Universitat Autònoma de Barcelona, Departament de Física

Càlcul en vàries variables

Alfredo Hernández Cavieres

2013-2014

Índex

1 L'espai $\mathbb{R}^n$

1.1 El cos dels números reals

$\mathbb{R}$ és un cos ordenat arquimedià complet.

- Cos ordenat: cos $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ amb ordenació total $(\leq)$ que compleix:

  $x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z.$

  $x, y \geq 0 \Rightarrow xy \geq 0.$
- Arquimedià: no és fitat superiorment: $\forall b > 0, \quad \exists a \in \mathbb{R} \mid na > b, \quad n \in \mathbb{N}.$
- Complet: tota successió de Cauchy és convergent en aquest cos. Això és equivalent a dir que $\mathbb{R}$ té la propietat de l'extrem.

1.2 Espai $\mathbb{R}^n$

Definició 1.1 (Producte escalar)**.** És una operació $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = (x_1 y_1, x_2 y_2, \ldots, x_n y_n) \tag{1.1}$$

■

El producte escalar compleix les següents propietats:

i) És bilineal:

$\vec{x} \cdot (\vec{y} + \vec{z}) = \vec{x} \cdot \vec{y} + \vec{x} \cdot \vec{z}.$

$(\vec{x} + \vec{y}) \cdot \vec{z} = \vec{x} \cdot \vec{z} + \vec{y} \cdot \vec{z}.$

$\vec{x} \cdot (\lambda \vec{y}) = \lambda(\vec{x} \cdot \vec{y}).$

$(\lambda \vec{x}) \cdot \vec{y} = \lambda(\vec{x} \cdot \vec{y}).$

ii) És simètric: $\vec{x} \cdot \vec{y} = -\vec{y} \cdot \vec{x}.$

iii) $\vec{x} \cdot \vec{x} > 0, \quad \forall \vec{x} \neq 0.$

Definició 1.2 (Mòdul d'un vector)**.**

$$\|\vec{x}\| \equiv \sqrt{\vec{x} \cdot \vec{x}} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2} \tag{1.2}$$

A més es compleix que $\vec{x} \cdot \vec{y} = \|\vec{x}\| \|\vec{y}\| \cos \alpha$. ■

Propietats del mòdul:

i) $\|\vec{x}\| > 0, \quad \forall \vec{x} \neq \vec{0}.$

ii) $\|\vec{0}\| = 0.$

iii) $\|\lambda \vec{x}\| = \lambda \|\vec{x}\|.$

iv) $\|\vec{x} + \vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$ (desigualtat triangular).

Definició 1.3 (Desigualtat de Schwarz).

$$|\vec{x} \cdot \vec{y}| \leq \|\vec{x}\|\|\vec{y}\| \tag{1.3}$$

■

Definició 1.4 (Distància entre dos vectors).

$$d(\vec{x}, \vec{y})\|\vec{x} - \vec{y}\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2} \tag{1.4}$$

■

Propietats de la distància:

i) $d(\vec{x}, \vec{y}) > 0, \quad \forall \vec{x} \neq \vec{y}$.

ii) $d(\vec{x}, \vec{x}) = 0$.

iii) $d(\vec{x}, \vec{y}) = d(\vec{y}, \vec{x})$.

iv) $d(\vec{x}, \vec{z}) \leq d(\vec{x}, \vec{y}) + d(\vec{y}, \vec{z})$ (desigualtat triangular).

1.3 Successions a $\mathbb{R}^n$

Una successió de $\mathbb{R}^n$ és una aplicació de $\mathbb{N}$ sobre $\mathbb{R}^n$: $m \mapsto \vec{x}^{(m)}$, que denotem $\{\vec{x}^{(m)}\} = \{\vec{x}^{(1)}, \vec{x}^{(2)}, \vec{x}^{(3)}, \dots\}$.

