Rješavanje modela problema "Option Pricing" dinamičkim programiranjem

Optimalno upravljanje: Seminarski rad

Aldina Bundavica
Univerzitet u Sarajevu
Elektrotehnički fakultet
Sarajevo, BiH
abundavica1@etf.unsa.ba

***Abstract*—The aim of this work is to bring together the method of dynamic programming relevant to option pricing. Dynamic programming is a technique for solving dynamic optimization problems with a recursive structure. After introducing the financial terms, such as options, we review the idea of dynamic programming and then discuss about solving option pricing problem with dynamic programming approach. It is defined what is Bellman's principle of optimality. The successful attempt to price options is due to binomial trees. We propose a numerical procedure based on dynamic programming approach.**

***Index Terms*—dynamic programming, option pricing, binomial tree**

I. Uvod

Ideja trgovinom opcija datira još iz doba Feničana. Poznato je da su oni, a kasnije i Rimljani koristili slične ugovore pri trgovini. Ono što razlikuje tržište novca od tržišta robe je prvenstveno način na koji se trgovina obavlja. Naime, na burzama je trgovina novcem, a kasnije i drugim oblicima financijskih sredstava koji se pojavljuju kao predmet razmjene, bila podvrgnuta nekoj vrsti standardizacije kao što su količina, datum isporuke i slično. Tako nastaju prvi ugovori koji se vezuju za financijska sredstva. U Americi su se opcije pojavile kad i akcije, međutim kako je svaki ugovor bio jedinstven, nije se javljala velika potražnja za njima. Tek 60-ih godina 20. stoljeća uvode se stroga pravila i standardi pri izradi ugovora. Dana 26. aprila 1973. godine započela je prva trgovina opcijama, kada je ostvarena 911 transakcija, a danas taj broj na dnevnom nivou iznosi 20000. Razvojem bankarskog sektora i osnivanjem banaka dolazi do razvoja finansijskog tržišta i banke počinju svoje depozite čuvati u obliku obveznica i akcija trgovačkih kompanija [1].

A. Opis problema

Prije ikakvog rješavanja zadatka, potrebno je uvesti neke financijske termine, koji će pomoći u razumjevanju problema. **Opcija** je ugovor koji daje pravo, ali ne i obavezu da se kupi ili proda podloga u nekom budućem trenutku (*datum dospjeća T*) po fiksnoj cijeni (*štrajk cijena K*). Opcija koja daje pravo na kupnju naziva se kupovna opcija (*call option*), a ona koja daje pravo na prodaju – prodajna opcija (*put option*). To se pravo plaća *premijom C*. Cijena podloge u nekom trenutku $0 \leq t \leq T$ se označava sa S_T. U ovisnosti od vremena realizacije postoji podjela na opcije koje se mogu izvršiti samo na datum dospijeća - *europske opcije* i opcije koje koje se mogu izvršiti u bilo kojem trenutku od trenutka posjedovanja do trenutka dospijeća - *američke opcije* [2].

Notacija. Simboli koji se koriste su sljedeći:

- t trenutno vrijeme
- T datum dospijeća
- N broj koraka
- K štrajk cijena
- S_0 početna cijena
- S_t cijena podloge u trenutku t
- σ promjenjivost
- r risk-free rate (stopa bez rizika)
- $V_t(S_t)$ vrijednost opcije u trenutku t za cijenu S_t

Najveća enigma u valuaciji cijene je da strategija trgovanja opcijama nije poznata *a priori*. Neizvjesnost vlasnikove strategije opcijama se nadmašuje maksimiziranjem cijene nad svim prihvatljivim strategijama trgovanja [3]. Na ovaj način cijena call opcije u trenutku *t*=*T* je jednaka

$$C_T = max\left\{S_T - K, 0\right\} \tag{1}$$

Iz ovoga se zaključuje da se call opcija izvršava jedino u slučaju ako je cijena akcije veća od štrajk cijene. Samo onda se ostvaruje profit. Za S_T = 0 se kupuje opcija.
Grafik 1 Prikazuje kako se profit pri kupnji ostvaruje samo kada vrijedi relacija

$$S_T > K + C \tag{2}$$

Grafik 2 prikazuje kako je prodavač call opcije izložen gubitku jedino u slučaju izvršavanja opcije od strane kupca. Lako se može zaključiti da se opcije kupuju onda kada se očekuje rast cijena akcije.

