Universitat Autònoma de Barcelona, Departament de Física

Càlcul en una variable

Alfredo Hernández Cavieres

2012-2013

Aquesta obra està subjecta a una llicència de
Reconeixement-NoComercial-CompartirIgual 4.0
Internacional de Creative Commons.

Índex

1 Funcions d'una variable real

Funció real $\equiv f : D \to \mathbb{R}, \quad D \subseteq \mathbb{R}$.

- Domini $\equiv \{x \in D \mid \exists f(x)\}$.
- Imatge $\equiv \{f(x) \mid x \in D\}$.
- Gràfic $\equiv \{(x, f(x)) \mid x \in D\} \subseteq D \times \mathbb{R}$.

Operacions

Siguin f i g funcions definides a D i E respectivament,

- Suma: $(f + g)(x) \equiv f(x) + g(x), \quad \forall x \in D \cap E$.
- Producte: $(fg)(x) \equiv f(x)g(x), \quad \forall x \in D \cap E$.
- Composició: $(g \circ f)(x) \equiv g(f(x)), \quad \forall x \in D$, tal que $f(x) \in E$.

1.1 Límit d'una funció

$\lim\limits_{x\to a} = l$, si $\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0$ tal que si $|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon \Leftrightarrow$ és possible expressar una inequació entre δ i ε. L'existència del límit no depèn del comportament de $f(x)$ en a, sinó al seu voltant.

Propietats

- El $\lim f(x)$ és únic.
- Si $\exists \lim\limits_{x\to a} f(x) \Rightarrow f$ és fitada en algun $\varepsilon^*(a, \delta)$.
- Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = k$ i $\lim\limits_{x\to a} g(x) = l$,
  - $\lim(f(x) + g(x)) = k + l$.
  - $\lim(f(x)g(x)) = kl$.
  - $\lim({}^{f(x)}/_{g(x)}) = {}^{k}/_{l}$ (si $l \neq 0$ i $g(x) \neq 0$ en $\varepsilon^*(a, \delta)$.
  - $f(x) \leq g(x)$ en algun $\varepsilon^*(a, \delta) \Rightarrow k \neq l$.

Límits per la dreta i per l'esquerra (procediment)

- Dreta: $x = a + \delta, \quad \lim\limits_{x\to a^+} \Rightarrow \lim\limits_{\delta\to 0^-}$.
- Esquerra: $x = a - \delta, \quad \lim\limits_{x\to a^-} \Rightarrow \lim\limits_{\delta\to 0^+}$.

1.2 Continuïtat d'una funció

Si $x \in \varepsilon(a, \delta) \Rightarrow f(x) \in \varepsilon(f(a), \varepsilon) \Rightarrow \lim\limits_{x\to a} f(x) = f(\lim\limits_{x\to a} x)$.

Discontinuïtats

- Evitables: Quan $\exists \lim_{x \to a} f(x)$ finit, però $\neq f(a)$. La discontinuïtat es pot eliminar igualant $f(a)$ a $\lim_{x \to a} f(x)$.
- Inevitables: $\lim_{x \to a} f(x)$ és $\pm\infty$ o $\nexists \lim_{x \to a} f(a)$.
  - De salt: $\lim_{x \to a^-} f(x) \neq \lim_{x \to a^+} f(x)$.
  - Oscil·lant: $\nexists$ algun o els dos límits laterals, però f és fitada a $\varepsilon^*(a, \varepsilon)$.
  - Infinita: f no és fitada a cap $\varepsilon^*(a, \delta)$, tant si no existeixen els límits laterals com si són infinits.

Teorema del màxim i el mínim

Si f és contínua al compacte $K \Rightarrow f(K)$ té màxim i mínim.

Teorema del valor intermedi de Bolzano

Si f és contínua a $[a, b]$, amb $f(a) \neq f(b)$ i $y_0 \in (f(a), f(b)) \Rightarrow \exists! c \in (a, b)$ tal que $f(c) = y_0$.

Teorema de la continuïtat de la funció inversa

Si f és invertible a l'interval $I \Rightarrow f$ creix o decreix estrictament a I i f^{-1} és contínua a $f(I)$.

Continuïtat uniforme

f és uniformement contínua si $\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0$ tal que $\frac{f(x) - f(x')}{x - x'} < \frac{\varepsilon}{\delta}$.

Funció de Lipschitz

És útil en molts casos (no sempre) per establir si una f és uniformement contínua en un interval.

$$\begin{aligned} \text{Lipschitz} &\Rightarrow \text{uniformement contínua.} \\ \text{No Lipschitz} &\not\Rightarrow \text{no uniformement contínua.} \end{aligned}$$

Sigui $f : A \to \mathbb{R}$. Si $\exists k \geq 0$ tal que $\dfrac{|f(a_1) - f(a_2)|}{|a_1 - a_2|} \leq k, \quad \forall a_1, a_2 \in A$, amb $a_1 \neq a_2 \Rightarrow f$ és uniformement contínua a A.

1.3 Infinitèsims

$f(x)$ és un infinitèsim quan $x \to a \Leftrightarrow \lim_{x\to a} f(x) = 0$.

Si $f(x)$ i $g(x)$ són dos infinitèsims quan $x \to a$,

$$\lim_{x\to a} = \begin{cases} 0 & \to f(x) \text{ és d'ordre superior a } g(x) \\ k & \to f(x) \text{ i } g(x) \text{ són del mateix ordre} \\ \pm\infty & \to f(x) \text{ és d'ordre inferior a } g(x) \\ \nexists & \to f(x) \text{ i } g(x) \text{ no són comparables} \end{cases} \tag{1.1}$$

Prenent $g(x) = (x-a)^n,\ n \in \mathbb{N}$ com a infinitèsim de referència,

$$f(x) \text{ és un infinitèsim d'ordre } \begin{cases} > n \\ n \\ < n \end{cases} \quad \text{si } \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{(x-a)^n} = \begin{cases} 0 \\ k \\ \pm\infty \end{cases} \tag{1.2}$$

Per tant, l'ordre d'un infinitèsim mesura la rapidesa amb què $f(x)$ tendeix a zero.

$$\begin{aligned} f(x) \text{ d'ordre } &> n \Rightarrow f(x) = o[(x-a)]^n \\ f(x) \text{ d'ordre } &\geq n \Rightarrow f(x) = O[(x-a)]^n \end{aligned} \tag{1.3}$$

Alguns infinitèsims equivalents quan $x \to 0$

- $f(x) \approx x$.
- $\sin(x) \approx x$.
- $\tan(x) \approx x$.
- $1 - \cos(x) \approx \frac{x^2}{2}$.
- $\arcsin(x) \approx x$.
- $\arctan(x) \approx x$.
- $e^x - 1 \approx x$.
- $\ln(1 + x) \approx x$.

2 La derivada

2.1 El problema del pendent

Quina és la recta que millor s'ajusta al gràfic d'una funció en un punt donat? La intuïció ens diu que és la recta tangent. No obstant, no sempre es pot parlar de recta tangent. El desenvolupament d'aquesta idea ens portarà als conceptes de derivada i funció derivable. Només per a aquestes funcions es podrà parlar de pendent i de recta tangent.

2.2 Derivada

Derivada d'una funció en un punt

Sigui f una funció definida en algun entorn d'un punt a. Definim la derivada de f en el punt a com el límit (si existeix):

$$f'(a) \equiv \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \tag{2.1}$$

Si aquest límit existeix, direm que la funció f és derivable en el punt a.

Derivada i pendent de la recta tangent

De totes les línies rectes que passen pel punt $(a, f(a))$, la recta tangent al gràfic de f en aquest punt és la que millor s'ajusta al gràfic en el punt esmentat. Aquesta recta és:

$$y = f(a) + f'(a)(x - a) \tag{2.2}$$

Així doncs, derivabilitat $\Leftrightarrow$ existència de recta tangent.

