

■ Superposición de ondas de igual frecuencia

$$\left. \begin{aligned} P_1 &= a_1 \cos(\omega t + kz_1) \\ P_2 &= a_2 \cos(\omega t + kz_2) \end{aligned} \right\} \begin{aligned} P_1 &= a_1 e^{i(\omega t + \varphi_1)} \\ P_2 &= a_2 e^{i(\omega t + \varphi_2)} \end{aligned}$$

$$P = P_1 + P_2 = (a_1 e^{i\varphi_1} + a_2 e^{i\varphi_2}) e^{i\omega t} = \underbrace{a e^{i\varphi}}_{\text{amplitud compleja}} e^{i\omega t} = a e^{i(\omega t + \varphi)}$$

$$a^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)$$

$$\text{tg } \varphi = \frac{a_1 \sin \varphi_1 + a_2 \sin \varphi_2}{a_1 \cos \varphi_1 + a_2 \cos \varphi_2}$$

■ Superposición de onda de diferente frecuencia

- Caso sencillo: 2 ondas de amplitud A propagándose según el eje x con frecuencias parecidas

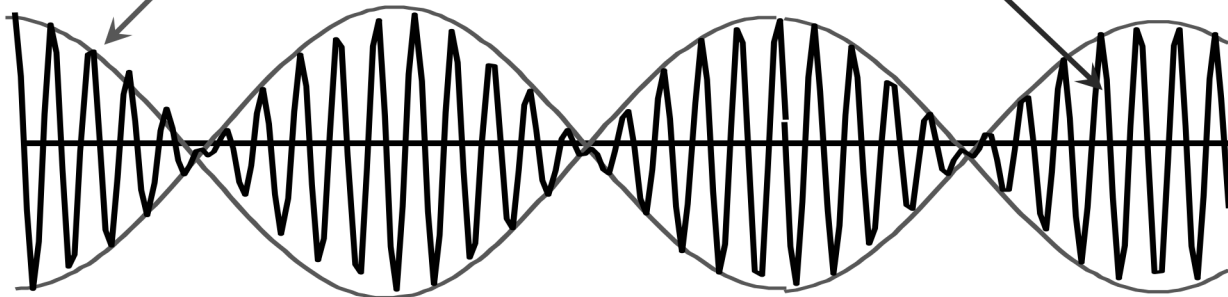
$$E_1 = A \cos(\omega t - kx)$$

$$E_2 = A \cos((\omega + \Delta\omega)t - (k + \Delta k)x)$$

$$E(x, t) = 2A \cos\left[\frac{1}{2}(t \Delta\omega - x \Delta k)\right] \cos(\bar{\omega} t - \bar{k} x)$$

$$\bar{\omega} = \omega + \frac{\Delta\omega}{2} ;$$

$$\bar{k} = k + \frac{\Delta k}{2}$$



- **Velocidad de fase**

La fase de la onda resultante es: $\bar{\omega}t - \bar{k}x$

Para calcular la velocidad de la fase, calculamos la velocidad a la que se tiene que mover M para que la fase sea constante.

$$\left. \begin{aligned} \bar{\omega}t - \bar{k}x &= \text{cte} \\ \bar{\omega}(t + dt) - \bar{k}(x + dx) &= \text{cte} \end{aligned} \right\} \Rightarrow v = \frac{dx}{dt} = \frac{\bar{\omega}}{\bar{k}}$$

- **Velocidad de grupo**

Para conservar la misma amplitud $\Rightarrow (t \Delta\omega - x \Delta k) = \text{cte}$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dt} = v_g = \frac{\Delta\omega}{\Delta k} \quad \text{si } \Delta\omega, \Delta k \rightarrow d\omega, dk \Rightarrow \boxed{v_g = \frac{d\omega}{dk}} \quad \boxed{v_f = \frac{\omega}{k}}$$

$$v_g = v_f - \lambda \frac{dv_f}{d\lambda} \quad v_g = \frac{c}{n} \left(1 + \frac{\lambda}{n} \frac{dn}{d\lambda} \right) \quad n = \frac{c}{v}$$

- Si el medio es no dispersivo $\Rightarrow v_g = v_f$

- Si $\frac{dv}{d\lambda} > 0 \Rightarrow v_g < v_f$ dispersión normal $\left(\frac{dn}{d\lambda} < 0 \right)$

- Si $\frac{dv}{d\lambda} < 0 \Rightarrow v_g > v_f$ dispersión anómala $\left(\frac{dn}{d\lambda} > 0 \right)$