Definició 1.5 (Successió convergent). $\lim\{\vec{x}^{(m)}\} = \vec{l}$ si $\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_o \mid d\left(\vec{x}^{(m)}, \vec{l}\right) < \varepsilon, \quad \forall m > n_0$. ■

Definició 1.6 (Successió de Cauchy). $\{\vec{x}^{(m)}\}$ és de Cauchy si $\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_o \mid d(\vec{x}^{(l)}, \vec{x}^{(m)}) < \varepsilon, \quad \forall l, m > n_0$.
Com que totes les successions de Cauchy a $\mathbb{R}^n$ són convergents, $\mathbb{R}^n$ és complet. ■

1.4 Topologia de $\mathbb{R}^n$

Entorns

- Entorn de centre $\vec{a}$ i radi r: $\varepsilon(\vec{a}, r) \equiv \{\vec{x} \mid d(\vec{x}, \vec{a} < r\}$.
- Entorn perforat: $\varepsilon^*(\vec{a}, r) = \varepsilon(\vec{a}, r) \backslash \{\vec{a}\}$.

Tipus de punts

- Punt $\vec{a}$ interior a A: si $\exists r \mid \varepsilon(\vec{a}, r) \subset A$.
- Punt $\vec{a}$ exterior a A: si $\vec{a}$ és interior a $\bar{A}$.
- Punt $\vec{a}$ frontera de A: si no és interior ni exterior ($\Leftrightarrow$ tot entorn de $\vec{a}$ conté algun element de A i de $\bar{A}$.
- Punt $\vec{a}$ d'acumulació de A: si tot entorn de $\vec{a}$ conté algun punt de A diferent de $\vec{a}$.

Tipus de conjunts

- Conjunt obert: si tots els seus punts són interiors.
- Conjunt tancat: si conté tots els seus punts d'acumulació ($\Leftrightarrow$ el complementari és obert).
- Conjunt fitat: si està contingut en algun entorn de $\vec{0}$.
- Conjunt compacte: si tota successió té alguna successió parcial convergent ($\Leftrightarrow$ tancat i fitat).

1.5 Producte vectorial (a $\mathbb{R}^3$)

Definició 1.7. És una operació $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. Siguin $\vec{x}$, $\vec{y} \in \mathbb{R}^3$, llavors

$$\vec{x} \times \vec{y} = \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} \tag{1.5}$$

■

Propietats del producte vectorial:

i) És bilineal:

$$\vec{x} \times (\vec{y} + \vec{z}) = \vec{x} \times \vec{y} + \vec{x} \times \vec{z}.$$
$$(\vec{x} + \vec{y}) \times \vec{z} = \vec{x} \times \vec{z} + \vec{y} \times \vec{z}.$$
$$\vec{x} \times (\lambda \vec{y}) = \lambda(\vec{x} \times \vec{y}).$$
$$(\lambda \vec{x}) \times \vec{y} = \lambda(\vec{x} \times \vec{y}).$$

ii) És antisimètric: $\vec{x} \times \vec{y} = -\vec{y} \times \vec{x}$.

iii) $\|\vec{x} \times \vec{y}\| = \|\vec{x}\| \|\vec{y}\| \sin \alpha$, on α és l'angle que formen.

Producte mixt

$$\vec{x}(\vec{y} \times \vec{z}) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} \tag{1.6}$$

2 Funcions a $\mathbb{R}^n$, límits i continuïtat

2.1 Funcions a $\mathbb{R}^n$

Sigui $D \subseteq \mathbb{R}^n$. Una funció és una aplicació de D sobre $\mathbb{R}^n$: $\vec{x} \mapsto \vec{f}(\vec{x})$.

Definició 2.1. Són funcions amb valors a $\mathbb{R}$.

- $n = m = 1$: funcions escalars d'una variable real, $y = f(x)$.
- $n > 1, m = 1$: camps escalars, $y = f(\vec{x})$.

■

Definició 2.2. Són funcions amb valors a $\mathbb{R}^m$.

- $n = 1, m > 1$: funcions vectorials d'una variable real, $\vec{y} = \vec{f}(x)$.
- $n > 1, m > 1$: camps vectorials, $\vec{y} = \vec{f}(\vec{x})$.

■

2.2 Límit d'una funció

Sigui $\vec{f}(\vec{x})$ una funció definida a $D \subseteq \mathbb{R}^n$, amb valors a $\mathbb{R}^m$ i sigui $\vec{a}$ un punt d'acumulació de D. Llavors, direm que

$$\lim_{\vec{x}\to\vec{a}} \vec{f}(\vec{x}) = \vec{l} \text{ si } \forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0 \mid \text{si } d(\vec{x},\vec{a}) < \delta \Rightarrow d(\vec{f}(\vec{x}),\vec{l}) < \varepsilon \tag{2.1}$$