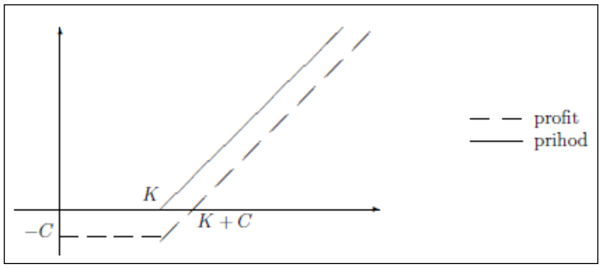

Figure 1. Prihod za kupca call opcije [2]

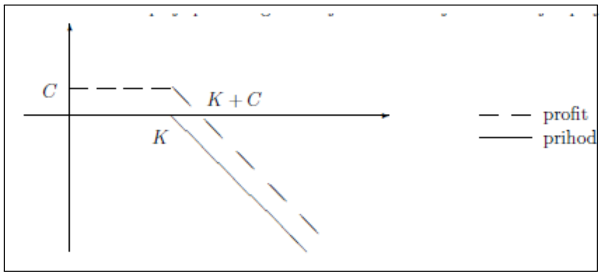

Figure 2. Gubitak za prodavača call opcije [2]

Vrijednost put opcije je jednaka

$$P_T = max\{K - S_T, 0\} \tag{3}$$

i ona se izvršava jedino kad je cijena akcije manja od štrajk cijene. Ova vrsta opcije se kupuje po redovnoj cijeni, a prodaje po štrajk cijeni.

Grafici 3 i 4 prikazuju prihode pri kupovini, odnosno pri prodaji put opcije.

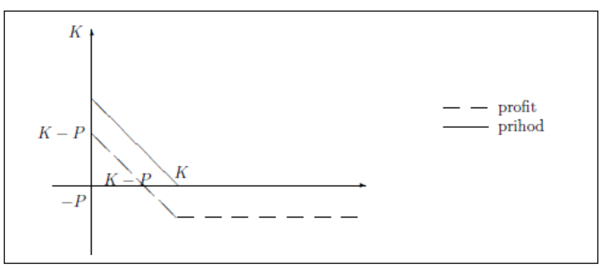

Figure 3. Prihod za kupca put opcije [2]

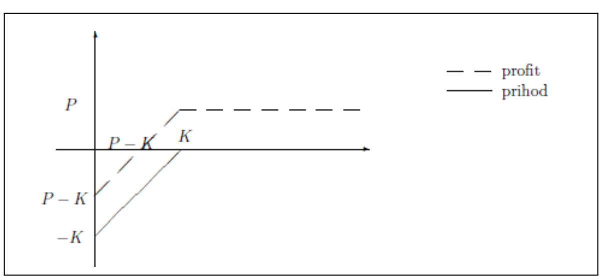

Figure 4. Prihod za prodavača put opcije [2]

Dobitak, odnosno gubitak kupca ili prodavača call opcije je neograničen, dok je dobitak, odnosno gubitak kupca ili prodavača put opcije ograničen štrajk cijenom [1]. Relacije 1 i 3 se mogu objediniti u jednu,

$$V(S_t) = \begin{cases} (S_t - K)^+, & call \\ (K - S_t)^+, & put \end{cases} \tag{4}$$

, gdje $(x)^+$ označava funkciju $\max\{0, x\}$ [4].

Najvažniji problem kod trgovanja cijenama je određivanje vrijednosti opcije, to jest premije koju kupac treba platiti prodavaču opcije. U literaturi je ovaj termin poznat kao *valuacija opcije*. Za izračunavanje cijena opcija koriste se mnoge metode kao što su Monte Carlo metoda, binomni modeli, Black-Sholes model i mnoge druge numeričke metode. Međutim uvijek se kao problem nameće vrijeme izračunavanja. Ovdje se kao jedno od rješenja nudi dinamičko programiranje, koje će mnogo brže dovesti do rezultata, nego neki klasični pristup, gdje se vrijeme eksponencijalno povećava. U mnoštvu pristupa i metoda izabran je binomni model za rješavanje cijena opcija. Ovaj model izričito je izabran zbog svoje jednostavnosti.