Diferencial

Podem reexpressar la recta tangent, $y = f(a) + f'(a)(x - a)$, en termes de nous eixos de coordenades, $(\mathrm{d}x, \mathrm{d}y)$, paral·leles a (x, y) amb l'origen traslladat al punt $(a, f(a))$:

$$\mathrm{d}y = f'(a)\,\mathrm{d}x \tag{2.3}$$

Aquesta funció lineal s'anomena diferencial de la funció f en el punt a. Els conceptes de derivabilitat i diferenciabilitat de f en un punt són equivalents. Si f és diferenciable en tots els punts de $D \subseteq \mathbb{R}$, escriurem:

$$f'(x) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x) \tag{2.4}$$

Aquesta notació, anomenada de Liebnitz, és molt útil perquè permet manipular els diferencials com a fraccions, respectant les propietats de les derivades. Pel que fa a derivades d'ordre superior n, escriurem:

$$f^{(n)}(x) = \frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n} = \frac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x^n} f(x) \tag{2.5}$$

Derivabilitat i continuïtat

Si f és derivable en el punt a, la funció $f(x) - f(a)$ ha de ser un infinitèsim (d'ordre igual o superior a 1) quan $x \to a$. Per tant:

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a) \tag{2.6}$$

Així doncs, f derivable en el punt $a \Leftrightarrow f$ contínua en el punt a.

Propietats de la derivada

- Linealitat de la derivada:

  $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$.

  $(kf)'(a) = kf'(a), \quad \forall k \in \mathbb{R}$.
- Derivada del producte:

  $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$.
- Derivada del quocient:

  $(f/g)'(a) = [f'(a)g(a) - f(a)g'(a)]/[g(a)]^2$
- Derivada d'una funció composta (regla de la cadena):

  $(g \circ f)'(a) = g'[f(a)]f'(a)$
- Derivada de la funció inversa:

  $(f^{-1})'(a) = 1/[f'[f^{-1}(a)]]$

2.3 Derivades elementals

Funcions polinòmiques

- $f(x) = k, \quad f'(x) = 0$
- $f(x) = x^n, \quad f'(x) = nx^{n-1}$

Funcions exponencials

- $f(x) = \ln x, \quad f'(x) = \frac{1}{x}$
- $f(x) = e^x, \quad f'(x) = e^x$
- $f(x) = \log_a x, \quad f'(x) = \frac{1}{x \ln a}$
- $f(x) = a^x, \quad f'(x) = a^x \ln a$

Funcions trigonomètriques

- $f(x) = \sin x, \quad f'(x) = \cos x$
- $f(x) = \cos x, \quad f'(x) = -\sin x$
- $f(x) = \tan x, \quad f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$
- $f(x) = \arcsin x, \quad f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $f(x) = \arccos x, \quad f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $f(x) = \arctan x, \quad f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

Funcions hiperbòliques

- $f(x) = \sinh x, \quad f'(x) = \cosh x$
- $f(x) = \cosh x, \quad f'(x) = \sinh x$
- $f(x) = \tanh x, \quad f'(x) = \frac{1}{\cosh^2 x}$
- $f(x) = \sinh^{-1} x, \quad f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
- $f(x) = \cosh^{-1} x, \quad f'(x) = \frac{1}{\sqrt{-1+x^2}}$
- $f(x) = \tanh^{-1} x, \quad f'(x) = \frac{1}{1-x^2}$

2.4 Teoremes del valor mitjà

Teorema del valor mitjà de Rolle

Si f és contínua a l'interval $[a, b]$ i derivable en el seu interior,

$$f(a) = f(b) \Rightarrow \exists c \in (a, b) \text{ tal que } f'(c) = 0 \tag{2.7}$$

En efecte, al ser f contínua a $[a, b]$, ha de tenir màxim i mínim.

Teorema del valor mitjà de Cauchy

Si f i g són contínues a l'interval $[a, b]$ iderivables en el seu interior, i es compleix que $g(a) \neq g(b)$ i que $f'(x)$ i $g'(x)$ no s'anul·len simultàniament en cap punt $\in [a, b]$

$$\Rightarrow \exists c \in (a, b) \text{ tal que } \frac{f(b) - f(b)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \tag{2.8}$$

Teorema del valor mitjà de Lagrange

Si f és contínua a l'interval $[a, b]$ i derivable en el seu interior

$$\Rightarrow \exists c \in (a, b) \text{ tal que } \frac{f(b) - f(b)}{b - a} = f'(c) \tag{2.9}$$

És un cas particular del teorema anterior; només cal prendre $g(x) = x$.

2.5 Creixement i concavitat

Creixement i decreixement

- f és creixent a $(a,b) \Leftrightarrow f'(x) \geq 0, \quad \forall x \in (a,b)$.
- f és decreixent a $(a,b) \Leftrightarrow f'(x) \leq 0, \quad \forall x \in (a,b)$.

Extrems relatius

- Hi ha un màxim al punt $c \in (a,b)$ si $f'(c) = 0$, f és creixent a (a,c) i decreixent a (c,b).
- Hi ha un mínim al punt $c \in (a,b)$ si $f'(c) = 0$, f és decreixent a (a,c) i creixent a (c,b).

Concavitat i convexitat

- f és còncava a (a,b) si la seva derivada és monòtonament decreixent a l'interval.
- f és convexa a (a,b) si la seva derivada és monòtonament creixent a l'interval.

Punts d'inflexió

Les condicions següents són equivalents:

- Hi ha un punt d'inflexió al punt $c \in (a,b)$ si $f'(c) = 0$ i f és creixent (o decreixent) tant a (a,c) com a (c,b).
- Hi ha un punt d'inflexió al punt $c \in (a,b)$ si $f'(c) = 0$ i f és convexa a (a,c) i còncava a (a,c) (o a l'inrevés).

2.6 Regles de l'Hôpital

Amb aquest nom s'apleguen diversos teoremes que són de gran utilitat per al càlcul de límits de funcions. Les regles de l'Hôpital permeten resoldre moltes de les indeterminacions $0/0$ i ∞/∞.

Els casos $0/0$ i ∞/∞

Si el límit d'una funció és una indeterminació d'aquest tipus, es pot aplicar l'Hôpital un nombre finit de vegades, n, fins desfer la indeterminació (només si és possible). El valor obtingut després de n reiteracions és el valor del límit de la funció inicial:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} \text{ és indeterminat, però } \lim_{x\to a} \frac{f^n(x)}{g^n(x)} = l \Rightarrow \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = l \tag{2.10}$$

Pel que fa a la resta d'indeterminacions, es poden reduir als casos $0/0$ o ∞/∞.

El cas $0 \cdot \infty$

$\lim_{x \to a} f(x)g(x)$ és indeterminat, però

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{1/g(x)} = \frac{\infty}{\infty} \text{ o } \frac{0}{0} \tag{2.11}$$

El cas $\infty - \infty$

$\lim_{x \to a} f(x) - g(x)$ és indeterminat, però

$$\lim_{x \to a} \frac{1/f(x) - 1/g(x)}{1/f(x)g(x)} = \frac{\infty}{\infty} \text{ o } \frac{0}{0} \tag{2.12}$$

Els casos 0^0, ∞^0 i 1^∞

$\lim_{x \to a} f(x)^{g(x)}$ és indeterminat, però

$$\lim_{x \to a} e^{g(x) \ln f(x)} \text{ i } \lim_{x \to a} g(x) \ln f(x) = 0 \cdot \infty \tag{2.13}$$

2.7 Fórmula de Taylor

Polinomi de Taylor de grau n

Suposem que f és derivable n vegades en el punt a, busquem ara el polinomi $P_n(x)$, de grau n, que millor s'ajusti a f en aquest punt.

$$f(x) \approx P_n^{(a)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \tag{2.14}$$

Si $a = 0$, parlem del polinomi de Maclaurin.

Fórmula de Taylor

$$f(x) = P_n^{(a)}(x) + R_n(x, a) \tag{2.15}$$

Resta de Lagrange

Es pot avaluar l'error màxim que es comet quan es fa el polinomi de Taylor avaluant $R_n(x, a)$ en funció de c.

$$R_n(x, a) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \tag{2.16}$$

2.8 Mètode Newton-Raphson

Permet estimar la solució d'una equació d'una variable real amb un alt grau de precisió.

