1 Resolució de problemes de càlcul en vàries variables

Continuïtat

Estudi de la continuïtat de $f(\vec{x})$ en el punt $\vec{x} = \vec{a}$.

Si volem demostrar que és contínua, es tracta d'avaluar (generalment agafant $\delta = \sqrt{x^2 + y^2}$)

$$d(\vec{x}, \vec{a}) < \delta \Rightarrow d(f(\vec{x}), f(\vec{a})) < \varepsilon \tag{1.1}$$

Per tal de trobar alguna relació del tipus

$$\delta < \varepsilon \tag{1.2}$$

Si volem, en canvi, demostrar que no és contínua, es tracta de trobar un contraexemple mitjançant alguna relació $x \leftrightarrow y$ (e.g., $y = ax + bx^2$) i veure que

$$\lim_{\vec{x} \to \vec{a}} f(\vec{x}) \neq f(\vec{a}) \tag{1.3}$$

Derivada direccional

La derivada direccional de $f(\vec{x})$ en la direcció $\vec{u}$ en el punt $\vec{x} = \vec{a}$ es defineix com

$$\lim_{\vec{x} \to \vec{a}} f(\vec{x}) \equiv \lim_{\lambda \to 0^+} f(\vec{a} + \lambda \vec{u}) \tag{1.4}$$

Funcions vectorials d'una variable

Corbes

El paràmetre arc d'una corba $\vec{f}(u)$ es defineix com

$$s(u) = \int_a^u \|\vec{f}'(u)\| \, \mathrm{d}u \tag{1.5}$$

i defineix la longitud de la corba en funció del paràmetre u.

Geometria

Tríedre de Frénet:

$$\hat{T} = \frac{\vec{f'}(u)}{\|\vec{f'}(u)\|}; \quad \hat{B} = \frac{\vec{f'}(u) \times \vec{f''}(u)}{\|\vec{f'}(u) \times \vec{f''}(u)\|}; \quad \hat{T} \times \hat{N} = \hat{B} \tag{1.6}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} \begin{pmatrix} \hat{T} \\ \hat{N} \\ \hat{B} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{T} \\ \hat{N} \\ \hat{B} \end{pmatrix} \tag{1.7}$$

Radi de corbatura:

$$\rho = \frac{1}{\kappa} \tag{1.8}$$

Diferenciabilitat

Criteri de diferenciabilitat

El criteri consisteix en demostrar pas a pas que és contínua, derivable i diferenciable (en aquest ordre). S'han de complir les tres propietats perquè sigui diferenciable.

Derivable $\Leftrightarrow \exists \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \ldots$:

$$\exists \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{(x_0,y_0)} \Leftrightarrow \exists \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h, y_0 - f(x_0,y_0)}{h} \tag{1.9}$$

Diferenciable:

$$\lim_{\vec{x}-\vec{a}\to\vec{0}} \frac{f(\vec{x}) - f(\vec{a}) - (\vec{\nabla} f)_{\vec{a}} \cdot (\vec{x}-\vec{a})}{\|\vec{x}-\vec{a}\|} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial x_i} \text{ contínua.} \tag{1.10}$$

Diferenciació de superfícies

$f(x,y,z) = f(x) + f(y) + f(z) = n$, $(n \in \mathbb{R})$ al punt $\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$. Llavors $\mathrm{d}f = \vec{\nabla} f \cdot \mathrm{d}\vec{r} \equiv 0$.