B. Pregled literature vezane za opisani problem

Pri pisanju ovog rada pomogli su mnogi radovi pronađeni na internetu. Usmjerilo se ka tome da se traže stručne literature, objavljeni članci i master teze. Neke od njih su sljedeće:

- Kleineberg Jon, Tardos Eva, Algoritm design, Cornell University, 2011
- Andrzej Palczewski, predavanja na predmetu: Computational methods in finance, Faculty of Mathematics, Informatics and Mechanics, Poland, 2019
- Yun-Hsuan Yeh, Dynamic programming approach to price american options, National Sun Yat-sen University, 2012
- Narayan Ganesan, Roger D. Chamberlain, Jeremy Buhler, Acceleration of Binomial Options Pricing via Parallelizing along Time-axis on a GPU, in Proc. of Symp. on Application Accelerators in High Performance Computing, 2009

C. Moguće aplikacije u praksi

Opcije su privlačne investitorima, jer ih štite od većih promjena tržišnih cijena, odnosno one im omogućavaju veće polemike po pitanju budućih kretanja na tržištu. One omogućavaju vlasnicima obveznica zaštitu svojih institucija, ali isto tako omogućavaju potencijalni prihod. Na američkim burzama se najviše trguje opcijama [6].
Izračunavanje cijena opcija nekim bržim načinom, kao što je dinamičko programiranje, omogućava ekonomistima bolju pripremu za velike promjene na tržištu čak i ako je u tom trenutku neizvjesno u kom smjeru će se kretati cijene. Prednost binomnog modela za određivanje cijena opcija u odnosu na druge modele je ta što je primjenjiv u različitim uvjetima. Razlog tome je što se on temelji na vrijednosti u određenom vremenskom razdoblju, a ne u fiksiranom vremenskom trenutku. Za opcije s više izvora sigurnosti, ovaj model se rjeđe primjenjuje.

II. Korišteni algoritam

A. Opis dinamičkog programiranja

Osnovna ideja dinamičkog programiranja je pronaći način koji će razbiti problem na razuman broj potproblema. Na ovaj način se nalaze optimalna rješenja potproblema, te se dolazi do konačnog rješenja. Može se slobodno reći da se pristup dinamičkog programiranja može izraziti frazom *zavadi-pa-vladaj* [7].
Nakon što se problem razloži na više manjih potproblema, oni se rješavaju rekurzivnom metodom. Pronađena optimalna rješenja potproblema se međusobno porede, te koriste u traženju optimalnog rješenja glavnog problema.

B. Binomni model cijena opcija

Binomni model cijena opcija je vjerojatnosni model, koji opisuje promjenu cijene imovine tijekom vremena. Ovaj model diskretizira vrijeme i pretpostavlja se da cijena može rasti ili padati samo za određen broj. Ovaj model, u praksi, za dovoljan broj koraka predstavlja dobru aproksimaciju neprekidnih modela. Binomni model predstavlja najjednostavniji model za razumijevanje određivanje cijena opcija.

Cijena opcije se u svakom vremenskom trenutku računa u odnosu na prethodne vrijednosti. Ako je S(t) cijena imovine u trenutku t, onda je S(t+ δt) cijena u sljedećem trenutku uvećana u puta (u·S sa vjerojatnošću p_u ili umanjena d puta (d·S) sa vjerojatnošču $p_d = 1 - p_u$ [4].

Parametri *u* i *d* ovise o promjenjivosti imovine σ. Ovaj parametar se statistički određuje i dostupan je na stranicama burzi. Pretpostavlja se da je za mali vremenski period δ t i određene vrijednosti parametara u i d, promjenjivost σ ista i u realnom i u slučaju neutralnog rizika [5].

