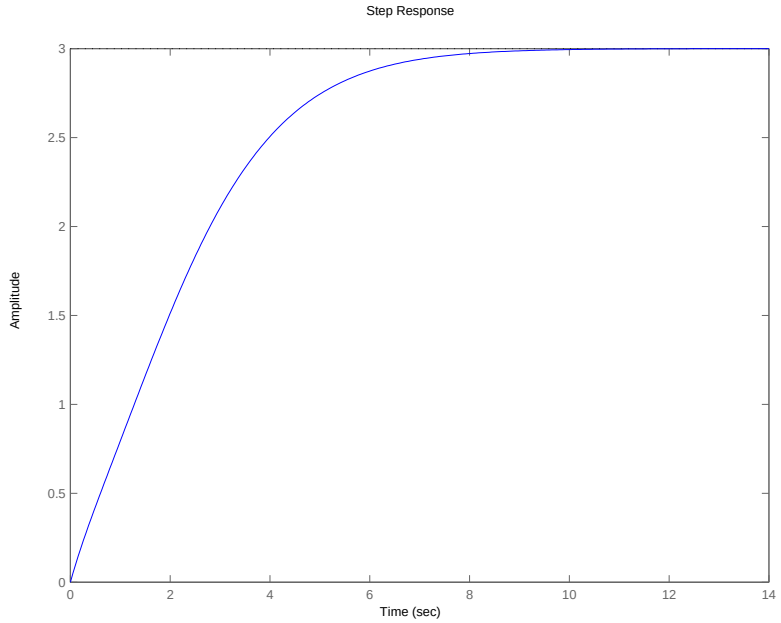
c) U skici odziva važno je da se vide početni nagib i stacionarno stanje – slika 4.1.

Rješenje 4.8

a) Prijenosna funkcija se može zapisati kao:

$$G(s) = \frac{5}{(s+2)(s+3)}$$

$$G(s)\frac{1}{s} \multimap h(t)$$



Slika 4.1: Prijelazna funkcija.

Rastav na parcijalne razlomke daje:

$$G(s)\frac{1}{s} = \frac{\frac{-5}{2}}{s+2} + \frac{\frac{5}{3}}{s+3} + \frac{\frac{5}{6}}{s}$$

Prelaskom u vremensko područje dobiva se prijelazna funkcija $h(t)$.

$$h(t) = \left(\frac{-5}{2}e^{-2t} + \frac{5}{3}e^{-3t} + \frac{5}{6}\right) S(t)$$

b) Budući da se traži točka infleksije, druga derivacija prijelazne funkcije mora biti jednaka 0.

$$\dot{h}(t) = 5e^{-2t} - 5e^{-3t}$$

$$\ddot{h}(t) = -10e^{-2t} + 15e^{-3t} = 0 \Rightarrow t = \ln\frac{3}{2} = 0.4055$$

Uvrštavanjem u prijelaznu funkciju dobije se traženo rješenje.

$$h\left(\ln\frac{3}{2}\right) = 0.216$$

Rješenje 4.9

a)

$$g(t) = \dot{h}(t) = e^{-t}\cos t\ S(t) - \frac{1}{2}\delta(t)$$

b) Prvi način:

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_0^t u(\tau)g(t-\tau)\,d\tau = \\ &= \left(\frac{1}{2}t\sin t - \frac{7}{6}\sin t + \frac{4}{3}\sin(2t) - \cos(2t)\right)e^{-t} \end{aligned}$$

Drugi način (preko Laplaceove transformacije):

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{s+1}{(s+1)^2+1} - \frac{1}{2} = \frac{-\frac{1}{2}s^2}{(s+1)^2+1} \\ U(s) &= \frac{1}{(s+1)^2+1} + \frac{2(s+1)}{(s+1)^2+4} \\ Y(s) &= G(s)U(s) \end{aligned}$$

Rješenje 4.10

a)

$$g(t) = \dot{h}(t) = \left(e^{-t} + 2e^{-2t}\right)$$

b)

$$G(s) = \frac{1}{s+1} + \frac{2}{s+2} = \frac{3s+4}{(s+1)(s+2)}$$

c) Sustav je linearan i vremenski nepromjenjiv pa vrijedi:

$$\begin{aligned} y(t) &= 2h(t) - h(t-2) \\ &= \left(4 - 2e^{-t} - 2e^{-2t}\right)S(t) - \left(2 - e^{-(t-2)} - e^{-2(t-2)}\right)S(t-2) \end{aligned}$$

Rješenje 4.11

a)

$$\begin{aligned} g(t) = \dot{h}(t) &= \left(e^{-t} + 2e^{-2t}\right) S(t) + \left(4 - e^{-t} - e^{-2t}\right) \delta(t) \\ &= \left(e^{-t} + 2e^{-2t}\right) S(t) + 2\delta(t) \end{aligned}$$

b)

$$G(s) = \frac{1}{s+1} + \frac{2}{s+2} + 2 = \frac{2s^2 + 9s + 8}{(s+1)(s+2)}$$

c) Sustav je linearan i vremenski nepromjenjiv pa vrijedi:

$$\begin{aligned} y(t) &= 2h(t) - h(t-2) \\ &= \left(8 - 2e^{-t} - 2e^{-2t}\right) S(t) - \left(4 - e^{-(t-2)} - e^{-2(t-2)}\right) S(t-2) \end{aligned}$$

Rješenje 4.12

$$Y(s) = G_p(s) \cdot U(s) = \frac{4(1-4s)}{(1+10s)(1+2s)} \cdot \frac{1}{s} = \ldots = \frac{4}{s} + \frac{-7}{s+\frac{1}{10}} + \frac{3}{s+\frac{1}{2}}$$

$$y(t) = h(t) = \left(4 - 7e^{-\frac{t}{10}} + 3e^{-\frac{t}{2}}\right) \mathrm{S}(t)$$

Prijelazna funkcija ima podbačaj zbog neminimalno-fazne nule, a nadvišenja nema jer su polovi realni. Analitički se to dobije računanjem prve derivacije:

$$h'(t) = \left(\frac{7}{10}e^{-\frac{t}{10}} - \frac{3}{10}e^{-\frac{t}{2}}\right) \mathrm{S}(t) + \left(4 - 7e^{-\frac{t}{10}} + 3e^{-\frac{t}{2}}\right) \delta(t)$$

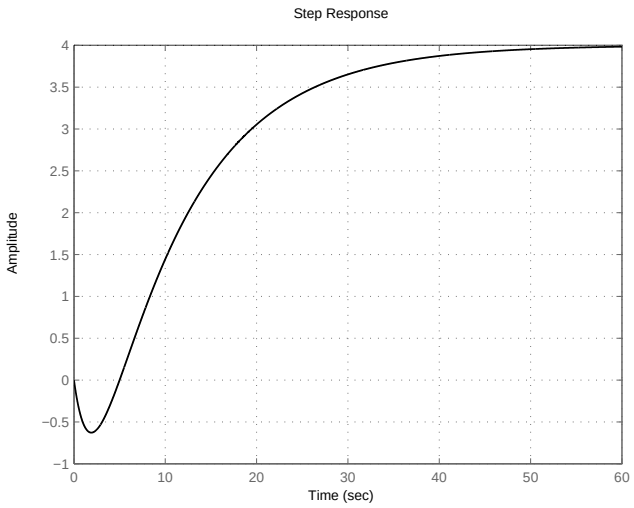
Izjednačavanjem $h'(t)$ s nulom dobije se vrijeme podbačaja, pri čemu se zanemaruje nezanimljivi dio oko nule:

$$h'(t_m) = \frac{7}{10}e^{-\frac{t_m}{10}} - \frac{3}{10}e^{-\frac{t_m}{2}} = 0 \quad \Rightarrow \quad t_m = 1.90535 \text{ s.}$$

Iznos podbačaja je:

$$h(t_m) = -0.6285.$$

Stacionarno stanje iznosi: $h(\infty) = 4$. Prijelazna funkcija prikazana je na slici 4.2.



Slika 4.2: Prijelazna funkcija procesa.

Poglavlje 5

Prikaz sustava u prostoru stanja

Zadatak 5.1

Na slici 2.1 prikazana je shema električnog kruga koji je opisan sljedećim diferencijalnim jednadžbama:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} &= -\frac{1}{R_2 C}u_C + \frac{1}{C}i_L, \\ \frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t} &= -\frac{1}{L}u_C - \frac{R_1}{L}i_L + \frac{1}{L}u_u \end{aligned}$$

gdje je $u_i = u_c$.

a) Prikažite sustav u prostoru stanja uz vektore stanja, ulaza i izlaza definirane kao: $\mathbf{x} = [u_C \ i_L]^\top$, $\mathbf{u} = [u_u]$, $\mathbf{y} = [u_i]$.

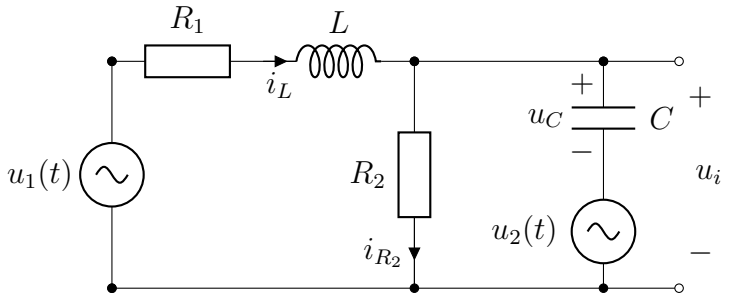
b) Odredite prijenosnu funkciju $G(s) = \frac{U_i(s)}{U_u(s)}$ koristeći zapis u prostoru stanja.

Zadatak 5.2

Na slici 5.1 prikazana je shema električnog kruga.

Potrebno je odrediti matrice $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ i $\mathbf{D}$ iz zapisa sustava po varijablama stanja

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}, \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u}, \end{aligned}$$



Slika 5.1: Električni krug.

pri čemu su vektori stanja, ulaza i izlaza definirani kao: $\mathbf{x} = [u_C \ i_L]^\top$, $\mathbf{u} = [u_1 \ u_2]^\top$, $\mathbf{y} = [u_i \ i_{R2}]^\top$.

Zadatak 5.3

Dva tijela spojena su oprugom i prigušnicom kako je prikazano slikom 2.8. Diferencijalne jednadžbe koje opisuju gibanje dvaju tijela su

$$\begin{aligned} m_1\ddot{x}_1(t) &= F_u(t) - D\left(\dot{x}_1(t) - \dot{x}_2(t)\right) - C\left(x_1(t) - x_2(t)\right) \\ m_2\ddot{x}_2(t) &= D\left(\dot{x}_1(t) - \dot{x}_2(t)\right) + C\left(x_1(t) - x_2(t)\right) \end{aligned}$$

Potrebno je:

a) Napisati model u prostoru stanja za promatrani sustav. Koristite sljedeći vektor stanja te ulazni i izlazni vektor: $\mathbf{x} = [x_1 \ \dot{x}_1 \ x_2 \ \dot{x}_2]^\top$, $\mathbf{u} = [F_u]$, $\mathbf{y} = [x_1 \ \dot{x}_1 \ \ddot{x}_1]^\top$.

b) Odrediti prijenosnu funkciju $G(s) = \frac{X_1(s)}{F_u(s)}$.

Zadatak 5.4

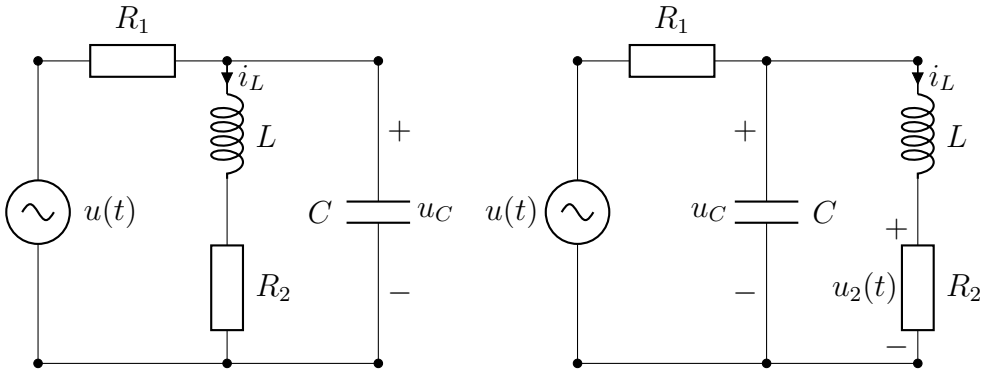
RLC mrežu na slici 5.2 opisati u prostoru stanja ako su zadane varijable stanja $i_L(t)$ i $u_C(t)$, ulaz $u(t)$ i izlaz prema slici.

Zadatak 5.5

Izračunajte matrice **A** i **B** opisa u prostoru stanja električne mreže sa slike, ako su varijable stanja struje i_1 i i_2, ulaz napon u te ako vrijedi:

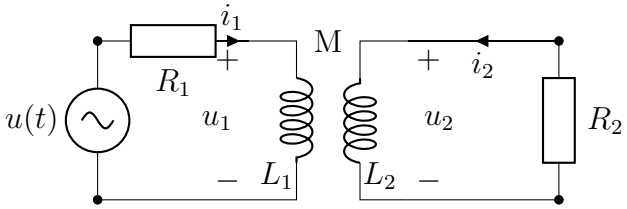
$$u_1 = L_1 \tfrac{di_1}{dt} + M \tfrac{di2}{dt}$$

$$u_2 = M \tfrac{di_1}{dt} + L_2 \tfrac{di2}{dt}$$



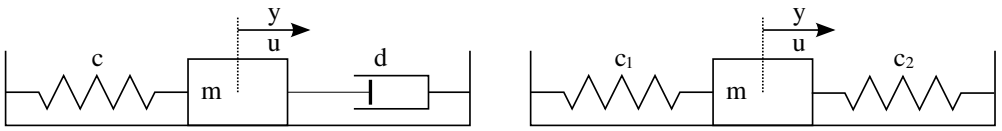
(a) izlaz $u_C(t)$. (b) izlaz $u_2(t)$.

Slika 5.2: Električni krugovi.



Zadatak 5.6

Za mehanički sustav prikazan slikom napišite diferencijalnu jednadžbu koja opisuje dinamičko vladanje sustava. Prikažite sustav u prostoru stanja uz izlaz y (pomak mase m) i ulaz u (narinuta sila). Varijable stanja su $\mathbf{x} = [y\ \dot{y}]^\top$. Ne zaboravite trenje između mase i podloge ($F_{tr} = b\dot{y}$).



(a) (b)

Slika 5.3: Mehanički sustavi.

5.1 Rješenja

Rješenje 5.1

a)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{R_2 C} & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & -\frac{R_1}{L} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = [0].$$

b)

$$G(s) = \frac{\frac{R_2}{R_1+R_2}}{LC\frac{R_2}{R_1+R_2}s^2 + \left(\frac{L}{R_1+R_2} + \frac{R_1 R_2}{R_1+R_2}C\right)s + 1}$$

Rješenje 5.2

Stanja:

$$\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{R_2 C}u_C + \frac{1}{C}i_L - \frac{1}{R_2 C}u_2$$
$$\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{L}u_C - \frac{R_1}{L}i_L + \frac{1}{L}u_1 - \frac{1}{L}u_2$$

Izlazne jed.:

$$u_i = u_c + u_2$$
$$i_{R2} = \frac{1}{R_2}u_c + \frac{1}{R_2}u_2$$

Pa je prikaz u prostoru stanja:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{R_2 C} & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & -\frac{R_1}{L} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{R_2 C} \\ \frac{1}{L} & -\frac{1}{L} \end{bmatrix},$$
$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{R_2} & 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{R_2} \end{bmatrix}.$$

Rješenje 5.3

a)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{C}{m_1} & -\frac{D}{m_1} & \frac{C}{m_1} & \frac{D}{m_1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{C}{m_2} & \frac{D}{m_2} & -\frac{C}{m_2} & -\frac{D}{m_2} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m_1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{C}{m_1} & -\frac{D}{m_1} & \frac{C}{m_1} & \frac{D}{m_1} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{m_1} \end{bmatrix}$$

b) Diferencijalne jednadžbe prebacujemo u Laplaceovu domenu:

$$X_2(s)\left[m_2 s^2 + Ds + C\right] = X_1(s)\left[Ds + C\right],$$
$$X_1(s)\left[m_1 s^2 + Ds + C\right] = X_2(s)\left[Ds + c\right] + F_u(s).$$

Nakon sređivanja:

$$G(s) = \frac{X_1(s)}{F_u(s)} = \frac{m_2 s^2 + Ds + C}{s^2\left[m_1 m_2 s^2 + (m_1 + m_2)\, Ds + (m_1 + m_2)\, C\right]}.$$

Rješenje 5.4

$$\frac{du_C}{dt} = \frac{1}{C}\left(\frac{u - u_C}{R_1} - i_L\right)$$
$$\frac{di_L}{dt} = \frac{1}{L}\left(u_C - R_2 \cdot i_L\right)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{i}_l \\ \dot{u}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_2}{L} & \frac{1}{L} \\ -\frac{1}{C} & -\frac{1}{R_1 C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_L \\ u_C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{R_1 C} \end{bmatrix} u$$

Izlazna jednadžba:

a)

$$u_C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_L \\ u_C \end{bmatrix}$$

b)

$$u_2 = \begin{bmatrix} R_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_L \\ u_C \end{bmatrix}$$

Rješenje 5.5

Dvije dane jednadžbe mogu se napisati kao:

$$\begin{bmatrix} L_1 & M \\ M & L_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{di_1}{dt} \\ \frac{di_2}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -R_1 & 0 \\ 0 & -R_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$\begin{bmatrix} \frac{di_1}{dt} \\ \frac{di_2}{dt} \end{bmatrix} = \frac{1}{L_1 L_2 - M^2} \begin{bmatrix} L_1 & M \\ M & L_2 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} -R_1 & 0 \\ 0 & -R_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \right)$$

$$A = \frac{1}{L_1 L_2 - M^2} \begin{bmatrix} -R_1 L_1 & -R_2 M \\ -R_1 M & -R_2 L_2 \end{bmatrix}$$
$$B = \frac{1}{L_1 L_2 - M^2} \begin{bmatrix} L_1 \\ M \end{bmatrix}$$

Rješenje 5.6

a)

$$m\ddot{y} = u - cy - (b+d)\dot{y}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{y} \\ \ddot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{c}{m} & -\frac{b+d}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ \dot{y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} u$$

b)

$$m\ddot{y} = u - (c_1 + c_2)y - b\dot{y}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{y} \\ \ddot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{c_1+c_2}{m} & -\frac{b}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ \dot{y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} u$$

Poglavlje 6

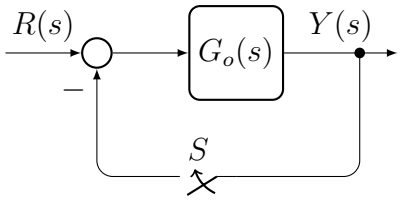
Prikaz sustava pomoću frekvencijske karakteristike

Zadatak 6.1

Za sustav $G(s) = \frac{32}{s^2+2s+16}$ odredite odziv u ustaljenom stanju na pobudu oblika $u(t) = \sin(\omega_r t + 45°)$, gdje je ω_r rezonantna frekvencija sustava.

Zadatak 6.2

Razmatrani sustav upravljanja prikazan je slikom 6.1. Uz otvorenu sklopku



Slika 6.1: Sustav upravljanja.

S, ustaljeni odziv na pobudu $r(t) = 2\sin\left(3t + \frac{\pi}{6}\right)$ je $y_o(t) = \sin\left(3t - \frac{2\pi}{3}\right)$. Odredite ustaljeni odziv $y_z(t)$ na istu pobudu $r(t)$ nakon zatvaranja sklopke S, uz pretpostavku da je zatvoreni regulacijski krug stabilan.

Zadatak 6.3

Položaj polova zatvorenog sustava upravljanja s jediničnom negativnom povratnom vezom u kompleksnoj s-ravnini je $s_{1,2} = -2.3 \pm \mathrm{j}\sqrt{3}$. Statičko pojačanje sustava je 1. Odredite odziv u ustaljenom stanju na pobudu oblika $u(t) = \sin(\omega_l t - 45°)$, gdje je ω_l lomna frekvencija otvorenog kruga.

Zadatak 6.4

Zadan je zatvoreni sustav upravljanja s jediničnom negativnom povratnom vezom. Zatvoreni krug ima jedinično pojačanje, nema konačnih nula, i ima dva pola:

$$s_{p_1} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}j, \quad s_{p_2} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}j.$$

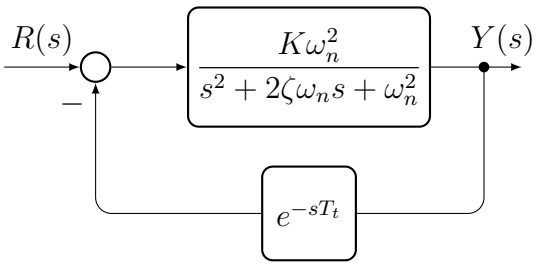
a) Odredite frekvenciju rezonantnog izdizanja zatvorenog kruga, ω_r, te pojasnopropusnu frekvenciju zatvorenog kruga, ω_b.

b) Analitički odredite iznos faznog osiguranja sustava.

c) Odredite najveće transportno kašnjenje koje se smije (dodatno) pojaviti u otvorenom krugu, tako da se fazno osiguranje sustava smanji najviše za $10°$.

Zadatak 6.5

Zadan je sustav upravljanja prikazan blokovskom shemom na slici 6.2 gdje su $\zeta = 0.71$ i $\omega_n = 1.41$.



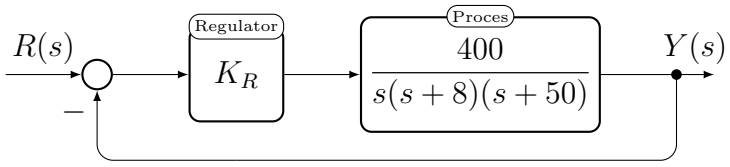
Slika 6.2: Zatvoreni sustav upravljanja.

Odredite interval vrijednosti mrtvog vremena T_t za koje sustav ima fazno osiguranje veće od $55°$ uz zadano pojačanje $K = 1$.

Zadatak 6.6

a) Skicirajte Bodéov dijagram (aproksimacija pravcima) za proces u sustavu prikazanom slikom 6.3.

b) Koristeći jednadžbe pravaca koje aproksimiraju Bodéov dijagram određen pod a) odredite raspon pojačanja K_R (uz pretpostavku da je $K_R > 0$) za koji će zatvoreni sustav prikazan slikom 6.3 biti stabilan.



Slika 6.3: Sustav upravljanja

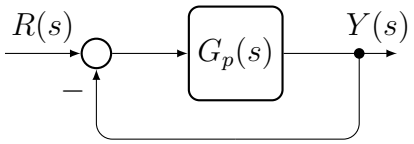
Zadatak 6.7

Slike 6.4 i 6.5 prikazuju sustav upravljanja i pripadni Bodeov dijagram otvorenog regulacijskog kruga.

a) Odredite prijenosnu funkciju procesa.

b) Koristeći aproksimaciju pravcima nacrtajte Bodeov dijagram modificiranog sustava upravljanja kojem je u direktnu granu dodan regulator oblika $G_R(s) = 20\dfrac{s+10}{s+1}$.

c) Odrediti presječnu frekvenciju ω_c i fazno osiguranje γ koristeći jednadžbe pravaca koje aproksimiraju Bodeov dijagram određen pod b).



Slika 6.4: Zatvoreni sustav upravljanja.

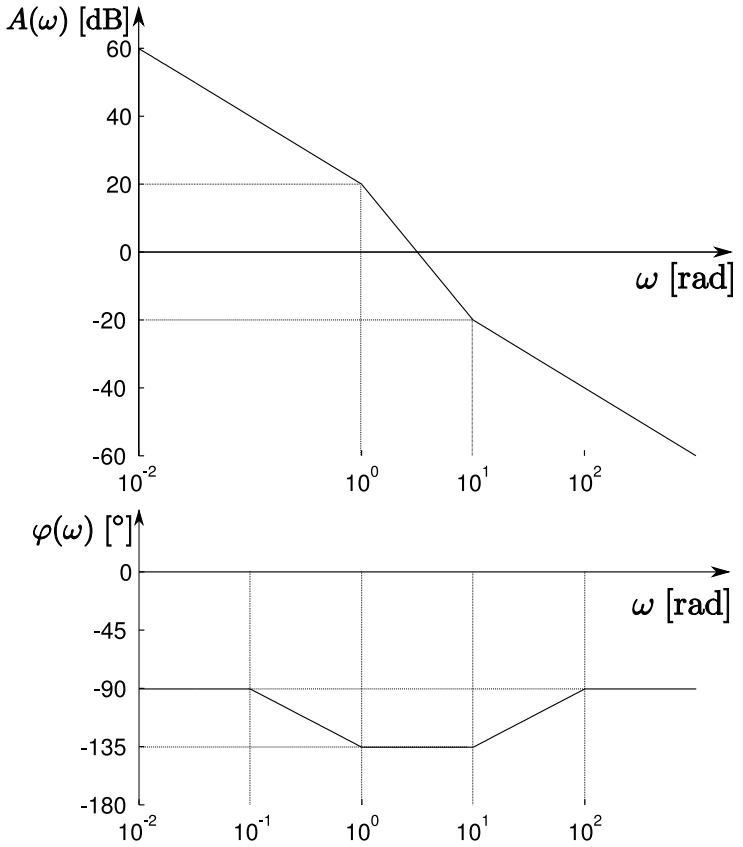
Zadatak 6.8

Zatvoreni sustav upravljanja prikazan je slikom 6.6.
Potrebno je skicirati Bodeov dijagram sustava (aproksimacija s pravcima) te odrediti amplitudno i fazno osiguranje uz $K_R = 24.5$ te na temelju dobivenih vrijednosti odrediti koeficijent pojačanja regulatora $K_{R,kr}$ za koji će sustav biti na rubu stabilnosti. Koliki je stvarni iznos pojačanja za koji je sustav na rubu stabilnosti?

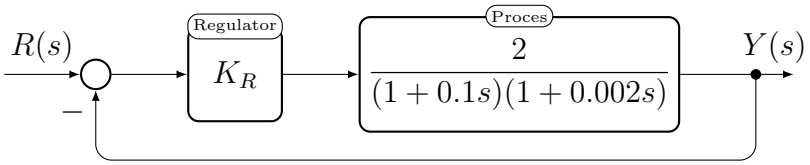
Zadatak 6.9

Shema elektroničkog sklopa prikazana je slikom 6.7.

Za prikazani sustav s iznosima parametara $R = 100$ kΩ i $C = 1$ μF, potrebno je:



Slika 6.5: Bodeov dijagram.

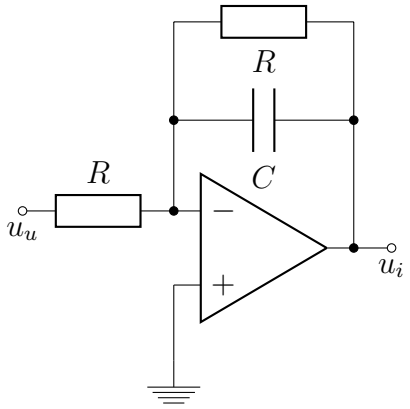


Slika 6.6: Zatvoreni sustav upravljanja.

a) Odrediti prijenosnu funkciju $G(s) = \dfrac{U_i(s)}{U_u(s)}$.

b) Skicirati Bodeov prikaz amplitudno-frekvencijske karakteristike (aproksimaciju s pravcima).

c) Izračunati amplitudu izlaznog signala u_i u ustaljenom stanju ako na ulazu djeluje pobuda $u_u(t) = 2\sin(100t)$.



Slika 6.7: Načelna shema elektroničkog sustava.

Zadatak 6.10

Zadana je prijenosna funkcija otvorenog regulacijskog kruga:

$$G_o(s) = \frac{K_o}{s(1+10s)(1+2s)}$$

a) Korištenjem Bodeovog prikaza frekvencijskih karakteristika (aproksimacije s pravcima) odrediti pojačanje K_o za koje će fazno osiguranje sustava iznositi $\gamma = 50°$.

b) Za dobiveni iznos pojačanja K_o skicirati prijelaznu funkciju zatvorenog sustava upravljanja te označiti procijenjeno nadvišenje $\sigma_m[\%]$ i vrijeme prvog maksimuma t_m.

Zadatak 6.11

Zadana je prijenosna funkcija otvorenog kruga

$$G_o(s) = \frac{1}{sT_I(s+1)(s+5)}.$$

Potrebno je:

a) Nacrtati Bodeov dijagram prijenosne funkcije $G_o(s)$ uz $T_I = 0.5$s.

b) Odrediti presječnu frekvenciju ω_c i fazno osiguranje γ iz nacrtanog Bodeova dijagrama te na temelju tih veličina potom skicirati prijelaznu funkciju zatvorenog sustava upravljanja.

Zadatak 6.12

Prijenosna funkcija procesa je:

$$G_p(s) = \frac{K_p}{(1+T_1 s)(1+T_2 s)(1+T_3 s)},$$

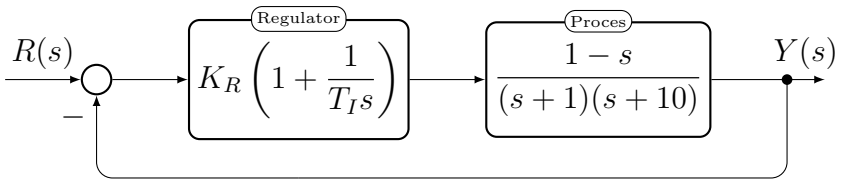
gdje su vremenske konstante iznosa $T_1 = 2$ s, $T_2 = 3$ s, $T_3 = 4$ s; pojačanje procesa iznosi $K_p = 1$. Parametri PID regulatora kojim se upravlja procesom su dobiveni Ziegler-Nicholsovom metodom ruba stabilnosti: $K_R = 0.6K_{kr} = 5.25$, $T_I = 0.5T_{kr} = 5.1302$ s i $T_D = 0.12T_{kr} = 1.231$ s.

a) Nacrtajte Bodeov dijagram otvorenog kruga sustava upravljanja korištenjem aproksimacije pravcima. Pritom je dozvoljeno kraćenje bliskih polova i nula.

b) Procijenite nadvišenje i vrijeme porasta prijelazne funkcije sustava upravljanja.

Zadatak 6.13

Zatvoreni sustav upravljanja prikazan je slikom 6.8.



Slika 6.8: Sustav upravljanja s zadanim regulatorom

a) Odredite T_I regulatora tako da kompenzira dominantnu vremensku konstantu procesa.

b) Nacrtajte Bodeov dijagram sustava s T_I određenim pod a) i uz $K_R = 1$, koristeći aproksimaciju pravcima.

c) Iz Bodeovog dijagrama aproksimiranog pravcima odredite K_R za koji će amplitudno osiguranje biti 10 dB.

d) Izračunajte koliko iznosi fazno osiguranje za sustav pod c), koristeći jednadžbe pravaca koji aproksimiraju Bodeov dijagram.

Zadatak 6.14

Zadana je prijenosna funkcija sustava

$$G(s) = 16\frac{s+2}{s^2(s+10)}.$$

a) Korištenjem aproksimacije pravcima nacrtajte Bodeov dijagram prijenosne funkcije $G(s)$.

b) Analitički odredite iznos faznog kašnjenja $\varphi(\omega_0)[^\circ]$ i amplitudnog pojačanja $A(\omega_0)$[dB] na frekvenciji $\omega_0 = 4$[rad/s]. Ako je na ulazu u sustav pobuda $u(t) = 2\sin(\omega_0 t)$, odredite izraz za odziv sustava $y(t)$ uz istitrane početne uvjete sustava.

Zadatak 6.15

Na slici 6.9 prikazana je aproksimacija pravcima Bodeovog dijagrama procesa $G_P(s)$.

a) Korištenjem aproksimacije pravcima odredite fazno i amplitudno osiguranje sustava čiji je Bodeov dijagram otvorenog kruga prikazan na slici 6.9.

b) Procesom $G_P(s)$ se upravlja koristeći proporcionalni regulator.
- Koliko mora biti pojačanje regulatora K_R da bi fazno osiguranje sustava iznosilo 90°?
- Za koje vrijednosti pojačanja K_R je zatvoreni sustav upravljanja nestabilan?

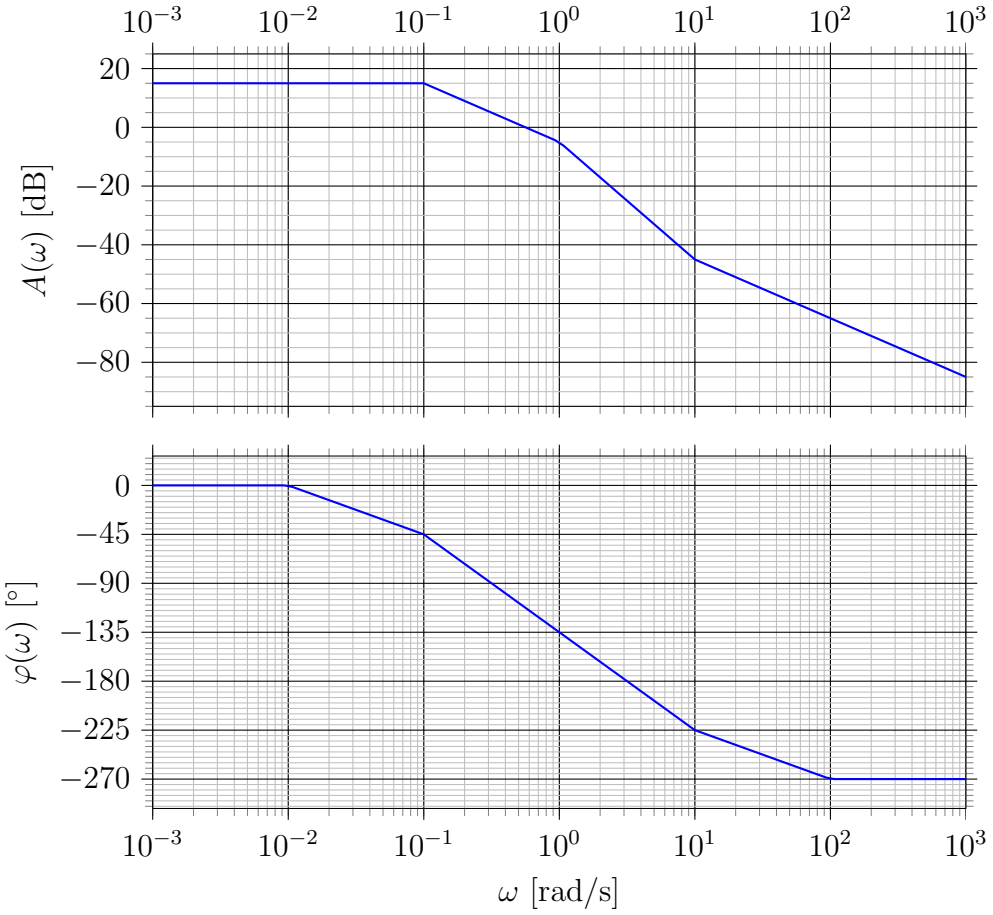
c) U otvoreni krug upravljanja dodan je mjerni član $G_M(s) = e^{-sT}$, a regulator je $G_R(s) = 1$.
- Koliki je iznos faze i amplitude na frekvenciji $\omega = 10^{-2}$ ako je $T = 1$ s?
- Koji je maksimalni iznos kašnjenja T za koji je sustav još uvijek stabilan?

d) Odredite prijenosnu funkciju procesa $G_P(s)$ čiji je Bodeov dijagram prikazan na slici 6.9.

Zadatak 6.16

Zadana je prijenosna funkcija otvorenog kruga upravljanja

$$G_o(s) = \frac{10}{s(s+1)(s+10)}.$$



Slika 6.9: Aproksimacija pravcima Bodeovog dijagrama.

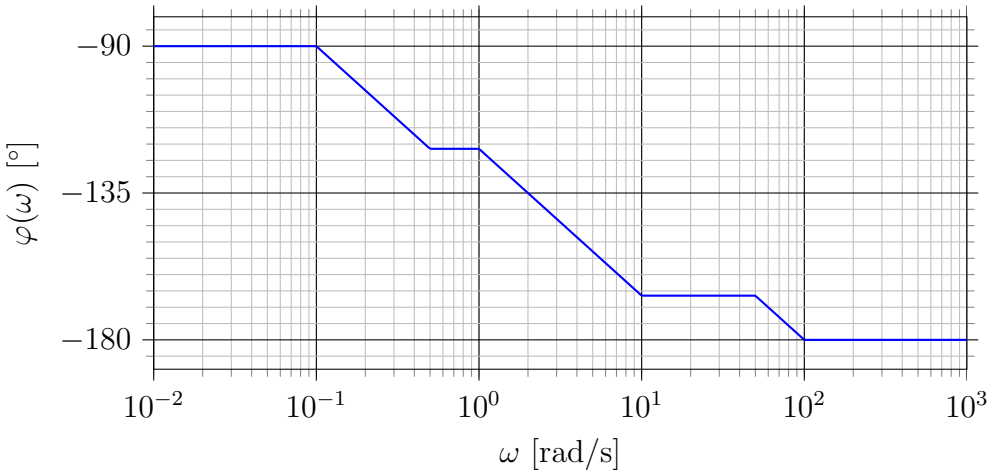
a) Korištenjem jednadžbi pravaca kojima se aproksimira Bodeov dijagram, odredite amplitudno osiguranje A_r [dB] i fazno osiguranje γ [°] sustava.

b) Analitički odredite fazno osiguranje γ [°] sustava.

c) Odredite interval vremena uzorkovanja T za upravljanje u zatvorenoj petlji uz uvjet da se relativni iznos nadvišenja prijelazne funkcije zatvorenog kruga σ_m [%] ne poveća za više od 8 %.