Sigui $f(x)$ una funció derivable que té una solució en $x = a$ i sigui x_1 una estimació arbitrària de a. La tangent a la gràfica en $(x_1, f(x_1))$ té per equació $y = f(x) + f'(x_1)(x - x_1)$ i talla l'eix x en $0 = f(x_1) + f'(x_1)(x_2 - x_1) \Rightarrow x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \Rightarrow$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \tag{2.17}$$

Sota hipòtesis adequades, si es fa una reiteració del procés, la successió $\{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$ convergeix ràpidament a a.

2.9 Representació gràfica d'una funció

Propietats d'una funció que cal tenir en compte a l'hora de representar-la gràficament:

i) Domini d'existència de la funció.

ii) Simetries i periodicitat.

iii) Punts de tall amb els eixos.

iv) Creixement i decreixement.

v) Màxims, mínims i punts d'inflexió.

vi) Concavitat i convexitat.

vii) Asímptotes verticals.

viii) Asímptotes oblíqües.

ix) Asímptotes horitzontals.

x) Comportament parabòlic.

3 Integral de Riemann

3.1 El problema de l'àrea

Sigui f una funció acotada en $[a, b]$. Quant val l'àrea sota el gràfic entre els punts a i b?

Particions

Una partició de Π de f és:

$$\begin{gathered}\Pi \equiv \{x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n\}, \\ a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b\end{gathered} \tag{3.1}$$

Així doncs, la partició Π descompon l'interval $[a, b]$ en n intervals I_i, on $I_i = [x_{i-1}, x_i]$. Denotarem la seva llargada com a Δx_i:

$$\Delta x_i = (x_i - x_{i-1}) \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = b - a \tag{3.2}$$

Sumes superiors i inferiors

Com que f és fitada en $[a, b]$, també ho és en cadascun dels seus intervals I_i. Així doncs, hi haurà un ínfim i un suprem per a cada interval:

$$M_i = \sup\{f(x) \mid x \in I_i\}, \qquad m_i = \inf\{f(x) \mid x \in I_i\} \tag{3.3}$$

Definim la suma superior i la suma inferior de f associades a la partició Π com:

$$S(f, \Pi) \equiv \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i, \qquad s(f, \Pi) \equiv \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i \tag{3.4}$$

$$m_i \leq M_i \Rightarrow s(f, \Pi) \leq S(f, \Pi), \quad \forall \Pi \tag{3.5}$$

Direm que Π' és més fina que Π si Π' s'obté afegint punts a Π. Llavors escriurem $\Pi' > \Pi$. Així doncs, es compleix:

- $S(f, \Pi') \leq S(f, \Pi)$.
- $s(f, \Pi') \geq s(f, \Pi)$.
- $\Pi_1, \Pi_2 \Rightarrow s(f, \Pi_1) \leq S(f, \Pi_2)$.

Integral de Riemann

Siguin $s(f) \equiv \{\text{sumes inferiors}\}$ i $S(f) \equiv \{\text{sumes superiors}\}$.

$$\begin{aligned} \underline{\int_a^b} f &\equiv \sup(s(f)) \equiv \text{Integral inferior de Riemann} \\ \overline{\int_a^b} f &\equiv \inf(S(f)) \equiv \text{Integral superior de Riemann} \end{aligned} \tag{3.6}$$

En general,

$$\underline{\int_a^b} f \leq \overline{\int_a^b} f \tag{3.7}$$

3.2 Integrabilitat d'una funció

1r criteri d'integrabilitat

Diem que f és integrable (de Riemann) si es compleix que:

$$\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \quad \exists \Pi \text{ de } [a,b] \text{ tal que } S(f,\Pi) - s(f,\Pi) < \varepsilon \tag{3.8}$$

Condicions per a la integrabilitat

- Si f és contínua a $[a,b] \Rightarrow f$ és integrable a $[a,b]$.
- Si f és monòtona a $[a,b] \Rightarrow f$ és integrable a $[a,b]$.
- Si f és integrable a $[a,b]$, $f([a,b]) \subseteq [c,d]$, i g és contínua a $[c,d] \Rightarrow g \circ f$ és integrable a $[a,b]$.
- Si f és integrable a $[a,b]$, llavors també ho és en qualsevol subinterval $[c,d] \subseteq [a,b]$.

3.3 Integral com a límit de sumes de Riemann

Sigui f una funció definida i fitada a $[a,b]$, sigui Π una partició de $[a,b]$ en n intervals I_i i siguin $z_i \in I_i$ una col·lecció de punts. Anomenem suma de Riemann de f, associada a la partició Π i als punts z_i a la quantitat:

$$\sum_{i=1}^{n} f(z_i)\Delta x_i \tag{3.9}$$

Evidentment, sempre es compleix que $S(f,\Pi) \leq \sum_{i=1}^{n} f(z_i)\Delta x_i \leq s(f,\Pi)$.

2n criteri d'integrabilitat

Diem que f és integrable (de Riemann) si es compleix que:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \Pi \text{ tal que } S(f,\Pi) - s(f,\Pi) < \varepsilon \Leftrightarrow \exists \lim_{\Pi} \sum_{i=1}^{n} f(z_i)\Delta x_i = \int_a^b f \tag{3.10}$$

3.4 Propietats de la integral

Si les funcions f i g són integrables en $[a,b]$, llavors:

- Linealitat de la integral:

  La funció $f+g$ és integrable en $[a,b]$ i $\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g$.

  Si $k \in \mathbb{R} \Rightarrow$ la funció kf és integrable en $[a,b]$ i $\int_a^b (kf) = k\int_a^b f$.

- Integrabilitat del producte i del quocient:

  fg és integrable a $[a,b]$.

  Si $g(x) \geq k > 0 \Rightarrow \frac{f}{g}$ és integrable a $[a,b]$.

- Àrea sota un punt:

  Si f i g són integrables a $[a,b]$ i $f(x) = g(x)$ en tot l'interval $[a,b]$ excepte en un nombre finit de punts $\Rightarrow \int_a^b f = \int_a^b g$.

- Additivitat dels intervals d'integració:

  Si $c \in (a,b) \Rightarrow f$ és integrable en $[a,c]$ i en $[c,b]$, i es té $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$.

- Desigualtats:

  Si $f(x) \leq g(x) \, \forall x \in [a,b] \Rightarrow \int_a^b f \leq \int_a^b g$.

  La funció $|f|$ és integrable en $[a,b]$ i $|\int_a^b f| \leq \int_a^b |f|$.

- Valor mitjà d'una funcio integrable:

  $\langle f \rangle_{[a,b]} \equiv \frac{1}{b-a}\int_a^b f$.

  Teorema del valor mitjà: $\exists c \in [a,b]$ tal que $f(c) = \langle f \rangle_{[a,b]}$.

En tot el desenvolupament de la teoria de la integral de Riemann hem suposat que $a < b$. Es pot estendre el concepte d'integral al cas en què el límit inferior d'integració sigui més gran que el superior. Només cal definir:

$$\int_b^a f \equiv -\int_a^b f \tag{3.11}$$

Tret de les desigualtats, les propietats anteriors segueixen sent vàlides quan el límit inferior és més gran que el superior.

3.5 Integració i derivació

Suposem que f és integrable a $[a,b]$, $\forall x \in [a,b]$ definim la funció àrea:

$$S(x) \equiv \int_a^x f \tag{3.12}$$

- S és uniformement contínua a $[a,b]$.
- En els punts de $[a,b]$ on f és contínua, la funció S és derivable i la seva derivada coincideix amb f.

