Laboratorio de Álgebra Lineal

Aldo Hernández

Febrero 2025

1 Operaciones con matrices y determinantes

1. Consideremos la siguiente matriz F

$$
\begin{aligned}
F &= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 6 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 6 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \\
&\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -15 & -5 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{15}{4} & \frac{5}{4} & 0 & \frac{-1}{4} \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \\
&\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{-9}{2} & \frac{-3}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{15}{4} & \frac{5}{4} & 0 & \frac{-1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{-5}{4} & 1 & \frac{1}{4} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{-9}{2} & \frac{-3}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{15}{4} & \frac{5}{4} & 0 & \frac{-1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 4 & 1 \end{array}\right) \\
&\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -24 & 18 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 20 & -15 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 4 & 1 \end{array}\right) \\
\Rightarrow F^{-1} &= \begin{pmatrix} -24 & 18 & 5 \\ 20 & -15 & -4 \\ -5 & 4 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

2 Sistemas de ecuaciones lineales

1. Pendiente (Gauss-Seidel?? zzz)

2. Para el sistema homogéneo, podemos definir las siguientes matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

De forma que $CX = B$, pero observamos que todos los renglones de C son múltiplos, es decir, son linealmente dependientes, por lo que al realizar operaciones elementales con A, eventualmente llegaremos al siguiente resultado

$$\begin{aligned} A &\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow x &= -2y - 3z \\ \Rightarrow X &= \begin{pmatrix} -2y - 3z \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ &= y \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Entonces decimos que los vectores constantes $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ son soluciones básicas del sistema de ecuaciones y que el sistema es compatible indeterminado con dos variables libres. Es por esto que hay soluciones infinitas dadas por el siguiente conjunto solución

$$\{x = -2y - 3z, y, z | x, y, z \in \mathbb{R}\}$$

3 Espacios vectoriales y auto-valores/auto-vectores

1. Vemos que los vectores del subespacio dado son linealmente dependiemntes

$$\left\{ \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\4\\6\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\6\\9\end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, 2\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, 3\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \right\}$$

   Entonces podemos concluir que una base para el subespacio vectorial es

$$B = \left\{ \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \right\}, \dim B = 1$$

2. Para hallar los eigenvalores de G tenemos que igualar el siguiente determinante a cero

$$\begin{aligned} |G - \lambda I| &= \begin{vmatrix} 5-\lambda & -2 \\ -2 & 5-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (5-\lambda)^2 - (-2)^2 \\ \Rightarrow 0 &= (5-\lambda)^2 - (-2)^2 \\ 4 &= (5-\lambda)^2 \\ \therefore \lambda_1 &= 3 \\ \therefore \lambda_2 &= 7 \end{aligned}$$

   Para encontrar los eigenvectores, basta con sustituir los eigenvalores en $G - \lambda I$

$$G - 3I = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow x_1 = x_2$$

$$G - 7I = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow x_1 = -x_2$$
$$\therefore \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}_{\lambda=3} \wedge \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}_{\lambda=7},$$

4 Aplicaciones en IA: reducción de dimensionalidad

1. PCA
2. SVD
3. DL w NN
4. VS in AI