



# UNIVERSITÀ DI SIENA 1240

DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA DELL'INFORMAZIONE E  
SCIENZE MATEMATICHE

RELAZIONE DEL PROGETTO - GRUPPO #3

---

## Discrete Event Systems

---

*Studenti:*

Aldi Piroli  
Mihai Dragusanu  
Giovanni Ludovico  
Michele Fucci

*Professore:*

Simone Paoletti

## Indice

<b>1</b>	<b>Modello del sistema e catena di Markov</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Calcolo delle probabilità stazionarie dello stato del sistema in maniera analitica</b>	<b>6</b>
<b>3</b>	<b>Calcolo delle probabilità stazionarie dello stato del sistema mediante simulazioni</b>	<b>8</b>
<b>4</b>	<b>Verifica che <math>\lambda_{eff} = \mu_{eff}</math></b>	<b>10</b>
4.1	Calcolo analitico dei tassi . . . . .	10
4.2	Calcolo dei tassi mediante simulazione . . . . .	11
<b>5</b>	<b>Legge di Little</b>	<b>12</b>
5.1	Calcolo analitico . . . . .	13
5.2	Calcolo mediante simulazione . . . . .	14
<b>6</b>	<b>Modifiche per incrementare il throughput del sistema del 35 %</b>	<b>15</b>
<b>7</b>	<b>Verifica della condizione a regime del sistema con differenti specifiche</b>	<b>18</b>
<b>8</b>	<b>Verifica della condizione <math>\lambda_{eff} = \mu_{eff}</math> e della Legge di Little con le nuove specifiche</b>	<b>20</b>
8.1	$\lambda_{eff} = \mu_{eff}$ con le nuove specifiche . . . . .	20
8.2	Legge di Little con le nuove specifiche . . . . .	20

## Problema proposto

Si consideri la stazione di lavorazione rappresentata in figura, composta da due macchine  $M_1$  e  $M_2$  e da un magazzino  $B$  di capacità unitaria posto tra  $M_1$  e  $M_2$ . I pezzi che arrivano quando  $M_1$  è occupata vengono respinti. Un pezzo lavorato da  $M_1$  risulta difettoso con probabilità  $p = 0.1$ . In tal caso, viene indirizzato verso  $M_2$  per essere rettificato. Se  $M_2$  è occupata e  $B$  è vuoto, il pezzo resta in attesa in  $B$ . Se  $M_2$  è occupata e  $B$  è pieno,  $M_1$  trattiene il pezzo finché questo può essere accolto in  $B$ . Un pezzo lavorato da  $M_2$  viene rimandato a  $M_1$ , se  $M_1$  è disponibile. Altrimenti,  $M_2$  trattiene il pezzo finché  $M_1$  si libera.

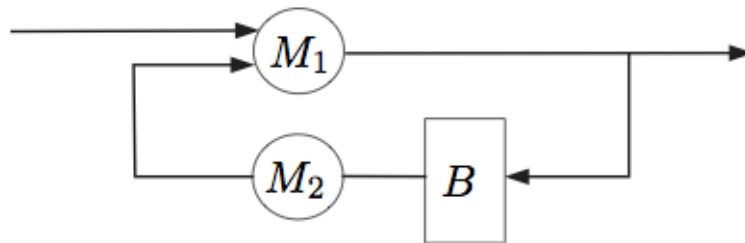


Figura 1: Rappresentazione del sistema da analizzare

Le parti arrivano al sistema come generate da un processo di Poisson con tempo medio di inter-arrivo pari a 30 minuti. Le durate delle lavorazioni in  $M_1$  e  $M_2$  seguono distribuzioni esponenziali con valori attesi pari a 35 e 18 minuti, rispettivamente.

## 1 Modello del sistema e catena di Markov

Il primo passo necessario per affrontare il problema proposto è quello di definire il modello associato al sistema, necessario poi per lo sviluppo della relativa catena di Markov a tempo continuo.

Si utilizza il seguente automa a stati stocastici definito da  $(\varepsilon, X, \Gamma, f, x_0, F)$ .  
Prima di tutto si definisce gli stati e gli eventi del sistema come segue:

$$X = \begin{bmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \\ \chi_3 \end{bmatrix}$$

Dove:

$\chi_1 \rightarrow$  stato di  $M_1$  :  $\{0(\text{vuota}), 1(\text{in uso}), 2(\text{bloccata})\}$

$\chi_2 \rightarrow$  stato di  $B$  :  $\{0(\text{vuoto}), 1(\text{pieno})\}$

$\chi_3 \rightarrow$  stato di  $M_2$  :  $\{0(\text{vuota}), 1(\text{in uso}), 2(\text{bloccata})\}$

$$\varepsilon = \{ a \quad d_1 \quad d_2 \}$$

Dove:

$a \rightarrow$  arrivo di un pezzo

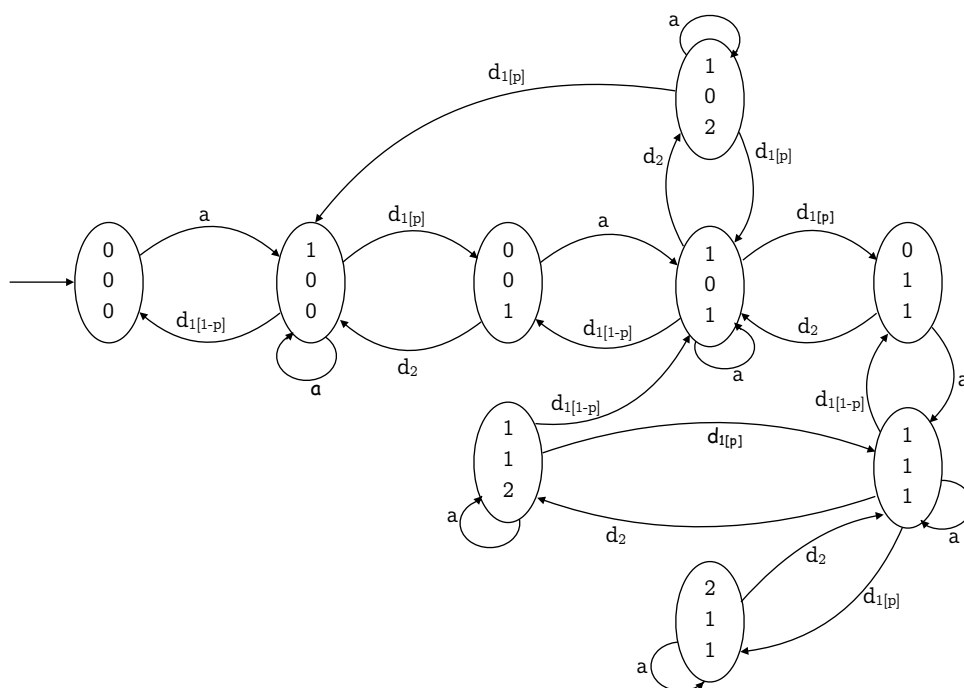
$d_1 \rightarrow$  fine lavorazione di un pezzo nella macchina  $M_1$

$d_2 \rightarrow$  fine lavorazione di un pezzo nella macchina  $M_2$

Opportuno ricordare che i pezzi lavorati da  $M_1$  potrebbero risultare difettosi con probabilità  $p=0.1$ , dunque nel successivo grafo troveremo l'evento  $d_{1[p]}$  e  $d_{1[1-p]}$ .

Infine si definisce le funzioni di ripartizione delle sequenze temporali degli eventi, partendo dalle specifiche di sistema.

- $F_a(t) = 1 - e^{-\lambda t}$ ,  $\lambda = \frac{1}{30}$  arrivi/min;
- $F_{d_1}(t) = 1 - e^{-\mu_1 t}$ ,  $\mu_1 = \frac{1}{35}$  servizi/min;
- $F_{d_2}(t) = 1 - e^{-\mu_2 t}$ ,  $\mu_2 = \frac{1}{18}$  servizi/min;



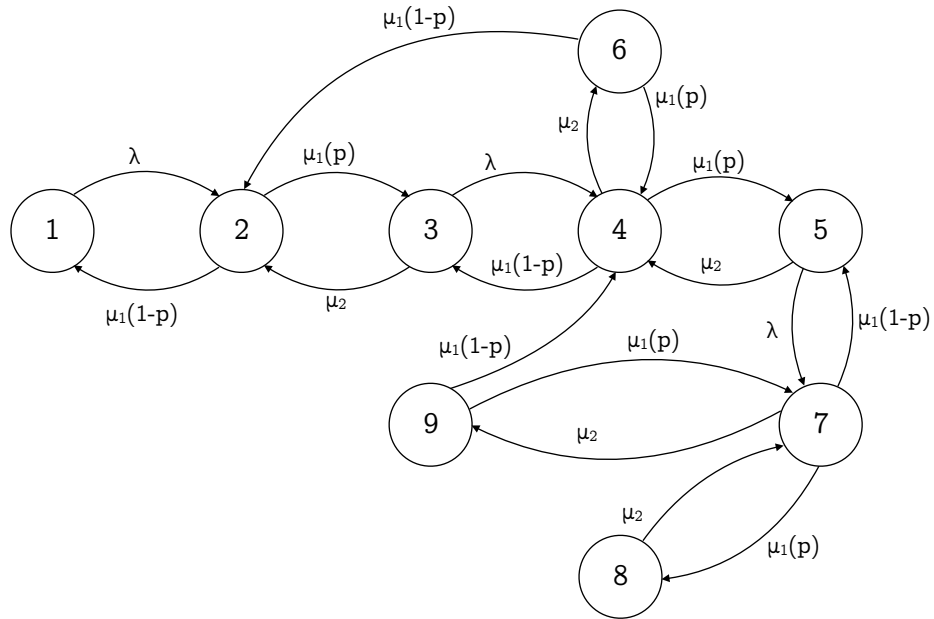


Figura 3: Catena di Markov associata al modello

## 2 Calcolo delle probabilità stazionarie dello stato del sistema in maniera analitica

Dopo aver effettuato il modello del sistema e costruito la catena di Markov a tempo continuo, il problema proposto chiede di calcolare le probabilità stazionarie dello stato del sistema attraverso il calcolo analitico. La trasformazione effettuata nel capitolo precedente ha permesso di passare dall'automa a stati stocastici nel sistema a tempo continuo  $(X_M, Q, \Pi_0)$ , dove:

$X_M$  : insieme degli stati della catena di Markov;

$$X_M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

$Q$  : Matrice dei tassi di transizione

$$Q = \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mu_1(1-p) & -\mu_1 & \mu_1(p) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2 & -\lambda - \mu_2 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_1(1-p) & -\mu_1 - \mu_2 & \mu_1(p) & \mu_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu_2 & \lambda - \mu_2 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu_1(1-p) & 0 & \mu_1(p) & 0 & -\mu_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu_1(1-p) & 0 & -\mu_1 - \mu_2 & -\mu_1(p) & \mu_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu_2 & -\mu_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu_1(1-p) & 0 & 0 & \mu_1(p) & 0 & -\mu_1 \end{bmatrix}$$

$\Pi_0$  : vettore dello stato iniziale.

$$\Pi_0 = [1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]$$

La catena di Markov in questione risulta essere irriducibile e finita.