3.6 Teorema fonamental del càlcul

Si f és integrable a $[a,b]$ i F és una primitiva de f:

$$\int_a^b f = F(b) - F(a) \equiv F|_a^b \tag{3.13}$$

3.7 Notacions per a la integració i la derivació

Notació de Lagrange

Una de les notacions més modernes per a la derivació de funcions és la de Lagrange, en què utilitza el símbol *prima* per a indicar la derivada. Sigui f una funció, llavors, tenim:

$$f', f'', f''', f^{(4)} \ldots, f^{(n)} \tag{3.14}$$

Notació de Liebniz

La notació original emprada per Gottfried Leibniz es fa servir en matemàtiques. És particularment comú quan l'equació $y = f(x)$ és utilitzada per a referir-se a la relació funcional entre les variables dependents i independents y i x. En aquest cas la derivada es pot escriure com a:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \equiv \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f(x)) \tag{3.15}$$

En general, la derivada n-èsima de $f(x)$ s'escriu:

$$\frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n} \equiv \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(f(x)) \tag{3.16}$$

Per a la integral, fa servir la següent notació:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \equiv \int_a^b f \tag{3.17}$$

Notació de Newton

Sir Isaac Newton fa servir el concepte de *fluent* per a la seva notació de integrals i derivades:

$$x''', \; x'', \; x', \; x, \; \ddot{x}, \; \ddot{x}, \; \dddot{x}$$

Per passar d'equacions de l'esquerra a equacions de la dreta, Newton aplica *fluxions* (i.e., deriva). En general, quan Newton fa fluxions, deriva respecte de t. Sigui $x = f(t)$, llavors, tenim:

$$\dot{x} \equiv \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, \quad x' \equiv \int x \, \mathrm{d}t \tag{3.18}$$

En l'actualitat aquesta notació s'utilitza principalment en mecànica i altres àrees de la física per indicar la derivació respecte el temps.

3.8 Expressió integral de la resta de Taylor

Si $f^{(n+1)}(t)$ és integrabl entre a i x:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^k(a)}{k!}(x-a)^k + R_n(x,a), \tag{3.19}$$

$$\text{on} \qquad R_n(x,a) = \int_a^x \frac{f^{n+1}(t)}{n!}(x-t)^n \, \mathrm{d}t \tag{3.20}$$

Fitar $R_n(x,a)$

Exemple 3.1. $f(x) = e^{-x} \Rightarrow f^{(n)}(x) = (-1)^n e^{-x}$; $f^{(n)}(0) = (-1)^n$
$\Rightarrow e^{-x} = 1 - \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!}x^n + \frac{1}{n!}\int_0^x (x-t)^n (-1)^{(n+1)}(t) \, \mathrm{d}t$
$\Rightarrow |R_n| = \frac{1}{n!}\int_0^x (x-t)^n e^{-x} \, \mathrm{d}t \leq \frac{1}{n!}\int_0^x (x-t)^n \, \mathrm{d}t = \frac{-1}{n!}\frac{(x-t)^{n+1}}{n+1}\Big|_0^x$
$\Rightarrow |R_n| = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$ ▲

3.9 Aplicacions de la integral

Sigui $f(x)$ una funció contínua a $[a,b]$.

Longitud d'un arc de corba

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} \, \mathrm{d}x \tag{3.21}$$

Superfície lateral d'un cos de revolució

$$S_L = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2}\,\mathrm{d}x \tag{3.22}$$

Volum d'un cos de revolució

$$V = \pi \int_a^b f(x)^2\,\mathrm{d}x \tag{3.23}$$

4 Mètodes d'integració

4.1 Primitives immediates

Derivades	Primitives
$x^n \to nx^{n-1}$	$\int x^n \, \mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad (n \neq -1)$
$\ln x \to \frac{1}{x}$	$\int \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x = \ln x + C$
$e^x \to e^x$	$\int e^x \, \mathrm{d}x = e^x + C$
$\sin x \to \cos x$	$\int \cos x \, \mathrm{d}x = \sin x + C$
$\cos x \to -\sin x$	$\int \sin x \, \mathrm{d}x = -\cos x + C$
$\tan x \to \frac{1}{\cos^2 x}$	$\int \frac{1}{\cos^2 x} \, \mathrm{d}x = \tan x + C$
$\arcsin x \to \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, \mathrm{d}x = \arcsin x + C$
$\arccos x \to -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\int -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, \mathrm{d}x = \arccos x + C$
$\arctan x \to \frac{1}{1+x^2}$	$\int \frac{1}{1+x^2} \, \mathrm{d}x = \arctan x + C$
$\operatorname{arcsinh} x \to \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \, \mathrm{d}x = \operatorname{arcsinh} x + C$
$\operatorname{arccosh} x \to -\frac{1}{\sqrt{-1+x^2}}$	$\int -\frac{1}{\sqrt{-1+x^2}} \, \mathrm{d}x = \operatorname{arccosh} x + C$
$\operatorname{arctanh} x \to \frac{1}{1-x^2}$	$\int \frac{1}{1-x^2} \, \mathrm{d}x = \operatorname{arctanh} x + C$

4.2 Canvi de variable o substitució

És una conseqüència de la regla de la cadena de la derivació:

$$\int_a^b f(g(x))g'(x) \, \mathrm{d}x = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u) \, \mathrm{d}u \tag{4.1}$$

Aquest mètode pot simplificar el càlcul d'una integral, a priori, no trivial.

Exemple 4.1. $\int_1^e [\ln(x)]^2 \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x = \int_0^1 u^2 \, \mathrm{d}u = \left.\frac{u^3}{3}\right|_0^1 = \frac{1}{3}$

Es fan els canvis $\begin{cases} u = \ln(x) \\ \mathrm{d}u = \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x \end{cases}$ ▲

4.3 Integració per parts

És una conseqüència de la regla del producte de funcions de la derivació:

$$\int_a^b u \, \mathrm{d}v = uv\big|_a^b - \int_a^b v \, \mathrm{d}u \tag{4.2}$$

Mètode LIATE

Aquesta regla proporciona un mètode mnemotècnic que facilita l'elecció de u i $\mathrm{d}v$.

- L: Logarithmic functions.
- I: Inverse trigonometric functions.
- A: Algebraic functions.
- T: Trigonometric functions.
- E: Exponential functions.

Donada una funció qualsevol, u serà aquella del tipus que es trobi primer a la llista.

Exemple 4.2. $\displaystyle\int xe^x \, \mathrm{d}x = xe^x - \int e^x \, \mathrm{d}x = e^x(x-1) + C$

Es fan els canvis $\begin{cases} u = x & \mathrm{d}u = \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v = e^x \, \mathrm{d}x & v = e^x \end{cases}$ ▲

4.4 Polinomis trigonomètrics

Per calcular integrals del tipus $\int \cos^n x \cos^m x \, \mathrm{d}x$, distingim tres casos:

i) $n = 1$ (o $m = 1$). Es resol amb el canvi $u = \cos x$ (o $u = \sin x$).

ii) n o m senar. Utilitzant la identitat $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ es redueix al cas anterior.

iii) n i m parells. Es redueix als casos anteriors aplicant les fórmules de l'angle meitat, $\cos^2 x = (1 + \cos 2x)/2$ i $\sin^2 x = (1 - \cos 2x)/2$.

4.5 Funcions racionals

Completar el quadrat

$$ax^2 + bx + c = a((x + \alpha)^2 + \beta) \tag{4.3}$$

4.6 Funcions racionals d'exponencials

Integrals de funcions del tipus $R(e^x)$.

Es poden reduir a integrals de funcions racionals amb el canvi de variable:

$$u = e^x, \quad \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}u}{u} \tag{4.4}$$

4.7 Integrals trigonomètriques

Inetgrals de funcions del tipus $R(\sin x, \cos x)$.

i) Cas universal (canvi de Weirstrass).

$$u = \tan\frac{x}{2}, \quad \mathrm{d}x = \frac{2\,\mathrm{d}u}{1+u^2}, \quad \sin x = \frac{2u}{1+u^2}, \quad \cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2} \tag{4.5}$$

ii) R senar en $\sin x$, $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$.

$$u = \cos x, \quad \mathrm{d}u = -\sin x\,\mathrm{d}x, \quad \sin^2 x = 1-u^2 \tag{4.6}$$

iii) R senar en $\cos x$, $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$.

$$u = \sin x, \quad \mathrm{d}u = \cos x\,\mathrm{d}x, \quad \cos^2 x = 1-u^2 \tag{4.7}$$

iv) R senar en $\sin x i \cos x$, $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$.

$$u = \tan x, \quad \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}, \quad \sin x = \frac{u}{\sqrt{1+u^2}}, \quad \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+u^2}} \tag{4.8}$$

4.8 Funcions amb potències fraccionàries

Integrals de potències del tipus $\left(\dfrac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_i}$, $r_1, \ldots, r_n \in \mathbb{Q}$.