Propietats dels límits de funcions: si $\lim_{\vec{x}\to\vec{a}} \vec{f}(\vec{x}) = \vec{A}$ i $\lim_{\vec{x}\to\vec{a}} \vec{g}(\vec{x}) = \vec{B}$

i) $\lim_{\vec{x}\to\vec{a}} (\vec{f}(\vec{x}) + \vec{g}(\vec{x})) = \vec{A} + \vec{B}$.

ii) $\lim_{\vec{x}\to\vec{a}} (\lambda\vec{f}(\vec{x})) = \lambda\vec{A}$.

iii) $\lim_{\vec{x}\to\vec{a}} (\vec{f}(\vec{x}) \cdot \vec{g}(\vec{x})) = \vec{A} \cdot \vec{B}$.

iv) $\lim_{\vec{x}\to\vec{a}} \|\vec{f}(\vec{x})\| = \|\vec{A}\|$.

2.3 Límits direccionals

Definició 2.3. Els límits d'una funció de n variables en un punt $\vec{a}$ són els límits d'aquesta funció quan $\vec{x} \to \vec{a}$ seguint una trajectòria rectilínia. ■

Límits direccionals de camps escalars

Si $f(\vec{x})$ és un camp escalar i $\vec{u}$ és un vector de $\mathbb{R}^n$, definim el límit de $f(\vec{x})$ quan $\vec{x} \to \vec{a}$ en la direcció $\vec{u}$ com

$$\lim_{\vec{x}\to\vec{a}} f(\vec{x}) \equiv \lim_{\lambda\to 0^+} f(\vec{a} + \lambda\vec{u}) \tag{2.2}$$

Si $\exists \lim_{\vec{x}\to\vec{a}} f(\vec{x}) \Rightarrow \exists$ els límits direccionals de $f(\vec{x})$ i coincideixen en el punt $\vec{a}$. El recíproc no és cert.

Límits direccionals de camps vectorials

Tal com passa als camps escalars, si $\exists \lim_{\vec{x}\to\vec{a}} \vec{f}(\vec{x}) \Rightarrow \exists$ els límits direccionals de $\vec{f}(\vec{x})$ i coincideixen en el punt $\vec{a}$. El recíproc no és cert.

2.4 Continuïtat

L'existència o no del $\lim_{\vec{x}\to\vec{a}}(\vec{f}(\vec{x})$, així com el seu propi valor, depèn dels valors de $\vec{f}(\vec{x})$ al voltant del punt $\vec{a}$ i no del seu valor en el propi punt. De la comparació del límit amb el valor de la funció en surt el concepte de continuïtat:

$$\vec{f}(\vec{x}) \text{ és contínua en el punt } \vec{a} \text{ si } \lim_{\vec{x}\to\vec{a}} \vec{f}(\vec{x}) = \vec{f}(\vec{a}) \tag{2.3}$$

Propietats de les funcions contínues:

i) Si $\vec{f}(\vec{x})$ i $\vec{g}(\vec{x})$ són contínues $\Rightarrow \vec{f}(\vec{x}) + \vec{g}(\vec{x})$, $\vec{f}(\vec{x}) \cdot \vec{g}(\vec{x})$ i $\vec{f}(\vec{x})/\vec{g}(\vec{x})$ (si $\vec{g}(\vec{x}) \neq 0$) són contínues.

ii) Si $\vec{f}(\vec{x})$ és contínua en $\vec{x} = \vec{a}$ i $\vec{g}(\vec{y})$ és contínua en $\vec{y} = \vec{f}(\vec{x}) \Rightarrow \vec{g}(\vec{f}(\vec{x}))$ és contínua en el punt $\vec{a}$.

iii) Una funció pot ser no contínua en el punt $\vec{a}$ i, en canvi, ser-ho a cadascuna de les variables separadament.

Continuïtat uniforme en un domini

Definició 2.4. $\vec{f}(\vec{x})$ és uniformement contínua a D si

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0 \mid \text{si } \vec{x}, \vec{x}' \in D \text{ i } d(\vec{x}, \vec{x}') < \delta \Rightarrow d(\vec{f}(\vec{x}), \vec{f}(\vec{x})') < \varepsilon \tag{2.4}$$

■

Teorema 2.1. *Si $\vec{f}(\vec{x})$ és contínua en un compacte $D \Rightarrow \vec{f}(\vec{x})$ és uniformement contínua en D.* □

3 Funcions vectorials d'una variable

3.1 Funcions $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$

Sigui $\vec{f}(u)$ una funció definida a $D \subseteq \mathbb{R}$, amb valors a $\mathbb{R}^m$: $\vec{f}(u) \equiv (f_1(u), f_2(u), \ldots, f_m(u))$.