Zadatak 6.17

Na slici 6.10 prikazana je aproksimacija fazno-frekvencijske karakteristike sustava trećeg reda koji nema polove i nule u desnoj poluravnini. Amplitudno-frekvencijska karakteristika $|G(j\omega)|$ aproksimirana pravcima na frekvenciji $\omega = 1$ rad/s ima jedinično pojačanje.



Slika 6.10: Aproksimacija fazno-frekvencijske karakteristika sustava.

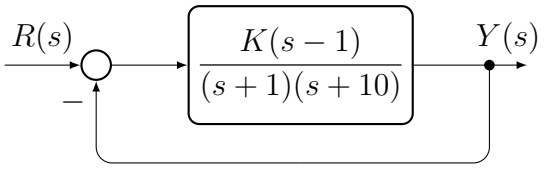
a) Odredite prijenosnu funkciju sustava.

b) Skicirajte amplitudno-frekvencijsku karakteristiku sustava.

c) Korištenjem jednadžbi pravaca koje aproksimiraju Bodeov dijagram izračunajte za koju je frekvenciju zadovoljena jednakost $\varphi(\omega) = -140°$.

Zadatak 6.18

Zadan je sustav upravljanja prikazan blokovskom shemom na slici 6.11, gdje je pojačanje $K \in < -\infty, \infty >$.



Slika 6.11: Zatvoreni sustav upravljanja.

a) Kvalitativno skicirajte Nyquistov dijagram te iz njega odredite područje vrijednosti parametra K za koje je sustav stabilan.

b) Za iznos $K = -10.5$ nacrtajte Nyquistov dijagram, analitički odredite fazno i amplitudno osiguranje te ih naznačite na Nyquistovom dijagramu.

Zadatak 6.19

Zadana je prijenosna funkcija otvorenog regulacijskog kruga:

$$G_o(s) = K_o \cdot \frac{1 - 0.1s}{(1 + 2s)(1 + 0.02s)},$$

gdje je $K_o > 0$.

Potrebno je korištenjem Nyquistova kriterija stabilnosti odrediti dozvoljeni iznos parametra K_o za koji je zatvoreni sustav stabilan te skicirati Nyquistov dijagram.

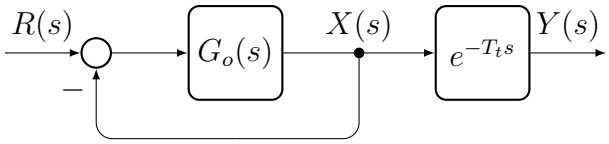
Zadatak 6.20

Sustav upravljanja prikazan je slikom 6.12 gdje je: $G_o(s)$ prijenosna funkcija drugoga reda bez konačnih nula, i $T_t = 1$ s. Prijelazna funkcija sustava opisanog s $G(s) = \frac{Y(s)}{R(s)}$ u ustaljenom stanju ima vrijednost $h(\infty) = y(\infty) = 1$, nadvišenje $\sigma_m = 5\%$, i vrijeme prvog maksimuma $t_m = 1.5\,\text{s}$.

a) Odredite prijenosnu funkciju $G(s) = \frac{Y(s)}{R(s)}$ i nagib pripadajuće prijelazne funkcije u $t = 0^+$.

b) Odredite prijenosnu funkciju $G_o(s)$ i skicirajte njezin Nyquistov dijagram.

c) Odredite vremenske funkcije signalâ $x(t)$ i $y(t)$ u ustaljenom stanju, uz $G_o(s) = \frac{1}{s}$ i $r(t) = 2\sin\left(3t + \frac{\pi}{6}\right)$, .

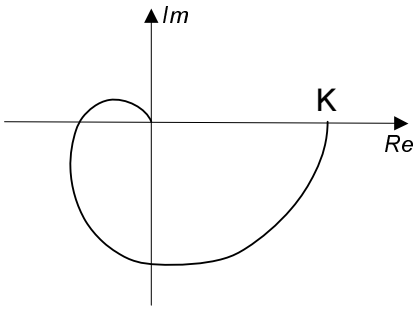


Slika 6.12: Sustav upravljanja.

Zadatak 6.21

Na slici 6.13 prikazan je Nyquistov dijagram stabilne prijenosne funkcije $G(s)$ bez konačnih nula. Dijagram siječe realnu i imaginarnu os u sljedećim točkama:

ω [s^{-1}]	0	1	3	∞
$G(j\omega)$	$K > 0$	$-j$	-0.25	0



Slika 6.13: Nyquistov dijagram.

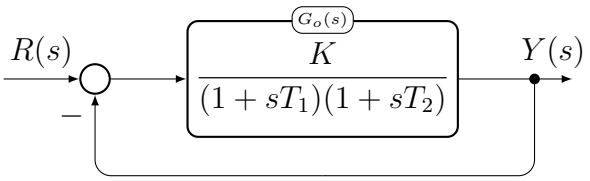
a) Odrediti prijenosnu funkciju $G(s)$.

b) Odredite odziv sustava $G(s)$ u ustaljenom stanju na pobudu:

$$u(t) = 2 + 3\sin t - 4\cos(3t).$$

Zadatak 6.22

Sustav upravljanja prikazan je slikom 6.14, gdje je $G_o(s)$ stabilna prijenosna funkcija otvorenog kruga ($K > 0$, $T_1 > 0$, $T_2 > 0$).



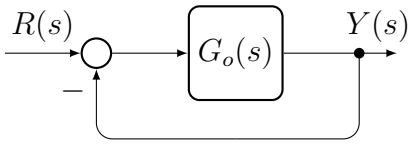
Slika 6.14: Sustav upravljanja

a) Skicirati Nyquistov dijagram za prijenosnu funkciju otvorenog kruga $G_o(s)$. Potrebno je odrediti koordinate tocaka sjecišta i dodira Nyquistovog dijagrama s koordinatnim osima, kao i frekvencije pri kojima se to događa. *Napomena:* promatrati samo frekvencije $\omega \geq 0$.

b) Može li sustav upravljanja sa slike 6.14 biti nestabilan? Ako može, za koje parametre K, T_1 i T_2 će sustav biti nestabilan? Ako ne može, objasnite zašto. *Napomena:* otvoreni krug je stabilan.

Zadatak 6.23

Zatvoreni sustav upravljanja zadan je slikom 6.15. Prijenosna funkcija zatvorenog kruga upravljanja je $G_z(s) = \frac{1}{0.5539s^2+0.9326s+1}$. Potrebno je:



Slika 6.15: Zatvoreni sustav upravljanja.

a) Skicirati Nyquistov dijagram prijenosne funkcije otvorenog kruga $G_o(s)$.

b) Ako bi prijenosnu funkciju $G_o(s)$ zamijenili prijenosnom funkcijom $G'_o(s) = G_o(s)e^{-sT_t}$, odrediti za koji bi interval iznosa transportnog kašnjenja T_t zatvoreni krug bio stabilan?

Zadatak 6.24

Zadana je prijenosna funkcija otvorenog kruga

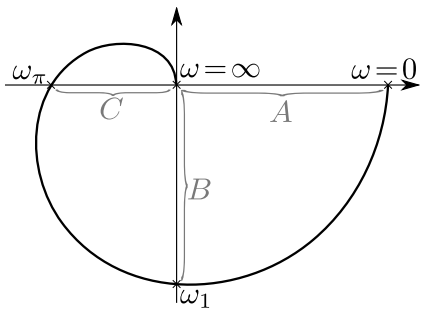
$$G_o(s) = \frac{K_p}{s(s+1)^2},$$

pri čemu je $K_p > 0$.

a) Skicirajte Nyquistov dijagram otvorenog kruga ($K_p > 0$).

Zadatak 6.25

Slikom 6.16 prikazan je Nyquistov dijagram prijenosne funkcije procesa $G_P(s)$.



Slika 6.16: Nyquistov dijagram procesa $G_P(j\omega)$.

a) Koliko iznosi izlaz iz procesa $y(t)$ ako je na ulazu procesa signal $u(t) = 5\sin(\omega_1 t)$?

b) Procesom se upravlja korištenjem P regulatora. Skicirajte Nyquistov dijagram prijenosne funkcije otvorenog kruga s procesom i P regulatorom ako je pojačanje regulatora $K_R = 2$. Na skici označite sve karakteristične veličine koje su označene i na slici 6.16.

c) Koliko iznosi amplitudno osiguranje sustava ako se procesom upravlja korištenjem P regulatora s pojačanjem $K_R = 1$?

d) Zadano je $A = 0.1$. Odredite prijenosnu funkciju procesa ako je poznato da je ona oblika $G_P(s) = \dfrac{5x}{(s+x)(s+5x)(s+10x)}$.

Zadatak 6.26

Prijenosna funkcija sustava zatvorenog jediničnom negativnom povratnom vezom glasi:

$$G_z(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{10}{s^3 + 2s^2 + 5s + 10} \ .$$

a) Nacrtajte Nyquistov dijagram otvorenog kruga.

Zadatak 6.27

Zadana je prijenosna funkcija procesa $G_p(s) = \frac{2}{s(s+4)}$.

a) Skicirajte amplitudno-frekvencijsku karakteristiku procesa aproksimiranu pravcima. Pritom jasno naznačite lomne frekvencije i nagibe pravaca.

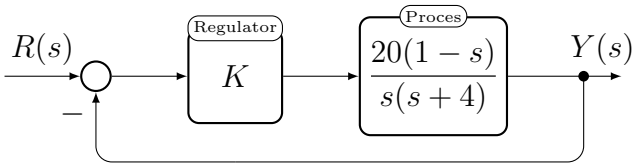
b) Odredite odstupanje u decibelima između stvarne amplitudno-frekvencijske karakteristike procesa i njene aproksimacije na frekvenciji $\omega = 2\text{rad/s}$.

c) Izračunajte iznos pojačanja kojeg bi trebalo dodati u otvoreni krug upravljanja kako bi se postiglo nadvišenje prijelazne funkcije zatvorenog kruga $\sigma_m \approx 7\%$. Pritom koristite približnu vezu između pokazatelja kvalitete u vremenskom i frekvencijskom području.

Zadatak 6.28

Zatvoreni regulacijski krug prikazan je slikom 6.17, gdje je pojačanje $K > 0$.

a) Kvalitativno skicirajte Nyquistov dijagram te iz njega odredite područje vrijednosti parametra K za koje je sustav stabilan.

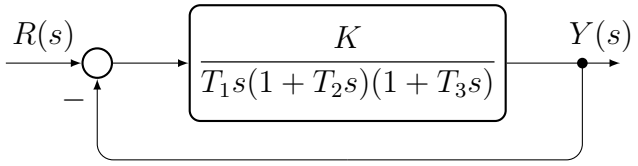


Slika 6.17: Zatvoreni regulacijski krug

b) Skicirajte Bodeov dijagram koristeći aproksimaciju pravcima za vrijednost parametra $K = 0.1$ te označite amplitudno i fazno osiguranje očitavanjem iz dijagrama.

Zadatak 6.29

Zatvoreni sustav upravljanja opisan je slikom 6.18. Zadani su parametri: $K = 1$, $T_2 = 0.5$ s, $T_3 = 0.1$ s.



Slika 6.18: Zatvoreni sustav upravljanja

a) Odredite integralnu vremensku konstantu T_1 tako da se postigne fazno osiguranje 60°.

b) Nacrtajte Nyquistov dijagram za $T_1 = 0.54$ s. Potrebno je odrediti koordinate točaka sjecišta i dodira Nyquistovog dijagrama s koordinatnim osima, kao i frekvencije pri kojima se to događa. *Napomena*: promatrati samo frekvencije $\omega \geq 0$.

c) Označite amplitudno i fazno osiguranje na Nyquistovom dijagramu.

Zadatak 6.30

Zadana je prijenosna funkcija otvorenog kruga:

$$G_o(s) = \frac{K}{s(1 + Ts)}.$$

Potrebno je:

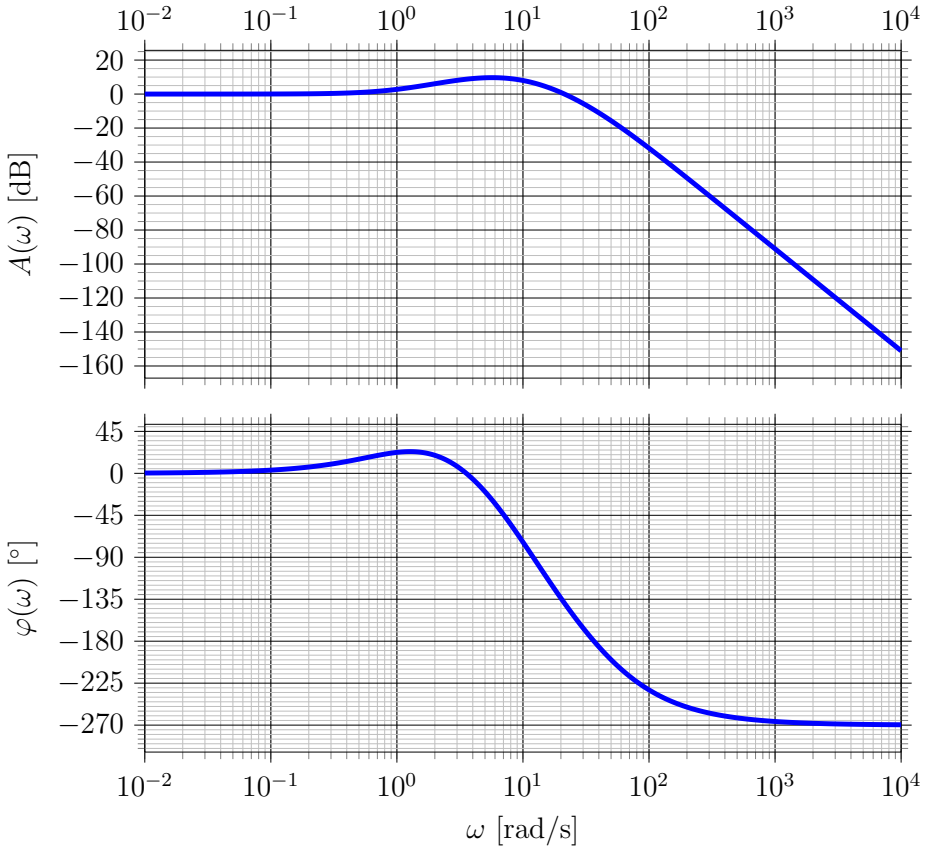
a) Skicirati Nyquistov dijagram prijenosne funkcije $G_o(s)$ s općim koeficijentom pojačanja $K > 0$ i općom vremenskom konstantom $T > 0$, te označiti (ako postoje) asimptote, dodirne točke i sjecišta s koordinantim osima te pripadne frekvencije. Promatrajte samo frekvencije $\omega \geq 0$.

b) Skicirati Bodéov dijagram (aproksimaciju s pravcima) prijenosne funkcije $G_o(s)$ s koeficijentom pojačanja $K = 0.01$ i vremenskom konstantom $T = 10$ s.

c) Može li se zatvoreni krug s jediničnom negativnom povratnom vezom dovesti na rub stabilnosti promjenom vrijednosti pojačanja $K > 0$? Objasni.

Zadatak 6.31

Bodeov dijagram stabilnog procesa $G_P(s)$ prikazan je slikom 6.19.



Slika 6.19: Bodeov dijagram procesa.

a) Skicirajte Nyquistov dijagram procesa $G_P(s)$ korištenjem Bodeovog dijagrama sa slike 6.19 te odredite točke u kojima Nyquistov dijagram siječe realnu i imaginarnu os.

b) Ako se za upravljanje izlaznom veličinom procesa koristi regulator $G_R(s) = \frac{1}{T_I s}$, odredite za koje iznose vremenske konstante $T_I > 0$ će zatvoreni sustav upravljanja biti stabilan.

c) Ako je poznato da proces $G_P(s)$ ima četiri pola, odredite broj nula te u kojoj poluravnini se nalaze. Objasnite odgovor.

Napomena: Za rješavanje ovog zadatka potrebno je iščitati odgovarajuće vrijednosti s Bodeovog dijagrama sa slike 6.19. Pritom je potrebno jasno naznačiti što se očitava s dijagrama i zašto.

6.1 Rješenja

Rješenje 6.1

Prvo treba odrediti karakterističke parametre u frekvencijskoj domeni. Iz

$$G(s) = \frac{32}{s^2 + 2s + 16} = K\frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

slijedi:

$$\begin{aligned} K &= 2, \\ \zeta &= 0.25, \\ \omega_n &= 4. \end{aligned}$$

Rezonantna se frekvencija određuje iz $\omega_r = \omega_n\sqrt{1 - 2\zeta^2}$, tako da slijedi

$$\omega_r = \sqrt{14} = 3.74 \text{ rad/s}$$

Slijedi proračun faznog zaostajanja i pojačanja sustava.

$$\phi(\omega) = -\arctan\frac{2\omega}{16 - \omega^2}$$

$$A(\omega) = \frac{32}{\sqrt{(16 - \omega^2)^2 + 4\omega^2}}$$

Na rezonantnoj frekvenciji fazno zaostajanje i pojačanje sustava iznosi

$$\phi(\omega_r) = -1.31 \text{ rad} = -75^\circ$$

$$A(\omega_r) = 4.13 = 12.32 \text{ dB}$$

Dakle, odziv sustava na traženu pobudu je

$$y(t) = A(\omega_r)\sin(\omega_r t + 45^\circ + \phi(\omega_r))$$

$$y(t) = 4.13\sin(\sqrt{14}t - 30^\circ)$$

Rješenje 6.2

Očito je da sustav uz otvorenu sklopku S na frekvenciji $\omega = 3$rad/s ima pojačanje $\frac{1}{2}$ i fazno kašnjenje $\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$. Stoga vrijedi:

$$G_o(j3) = \frac{1}{2}e^{-j\frac{5\pi}{6}} = \frac{1}{4}(-\sqrt{3} - j).$$

Prijenosna funkcija zatvorenog kruga (uz zatvorenu sklopku S) na frekvenciji $\omega = 3\text{rad/s}$ iznosi:

$$G_z(j3) = \frac{G_o(j3)}{1 + G_o(j3)} = -0.477 - 0.651j = 0.807e^{-j2.203}.$$

Iz prethodne relacije očitavamo da sustav uz zatvorenu sklopku S ima pojačanje 0.807 i unosi fazno kašnjenje od 2.203 rad pa ustaljeni odziv na pobudu $r(t)$ glasi:

$$y_z(t) = 1.614\sin(3t - 1.679).$$

Rješenje 6.3

Nazivnik prijenosne funkcije zatvorenog kruga:

$$(s + 2.3 + j\sqrt{3})(s + 2.3 - j\sqrt{3}) = (s + 2.3)^2 + 3$$

Iz statičkog pojačanja određujemo prijenosnu funkciju zatvorenog kruga pa dalje otvorenog kruga:

$$\begin{aligned} G_r &= \frac{2.3^2 + 3}{(s + 2.3)^2 + 3} \\ G_o &= \frac{G_r}{1 - G_r} = \frac{2.3^2 + 3}{s(s + 4.6)} \\ &\Rightarrow \omega_l = 4.6 \end{aligned}$$

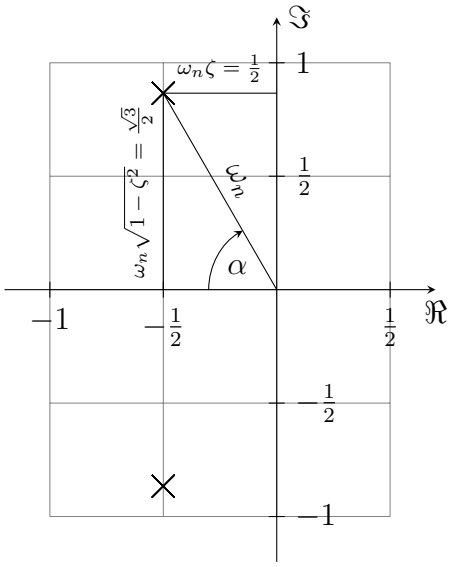
Računamo amplitudu i fazu zatvorenog kruga na frekvenciji ω_l:

$$\begin{aligned} |G_r(\omega_l)| &= \frac{2.3^2 + 3}{\sqrt{(2.3^2 + 3 - \omega_l^2)^2 + (4.6\omega_l)^2}} = 0.3347 \\ \varphi_r(\omega_l) &= -\text{arctg}\frac{4.6\omega_l}{2.3^2 + 3 - \omega_l^2} = -2.1172 = -121^\circ \\ y &= 0.33\sin(\omega_l t - 45^\circ + \varphi_r(\omega_l)) = 0.33\sin(\omega_l t - 166^\circ). \end{aligned}$$

Rješenje 6.4

Zatvoreni sustav zadan je svojim polovima, koji su prikazani na slici 6.20.

a) Za frekvenciju rezonantnog izdizanja dana je formula $\omega_r = \omega_n\sqrt{1 - 2\zeta^2}$. Sa slike 6.20 možemo očitati $\omega_n = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1$ i $\zeta = \cos\alpha = \frac{\frac{1}{2}}{\omega_n} = \frac{1}{2}$. Uvrštavanjem dobivamo:



Slika 6.20: Raspored polova i nula sustava

$$\omega_r = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0.7071$$

Kako je zadan sustav drugog reda, iz Slike 6.20, odnosno položaja polova odmah se može isčitati prijenosna funkcija sustava:

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{1}{s^2 + s + 1}$$

$$G(j\omega) = \frac{1}{1 - \omega^2 + j\omega}$$

Pojasnopropusna frekvencija je ona frekvencija pri kojoj amplitudno- frekvencijska karakteristika padne za 3 dB u odnosu na amplitudu propusnog pojasa. Kako imamo kompleksno konjugirani par polova s jediničnim pojačanjem, lako možemo zaključiti kako je amplituda u pojasnopropusnom području 0 dB. Dakle, tražimo frekvenciju ω_b pri kojoj će amplituda iznositi -3 dB.

$$20\log|G(j\omega_b)| = -3 \text{ [dB]}$$

$$\omega_b \approx 1.2712$$

b) Fazno osiguranje definirano je preko otvorenog kruga sustava. Sustav je s jediničnom negativnom povratnom vezom. Iz toga možemo odrediti

prijenosnu funkciju otvorenog kruga:

$$G_o(s) = \frac{G(s)}{1 - G(s)} = \frac{1}{s(s+1)}$$

Potrebno je odrediti iznos presječne frekvencije (ω_c) i iznos faze na toj frekvenciji.

$$G_o(j\omega) = \frac{1}{j\omega - \omega^2}$$

$$\omega_c \approx 0.7862$$

$$\gamma \approx 51.8273°$$

c) Transportno kašnjenje u frekvencijskoj domeni opisano je članom $e^{-j\omega T_t}$. Takav član ima jediničnо pojačanje za $\forall\omega$, pa ne utječe na amplitudno-frekvencijski dijagram. Međutim, utječe na fazu, i u fazno frekvencijskom dijagramu pojavljuje se kao član $-\omega T_t$. Najveće transportno kašnjenje koje se smije (dodatno) pojaviti u otovorenom krugu iznosi:

$$T_t = \frac{10°}{\omega_c} \approx 0.222 \text{ [s]}$$

Rješenje 6.5

Prvi korak je određivanje presječne frekvencije:

$$|G_o(j\omega_c)| = 1 = \frac{\omega_n^2}{\sqrt{(\omega_n^2 - \omega_c^2)^2 + (2\zeta\omega_n\omega_c)^2}}$$

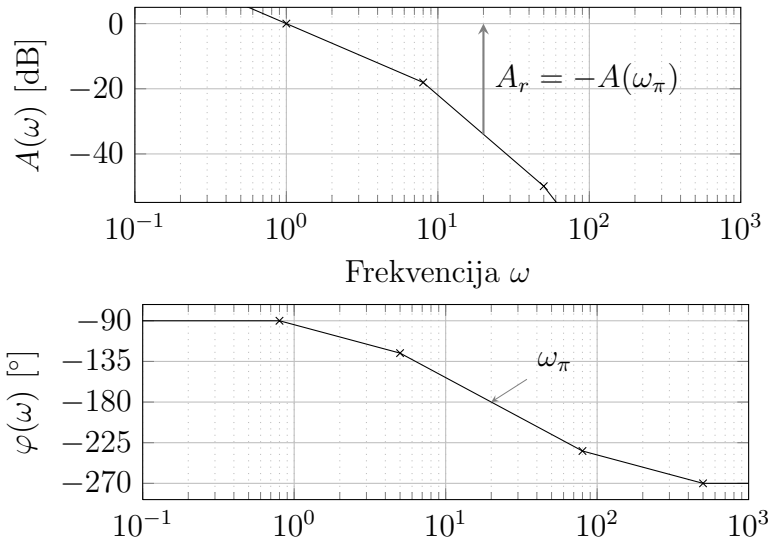
$$\omega_c = 0 \text{ rad/s}$$

Računa se fazno osiguranje i interval vrijednosti mrtvog vremena T_t za koje je $\gamma > 55°$:

$$\gamma = 180° + \varphi(\omega_c) = 180° > 55°$$
$$T_t \in [0, \infty\rangle \text{ s}$$

Rješenje 6.6

a) Slika 6.21.



Slika 6.21: Bodéov dijagram procesa za a) dio zadatka

b) Iako u tekstu zadatka eksplicitno ne piše, potrebno je korištenjem jednadžbi pravaca koji aproksimiraju Bodéov dijagram odrediti amplitudno osiguranje. Gornja granica raspona pojačanja K_R bit će upravo onaj iznos pojačanja pri kojem amplitudno osiguranje isčezava.

Za određivanje amplitudnog osiguranja potrebno je odrediti frekvenciju ω_π pri kojoj fazna karakteristika sječe $-180°$.

Iz prethodno određenog Bodéovog dijagrama može se vidjeti da je amplitudnu karakteristiku moguće aproksimirati jednadžbama triju pravaca (koje vrijede na odgovarajućim intervalima; $(0, 8]$, $(8, 50]$, $(50, \infty)$). Faznu karakteristiku možemo aproksimirati s 5 pravaca (na intervalima $(0, 0.8]$, $(0.8, 5]$, $(5, 80]$, $(80, 500]$, $(500, \infty)$).

Presječnu frekvenciju ω_π određujemo iz fazne karakteristike, a iz slike 6.21 možemo vidjeti kako ćemo presjecište odrediti pomoću jednadžbe pravca na trećem intervalu. Jednadžba pravca (kroz točku) na intervalu $(5, 80]$ dana je s

$$\varphi(\omega) - (-90 - 45 \log \frac{5}{0.8}) = -90(\log \omega - \log 5) \ .$$

Uvrštavanjem $\varphi(\omega_\pi) = -180°$ dobivamo

$$\omega_\pi = 20$$

Amplitudno osiguranje određujemo iz druge jednadžbe pravca amplitudne

karakteristike (jer je $\omega_\pi \in (8, 50]$). Jednadžba tog pravca glasi

$$A(\omega) - (-20 \log 8) = -40(\log \omega - \log 8) \ ,$$

a amplitudno osiguranje, odnosno maksimalni K_R određujemo prema izrazu

$$A_r = -A(\omega_\pi) = 20 \log 8 + 40 \log \frac{\omega_\pi}{8},$$

$$K_R = 50.$$

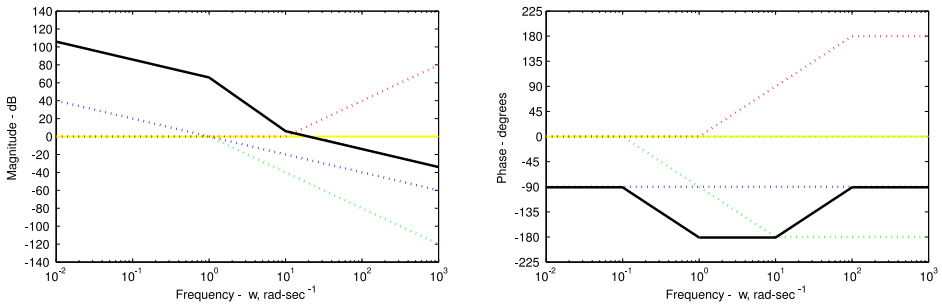
Zaključujemo kako je sustav stabilan uz $K_R \in (0, 50)$.

Rješenje 6.7

a)

$$G_p(s) = \frac{s + 10}{s(s + 1)}.$$

b) Slika 6.22.



Slika 6.22: Bodeov dijagram.

c) Amplitudni pravci (prvo pravac nagiba -3, a onda pravac nagiba -1):

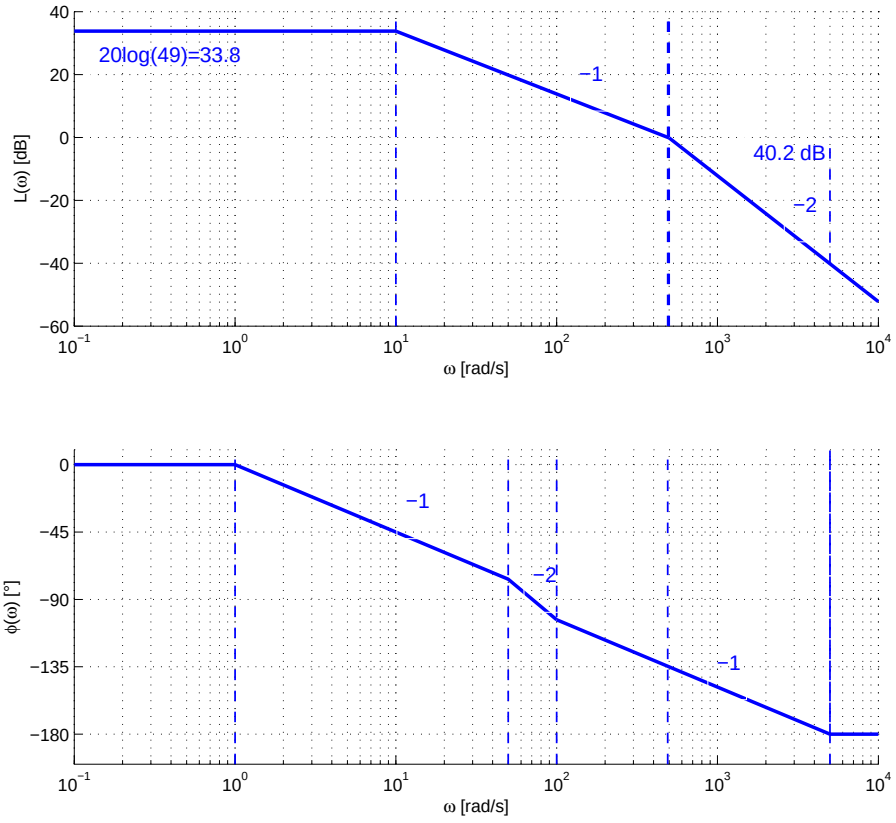
$y = -60x + b$ (nagib -3)
$x = 0 \ \Rightarrow \ b = 20 + 20 \log 200 = 66$
$x = 1 \ \Rightarrow \ y = -60 + 66 = 6$ (pocetna tocka za pravac nagiba -1)
$y = -20(x - x_c)$ (nagib -1)
$6 = -20(1 - x_c)$
$x_c = \dfrac{26}{20} = \dfrac{13}{10}$
$\omega_c = 10^{\frac{13}{10}} = 19.95$ rad/s

Fazni pravac:

$$
\begin{aligned}
&y = -90°x + b \\
&x = 0 \;\Rightarrow\; b = -270 \\
&x = x_c \;\Rightarrow\; y = 90\frac{13}{10} - 270 = -153° \\
&\gamma = 27°
\end{aligned}
$$

Rješenje 6.8

Bodeov dijagram se crta za otvoreni krug (slika 6.23)! Amplitudno osi-



Slika 6.23

guranje na frekvenciji 5000 rad/s iznosi približno 40.2 dB, a fazno osiguranje na frekvenciji 490 rad/s iznosi približno 45°.

Iz amplitudnog osiguranja proizlazi da dodatno pojačanje koje se može unijeti u sustav, a da on dođe na rub stabilnosti, iznosi:

$$K_{R,dod} = 10^{\frac{40.2}{20}} = 102.3$$

što znači da pojačanje regulatora koje bi dovelo sustav na rub stabilnosti iznosi:

$$K_{R,kr} = K_R \cdot K_{R,dod} = 2507.1$$

Zbog korištenja aproksimacije s pravcima ovaj rezultat zapravo nije točan. Faza doseže -180° tek na beskonačnoj frekvenciji te je stoga amplitudno osiguranje beskonačno, odnosno teoretski i kritično pojačanje regulatora bi bilo beskonačno.

Rješenje 6.9

a)

$$G(s) = \frac{U_i(s)}{U_u(s)} = -\frac{1}{1+sRC} = -\frac{1}{1+0.1s}$$

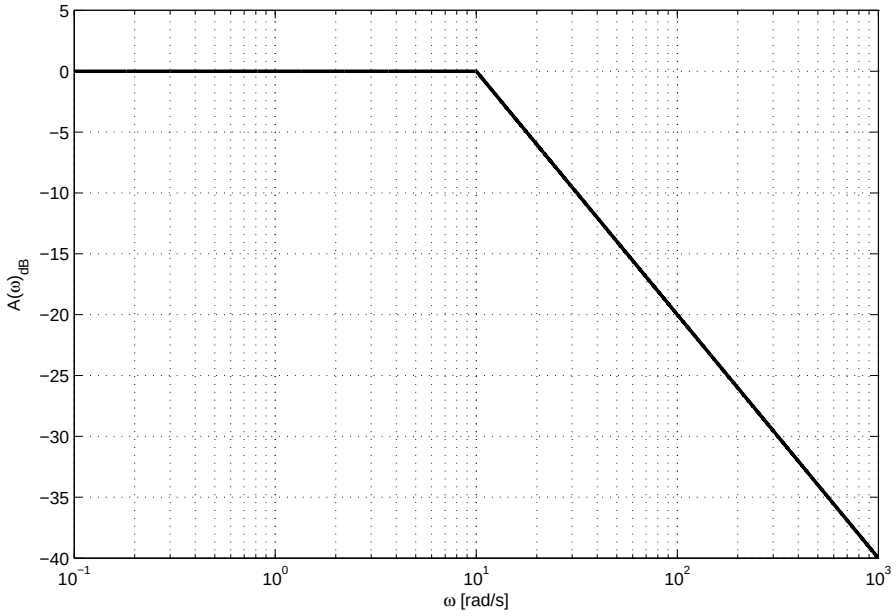
b) Bodeov prikaz amplitudno-frekvencijske karakteristike (aproksimaciju s pravcima) dan je na slici 6.24.

c) Za frekvenciju ulaznog signala $\omega = 100$ rad/s očitava se s dijagrama pojačanje -20 dB, odnosno u apsolutnom iznosu 0.1 pa je amplituda izlaznog signala u_i u ustaljenom stanju jednaka $u_i(\infty) = 0.1 \cdot 2 = 0.2$ V.

Rješenje 6.10

a) Fazna karakteristika ne ovisi o pojačanju pa se ona prva ucrtava (slika 6.25). Nakon toga se iz zadanog faznog osiguranja određuje frekvencija presjeka $\omega_c = 0.063$ rad/s. Oblik amplitudne karakteristike je poznat (nagib -1 do prve lomne frekvencije $\omega_{l1} = 0.1$ rad/s, -2 između dviju lomnih frekvencija $\omega_{l1} = 0.1$ rad/s i $\omega_{l2} = 0.5$ rad/s te -3 nakon druge lomne frekvencije $\omega_{l2} = 0.5$ rad/s.

Pojačanje otvorenog kruga se isčitava na frekvenciji $\omega = 1$ rad/s u produžetku nagiba -1 te iznosi $K = -24.1$ dB, odnosno $K = 0.0622$.



Slika 6.24

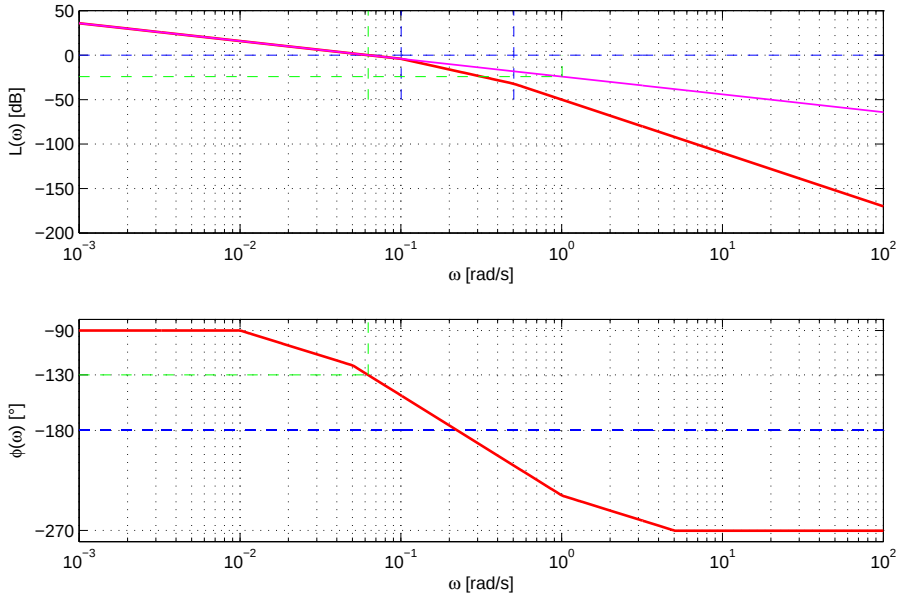
Pri crtanju amplitudne karakteristike može se pretpostaviti neka vrijednost pojačanja K, a nakon toga spustiti ili podići amplitudnu karakteristiku na 0 dB na presječnoj frekvenciji. Rezultat mora ispasti isti.

b) Iz relacije $\gamma[^\circ] = 70 - \sigma_m[\%]$ dobiva se procijenjeno nadvišenje $\sigma_m = 20\%$, odnosno vrijeme prvog maksimuma iz relacije $t_m = \frac{3}{\omega_c} = \frac{3}{0.063} = 47.6$ s. Stvarni odziv je dan na slici (6.26), a studenti bi trebali skicirati oblik PT_2S člana s naznačenim procijenjenim vrijednostima nadvišenja i vremena prvog maksimuma.