Es poden reduir a integrals de funcions racionals amb el canvi de variable:

$$u^m = \frac{ax+b}{cx+d}, \quad m \equiv \text{ mínim comú denominador de } r_i. \tag{4.9}$$

4.9 Radicals d'expressions quadràtiques

Integrals de funcions del tipus $R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})$.

Després d'eliminar el terme lineal completant el quadrat, el radical es redueix a un dels casos:

i) $\sqrt{k^2-x^2}$. Canvi: $x = k\sin t$.

ii) $\sqrt{k^2+x^2}$. Canvi: $x = k\tan t$.

iii) $\sqrt{x^2-k^2}$. Canvi: $x = k\frac{1}{\cos t}$.

4.10 Identitats trigonomètriques útils

$$\begin{aligned} \sin^2\theta + \cos^2\theta &= 1 \\ \tan^2\theta + 1 &= \sec^2\theta \end{aligned} \tag{4.10}$$

$$\begin{aligned} \sin(\alpha \pm \beta) &= \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta \\ \cos(\alpha \pm \beta) &= \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta \end{aligned} \tag{4.11}$$

$$\begin{aligned} \sin^2\theta &= \frac{1-\cos 2\theta}{2} \\ \cos^2\theta &= \frac{1+\cos 2\theta}{2} \end{aligned} \tag{4.12}$$

5 Integrals impròpies

5.1 Restriccions de la integral de Riemann

La teoria de la integral de Riemann només és aplicable a funcions definides i fitades en un interval tancat finit $[a, b]$. La integral impròpia estén la teoria d'integració a funcions que no compleixen aquests requisits, com ara $\int_0^{+\infty} xe^{-x}\,\mathrm{d}x$ o $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$.

5.2 Integral impròpia d'una funció localment integrable

Funcions localment integrables

Direm que f és una funció localment integrable a $[a, b)$ si és integrable en qualsevol subinterval finit de $[a, b)$, és a dir, si $\forall z \in (a, b)$, $\exists \int_a^z$.

Similarment, direm que f és una funció localment integrable a $(a, b]$ si és integrable en qualsevol subinterval finit de $(a, b]$, és a dir, si $\forall z \in (a, b)$, $\exists \int_z^b$.

Integrals impròpies

Si f és localment integrable a $[a, b)$, definim la integral impròpia de f en aquest interval com:

$$\int_a^{\triangleright b} f(x)\,\mathrm{d}x \equiv \lim_{z\to b^-} \int_a^z f(x)\,\mathrm{d}x \tag{5.1}$$

Similarment, es defineix la integral impròpia quan f és localment integrable en $(a, b]$:

$$\int_{a\triangleleft}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x \equiv \lim_{z\to a^+} \int_z^b f(x)\,\mathrm{d}x \tag{5.2}$$

Linealitat de les integrals impròpies

Si f i g són integrables a $[a, b)$ i $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, es compleix:

$$\int_a^{\triangleright b} [\lambda f(x) + \mu g(x)]\,\mathrm{d}x = \lambda \int_a^{\triangleright b} f(x)\,\mathrm{d}x + \mu \int_a^{\triangleright b} g(x)\,\mathrm{d}x \tag{5.3}$$

Les integrals impròpies del tipus $\int_{a\triangleleft}^{b}$ tenen propietats de linealitat similars.

Integrals doblement impròpies

Quan f és localment integrable a (a, b), tenim una integral doblement impròpia. En aquest cas es defineix:

$$\int_{a\triangleleft}^{\triangleright b} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{a\triangleleft}^{c} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^{\triangleright b} f(x)\,\mathrm{d}x, \quad \forall c \in (a, b) \tag{5.4}$$

En particular, estudiarem el cas $f(x) = 1/x^p$, que serà de molta utilitat a l'hora de comparar funcions:

$$\int_{0\lhd}^{1} \frac{dx}{x^p} \begin{cases} \text{convergeix} & \text{si } p < 1 \\ \text{divergeix} & \text{si } p \geq 1 \end{cases} \tag{5.5}$$

$$\int_{1}^{\rhd\infty} \frac{dx}{x^p} \begin{cases} \text{convergeix} & \text{si } p > 1 \\ \text{divergeix} & \text{si } p \leq 1 \end{cases} \tag{5.6}$$

Integrabilitat absoluta

Si f és localment integrable a $[a, b)$, direm que és absolutament impròpia en aquest interval si $\int_a^{\rhd b} |f(x)|\,\mathrm{d}x$ és convergent. Llavors:

$$\int_a^{\rhd b} |f(x)|\,\mathrm{d}x \text{ convergent} \Rightarrow \int_a^{\rhd b} f(x)\,\mathrm{d}x \text{ convergent.} \tag{5.7}$$

5.3 Integrals impròpies de funcions no negatives

Si f és localment integrable i no negativa a $[a, b)$, i $S(z) = \int_a^z f(x)\,\mathrm{d}x$, llavors:

$$\int_a^{\rhd b} f(x)\,\mathrm{d}x \text{ convergeix} \Leftrightarrow S(z) \text{ és fitada superiorment a } [a, b) \tag{5.8}$$

Cal notar que aquesta condició també és vàlida en el cas en què f estigui definida a $(a, b]$.

Criteri de comparació

Si f i g són localment integrables i no negatives a $[a, b)$, i $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que, en algun entorn de b es compleix que $f(x) < \lambda g(x)$, llavors:

$$\int_a^{\rhd b} g(x)\,\mathrm{d}x \text{ convergent} \Rightarrow \int_a^{\rhd b} f(x)\,\mathrm{d}x \text{ convergent.} \tag{5.9}$$

(i consegüentment, $\int_a^{\rhd b} f$ divergent $\Rightarrow \int_a^{\rhd b} g$ divergent).

La següent condició és una conseqüència directa del criteri de comparació:

Si f i g són localment integrables i no negatives a $[a, b)$, i $A = \lim_{x\to b^-} \frac{f(x)}{g(x)}$, llavors:

i) Si $A \neq \infty$: $\int_a^{\rhd b} g$ convergent $\Rightarrow \int_a^{\rhd b} f$ convergent.

ii) Si $A \neq 0$: $\int_a^{\rhd b} f$ convergent $\Rightarrow \int_a^{\rhd b} g$ convergent.

En conseqüència, si $A \neq 0, \infty$, les integrals $\int_a^{\rhd b} f$ i $\int_a^{\rhd b} g$ són ambdues convergents o divergents.

Aquests criteris també es compleixen quan l'interval és $(a, b]$.

5.4 La funció Γ d'Euler

Per $x > 0$ es defineix

$$\Gamma(x) \equiv \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t}\, \mathrm{d}t \tag{5.10}$$

Es tracta d'una integral impròpia definida a l'interval $(0, \infty)$ que convergeix $\forall x > 0$ i, per tant, $\Gamma(x)$ està definida a $(0, \infty)$.

Fórmula de recurrència: extensió a $x < 0$

$$\Gamma(x+1) = \int_0^\infty t^x e^{-t}\, \mathrm{d}t = \left[-te^{-t}\right]\Big|_0^\infty + x \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t}\, \mathrm{d}t = x\Gamma(x) \tag{5.11}$$

Hem trobat, doncs, una fórmula de recurrència que relaciona els valors de Γ en dos punts que distin 1 entre ells:

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x} \tag{5.12}$$

D'aquesta manera tenim definida $\Gamma(x)$ a tota la recta real excepte ens els enters no positius. Notem, però, que per a $x < 0$ la funció $\Gamma(x)$ no ve donada per la integral $\int_0^\infty t^{x-1} e^{-t}\, \mathrm{d}t$, ja que aquesta integral és divergent quan $x < 0$.