Postoji nekoliko modela binomnog stabla i oni se razlikuju prema računanju parametara p, u i d. Kada se govori o binomnom modelu, najčešće se misli na Cox-Ross-Rubinstein model. Međutim ovdje je korišten *Jaroow-Rudd Risk Neutral model* ili kako se još i naziva *model jednake vjerojatnosti*. Prema ovom modelu parametri p, d i u se računaju prema sljedećim formulama [8]:

$$p = \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d} \tag{5}$$

$$u = e^{(r-\sigma^2/2)\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}} \tag{6}$$

$$d = e^{(r-\sigma^2/2)\Delta t - \sigma\sqrt{\Delta t}} \tag{7}$$

C. Svođenje opisanog problema u formu korištenog algoritma

Zadatak je izračunati trenutnu cijenu opcije *V* za imovinu početne cijene S_0 i štrajk cijene *K* u nekom trenutku *T*. Također je potrebno uključiti i imovinsku promjenjivost σ i stopu bez rizika (*risk-free rate*). Kako bi se izračunala vrijednost *V*, koristi se rekurzija dinamičkog programiranja bazirana na jednadžbama 14 i 15. Rekurzija se predstavlja kao *lišće* binomnog stabla kao što je to prikazano na slici 5.
Nakon što se izračuna prirast vremena, moguće je pomoću formula 5, 6 i 7 odrediti p, u i d. Nakon što se ovi parametri izračunaju, računa se *money market account* (B_i).

$$\Delta t = T/n \tag{8}$$

$$B = e^{r \cdot \Delta t} \tag{9}$$

Sada se računaju cijene kao na slici 5 pomoću formula 10, 11 i 12.

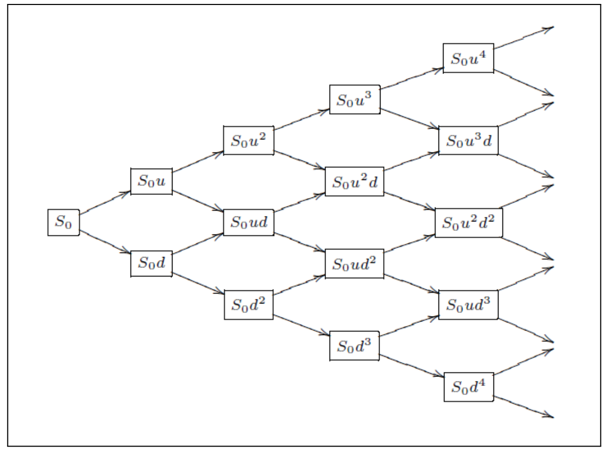

Figure 5. Binomno stablo

$$S_{00} = S_0 \tag{10}$$

$$S_{jM} = S_{00}u^j d^{M-j}, j = 0, 1..., M \tag{11}$$

$$S_{jM} = S_{00}u^j d^{M-j}, j = 0, 1..., M \tag{12}$$

$$V_{jM} = h(S_{jM}, j = 0, 1..., M \tag{13}$$

Ako se računaju europske opcije primjenjuje se sljedeća formula [9], te se u konačnici dobije vrijednost opcije:

$$V_{ji} = e^{-r\Delta t}(pV_{j+1,i+1} + (1-p)V_{j,i+1}), i = M-1, M-2..., 0 \tag{14}$$

Za računanje američke opcije vrijednost opcije se računa prema sljedećem izrazu:

$$V_{ji} = max(h(S_{ji}), e^{-r\Delta t}(pV_{j+1,i+1} + (1-p)V_{j,i+1})), \quad i = M-1, M-2..., 0 \tag{15}$$

Relacija iznad u osnovi predstavlja esencijalnu ideju dinamičkog programiranja. U nastavku se navodi Bellmanov princip optimalnosti:
Optimalna strategija upravljanja sadrži svojstvo da bez obzira na početno stanje i odluke koje su dovele do trenutno stanja, upravljanje na preostalom dijelu putanje treba biti optimalno u odnosu na trenutno stanje [10].