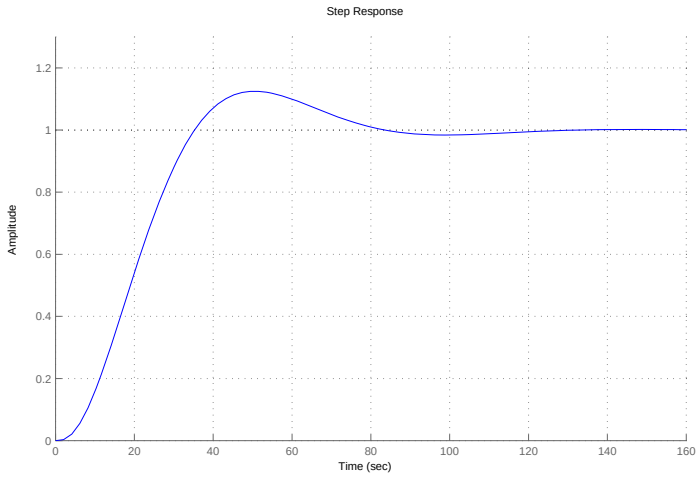
Rješenje 6.11

a) Prijenosna funkcija u formi prikladnoj za crtanje Bodeovog dijagrama:

$$G_o(s) = \frac{0.4}{s(s+1)(\frac{s}{5}+1)}$$

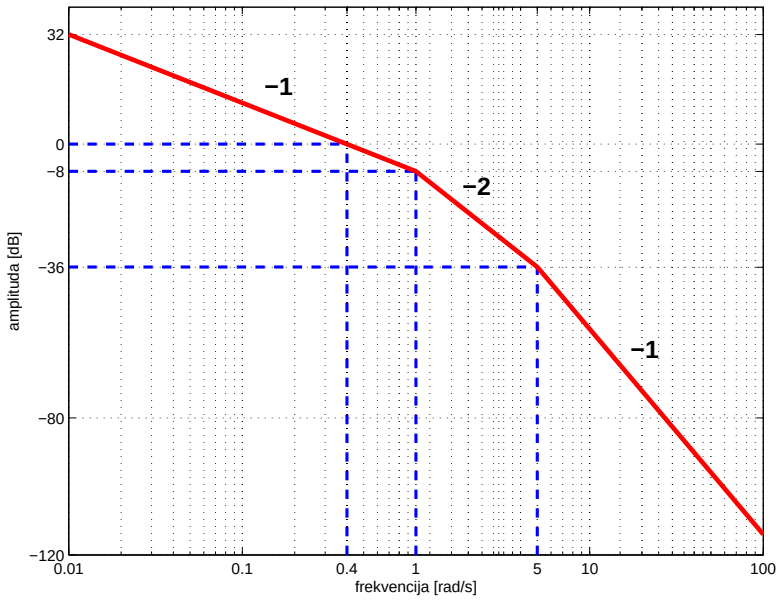


Slika 6.25

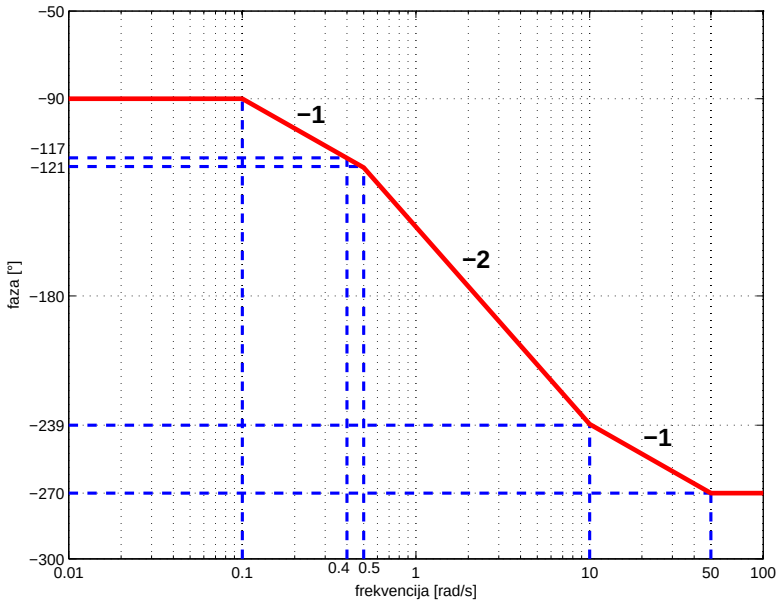


Slika 6.26

b) Sa slike 6.27 očitavamo presječnu frekvenciju $\omega_c = 0.4\text{rad/s}$ i fazno osigu-



(a) Amplitudno-frekvencijska karakteristika.



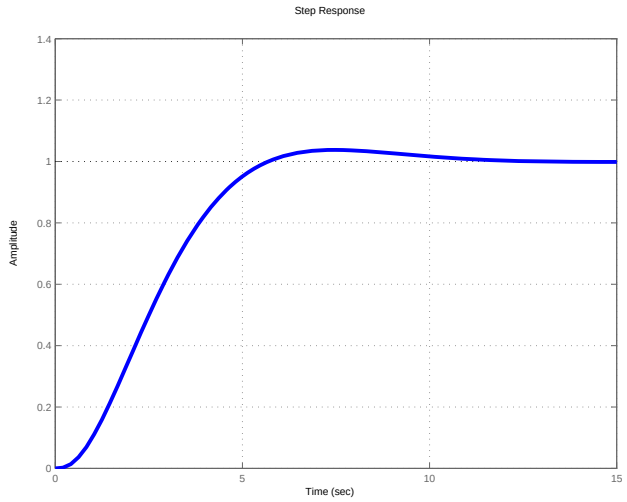
(b) Fazno-frekvencijska karakteristika.

Slika 6.27: Aproksimacija pravcima Bodeove karakteristike.

ranje.

$$\phi(\omega_c) = -90 - (\log 0.4 - \log 0.1) \cdot 45 = -117^\circ$$
$$\gamma = 180^\circ - \phi(\omega_c) = 63^\circ$$

Vrijeme prvog maksimuma i nadvišenje određujemo približno (slika 6.28):
$\sigma_m \approx 70 - \gamma = 7\%$
$t_m \approx \frac{3}{\omega_c} = 7.5\text{s}.$



Slika 6.28: Prijelazna funkcija zatvorenog kruga upravljanja

Rješenje 6.12

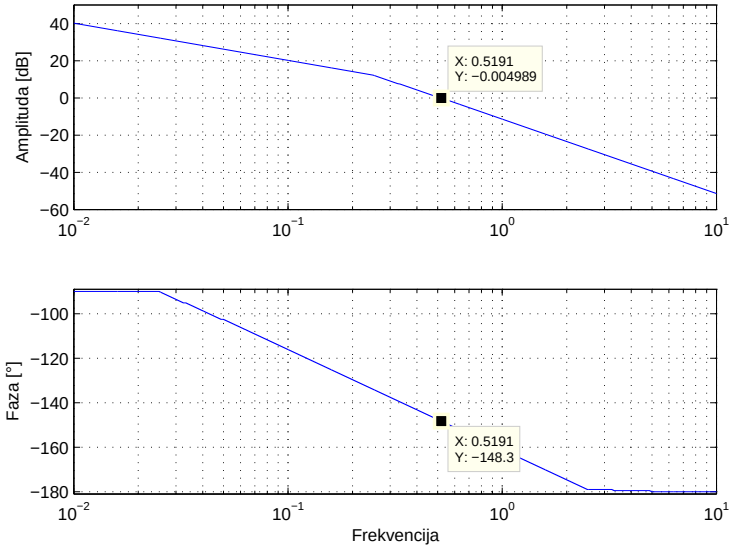
a) Prijenosna funkcija otvorenog kruga s PID regulatorom je:

$$G_o(s) = \frac{K_R}{T_I} \frac{T_I T_D s^2 + T_I s + 1}{s} \frac{1}{(1 + T_1 s)(1 + T_2 s)(1 + T_3 s)}$$
$$G_o(s) = 1.02 \frac{\left(1 + \frac{s}{0.487}\right)\left(1 + \frac{s}{0.325}\right)}{s\left(1 + \frac{s}{0.5}\right)\left(1 + \frac{s}{0.3}\right)\left(1 + \frac{s}{0.25}\right)}$$

Vidi se da u brojniku i nazivniku postoje bliske frekvencije, tako da će za potrebu aproksimacije pravcima biti sasvim zadovoljavajuće da pokratimo bliske nule i polove, što daje:

$$G_o(s) \approx \frac{1}{s\left(1 + \frac{s}{0.25}\right)}$$

Bodeov dijagram dobiven aproksimacijom pravcima dan je na slici 6.29.



Slika 6.29: Bodeov dijagram.

b) Iz slike 6.29 očitavamo da je presječna frekvencija $\omega_c = 0.52$ rad/s, dok je faza na presječnoj frekvenciji -148°. Odatle se korištenjem približnih relacija dobiva vrijeme prvog maksimuma

$$t_m \approx 3/\omega_c = 5.8 \text{ s},$$

Fazno osiguranje je

$$\gamma = -148^\circ + 180^\circ = 32^\circ$$

pa je nadvišenje

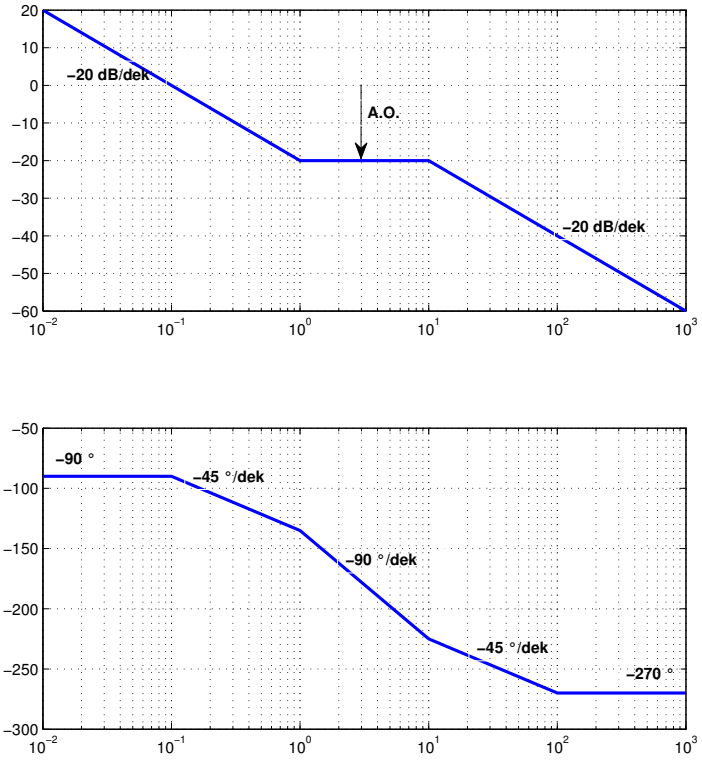
$$\sigma_m \approx 70 - \gamma = 70 - 32 = 38\%$$

Rješenje 6.13

a) Vremenska konstanta PI regulatora je $T_I = 1$ s.

b) $G_o = \frac{1-s}{s(s+10)} = \frac{0.1}{s}\frac{1-s}{1+\frac{s}{10}}$

c) Na slici 6.30 se vidi da uz $K_R = 1$ amplitudno osiguranje iznosi 20 dB, dakle treba smanjiti amplitudno osiguranje za 10 dB, odnosno povećati pojačanje sustava za 10 dB.
$20 \log K_R = 10 \Rightarrow \ K_R = 3.16$



Slika 6.30: Bodeov dijagram za $K_R = 1$

d) Na slici 6.31 nalazi se Bodeov dijagram sustava s pojačanjem $K_R = 10^{0.5} = 3.16$. Koristeći amplitudno-frekvencijsku karakteristiku računa se prvo presječna frekvencija sustava.

$$y = -20x - 10$$

Za $y = 0$ imamo:

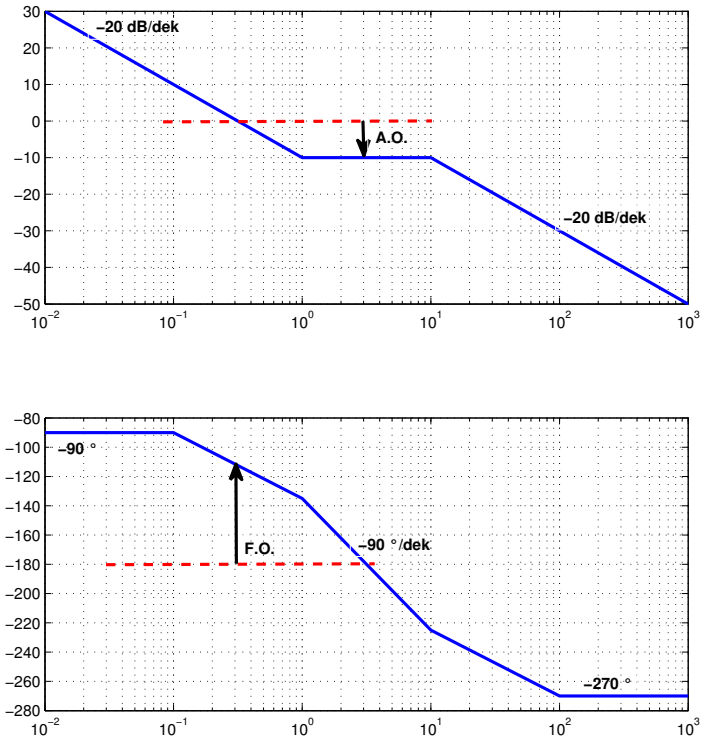
$$x_c = -0.5 \Rightarrow \omega_c = 10^{-0.5} = 0.316$$

Koristeći fazno-frekvencijsku karakteristiku računamo fazno osiguranje sustava:

$$y = -45x - 135$$

Za $x = x_c = -0.5$ imamo:

$$y = -45(-0.5) - 135 = -112.5° = \varphi(\omega_c)$$
$$\gamma = 180 + \varphi(\omega_c) = 67.5°$$



Slika 6.31: Bodeov dijagram za $K_R = 3.16$

Rješenje 6.14

a) Vidi sliku 6.32.

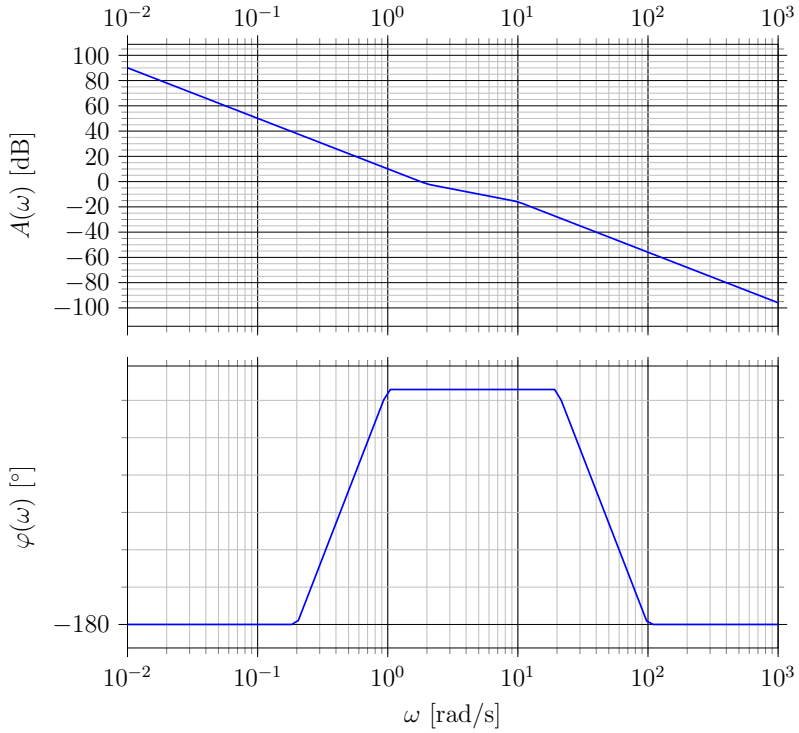
b)

$$|G(j\omega_0)| = 0.4152 \rightarrow |G(j\omega_0)|_{dB} = -7.63 \text{ [dB]},$$

$$\arg\{G(j\omega_0)\} = -138.3584^\circ = -2.415 \text{ } [rad].$$

Odziv izlaza iz sustava u stacionarnom stanju je

$$y(t) = 2 \cdot 0.4152 \sin(4t - 2.415).$$



Slika 6.32: Aproksimacija pravcima Bodeovog dijagrama

Rješenje 6.15

a) Za računanje faznog osiguranja potrebno je odrediti presječnu frekvenciju ω_c za koju vrijedi da je $A(\omega_c) = 0$ dB. Na amplitudno-frekvencijskoj karakteristici odabire se pravac nagiba -20 i točka (-1,15). Jednadžba pravca je:

$$y = -20x - 5$$

Za $y = 0$ dobije se

$$x = -0.25 \rightarrow \omega_c = 10^{-0.25} = 0.5623.$$

Na fazno-frekvencijskoj karakteristici određuje se faza na frekvenciji w_c. Odabire se pravac nagiba -90 koji prolazi kroz točku (-1,-45) i dobije se jednadžba pravca:

$$y = -90x - 135$$

Za $x = -0.25$ dobije se

$$y = -112.5° \rightarrow \gamma = 180° - 112.5° = 67.5°.$$

Za određivanje amplitudnog osiguranja računa se frekvencija ω_π na kojoj faza iznosi $-180°$. Odabire se pravac nagiba -90 koji prolazi kroz točku (-1,-45) i dobije se jednadžba pravca:

$$y = -90x - 135$$

Za $y = -180°$ dobije se

$$x = 0.5 \rightarrow \omega_\pi = 10^{0.5} = 3.1623.$$

Amplituda na frekvenciji ω_π određuje se iz pravca nagiba -40 kroz točku (0,-5). Jednadžba pravca je:

$$y = -40x - 5$$

Za $x = 0.5$ dobije se

$$y = -25 \rightarrow A_r = 25\,\text{dB}.$$

b) Da bi fazno osiguranje iznosilo $90°$ potrebno je podesiti regulator tako da presječna frekvencija bude jednaka frekvenciji na kojoj je faza $-90°$. Frekvencija na kojoj je faza $-90°$ određuje se iz već korištenog pravca:

$$y = -90x - 135$$

Za $y = -90$ dobije se

$$x = -0.5 \rightarrow \omega_{c_novo} = 10^{-0.5} = 0.3162.$$

Na željenoj presječnoj frekvenciji je amplituda (iz pravca $y = -20x - 5$):

$$x = -0.5 \rightarrow A(\omega_{c_novo}) = 5\,\text{dB}.$$

To znači da je potrebno smanjiti amplitudu za 5 dB odnosno da je traženo pojačanje regulatora $K_R = 10^{-5/20} = 0.5623$.

Zatvoreni sustav upravljanja postaje nestabilan ako pojačanje regulatora postane veće od amplitudnog osiguranja, odnosno za $K_R > 10^{25/20} \rightarrow K_R > 17.7828$.

c) Uvođenjem mjernog člana amplituda se ne mijenja, odnosno iznosi $A(10^{-2}) = 15\,\text{dB}$. Faza se smanjuje za iznos $-\omega T = -10^{-2}$ rad i sada iznosi $-0.5730°$.

Sustav će biti stabilan ako kašnjenje koje donosi mjerni član ostane manje od faznog osiguranja:

$$\omega_c T < \frac{67.5°}{180°}\pi \rightarrow T < \frac{1.1781}{0.5623} = 2.0951\,\text{s}.$$

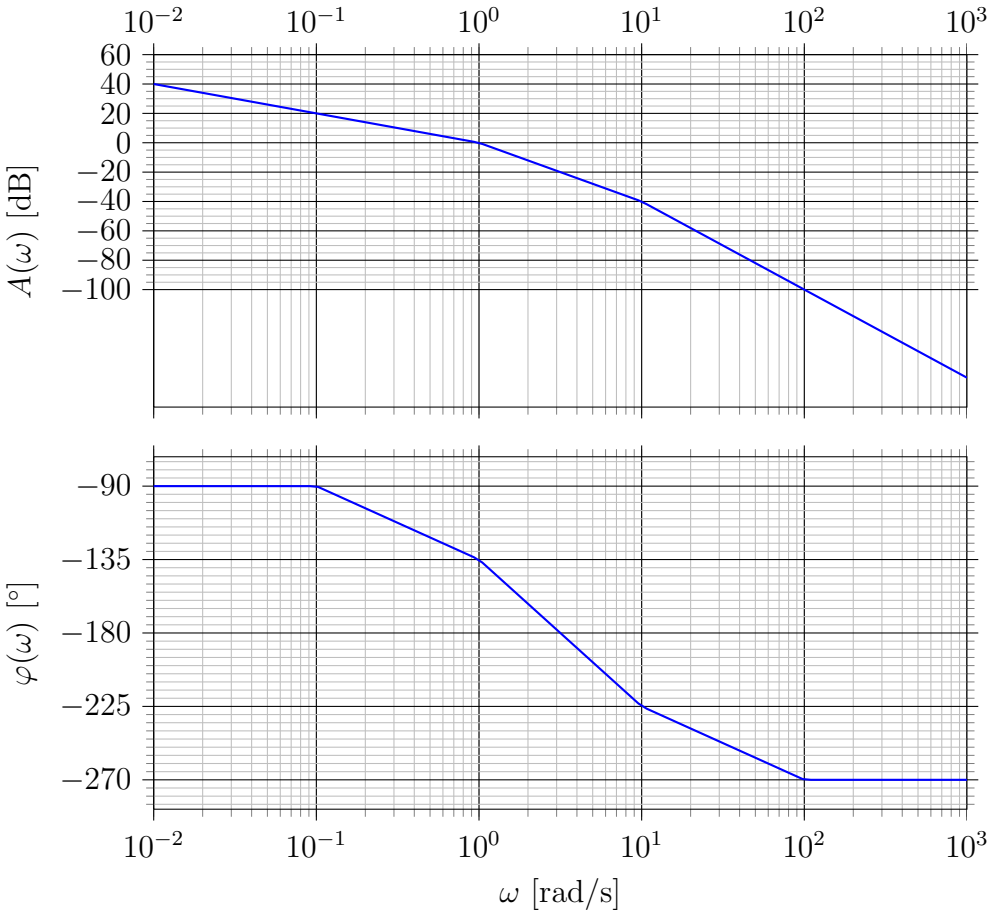
d)

$$G_P(s) = -10^{15/20}\frac{\frac{s}{10}-1}{(s+1)(\frac{s}{0.1}+1)} = -0.05623\frac{s-10}{(s+1)(s+0.1)}$$

.

Rješenje 6.16

a) Za pomoć u raspisivanju jednadžbi pravaca amplitudne i fazno-frekvencijske karakteristike prikladno je skicirati aproksimaciju Bodeovog dijagrama s jasno označenim lomnim frekvencijama i nagibama. Bodeov dijagram prikazan je na slici 6.33.



Slika 6.33: Aproksimacija pravcima Bodeovog dijagrama.

Jednostavnom provjerom slijedi presječna frekvencija na prvoj lomnoj frekvenciji $\omega_c = 1$ [rad/s]. Iz aproksimacije slijedi iznos faznog osiguranja

na frekvenciji ω_c

$$\gamma = 180\ [^\circ] - (-90\ [^\circ] - 45\ [^\circ]) = 45\ [^\circ].$$

Za određivanje iznosa amplitudnog osiguranja najprije je potrebno odrediti frekvenciju ω_π na kojoj fazno kašnjenje iznosi -180 [°],

$$\varphi = -135\ [^\circ] - 90\ [^\circ/dekada] \log \frac{\omega}{1} = -180\ [^\circ], \tag{6.1}$$

$$\log \omega = 0.5 \rightarrow \omega = 3.1623\ [\text{rad/s}]. \tag{6.2}$$

Iz čega slijedi iznos amplitudnog pojačanja na frekvenciji ω_π,

$$|G(j\omega)|_{dB} = -40\ [\text{dB/dekada}] \log \omega = -20\ [\text{dB}].$$

Rezultat je amplitudno osiguranje $A_{r,dB} = 20$ [dB].

b) Analitički slijedi presječna frekvencija $\omega_c = 0.784$ [rad/s], odnosno iznos faznog osiguranja $\gamma = 47.4°$.

c) Kašnjenje koje unosi D/A element može se aproksimirati članom kašnjenja s mrtvim vremenom, što rezultira linearnim padom fazno-frekvencijske karakteristike u ovisnosti o frekvenciji

$$\Delta\varphi \approx -\omega \frac{T_s}{2}.$$

Iz jednadžbe aproksimacije nadvišenja prijelazne funkcije iznosom faznog osiguranja $\sigma_m = 70 - \gamma$ slijedi uvjet

$$\omega_c \frac{T_s}{2} \leq 8\%,$$

$$T_s \leq 0.356\ [\text{s}].$$

Rješenje 6.17

a) Iz slike 6.10 i uvažavajući uvjete u zadatku moguće je prepoznati sljedeće polove/nule: -1 (p), -5 (n), -10 (p), 0 (p).

Prijenosna funkcija otvorenog kruga je

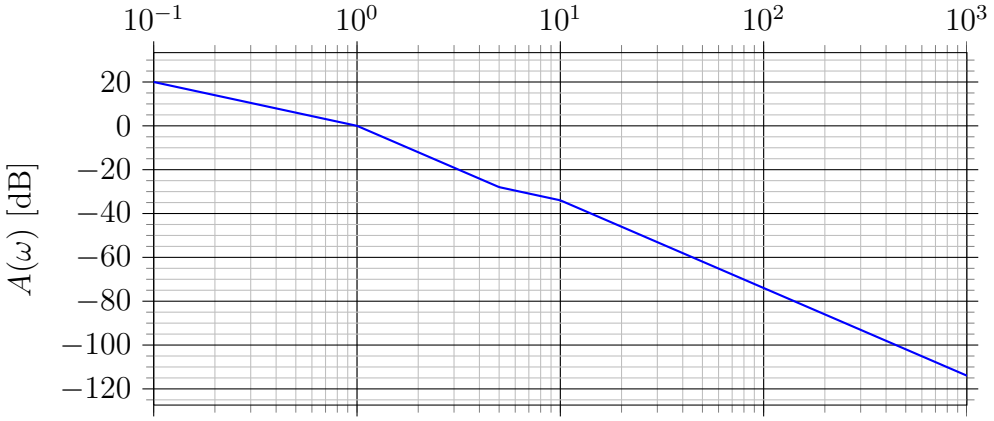
$$G(s) = K \frac{1}{s} \frac{\frac{s}{5} + 1}{(s+1)\left(\frac{s}{10} + 1\right)}.$$

Iznos koeficijenta K proizlazi iz $|G(j1)|_{aproks.} = 1$. Na frekvenciji $\omega = 1$ rad/s je aproksimacija amplitudno-frekvencijske karakteristike određena samo integralnim članom, vrijedi

$$|G(j1)|_{aproks.} = K\frac{1}{\omega} = 1$$

što je zadovoljeno za $K = 1$.

b) Vidi sliku 6.34.



Slika 6.34: Aproksimacija amplitudno-frekvencijske karakteristike sustava.

c) Frekvencija ω za koju vrijedi $\varphi(\omega) = -140°$ nalazi se na segmentu $1 \leq \omega \leq 10$.

$$-140° = \varphi_0 - 45\log\left(\frac{\omega}{1}\right),$$

$$\varphi_0 = -90 - 45\log(5) = -121.45°,$$

$$45\log(\omega) = 18.54635 \rightarrow \omega = 10^{\frac{18.546}{45}} = 2.583.$$

Rješenje 6.18

a)

$$G(j\omega) = \frac{K(j\omega - 1)}{(j\omega + 1)(j\omega + 10)}$$

$$\mathfrak{Re}(\omega) = \frac{12K\omega^2 - 10K}{(10 - \omega^2)^2 + (11\omega)^2}, \quad \mathfrak{Im}(\omega) = \frac{K\omega(21 - \omega^2)}{(10 - \omega^2)^2 + (11\omega)^2}$$

$$\mathfrak{Im} = 0 \;\Rightarrow\; \omega = 0,\ \omega = \sqrt{21} \;\Rightarrow\; \mathfrak{Re} = -\frac{K}{10},\ \mathfrak{Re} = \frac{K}{11}$$

$$\mathfrak{Re} = 0 \;\Rightarrow\; \omega = \sqrt{\frac{10}{12}} \;\Rightarrow\; \mathfrak{Im} = \frac{K\sqrt{30}}{55}$$

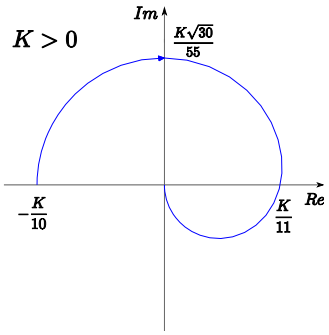
i) $K > 0$, Slika 6.35

$$-\frac{K}{10} > -1 \;\Rightarrow\; K < 10$$

ii) $K < 0$, Slika 6.36

$$\frac{K}{11} > -1 \;\Rightarrow\; K > -11$$

$$\Rightarrow\; K \in \langle -11, 10 \rangle$$



Slika 6.35: Nyquistov dijagram za $K > 0$.

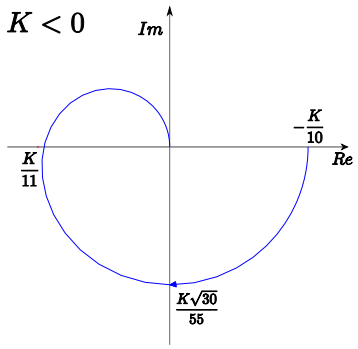
b)

$$K = -10.5$$

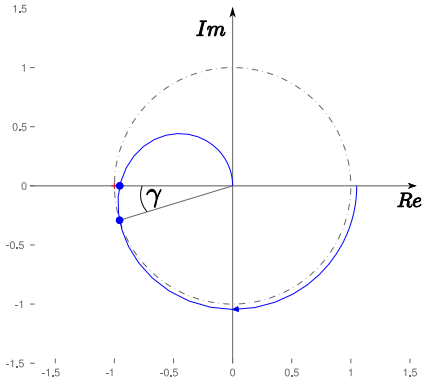
$$\omega_\pi = \sqrt{21},\ \Rightarrow\ \mathfrak{Re} = \frac{-10.5}{11} = 0.95,\ \Rightarrow\ A_r = 1.04 = 0.4 \text{ dB}$$

$$A(\omega_c) = 1 \;\Rightarrow\; \omega_c = 3.2066\ \frac{\text{rad}}{\text{s}} \;\Rightarrow\; \varphi = 0.29 \text{ rad} = 16.86°$$

Na slici 6.37 naznačeni su amplitudno i fazno osiguranje.



Slika 6.36: Nyquistov dijagram za $K < 0$.



Slika 6.37: Nyquistov dijagram za $K = -10.5$.

Rješenje 6.19

Uvrštavanjem $s = j\omega$ dobije se:

$$G_o(j\omega) = K \cdot \frac{1 - 0.242\omega^2 + j\left(0.004\omega^3 - 2.12\omega\right)}{0.0016\omega^4 + 4.0004\omega^2 + 1}$$

Realni i imaginarni dio iznose:

$$\Re(\omega) = K \cdot \frac{1 - 0.242\omega^2}{0.0016\omega^4 + 4.0004\omega^2 + 1}$$
$$\Im(\omega) = K \cdot \frac{0.004\omega^3 - 2.12\omega}{0.0016\omega^4 + 4.0004\omega^2 + 1}$$

Početna i konačna točka:

$$\omega = 0 \Rightarrow \begin{matrix}\Re(0) = K \\ \Im(0) = 0\end{matrix} \qquad \omega \to \infty \Rightarrow \begin{matrix}\Re(\infty) = 0 \\ \Im(\infty) = 0\end{matrix}$$

Sjecišta sa negativnim poluosima:

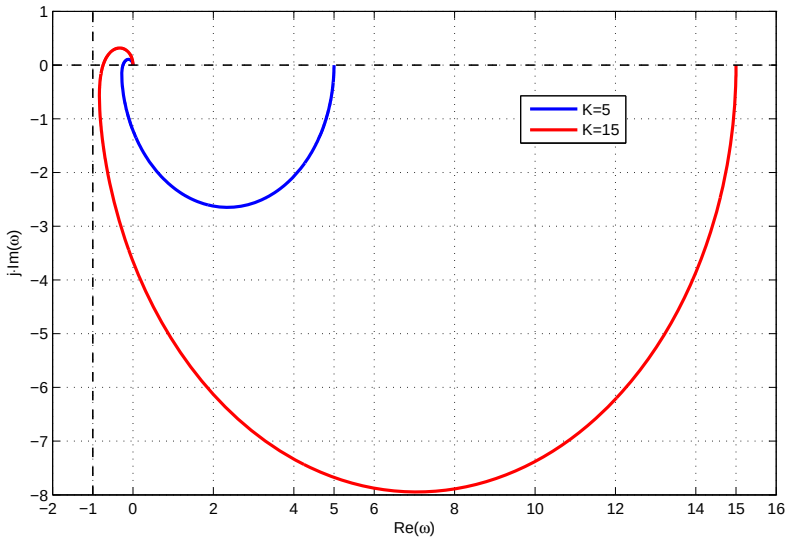
$$\Re\left(\omega_{\frac{\pi}{2}}\right) = 0 \Rightarrow \omega_{\frac{\pi}{2}} = 2.0328 \Rightarrow \Im\left(\omega_{\frac{\pi}{2}}\right) = -0.24353K$$
$$\Im\left(\omega_{\pi}\right) = 0 \Rightarrow \omega_{\pi} = 23.022 \Rightarrow \Re\left(\omega_{\pi}\right) = -0.049505K$$

Oba pola unose po -90° u faznu karakteristiku, a isto tako i nula u desnoj poluravnini pa ukupna fazna karakteristika završava na -270°, što je ujedno i kut upada u ishodište Nyquistovog dijagrama.

Granica stabilnosti:

$$\Re\left(\omega_{\pi}\right) = -0.049505K = -1 \Rightarrow K_{kr} = 20.2$$

Skica dijagrama prikazana je slikom 6.38.



Slika 6.38: Nyquistov dijagram.

Rješenje 6.20

a) Iz nadvišenja se dobije faktor prigušenja:

$$\sigma_m = 100e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \Rightarrow \zeta = \frac{\ln\frac{100}{\sigma_m}}{\sqrt{\pi^2 + \left(\ln\frac{100}{\sigma_m}\right)^2}} = 0.69$$

Vrijeme prvog maksimuma od $\frac{Y(s)}{U(s)}$ je 1.5s, ali vrijeme prvog maksimuma od $\frac{X(s)}{U(s)}$ je $t_m - T_t = 0.5$s. Dakle:

$$t_m - T_t = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}}$$

$$\omega_n = \frac{\pi}{(t_m - T_t)\sqrt{1-\zeta^2}} = 8.68$$

Naposlijetku, prijenosna funkcija je

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} e^{-T_t s} = \frac{75.34}{s^2 + 11.98s + 75.34} e^{-s}.$$

Budući da odziv počinje tek u $t = 1$s, nagib u $t = 0^+$ je 0.

b) Ako je $G_x = \frac{X(s)}{U(s)}$, onda

$$G_0(s) = \frac{G_x(s)}{1 - G_x(s)} = \frac{75.34}{s(s + 11.98)}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}\{G(j\omega)\} &= \tfrac{-K}{(\omega)^2 + p^2} = \tfrac{-75.34}{\omega^2 + 143.52} \\ \mathrm{Im}\{G(j\omega)\} &= -\tfrac{1}{\omega}\tfrac{pK}{\omega^2 + p^2} = -\tfrac{1}{\omega}\tfrac{902.57}{\omega^2 + 143.52} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\omega = 0 \to \mathrm{Re} = -\tfrac{K}{p^2} = -0.525, \mathrm{Im} = -\infty \\ &\omega = \infty \to \mathrm{Re} = 0, \mathrm{Im} = 0 \end{aligned}$$

S obzirom da je sustav drugog reda, Nyquistova krivulja prolazi samo kroz dva kvadranta, tj. nigdje ne siječe niti realnu niti imaginarnu os.