Irriducibile perchè ogni stato della catena è raggiungibile da ogni altro stato ed è finita poiché ha spazio degli stati finito dunque per queste proprietà tutti gli stati della catena sono ricorrenti positivi.

**Teorema:**

Se una catena di Markov omogenea a tempo continuo (CTHMC) è irriducibile e ha tutti gli stati ricorrenti positivi (come nel nostro caso) allora si può affermare:

- $\lim_{t \rightarrow \infty} \Pi_i(t)$  esistono e sono indipendenti da  $\Pi_0$  ;
- $\sum_{i \in X} \Pi_i = 1$  ;

Inoltre il vettore degli stati  $\Pi$  può essere ottenuto risolvendo il seguente sistema di equazione lineare:

$$\begin{cases} \Pi Q = 0 \\ \sum_{i \in X} \Pi_i = 1 \end{cases}$$

Il problema di teoria delle probabilità è trasformato in un problema algebrico. Risolvendo il sistema in maniera algebrica ottiamo il vettore:

$$\Pi = [0.4153, 0.5384, 0.0198, 0.0087, 0.0003, 0.0170, 0.0001, 0, 0.0003]$$

Lo stesso risultato è stato ottenuto anche attraverso l'utilizzo della formula:

$$\Pi = \lim_{t \rightarrow \infty} \Pi_0 e^{Qt}$$

con  $t$  della simulazione =  $10^{10}$

$$\Pi_{lim} = [0.4153, 0.5384, 0.0198, 0.0087, 0.0003, 0.0170, 0.0001, 0, 0.0003]$$



### 3 Calcolo delle probabilità stazionarie dello stato del sistema mediante simulazioni

#### Spiegazione codice:

Il primo step è definire le variabili necessarie per la computazione.

- $K_{max} = 300$  : è il numero di passi da effettuare per ogni simulazione;
- $t = t_{reg}$  : e' il tempo in cui il sistema e già abbondantemente a regime, questo è calcolato dalla funzione "*tempo\_a\_regime.m*" che calcola il tempo per cui l'errore tra il risultato analitico del vettore  $\Pi$  e quello simulato è inferiori a  $10^7$  ;
- $N \in [10^2, 10^3, 10^4, 10^5]$  : è una variabile che assumerà uno dei precedenti valori a secondo del ciclo di simulazione;
- $M = 250$  : è il numero di gruppi di  $N$  simulazioni;

Si è deciso di effettuare una parallelizzazione del lavoro, dunque le simulazioni saranno effettuate su quattro calcolatori e i risultati ottenuti saranno uniti in un secondo momento. Inoltre il codice effettua i quattro cicli di simulazioni in maniera automatizzata evitando così di cambiare i parametri manualmente.

Nel secondo step si esegue la costruzione del modello che sarà poi utilizzato dalla funzione "*simplprobdes.m*".

Per ogni ciclo, il codice esegue  $N$  volte la funzione "*simplprobdes.m*" e per ogni simulazione, quando il sistema si trova a regime, si salva l'ultimo stato visitato.

Attraverso questo procedimento è possibile trovare il vettore delle probabilità stazionarie degli stati per ogni gruppo di simulazione  $M$ . Come output di ogni ciclo dunque abbiamo una matrice  $250 \times 9$ , dove ciascuna riga della matrice rappresenta un gruppo di simulazione e ogni colonna della matrice rappresenta la probabilità stazionaria di uno degli 9 stati del modello. L'ultimo step dello script è quello dove si riuniscono i dati dei quattro calcolatori, ottenendo una matrice  $1000 \times 9$ . Questa sarà poi utilizzata per i grafici di media e varianza.

Inoltre si è aggiunto allo script il calcolo dei tempi di esecuzione delle simulazioni usando i parametri di start stopwatch timer "tic" & "toc" di Matlab. Abbiamo calcolato il tempo di esecuzione delle singole simulazioni per stimare i tempi totali di computazione. Di seguito sono riportati i tempi di computazione di uno dei quattro calcolatori.

Numero simulazioni	Durata singola simulazione
$N = 10^2$	0.2 sec
$N = 10^3$	2 sec
$N = 10^4$	22 sec
$N = 10^5$	201 sec

Tabella 1: Tabella dei tempi di simulazione.

La durata totale di computazione di questo calcolatore è di circa 15.6h e quella totale dei quattro calcolatori è stata di circa 62.5h.

Le probabilità stazionarie degli stati ottenute mediante la computazione sono rappresentate in figura 4.

Mentre nella Tabella 2 si può osservare la convergenza dei valori simulati ai valori calcolati analiticamente nel Capitolo 2.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$N = 10^2$	0.4142	0.5417	0.0185	0.0081	0.0002	0.0168	0.0003	0.0000	0.0001
$N = 10^3$	0.4158	0.5381	0.0197	0.0087	0.0003	0.0170	0.0001	0.0000	0.0003
$N = 10^4$	0.4155	0.5384	0.0198	0.0087	0.0003	0.0169	0.0001	0.0000	0.0003
$N = 10^5$	0.4153	0.5384	0.0198	0.0087	0.0003	0.0170	0.0001	0.0000	0.0003
Analitico	0.4153	0.5384	0.0198	0.0087	0.0003	0.0170	0.0001	0.0000	0.0003

Tabella 2: Tabella dei risultati approssimati delle probabilità stazionarie degli stati del sistema calcolati tramite simulazioni analiticamente.