Definició 3.1 (Continuïtat)**.** $\vec{f}(u)$ és contínua en el punt $u = a$ si $\lim_{u\to a} \vec{f}(u) = \vec{f}(a)$. ■

Definició 3.2 (Derivada de $\vec{f}(u)$ en el punt a)**.**

$$f'(a) \equiv \lim_{h\to 0} \frac{\vec{f}(a+h) - \vec{f}(a)}{h} = (f'(a)_1, f'(a)_2 \ldots, f'(a)_m)$$

■

Definició 3.3 (Integral de $\vec{f}(u)$ en el punt a)**.**

$$\int_a^b \vec{f}(u)\,\mathrm{d}u \equiv \left(\int_a^b f_1(u)\,\mathrm{d}u, \int_a^b f_2(u)\,\mathrm{d}u, \ldots, \int_a^b f_m(u)\,\mathrm{d}u \right)$$

■

Teorema 3.1 (Teorema fonamental del càlcul)**.** *Si $\vec{f}(u)$ és integrable en $[a, b]$ i $\vec{F}(u)$ és primitiva de $\vec{f}(u) \Rightarrow \int_a^b \vec{f}(u)\,\mathrm{d}u = \vec{F}(b) - \vec{F}(a)$.* □

Definició 3.4 (Funció mòdul)**.**

$$\|\vec{f}\|(u) \equiv \|\vec{f}(u)\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} f_i(u)^2}$$

■

Teorema 3.2. *Si $\vec{f}(u)$ és integrable a $[a, b] \Rightarrow$*

$$\left\| \int_a^b \vec{f}(u)\,\mathrm{d}u \right\| \leq \int_a^b \|\vec{f}(u)\|\,\mathrm{d}u$$

□

3.2 Corbes

Si $\vec{f}(u)$ és contínua en $[a, b]$, defineix un arc de corba a $\mathbb{R}^m$.

Definició 3.5 (Classe d'una corba)**.** Una corba $\vec{f}(u)$ és de classe $C^n_{[a,b]}$ sí la seva n-èsima derivada és contínua a $[a, b]$. ■

Definició 3.6 (Corba rectificable)**.** Sigui $\Pi = \{u_0, u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ una partició de $[a, b]$, construïm la quantitat $l(\vec{f}, \Pi) = \sum_{i=1}^{n} \|\vec{f}(u_i), \vec{f}(u_{i-1})\|$. Òbviament $l(\vec{f}, \Pi') \geq l(\vec{f}, \Pi)$ si Π' és és fina que Π.
Si $\left\{l(\vec{f}, \Pi); \forall \Pi\right\}$ és fitat superiorment direm que la corba $\vec{f}(u)$ és rectificable i al suprem $l(\vec{f}) = \sup \left\{l(\vec{f}, \Pi); \forall \Pi\right\}$ l'anomenarem longitud de la corba. ■

Teorema 3.3. *Si $\vec{f}(u)$ és de classe $C^1_{[a,b]} \Rightarrow \vec{f}$ és rectificable i*

$$l(\vec{f}) = \int_a^b \sqrt{\sum_{i=1}^{m} f_i'(u)^2}\, \mathrm{d}u = \int_a^b \|\vec{f}(u)\|\, \mathrm{d}u \tag{3.1}$$

□

Definició 3.7 (Paràmetre arc)**.** Si $\vec{f}(u)$ és de classe $C^1_{[a,b]}$, definim el paràmetre arc com la funció

$$s(u) \equiv \int_a^u \|\vec{f}'(u')\|\, \mathrm{d}u' \tag{3.2}$$

que mesura la longitud de la corba en funció del paràmetre u. Notem que $\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}u} = \|\vec{f}'(u)\| \geq 0, \quad \forall u \in [a, b]$. ■

Definició 3.8. Una corba $\vec{f}(u)$ és no singular si és de $C^1_{[a,b]}$ i $\vec{f}'(u) \neq 0, \quad \forall u \in [a, b]$.