Funció factorial

Quan $x = n \in \mathbb{N}$ la fórmula de recurrència aplicada n vegades ens dóna:

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n(n-1)\Gamma(n-1) = \cdots = n!\Gamma(1)$$

D'altra banda, $\Gamma(1) = 1$. Per tant,

$$\Gamma(n+1) = n! \tag{5.13}$$

Es pot utilitzar aquesta relació com a definició del factorial de qualsevol número real que no sigui un enter negatiu, és a dir,

$$x! \equiv \Gamma(x+1), \quad (x \neq -1, -2, -3, \dots) \tag{5.14}$$

Fórmula de Stirling

Aquesta relació és molt útil per al càlcul aproximat del factorial de números grans:

$$n! \approx n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n} \tag{5.15}$$

6 Sèries numèriques

6.1 Sèries de números reals

Sigui $\{a_n\}$ una successió de números reals. Considerem la successió de sumes parcials $\{S_n\}$, on $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$, llavors definim la suma de la sèrie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ com el límit (si existeix):

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \equiv \lim\{S_n\} \equiv \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} a_k \right) \tag{6.1}$$

En altres paraules, el significat de «suma infinita» és, per definició,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \equiv \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \tag{6.2}$$

Si el límit és finit direm que la sèrie és sumable o convergent. Si el límit és $\pm\infty$ direm que és divergent, i si el límit no existeix direm que la sèrie no és sumable.

Linealitat de les sèries convergents

Si $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ i $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ són convergents i $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, es compleix:

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda a_k + \mu b_k) = \lambda \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \mu \sum_{k=1}^{\infty} b_k \tag{6.3}$$

Criteri general de convergència d'una sèrie

Ja hem vist que $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ és convergent si i només si la successió de sumes parcials $\{S_n\}$ és convergent. Però això equival a dir que la successió $\{S_n\}$ és de Cauchy, és a dir,

$$\begin{gathered} \forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que } |a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p}| < \varepsilon, \\ \forall n > n_0, \forall p \geq 1 \end{gathered} \tag{6.4}$$

Aquesta és, doncs, una condició necessària i suficient per a la convergència de la sèrie.

Una conseqüència d'aquest criteri de convergència és que

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ convergent } \Rightarrow \lim\{a_n\} = 0 \tag{6.5}$$

6.2 Exemples de sèries numèriques

Sèrie geomètrica

$$\sum_{k=0}^{n} r^k = \begin{cases} n+1 & \text{si } r = 1. \\ (r^{n+1}-1)/(r-1) & \text{si } r \neq 1. \end{cases} \tag{6.6}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} r^k = \begin{cases} 1/(1-r) & \text{si } |r| < 1. \\ \text{divergent} & \text{si } r \geq 1. \\ \text{no sumable} & \text{si } r \leq -1. \end{cases} \tag{6.7}$$

Sèrie aritmètica

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2} n(n+1). \tag{6.8}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} k \text{ divergeix.} \tag{6.9}$$

Sèrie harmònica

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = H_k \equiv \int_0^1 \frac{1-x^k}{1-x}\, dx. \tag{6.10}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \text{ divergeix.} \tag{6.11}$$

Sèrie harmònica generalitzada

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^p} = H_k^{(p)}. \tag{6.12}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p} \begin{cases} \text{convergeix} & \text{si } p > 1. \\ \text{divergeix} & \text{si } p \leq 1. \end{cases} \tag{6.13}$$

6.3 Sèries de termes no negatius

Un cas particular interessant de les sèries numèriques és el del cas de les sèries de termes no negatius, és a dir, que compleixen $a_k \geq 0$. En aquest cas hi ha una nova condició necessària i suficient per a la sumabilitat:

Si $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ és una sèrie de termes no negatius, llavors:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ convergeix } \Leftrightarrow \text{la successió } \{S_n\} \text{ és fitada superiorment.} \tag{6.14}$$

Criteri de comparació

Si $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ i $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ són sèries de termes no negatius i $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que, a partir d'un subíndex, es compleix que $a_k < \lambda b_k$, llavors:

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \text{ convergent} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ convergent.} \tag{6.15}$$

(i consegüentment, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ divergent $\Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ divergent).
La següent condició és una conseqüència directa del criteri de comparació:
Si $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ i $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ són sèries de termes no negatius, i $A = \lim \frac{a_n}{b_n}$, llavors:

i) Si $A \neq \infty$: $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ convergent $\Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ convergent.

ii) Si $A \neq 0$: $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ convergent $\Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ convergent.

En conseqüència, si $A \neq 0, \infty$, les integrals $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ i $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ són ambdues convergents o divergents.

Criteri de la integral

Sigui $n_0 \in \mathbb{N}$, i $f(x)$ una funció localment integrable, no negativa i decreixent a l'interval $[n_0, +\infty)$, llavors:

$$\sum_{k=n_0}^{\infty} f(x) \text{ convergent} \Leftrightarrow \int_{k=n_0}^{\infty} f(x)\, dx \text{ convergent.} \tag{6.16}$$

Criteri de l'arrel (o de Cauchy)

Si $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ és una sèrie qualsevol i $\alpha = \lim\{\sqrt[n]{|a_n|}\}$, llavors:

- $\alpha < 1$: la sèrie és convergent.
- $\alpha = 1$: no es pot concloure res.
- $\alpha > 1$: la sèrie és divergent.

Criteri del quocient (o d'Alambert)

Si $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ és una sèrie qualsevol i $\alpha = \lim\{\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}\}$, llavors:

- $\alpha < 1$: la sèrie és convergent.
- $\alpha = 1$: no es pot concloure res.
- $\alpha > 1$: la sèrie és divergent.

Si els límits (de Cauchy i d'Alambert) existeixen, ambdós tenen el mateix valor.

6.4 Sèries alternades

Són sèries del tipus

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}a_k = a_1 - a_2 + a_3 - \dots \tag{6.17}$$

o també

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k}a_k = -a_1 + a_2 - a_3 + \dots \tag{6.18}$$

Convergència absoluta

Direm que una sèrie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ és absolutament convergent si la sèrie $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ és convergent. Com a conseqüència d'aquest criteri de convergència, tenim que:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ absolutament convergent } \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ és convergent.} \tag{6.19}$$

Convergència condicional

És possible que $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ sigui convergent, però que $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ sigui divergent. En aquest cas, una condició suficient per a la convergència de les sèries alternades ens ve donada pel següent teorema:

Si $\{a_n\}$ és una successió decreixent de termes positius, que convergeix cap a 0

$$\Rightarrow \text{ la sèrie alternada } \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}a_k \text{ és convergent.} \tag{6.20}$$

Propietat commutativa

- Si $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ és absolutament convergent, totes les reordenacions convergeixen a la mateixa suma.
- Si $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ és condicionalment convergent, és possible reordenar la sèrie, però aquesta pot convergir a qualsevol real o, fins i tot, divergir.

7 Successions i sèries de funcions

7.1 Successions de funcions

Si denotem per $\mathcal{F}_D$ el conjunt de funcions definides en un domini D de la recta real, una successió de funcions de D és una aplicació del conjunt de números reals sobre el conjunt $\mathcal{F}_D$:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathcal{F}_D \\ n & \mapsto & f_n(x) \end{array} \tag{7.1}$$

que denotarem $\{f_n(x)\}_D = \{f_1(x), f_2(x), f_3(x), \dots\}_D$.

Convergència puntual

Una successió de funcions $\{f_n(x)\}_D$ convergeix puntualment en el domini D, cap ala funció $f(x)$ si $\forall x \in D$ es complei que $\lim_{n\to\infty}\{f_n(x)\}_D = f(x)$. Ho escriurem així:

$$f(x) = \lim_{\text{punt}(D)} f_n(x) \quad \text{o, també} \quad \{f_n(x)\} \stackrel{\text{punt}(D)}{\longrightarrow} f(x) \tag{7.2}$$

Per tant, $\{f_n(x)\}$ convergeix puntualment a $f(x)$ si:

$$\begin{gathered} \forall \varepsilon > 0 \text{ i } \forall x \in D, \exists n_0(x,\varepsilon) \in \mathbb{N} \\ \text{tal que } |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \forall n > n_0 \end{gathered} \tag{7.3}$$

Exemples:

i) La successió de funcions $f_n(x) = x/n$ convergeix puntualment, a tot $\mathbb{R}$, cap a la funció $f(x) = 0$.

ii) La successió de funcions $f_n(x) = x^n$ convergeix puntualment, a l'interval $(-1, 1]$, cap a la funció $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in (-1,1) \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$. Notem que el límit no és una funció contínua.

iii) La successió de funcions $f_n(x) = \sin(n^2x)/n$ convergeix puntualment, a tot $\mathbb{R}$, a la funció $f(x) = 0$. En aquest exemple, és interessant notar que la successió de derivades, $f_n'(x) = n\cos(n^2x)$, no convergeix puntualment cap a $f'(x) = 0$.