Inoltre si fornisce il grafico delle varianze per lo stato 1 ed 2 rispettivamente nelle Figura 5 e Figura 6. Si è scelto di rappresentare questi due stati perché che sono quelli con più occorrenze.

Si può notare che con l'aumento del numero di simulazioni la varianza tende a diminuire e il valore medio delle probabilità degli stati del sistemata tende al valore trovato precedentemente mediante calcolo analitico.

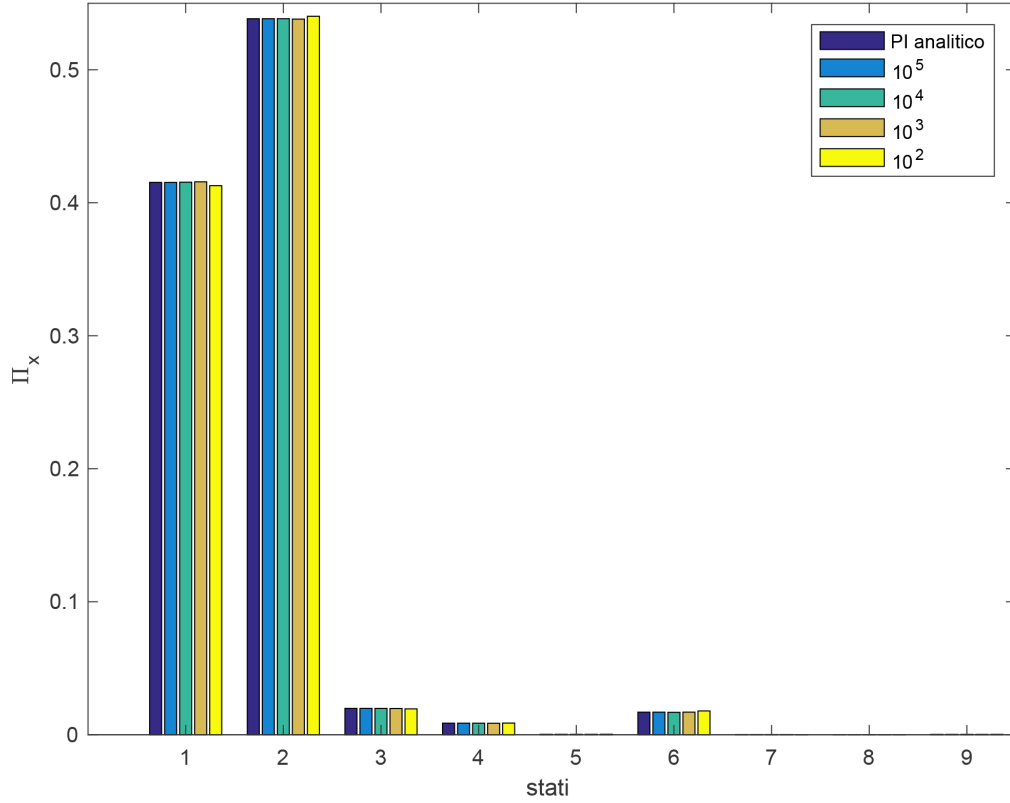


Figura 4: Probabilità stazionaria degli stati

## 4 Verifica che $\lambda_{eff} = \mu_{eff}$

In questa sezione il team verifica l'uguaglianza dei due elementi  $\lambda_{eff}$  e  $\mu_{eff}$ .  $\lambda_{eff}$  rappresenta il tasso medio a regime dei pezzi accettati nel sistema (inflow), mentre  $\mu_{eff}$  rappresenta il tasso medio a regime dei pezzi che lasciano il sistema (outflow). Verifichiamo ora l'uguaglianza dei due tassi mediante calcolo analitico e mediante simulazione.

### 4.1 Calcolo analitico dei tassi

I pezzi vengono sempre accettati nel sistema negli stati  $\{1,3,5\}$ , ovvero negli stati dove la macchina  $M_1$  è vuota.

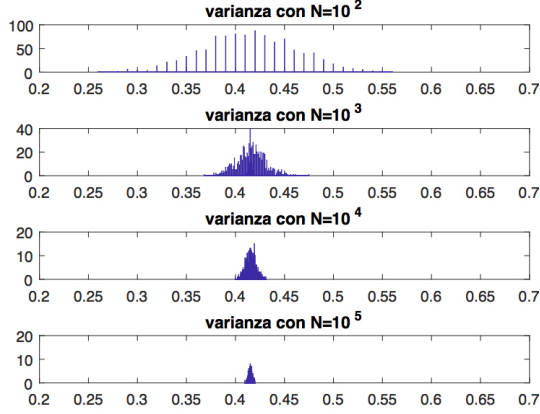


Figura 5: Varianza stato 1

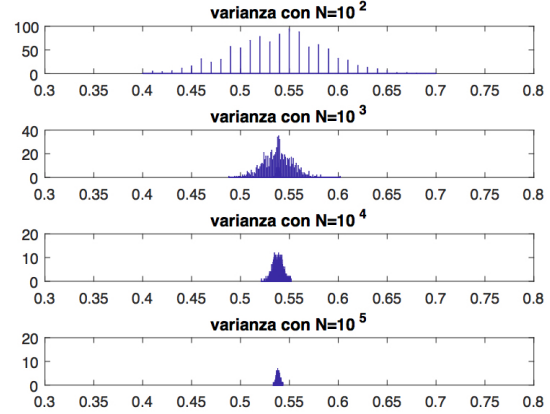


Figura 6: Varianza stato 2

I pezzi lasciano il sistema quando dopo la lavorazione nella macchina  $M_1$  questi risultano non difettosi, ovvero negli stati  $\{2,4,6,7,9\}$ . Dunque:

$$\lambda_{eff} = \lambda \cdot (\pi_1 + \pi_2 + \pi_3)$$

$$\lambda_{eff} \simeq 0.01451602 \text{ pezzi accettati/min}$$

$$\mu_{eff} = \mu_1(1 - p) \cdot (\pi_2 + \pi_4 + \pi_6 + \pi_7 + \pi_9)$$

$$\mu_{eff} \simeq 0.01451602 \text{ pezzi uscenti/min}$$

## 4.2 Calcolo dei tassi mediante simulazione

Per trovare il valore di  $\lambda_{eff}$  e  $\mu_{eff}$  mediante simulazione, si è pensato di calcolare il numero di pezzi entranti ed uscenti del sistema su un orizzonte temporale tale da raggiungere le condizioni di regime attraverso l'utilizzo di un codice MATLAB.

Inizialmente il codice verifica se il tempo preso in considerazione ( $T_{end}$ ) è sufficientemente ampio da raggiungere il tempo che si considera a regime ( $T_{ini}$ ), se questo non avviene la simulazione MATLAB non inizia.

Successivamente, se  $T_{end} \geq T_{ini}$  (situazione di regime), il codice conteggia le parti in entrata e in uscita dal sistema e per finire effettua la divisione fra parte in entrata/parti in uscita e la differenza ( $T_{end} - T_{ini}$ ). I valori trovati mediante simulazione sono:

$$\lambda_{effsim} \simeq 0.01451344 \text{ pezzi accettati/min}$$

$$\mu_{effsim} \simeq 0.01451344 \text{ pezzi uscenti/min}$$

Abbiamo dunque verificato l'uguaglianza fra i due tassi sia mediante calcolo analitico sia mediante simulazione.

## 5 Legge di Little

La legge di Little afferma che per un qualsiasi sistema produttivo, purché in stato stazionario cioè a regime, vale la seguente relazione:

$$E[X_\Sigma] = \lambda_\Sigma E[S_\Sigma]$$

Dove:

- $\Sigma$  è uno dei sottosistemi del sistema ed è rappresentato come una superficie;
- $E[X_\Sigma]$  è il valore atteso del numero di parti all'interno della superficie;
- $\lambda_\Sigma$  è il tasso medio di parti accettate nella superficie  $\Sigma$ ;
- $E[S_\Sigma]$  è il valore atteso del tempo dal generico pezzo speso all'interno della superficie.

Nei successivi paragrafi sono riportati i procedimenti effettuati per trovare il valore dei tre parametri nella situazione proposta dal problema.

Nel nostro caso il sottosistema  $\Sigma$  è costituito dalla sola Macchina  $M_2$ , come riportato in Figura 7.

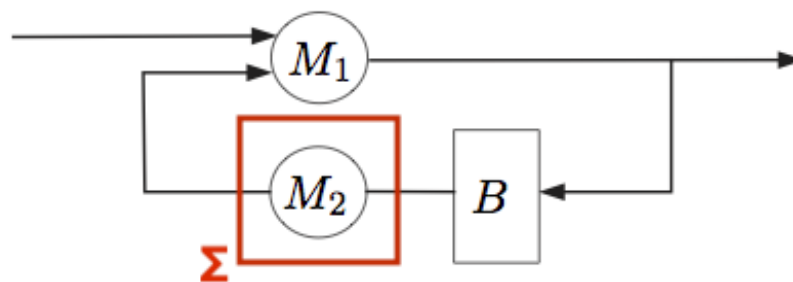


Figura 7: In rosso il sottosistema  $\Sigma$

## 5.1 Calcolo analitico

Per il calcolo di  $\lambda_\Sigma$  è importante sottolineare che vanno considerati solo i pezzi che entrano nella superficie  $\Sigma$ , dunque solo quelli che entrano nella macchina  $M_2$ , dopo un determinato evento.  $\lambda_\Sigma$  risulta essere dunque la somma di tre termini.

$$\lambda_\Sigma = \mu_1(p) \cdot (\pi_2 + \pi_6 + \pi_9) + \mu_1(1-p) \cdot (\pi_9) + \mu_2 \cdot (\pi_5 + \pi_8)$$

$E[X_\Sigma]$  viene calcolato invece sommando i prodotti tra la probabilità stazionaria di ogni stato e il relativo numero di parti per stato, come riportato nella equazione sottostante.

$$E[X_\Sigma] = 0 \cdot (\pi_1 + \pi_2) + 1 \cdot (\pi_3 + \pi_4 + \pi_5 + \pi_6 + \pi_7 + \pi_8 + \pi_9)$$

Calcoliamo il valore di  $\lambda_\Sigma$  e di  $E[X_\Sigma]$  analiticamente utilizzando i valori delle probabilità stazionaria dello stato del sistema trovati nel Capitolo 2.