Si $\vec{f}(u)$ és no singular, llavors $s(u)$ és estrictament creixent, ja que $s'(u) = \|\vec{f}'(u)\| > 0$; també ho és la seva inversa $u(s)$, ja que $u'(s) = 1/s'(u) > 0$. ■

3.3 Geometria d'una corba de $\mathbb{R}^2$ i $\mathbb{R}^3$

Sigui $\vec{f}(u)$ una corba de classe $C^2_{[a,b]}$. Si entenem u com a un temps, geomètricament entenem $\vec{f}(u)$ com a «posició», $\vec{f}'(u)$ com a «velocitat» i $\vec{f}''(u)$: «acceleració».

Definició 3.9 (Vector tangent unitari)**.** És un vector tangent a la corba $\vec{f}(u)$.

$$\hat{T} = \frac{\vec{f}'(u)}{\|\vec{f}'(u)\|} \tag{3.3}$$

■

Definició 3.10 (Curvatura)**.** κ és la curvatura de la corba, que és ≥ 0, per definició.

$$\frac{\mathrm{d}\hat{T}}{\mathrm{d}s} = \kappa \hat{N} \quad \text{i} \quad \kappa = \frac{\|\vec{f}'(u) \times \vec{f}''(u)\|^3}{\|\vec{f}'(u)\|} \tag{3.4}$$

On $\hat{N}$ és el vector normal unitari, perpendicular a $\hat{T}$. ■

Definició 3.11 (Radi de curvatura)**.** L'invers de la curvatura és el radi de curvatura.

$$\rho \equiv \frac{1}{\kappa} \tag{3.5}$$

■

Definició 3.12 (Vector binormal unitari)**.** És un vector perpendicular a $\hat{T}$ i $\hat{N}$ alhora, que defineix el pla a on es mou la corba (pla osculador).

$$\frac{\mathrm{d}\hat{N}}{\mathrm{d}s} = -\kappa\hat{T} + \tau\hat{B} \tag{3.6}$$

$$\hat{T} \times \hat{N} = \hat{B} \quad \text{i} \quad \hat{B} = \frac{\vec{f}'(u) \times \vec{f}''(u)}{\|\vec{f}'(u) \times \vec{f}''(u)\|} \tag{3.7}$$

■

Definició 3.13 (Torsió)**.** τ indica la variació de $\hat{B}$, és a dir, indica la variació d'orientació del pla osculador. La torsió pot ser positiva, negativa o zero.

$$\frac{\mathrm{d}\hat{B}}{\mathrm{d}s} = -\tau\hat{N} \tag{3.8}$$

■

Utilitzant aquests vectors unitaris, podem parametritzar la «velocitat» i l'«acceleració»:

$$\vec{f}'(u) = \|\vec{f}'(u)\|\hat{T}$$

$$\vec{f}''(u) = \|\vec{f}'(u)\|'\hat{T} + \kappa\|\vec{f}'(u)\|^2\hat{N}$$

Geometria 2D

Com que el pla osculador no canvia en funció del temps u, $\hat{B}$ és constant i, en particular $\tau \equiv 0$.

En una corba a $\mathbb{R}^2$, el radi de curvatura ρ coincideix amb el radi del cercle osculador; el cercle que millor s'ajusta a la corba en el punt considerat.

Fórmules de Frénet

Definició 3.14 (Tríedre de Frénet)**.** Geomètricament es compleix que $\hat{T} \times \hat{N} = \hat{B}$, $\hat{N} \times \hat{B} = \hat{T}$ i $\hat{B} \times \hat{T} = \hat{N}$. Aquestes relacions són el que anomenem tríedre de Frénet. ■

Les derivades respecte el paràmetre arc de $\hat{T}$, $\hat{N}$ i $\hat{B}$ es poden reescriure de forma matricial:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\begin{pmatrix}\hat{T}\\ \hat{N}\\ \hat{B}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & \kappa & 0\\ -\kappa & 0 & \tau\\ 0 & -\tau & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\hat{T}\\ \hat{N}\\ \hat{B}\end{pmatrix} \tag{3.9}$$

Exemple 3.1. Considerem la corba $\vec{f}(t) = (\cos t, \sin t, 1)$.
$\Rightarrow \vec{f}'(t) = (-\sin t, \cos t, 1) \Rightarrow \vec{f}''(t) = (-\cos t, -\sin t, 0)$,
$s'(t) = \|\vec{f}'(t)\| = \sqrt{2} \Rightarrow t'(s) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$,
$\vec{f}'(t) \times \vec{f}''(t) = (\sin t, -\cos t, 1) \Rightarrow \|\vec{f}'(t) \times \vec{f}''(t)\| = \sqrt{2}$