Es veu fàcilment que $(\vec{\nabla} f)_{\vec{r}_0}$ dóna els coeficients de l'equació del pla. Així doncs, l'equació del pla és

$$(\vec{\nabla} f)_{(\vec{r}_0)_1}(x - x_0) + (\vec{\nabla} f)_{(\vec{r}_0)_2}(y - y_0) + (\vec{\nabla} f)_{(\vec{r}_0)_3}(z - z_0) \equiv 0 \tag{1.11}$$

Taylor i punts crítics

Polinomi de Taylor de segon ordre

$$P_2^{(\vec{a})} = f(\vec{a}) + (\vec{\nabla} f)_{\vec{a}} \cdot (\vec{x} - \vec{a}) + \frac{1}{2!}(\vec{x} - \vec{a}) \cdot [(H^f)_{\vec{a}}(\vec{x} - \vec{a})] \tag{1.12}$$

Punts crítics

Són els punts $\vec{a}$ en què $(\vec{\nabla} f)_{\vec{a}} \equiv 0$. Llavors es tracta d'estudiar els hessians pel criteri de Sylvester.

Segons la recurrència dels menors principals del vèrtex superior esquerre, podem tenir:

- Mínim: $+, +, +, +, \ldots$
- Màxim: $-, +, -, +, \ldots$
- Punt de sella: $*, *, *, *, \ldots$, on $* \neq 0$.
- No conclusiu: $*, \ldots, 0, \ldots$, llevat que coneguem els valors propis de l'hessià.

Funció implícita i multiplicadors de Lagrange

Integrals de línia

$\vec{f}$ sobre $\mathcal{C}$

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{f}(\vec{x}) \cdot \mathrm{d}\vec{x} = \int_{\mathcal{C}} \vec{f}(\vec{x}(u)) \cdot \vec{x}'(u) \, \mathrm{d}u \tag{1.13}$$

f sobre $\mathcal{C}$

$$\int_{\mathcal{C}} \phi(\vec{x}) \, \mathrm{d}s = \int_{\mathcal{C}} \phi(\vec{x}(u)) \|\vec{x}'(u)\| \, \mathrm{d}u \tag{1.14}$$

Integrals múltiples

$$\iiint_{\mathcal{S}} f(x,y,z) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z = \int_{x_1}^{x_2} \left[\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} \left[\int_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} \mathrm{d}z \right] \mathrm{d}y \right] \mathrm{d}x \tag{1.15}$$

Teorema 1.1 (Green)**.**

$$\iint_{\mathcal{S}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \oint_{\mathcal{C}} (P \, \mathrm{d}x + Q \, \mathrm{d}y) \tag{1.16}$$

□

Integrals de superfície

$\vec{f}$ sobre $\mathcal{S}$

$$\iint_{\mathcal{S}} \vec{f} \, \mathrm{d}\mathcal{S} = \iint_{\mathcal{S}} \vec{f}(\vec{r}(u,v)) \cdot \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right) \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v \tag{1.17}$$

f SOBRE $\mathcal{S}$

$$\iint_{\mathcal{S}} f \,\mathrm{d}\mathcal{S} = \iint_{\mathcal{S}} f(\vec{r}(u,v)) \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right\| \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v \tag{1.18}$$

Teorema 1.2 (Gauss)**.**

$$\begin{aligned} &\iiint_{\mathcal{V}} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \\ &= \iint_{\mathcal{S}} \left[P\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + Q\,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + R\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \right] \end{aligned} \tag{1.19}$$

o bé

$$\iiint_{\mathcal{V}} (\vec{\nabla} \cdot \vec{f})\,\mathrm{d}\mathcal{V} = \iint_{\mathcal{S}} \vec{f} \cdot \mathrm{d}\vec{\mathcal{S}} \tag{1.20}$$

□

Teorema 1.3 (Stokes)**.**

$$\begin{aligned} &\iint_{\mathcal{S}} \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial Q} \right) \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \right] \\ &= \oint_{\mathcal{C}} \left[P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + R\,\mathrm{d}z \right] \end{aligned} \tag{1.21}$$

o bé

$$\iint_{\mathcal{S}} (\vec{\nabla} \times \vec{f}) \cdot \mathrm{d}\vec{\mathcal{S}} = \oint_{\mathcal{C}} \vec{f}(\vec{x}) \cdot \mathrm{d}\vec{x} \tag{1.22}$$

□

Parametritzacions típiques