Infine con i valori trovati è possibile calcolare il valore di  $E[S_\Sigma]$  attraverso la seguente equazione.

$$E[S_\Sigma] = \frac{E[X_\Sigma]}{\lambda_\Sigma}$$

I risultati ottenuti mediante questo procedimento analitico sono i seguenti:

$$\lambda_\Sigma \simeq 0.001612891 \text{ pezzi entranti}/min;$$

$$E[S_\Sigma] \simeq 28,69601 \text{ min};$$

$$E[X_\Sigma] \simeq 0.04628354 \text{ pezzi all'interno della superficie.}$$

## 5.2 Calcolo mediante simulazione

Per trovare i valori mediante simulazione si è utilizzato lo script MATLAB. Come nel capitolo 4 si trova il valore a regime.

Per trovare il valore di  $\lambda_\Sigma$  abbiamo calcolato il numero di parti entrati nel sottosistema  $\Sigma$  a regime e poi abbiamo diviso questa quantità per  $\Delta T$ .

Per il calcolo di  $E[S_\Sigma]$  abbiamo trovato tutti i cambi di stato dove è presente l'entrata di un pezzo nella macchina  $M_2$  e per ciascuno di questi si è calcolato il tempo di entrata. Considerando poi solamente questi ultimi pezzi, si è calcolato quali di questi sono usciti dal sottosistema e il loro tempo di uscita, aggiornando il tempo totale di stazionamento di ciascun pezzo nella macchina. Infine abbiamo diviso il tempo totale per il numero di pezzi usciti dal sottosistema trovando il valore  $E[S_\Sigma]$ .

Il procedimento svolto per stimare il valore di  $E[X_\Sigma]$  è stato quello di effettuare N simulazioni, le quali vengono interrotte tutte allo stesso istante di tempo  $t$ . Lo script analizza l'ultimo stato visitato e conteggia il numero di pezzi nella macchina  $M_2$ , quando lo stato è 1 o 2 allora non ci sono pezzi nel sottosistema, negli altri stati invece c'è un solo pezzo.

Il valore degli N conteggi viene sommato insieme e successivamente diviso per il numero di simulazioni effettuate, trovando  $E[X_\Sigma]$

I risultati ottenuti mediante questo procedimento sono i seguenti:

$$\lambda_\Sigma \simeq 0,00161097 \text{ pezzi entranti/min};$$

$$E[S_\Sigma] \simeq 28,67 \text{ min};$$

$$E[X_\Sigma] \simeq 0.04640857 \text{ pezzi all'interno della superficie..}$$

## 6 Modifiche per incrementare il throughput del sistema del 35 %

Per la risoluzione di questa richiesta, prima di tutto abbiamo provato metodi "economicamente" più convenienti, come aumentare il numero di arrivi dei pezzi nel sistema o aumentare la capacità buffer, portandola da uno a due posti. Nel primo caso (METODO1), per raggiungere il throughput necessario, abbiamo cambiato il tasso dei pezzi entranti nella macchina da 30 minuti a 12 minuti, difficilmente realizzabile da un punto di vista pratico.

Nel secondo caso (METODO2) prima abbiamo aggiunto un posto nel buffer, operazione che modifica di poco il valore del throughput del sistema, perciò abbiamo anche aumentato il numero di arrivi dei pezzi nella macchina. Anche con questa soluzione il tasso dei numero di parti entranti nel sistema richiedeva una modifica troppo esosa.

Dopo aver osservato che questo tipo di correzioni non erano del tutto appropriate, si è pensato prima di inserire in parallelo (alla macchina  $M_1$ ) una macchina con le stesse specifiche della macchina  $M_1$  (METODO3). Questa singola modifica non era sufficiente a raggiungere il throughput richiesto, si è dovuto aumentare anche il numero di pezzi in entrata (METODO4). Il nuovo sistema è riportato nella Figura 8.

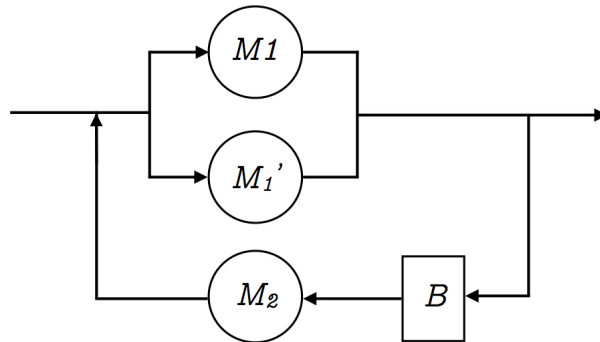


Figura 8: Modello del sistema proposto

La prima modifica comporta rielaborare il modello associato al sistema e di conseguenza la nuova catena di Markov a tempo continuo. Si adopera lo stesso automa a stati stocastici utilizzato in precedenza (Capitolo 2) ma con una variazione nella definizioni degli stati.



$$X = \begin{bmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \\ \chi_3 \end{bmatrix}$$

Dove:

$\chi_1 \rightarrow$  stato di  $M_1$  :  $\{0(\text{vuota}), 1(\text{una sola macchina lavora}), 2(\text{entrambi le macchine lavorano}), 3(\text{una macchina bloccata e l'altra vuota}), 3'(\text{una macchina bloccata e l'altra lavora}), 4(\text{entrambi le macchine bloccate})\}$

$\chi_2 \rightarrow$  stato di  $B$  :  $\{0(\text{vuoto}), 1(\text{pieno})\}$

$\chi_3 \rightarrow$  stato di  $M_2$  :  $\{0(\text{vuota}), 1(\text{in uso}), 2(\text{bloccata})\}$

Con questa nuova modifica abbiamo rielaborato il modello come riportato in Figura 9.