Com es pot veure en els exemples anteriors, la convergència puntal no transmet ni la continuitat, ni la integrabilitat, ni la derivabilitat de les funcions de la successió cap al seu límit. Introduirem ara un concepte més fort de convergència, la convergència uniforme, que sí que ho fa.

Convergència uniforme

Si n_0 d'una funció contínua puntualment depèn únicament del valor ε i no de x, parlarem d'una funció contínua uniformement. Ho escriurem així:

$$f(x) = \lim_{\text{unif}(D)} f_n(x) \quad \text{o, també} \quad \{f_n(x)\} \overset{\text{unif}(D)}{\longrightarrow} f(x) \tag{7.4}$$

Per tant, $\{f_n(x)\}$ convergeix uniformement a $f(x)$ si:

$$\forall \varepsilon > 0 \text{ i } \forall x \in D, \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \text{ tal que } |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \forall n > n_0 \tag{7.5}$$

De la definició és desprèn que:

$$\{f_n(x)\} \overset{\text{unif}(D)}{\longrightarrow} f(x) \Rightarrow \{f_n(x)\} \overset{\text{punt}(D)}{\longrightarrow} f(x) \tag{7.6}$$

El recíproc no és cert, com comprovarem amb els exemples anteriors:

i) La successió de funcions $f_n(x) = x/n$ no convergeix uniformement cap a la funció $f(x) = 0$, a $\mathbb{R}$. Sí que ho fa, en canvi, a qualsevol interval finit de $\mathbb{R}$.

ii) La successió $f_n(x) = x^n$ no convergeix uniformement, a l'interval $(-1, 1]$, cap a la funció $f(x)$. Sí que ho fa, en canvi, en qualsevol subinterval tancat de $(-1, 1)$.

iii) La successió de funcions $f_n(x) = \sin(n^2 x)/n$ convergeix uniformement, a tot $\mathbb{R}$, a la funció $f(x) = 0$.

Teoremes sobre la convergència uniforme de successions

Els teoremes següents estableixen que la continuïtat i la integrabilitat es transmeten de les funcions cap a la funció límit quan la convergència és uniforme. La derivabilitat és més complicada; no es transmet necessàriament a la funció límit. Cal que la successió de les derivades sigui també uniformement convergent.

- Teorema de la continuïtat:

  Si f_n són contínues a D, i $\{f_n(x)\} \overset{\text{unif}(D)}{\longrightarrow} f(x)$

  $$\Rightarrow f(x) \text{ és contínua a } D \tag{7.7}$$

- Teorema de la integrabilitat terme a terme:

  Si f_n són integrables a $[a, b] \subseteq D$, i $\{f_n(x)\} \overset{\text{unif}(D)}{\longrightarrow} f(x)$

  $$\Rightarrow f(x) \text{ és integrable a } [a, b] \subseteq D \tag{7.8}$$

  i es compleix

  $$\left\{ \int_a^b f_n(x)\, \mathrm{d}x \right\} \to \int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x \tag{7.9}$$

- Teorema de la derivabilitat terme a terme:

  Si f_n són derivables a D, $\{f_n'(x)\} \overset{\text{unif}(D)}{\longrightarrow} g(x)$, i $\{f_n(x)\}$ convergeix en algun punt de D

  $$\Rightarrow \{f_n(x)\} \overset{\text{unif}(D)}{\longrightarrow} f(x) \text{ (derivable)} \quad \text{i} \quad f'(x) = g(x) \tag{7.10}$$

7.2 Sèries de funcions

Com en el cas de les sèries numèriques, definirem la suma d'una sèrie de funcions definides en un domini D com el límit, si existeix, de la successió de sumes parcials:

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \equiv \lim\{F_n(k)\} \quad \text{on} \quad F_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x) \tag{7.11}$$

Si $\{F_n(x)\} \stackrel{\text{unif}(D)}{\longrightarrow} F(x)$ direm que la sèrie $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ convergeix uniformement en el domini D, i que $F(x)$ és la seva suma en el sentit uniforme. Ho escriurem:

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \stackrel{\text{unif}(D)}{=} F(x) \tag{7.12}$$

Per tant, $\{F_n(x)\}$ convergeix uniformement a $F(x)$ si:

$$\begin{gathered} \forall \varepsilon > 0 \text{ i } \forall x \in D, \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \\ \text{tal que } |\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) - F(x)| < \varepsilon, \forall n > n_0 \end{gathered} \tag{7.13}$$

Criteri de Weierstrass

Si $|f_n(x)| \leq C_n \forall x \in D$, i $\sum_{n\geq 1} f_n C_n$ convergeix, llavors:

$$\sum_{n\geq 1} f_n(x) \text{ convergeix uniformement en } D \tag{7.14}$$

Teoremes sobre la convergència uniforme de sèries

- Teorema de la continuitat:

  Si f_n són contínues a D, i $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \stackrel{\text{unif}(D)}{=} F(x)$

  $$\Rightarrow F(x) \text{ és contínua a } D \tag{7.15}$$

- Teorema de la integrabilitat terme a terme:

  Si f_n són integrables a $[a,b] \subseteq D$, i $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \stackrel{\text{unif}(D)}{=} F(x)$

  $$\Rightarrow F(x) \text{ és integrable a } [a,b] \subseteq D \tag{7.16}$$

  i es compleix

  $$\sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x \tag{7.17}$$

- Teorema de la derivabilitat terme a terme:

  Si f_n són derivables a D, $\sum_{k=1}^{\infty} f'_k(x) \stackrel{\text{unif}(D)}{=} G(x)$, i $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ és sumable en algun punt de D

  $$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \stackrel{\text{unif}(D)}{=} F(x) \text{ (derivable)} \quad \text{i} \quad F'(x) = G(x) \tag{7.18}$$

7.3 Sèries de potències

Es tracta de sèries del tipus $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$, que anomenarem sèrie de potències al voltant del punt c.

Cal notar que qualsevol sèrie de potències al voltant d'un punt c, amb el canvi de variable $x' = x - c$ es pot convertir en una sèrie de potències al volant del punt 0:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x'^n \tag{7.19}$$

Teorema de la convergència absoluta de les sèries de potències

Si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ és convergent en el punt $x = x_0$,

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{és absolutament convergent } \forall x \text{ tal que } |x| < |x_0| \tag{7.20}$$

Radi de convergència d'una sèrie de potències

En una serie de potències $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$, pot passar el següent:

i) Convergeix a tot $x \in \mathbb{R}$.

ii) Només convergeix al punt $x = c$.

iii) $\exists R \geq 0$, anomenat radi de convergència, tal que la sèrie convergeix $\forall x \in (c-R, c+R)$.

En realitat, tots casos es poden resumir en el tercer: al primer $R = \infty$, al segon $R = 0$, i al tercer R és un escalar finit no nul.

Càlcul del radi de convergència

Sigui $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ una sèrie de potències. Llavors, podem calcular el radi de convergència a partir del criteri de l'arrel i del criteri del quocient:

$$|x| < R = \left[\lim\left\{\sqrt[n]{|a_n|}\right\}\right]^{-1} = \left[\lim\left\{\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}\right\}\right]^{-1} \tag{7.21}$$

Ara bé, si tenim una sèrie que no depèn exactament de x^n, el radi serà lleugerament diferent (ja que la definció rigurosa de R és sobre elements consecutius de la suma, no únicament dels índexs a_n).

Exemple 7.1. Sigui $\sum_n^{\infty} a_n x^{2n+1} = \sum_n^{\infty} a_n (x^2)^n x$. Llavors, en fer $R = \lim\left\{\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}\right\}$, estem calculant el radi de convergència per a $|x^2| < R$. Així doncs, el domini de convergència no serà $(-R, R)$ sinó $(-\sqrt{R}, \sqrt{R})$. ▲

Cal notar que el càlcul del radi de convergència no ens assegura quin comportament té la funció als extrems de l'interval $[-R, R]$, de manera que a priori només podem assegurar que la sèrie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ convergeix $\forall x \in (-R, R)$.