Nakon što su navedene sve formule, po uzoru na njih je napisan kod u Pythonu. Funkcija prima navedene ulazne parametre, a vraća V_{00}. Ulazni parametri su sljedeći:

– S_0 - početna cijena
– K – štrajk cijena
– T – datum dospijeća
– σ - promjenjivost
– r – risk-free rate
– parametar za izbor call ili put opcija
– parametar za izbor američke ili europske opcije
– n – broj koraka biomnog stabla

U kodu se ovi parametri nazivaju *american* i *cp*. Parametar *american* određuje računaju li se američke ili europske opcije (varijabla tipa bool), dok parametar *cp* podrazumijeva računanje call ili put opcije. Kako se relacije za call i put vrste opcija razlikuju samo u predznaku, dovoljno je pojedine relacije samo pomnožiti s -1 kako bi se računale put opcije.

III. Simulacijski rezultati

A. Postavka i rezultati simulacija

1) Američke call opcije: Već opisana funkcija, u prethodnom poglavlju, je pozvana nad sljedećim parametrima:
option_pricing(100, 100, 1, 0.3, 0.03, 1, True, 100).
Redoslijed proslijeđenih parametara funkciji odgovara redoslijedu napisanih ulaznih parametara u prošlom poglavlju. Vrijednost koju je funkcije vratila je jednaka: 13.15601962.
Slika 6 predstavlja vektor vrijednosti opcija koje su dobivene računanjem. Krajnja vrijednost odgovara vrijednosti koju je funkcija vratila. Za prikazivanje ove slike smanjen je broj koraka. Ovo nije drastično utjecalo na promjene vrijednosti, stoga se moglo napraviti, a to je urađeno zbog lakše preglednosti.

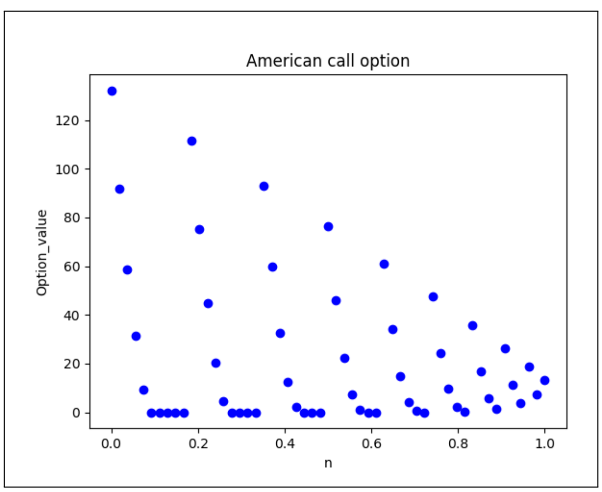

Figure 6. Option pricing bionmni model - američke call opcije

Na internetu je pronađena stranica koja računa cijene opcija binomnim modelom (Binomial trees simulation). Na stranici su uneseni isti oni parametri koji su proslijeđeni funkciji. Dobiveni su sljedeći grafici (slika 7).

Na prvom grafiku zelenom se bojom prikazuje kako se cijena mijenjala tijekom računanja, dok se crvenom bojom prikazuje optimalna cijena (V_{00}). Sa grafika je teško očitati preciznu vrijednost, međutim vidi se da se ta vrijednost kreće oko 13.25, dok je dobivena vrijednost napisane funkcije iznosila 13.15601962. Greška u ovom slučaju je zanemariva.