- Vectors $\hat{T}$ i $\hat{B}$:
  $$\hat{T} = \left(\frac{-\sin t}{\sqrt{2}}, \frac{\cos t}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \text{ i } \hat{B} = \left(\frac{\sin t}{\sqrt{2}}, \frac{-\cos t}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$
- Centre de curvatura:
  $$\kappa = \frac{\|\vec{f}'(t) \times \vec{f}''(t)\|}{\|\vec{f}'(t)\|} = \frac{1}{2} \Rightarrow \rho = 2.$$
- Torsió:
  $$\frac{\mathrm{d}\hat{B}}{\mathrm{d}s} = -\tau\hat{N} = (\frac{\cos t}{2}, \frac{\sin t}{2}, 0)$$
  $$\hat{N} = \hat{B} \times \hat{T} = (-\cos t, -\sin t, 0) \Rightarrow \tau = \frac{1}{2}.$$
- Centre de curvatura:
  $$\vec{c} = \vec{f} + \rho\hat{N} \Rightarrow \vec{c} = (-\cos t, -\sin t, t).$$

▲

4 Derivació de camps escalars

L'extensió del concepte de derivada a funcions de més d'una variable no és automàtica i requereix algunes modificacions. Ho farem des de dues perspectives diferents: la derivada direccional i la diferencial.

4.1 Derivades direccionals i derivades parcials

Definició 4.1 (Derivada direccional)**.** Si $f(\vec{x})$ és un camp escalar i $\hat{u}$ un vector unitari de $\mathbb{R}^n$, definim la derivada en la direcció $\hat{u}$ de $f(\vec{x})$ en el punt $\vec{a}$:

$$(D_{\hat{u}}f)(\vec{a}) \equiv (D_{\hat{u}}f)_{\vec{a}} \equiv \lim_{\lambda\to 0} \frac{f(\vec{a}+\lambda\hat{u}) - f(\vec{a})}{\lambda} \tag{4.1}$$

■

Es compleixen, per tant, els teoremes de les funcions derivables d'una variable:

Teorema 4.1 (del valor mitjà)**.** *Sigui $\hat{u} = (\vec{b}-\vec{a})/\|\vec{b}-\vec{a}\|$. Si $D_{\hat{u}}f\exists$ en tots els punts del segment rectilini que uneix $\vec{a}$ i $\vec{b} \Rightarrow \exists\vec{c}$ dins aquest segment que compleix*

$$f(\vec{b}) - f(\vec{a}) = (D_{\hat{u}}f)_{\vec{c}}\|\vec{b}-\vec{a}\|$$

□

Teorema 4.2 (Continuïtat de $f(\vec{a}+\lambda\hat{u})$)**.** *Si $\exists(D_{\hat{u}}f)_{\vec{a}} \Rightarrow f(\vec{a}+\lambda\hat{u})$ és contínua en el punt $\lambda = 0$, és a dir, $\lim_{\lambda\to 0} f(\vec{a}+\lambda\hat{u}) = f(\vec{a})$.* □

Definició 4.2 (Derivades parcials)**.** Les derivades parcials són les derivades direccionals en les direccions $\hat{e}_i$.

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_{\vec{a}} \equiv (D_{\hat{e}_i}f)_{\vec{a}} \equiv (\partial_i f)_{\vec{a}} \tag{4.2}$$

La derivada parcial respecte x_i en el punt $\vec{a}$ és la derivada de la funció $f(\vec{x})$ respecte la variable x_i fixant les altres variables al punt $\vec{a}$:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_{\vec{a}} = \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x_i} f(a_1, \dots, x_i, \dots, a_n)\right]_{x_i=a_i} \tag{4.3}$$

■

Derivades direccionals i continuïtat

El fet que de l'existència de $D_{\hat{u}}f$ (i, menys encara, la simple existència de les derivades parcials) no és suficient per garantir la continuïtat. Aquest fet evidencia que les derivades direccionals no són una extensió una extensió satisfactòria del concepte de derivada per a les funcions de n variables. Un concepte més adient és el de diferenciabilitat.