Radi de convergència de la sèrie de derivades

La sèrie de potències $\sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1}$ té el mateix radi de convergència que la sèrie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

Radi de convergència de la sèrie de primitives

La sèrie de potències $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ té el mateix radi de convergència que la sèrie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

Teorema de la convergència uniforme de les sèries de potències

Si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ té radi de convergència R i $[-A, A] \subseteq (-R, R)$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ convergeix uniformement a } [-A, A] \tag{7.22}$$

Teorema d'Abel

Si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ convergeix en $l > 0$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ convergeix uniformement en } [0, l] \tag{7.23}$$

El mateix teorema és aplicable si $l' < 0$, amb un interval de convergència $[l', 0]$.

Teorema de la integrabilitat terme a terme de les sèries de potències

Si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = f(t), \quad \forall t \in (-R, R)$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t, \quad \forall x \in (-R, R) \tag{7.24}$$

Teorema de la derivabilitat terme a terme de les sèries de potències

Si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = f(x), \quad \forall x \in (-R, R)$

$$\Rightarrow f(x) \text{ és derivable} \quad \text{i} \ \sum_{n=0}^{\infty} na_n x^{n-1} = f'(x), \quad \forall x \in (-R, R) \tag{7.25}$$

Unicitat de les sèries de potències

Si $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ a l'interval $(-R, R)$, derivant-la reiteradament obtenim

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \\
f(x)' &= \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1} \\
f(x)'' &= \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} \\
f(x)''' &= \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)(n-2) a_n x^{n-3} \\
&\vdots \\
f(x)^{(k)} &= \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)\dots(n-k+1) a_n x^{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!} a_n x^{n-k}
\end{aligned} \tag{7.26}$$

Substituint $x = 0$ a les igualtats anteriors obtenim

$$\begin{aligned}
f(0) &= a_0 \\
f'(0) &= a_1 \\
f''(0) &= 2a_2 \\
f'''(0) &= 3 \cdot 2a_3 \\
&\vdots \\
f^{(n)}(0) &= n! a_n
\end{aligned} \tag{7.27}$$

Tenim, doncs, la següent relació entre els coeficients d'una sèrie de potències i les derivades de la funció cap a la qual convergeix (dins l'interval de convergència).

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ a l'interval } (-R, R) \Rightarrow a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \tag{7.28}$$

D'aquí podem concloure la unicitat de les sèries de potències:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \Rightarrow a_n = b_n \tag{7.29}$$

Sèrie de Taylor

Donada una funció $f(x)$ ∞-derivable en el punt c, anomenem sèrie de Taylor de $f(x)$ al voltant del punt c a la sèrie de potències

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n \quad \text{si } |x-c| < R \tag{7.30}$$

No obstant això, hi ha funcions ∞-derivables que no són la suma de la seva sèrie de Talyor, com ara $f(x) = \exp(-1/x^2)$, que és és ∞-derivable $\forall x \in \mathbb{R}$, però totes les seves derivades a l'origen són 0 i, per tant, la sèrie de Taylor al voltant de l'origen és 0.

7.4 Funcions analítiques

Quan serà una funció ∞-derivable expressable com la suma d'una sèrie de Taylor? Per obtenir la resposta escrivim la Fórmula de Taylor de $f(x)$ al voltant del punt c:

$$f(x)\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k + R_n(x,c) \tag{7.31}$$

Observem que els polinomis de Taylor (i.e., $\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k$, de grau n) són les sumes parcials de la sèrie de Taylor. Per tant, la sèrie de Taylor serà convergent $n \to \infty \Rightarrow R_n(x,c) \to 0$.

Així doncs, les funcions analítiques són aquelles funcions $f(x)$ tals que

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n = f(x) \tag{7.32}$$

Exemples

- $e^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$
- $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$
- $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$

De l'expressió d'aquestes funcions com a sèries de potències podem deduir moltes de les seves propietats, com ara $\sin' x = \cos x$, l'expressió de $\sin(x+y)$, etc.

Tanmateix, podem definir noves funcions a partir de les seva expressió com a sèrie de potències, i partir de l'expressió d'altres funcions com a sèries trobar una expressió general de les noves funcions:

- $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \equiv \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$
- $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!} \equiv \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

Exemple 7.2. Sigui $f(x) = \frac{1}{1+x^2} = \sum_n^{\infty} a_n x^n$. Intentar trobar la sèrie de Taylor derivant indefinidament pot ser molt complicat, però tenim altres mètodes per fer-ho. Sabem que $\frac{1}{1-y} = \sum_n^{\infty} y^n, \quad |y| < 1$, llavors fem $y = -x^2, \quad |x| < 1 \Rightarrow \frac{1}{1+x^2} = \sum_n^{\infty}(-x^2)^n = \sum_n^{\infty}(-1)^n x^{2n}$.

A partir d'aquesta nova expressió podem definir una nova funció. Sabem que $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\arctan x) = \frac{1}{1+x^2}$, llavors

$$\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t \equiv \arctan x = \sum_0^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \tag{7.33}$$

▲

Com hem vist, l'expressió de funcions analítiques com a sèries de potències són de gran utilitat per estudiar les seves propietats i ens poden ajudar a definir noves funcions a partir de funcions de les quals sabem la seva expressió com a sèrie de potències.

7.5 Sèries de Fourier

Les sèries de Fourier són molt importants a la Física. Les escriurem de la següent forma:

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \cos\frac{k\pi x}{L} + b_k \sin\frac{k\pi x}{L}\right) \tag{7.34}$$

Aquesta sèrie funcional pot ser o no convergent, i en cas de convergir, pot fer-ho puntualment o uniforme. Com que les funcions $\cos(k\pi x/L)$ i $\sin(k\pi x/L)$ són periòdiques amb període $2L$, si la sèrie convergeix cap a la funció $S(x)$, aquesta també serà periòdica, és a dir,

$$S(x) = S(x+2L) \tag{7.35}$$

Càlcul dels coeficients

A partir de la funció $f(x)$ donada, calculem les integrals següents:

$$a_k = \frac{1}{L}\int_c^{c+2L} f(x)\cos\frac{k\pi x}{L}\mathrm{d}x, \quad (k = 0, 1, 2\dots) \tag{7.36}$$

$$b_k = \frac{1}{L}\int_c^{c+2L} f(x)\sin\frac{k\pi x}{L}\mathrm{d}x, \quad (k = 1, 2, 3\dots) \tag{7.37}$$

on c és un punt qualsevol. De fet, podem integrar sobre qualsevol interval de longitud $2L$. Pel que fa a l'existència de les integrals, n'hi ha prou amb que f sigui integrable al llarg d'un període.

En particular,

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_c^{c+2L} f(x)\mathrm{d}x \tag{7.38}$$

Teorema de convergència

Si $f(x)$ i $f'(x)$ són contínues a l'interval $[-L, L]$ (és a dir, només tenen un nombre finit de discontinuïtats de salt o evitables), llavors:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \cos\frac{k\pi x}{L} + b_k \sin\frac{k\pi x}{L}\right) \xrightarrow{\text{punt}} \frac{1}{2}\left[f(x^+) + f(x^-)\right] \tag{7.39}$$

on $f(x^{\pm})$ són respectivament els límits per la dreta i per l'esquerra de la funció f en el punt x. Per tant, els punts on f sigui contínua, la sèrie convergirà cap a $f(x)$.

Una condició suficient per a la convergència uniforme és que $f(x)$ sigui contínua i que les sèries numèriques $\sum a_k$ i $\sum b_k$ siguin absolutament sumables.

Funcions parelles i senars

En el cas que ens trobem amb funcions parelles o senars, l'expressió de les sèries de Fourier se simplifica força.

- Funcions parelles: $f(-x) = f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum a_k \ldots$

  $b_k = 0$

  $a_k = \dfrac{1}{L}\displaystyle\int_c^{c+2L} f(x)\cos\frac{k\pi x}{L}\mathrm{d}x$
- Funcions senars: $f(-x) = -f(x) \sim \sum b_k \ldots$

  $a_k = 0$

  $b_k = \dfrac{1}{L}\displaystyle\int_c^{c+2L} f(x)\sin\frac{k\pi x}{L}\mathrm{d}x$