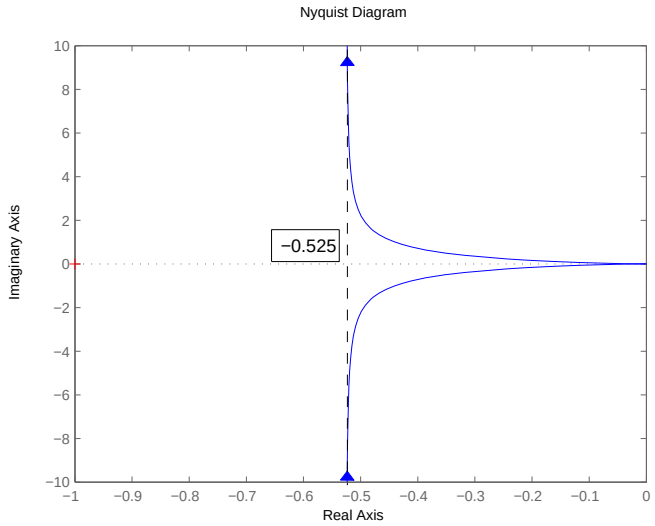
c) Kut i amplituda od $G_x(s)$ na $\omega = 3$:

$$\left.\begin{array}{c} |G_x(j3)| = \frac{1}{\sqrt{\omega^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{10}} \\ \angle G_x(j3) = -\arctan\omega = -1.25\mathrm{rad} \end{array}\right\} x(t) = 0.63\sin(3t - 0.726)$$

Kut i amplituda kašnjenja na $\omega = 3$:

$$\left.\begin{array}{c} \left|e^{-3T_t}\right| = 1 \\ \angle e^{-3T_t} = -\omega T_t = -3\mathrm{rad} \end{array}\right\} y(t) = 0.63\sin(3t - 3.726)$$

Rješenje 6.21



Slika 6.39: Slika uz rješenje Zadatka 1.

a) Iz Nyquistovog dijagrama je očito je da je riječ o sustavu trećeg reda:

$$G(s) = \frac{K}{a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + 1},$$
$$G(j\omega) = \frac{K}{1 - a_2\omega^2 + j\omega(a_1 - a_3\omega^2)}.$$

Iz $G(j1) = -j$ slijedi:

$$1 - a_2\omega^2 = 0 \;\Rightarrow\; a_2 = 1,$$
$$\frac{K}{j(a_1 - a_3)} = -j \;\Rightarrow\; K = a_1 - a_3.$$

Iz $G(j3) = -\frac{1}{4}$ slijedi:

$$a_1 - a_3\omega^2 = 0 \;\Rightarrow\; a_1 = 9a_3$$
$$\frac{K}{1 - a_2\omega^2} = -\frac{1}{4} \;\Rightarrow\; K = 2$$

Kombinirajući gore dobivene uvjete, dobije se: $a_3 = 0.25$, $a_1 = 2.25$, odnosno prijenosna funkcija glasi:

$$G(s) = \frac{2}{0.25s^3 + s^2 + 2.25s + 1}.$$

b) Direktnim očitavanjem iz Nyquistovog dijagrama, odnosno zadane tablice, dobije se rješenje:

$$y(t) = 4 + 3\sin\left(t - \frac{\pi}{2}\right) + \cos(3t).$$

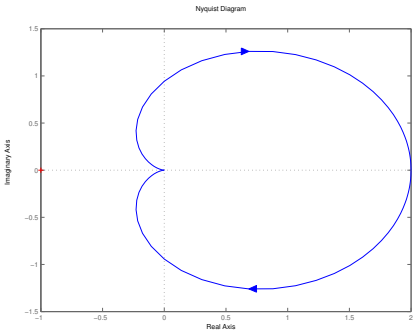
Rješenje 6.22

a) Vidi sliku 6.40.

$$G_o(j\omega) = K\frac{1 - \omega^2 T_1 T_2 - j\omega(T_1 + T_2)}{(1 - \omega^2 T_1 T_2)^2 + \omega^2 (T_1 + T_2)^2}$$

Karakteristične točke dijagrama su:

- $G(0) = K$,
- $G\left(j\frac{1}{\sqrt{T_1 T_2}}\right) = -j\frac{K\sqrt{T_1 T_2}}{T_1 + T_2}$,
- $G(j\infty) = 0$.

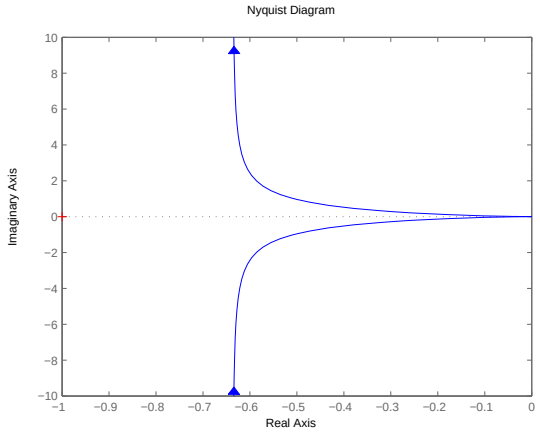


Slika 6.40: Nyquistov dijagram

b) Ne može. Otvoreni krug je stabilan, a Nyquistov dijagram ne prelazi u drugi kvadrant pa ne može ni zaokružiti tocku -1.

Rješenje 6.23

a) Prijenosna funkcija otvorenog kruga:



Slika 6.41: Nyquistov dijagram prijenosne funkcije otvorenog kruga $G_o(s)$.

$$G_o(s) = \frac{G_z}{1-G_z} = \frac{1}{\frac{1}{\omega_n}s^2 + \frac{2\zeta}{\omega_n}s} = \frac{1}{0.5539s^2 + 0.9326s}$$

Slika 6.41.

b) Za sustav na granici stabilnosti vrijedi:

$$|G_o(j\omega_c)| = 1$$
$$|G_o(j\omega_c)| = \frac{1}{\sqrt{0.5539^2\omega_c^4 + 0.9326^2\omega_c^2}} \Rightarrow \omega_c = 0.9370 \text{ rad/s}$$

Fazno osiguranje sustava je:

$$\gamma = 180° + \varphi_0(\omega_c) = 60.9035°$$

Da bi sustav bio stabilan mora biti zadovoljen uvjet:

$$\omega_c T_t < \gamma[\text{rad}]$$
$$T_t < 1.1345\text{s}$$

Rješenje 6.24

a)

$$G_o(j\omega) = \frac{-2\omega^2 K_p}{\omega^6 + 2\omega^4 + \omega^2} - j\frac{K_p(\omega - \omega^3)}{\omega^6 + 2\omega^4 + \omega^2}$$

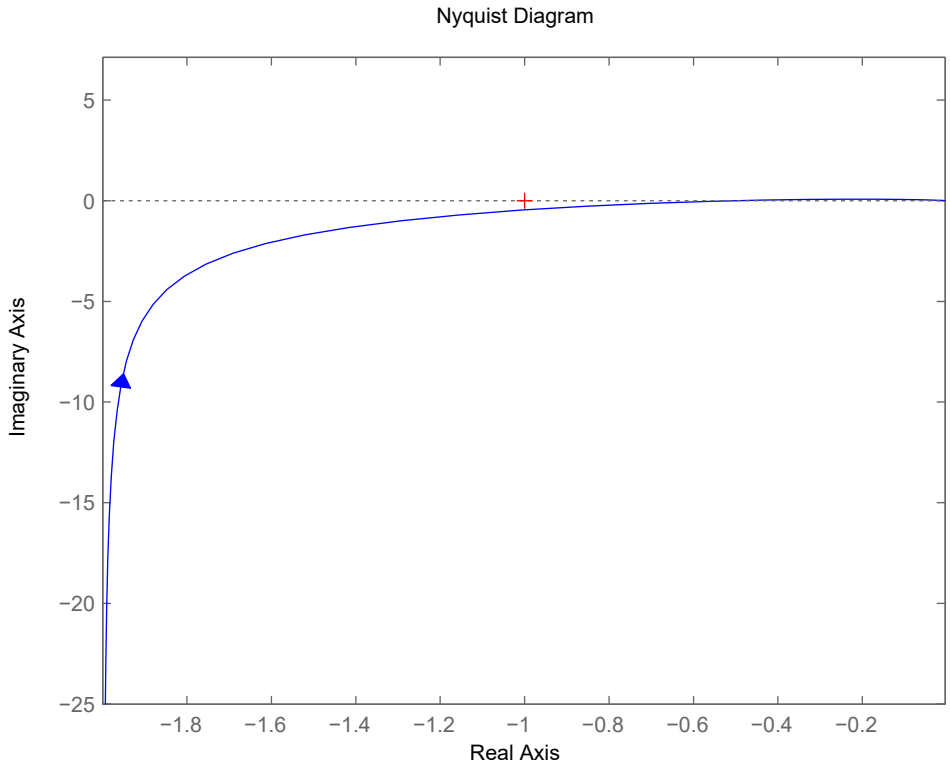
Iz prijenosne funkcije slijedi kako Nyquistov dijagram prolazi kroz 2. i 3. kvadrant kompleksne ravnine ($-270° \leq \angle\{G(j\omega) \leq -90°\}$). Karakteristične točke dijagrama u ovisnosti o parametru K_p su:

- Ishodište Nyquistova dijagrama: $G(j0) = -2K_p - j\infty$.
- Točka završetka Nyquistova dijagrama: $G(j\infty) = 0 + j0$.
- Točka presjeka s realnom osi:

$$\text{Im} = 0 \rightarrow \omega = 1 \text{ [rad/s}^2\text{]},$$

$$G(j1) = -\frac{K_p}{2}.$$

Nyquistov dijagram prikazan je na slici 6.42.



Slika 6.42: Nyquistov dijagram otvorenog kruga $\frac{G_o(s)}{K_p}$

Rješenje 6.25

a) Izlaz iz procesa je: $y(t) = 5B\sin(\omega_1 t - \frac{\pi}{2})$

b) Nyquistov dijagram je jednakog oblika, siječe osi na istim frekvencijama, ali je amplituda 2 puta veća te umjesto A, B, C na sjecištima s osima iznosi $2A$, $2B$ i $2C$.

c) Amplitudno osiguranje iznosi $A_r = \frac{1}{C}$.

d)

$$G_P(j0) = \frac{5x}{(j0+x)(j0+5x)(j0+10x)} = A$$
$$G_P(j0) = \frac{1}{10x^2} = 0.1 \Rightarrow x = 1$$
$$G_P(s) = \frac{5}{(s+1)(s+5)(s+10)}$$

Rješenje 6.26

a) Potrebno je izračunati prijenosnu funkciju otvorenog kruga:

$$G_o(s) = \frac{G_z(s)}{1 - G_z(s)} = \frac{10}{s(s^2+2s+5)} \ .$$

Supstitucijom $s = j\omega$ dobivamo

$$G_o(j\omega) = \frac{10}{j\omega(5-\omega^2) - 2\omega^2} \frac{j\omega(\omega^2-5) - 2\omega^2}{j\omega(\omega^2-5) - 2\omega^2} = \frac{10j\omega(\omega^2-5) - 20\omega^2}{4\omega^4 + \omega^2(5-\omega^2)^2} \ .$$

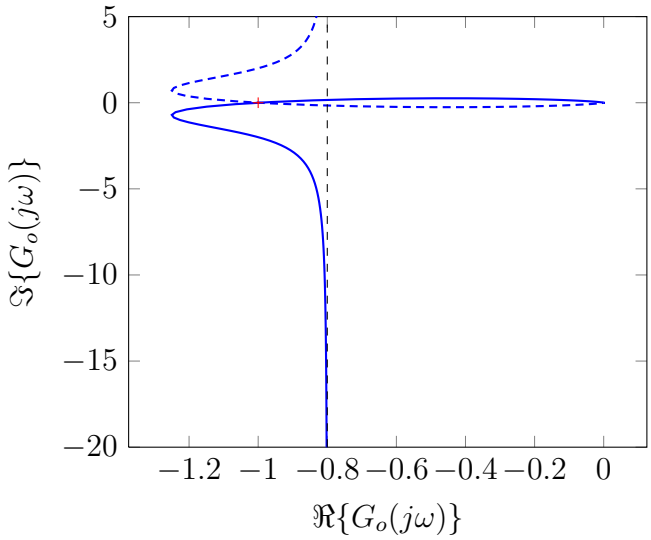
Odatle možemo odvojiti realni i imaginarni dio:

$$\Re\{G_o(j\omega)\} = \frac{-20\omega^2}{4\omega^4 + \omega^2(5-\omega^2)^2}$$
$$\Im\{G_o(j\omega)\} = \frac{10\omega(\omega^2-5)}{4\omega^4 + \omega^2(5-\omega^2)^2}$$

Analiziranjem karakterističnih točaka dobit ćemo ideju kako izgleda Nyquistov dijagram:

- $\omega = 0$

$$\Re\{G_o(0)\} = \left.\frac{-20}{4\omega^2 + (5-\omega^2)^2}\right|_{\omega=0} = -\frac{4}{5}$$
$$\Im\{G_o(0)\} = \lim_{\omega\to 0} \frac{10(\omega^2-5)}{4\omega^3 + \omega(5-\omega^2)^2} = -\infty$$



Slika 6.43: Nyqvistov dijagram prijenosne funkcije $G_o(s)$

- $\omega = \infty$

$$\Re\{G_o(j\infty)\} = \lim_{\omega\to\infty} \frac{-20}{4\omega^2 + (5-\omega^2)^2} = 0$$
$$\Im\{G_o(j\infty)\} = \lim_{\omega\to\infty} \frac{10(\omega^2-5)}{4\omega^3 + \omega(5-\omega^2)^2} = 0$$

- $\Re\{G_o(j\omega_i)\} = 0$ Ispunjeno jedino za $\omega_i \to \infty$.
- $\Im\{G_o(j\omega_r)\} = 0$

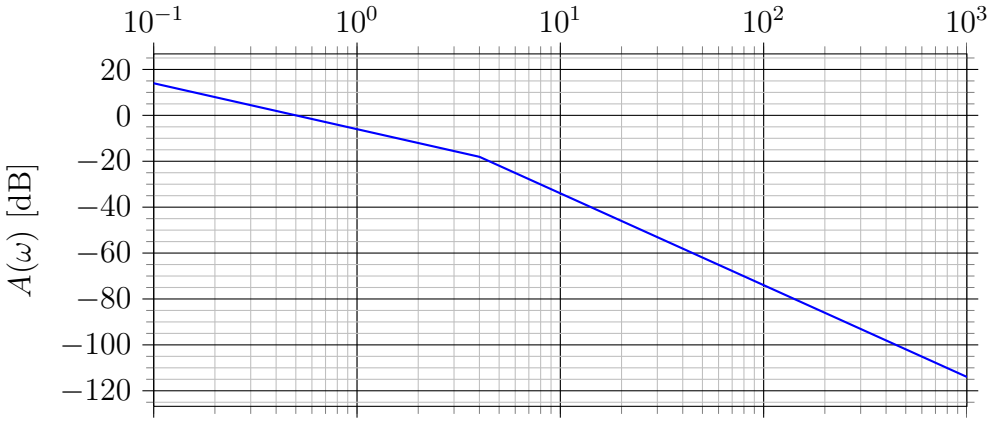
$$\frac{10(\omega^2-5)}{4\omega^3 + \omega(5-\omega^2)^2} = 0$$
$$\omega^2 - 5 = 0$$
$$\omega_r = \sqrt{5}$$

Odatle imamo

$$\Re\{G_o(j\sqrt{5})\} = \frac{-20}{4\omega^2 + (5-\omega^2)^2} = -1\ .$$

Nyquistov dijagram prikazan je slikom 6.43.

Rješenje 6.27



Slika 6.44: Aproksimacija amplitudno-frekvencijske karakteristike sustava.

a) Aproksimacija amplitudno-frekvencijske karakteristike je prikazana na slici 6.44.

b) Pojačanje procesa na frekvenciji $\omega = 2\text{rad/s}$ iznosi

$$|G(j2)|_{stvarno} = \frac{2}{2\sqrt{2^2+4^2}} = 0.2236 \rightarrow |G(j2)|_{dB,stvarno} = -13.01\text{dB}.$$

Za aproksimaciju amplitudno-frekvencijske karakteristike na frekvenciji 2rad/s vrijedi prijenosna funkcija

$$G(s)_{aproks.} = \frac{2}{4s},$$

a amplitudno pojačanje iznosi

$$|G(j\omega)|_{aproks.} = \left|\frac{2}{4 \cdot 2j}\right| = 0.25 \rightarrow |G(j2)|_{dB,aproks.} = -12.04\text{dB}.$$

Prema tome, razlika između stvarne amplitudno-frekvencijske karakteristike i njene aproksimacije iznosi -0.9691dB.

c) Prema $\gamma = 70^\circ - \sigma_m$ proizlazi

$$\varphi(\omega_c) = 70^\circ - \sigma_m - 180^\circ = -117^\circ.$$

I. Proračun preko stvarne fazno-frekvencijske karakteristike:
Odgovarajuće fazno kašnjenje se postiže na frekvenciji

$$\varphi(\omega) = -90 - \arctan\left(\frac{\omega}{4}\right) = -117^\circ \rightarrow \omega = 2.0381\text{rad/s}.$$

Da bi izračunata frekvencija bila i presječna potrebno je u otvoreni krug dodati pojačanje

$$K = |G(j2.0381)|^{-1} = \frac{2.0381\sqrt{2.0381^2 + 4^2}}{2} = 4.5748.$$

II. Proračun korištenjem aproksimacije fazno-frekvencijske karakteristike:

$$-117^\circ = -90 - 45(\log 10(\omega) - \log 10(0.4)) \rightarrow \omega = 1.5924\text{rad/s}.$$

U otvoreni krug je potrebno dodati pojačanje

$$K = |G(j1.59)|^{-1} = \frac{1.59\sqrt{1.59^2 + 4^2}}{2} = 3.428.$$

d)

$$R(s) = \frac{0.2}{s} + \frac{1}{s^2}e^{-2s} + \frac{2}{s}e^{-2s},$$

$$G_o(s) = K_p G_p = \frac{3}{s(s+4)},$$

$$E(s) = \frac{1}{1 + G_o(s)}R(s) = \frac{s^2 + 4s}{s^2 + 4s + 3}\left(\frac{0.2}{s} + \frac{1}{s^2}e^{-2s}\right),$$

$$e(\infty) = \lim_{s\to 0} sE(s) = \frac{4}{3}.$$

Rješenje 6.28

a)

$$G_o(j\omega) = \frac{20K}{\omega(\omega^2 + 16)}[-5\omega + j(\omega^2 - 4)]$$

Nyquistova krivulja za $\omega = \infty$ i $\omega = 0$:

$$\lim_{\omega\to\infty} \Re\{G_o(j\omega)\} = 0$$

$$\lim_{\omega\to\infty} \Im\{G_o(j\omega)\} = 0$$

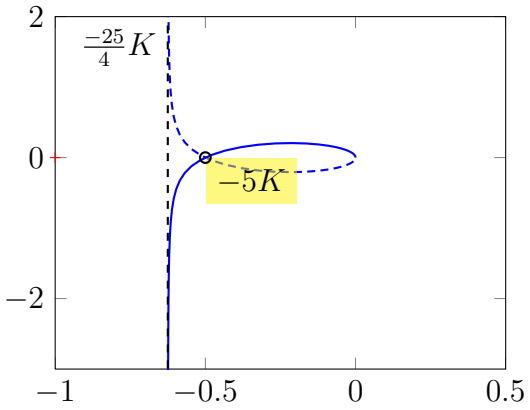
$$\lim_{\omega\to 0} \Re\{G_o(j\omega)\} = -\frac{25}{4}K$$
$$\lim_{\omega\to 0} \Im\{G_o(j\omega)\} = -\infty$$

Presječna točka Nyquistove krivulje s realnom osi:

$$\Im\{G_o(j\omega)\} = 0 \Rightarrow \omega^2 = 4$$
$$\omega = 2 \Rightarrow \Re\{G_o(j\omega)\} = -5K$$

Nyquistov dijagram je prikazan slikom 6.45. Iz njega se može očitati da će sustav biti stabilan za slučaj kada je točka $(-5K, j0)$ desno od (-1,j0), odnosno $0 < 5K < 1$ iz čega slijedi

$$0 < K < 0.2$$



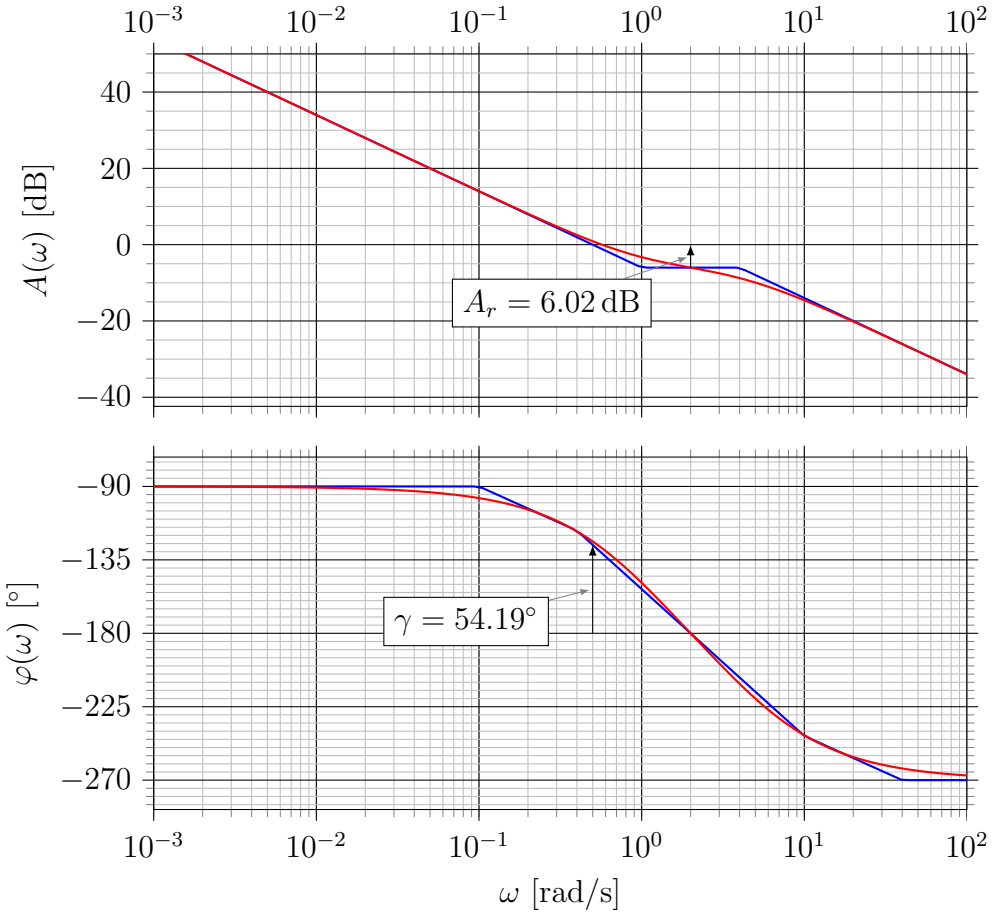
Slika 6.45: Nyquistov dijagram za $K = 0.1$

b) Bodeov dijagram sa označenim amplitudnim i faznim osiguranjem je prikazan slikom 6.46.

Rješenje 6.29

a) Računamo prvo koja je presječna frekvencija ako je fazno osiguranje 60°:

$$arg(G_o) = -90° - arctg(\omega_c T_2) - arctg(\omega_c T_3) = -120°$$
$$\frac{\omega_c(T_2 + T_3)}{1 + \omega_c^2 T_2 T_3} = 0.5774 \;\Rightarrow\; \omega_c = 0.9215$$



Slika 6.46: Bodeov dijagram sa označenim amplitudnim i faznim osiguranjima

Na presječnoj frekvenciji je pojačanje sustava jednako jedan pa iz tog uvjeta računamo iznos vremenske konstante T_1:

$$|G_o(j\omega)| = \frac{1}{T_1 T_2 T_3 \omega_c \sqrt{\omega_c^2 + (\frac{1}{T_2})^2}\sqrt{\omega_c^2 + (\frac{1}{T_3})^2}} = 1$$
$$\Rightarrow\ T_1 = 0.9814$$

b) Računamo presjecišta dijagrama s koordinatnim osima:

$$G_o(j\omega) = \frac{1}{0.54j\omega(1+0.5j\omega)(1+0.1j\omega)} = 1.85\frac{-0.6\omega^2 - j\omega(1-0.05\omega^2)}{0.36\omega^4 + \omega^2(1-0.05\omega^2)}$$

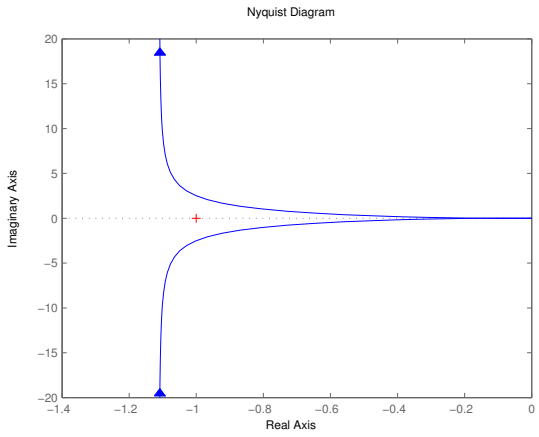
$$Re = 0 \;\Rightarrow \frac{-0.6\omega^2}{0.36\omega^4 + \omega^2(1-0.05\omega^2)} = 0 \text{ nikada ne siječe imaginarnu os}$$

$$Im = 0 \;\Rightarrow\; -\omega(1-0.05\omega^2) = 0 \;\Rightarrow\; \omega = \sqrt{20} \Rightarrow Re = -0.154$$

Zatim računamo početnu i konačnu točku:

$$\omega = 0 \;\rightarrow\; Re = -1.11\,,\; Im = \infty$$
$$\omega = \infty \;\rightarrow\; Re = 0\,,\; Im = 0$$

Nyquistov dijagram prikazan je na slikama 6.47 i 6.48.



Slika 6.47: Područje stabilnosti

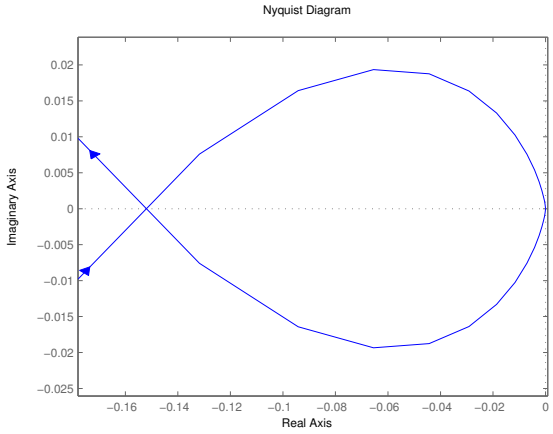
c) Označiti amplitudno i fazno osiguranje na Nyquistovom dijagramu.

Rješenje 6.30

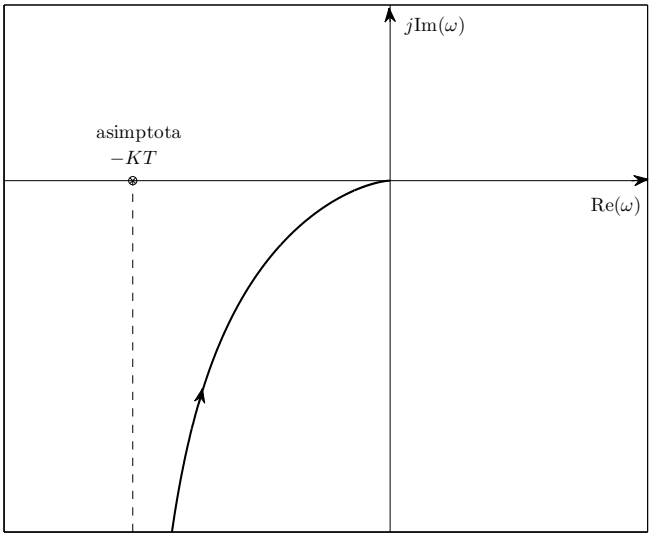
a) Nyquistov dijagram prikazan je na slici 6.49.

b) Bodéov dijagram prikazan je na slici 6.50.

c) Zatvoreni krug s $K > 0$ ne može se dovesti na rub stabilnosti jer faza doseže -180° tek u beskonačnosti. Amplitudno osiguranje je beskonačno pa bi tek za $K \to \infty$ sustav došao na rub stabilnosti.



Slika 6.48: Područje stabilnosti

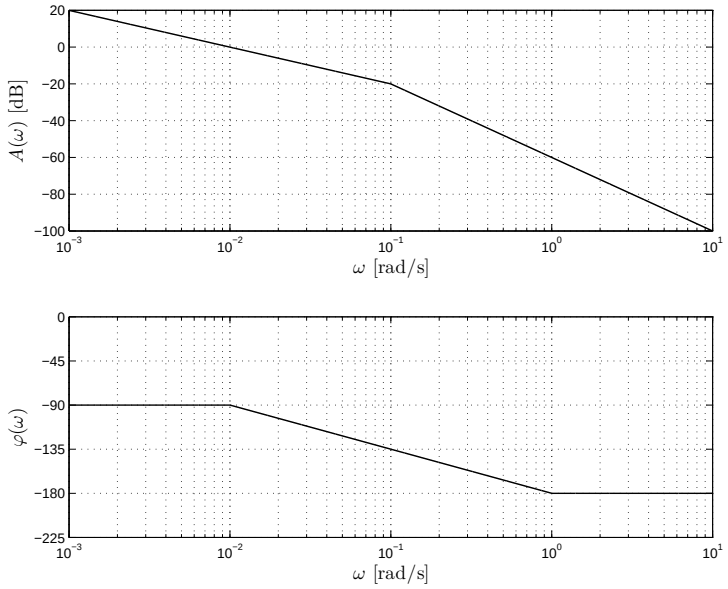


Slika 6.49: Nyquistov dijagram.

Rješenje 6.31

a) Slika 6.51 (dovoljno je crtati samo za pozitivne frekvencije).

Presječne točke očitavaju se direktno iz Bodeovog dijagrama, na frekvencijama za koje faza iznosi $0°$, $-90°$, $-180°$ i $-270°$: (1, 0), (2.72, 0), (0,



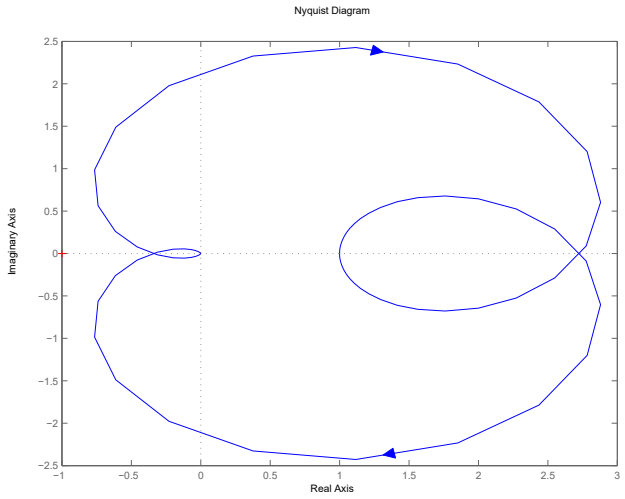
Slika 6.50: Bodéov dijagram.

-2.11), (-0.34, 0), (0,0).

b) U Bodeov dijagram sa slike 6.19 treba uključiti i utjecaj integratora. Integrator spušta cijelu faznu karakteristiku za 90° pa za stabilnost treba promatrati frekvenciju gdje dijagram sa slike 6.19 poprima vrijednost −90°. Iz Bodeovog dijagrama ili iz podzadatka a) očitavamo da uz fazu od −90°, amplituda iznosi 2.11. Potrebno je uračunati djelovanje integratora i na amplitudu te ukupna amplituda na spomenutoj frekvenciji iznosi $\frac{2.15}{12T_I} = 0.176\frac{1}{T_I}$. Sustav je stabilan dok god je ta amplituda manja od 1 pa je konačno rješenje:

$$T_I > 0.176$$

c) Amplituda pada sa 60 dB/dek na visokim frekvencijama, što znači da je broj polova za tri veći od broja nula – ukupno postoji samo jedna nula. Pošto je proces stabilan, a amplituda konstantna na niskim frekvencijama, znamo da su svi polovi u lijevoj poluravnini (polovi ukupno spuštaju fazu za $4 \cdot 90° = 360°$). Faza ukupno pada za $3 \cdot 90° = 270°$, što znači da se nula ne nalazi u desnoj poluravnini. Pošto je amplituda konstantna na niskim frekvencijama (odnosno, faza je jednaka 0° na frekvenciji 0 rad/s), nula se ne nalazi u ishodištu. Pošto postoji samo jedna nula, ona mora biti realna.



Slika 6.51: Nyquistov dijagram.

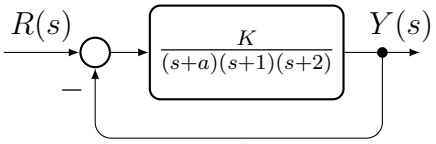
Zaključno: Postoji točno jedna realna nula u lijevoj poluravnini (odnosno nalazi se na realnoj osi, lijevo od ishodišta).

Poglavlje 7

Polovi, nule i vremenski odzivi

Zadatak 7.1

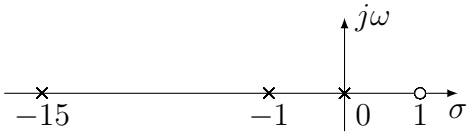
Zatvoreni sustav upravljanja prikazan je slikom 7.1. Odredite položaj polova



Slika 7.1: Zatvoreni sustav upravljanja.

zatvorenog sustava upravljanja i skicirajte ih u kompleksnoj s-ravnini uz vrijednosti parametara $a = -\frac{2}{3}$ i $K = \frac{4}{3}$.

Zadatak 7.2

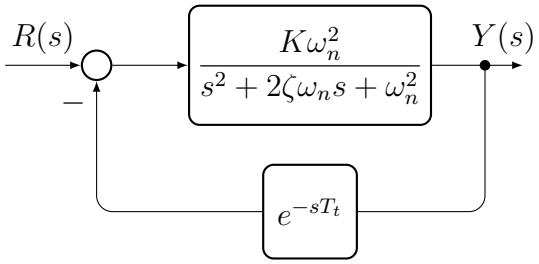


Slika 7.2: Polovi i nule procesa.

Na slici 7.2 dani su polovi i nule procesa u kompleksnoj s–ravnini. Prijelazna funkcija u ustaljenom stanju ima nagib $\frac{1}{5}$. Odredite prijenosnu funkciju procesa. *Napomena*: jednostruki polovi su označeni križićima, a jednostruke nule kružićima.

Zadatak 7.3

Zadan je sustav upravljanja prikazan blokovskom shemom na slici 7.3. Polovi prijenosne funkcije u direktnoj grani su $s_{p1,2} = -1 \pm j$. Skicirajte prijelaznu

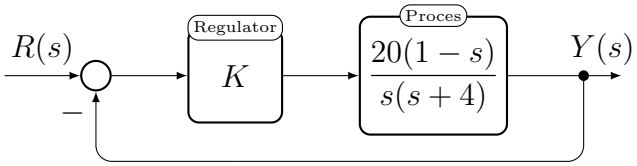


Slika 7.3: Zatvoreni sustav upravljanja.

funkciju otvorenog sustava $G_o(s)$ uz točno određeno nadvišenje, vrijeme prvog maksimuma i vrijeme smirivanja. Zadano je $T_t = 2$ s i $K = 1$.

Zadatak 7.4

Zatvoreni regulacijski krug prikazan je slikom 7.4. Za iznos $K = 0.1$ kva-



Slika 7.4: Zatvoreni regulacijski krug

litativno skicirajte prijelaznu funkciju zatvorenog regulacijskog kruga (nije potrebno izračunavati vremenske pokazatelje kvalitete).

Zadatak 7.5

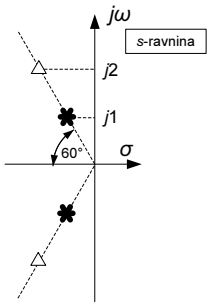
Zadana je prijenosna funkcija otvorenog regulacijskog kruga:

$$G_o(s) = K_o \cdot \frac{1 - 0.1s}{(1 + 2s)(1 + 0.02s)}.$$

Potrebno je skicirati prijelazne funkcije zatvorenog sustava za $K_o = 5$ i za $K_o = 15$ na istoj slici (nije potrebno izračunavati vremenske pokazatelje kvalitete, nego samo vrijednosti u ustaljenom stanju i voditi računa o podbačajima, prebačajima i oscilacijama).

Zadatak 7.6

Na slici 7.5 zvjezdicama su prikazani polovi sustava $G_1(s)$ a trokutićima polovi sustava $G_2(s)$. Kvalitativno skicirajte prijelazne funkcije sustava $G_1(s)$ i $G_2(s)$.



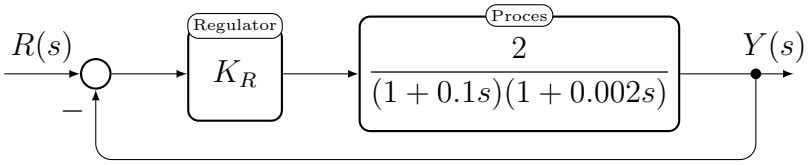
Slika 7.5: Polovi sustava u kompleksnoj s-ravnini.

Zadatak 7.7

Za sustav $G(s) = \frac{32}{s^2+2s+16}$ odredite vremenske pokazatelje kvalitete: vrijeme porasta t_r, vrijeme prvog maksimuma t_m, maksimalno nadvišenje σ_m i vrijeme smirivanja $t_{1\%}$.