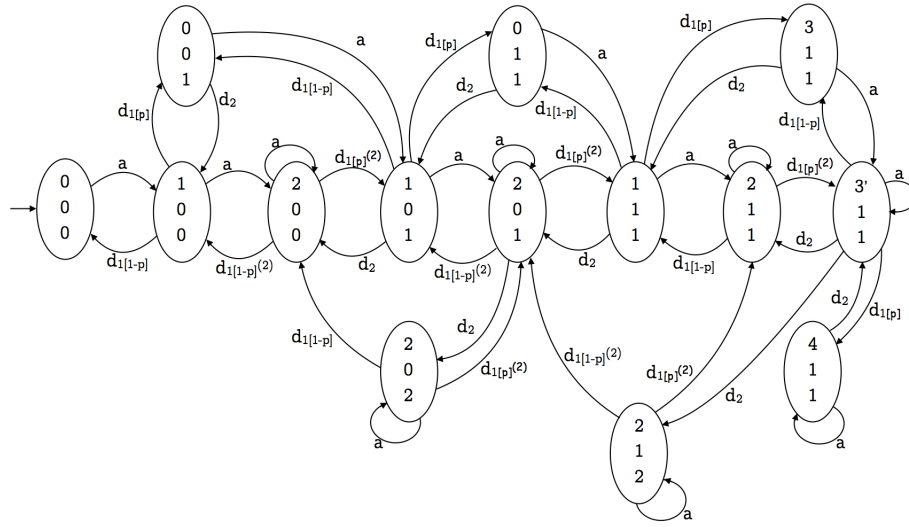


Figura 9: Modello del sistema

E come effettuato nel Capitolo 2 si può rappresentare anche la relativa catena di Markov, come rappresentato in Figura 10.

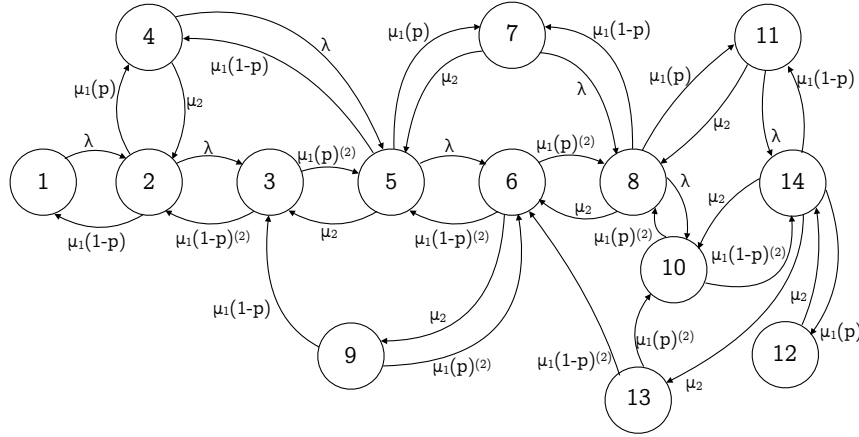


Figura 10: Catena di Markov associata al nuovo modello

Una volta realizzata la catena di Markov si è proceduto seguendo lo stesso procedimento svolto nel Capitolo 2 per potere trovare la nuova matrice dei tassi di transizione e il vettore degli stati, mezzi fondamentali per poter definire la seconda modifica.

La seconda modifica riguarda l'aggiustamento del tasso degli arrivi dei pezzi all'interno del sistema. Abbiamo adattato il codice del Capitolo 4 al nuovo sistema verificando il risultato analitico tramite simulazione dopo aver adeguatamente cambiato il valore del tasso degli arrivi  $\lambda$  in modo da soddisfare il nuovo indice di prestazione.

$$F_{a6}(t) = 1 - e^{-\lambda_6 t}, \quad \lambda_6 = \frac{1}{28.5} \text{ arrivi/min};$$

I risultati più significativi sono stati ottenuti nei metodi numero 3 e numero 4 e sono mostrati nella seguente tabella.

Metodo	$\mu_{eff}$	Incremento (%)
METODO 3	0,0191468	32 %
METODO 4	0,01951868	35 %

## 7 Verifica della condizione a regime del sistema con differenti specifiche

Il problema richiede inoltre di verificare le condizioni a regime del sistema con delle nuove sequenze temporali, che sono:

- gli arrivi avvengano con distribuzione uniforme sull'intervallo [22, 38] minuti;
- le durate delle lavorazioni in  $M_1$  sono di tipo deterministico e uguali a 35 minuti;
- le durate delle lavorazioni in  $M_2$  sono di tipo deterministico e uguali a 18 minuti.

### Spiegazione codice:

Il primo step è definire le variabili necessarie per la computazione.

- $K_{max} = 150$  : è il numero di passi da effettuare per ogni simulazione per raggiungere il tempo di regime;
- $t = 500$  : è il tempo necessario per raggiungere la situazione di regime che abbiamo trovato sperimentalmente;
- $N = 5 \times 10^4$  : numero delle simulazioni da effettuare;
- $M = 250$  : è il numero di gruppi di  $N$  simulazioni;
- $t_{camp}$  : è l'intervallo di tempo su cui è fatto il campionamento, necessario per dimostrare che il sistema ammetta situazione di regime.