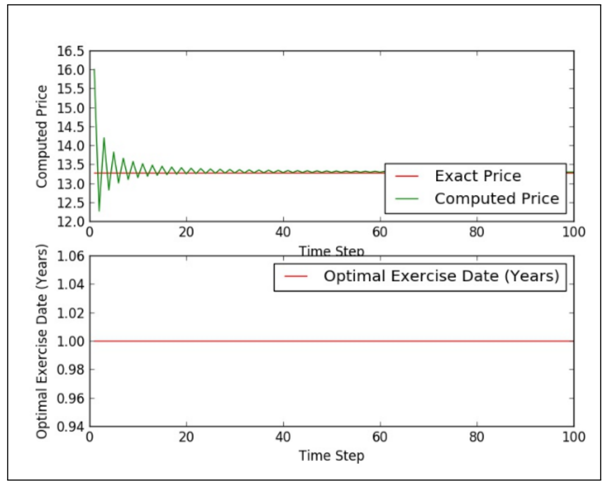

Figure 7. Option pricing bionmni model - američke call opcije

2) Europske call opcije: Funkcija je pozvana nad sljedećim parametrima:
option_pricing(70, 100, 0.6, 0.3, 0.001, 1, False, 100).
Vrijednost koju je funkcije vratila je jednaka: 0.52243037751. Grafik 8 pokazuje vektor vrijednosti opcije, te krajnja točka na grafiku predstavlja vraćenu vrijednost. Ovdje za prikaz pozvana funkcija kao što je navedeno iznad u tekstu, međutim zbog lakšeg prikaza, smanjen je broj koraka na 10, kao u prethodnom slučaju.

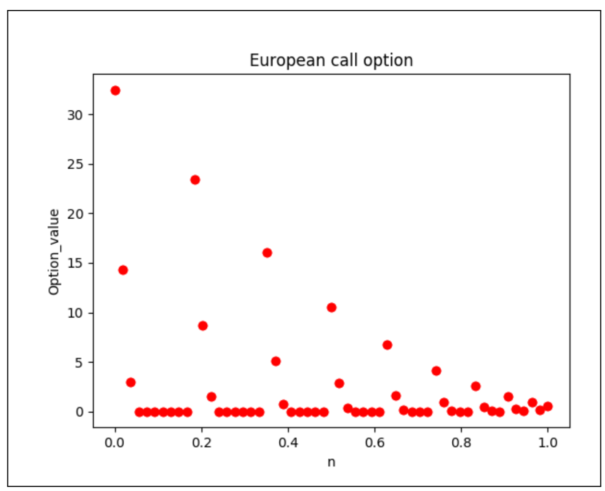

Figure 8. Option pricing binomni model - europske call opcije

Na već spomenutoj stranici uneseni su isti parametri kao i oni koji su proslijeđeni funkciji. Dobiveni su sljedeći grafici.

Sa slike 9 se vidi kako se vrijednosti dobivene računanjem vrijednosti pomoću implementiranog algoritma, te one na grafiku poklapaju.

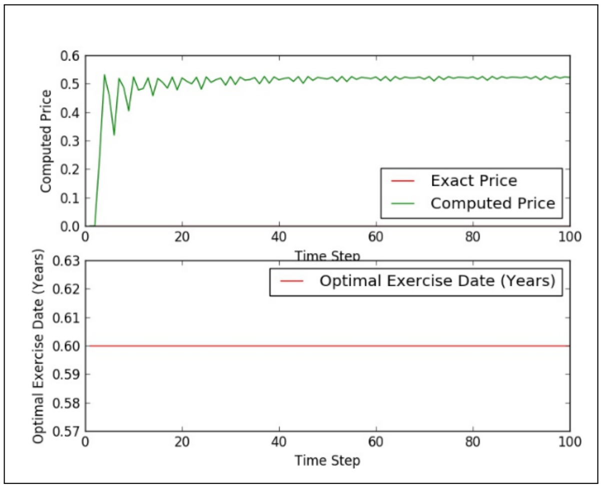

Figure 9. Option pricing binomni model - europske call opcije - simulacija s web-stranice

3) Američke put opcije: Funkcija je pozvana nad sljedećim parametrima:
option_pricing(80, 80, 1, 0.5, 0.01, -1, True, 100).
Vrijednost koju je funkcije vratila je jednaka: 15.3820615505. Slika 10 prikazuje promjenu vrijednosti američke put opcije kreiranjem grafika u Python okruženju.