Zadatak 7.8

Zatvoreni sustav upravljanja prikazan je slikom 7.6. Prijelazna funkcija $h_r(t)$



Slika 7.6: Zatvoreni sustav upravljanja.

zatvorenog sustava upravljanja u ustaljenom stanju ima vrijednost $h_r(\infty) = 0.98$. U tom slučaju potrebno je:

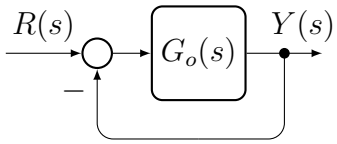
a) Odrediti pojačanje regulatora K_R.

b) Odrediti maksimalnu vrijednost prijelazne funkcije $h_{r,m}(t_m)$ te vrijeme prvog maksimuma t_m na temelju relacija za sustav drugog reda.

c) Skicirati polove zatvorenog sustava u kompleksnoj s ravnini te naznačiti vezu između položaja polova i relativnog koeficijenta prigušenja ζ, odnosno prirodne frekvencije neprigušenih oscilacija ω_n.

Zadatak 7.9

Zatvoreni sustav upravljanja zadan je slikom 7.7. Prijelazna funkcija $h_r(t)$



Slika 7.7: Zatvoreni sustav upravljanja.

zatvorenog sustava upravljanja ima oblik prijelazne funkcije PT_2S člana bez konačnih nula, pri čemu je $h_r(\infty) = 1$, nadvišenje iznosi $\sigma_m = 8\%$, a vrijeme prvog maksimuma $t_m = 3$ s. Potrebno je:

a) Odrediti polove zatvorenog sustava upravljanja i prikazati ih u kompleksnoj ravnini.

b) Odrediti prijenosnu funkciju otvorenog kruga $G_o(s)$.

Zadatak 7.10

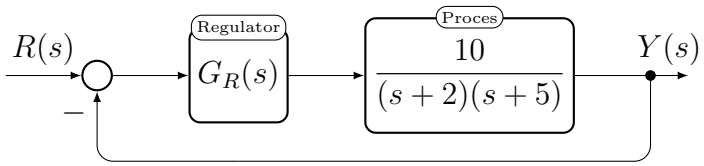
Zadana je prijenosna funkcija otvorenog kruga:

$$G_o(s) = \frac{K}{s(1+Ts)}.$$

Za zadanu vremensku konstantu $T = 10$ s potrebno je odrediti koeficijent pojačanja K tako da nadvišenje prijelazne funkcije σ_m zatvorenog kruga s jediničnom negativnom povratnom vezom iznosi točno 10%.

Zadatak 7.11

Zatvoreni sustav upravljanja prikazan je slikom 7.8.



Slika 7.8: Sustav upravljanja s općenitim regulatorom.

Neka regulator ima oblik P člana, $G_R(s) = K_R$. Odredite pojačanje K_R tako da vrijeme prvog maksimuma prijelazne funkcije zatvorenog kruga bude $t_m = 0.7s$.

Zadatak 7.12

Prijenosna funkcija $G_1(s)$ ima kompleksno–konjugirani par polova $s_{1,2} = -\sigma_1 \pm j\omega_1$, $\sigma_1 > 0$. Naznačite u kompleksnoj s–ravnini položaj polova prijenosne $G_2(s)$ čija prijelazna funkcija ima jednako nadvišenje i dvostruko veće vrijeme porasta od prijelazne funkcije od $G_1(s)$.

Zadatak 7.13

Za linearni kontinuirani sustav drugog reda opisan prijenosnom funkcijom $G(s)$ bez konačnih nula zadani su sljedeći pokazatelji kvalitete:

$$\begin{aligned} t_m &= 3.14 \text{ s}, \\ \sigma_m &= 16.3\%. \end{aligned}$$

a) Odredite i skicirajte položaj polova prijenosne funkcije $G(s)$ u s-ravnini te odredite prijenosnu funkciju $G(s)$ uz dodatni zahtjev da statičko pojačanje sustava iznosi 1.

b) Ako je $G(s)$ prijenosna funkcija zatvorenog kruga s jediničnom povratnom vezom, odredite i skicirajte položaj polova prijenosne funkcije otvorenog kruga $G_o(s)$. Je li otvoreni krug stabilan?

Zadatak 7.14

Koristeći relacije koje vrijede za sustav II reda (bez konačnih nula) potrebno je skicirati područje polova u kompleksnoj s-ravnini da bi se istovremeno zadovoljili sljedeći zahtjevi:

- vrijeme prvog maksimuma $t_m < 1\,\text{s}$ i
- nadvišenje $\sigma_m < 10\,\%$.

Zadatak 7.15

Koristeći relacije koje vrijede za sustav II reda (bez konačnih nula) potrebno je skicirati područje polova u kompleksnoj s-ravnini da bi se istovremeno zadovoljili sljedeći zahtjevi:

- vrijeme smirivanja $t_{1\%} < 2$ s,
- vrijeme porasta $t_r < 0.5$ s i
- nadvišenje $\sigma_m < 16.3\%$.

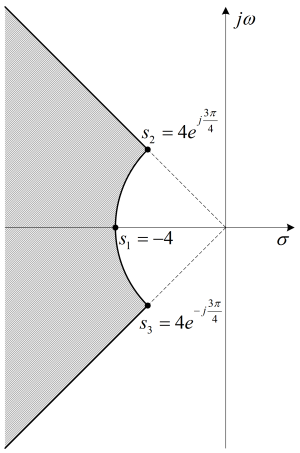
Zadatak 7.16

Koristeći relacije koje vrijede za sustav drugoga reda (bez konačnih nula) potrebno je skicirati područje polova u kompleksnoj s-ravnini da bi se istovremeno zadovoljili sljedeći zahtjevi:

- vrijeme prvog maksimuma $t_m < 1\,\mathrm{s}$ i
- vrijeme smirivanja $t_{1\%} < 2\,\mathrm{s}$.

Zadatak 7.17

Odredite pokazatelje kvalitete prijelazne funkcije za sustav drugog reda bez konačnih nula, za koji je dano područje polova u s-ravnini prema slici 7.9.



Slika 7.9: Područje polova sustava drugog reda bez konačnih nula.

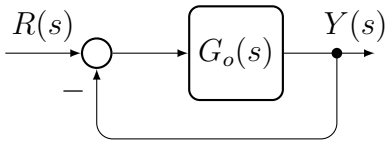
Zadatak 7.18

Snimanjem prijelazne funkcije zatvorenog kruga (slika 7.10) s jednim parom *konjugirano kompleksnih polova* bez konačnih nula utvrđeni su sljedeći iznosi karakterističnih veličina:

$$t_m = 1.2[\mathrm{s}],\ \sigma_m = 20[\%], h(\infty) = 0.9,$$

pri čemu je t_m vrijeme prvog maksimuma, a σ_m relativni iznos nadvišenja prijelazne funkcije $h(t)$.

a) Skicirajte prijelaznu funkciju *zatvorenog kruga* upravljanja i pritom na grafu označite karakteristične veličine prijelazne funkcije: (*i*) vrijeme prvog maksimuma, (*ii*) relativni iznos nadvišenja, (*iii*) vrijeme smirivanja,



Slika 7.10: Zatvoreni krug upravljanja.

(*iv*) vrijeme porasta i (*v*) iznos stacionarnog stanja. Pritom izračunajte karakteristične veličine koje nisu zadane zadatkom.

b) Izračunajte i označite položaj para polova prijenosne funkcije *otvorenog kruga* $G_o(s)$ u kompleksnoj ravnini.

c) Neka je prijenosna funkcija zatvorenog kruga $G_r(s) = \frac{1}{s^2+2s+5}$. Skicirajte područje polova familije prijenosnih funkcija zatvorenog kruga s manjim iznosom nadvišenja i manjim iznosom vremena prvog maksimuma prijelazne funkcije u odnosu na $G_r(s)$.

7.1 Rješenja

Rješenje 7.1

Karakteristična jednadžba sustava upravljanja:

$$1 + G_o(s) = 1 + \frac{K}{(s+a)(s+1)(s+2)} = 0$$
$$s^3 + (3+a)s^2 + (2+3a)s + 2a + K = 0$$

Uvrštenjem $K = \frac{4}{3}$ i $a = -\frac{2}{3}$ u karakterističnu jednadžbu slijede polovi zatvorenog kruga.

$$s_{1,2} = 0,\ s_3 = -\frac{7}{3}$$

Rješenje 7.2

Prema zadanim polovima i nulama, prijenosna funkcija procesa je oblika

$$G_p(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = K\frac{s-1}{s(s+1)(s+15)}\ .$$

Nagib prijelazne funkcije u ustaljenom stanju predstavlja iznos derivacije u ustaljenom stanju. Operacija deriviranja u vremenskom području prelazi u množenje s kompleksnom varijablom s u Laplaceovom području:

$$\mathcal{L}\{h'(t)\} = \overbrace{sY(s)}^{\text{derivacija}} = sG_p(s)\underbrace{\frac{1}{s}}_{U(s)} = G_p(s)\ .$$

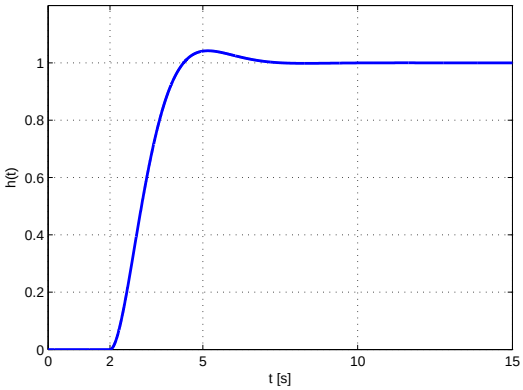
Uvrštavanjem u teorem o konačnoj vrijednosti dobivamo

$$\lim_{t\to\infty} h'(t) = \lim_{s\to 0} sG_p(s) = \frac{1}{5}$$
$$\lim_{s\to 0} sK\frac{s-1}{s(s+1)(s+15)} = \frac{1}{5}$$
$$K\frac{-1}{1\cdot 15} = \frac{1}{5}$$
$$K = -3$$

Rješenje 7.3

Prijenosna funkcija sustava u direktnoj grani:

$$\begin{aligned}\zeta &= 0.71\\ \omega_n &= 1.41\\ \sigma_m[\%] &= 100e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} = 4.21\%\\ t_m &= \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}} + T_t = 5.164\,\mathrm{s}\\ t_{1\%} &= \frac{4.6}{\zeta\omega_n} + T_t = 6.6\,\mathrm{s}\end{aligned}$$



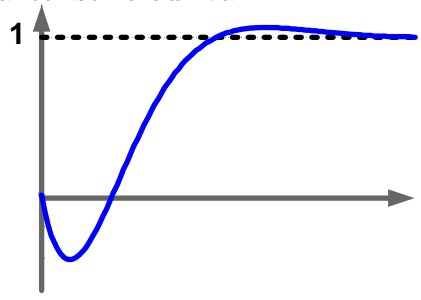
Slika 7.11: Prijelazna funkcija otvorenog sustava.

Rješenje 7.4

Prijenosna funkcija zatvorenog kruga:

$$G_{cl}(s) = \frac{G_o(s)}{1+G_o(s)} = \frac{2(1-s)}{s^2+2s+2}$$

Karakteristike odziva:



- nadvišenje jer zatvoreni krug ima kompleksne polove
- podbačaj jer zatvoreni krug ima neminimalno faznu nulu
- jedinično pojačanje

Rješenje 7.5

Za skicu odziva računaju se vrijednosti u stacionarnom stanju prema pojačanju zatvorenog kruga:

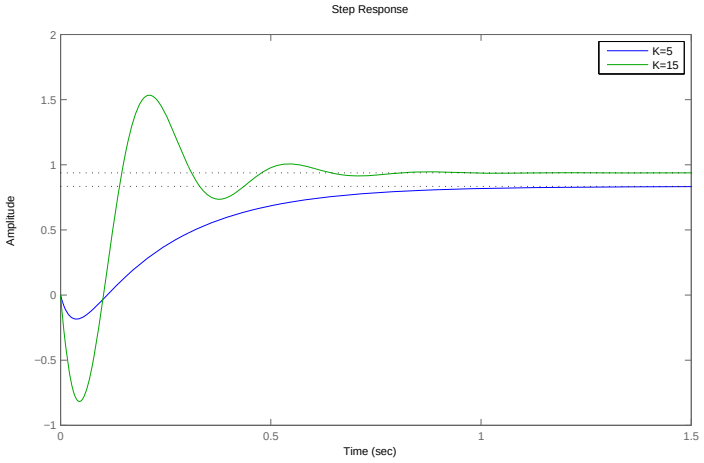
$$y(\infty) = \frac{K}{1+K}$$

te se dobiju vrijednosti $\frac{5}{6}$ za $K = 5$ i $\frac{15}{16}$ za $K = 15$.

Prijenosne funkcije zatvorenog kruga za $K = 5$ i $K = 15$:

$$G_{z1}(s) = \frac{5}{6} \cdot \frac{1 - 0.1s}{(1 + 0.22351s)(1 + 0.029828s)}$$
$$G_{z2}(s) = \frac{15}{16} \cdot \frac{1 - 0.1s}{(1 + (0.01625 + 0.047286j)s)(1 + (0.01625 - 0.047286j)s)}$$

Obje prijenosne funkcije imaju nulu u desnoj poluravnini pa će i obje prijelazne funkcije imati podbačaj. Polovi prijenosne funkcije G_{z1} su realni pa pri dolasku u ustaljeno stanje nema oscilacija, dok su polovi prijenosne funkcije G_{z2} konjugirano-kompleksni pa prijelazna funkcija ima i prebačaj i oscilatornost pri dolasku u ustaljeno stanje (vidi sliku 7.12).



Slika 7.12: Prijelazne funkcije zatvorenog sustava za $K_o = 5$ i $K_o = 15$.

Rješenje 7.6

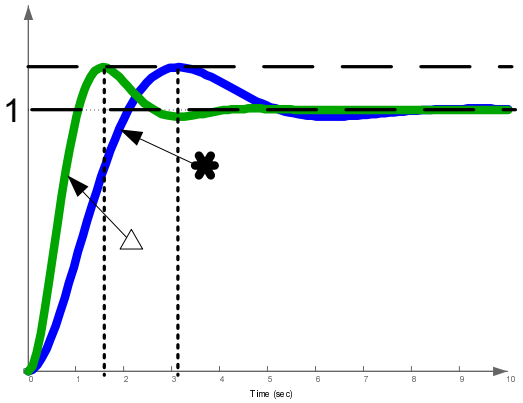
Neka su prijenosne funkcije dvaju sustava kako slijedi:

$$G_1(s) = \frac{\omega_{n*}^2}{s^2 + 2\zeta_* \omega_{n*} s + \omega_{n*}^2}$$
$$G_2(s) = \frac{\omega_{n\triangle}^2}{s^2 + 2\zeta_\triangle \omega_{n\triangle} s + \omega_{n\triangle}^2}$$

Iz položaja polova može se zaključiti o vremenskim pokazateljima:

$$\begin{aligned} \zeta_* = \zeta_\triangle &\longrightarrow \sigma_{m*} = \sigma_{m\triangle} \\ \zeta_* = \zeta_\triangle \text{ i } \omega_{n*} < \omega_{n\triangle} &\longrightarrow t_{m*} > t_{m\triangle} \\ \zeta_* = \zeta_\triangle \text{ i } \omega_{n*} < \omega_{n\triangle} &\longrightarrow t_{1\%*} > t_{1\%\triangle} \\ \omega_{n*} < \omega_{n\triangle} &\longrightarrow t_{r*} > t_{r\triangle} \end{aligned}$$

Na slici 7.13 prikazani su odzivi oba sustava.



Slika 7.13: Prijelazne funkcije sustava $G_1(s)$ i $G_2(s)$.

Rješenje 7.7

Prvo treba odrediti karakteristične parametre u frekvencijskoj domeni. Iz

$$G(s) = \frac{32}{s^2 + 2s + 16} = K \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

slijedi:

$$\begin{aligned} K &= 2 \\ \zeta &= 0.25 \\ \omega_n &= 4. \end{aligned}$$

Vremenski pokazatelji:

$$t_m = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}} = \frac{\pi}{\sqrt{15}} = 0.81\,\mathrm{s}$$
$$\sigma_m = 100e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} = 100e^{-\frac{\pi}{\sqrt{15}}} = 44.43\,\%$$
$$t_{1\%} = \frac{4.6}{\zeta\omega_n} = 4.6\,\mathrm{s}$$
$$t_r = \frac{1.8}{\omega_n} = 0.45\,\mathrm{s}$$

Rješenje 7.8

a) Prijenosna funkcija zatvorenog sustava glasi:

$$G_z(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{K_R \cdot \frac{2}{(1+0.1s)(1+0.002s)}}{1 + K_R \cdot \frac{2}{(1+0.1s)(1+0.002s)}} =$$
$$= \frac{2K_R}{1 + 2K_R + 0.102s + 0.0002s^2} =$$
$$= \frac{\frac{2K_R}{1+2K_R}}{1 + \frac{0.102}{1+2K_R}s + \frac{0.0002}{1+2K_R}s^2}$$

Pojačanje regulatora lako se odredi iz teorema o konačnoj vrijednosti:

$$h_r(\infty) = \lim_{s\to 0} s \cdot G_z(s) \cdot U(s) = \lim_{s\to 0} s \cdot G_z(s) \cdot \frac{1}{s} = \frac{2K_R}{1+2K_R}$$
$$\frac{2K_R}{1+2K_R} = 0.98 \Rightarrow K_R = 24.5$$

b) Prijenosna funkcija s uvrštenim pojačanjem:

$$G_z(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{0.98}{1 + 0.00204s + 4\cdot 10^{-6}s^2}$$
$$= \frac{K}{1 + 2\zeta T_n s + T_n^2 s^2} = \frac{K\omega_n^2}{\omega_n^2 + 2\zeta\omega_n s + s^2}$$

Iz prethodnog izraza slijedi da je:

$$T_n = \sqrt{4\cdot 10^{-6}} = 0.002\ \mathrm{s}$$
$$\omega_n = \frac{1}{T_n} = 500\ \mathrm{rad/s}$$
$$2\zeta T_n = 0.00204 \Rightarrow \zeta = 0.51$$

Korištenjem relacija za sustav drugog reda dobiva se:

$$\sigma_m\,[\%] = 100 \cdot e^{-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}} = 15.526\%$$
$$h_{r,m} = h_r\,(\infty) \cdot \left(1 + \frac{\sigma_m}{100}\right) = 0.98 \cdot 1.15526 = 1.1322$$
$$t_m = \frac{\pi T_n}{\sqrt{1-\zeta^2}} = 0.0073045 \text{ s}$$

c) Polovi sustava su:

$$s_{1,2} = -255 \pm j430.09$$

Relativni koeficijent prigušenja ζ je kosinus kuta kojeg polovi zatvaraju s negativnog realnom osi, a prirodna frekvencija neprigušenih oscilacija ω_n je udaljenost polova od ishodišta:

$$\zeta = \cos\left(\text{arctg}\,\frac{430.09}{255}\right) = 0.51$$
$$\omega_n = \sqrt{255^2 + 430.09^2} = 500 \text{ rad/s}$$

Rješenje 7.9

a)

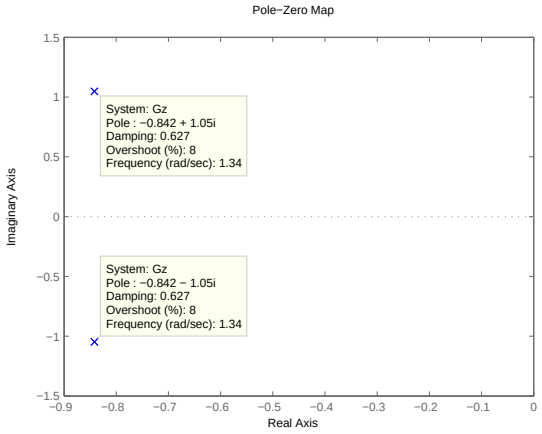
$$\sigma_m\% = 100 \cdot e^{-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \Rightarrow \zeta = 0.6266$$
$$t_m = \frac{\pi}{\omega\sqrt{1-\zeta^2}} \Rightarrow \omega_n = 1.3437$$

Polovi zatvorenog sustava upravljanja su:

$$s_{p_{1,2}} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$
$$s_{p_{1,2}} = -0.8419 \pm j1.0472$$

b) Prijenosna funkcija zatvorenog kruga:

$$G_z(s) = \frac{1}{\frac{1}{\omega_n^2}s^2 + \frac{2\zeta}{\omega_n}s + 1}$$
$$G_z(s) = \frac{1}{0.5539s^2 + 0.9326s + 1}$$



Slika 7.14: Polovi zatvorenog sustava upravljanja.

Prijenosna funkcija otvorenog kruga:

$$G_o(s) = \frac{G_z}{1 - G_z} = \frac{1}{\frac{1}{\omega_n^2}s^2 + \frac{2\zeta}{\omega_n}s} = \frac{1}{0.5539s^2 + 0.9326s}$$

Rješenje 7.10

Prijenosna funkcija zatvorenog kruga:

$$G\left(s\right) = \frac{G_o\left(s\right)}{1 + G_o\left(s\right)} = \frac{0.1K}{s^2 + 0.1s + 0.1K}$$

$$\left.\begin{array}{l} \omega_n^2 = 0.1K \\ 2\zeta\omega_n = 0.1 \end{array}\right\} \Rightarrow K = \frac{0.025}{\zeta^2}$$

$$\sigma_m = 100e^{-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \Rightarrow \ldots \Rightarrow \zeta = \frac{\ln\left(\frac{100}{\sigma_m}\right)}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2\left(\frac{100}{\sigma_m}\right)}} = 0.5912$$

$$K = \frac{0.025}{\zeta^2} = 0.0715$$

Rješenje 7.11

Prijenosna funkcija zatvorenog kruga je:

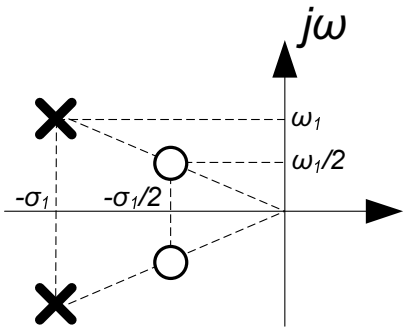
$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{K_R G_p(s)}{1 + K_R G_p(s)} \\ &= \frac{10K_R}{s^2 + 7s + 10(K_R + 1)} \end{aligned}$$

Vrijeme prvog maksimuma dano je s $t_m = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}$ gdje je $\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$ apsolutna vrijednost imaginarne komponente kompleksno konjugiranog para polova sustava drugog reda, što možemo izračunati direktno iz karakterističnog polinoma.

$$\begin{aligned} \omega_n\sqrt{1-\zeta^2} &= \frac{\pi}{t_m} \\ \frac{\sqrt{40(K_R+1) - 7^2}}{2} &= \frac{\pi}{t_m} \\ K_R &= \frac{1}{10}\left(\frac{\pi}{t_m}\right)^2 + \frac{9}{40} \approx 2.2392 \end{aligned}$$

Rješenje 7.12

Konstantno nadvišenje znači da se polovi nalaze na istom pravcu koji prolazi kroz ishodište, a konstantno vrijeme porasta $t_r = \frac{1.8}{\omega_n}$ znači da su polovi na kružnici konstantnog radijusa sa središtem u ishodištu. Ako se vrijeme porasta poveća dvostruko, kružnica će imati dvostruko manji radijus. Polovi sustava $G_2(s)$ prikazani su kružićima na slici 7.15.



Slika 7.15: Prikaz polova sustava $G_1(s)$ i $G_2(s)$ u kompleksnoj s-ravnini.

Rješenje 7.13

a)

$$\sigma_m = \mathrm{e}^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \longrightarrow \zeta = 0.5$$
$$t_m = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}} \longrightarrow \omega_p = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2} = 1$$
$$\longrightarrow \omega_n = \frac{2\sqrt{3}}{3},\ \omega_n\zeta = \frac{\sqrt{3}}{3}$$
$$G(s) = \frac{\frac{4}{3}}{s^2 + \frac{2\sqrt{3}}{3}s + \frac{4}{3}}$$

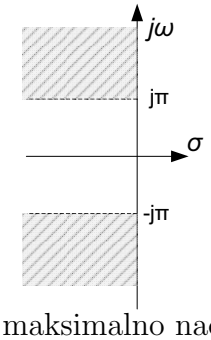
b)

$$G_o = \frac{\frac{4}{3}}{s(s + \frac{2\sqrt{3}}{3})}$$

Rub stabilnosti.

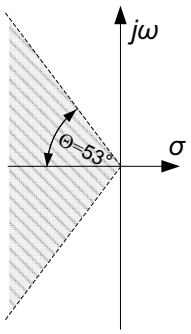
Rješenje 7.14

Za vrijeme prvog maksimuma vrijedi:



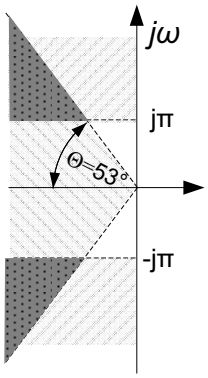
$$t_m = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}} < 1$$
$$\Longrightarrow \omega_n\sqrt{1-\zeta^2} > \pi$$

Za maksimalno nadvišenje vrijedi:



$$\sigma_m = 100e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$$
$$\ln\frac{100}{\sigma_m} = \frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}$$
$$\zeta = \frac{\ln\frac{100}{\sigma_m}}{\sqrt{\pi^2+\ln^2\frac{100}{\sigma_m}}}$$
$$\zeta = \frac{\ln 10}{\sqrt{\pi^2+\ln^2 10}} = 0.5912$$
$$|\Theta| = \arccos\zeta < 53°$$

Presjekom područja dobivenih za zahtjeve na vrijeme prvog maksimuma i na maksimalno nadvišenje dobije se područje u kojem su zadovoljena oba zahtjeva (vidi sliku 7.16).

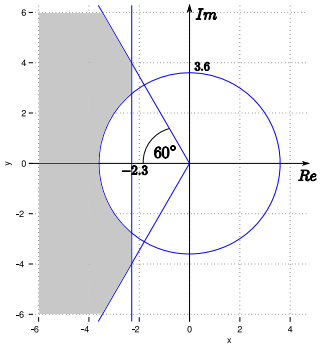


Slika 7.16: Područje polova u kompleksnoj s-ravnini.

Rješenje 7.15

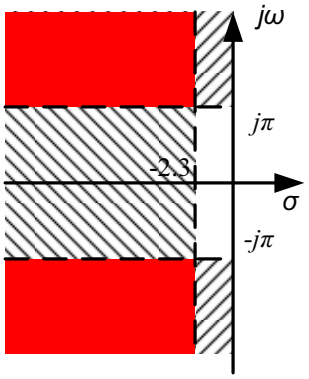
$$t_{1\%} = \frac{4.6}{\zeta\omega_n} < 2 \Rightarrow \zeta\omega_n > 2.3$$
$$t_r = \frac{1.8}{\omega_n} < 0.5 \Rightarrow \omega_n > 3.6$$
$$\sigma_m = 100\mathrm{e}^{\frac{-\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} < 16.3 \Rightarrow \Theta < \arccos\frac{\ln\frac{100}{16.3}}{\sqrt{\pi^2+\ln^2\frac{100}{16.3}}} = 1.047 \approx \frac{\pi}{3}$$

Rezultantno područje prikazano je na slici 7.17.



Slika 7.17: Područje traženih zahtjeva.

Rješenje 7.16



$$t_m = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}} < 1 \Rightarrow \omega_n\sqrt{1-\zeta^2} > \pi$$

$$t_{1\%} = \frac{4.6}{\zeta\omega_n} < 2 \Rightarrow \zeta\omega_n > 2.3$$

Rješenje 7.17

Iz slike 7.9 se očitava $\omega_n > 4$ s^{-1}, te kut s negativnom realnom osi $|\alpha| < \frac{\pi}{4} = 45°$. Relativni koeficijent prigušenja je jednak $\zeta = \cos(\alpha) > \frac{\sqrt{2}}{2}$. Konačno, veza s vremenskim područjem:

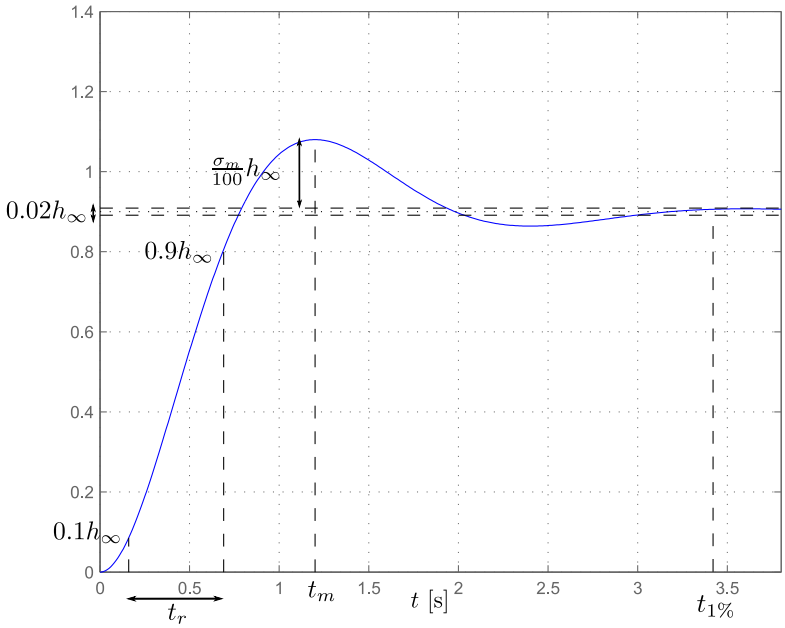
$$t_r < \frac{1.8}{\omega_n} = \frac{1.8}{4} = 0.45 \text{ s.}$$

$$\sigma_m < 100e^{-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}} = 4.32\%.$$

Rješenje 7.18

a) Iz zadanih σ_m i t_m najprije se odrede relativni koeficijent prigušenja ζ i prirodna frekvencija neprigušenih oscilacija ω_n,

$$0.2 = e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \rightarrow \zeta = 0.4559,$$



Slika 7.18: Prijelazna funkcija zatvorenog kruga

$$\omega_n = \frac{\pi}{t_m\sqrt{1-\zeta^2}} = 2.9416 \text{ [rad/s]}.$$

Vrijeme smirivanja iznosi $t_{1\%} = 3.43$ [s], a vrijeme porasta $t_r = 0.6119$ [s].

Prijelazna funkcija zatvorenog kruga s označenim karakterističnim veličinama prikazana je na slici 7.18.

b)

$$G_r(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n 2 - K\omega_n^2},\ G_o(s) = \frac{G_r(s)}{1 - G_r(s)},$$

$$s_{p_{1,2}} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - (1-K)}$$

Uz izračunate ζ i ω_n slijede polovi:

$$s_{p_1} = -2.3071,\ s_{p_2} = -0.3751,$$

koje je potrebno ucrtati u kompleksnoj ravnini.

c) Polovi referentnog sustava su $s_{p_{1,2}} = -1 \pm 2j$. Iz uvjeta za manje vrijeme prvog maksimuma slijedi

$$\frac{\pi}{\omega_n'\sqrt{1-\zeta'^2}} < \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}},$$

$$\omega_n\sqrt{1-\zeta^2} < \omega_n'\sqrt{1-\zeta'^2},$$
$$Im < Im',$$

što predstavlja uvjet da sustav mora imati polove udaljenije od realne osi, u odnosu na konjugirano kompleksni par polova referentnog sustava.

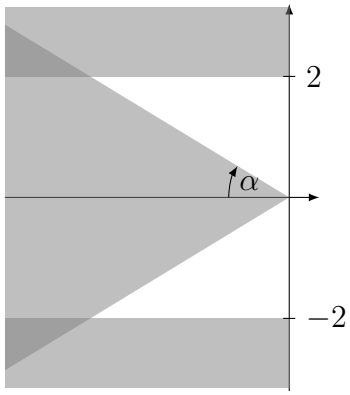
Iz uvjeta za nadvišenje slijedi,

$$\sigma_m' < \sigma_m$$

$$\alpha' < \alpha\,(\alpha = arccos(\zeta))$$

pri čemu je α kut kojeg polovi $s_{p_{1,2}}$ zatvaraju s kompleksnom ravninom.

Područje polova u kompleksnoj ravnini koje zadovoljava dana ograničenja prikazano je na slici 7.19.



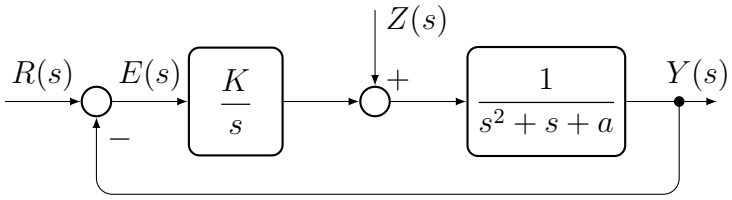
Slika 7.19: Dozvoljeno područje polova u kompleksnoj ravnini s obzirom na zadana ograničenja $t_m' < t_m$ i $\sigma_m' < \sigma_m$

Poglavlje 8

Stabilnost linearnih kontinuiranih sustava upravljanja

Zadatak 8.1

Zatvoreni regulacijski krug prikazan je slikom 8.1.



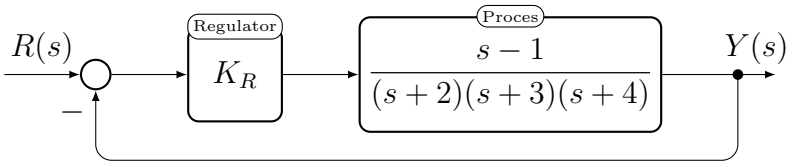
Slika 8.1: Zatvoreni regulacijski krug.

a) Korištenjem Hurwitzovog kriterija odredite područje stabilnosti u K-a ravnini.

b) Koliki je iznos perioda oscilacija sustava na rubu stabilnosti?

Zadatak 8.2

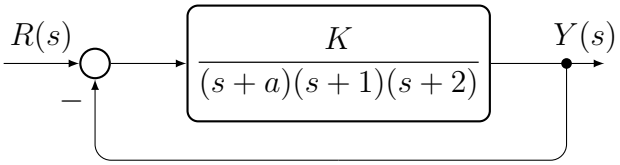
Zadan je sustav upravljanja prikazan blokovskom shemom na slici 8.2. Hurwitzovim kriterijem stabilnosti odredite interval vrijednosti pojačanja K_R za koje je sustav upravljanja stabilan.



Slika 8.2: Zatvoreni sustav upravljanja.

Zadatak 8.3

Zatvoreni sustav upravljanja prikazan je slikom 8.3.



Slika 8.3: Zatvoreni sustav upravljanja.

Odredite i skicirajte područje stabilnosti sustava u a-K ravnini koristeći Hurwitzov kriterij.

Zadatak 8.4

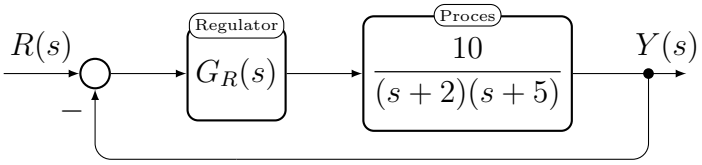
Zadana je prijenosna funkcija otvorenog regulacijskog kruga:

$$G_o(s) = \frac{K}{s(1+10s)(1+2s)}$$

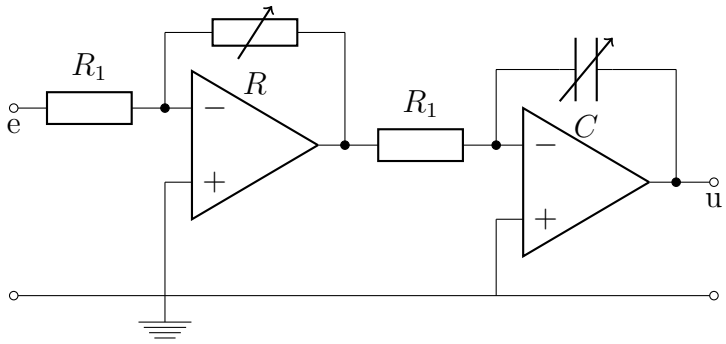
Korištenjem Hurwitzovog kriterija stabilnosti odrediti dozvoljene iznose pojačanja K za koje je zatvoreni sustav s jediničnom negativnom povratnom vezom stabilan.

Zadatak 8.5

Zatvoreni sustav upravljanja prikazan je slikom 8.4.



Slika 8.4: Sustav upravljanja s općenitim regulatorom.



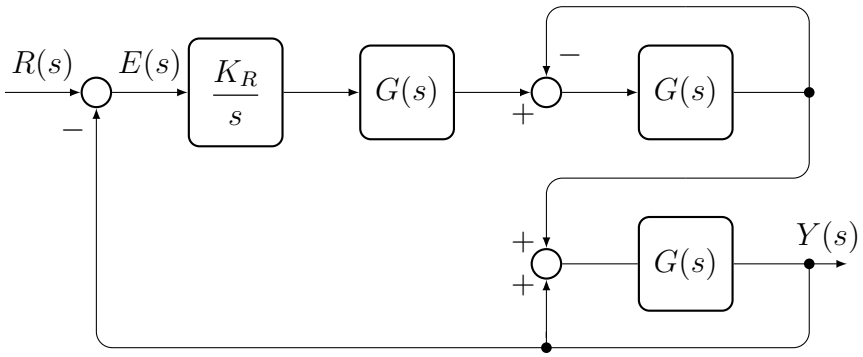
Slika 8.5: Regulator izveden idealnim operacijskim pojačalima.

a) Neka je regulator $G_R(s)$ prikazan slikom 8.5. Odredite prijenosnu funkciju takvog regulatora, uz zadan $R_1 = 100k\Omega$.

b) Primjenom Hurwitzovog kriterija stabilnosti odrediti područje promijenjivih parametara C i R za koje će zatvoreni sustav upravljanja sa slike 8.4 uz regulator određen u a) dijelu zadatka biti stabilan.