Nello step successivo si iniziano le  $N$  simulazioni, che saranno ripetute per gli  $M$  gruppi. Per ogni simulazione si richiama la funzione MATLAB "*simprobdes\_unif.m*", che è modificata in modo tale da fermare la simulazione dopo i  $k$  passi necessari per raggiungere abbondantemente la situazione di regime. Questa funzione ritorna la sequenza degli stati, la sequenza degli eventi, la sequenza dei tempi e il passo  $k$ -esimo in cui siamo già abbondantemente a regime. Lo script successivamente crea una matrice "*matrix\_steps*" dove vengono registrati gli stati per ciascuno step: la matrice ha dimensione  $9 \times 900$ , dove le righe rappresentano gli stati del sistema, mentre le colonne corrispondono al numero di campioni presenti all'interno dell'intervallo di campionamento. Nello step successivo lo script si calcola per ogni simulazione le occorrenze di ciascuno stato. Vengono salvate le  $M$  matrici e poi sommate al fine di poter calcolare le probabilità stazionarie degli stati.

Di seguito è rappresentato il grafico nel tempo di queste ultime, dimostrando che il sistema, con le nuove specifiche, ammette una situazione di regime. (Figura 11)

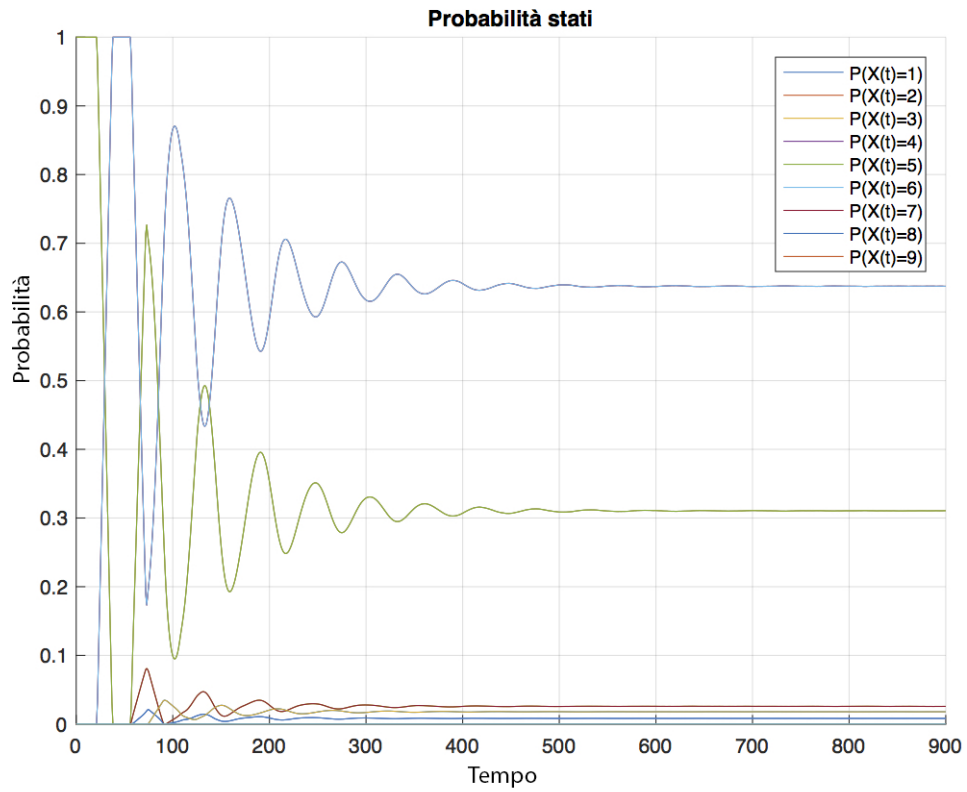


Figura 11: Grafico delle probabilità stazionarie degli stati nel tempo

## 8 Verifica della condizione $\lambda_{eff} = \mu_{eff}$ e della Legge di Little con le nuove specifiche

Infine il problema richiede di verificare  $\lambda_{eff} = \mu_{eff}$  e Little Law con le nuove specifiche e nella situazione di regime. Per fare questo, dopo aver verificato la situazione di regime come mostrato nel capitolo precedente, ci si limita ad usare gli script MATLAB già sviluppati.

### 8.1 $\lambda_{eff} = \mu_{eff}$ con le nuove specifiche

Per il calcolo dei due tassi in questione il procedimento sviluppato è lo stesso utilizzato per l'automa con distribuzioni esponenziali (Capitolo 4), sostituendo con le nuove specifiche la function clock structure. I risultati ottenuti tramite simulazione sono:

$$\lambda_{eff,Generico} \simeq 0.01049365 \quad \text{e} \quad \mu_{eff,Generico} \simeq 0.01049365$$

Anche in questa situazione è verificata l'uguaglianza fra i due tassi.

### 8.2 Legge di Little con le nuove specifiche

Per verificare se la Little Law è valida anche in questa ultima situazione, si è usato lo stesso procedimento del capitolo 5 e di conseguenza lo stesso codice MATLAB, apportando le modifiche alle funzioni di ripartizione delle sequenze temporali degli eventi.

I risultati ottenuti in questa situazione sono:

$$\lambda_{\Sigma} \simeq 0,001895967 \text{ pezzi } /min;$$

$$E[S_{\Sigma}] \simeq 27,50 \text{ min } ;$$

$$E[X_{\Sigma}] \simeq 0,05163 \text{ pezzi}.$$