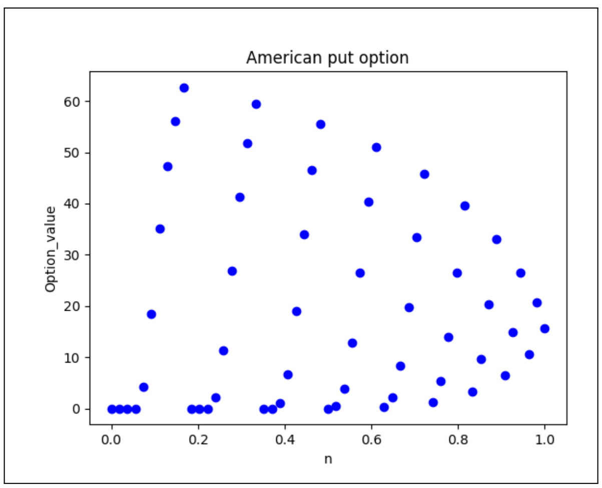

Figure 10. Option pricing binomni model - američke put opcije

Sa istim parametrima na web-stranici su dobiveni sljedeći grafici (slika 11). Vidljiva je približnosti vrijednosti dobivene pokretanjem koda u Pythonu, te one pokretanjem simulacije na web-stranici.

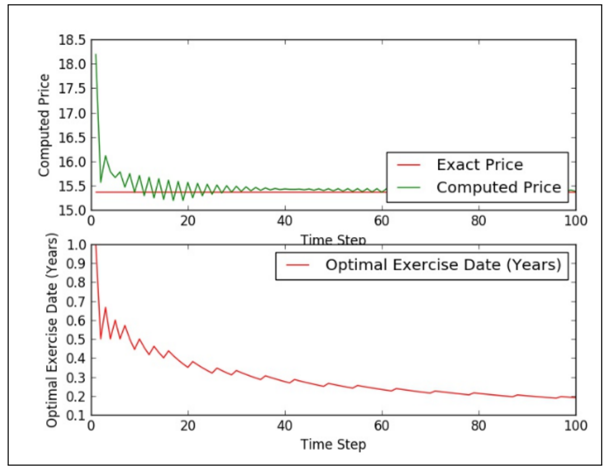

Figure 11. Option pricing binomni model - američke put opcije - simulacija sa web-stranice

4) Europske put opcije: Funkcija je pozvana nad sljedećim parametrima:
option_pricing(100, 80, 1, 0.8, 0.01, -1, False, 100).
Vrijednost koju je funkcije vratila je jednaka: 18.6561776096. Slika 12 Prikazuje promjenu vrijednosti europske put opcije u korištenom algortimu napisanom u Pythonu. Kao i u prethodnim slučajevima i ovdje je broj koraka smanjen 10 puta zbog bolje preglednosti.

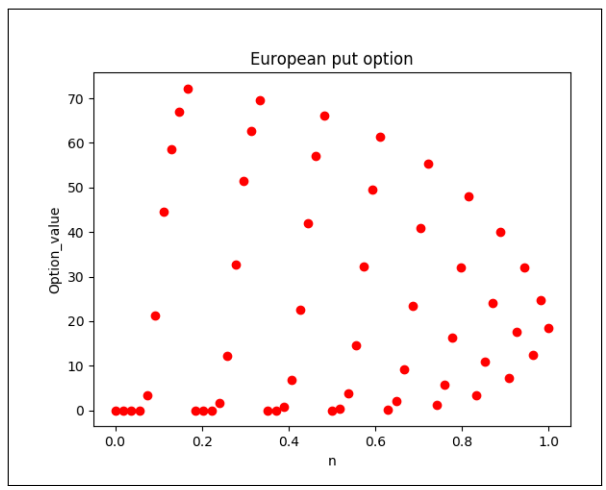

Figure 12. Option pricing binomni model - američke put opcije

Sa slike 13 je očito kako se vrijednost dobivena napisanim algoritmom poklapa sa prikazanom. Krajnja vrijednost na slici 10 odgovara *Exact Price* na slici 13. Naravno da postoji odstupanje između ovih vrijednosti, međutim grešku možemo zanemariti, budući da je svrha poređenja ovih vrijednosti bila pokazati ispravnost napisanog algoritma, što se i postiglo.