Zadatak 8.6

Zadan je sustav upravljanja prikazan blokovskom shemom na slici 8.6. Pri-



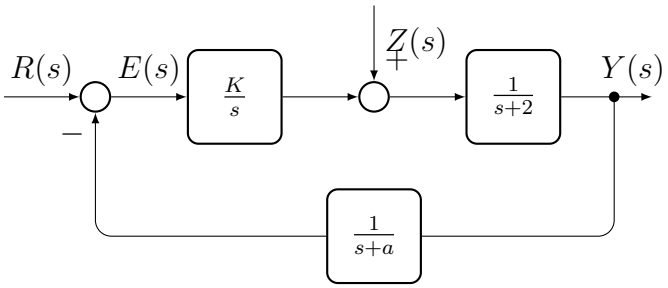
Slika 8.6: Sustav upravljanja.

tom je: $G(s) = \dfrac{1}{s+2}$.

Primjenom algebarskog kriterija stabilnosti odredite interval vrijednosti pojačanja K_R za koji je sustav stabilan.

Zadatak 8.7

Zatvoreni sustav upravljanja prikazan je slikom 8.7.

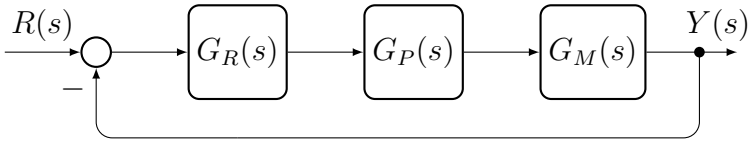


Slika 8.7: Zatvoreni sustav upravljanja.

Korištenjem Hurwitzovog kriterija stabilnosti odredite i skicirajte područje stabilnosti zatvorenog kruga upravljanja u $K - a$ ravnini (K os – apscisa, a os – ordinata).

Zadatak 8.8

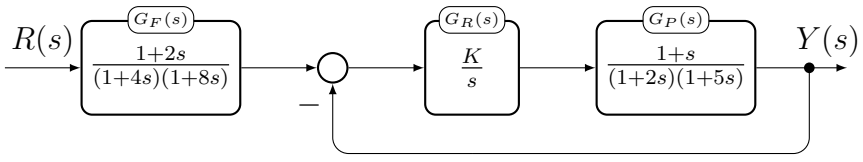
Na slici 8.8 prikazan je zatvoreni krug upravljanja koji se sastoji od regulatora $G_R(s)$, procesa $G_P(s)$, te mjernoga člana $G_M(s)$. Prijenosna funkcija procesa je $G_P(s) = \frac{1}{s^2+2s+2}$.



Slika 8.8: Zatvoreni krug upravljanja.

Neka je $G_M(s) = 1$. Korištenjem Hurwitzovog kriterija odredite za koje vrijednosti parametara K_R i T_I je sustav upravljanja stabilan. Skicirajte dobiveno područje stabilnosti u $K_R - T_I$ ravnini.

Zadatak 8.9



Slika 8.9: Sustav automatskog upravljanja.

Za sustav upravljanja prikazan slikom 8.9, korištenjem Hurwitzovog kriterija stabilnosti, odredite iznose pojačanja regulatora K za koje je sustav

upravljanja stabilan.

8.1 Rješenja

Rješenje 8.1

$$G_o(s) = \frac{K}{s(s^2 + s + a)}$$

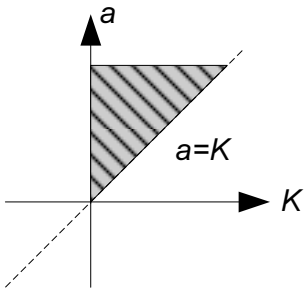
Karakteristična jednadžba se dobije iz $1 + G_o(s) = 0$.

$$P(s) = s^3 + s^2 + as + K$$

a) Hurwitzov kriterij:

- $a_1 > 0 \Rightarrow K > 0$ (I uvjet)
  $a_2 > 0 \Rightarrow a > 0$ (II uvjet)
- $D_1 = a_1 = a > 0$ (isto kao II uvjet)
  $D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & K \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = a - K > 0$ (III uvjet)

Uzimanjem u obzir uvjeta I, II i III dobiva se područje stabilnosti prikazano slikom 8.10.



Slika 8.10: Područje stabilnosti.

b) Rub stabilnosti je ostvaren kada $K = a$. Uvrštavanjem u karakterističnu jednadžbu dobiva se period oscilacija kako slijedi.

$$\begin{aligned} P(s) = s^3 + s^2 + as + a &= (s + 1)(s^2 + a) \\ P(j\omega) &= (j\omega + 1)(-\omega^2 + a) = 0 \\ \omega &= \sqrt{a} \\ T &= \frac{2\pi}{\sqrt{a}} \end{aligned}$$

Rješenje 8.2

Karakteristična jednadžba sustava upravljanja:

$$1 + G_o(s) = 1 + \frac{K_R(s-1)}{(s+2)(s+3)(s+4)} = 0$$
$$s^3 + 9s^2 + (26 + K_R)s + 24 - K_R = 0$$

Nužno je da su svi koeficijenti karakteristične jednadžbe istog predznaka:

$$a_3 = 1 > 0$$
$$a_2 = 9 > 0$$
$$a_1 = 26 + K_R > 0 \Rightarrow K_R > -26$$
$$a_0 = 24 - K_R > 0 \Rightarrow K_R < 24$$

Determinante moraju biti pozitivne:

$$D_1 = a_1 > 0$$
$$D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} > 0$$
$$9(26 + K_R) - 1(24 - K_R) > 0 \Rightarrow K_R > -21$$

Konačno rješenje je:

$$K_R \in \langle -21, 24 \rangle$$

Rješenje 8.3

Karakteristična jednadžba sustava upravljanja:

$$1 + G_o(s) = 1 + \frac{K}{(s+a)(s+1)(s+2)} = 0$$
$$s^3 + (3+a)s^2 + (2+3a)s + 2a + K = 0$$

Nužno je da su svi koeficijenti karakteristične jednadžbe istog predznaka:

$$a_3 = 1 > 0$$
$$a_2 = 3 + a > 0 \Rightarrow a > -3$$
$$a_1 = 2 + 3a > 0 \Rightarrow a > -\frac{2}{3}$$
$$a_0 = 2a + K > 0 \Rightarrow K > -2a$$

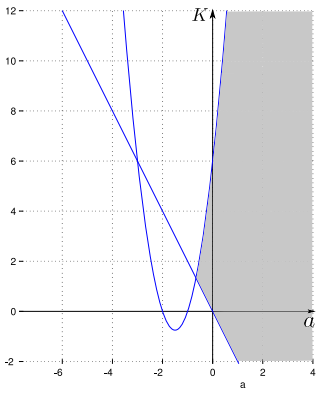
Determinante moraju biti pozitivne:

$$D_1 = a_1 > 0$$
$$D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} > 0$$
$$(2+3a)(3+a) - (2a+K) > 0 \Rightarrow K < 3(a+1)(a+2)$$

Konačno rješenje je određeno područjem:

$$a > -\frac{2}{3}$$
$$K > -2a$$
$$K < 3a^2 + 9a + 6$$

i prikazano na slici 8.11 (sjecište pravca $K = -2a$ i parabole $K = 3a^2+9a+6$ je u točki $-\frac{2}{3}$).



Slika 8.11: Područje stabilnosti.

Rješenje 8.4

Karakteristična jednadžba dobije se iz:

$$1 + G_o(s) = 0$$
$$P(s) = 20s^3 + 12s^2 + s + K = 0$$

Prvi uvjet je $K > 0$, a determinante prema Hurwitzu su:

$$D_1 = 1 > 0$$
$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & K \\ 20 & 12 \end{vmatrix} = 12 - 20K > 0 \Rightarrow K < \frac{3}{5}$$

Ukupno je, dakle:

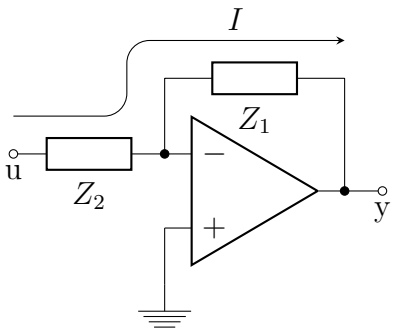
$$0 < K < \frac{3}{5}$$

Rješenje 8.5

a) Neka je općeniti blok izveden operacijskim pojačalom prikazan na slici 8.12. Njegovu prijenosnu funkciju možemo odrediti promatrajući struju I koja prolazi otporima Z_1 i Z_2.

$$u = Z_2 I$$
$$y = -Z_1 I$$
$$G_b = \frac{y}{u} = -\frac{Z_1}{Z_2}$$

Prijenosna funkcija regulatora prikazanog slikom 8.5 tada je:



Slika 8.12: Blok izveden idealnim operacijskim pojačalom.

$$G_R(s) = \left(-\frac{R}{R_1}\right)\left(-\frac{1}{sCR_1}\right)$$
$$G_R(s) = \frac{R}{sCR_1^2}$$

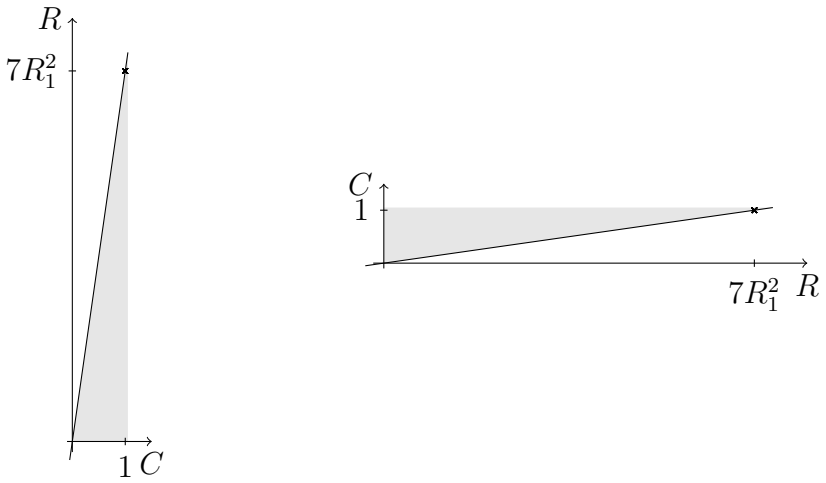
b) Uz $G_R(s) = \frac{R}{sCR_1^2}$ imamo

$$G(s) = \frac{G_R(s)G_p(s)}{1 + G_R(s)G_p(s)}$$
$$= \frac{10R}{CR_1^2 s^3 + 7CR_1^2 s^2 + 10CR_1^2 s + 10R}$$
$$P(s) = CR_1^2 s^3 + 7CR_1^2 s^2 + 10CR_1^2 s + 10R$$

Iz uvjeta za koeficijente karakterističnog polinoma $P(s)$ slijedi $R > 0$ i $C > 0$, što je ispunjeno za sve ostvarive otpornike i kondenzatore. Preostaje ispitati determinantu:

$$\begin{vmatrix} 10CR_1^2 & 10R \\ CR_1^2 & 7CR_1^2 \end{vmatrix} > 0$$
$$70C^2R_1^4 - 10CR_1^2R > 0$$
$$10CR_1^2(7CR_1^2 - R) > 0$$
$$7CR_1^2 - R > 0$$
$$R < 7R_1^2C$$

Područje stabilnosti prikazano je slikom 8.13.



Slika 8.13: Područje stabilnosti.

Rješenje 8.6

Blokovskom algebrom dobije se prijenosna funkcija otvorenog kruga:

$$G_0(s) = \frac{K_R}{s}G(s)\frac{G(s)}{1+G(s)}\frac{G(s)}{1-G(s)} = K_R\frac{1}{s(s+2)(s+3)(s+1)}$$

Prijenosna funkcija zatvorenog kruga i karakteristični polinom iznose

$$G(s) = \frac{K_R}{s^4 + 6s^3 + 11s^2 + 6s + K_R}$$
$$P(s) = s^4 + 6s^3 + 11s^2 + 6s + K_R$$

Koristeći Hurwitzov kriterij ispitujemo sljedeće uvijete:

1) svi koeficijenti od P su veći od nule $\Rightarrow K_R > 0$;

2) provjera determinanti:

$$D_1 = 6 > 0$$
$$D_2 = \begin{vmatrix} 6 & K_R \\ 6 & 11 \end{vmatrix} > 0 \Rightarrow K_R < 11$$
$$D_3 = \begin{vmatrix} 6 & K_R & 0 \\ 6 & 11 & 6 \\ 0 & 1 & 6 \end{vmatrix} > 0 \Rightarrow K_R < 10$$

Sustav je stabilan za vrijednosti K_R unutar skupa $\langle 0, 10 \rangle$.

Rješenje 8.7

Karakteristični polinom zatvorenog kruga zadovoljava jednadžbu

$$1 + G_o(s) = 0, G_o(s) = \frac{K}{s} \frac{1}{s+2} \frac{1}{s+a},$$

iz čega slijedi

$$P(s) = s^3 + (2+a)s^2 + 2as + K.$$

Iz Hurwitzovih kriterija stabilnosti slijedi:

- iz uvjeta na koeficijente polinoma:

$$a > 0,\ K > 0$$

- iz uvjeta na strogo pozitivnu determinantu drugog reda D_2:

$$K < 4a + 2a^2.$$

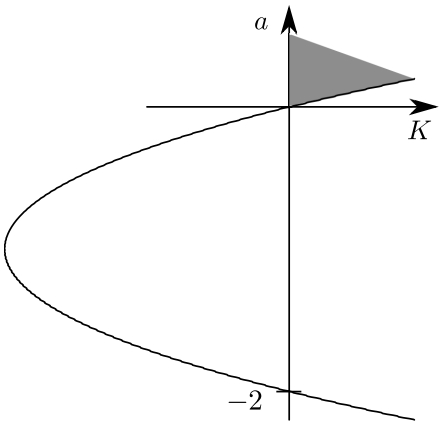
- iz uvjeta na strogo pozitivnu determinantu trećeg reda D_3 slijedi isti uvjet kao i za D_2.

Dozvoljeno područje stabilnosti prikazano je na slici 8.14.

Rješenje 8.8

Karakteristična jednadžba zatvorenog kruga upravljanja glasi:

$$P(s) = T_I s^3 + 2T_I s^2 + (2 + K_R)T_I s + K_R = 0$$



Slika 8.14: Područje stabilnosti u K-a ravnini

Primjenom Hurwitzovog kriterija određuju se parametri regulatora za koje je sustav upravljanja stabilan:

$$a_0 > 0 \rightarrow K_R > 0$$
$$a_1 > 0 \rightarrow T_I > 0$$
$$\begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (2+K_R)T_I & K_R \\ T_I & 2T_I \end{vmatrix} > 0 \rightarrow T_I > \frac{K_R}{4+2K_R}$$

Rješenje 8.9

Prijenosna funkcija $G_F(s)$ je očito stabilna (polovi se nalaze u lijevoj poluravnini). Stoga za $G_F(s)$ nije potrebno dodatno provjeravati stabilnost. Karakteristični polinom zatvorene petlje glasi:

$$10s^3 + 7s^2 + (K+1)s + K = 0.$$

Slijede uvjeti:

$$K > 0$$
$$\begin{vmatrix} K+1 & K \\ 10 & 7 \end{vmatrix} = -3K + 7 > 0 \quad \rightarrow \quad K < \frac{7}{3}.$$

Stoga je konačno rješenje $0 < K < \frac{7}{3}$.

Poglavlje 9

Pokazatelji kvalitete SAU u ustaljenom stanju

Zadatak 9.1

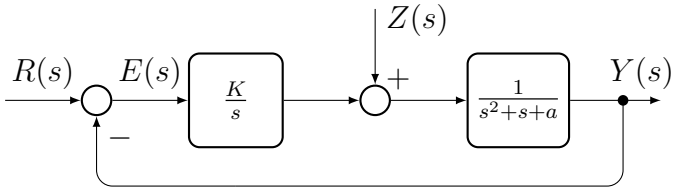
Zadana je prijenosna funkcija otvorenog kruga

$$G_o(s) = \frac{1}{sT_I(s+1)(s+5)}.$$

Potrebno je odrediti T_I tako da regulacijsko odstupanje zatvorenog sustava upravljanja s jediničnom povratnom vezom na pobudu $r(t) = 2tS(t)$ u ustaljenom stanju ima vrijednost $e_\infty = 5$.

Zadatak 9.2

Zatvoreni regulacijski krug prikazan je slikom 9.1. Odredite regulacijsko odstupanje e_∞ u ustaljenom stanju ako je $z(t) = 0.5tS(t)$.

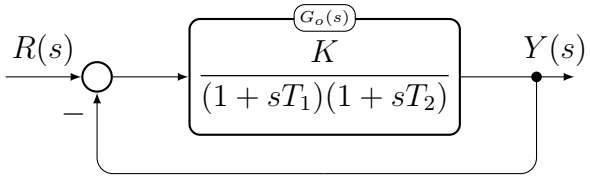


Slika 9.1: Zatvoreni regulacijski krug.

Zadatak 9.3

Uz pretpostavku da je sustav upravljanja sa slike 9.2 stabilan, odrediti regulacijsko odstupanje u ustaljenom stanju uz signal referentne veličine $r(t) =$

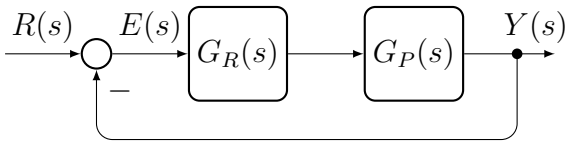
$(1-t)\,S(t-1)$.



Slika 9.2: Sustav upravljanja.

Zadatak 9.4

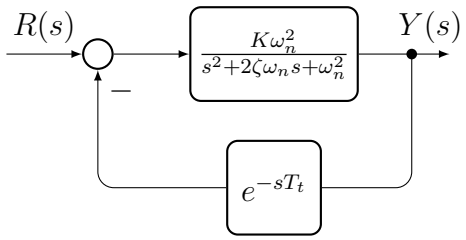
Sustav upravljanja prikazan je slikom 9.3 gdje je $G_R(s)$ PI strukture, a prijenosna funkcija procesa $G_p(s) = \frac{1}{s(s+1)(s+2)}$. Odredite iznos regulacijskog odstupanja u ustaljenom stanju (e_∞) ako je $r(t) = tS(t)$.



Slika 9.3: Sustav upravljanja.

Zadatak 9.5

Zadan je sustav upravljanja prikazan blokovskom shemom na slici 9.4 gdje su $\zeta = 0.71$ i $\omega_n = 1.41$.

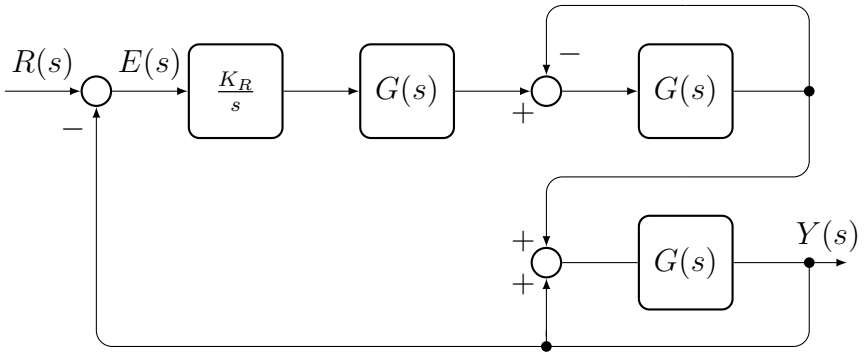


Slika 9.4: Zatvoreni sustav upravljanja.

Odredite iznos pojačanja K za koji odziv sustava na pobudu $r(t) = S(t)$ u ustaljenom stanju iznosi 0.5.

Zadatak 9.6

Zadan je sustav upravljanja prikazan blokovskom shemom na slici 9.5 gdje je $G(s) = \frac{1}{s+2}$.



Slika 9.5: Sustav upravljanja.

a) Uz promjenu referentne veličine $r(t) = S(t)$ nađite iznos regulacijskog odstupanja u ustaljenom stanju e_∞ za iznos pojačanja $K_R = 5$.

b) Uz promjenu referentne veličine $r(t) = tS(t)$, koliko mora iznositi pojačanje K_R da bi regulacijsko odstupanje u ustaljenom stanju bilo jednako $e_\infty = 1$?

Zadatak 9.7

Zadana je prijenosna funkcija procesa:

$$G_p(s) = \frac{4(1-4s)}{(1+10s)(1+2s)}.$$

Za parametre PI regulatora $K_R = 0.5$ i $T_I = 15$ s potrebno je odrediti regulacijska odstupanja u ustaljenom stanju na pobude oblika $r(t) = \mathrm{S}(t)$ i $r(t) = t \cdot \mathrm{S}(t)$.

9.1 Rješenja

Rješenje 9.1

Prijenosna funkcija za regulacijsko odstupanje zatvorenog kruga:

$$G(s) = \frac{E(s)}{R(s)} = \frac{1}{1 + G_o(s)} = \frac{2sT_I(s+1)(s+5)}{1 + 2sT_I(s+1)(s+5)}$$

Pobuda u Laplaceovom području: $R(s) = \frac{2}{s^2}$.
Regulacijsko odstupanje u Laplaceovom području:

$$E(s) = G(s) \cdot R(s) = \frac{2}{s} \cdot \frac{T_I(s+1)(s+5)}{1 + sT_I(s+1)(s+5)}$$

Regulacijsko odstupanje u ustaljenom stanju korištenjem teorema o konačnoj vrijednosti:

$$e_\infty = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} \frac{2T_I(s+1)(s+5)}{1 + sT_I(s+1)(s+5)} = 10T_I = 5$$

$$T_I = 0.5\text{s}$$

Rješenje 9.2

Pogreška u ustaljenom stanju uz $Z(s) = \frac{0.5}{s^2}$:

$$E(s) = -Y(s) = -\frac{\frac{1}{s^2+s+a}}{1 + \frac{K}{s(s^2+s+a)}} Z(s) = \frac{-s}{s^3 + s^2 + as + K} \frac{0.5}{s^2}$$

$$e_\infty = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} \frac{-0.5}{s^3 + s^2 + as + K} = \frac{-0.5}{K}$$

Rješenje 9.3

Sustav je bez astatizma pa ne može slijediti zadanu referencu:

$$\lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} \frac{sR(s)}{1 + G_o(s)} = -\infty$$

Rješenje 9.4

$R(s) = \frac{1}{s^2}$, te je:

$$E(s) = \frac{1}{1+G_o(s)}R(s) = \frac{T_I s^2(s+1)(s+2)}{T_I s^2(s+1)(s+2)+K_R(1+T_I s)} \cdot \frac{1}{s^2} =$$
$$= \frac{T_I(s+1)(s+2)}{T_I s^2(s+1)(s+2)+K_R(1+T_I s)}$$
$$e_\infty = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} \frac{T_I s(s+1)(s+2)}{T_I s^2(s+1)(s+2)+K_R(1+T_I s)} = \frac{0}{K_R} = 0$$

Rješenje 9.5

Prijenosna funkcija zatvorenog sustava upravljanja:

$$G(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2+e^{-sT_t}K\omega_n^2} = \frac{2K}{s^2+2s+2+2Ke^{-sT_t}}$$

Odziv u ustaljenom stanju:

$$y_\infty = \lim_{s\to 0} sY(s) = \lim_{s\to 0} \frac{K}{1+K} = 0.5$$
$$K = 1$$

Rješenje 9.6

Blokovskom algebrom dobije se prijenosna funkcija otvorenog kruga:

$$G_0(s) = \frac{K_R}{s}G(s)\frac{G(s)}{1+G(s)}\frac{G(s)}{1-G(s)} = K_R\frac{1}{s(s+2)(s+3)(s+1)}$$

a) $e_\infty = 0$, zato jer prijenosna funkcija otvorenog kruga ima astatizam prvog reda, tj. I-vladanje.

b)
$$e_\infty = \lim_{s\to 0} s\frac{1}{1+G_o(s)}\frac{1}{s^2} = \frac{6}{K_R} = 1$$

Pa je rješenje $K_R = 6$.

Rješenje 9.7

Prijenosna funkcija regulatora:

$$G_R(s) = K_R\left(1+\frac{1}{T_I s}\right) = 0.5 \cdot \frac{1+15s}{15s}$$

Prijenosna funkcija regulacijskog odstupanja u odnosu na referencu:

$$\frac{E(s)}{R(s)} = \frac{1}{1 + G_R(s)\,G_p(s)} = \frac{15s\,(1+10s)\,(1+2s)}{15s\,(1+10s)\,(1+2s) + 2\,(1+15s)\,(1-4s)}$$

Regulacijsko odstupanje u ustaljenom stanju pri djelovanju jediničnog skoka $r(t) = \mathrm{S}(t)$ $(R(s) = \frac{1}{s})$:

$$\begin{aligned} e(\infty) &= \lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} sE(s) = \\ &= \lim_{s\to 0} s \cdot \frac{15s\,(1+10s)\,(1+2s)}{15s\,(1+10s)\,(1+2s) + 2\,(1+15s)\,(1-4s)} \cdot \frac{1}{s} = 0 \end{aligned}$$

Regulacijsko odstupanje u ustaljenom stanju pri djelovanju jedinične rampe $r(t) = t \cdot \mathrm{S}(t)$ $(R(s) = \frac{1}{s^2})$:

$$\begin{aligned} e(\infty) &= \lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} sE(s) = \\ &= \lim_{s\to 0} s \cdot \frac{15s\,(1+10s)\,(1+2s)}{15s\,(1+10s)\,(1+2s) + 2\,(1+15s)\,(1-4s)} \cdot \frac{1}{s^2} = \frac{15}{2} = 7.5 \end{aligned}$$

Poglavlje 10

Preslikavanje polova i nula iz s u z ravninu

Zadatak 10.1

Polovi linearnog kontinuiranog sustava drugog reda bez konačnih nula su $s_{p1,2} = -1 \pm j$.

a) Diskretni sustav prijenosne funkcije $G(z)$ dobije se ZOH diskretizacijom zadanog kontinuiranog sustava. Skicirajte položaj polova prijenosne funkcije $G(z)$ u z-ravnini za dva različita odabira perioda uzorkovanja:

   (1) $T = T_1 = 0.1$ s,

   (2) $T = T_2 = 1$ s.

b) Na dva zasebna grafička prikaza skicirajte prijelazne funkcije diskretnog sustava $G(z)$ za oba odabira perioda uzorkovanja u zadatku a).

Zadatak 10.2

Prijenosna funkcija linearnog kontinuiranog sustava drugog reda bez konačnih nula je oblika

$$G(s) = \frac{\frac{4}{3}}{s^2 + \frac{2\sqrt{3}}{3}s + \frac{4}{3}}.$$

Diskretni sustav opisan prijenosnom funkcijom $G(z)$ dobije se Tustinovom diskretizacijom zadanog kontinuiranog sustava. Na jednom prikazu skicirajte položaj polova prijenosne funkcije $G(z)$ u z-ravnini za dva različita odabira perioda uzorkovanja:

(1) $T = T_1 = 0.1$ s,

(2) $T = T_2 = 1$ s.

Zadatak 10.3

Zadani su zahtjevi na vremenske pokazatelje prijelazne pojave $t_m < 1$ s i $t_{1\%} < 1$ s, te vrijeme uzorkovanja $T = 0.1$ s. Koristeći relacije koje vrijede za sustav drugog reda (bez konačnih nula) potrebno je skicirati:

a) područje polova u kompleksnoj s-ravnini tako da ne dođe do pojave aliasinga i

b) područje polova u kompleksnoj z-ravnini.

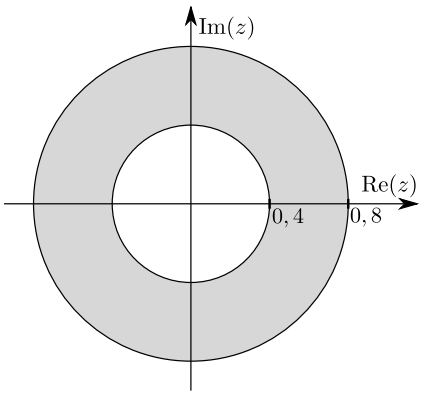
Zadatak 10.4

Preslikajte pol u z-ravnini $z = \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}j$ u s-ravninu, ako je zadano vrijeme uzorkovanja $T = 10$ s.

Zadatak 10.5

Na slici 10.1 prikazano je područje polova diskretne prijenosne funkcije koja je dobivena diskretizacijom kontinuirane prijenosne funkcije drugog reda bez konačnih nula uz vrijeme diskretizacije $T = 0.1\,\text{s}$.

Odredite vrijeme smirivanja $t_{1\%}$ kontinuirane prijelazne funkcije.



Slika 10.1: Područje polova u z-ravnini.

10.1 Rješenja

Rješenje 10.1

a) Kod ZOH diskretizacije za polove diskretnog sustava vrijedi $z_{pi} = e^{s_{pi}T}$, pa je stoga:

$$z_{p1,2} = e^{(-1\pm j)T} = e^{-T}e^{\pm jT}$$

(1) $z_{p1,2} = e^{-0.1}e^{\pm j0.1} = 0.90\angle \pm 5.7° = 0.90032 \pm j0.09033$

(2) $z_{p1,2} = e^{-1}e^{\pm j1} = 0.37\angle \pm 57° = 0.19877 \pm j0.30956$

b) ZOH diskretizacija čuva svojstva kontinuirane prijelazne funkcije, pa prijelaznu funkciju kontinuiranog sustava treba koristiti kao envelopu za oba odziva; pritom u vremenu od 0 do $t_m = \pi/(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}) = \pi$ s = 3.14 s u slučaju (1) treba biti tridesetak uzoraka, a u slučaju (2) samo 3.

Rješenje 10.2

Kod Tustinove diskretizacije za polove diskretnog sustava vrijedi $z_{pi} = \frac{1+s\frac{T}{2}}{1-s\frac{T}{2}}$, pa je stoga:

$$\begin{aligned} T = 0.1 &\longrightarrow z_{p1,2} = 0.94 \pm 0.09j \\ T = 1 &\longrightarrow z_{p1,2} = 0.3489 \pm 0.52337j \end{aligned}$$

Rješenje 10.3

a) Za kompleksno konjugirani par polova u kompleksnoj s-ravnini zapisan kao:

$$s_{1,2} = -\sigma \pm j\omega$$

dobiju se uvjeti za realni i imaginarni dio:

$$\begin{aligned} t_m = \frac{\pi}{\omega} < 1 \quad &\Rightarrow \quad \omega > \pi \\ t_{1\%} = \frac{4.6}{\sigma} < 1 \quad &\Rightarrow \quad \sigma > 4.6 \end{aligned}$$

Uz uvjet daa ne dođe do pojave aliasinga, preslikava se samo osnovni frekvencijski pojas $|\omega| < \frac{\pi}{T} = 10\pi$.

b) Preslikavanje u z područje:

$$z = e^{sT} = e^{(-\sigma \pm j\omega)T} = e^{-\sigma T} \cdot e^{\pm j\omega T}$$

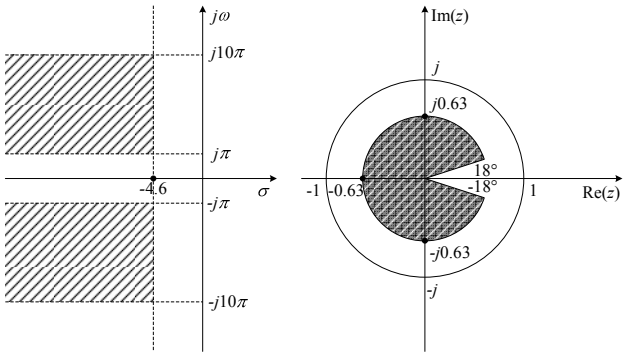
Najveći modul od z je za najmanji σ:

$$|z| = e^{-\sigma T} < e^{-4.6 \cdot 0.1} = 0.6313$$

Minimalni i maksimalni argument od z:

$$\arg\left(e^{j0.1\pi}\right) = 18^\circ < \arg(z) < \arg\left(e^{j\pi}\right) = 180^\circ$$
$$\arg\left(e^{-j0.1\pi}\right) = -18^\circ > \arg(z) > \arg\left(e^{-j\pi}\right) = -180^\circ$$

Skica dobivenih područja u s i z ravnini dana je na slici 10.2.



Slika 10.2: Područje polova u s i z ravnini.

Rješenje 10.4

Pol u z-ravnini preslikava se u osnovni pojas kao:

$$z = e^{sT} = e^{-\sigma T} e^{j\omega T} = \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} j = \frac{1}{2} e^{j\frac{\pi}{3}}$$
$$e^{-\sigma T} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \sigma = -\frac{1}{10} \ln \frac{1}{2} = 0.0693147$$
$$\omega T = \frac{\pi}{3} \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{\pi}{3T} = \frac{\pi}{30} = 0.10472$$
$$s = -\sigma + j\omega = -0.0693147 + j0.10472$$

Zbog periodičnosti eksponencijalne funkcije, postoje i polovi u s-ravnini koji

se preslikavaju u zadani pol u z-ravnini izvan osnovnog pojasa:

$$\begin{aligned} e^{j(\omega T+2k\pi)} &= e^{j\frac{\pi}{3}}, \quad k \in \mathbb{Z} \\ \omega &= \frac{\pi}{30} - \frac{k\pi}{5}, \quad k \in \mathbb{Z} \\ \omega &= 0.10472 - 0.62832k, \quad k \in \mathbb{Z} \\ s_k &= -\frac{1}{10}\ln\frac{1}{2} + j\left(\frac{\pi}{30} - \frac{k\pi}{5}\right), \quad k \in \mathbb{Z} \\ &= -0.0693147 + j\left(0.10472 - 0.62832k\right), \quad k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Rješenje 10.5

Unutar označenog područja za sve polove vrijedi $0.4 < e^{-\zeta\omega_n T} < 0.8$:

$$\ln 0.4 < -\zeta\omega_n T < \ln 0.8 \rightarrow -\frac{\ln 0.4}{0.1} > \zeta\omega_n > -\frac{\ln 0.8}{0.1}.$$

Za polove u kontinuiranom području vrijedit će:

$$2.2314 < \zeta\omega_n < 9.1629.$$

Vrijeme smirivanja određuje se korištenjem izraza $t_{1\%} = \frac{4.6}{\zeta\omega_n}$ pa je rješenje:

$$0.5020\,\mathrm{s} < t_{1\%} < 2.0615\,\mathrm{s}.$$

Poglavlje 11

Postupci diskretizacije kontinuiranih sustava

Zadatak 11.1

Diskretizirahte PI regulator $G_R(s) = K_R \frac{1+T_I s}{T_I s}$ Tustinovim postupkom uz vrijeme uzorkovanja $T = 0.1$ s te odredite pripadnu rekurzivnu jednadžbu diskretiziranog regulatora. Zadano je $K_R = 2.7,\ T_I = 3.78$ s.

Zadatak 11.2

Odredite rekurzivnu jednadžbu PI regulatora s općim parametrima K_R i T_I uz općenito vrijeme uzorkovanja T ako je regulator diskretiziran:

a) Tustinovim postupkom i

b) Eulerovom unazadnom diferencijom.

Zadatak 11.3

Odredite diskretnu prijenosnu funkciju PI regulatora s općim parametrima K_R i T_I korištenjem Eulerove unazadne diferencije uz općenito vrijeme uzorkovanja T te odrediti rekurzivnu jednadžbu regulatora.

Zadatak 11.4

Odredite prijenosnu funkciju $G_p(z)$ diskretizacijom kontinuiranog procesa $G_p(s) = \frac{2}{s+2}$ uz zadržavanje svojstva prijelazne funkcije i uz vrijeme uzorkovanja $T = 0.1\,\text{s}$.

Zadatak 11.5

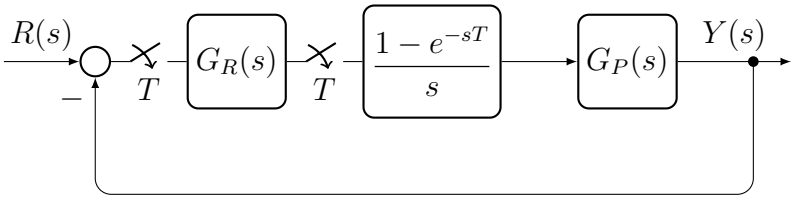
Zadana je presječna frekvencija kontinuiranog vremenski nepromjenjivog sustava $\omega_c = 30\ \mathrm{s}^{-1}$. Koji postupak diskretizacije treba upotrijebiti da diskretizirani sustav ima približno jednaku presječnu frekvenciju, uz dovoljno malo vrijeme uzorkovanja? Koliko iznosi ta frekvencija ako je vrijeme uzorkovanja $T = 0.01$ s?

Zadatak 11.6

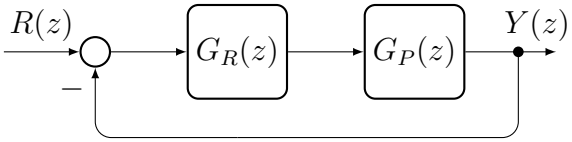
Diskretni sustav upravljanja u vremenski kontinuiranoj domeni prikazan je slikom 11.1. Zadane su prijenosne funkcije regulatora i procesa:

$$G_R(s) = 0.7\frac{1+s}{s}, \qquad G_p(s) = \frac{5}{(1+0.3s)(1+s)}.$$

Diskretni sustav upravljanja u diskretnoj domeni, koji je ekvivalentan sustavu prikazanom na slici 11.1, prikazan je slikom 11.2. Odredite $G_R(z)$ i $G_p(z)$ ako je zadano $T = 100$ ms.



Slika 11.1: Diskretni sustav upravljanja.



Slika 11.2: Diskretni sustav upravljanja.

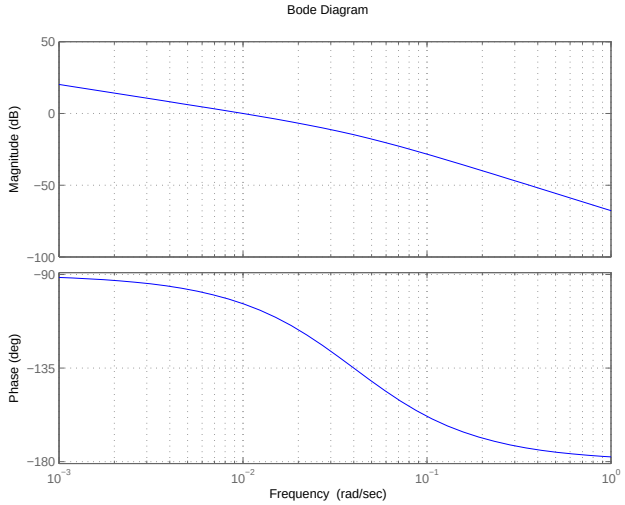
Zadatak 11.7

Odrediti koliko se približno promijeni nadvišenje prijelazne funkcije zatvorenog diskretnog kruga u odnosu na kontinuirani, ako presječna frekvencija otvorenog kruga s regulatorom iznosi $\omega_c = 0.1$ rad/s, a odabrano vrijeme uzorkovanja $T = 1$ s.

Zadatak 11.8

Odrediti preporučeni raspon vremena uzorkovanja ako je Bodéov dijagram otvorenog kruga prikazan slikom 11.3. U kojem se rasponu u tom slučaju mi-

jenja nadvišenje prijelazne funkcije diskretnog zatvorenog kruga upravljanja s rekonstruktorom nultog reda?



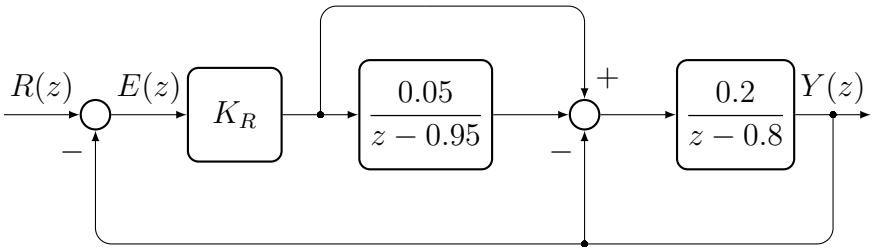
Slika 11.3: Bodéov dijagram otvorenog kruga.

Zadatak 11.9

Prijenosna funkcija kontinuiranog procesa kojim se upravlja P regulatorom je dana s $G_o(s) = \frac{1}{4T_1 s(1+2T_1 s)}$. Ako bi projektirani P regulator u sustavu upravljanja kutom zakreta motora imao digitalnu umjesto analognu izvedbe, praktičnim preporukama odredite prikladno vrijeme uzorkovanja T. Procijenite za koliko bi se uz tako određen T promijenilo nadvišenje prijelazne funkcije sustava upravljanja kutom zakreta motora.

Zadatak 11.10

Zatvoreni diskretni sustav upravljanja prikazan je slikom 11.4. Potrebno je odrediti iznos regulacijskog odstupanja $e(\infty)$ u ustaljenom stanju na pobudu $r(k) = S(k)$.



Slika 11.4: Diskretni sustav upravljanja.

11.1 Rješenja

Rješenje 11.1

$$G_R(z) = G_R(s)|_{s=\frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1}} = K_R\frac{T+2T_I}{2T_I}\frac{z-\frac{2T_I-T}{2T_I+T}}{z-1} = 2.73571\frac{z-0.97389}{z-1}$$

Rješenje 11.2

a) Diskretizacija Tustinovim postupkom:

$$G_R(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = G_R(s)|_{s=\frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1}} = K_R\frac{1+T_Is}{T_Is}\bigg|_{s=\frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1}} =$$
$$= K_R\left(\frac{T}{2T_I}+1\right)\frac{z+\frac{T-2T_I}{T+2T_I}}{z-1} = K_R\frac{\left(\frac{T}{2T_I}+1\right)z+\frac{T}{2T_I}-1}{z-1}$$

Za određivanje rekurzivne jednadžbe:

$$G_R\left(z^{-1}\right) = K_R\frac{\frac{T}{2T_I}+1+\left(\frac{T}{2T_I}-1\right)z^{-1}}{1-z^{-1}}$$

$$u(k) = u(k-1) + K_R\left(\frac{T}{2T_I}+1\right)e(k) + K_R\left(\frac{T}{2T_I}-1\right)e(k-1)$$

b) Diskretizacija Eulerovom unazadnom diferencijom:

$$G_R(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = G_R(s)|_{s=\frac{z-1}{Tz}} = K_R\frac{1+T_Is}{T_Is}\bigg|_{s=\frac{z-1}{Tz}} =$$
$$= K_R\left(1+\frac{T}{T_I}\cdot\frac{z}{z-1}\right)$$

Rekurzivna jednadžba:

$$u(k) = u(k-1) + \frac{K_R}{T_I}(T_I+T)e(k) - K_Re(k-1)$$

Rješenje 11.3

PI regulator diskretiziran Eulerovom unazadnom diferencijom:

$$G_R(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = G_R(s)|_{s=\frac{z-1}{Tz}} = K_R \frac{1+T_I s}{T_I s}\bigg|_{s=\frac{z-1}{Tz}} =$$
$$= K_R\left(1 + \frac{T}{T_I}\cdot\frac{z}{z-1}\right)$$

Rekurzivna jednadžba:

$$u(k) = u(k-1) + \frac{K_R}{T_I}(T_I + T)\,e(k) - K_R e(k-1)$$

Rješenje 11.4

Svojstva prijelazne funkcije zadržavaju se ZOH diskretizacijom:

$$G_p(z) = (1-z^{-1})\mathcal{Z}\left\{\frac{G_p(s)}{s}\right\} = (1-z^{-1})\mathcal{Z}\left\{\frac{2}{s(s+2)}\right\} =$$
$$= (1-z^{-1})\frac{(1-e^{-aT})z^{-1}}{(1-z^{-1})(1-e^{-aT}z^{-1})}$$

gdje je $a = 2$. Slijedi:

$$G_p(z) = \frac{0.1813z^{-1}}{1-0.8187z^{-1}}$$

Rješenje 11.5

Tustinov postupak čuva presječnu frekvenciju. Tustinovim postupkom se frekvencija preslikava kao:

$$\omega_c^* = \frac{2}{T}\,\mathrm{tg}\,\frac{\omega_c T}{2} = 30.227\ \mathrm{s}^{-1}.$$

Rješenje 11.6

Regulator se diskretizira uz očuvanje impulsnog odziva:

$$G_R(z) = \mathcal{Z}\left\{0.7\frac{1+s}{s}\right\} = 0.7\mathcal{Z}\left\{\frac{1}{s}+1\right\} = 0.7\left(\frac{1}{1-z^{-1}}+1\right) = 0.7\frac{2z-1}{z-1}.$$

Proces se diskretizira ZOH metodom:

$$G_p(z) = (1-z^{-1})\mathcal{Z}\left\{\frac{1}{s}\frac{5}{(1+0.3s)(1+s)}\right\} = \frac{z-1}{z}\mathcal{Z}\left\{\frac{A}{s} + \frac{B}{\frac{1}{0.3}+s} + \frac{C}{1+s}\right\}$$

$$A = 5 \quad B = \frac{15}{7} \quad C = -\frac{50}{7}$$

$$\begin{aligned} G_p(z) &= \frac{z-1}{z}\left(\frac{Az}{z-1} + B\frac{z}{z-e^{-\frac{1}{3}}} + C\frac{z}{z-e^{-0.1}}\right) = \\ &= A + B\frac{z-1}{z-e^{-\frac{1}{3}}} + C\frac{z-1}{z-e^{-0.1}} \\ &= \frac{0.06259z + 0.07229}{(z-0.71653)(z-0.90484)} = \frac{0.06259z + 0.07229}{z^2 - 1.62137z + 0.64834} \end{aligned}$$

Rješenje 11.7

Diskretizacija se nadomješta ekvivalentnim mrtvim vremenom iznosa pola vremena uzorkovanja:

$$\Delta\varphi\left(\omega_c\right) = -\omega_c \cdot \frac{T}{2} = -0.1 \cdot \frac{1}{2} = -0.05 \text{ rad} = -2.86^\circ$$

S obzirom da vrijedi $\sigma_m[\%] \approx 70 - \gamma[^\circ]$ slijedi da $\Delta\sigma_m[\%] \approx -\Delta\gamma[^\circ]$ pa je

$$\Delta\sigma_m \approx 2.86\%$$

Nadvišenje se poveća približno 2.86%.

Rješenje 11.8

Presječna frekvencija iz Bodéovog dijagrama: $\omega_c = 0.01$ rad/s. Preporučeni raspon vremena uzorkovanja T:

$$\begin{aligned} T &\in (0.17, 0.34)\,\frac{1}{\omega_c} \\ T &\in (17, 34)\ \text{s} \end{aligned}$$

Za određivanje povećanja nadvišenja treba uzeti ekvivalentno kašnjenje od pola vremena uzorkovanja. Utjecaj elementa kašnjenja na faznu karakteristiku:

$$\varphi\left(\omega_c\right) = -\frac{T}{2}\omega_c = -\frac{(17, 34)}{2} \cdot 0.01 = -\left(0.085, 0.17\right)\ \text{rad} = -\left(4.87, 9.74\right)^\circ$$

Kako su nadvišenje i fazno osiguranje povezani približnom relacijom $\sigma_m[\%] \approx 70 - \gamma[^\circ]$, slijedi da se smanjenjem iznosa fazne karakteristike (faznog osiguranja) za navedeni raspon isto toliko poveća nadvišenje.

U predavanjima se spominje da se nadvišenje poveća 5-10%.

Rješenje 11.9

Pronalazimo presječnu frekvenciju ω_c:

$$4T_1\omega_c^2\sqrt{1+4T_1^2\omega_c^2}=1$$

$$\omega_c=\frac{1}{2T_1}\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}=\frac{0.23}{T_1}$$

Prema preporuci za određivanje T na temelju karakteristika otvorenog kontinuiranog regulacijskog kruga imamo:

$$T=(0.17\div 0.34)\frac{1}{\omega_c},$$

pa je dakle dobar odabir:

$$T=\frac{xT_1}{0.23},$$

pri čemu je $x\in[0.17,0.34]$. Pad u faznom osiguranju dobije se ako se serija impulsni element-ZOH aproksimira kašnjenjem $e^{-s\frac{T}{2}}$, što vodi na:

$$\Delta\gamma\approx-\omega_c\frac{T}{2}=-\frac{0.23}{T_1}\cdot\frac{xT_1}{0.23\cdot 2}=-\frac{x}{2}\text{ rad}=-\frac{180x^\circ}{2\pi}$$

Ovisno o odabranom x, pad faznog osiguranja, a time i rast nadvišenja otprilike iznosi $\frac{180x}{2\pi}\%$, tj. njegov raspon je $4.9\div 9.7\%$.

Rješenje 11.10

$$E(z)=\frac{1}{1+K_R\frac{z-0.9}{z-0.95}\frac{0.2}{z-0.6}}\cdot\frac{z}{z-1}=$$

$$=\frac{z(z-0.95)(z-0.6)}{(z-1)(z^2+z(0.2K_R-1.55)+0.57-0.18K_R)}$$

$$e(\infty)=\lim_{z\to 1}(1-z^{-1})E(z)=\frac{0.05\cdot 0.4}{1+0.2K_R-1.55+0.57-0.18K_R}=$$

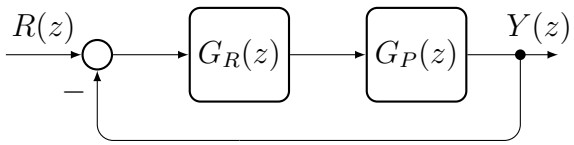
$$=\frac{0.02}{0.02+0.02K_R}=\frac{1}{1+K_R}$$

Poglavlje 12

Stabilnost linearnih diskretnih sustava upravljanja

Zadatak 12.1

Za diskretni sustav upravljanja prikazan slikom 12.1 zadan je regulator $G_R(z) = K_R \frac{z}{0.5z-0.4}$ i proces $G_p(z) = \frac{0.1813z^{-1}}{1-0.8187z^{-1}}$.



Slika 12.1: Blokovska shema diskretnog sustava upravljanja.

Primjenom Juryjevog kriterija stabilnosti odredite interval vrijednosti pojačanja K_R za koje je sustav na slici 12.1 stabilan.

Zadatak 12.2

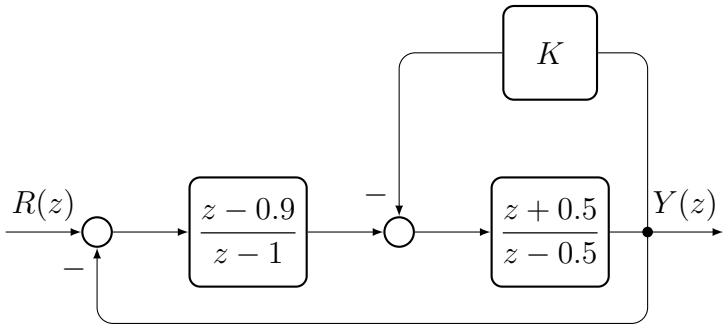
Zadan je sustav prikazan slikom 12.2.

a) Odredite prijenosnu funkciju $G(z) = \frac{Y(z)}{R(z)}$.

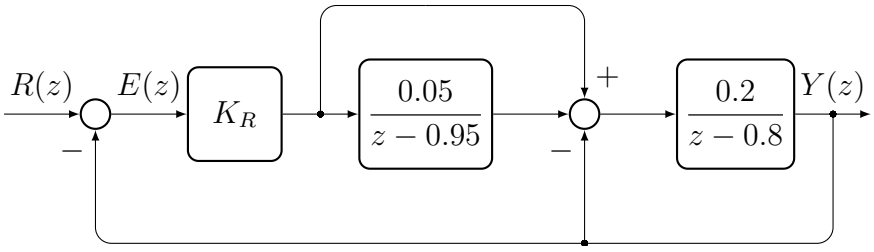
b) Juryjevim kriterijem stabilnosti odredite interval pojačanja K za koja je sustav stabilan.

Zadatak 12.3

Zatvoreni diskretni sustav upravljanja prikazan je slikom 12.3. Potrebno je:



Slika 12.2: Sustav upravljanja.



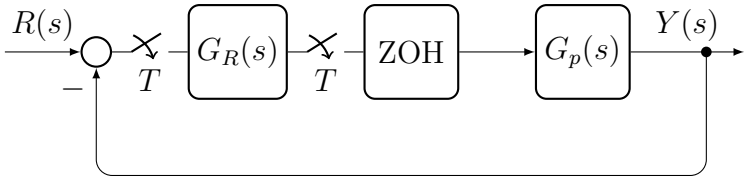
Slika 12.3: Diskretni sustav upravljanja

a) Odrediti prijenosnu funkciju zatvorenog kruga $G(z) = \frac{Y(z)}{R(z)}$.

b) Korištenjem Juryjevog kriterija stabilnosti odrediti za koje vrijednosti pojačanja K_R je zatvoreni sustav upravljanja stabilan.

Zadatak 12.4

Za sustav upravljanja prikazan slikom 12.4 potrebno je Hurwitzovim kriterijem stabilnosti odrediti interval vrijednosti perioda uzorkovanja T za koje je taj sustav stabilan.
Zadano je: $G_R(s) = \frac{2}{s}$, $G_p(s) = \frac{2}{s+1}$.

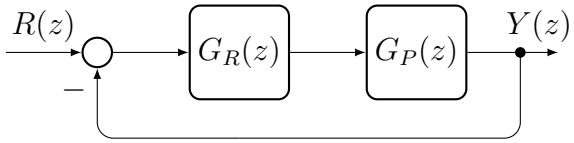


Slika 12.4: Blokovska shema sustava upravljanja.

Zadatak 12.5

Zatvoreni diskretni sustav upravljanja zadan je slikom 12.5, a prijenosne funkcije regulatora i procesa su:

$$G_R(z) = 10\frac{z-0.4}{z-0.6}, \qquad G_p(z) = 0.04\frac{z-0.25}{(z-0.4)(z-0.6)}.$$

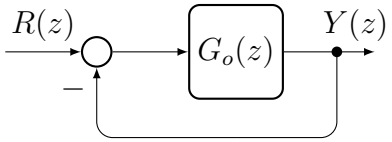


Slika 12.5: Zatvoreni sustav upravljanja.

Ispitajte stabilnost sustava koristeći Hurwitzov kriterij stabilnosti.

Zadatak 12.6

Diskretni sustav upravljanja prikazan je slikom 12.6. Otvoreni krug upravljanja u kontinuiranoj vremenskoj domeni zadan je prijenosnom funkcijom $G_o(s) = K\frac{1-T_2 s}{1+T_1 s}$.



Slika 12.6: Diskretni sustav upravljanja.

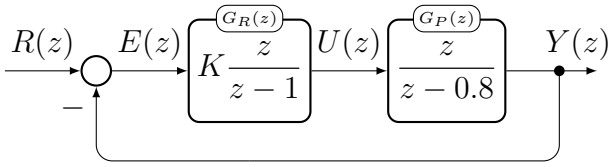
a) Primjenom Routh–Hurwitzova kriterija analizirajte za koje vrijednosti parametra K je diskretni sustav upravljanja $G_r(z) = \frac{G_o(z)}{1+G_o(z)}$ stabilan pri čemu je $G_o(z) = K\frac{-0.19z^2+0.02z+0.21}{z^2-1.56z+0.6}$.

Zadatak 12.7

Na slici 12.7 prikazan je diskretni sustav automatskog upravljanja. Diskretni sustav upravljanja dobiven je diskretizacijom uz vrijeme uzorkovanja $T = 0.02$s.

a) Za diskretni sustav upravljanja prikazan slikom 12.7 skicirajte Bodeov dijagram otvorenog kruga. Zadano je $K = 1$.

b) Za koje vrijednosti pojačanja $K > 0$ će zadani sustav biti stabilan?



Slika 12.7: Sustav automatskog upravljanja.

12.1 Rješenja

Rješenje 12.1

Zadano je $G_R(z) = K_R \frac{z}{0.5z-0.4}$. Prema tome, prijenosna funkcija otvorenog kruga ima oblik:

$$G_o(z) = G_R(z)G_p(z) = K_R \frac{0.3625z}{(z^2 - 1.6187z + 0.655)}$$

Iz karakteristične jednadžbe $1 + G_o(z) = 0$ slijedi karakteristični polinom:

$$f(z) = 0.655 + (0.3625K_R - 1.6187)z + z^2 = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 = 0$$

Juryjev kriterij stabilnosti ima samo jedan redak ($a_0 = 0.655$, $a_1 = 0.3625K_R - 1.6187$, $a_2 = 1$). Uvjeti stabilnosti imaju oblik:

- $f(1) > 0$, odakle slijedi

$$0.655 + 0.3625K_R - 1.6187 + 1 > 0, \quad \Rightarrow \quad K_R > -0.1$$

- $(-1)^n f(-1) > 0$, odakle slijedi ($n = 2$)

$$0.655 - 0.3625K_R + 1.6187 + 1 > 0, \quad \Rightarrow \quad K_R < 9.031$$

- $|a_0| < |a_n|$ je zadovoljen jer je $a_0 = 0.655 < a_2 = 1$.

Rješenje 12.2

a)

$$G_3(z) = \frac{G_2(z)}{1 + KG_2(z)} = \frac{z + 0.5}{(1 + K)z + 0.5(K - 1)}$$

$$G_z(z) = \frac{G_1(z)G_3(z)}{1 + G_1(z)G_3(z)} = \frac{z^2 - 0.4z - 0.45}{(2 + K)z^2 - (0.5K + 1.9)z + 0.05 - 0.5K}$$

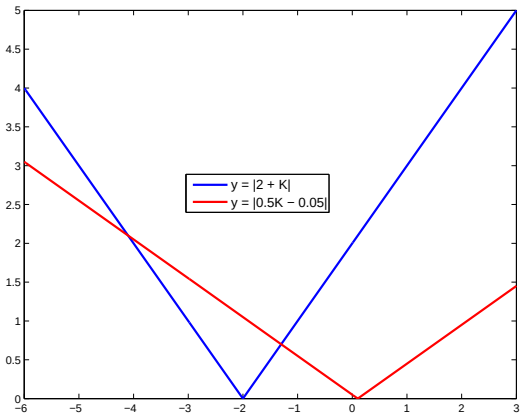
b) Karakteristični polinom:

$$f(z) = (2 + K)z^2 - (0.5K + 1.9)z + 0.05 - 0.5K$$

Uvjeti stabilnosti:

- $f(1) = 0.15 > 0$
- $(-1)^2 f(-1) = 3.95 + K > 0 \Rightarrow K > -3.95$

- $|a_2| > |a_0| \rightarrow |2 + K| > |0.5K - 0.05|$ Rješenje gornje nejednadžbe očitavamo sa slike 12.8: $K \in (-\infty, -4.1) \cup (-1.3, \infty)$



Slika 12.8

Presjek svih uvjeta daje da je sustav stabilan za $K \in (-1.3, \infty)$.

Rješenje 12.3

a) Prijenosna fukncija zatvorenog kruga je:

$$G(z) = \frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{K_R(1 + \frac{0.05}{z-0.95})\frac{\frac{0.2}{z-0.8}}{1+\frac{0.2}{z-0.8}}}{1 + K_R\frac{z-0.9}{z-0.95}\frac{0.2}{z-0.6}}$$
$$= \frac{0.2K_R(z-0.9)}{(z-0.95)(z-0.6) + 0.2K_R(z-0.9)}$$

b) Karakteristični polinom je:

$$f(z) = z^2 + z(0.2K_R - 1.55) + 0.57 - 0.18K_R$$

- Kriterij stabilnosti prema Juryu, prvi uvjet:

$$f(1) = 1 + 0.2K_R - 1.55 + 0.57 - 0.18K_R =$$
$$= 0.02 + 0.02K_R > 0 \quad \Rightarrow \quad K_R > -1$$

$$f(-1) = 1 - 0.2K_R + 1.55 + 0.57 - 0.18K_R = \\ = 3.12 - 0.38K_R > 0 \quad \Rightarrow \quad K_R < 8.21$$

$$K_R > -1 \cup K_R < 8.21 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{-1 < K_R < 8.21}$$

- Kriterij stabilnosti prema Juryu, drugi uvjet:

$$|0.57 - 0.18K_R| < 1$$
$$0.57 - 0.18K_R > 0 \text{ i } 0.57 - 0.18K_R < 1$$
$$\Rightarrow (K_R < 3.17) \cap (K_R > -2.39) \Rightarrow -2.39 < K_R < 3.17$$

$$0.57 - 0.18K_R < 0 \text{ i } 0.57 - 0.18K_R > -1$$
$$\Rightarrow (K_R > 3.17) \cap (K_R < 8.72) \Rightarrow 3.17 < K_R < 8.72$$

$$(-2.39 < K_R < 3.17) \cup (3.17 < K_R < 8.72) \Rightarrow \mathbf{-2.39 < K_R < 8.72}$$

Konačno rješenje je presijek prvog i drugog uvjeta:

$$(-1 < K_R < 8.21) \cap (-2.39 < K_R < 8.72) \Rightarrow \mathbf{-1 < K_R < 8.21}$$

Rješenje 12.4

Predavanje 15:

$$G_R(z) = \mathcal{Z}\{G_R(s)\} = \frac{2z}{z-1},$$
$$G_p(z) = (1 - z^{-1})\mathcal{Z}\left\{\frac{G_p(s)}{s}\right\} = 2\frac{1 - e^{-T}}{z - e^{-T}}.$$

Prijenosna funkcija otvorenog i zatvorenog kruga:

$$G_o(z) = G_R(z)G_p(z) = \frac{4z(1 - e^{-T})}{(z-1)(z - e^{-T})},$$

$$G_{cl}(z) = \frac{4z(1 - e^{-T})}{z^2 + z(3 - 5e^{-T}) + e^{-T}}.$$

Karakteristični polinom zatvorenog kruga:

$$P(z) = z^2 + z(3 - 5e^{-T}) + e^{-T}$$

Brojnik od $P\left(\frac{1+w}{1-w}\right)$:

$$(6e^{-T} - 2)w^2 + 2(1 - e^{-T})w + 4(1 - e^{-T}) = a_2w^2 + a_1w + a_0$$

podvrgava se Hurwitzovom kriteriju stabilnosti. Budući da je $a_1 > 0$ i $a_0 > 0$ slijedi i da mora biti $a_2 > 0$, što vodi na:

$$e^{-T} > \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad T < \ln 3 \text{ s} = 1.1 \text{ s}$$

Rješenje 12.5

Karakteristična jednadžba sustava upravljanja:

$$1 + G_o(z) = 1 + 10\frac{z-0.4}{z-0.6}0.04\frac{z-0.25}{(z-0.4)(z-0.6)} = 0$$
$$z^2 - 0.8000z + 0.26000 = 0$$

Kako bi se mogao koristiti Hurwitzov kriterij potrebno je napraviti bilinearnu transformaciju $z = \frac{1+w}{1-w}$:

$$(\frac{1+w}{1-w})^2 - 0.8\frac{1+w}{1-w} + 0.26 = 0$$
$$2.06w^2 + 1.48w + 0.46 = 0$$

Nužno je da su svi koeficijenti karakteristične jednadžbe istog predznaka:

$$a_2 = 2.06 > 0$$
$$a_1 = 1.48 > 0$$
$$a_0 = 0.46 > 0$$

Determinante moraju biti pozitivne:

$$D_1 = a_1 > 0$$

Sustav je stabilan.

Rješenje 12.6

a) Kako bi primijenili Routh–Hurwitzov kriterij potrebno je primijenti bilinearnu transformaciju na zadani diskretni sustav upravljanja.

$$G_r(z) = \frac{-0.19Kz^2 + 0.02Kz + 0.21K}{(1-0.19K)z^2 + (0.02K - 1.56)z + 0.21K + 0.6}$$

Karakteristična jednadžba diskretnog zatvorenog sustava upravljanja glasi:

$$P(z) = (1 - 0.19K)z^2 + (0.02K - 1.56)z + 0.21K + 0.6 = 0$$

Primjenom bilinearne transformacije $z = \frac{1+w}{1-w}$ slijedi:

$$P(w) = 0.79w^2 + (0.2 - 0.2K)w + 0.01K + 0.01 = 0$$

Za dobivenu karakterističnu jednadžbu provjeravaju se uvjeti stabilnosti:

$$0.2 - 0.2K > 0 \Rightarrow K < 1$$
$$0.01K + 0.01 > 0 \Rightarrow K > -1$$

Sustav je stabilan za $K \in (-1, 1)$.

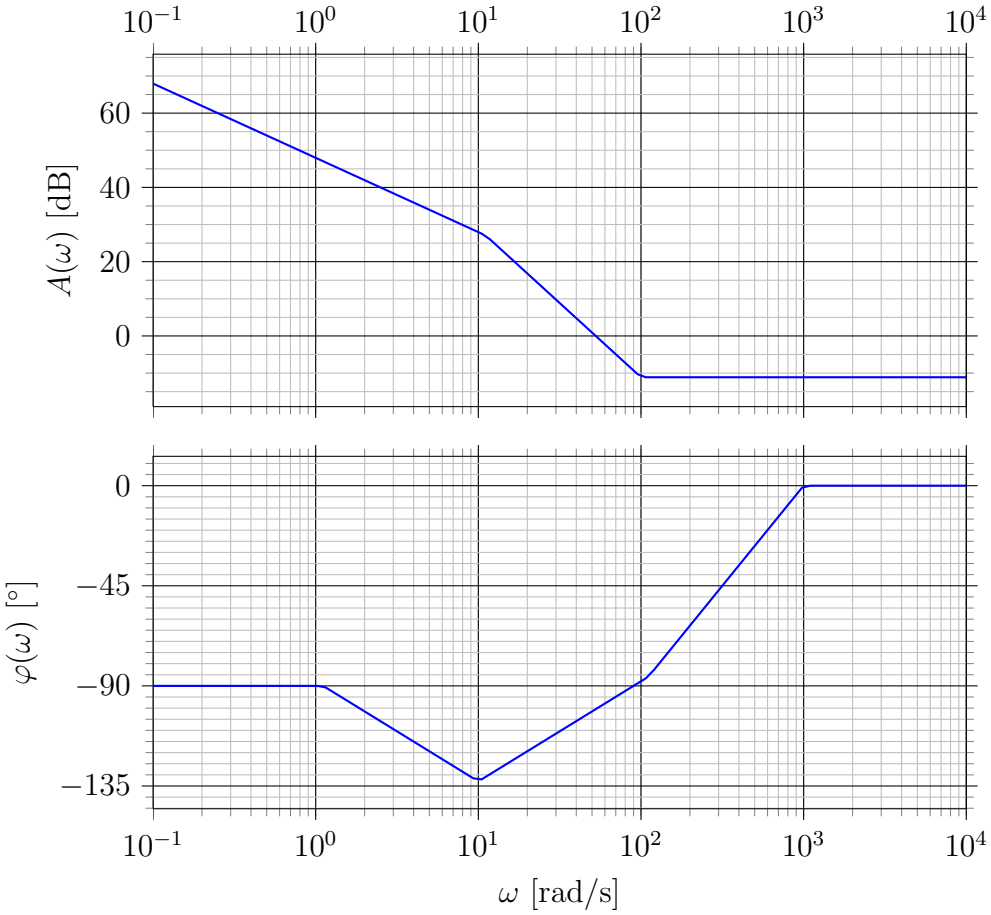
Rješenje 12.7

a) Vidi Sliku 12.9.

b) Karakteristična jednadžba: $f(z) = z^2(K + 1) - 1.8z + 0.8$.

- $f(1) = K - 0.8 > 0 \rightarrow K > 0.8$
- $f(-1) = K + 2.8 > 0 \rightarrow K > -2.8$
- $|0.8| < |K + 1| \rightarrow K > -0.2$

Konačno rješenje: $K > 0$.



Slika 12.9: Aproksimacija pravcima Bodeovog dijagrama

Poglavlje 13

Parametriranje PID regulatora

Zadatak 13.1

Zadana je prijenosna funkcija procesa:

$$G_p(s) = \frac{4(1-4s)}{(1+10s)(1+2s)}.$$

Potrebno je projektirati PI regulator korištenjem Ziegler-Nicholsove metode ruba stabilnosti.

Zadatak 13.2

Prijenosna funkcija procesa je:

$$G_p(s) = \frac{K_p}{(1+T_1 s)(1+T_2 s)(1+T_3 s)},$$

gdje su vremenske konstante iznosa $T_1 = 2$ s, $T_2 = 3$ s, $T_3 = 4$ s; pojačanje procesa iznosi $K_p = 1$.

Za navedeni proces projektirajte PID regulator korištenjem Ziegler-Nicholsove metode ruba stabilnosti.

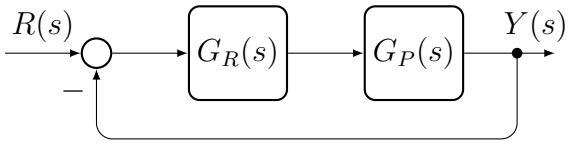
Zadatak 13.3

Sustav upravljanja prikazan je slikom 13.1 gdje je $G_R(s)$ PI strukture, a prijenosna funkcija procesa $G_p(s) = \frac{1}{s(s+1)(s+2)}$.

Parametrirajte regulator Ziegler-Nicholsovom metodom ruba stabilnosti. Za određivanje ruba stabilnosti koristite Nyquistov kriterij stabilnosti.

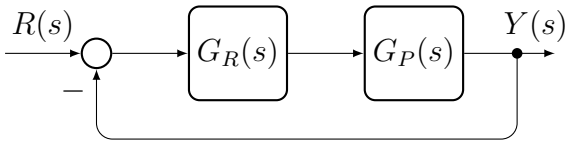
Zadatak 13.4

Zatvoreni sustav upravljanja zadan je slikom 13.2 gdje je $G_R(s)$ idealni regulator paralelne PID strukture. Prijenosna funkcija procesa je $G_p(s) =$



Slika 13.1: Sustav upravljanja.

$\frac{5}{(s+2)(s+1)^2}$.



Slika 13.2: Zatvoreni sustav upravljanja.

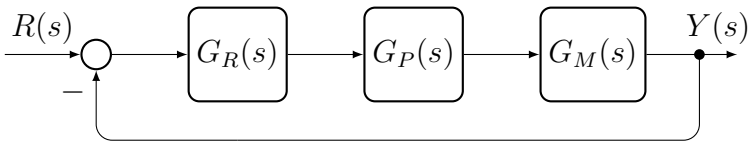
Parametrirajte regulator prema Ziegler-Nicholsovim pravilima koristeći metodu ruba stabilnosti. Za određivanje ruba stabilnosti koristite Nyquistov kriterij stabilnosti.

Zadatak 13.5

Sustav skladištenja fluida u spremniku cilindričnog oblika se sastoji od istosmjernog elektromotornog pogona koji upravlja ventilom i čija je dinamika pojednostavljeno opisana integracijskim djelovanjem $G_{EMP}(s) = \frac{X_v(s)}{U(s)} = \frac{1}{5s}$; ventila čija je linearizirana prijenosna funkcija u radnoj točki $G_v = \frac{Q_u}{X_v} = \frac{0.2}{1+0.1s}$; te spremnika čija je linearizirana prijenosna funkcija u radnoj točki $G_s = \frac{H}{Q_u} = \frac{25}{1+125s}$. Regulator razine fluida u spremniku je P tipa. Ziegler-Nicholsovom metodom ruba stabilnosti parametrirajte regulator.

Zadatak 13.6

Na slici 13.3 prikazan je zatvoreni krug upravljanja koji se sastoji od regulatora $G_R(s)$, procesa $G_P(s)$, te mjernoga člana $G_M(s)$. Prijenosna funkcija procesa je $G_P(s) = \frac{1}{s^2+2s+2}$.



Slika 13.3: Zatvoreni krug upravljanja.

a) Zigler–Nicholsovom metodom ruba stabilnosti odredite parametre PI regulatora $G_R(s) = K_R\frac{1+T_I s}{T_I s}$, ako je $G_M(s) = \frac{1}{s+2}$.

b) Zadan je regulator oblika $G_R(s) = \frac{1}{T_I s}$. Odredite parametar regulatora T_I koji minimizira kvadratičnu pogrešku regulacijskoga odstupanja (ISE kriterij) pri odzivu sustava na skokovitu promjenu referentne veličine $R(s) = \frac{1}{s}$. Uzmite da je $G_M(s) = 1$.

Zadatak 13.7

Zadana je prijenosna funkcija otvorenog kruga

$$G_o(s) = \frac{K_p}{s(s+1)^2},$$

pri čemu je $K_p > 0$.

a) Ziegler-Nicholsovom metodom ruba stabilnosti projektirajte PI regulator za upravljanje u zatvorenom krugu.

b) Za upravljanje procesom koristi se P regulator $G_R(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = 0.1$. Ako je zadan parametar pojačanja procesa $K_p = 1$, izračunajte iznos integralnog kriterija

$$I_e = \int_0^\infty e(\tau)d\tau,$$

pri čemu je $e(\tau)$ prijelazna funkcija regulacijskog odstupanja zatvorenog kruga upravljanja.

Zadatak 13.8

Zadana je prijenosna funkcija otvorenog kruga:

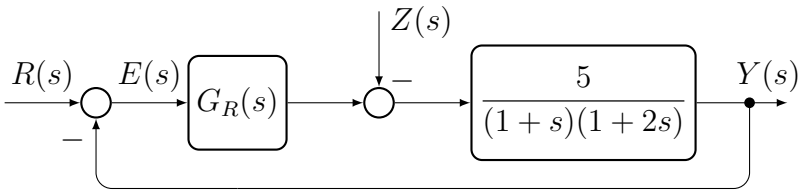
$$G_o\left(s\right) = \frac{0.6}{\left(1+40s\right)\left(1+25s\right)}.$$

Potrebno je projektirati PI regulator korištenjem Ziegler-Nicholsove metode prijelazne funkcije.

Zadatak 13.9

Sustav upravljanja zadan je slikom 13.4 gdje je $G_R(s)$ PI regulator.