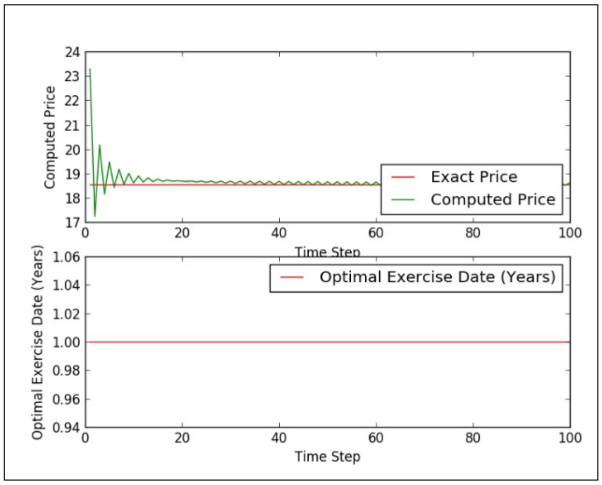

Figure 13. Option pricing binomni model - europske put opcije - simulacija s web-stranice

B. *Zaključak*

Pisanje algoritma je praćeno navedenim formulama izvučenih iz mnogih literatura, te je ispravnost rezultata bez usporedbe s nečijim rješenjem teško izvodiva. Validiranje dobivenih rezultata je postignuto usporedbom s rješenjima na stranici (Binomial trees simulation), gdje su unesene jednake vrijednosti, te se na grafiku mogla pratiti točna vrijednost cijene. Jasno je da binomni model daje preciznije vrijednosti za veći broj koraka, međutim iz priloženih slika je uočeno da broj koraka nije utjecao drastično na promjenu rezultata. Ovim radom kroz navođenje svih formula te dobivenih rezultata to je uspješno izvršeno. Dobiveni rezultati su približno jednaki onima na web-stranici, što je i potvrđeno priloženim slikama.

IV. Zaključak i diskusija

Kako matematičke metode optimizacije pomažu u rješavanju svakodnevnih životnih problema, pokazuje i ovaj rad. Ovdje su prvo opisani ekonomski termini vezani uz option pricing, a onda se krenulo u rješavanje ovog problema dinamičkim programiranjem. Kao metod za rješavanje problema option pricing izabran je binomni model. Razlog zašto je izabran baš ovaj model je njegova jednostavnost, zbog koje je nekome ko nema nikakvu podlogu iz ekonomije jednostavno shvatiti koncept cijena opcija. Simulacijski rezultati su se pokazali izuzetno dobrim, te validirani na web-stranici. Ovime se može zaključiti da je napisani algoritam ispravan, što omogućava njegovu primjenu za neke praktične situacije, te proširenje istog za kompleksnije situacije.

Popis literature

References

[1] B. Čobanov, Levijevi procesi u financijama i osiguranju, ch 3, pp 24-25, Univerzitet u Novom Sadu, 2013

[2] N. Teodorović, T. Kaurin, D. Janković, „Problem valuacije opcija – matematička i softverska rješenja", Infoteh-Jahorina Vol. 10, Ref E-IV-21, p. 746-750, 2011

[3] A. Penaud, Optimal decisions in finance: Passport options and the bonus problem, ch2, pp 30-32, Oxford, 2000

[4] Yun-Hsuan Yeh, Dynamic programming approach to price american options, ch 2, pp 4, National Sun Yat-sen University, 2012

[5] M. Milovanović, Trinomni model cijena opcija, Univerzitet u Nišu, ch 1, 13-23, 2013

[6] M. Predojević, Fjučersi i opcije na berzi, ch 2, pp 51-55, Univerzitet Singidunum, 2011

[7] J. Kleinberg, E. Tardos, Algorithm Design, ch 6, 251-252, Cornell University, 2016

[8] N. Ganesan, R. D. Chamberlain, J. Buhler, Acceleration of Binomial Options Pricing via Parallelizing along Time-axis on a GPU, in Proc. of Symp. on Application Accelerators in High Performance Computing, 2009

[9] A. Palczewski, Computational methods in finance, p.36 , Faculty of Matematics, Informatics and Mechanics, Poland, 2019

[10] S. Konjicija, predavanja na predmetu: Optimalno upravljanje, Dinamičko programiranje, Univerzitet u Sarajevu, 2019