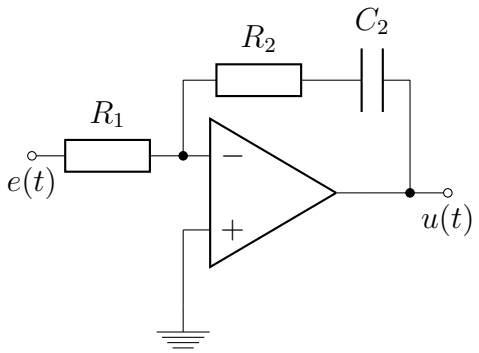
a) Analitički odredite prijelaznu funkciju procesa.



Slika 13.4: Sustav upravljanja.

b) Parametrirajte regulator $G_R(s)$ koristeći Ziegler-Nicholsovu metodu prijelazne funkcije.

c) Na slici 13.5 prikazan je PI regulator analogne izvedbe. Odredite vrijednosti otpora R_2 i kapaciteta C tako da regulator ima pojačanje $K_R = -5$ i vremensku konstantu $T_I = 2$ s. Zadan je otpor $R_1 = 100$ kΩ.



Slika 13.5: Analogni PI regulator

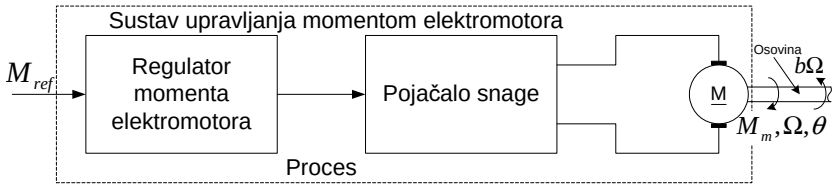
Zadatak 13.10

Funkcionalna shema sustava upravljanja momentom elektromotora prikazana je na slici 13.6. Proces izgradnje/razgradnje momenta motora M_m [Nm] opisan je diferencijalnom jednadžbom

$$T_1 \dot{M}_m = K_1 M_{ref} - M_m,$$

gdje je $T_1 = 20$ ms, $K_1 = 0.1\ \frac{\text{Nm}}{\text{V}}$ i M_{ref} [V] signal referentne veličine regulacijskog kruga po momentu motora.
Razvijeni moment motora M_m uzrokuje vrtnju motora što je opisano diferencijalnom jednadžbom

$$J\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t} = M_m - b\Omega,$$



Slika 13.6: Funkcionalna shema sustava upravljanja momentom elektromotora.

gdje je $J = 0.1\ \text{kgm}^2$ moment inercije rotora motora, $b = 0.01\ \frac{\text{kgm}^2}{\text{s}}$ koeficijent viskoznog trenja, a $\Omega\ \left[\frac{\text{rad}}{\text{s}}\right]$ je brzina vrtnje motora. Zakret motora θ [rad], za kojeg vrijedi

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \Omega,$$

regulira se kaskadnim sustavom upravljanja koji sadrži regulacijski krug brzine vrtnje motora (podređeni krug) i regulacijski krug kuta zakreta motora (nadređeni krug). Regulator brzine vrtnje ima PI strukturu, a regulator kuta zakreta je P strukture.

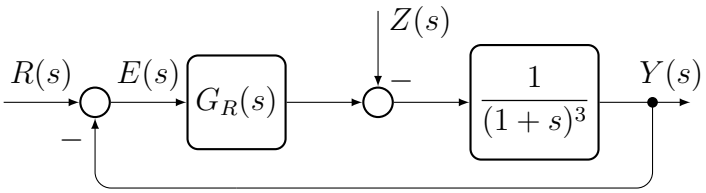
a) Prikažite ovaj kaskadni sustav upravljanja blokovskom shemom. Svakom bloku na shemi pridružite pripadnu prijenosnu funkciju.

b) Parametrirajte regulator brzine vrtnje prema postupku tehničkog optimuma ($\zeta = \frac{\sqrt{2}}{2}$). Zatvoreni regulacijski krug po brzini vrtnje strukturno pojednostavnite, tj. prikažite ga PT_1 članom.

c) Odredite pojačanje regulatora kuta zakreta tako da relativni koeficijent prigušenja regulacijskog kruga po zakretu iznosi $\zeta = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Pri tome uzmite u obzir strukturno pojednostavljenje pod b).

Zadatak 13.11

Zatvoreni sustav upravljanja zadan je slikom 13.7 gdje je $G_R(s)$ PI regulator.



Slika 13.7: Sustav upravljanja.

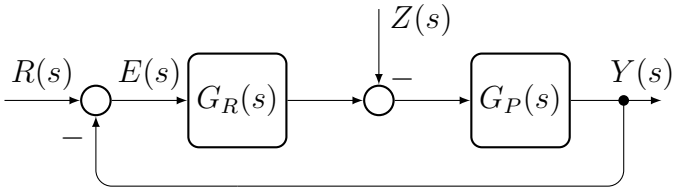
a) Odredite parametre regulatora minimizacijom ISE kriterija pri odzivu sustava na skokovitu promjenu poremećajne veličine. Zadani su izrazi za parcijalne derivacije ISE kriterija po parametrima regulatora:

$$\frac{\partial I_{3,4}}{\partial K_R} = \frac{(8-K_R)^2(2K_R+1)T_I + 9K_R(K_R-16)}{(16T_IK_R - 2K_R^3T_I + 2K_R^2(7T_I-9))^2}$$
$$\frac{\partial I_{3,4}}{\partial T_I} = \frac{(8-K_R)(K_R+1)T_I - 18K_R}{(16T_IK_R - 2K_R^3T_I + 2K_R^2(7T_I-9))^2}$$

b) Koristeći parametre regulatora određene pod a) odredite vrijednost IE kriterija pri odzivu sustava na skokovitu promjenu referentne veličine.

Zadatak 13.12

Zadan je sustav upravljanja prikazan slikom 13.8 gdje je $G_R(s)$ PI regulator, a $G_P(s)$ stabilan proces drugog reda čija je amplitudno-frekvencijska karakteristika prikazana slikom 13.9. Vremenskom konstantom regulatora kompenzira se veća vremenska konstanta procesa.



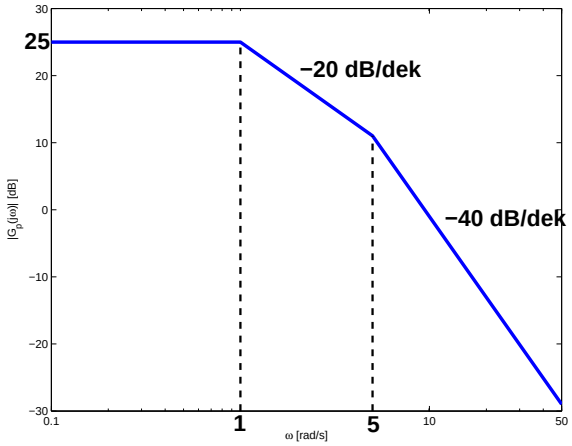
Slika 13.8: Sustav upravljanja.

a) Odredite prijenosnu funkciju procesa.

b) Odredite pojačanje regulatora uz uvjet da relativni koeficijent prigušenja zatvorenog sustava upravljanja iznosi $\zeta = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

c) Nacrtajte Bodeovu (amplitudnu i faznu) karakteristiku otvorenog regulacijskog kruga uz pojačanje regulatora $K_R = 0.141$ koristeći aproksimacije pravcima.

d) Diskretizirajte PI regulator uz $K_R = 0.141$ koristeći Tustinovu relaciju. Vrijeme uzorkovanja odredite na temelju presječne frekvencije ω_c tako da bude na polovici preporučenog intervala.



Slika 13.9: Amplitudno-frekvencijska karakteristika procesa (aproksimacija pravcima)

Zadatak 13.13

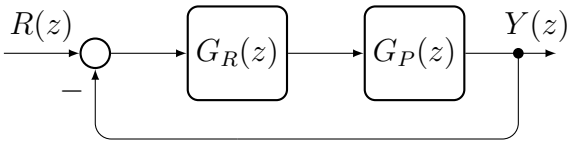
Zadana je prijenosna funkcija otvorenog kruga:

$$G_o(s) = \frac{0.4}{(1+125s)(1+50s)(1+25s)}.$$

Potrebno je projektirati PI regulator korištenjem Bodéovog prikaza frekvencijskih karakteristika (aproksimacije s pravcima) tako da se integracijskom vremenskom konstantom regulatora kompenzira dominantna vremenska konstanta procesa, te uz uvjet da nadvišenje prijelazne funkcije $y(t)$ zatvorenog kruga s jediničnom povratnom vezom iznosi $\sigma_m \approx 10\%$. Pri tome koristite približne relacije za sustav drugog reda koje povezuju vremensko i frekvencijsko područje.

Zadatak 13.14

Zatvoreni diskretni sustav upravljanja zadan je slikom 13.10.



Slika 13.10: Zatvoreni sustav upravljanja.

Neka je prijenosna funkcija procesa $G_P(z) = \frac{z+0.5}{(z-0.8)(z-0.2)}$, a regulator $G_R = \frac{z+a}{z+b}$. Odredite parametre diskretnog regulatora uz uvjet da nula regu-

latora krati dominantni pol procesa, a prijelazna funkcija zatvorenog sustava upravljanja u ustaljenom stanju iznosi 1.

13.1 Rješenja

Rješenje 13.1

Prvi način rješavanja pomoću frekvencijske karakteristike:

Frekvencijska karakteristika:

$$G_p(j\omega) = K_R \cdot \frac{4(1-4j\omega)}{(1+10j\omega)(1+2j\omega)} = \frac{4K_R(1-4j\omega)}{1-20\omega^2+12j\omega} \cdot \frac{1-20\omega^2-12j\omega}{1-20\omega^2-12j\omega}$$
$$= 4K_R \cdot \frac{1-68\omega^2}{(1-20\omega^2)^2+144\omega^2} + j4K_R \cdot \frac{80\omega^3-16\omega}{(1-20\omega^2)^2+144\omega^2}$$

Frekvencija oscilacija ω_π:

$$\operatorname{Im}\{G_p(j\omega_\pi)\} = 0$$
$$80\omega_\pi^3 - 16\omega_\pi = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega_\pi = 0.4472 \text{ s}^{-1}$$

Kritični iznos pojačanja $K_{R,kr}$:

$$|G_p(j\omega_\pi)| = |G_p(j\omega_c)| = 1$$
$$\frac{4K_{R,kr}\sqrt{1+16\omega_\pi^2}}{\sqrt{1+100\omega_\pi^2}\sqrt{1+4\omega_\pi^2}} = 1 \quad \Rightarrow \quad K_{R,kr} = \frac{\sqrt{1+100\omega_\pi^2}\sqrt{1+4\omega_\pi^2}}{4\sqrt{1+16\omega_\pi^2}} = 0.75$$

Period oscilacija i parametri regulatora:

$$T_{kr} = \frac{2\pi}{\omega_\pi} = 14.05 \text{ s}$$
$$K_R = 0.45K_{R,kr} = 0.3375$$
$$T_I = 0.85T_{kr} = 11.94 \text{ s}$$

Drugi način pomoću karakterističnog polinoma zatvorenog kruga: Karakteristični polinom i uvjeti stabilnosti:

$$\alpha_{cl}(s) = 20s^2 + (12-16K_R)s + 1 + 4K_R = 0$$
$$1 + 4K_R > 0 \quad \Rightarrow \quad K_R > -0.25$$
$$12 - 16K_R \quad \Rightarrow \quad K_R < 0.75$$

Rub stabilnosti se dobiva uz kritično pojačanje $K_R = K_{R,kr} = 0.75$. Frekvencija oscilacija na rubu stabilnosti se dobije uz $K_R = 0.75$:

$$\alpha_{cl}(s) = 20s^2 + 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega_\pi = \frac{1}{\sqrt{5}} \text{ s}^{-1}$$

Period oscilacija i parametri regulatora:

$$T_{kr} = \frac{2\pi}{\omega_\pi} = 2\pi\sqrt{5} = 14.05 \text{ s}$$
$$K_R = 0.45K_{R,kr} = 0.3375$$
$$T_I = 0.85T_{kr} = 11.94 \text{ s}$$

Rješenje 13.2

Prijenosna funkcija otvorenog kruga s P-regulatorom je:

$$G_o(j\omega) = \frac{K_s K_R}{1 - \omega^2(T_1T_2 + T_1T_3 + T_2T_3) + j\omega(T_1 + T_2 + T_3 - \omega^2 T_1T_2T_3)}$$

za rub stabilnosti vrijedi

$$G_o(j\omega_\pi) = -1,$$

pa se izjednačavanjem imaginarnog dijela s nulom dobije

$$\omega_\pi = \sqrt{\frac{T_1 + T_2 + T_3}{T_1T_2T_3}} = 0.6124 \quad \Rightarrow \quad T_{kr} = \frac{2\pi}{\omega_\pi} = 10.2604.$$

Uvrštavanjem u realni dio dobije se

$$K_{kr} = \frac{\omega_\pi^2(T_1T_2 + T_1T_3 + T_2T_3) - 1}{K_s} = 8.75.$$

Parametri PID regulatora su:

$$K_R = 0.6K_{kr} = 5.25, \quad T_I = 0.5T_{kr} = 5.1302 \text{ s}, \quad T_D = 0.12T_{kr} = 1.231 \text{ s}.$$

Rješenje 13.3

ZN metoda ruba stabilnosti radi se s P-regulatorom u zatvorenoj petlji:

$$G_o(s) = \frac{K_R}{s(s+1)(s+2)}$$

Nyquistovim kriterijem rub stabilnosti utvrđujemo kad je $\mathrm{Re}[G_o(j\omega_\pi)] = -1$. Pišemo:

$$G_o(j\omega) = \frac{K_R}{j\omega(1+j\omega)(2+j\omega)} = \frac{-3K_R}{\omega^4 + 5\omega^2 + 4} - j\frac{K_R(2-\omega^2)}{\omega(\omega^4 + 5\omega^2 + 4)} =$$
$$= \mathrm{R_o}(\omega) + \mathrm{jI_o}(\omega)$$

$$I_o = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega_\pi = \sqrt{2}$$

Kritično pojačanje dobije se iz uvjeta:

$$R_o(\omega_\pi) = -1 \;\Rightarrow\; K_{R,kr} = \frac{\omega_\pi^4 + 5\omega_\pi^2 + 4}{3} = 6$$

Period oscilacija je:

$$T_{kr} = \frac{2\pi}{\omega_\pi} = \pi\sqrt{2}\ \text{s} = 4.44\ \text{s}$$

Prema ZN-metodi PI regulator $G_R(s) = K_R\frac{1+T_I s}{T_I s}$ se parametrira ovako:

$$K_R = 0.45K_{R,kr} = 2.7,\ T_I = 0.85T_{kr} = 3.78\ \text{s}$$

Rješenje 13.4

$$G_o(s) = K_{kr}\frac{5}{(s+2)(s+1)^2} = K_{kr}\frac{5}{2-4\omega^2+j(5\omega-\omega^3)} =$$
$$= 5K_{kr}\frac{2-4\omega^2-j(5\omega-\omega^2)}{(2-4\omega^2)^2+(5\omega-\omega^3)^2}$$

$$I_o(\omega_\pi) = 0 \quad \Rightarrow \quad 5\omega_\pi - \omega_\pi^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega_\pi = \sqrt{5}$$

$$T_{kr} = \frac{2\pi}{\omega_\pi} = 2.81$$

$$R_o(\omega_\pi) = -1 = 5K_{kr}\frac{2-4\omega^2}{(2-4\omega^2)^2+(5\omega-\omega^3)^2} \quad \Rightarrow \quad K_{kr} = 3.6$$

Parametri PID regulatora su:

$$K_R = 0.6K_{kr} = 2.16, T_I = 0.5T_{kr} = 1.405\text{s}, T_D = 0.12T_{kr} = 0.3372\text{s}$$

Rješenje 13.5

$$K_{Rkr} = 10, K_R = 5$$

Rješenje 13.6

a) Prijenosna funkcija zatvorenoga kruga upravljanja glasi:

$$G_r(s) = \frac{G_o(s)}{1 + G_o(s)} = \frac{G_R(s)G_P(s)G_M(s)}{1 + G_R(s)G_P(s)G_M(s)},$$

iz čega slijedi karakteristična jednadžba zatvorenog kruga upravljanja:

$$P(s) = s^3 + 4s^2 + 6s + (4 + K) = 0$$

Korištenjem Hurwitzovog kriterija moguće je odrediti kritično pojačanje sustava.

$$a_0 > 0$$
$$4 + K > 0 \rightarrow K > -4$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 4 + K \\ 1 & 4 \end{vmatrix} > 0 \rightarrow K < 20$$

Iz intervala $K \in (-4, 20)$, slijedi da se rub stabilnosti sutav postiže za kritičnu vrijednost pojačanja $K_{kr} = 20$. Zatim je potrebno izračunati period oscilacija T_{kr} :

$$P(j\omega) = 4 + K - 4\omega^2 + j(6\omega - \omega^3)$$
$$Im\{P(j\omega)\} = 0 \rightarrow \omega_{kr} = \sqrt{6}\ s^{-1}$$

$$T_{kr} = \frac{2\pi}{\omega_{kr}} = 2.565\ s$$

Parametri PI regulatora dobiveni prema Ziegler–Nicholsovoj metodi ruba stabilnosti su:

$$K_R = 0.45K_{kr} = 9,$$
$$T_I = 0.85T_{kr} = 2.18.$$

b) Najprije je potrebno odrediti regulacijsko odstupanje zatvorenoga kruga upravljanja $E(s)$:

$$E(s) = \frac{1}{1 + G_o}\left[R(s) - Z(s)\right]$$
$$E(s) = \frac{T_I s^3 + 2T_I s^2 + 2T_I s}{T_I s^3 + 2T_I s^2 + 2T_I + 1}\frac{1}{s} = \frac{T_I s^2 + 2T_I s + 2T_I}{T_I s^3 + 2T_I s^2 + 2T_I + 1}$$

Odgovarajuće koeficijente dobivenog regulacijskog odstupanja potrebno je uvrstiti u dostupni analitički proračun ISE kriterija za racionalnu funkciju trećega reda:

$$I_{3,3} = \frac{c_2^2 d_0 d_1 + (c_1^2 - 2c_0c_2)d_0d_3 + c_0^2 d_2 d_3}{2d_0d_3(-d_0d_3 + d_1d_2)}$$
$$I_{3,3} = \frac{T_I + 4T_I^2}{4T_I - 1}$$

Optimalna vrijednost parametra T_I dobiva se derivacijom funkcije $I_{3,3}$ i potom izjednačavanjem dobivenoga izraza s nulom:

$$\frac{\partial I_{3,3}}{\partial T_I} = 0$$
$$\frac{(1+8T_I)(4T_I-1) - 4(T_I + 4T_I^2)}{(4T_I-1)^2} = 0$$
$$16T_I^2 - 8T_I - 1 = 0$$

Dobivena kvadratna jednadžba ima dva rješenja. Za negativno rješenje sustav je nestabilan. Tražena vrijednost prametra regulatora je pozitivno rješenje kvadratne jednadžbe:

$$T_I = 0.6035.$$

Rješenje 13.7

a) $K_{R_{kr}} = \frac{2}{K_p}$, $T_{kr} = 2\pi$ $[s]$. Prema tome, $K_R = \frac{0.9}{K_p}$, $T_I = 5.341$.

b) $I_e = \int_0^\infty e(\tau)d\tau = \lim_{s\to 0} \frac{1}{s} sG_r(s)R(s) = 10$.

Rješenje 13.8

Izraz za $Y(s)$ dobije se iz prijenosne funkcije i jedinične skokovite pobude u Laplaceovom području:

$$G_o(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} \quad \Rightarrow \quad Y(s) = G(s) \cdot U(s) = \frac{0.6}{(1+40s)(1+25s)} \cdot \frac{1}{s}$$

Svođenjem ne nešto prikladniji oblik i rastavom na parcijalne razlomke dobije se:

$$Y(s) = \frac{0.6}{40 \cdot 25} \cdot \frac{1}{s\left(s+\frac{1}{40}\right)\left(s+\frac{1}{25}\right)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+\frac{1}{40}} + \frac{C}{s+\frac{1}{25}}$$

gdje su koeficijenti:

$$A = s \cdot \frac{0.6}{40 \cdot 25} \cdot \frac{1}{s\left(s+\frac{1}{40}\right)\left(s+\frac{1}{25}\right)}\bigg|_{s=0} = 0.6$$

$$B = \left(s+\frac{1}{40}\right) \cdot \frac{0.6}{40 \cdot 25} \cdot \frac{1}{s\left(s+\frac{1}{40}\right)\left(s+\frac{1}{25}\right)}\bigg|_{s=-\frac{1}{40}} = -1.6$$

$$C = \left(s+\frac{1}{25}\right) \cdot \frac{0.6}{40 \cdot 25} \cdot \frac{1}{s\left(s+\frac{1}{40}\right)\left(s+\frac{1}{25}\right)}\bigg|_{s=-\frac{1}{25}} = 1$$

Primjenom inverzne Laplaceove transformacije dobije se prijelazna funkcija:

$$y(t) = h(t) = L^{-1}\{Y(s)\} = \left(0.6 - 1.6e^{-\frac{t}{40}} + e^{-\frac{t}{25}}\right) \mathrm{S}(t)$$

Da bi došli do točke infleksije potrebne su nam prva i druga derivacija prijelazne funkcije. Prva derivacija (težinska funkcija) glasi:

$$\dot{h}(t) = \left(0.04e^{-\frac{t}{40}} - 0.04e^{-\frac{t}{25}}\right) \mathrm{S}(t) + \left(0.6 - 1.6e^{-\frac{t}{40}} + e^{-\frac{t}{25}}\right) \delta(t)$$

S obzirom da se točka infleksije ne nalazi na početku prijelazne funkcije, drugi dio izraza $\dot{h}(t)$ koji je neodređen izraz u trenutku $t = 0$ možemo zanemariti, pa je:

$$\dot{h}(t) = \left(0.04e^{-\frac{t}{40}} - 0.04e^{-\frac{t}{25}}\right) \mathrm{S}(t)$$

Druga derivacija, uz slično zanemarenje, iznosi:

$$\ddot{h}(t) = \left(-\frac{0.04}{40}e^{-\frac{t}{40}} + \frac{0.04}{25}e^{-\frac{t}{25}}\right) \mathrm{S}(t)$$

Izjednačavanjem $\ddot{h}(t)$ s nulom i rješavanjem dobivene jednadžbe za $t > 0$, dobije se točka infleksije:

$$-\frac{0.04}{40}e^{-\frac{t_i}{40}} + \frac{0.04}{25}e^{-\frac{t_i}{25}} = 0$$

$$5e^{-\frac{t_i}{40}} = 8e^{-\frac{t_i}{25}} \Big| \ln$$

$$\ln 5 - \frac{t_i}{40} = \ln 8 - \frac{t_i}{25}$$

$$t_i = 31.3336 \text{ s}$$

Iznos prijelazne funkcije u točki infleksije:

$$y_i = h(t_i) = 0.1545$$

Nagib tangente u točki infleksije:

$$k = \dot{h}\left(t_i\right) = 0.0069$$

Jednadžba tangente u točki infleksije:

$$\begin{aligned} y - y_i &= k\left(t - t_i\right) \\ y &= 0.0069t - 0.0602 \end{aligned}$$

Vrijeme zadržavanja t_z:

$$0 = 0.0069t_z - 0.0602 \quad \Rightarrow \quad t_z = 8.7828 \text{ s}$$

Vrijeme kad tangenta presijeca stacionarno stanje prijelazne funkcije $K_s = h(\infty) = 0.6$:

$$0.6 = 0.0069\left(t_z + t_a\right) - 0.0602 \quad \Rightarrow \quad t_a = 87.5508 \text{ s}$$

Parametri PI regulatora:

$$\begin{aligned} K_R &= 0.9\frac{t_a}{t_z K_s} = 14.95 \\ T_I &= 3.33t_z = 29.25 \text{ s} \end{aligned}$$

Rješenje 13.9

a)

$$Y(s) = G_p(s) \cdot \frac{1}{s} = \frac{5}{s(1+s)(1+2s)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{1+s} + \frac{C}{1+2s}$$

$$A = 5 \qquad B = 5 \qquad C = -20$$

$$y(t) = \left(5 + 5e^{-t} - 10e^{-\frac{t}{2}}\right) S(t)$$

b) Iz prijenosne funkcije očitamo statičko pojačanje procesa $K_s = 5$. Za određivanje vremena t_z i t_a potrebno je izračunati prve dvije derivacije prijelazne funkcije $y(t)$ (zanemaruju se rezultatati derivacija koji se dobiju oko 0, tj. derivacija step funkcije, jer nisu potrebni za proračun):

$$\dot{y}(t) = -5e^{-t} + 5e^{-\frac{t}{2}}$$

$$\ddot{y}(t) = 5e^{-t} - 2.5e^{-\frac{t}{2}}$$

Točka infleksije se određuje iz druge derivacije:

$$\ddot{y}(t_{in}) = 0 \quad \Rightarrow \quad t_{in} = \ln 4 = 1.386s$$
$$y(t_{in}) = \frac{5}{4} = 1.25.$$

U točki infleksije provlači se tangenta na prijelaznu funkciju:

$$y_t(t) = k \cdot t + l$$

$$k = \dot{y}(t_{in}) = \frac{5}{4} = 1.25$$
$$l = y(t_{in}) - k \cdot t_{in} = \frac{5}{4}(1 - \ln 4) = -0.483$$

Vremena t_z i t_a određujemo iz točki gdje tangenta siječe pravac $y = 0$ i $y = 5$:

$$y_t(t_z) = 0 \quad \Rightarrow \quad t_z = \ln 4 - 1 = 0.386s$$
$$y_t(t_z + t_a) = 5 \quad \Rightarrow \quad t_a = 4s$$

Parametri regulatora određuju se prema relacijama:

$$K_R = 0.9\frac{t_a}{t_z K_s} = 1.864$$

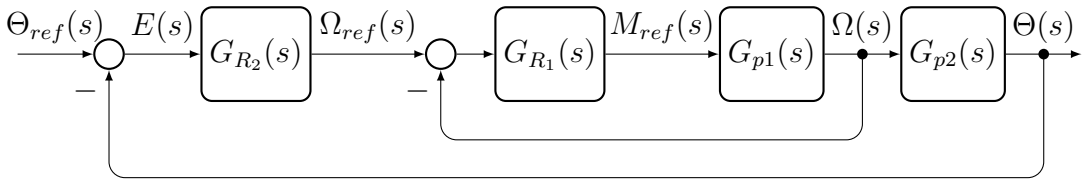
$$T_I = 3.33t_z = 1.286s$$

c) Prijenosna funkcija regulatora:

$$G_R(s) = -\frac{R_2}{R_1}\frac{1 + sR_2C}{sR_2C} = K_R\frac{1 + sT_I}{sT_I}$$

$$R_2 = -K_R R_1 = 500k\Omega$$
$$C = \frac{T_I}{R_2} = 4\mu F$$

Rješenje 13.10



Slika 13.11: Blokovska shema kaskadnog sustava upravljanja.

a) Blokovska shema je na slici 13.11: Pritom je:

$$G_{R1}(s) = K_{R1}\frac{1+T_{I1}s}{T_{I1}s},$$
$$G_{R2}(s) = K_{R2},$$
$$G_{p1}(s) = \frac{K_1}{T_1 s+1}\frac{\frac{1}{b}}{\frac{J}{b}s+1},$$
$$G_{p2}(s) = \frac{1}{s}$$

b) Unutarnji krug – kompenzira se dominantna vremenska konstanta ($T_{I1} = \frac{J}{b} = 10$ s), te se K_{R1} podešava za $\zeta = \frac{\sqrt{2}}{2}$:

$$G_{o1}(s) = \frac{\frac{K_{R1}K_1}{b}}{T_{I1}s(1+T_1 s)}$$
$$K_{R1} = \frac{b}{K_1}\frac{T_{I1}}{2T_1} = 25$$

Prijenosna funkcija zatvorenog unutarnjeg regulacijskog kruga:

$$G_{r1}(s) = \frac{1}{1+2T_1 s+2T_1^2 s^2},$$

što se može aproksimirati PT_1 članom

$$G_{r1}(s) \approx \frac{1}{1+2T_1 s}$$

c) Prijenosna funkcija otvorenog vanjskog regulacijskog kruga nakon strukturnog pojednostavnjenja prijenosne funkcije zatvorenog podređenog kruga:

$$G_{o2}(s) = \frac{K_{R2}}{s(1+2T_1 s)}$$

Uz zahtjev $\zeta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ za vanjski krug proizlazi:

$$K_{R2} = \frac{1}{2\cdot 2T_1} = \frac{1}{4T_1} = 12.5$$

Rješenje 13.11

a) Za određivanje minimuma integralnog kriterija, potrebno je derivacije po parametrima regulatora izjednačiti s nulom. Iz $\frac{\partial I_{3,4}}{\partial T_I} = 0$ proizlazi:

$$T_I = \frac{18K_R}{8 + 7K_R - K_R^2}$$

Iz $\frac{\partial I_{3,4}}{\partial K_R} = 0$ slijedi:

$$T_I = \frac{9K_R\,(16 - K_R)}{(8 - K_R)^2\,(2K_R + 1)}$$

Izjednačavanjem gornje dvije relacije dobiva se sljedeće:

$$\begin{aligned} 2\,(8 - K_R)\,(2K_R + 1) &= (16 - K_R)\,(K_R + 1) \\ 3K_R\,(K_R - 5) &= 0 \end{aligned}$$

Optimalni parametri PI regulatora iznose: $K_R = 5$, $T_I = 5\text{s}$.

b) Za računanje IE kriterija, potrebno je odrediti $E(s)$:

$$R(s) = \frac{1}{s}$$

$$\begin{aligned} E(s) &= \frac{G_p(s)}{1 + G_p(s)G_R(s)} R(s) \\ &= \frac{K_p T_I}{sT_I\left(1 + 3T_p s + 3T_p^2 s^2 + T_p^3 s^3\right) + K_p K_R\,(1 + T_I s)} \\ &= \frac{1}{s^4 + 3s^3 + 3s^2 + 6s + 1} \end{aligned}$$

$$\int_0^\infty e(t)\,dt = \lim_{s\to 0} s\frac{1}{s}E(s) = \frac{T_I}{K_R} = 1$$

Rješenje 13.12

a) Prijenosna funkcija procesa:

$$G_p(s) = \frac{K_p}{(1+s)(1+\frac{s}{5})}$$

$$20\log K_p = 25 \quad \Rightarrow \quad K_p = 10^{\frac{25}{20}} = 17.78$$

b) Nulom PI regulatora kompenzira se domimantna vremenska konstanta: $T_I = 1\text{s}$.
Tada prijenosna funkcija otvorenog kruga glasi:

$$G_o(s) = \frac{K_R K_p}{s(1+\frac{s}{5})}$$

Prijenosna funkcija zatvorenog kruga:

$$G_z(s) = \frac{G_o(s)}{1+G_o(s)} = \frac{1}{1+\frac{s}{K_R K_p}+\frac{s^2}{5K_R K_p}} = \frac{1}{1+\frac{2\zeta}{\omega_n}s+\frac{s^2}{\omega_n^2}}$$

$$\omega_n = \sqrt{5K_R K_p}$$

$$K_R = \frac{5}{2K_p} = 0.141$$

c) Prijenosna funkcija otvorenog kruga:

$$G_o(s) = \frac{2.5}{s(1+\frac{s}{5})}$$

Bodeova karakteristika prikazana je slikama 13.12 i 13.13.

d) Presječna frekvencija $\omega_c = 2.5s^-1$ se očitava sa slike 13.12. Vrijeme uzorkovanja iznosi:

$$T = \frac{0.17+0.34}{2\omega_c} = 102ms$$

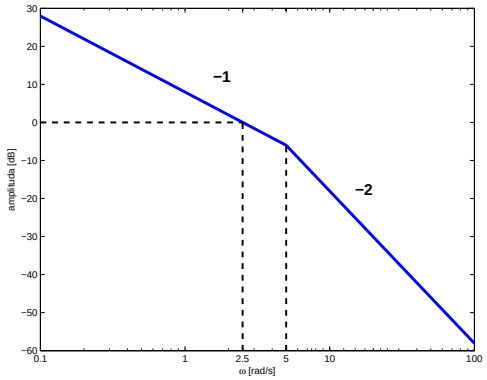
U $G_R(s)$ uvrštavamo $s = \frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1} = \frac{1}{0.051}\frac{z-1}{z+1}$:

$$G_R(z) = K_R\left(1+\frac{T}{2T_I}\frac{z+1}{z-1}\right) = 0.141\frac{1.051z+0.949}{z-1}$$

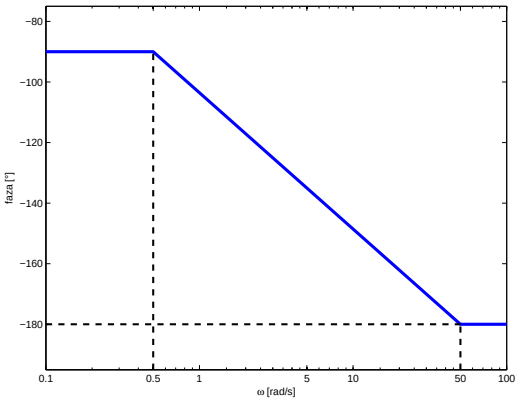
Rješenje 13.13

Integracijska vremenska konstanta: $T_I = T_{max} = 125$ s.
Prijenosna funkcija PI regulatora:

$$G_R(s) = K_R \cdot \frac{1+125s}{125s}$$



Slika 13.12: Amplitudno-frekvencijska karakteristika otvorenog regulacijskog kruga



Slika 13.13: Fazno-frekvencijska karakteristika otvorenog regulacijskog kruga

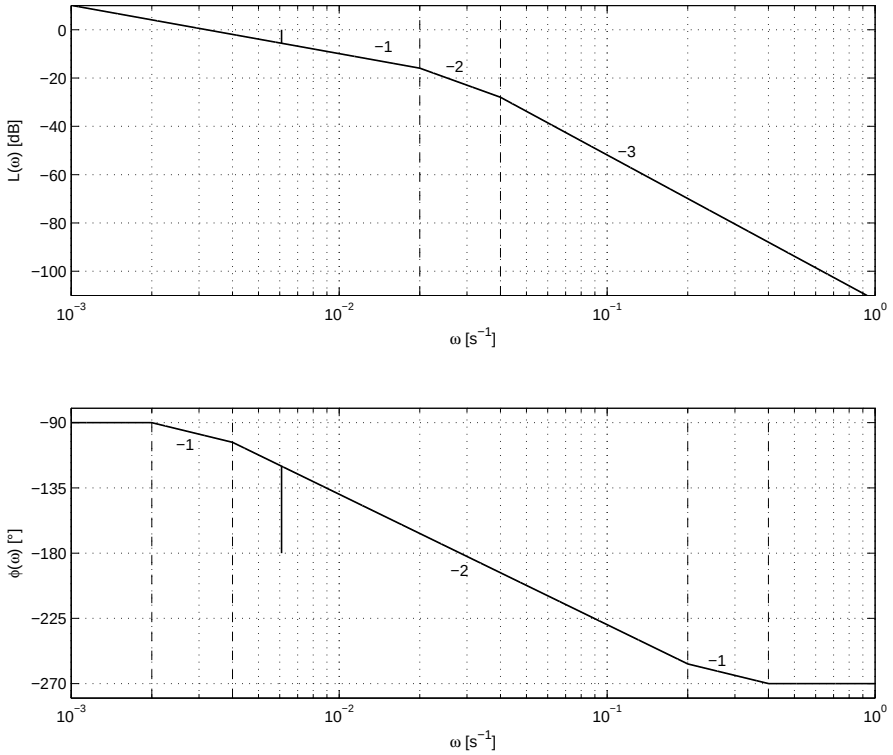
Prijenosna funkcija otvorenog kruga s PI regulatorom:

$$G_{oR}(s) = G_R(s) \cdot G_o(s) = K_R \cdot \frac{1+125s}{125s} \cdot \frac{0.4}{(1+125s)(1+50s)(1+25s)} = \\ = \frac{0.0032K_R}{s(1+50s)(1+25s)}$$

Iz uvjeta $\sigma_m \approx 10\%$ i približne relacije $\gamma\,[^\circ] \approx 70 - \sigma_m\,[\%]$ slijedi da fazno osiguranje mora iznositi $\gamma \approx 60^\circ$.

Crta se Bodéov dijagram uz pojačanje regulatora $K_R = 1$ (slika 13.14).

Sa slike 13.14 očitava se presječna frekvencija $\omega_c = 0.0061\ \mathrm{s}^{-1}$, te iznos pojačanja za koji je potrebno podići amplitudnu karakteristiku $K_R = 5.6\ \mathrm{dB} = 1.906$.



Slika 13.14: Bodéov dijagram otvorenog kruga s regulatorom.

Rješenje 13.14

Prijenosna funkcija otvorenog kruga ima oblik:

$$G_o(z) = G_R(z)G_P(z) = \frac{(z+0.5)(z+a)}{(z-0.8)(z-0.2)(z+b)}.$$

Dominantni pol procesa je $z_d = 0.8$, što znači da je $a = -0.8$ pa je prijenosna funkcija otvorenog kruga:

$$G_o(z) = G_R(z)G_P(z) = \frac{z+0.5}{(z-0.2)(z+b)}.$$

Prijelazna funkcija u ustaljenom stanju iznosi:

$$y_\infty = \lim_{z\to 1}\frac{z-1}{z}Y(z) = \lim_{z\to 1}\frac{z+0.5}{(z-0.2)(z+b)+(z+0.5)} = 1.$$

Slijedi da je $b = -1$.