4.2 Camps escalars diferenciables

Infinitèsims

Definició 4.3. $f(\vec{x})$ és un «infinitèsim quan $\vec{x} \to \vec{a}$» si $\lim_{\vec{x}\to\vec{a}} f(\vec{x}) = 0$. ■

Definició 4.4. $f(\vec{x})$ és un «infinitèsim d'ordre superior a n quan $\vec{x} \to \vec{a}$» si $\lim_{\vec{x}\to\vec{a}} \dfrac{f(\vec{x})}{\|\vec{x}-\vec{a}\|^n} = 0$. Diem, llavors, que $f(\vec{x}) \to 0$ «més ràpidament» que $\|\vec{x}-\vec{a}\|^n$ quan $\vec{x} \to \vec{a}$, i ho expressem:

$$f(\vec{x}) = o[\|\vec{x}-\vec{a}\|^n]$$

■

Definició 4.5. Quan només es pot afirmar que $\lim_{\vec{x}\to\vec{a}} \dfrac{f(\vec{x})}{\|\vec{x}-\vec{a}\|^n} \neq \infty$, diem que $f(\vec{x})$ és un «infinitèsim d'ordre igual o superior a n (i que $f(\vec{x}) \to 0$ «tan o més ràpidament» que $\|\vec{x}-\vec{a}\|^n$) quan $\vec{x} \to \vec{a}$», i ho expressem:

$$f(\vec{x}) = O[\|\vec{x}-\vec{a}\|^n]$$

■

Camps escalars diferenciables

Definició 4.6. Sigui $f(\vec{x})$ un camp escalar definit a $D \subseteq \mathbb{R}^n$ i sigui $\vec{a} \in D$. Direm que $f(\vec{x})$ és diferenciable en el punt $\vec{a}$ si $\exists \vec{K} \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$f(\vec{x}) = f(\vec{a}) + \vec{K}(\vec{x}-\vec{a}) + o[\|\vec{x}-\vec{a}\|] \tag{4.4}$$

■

Teorema 4.3 (Diferenciabilitat i continuïtat). *Si $f(\vec{x})$ és diferenciable en el punt $\vec{a} \Rightarrow f(\vec{x})$ és contínua en el punt $\vec{a}$.* □

Teorema 4.4 (Diferenciabilitat i l'existència de les derivades parcials). *Si $f(\vec{x})$ és diferenciable en el punt $\vec{a} \Rightarrow \exists (D_{\hat{u}}f)_{\vec{a}}, \forall \hat{u}$ i es compleix $(D_{\hat{u}}f)_{\vec{a}} = \vec{K}\cdot\hat{u}$.* □

Corol·lari 4.5. *Si f és diferenciable en el punt $\vec{a}$, es compleix*

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_{\vec{a}} = (D_{\hat{e}_i}f)_{\vec{a}} = \vec{K}\cdot\hat{e}_i \Rightarrow \vec{K} \text{ és únic.}$$

□

Gradient d'un camp escalar diferenciable

Introduïm l'operador nabla: $\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right)$.

Definició 4.7 (Gradient)**.** Si f és diferenciable en el punt $\vec{a}$,

$$(\operatorname{grad} f)_{\vec{a}} \equiv (\vec{\nabla} f)_{\vec{a}} = \left(\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_{\vec{a}}, \left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)_{\vec{a}}, \ldots, \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)_{\vec{a}}\right) \tag{4.5}$$

■

El vector gradient, és doncs, en cada punt, el vector $\vec{K}$ del camp escalar diferenciable $f(\vec{x})$:

$$f(\vec{x}) = f(\vec{a}) + (\vec{\nabla} f)_{\vec{a}} \cdot (\vec{x} - \vec{a}) + o[\|\vec{x} - \vec{a}\|] \tag{4.6}$$

O dit d'una altra manera:

$$\lim_{\vec{x}-\vec{a}\to\vec{0}} \frac{f(\vec{x}) - f(\vec{a}) - (\vec{\nabla} f)_{\vec{a}} \cdot (\vec{x} - \vec{a})}{\|\vec{x} - \vec{a}\|} = 0 \tag{4.7}$$

La fórmula (4.6) s'anomena també fórmula de Taylor de primer ordre del camp diferenciable $f(\vec{x})$ en el punt $\vec{a}$.

Geomètricament, el gradient es pot interpretar com el vector que té mòdul de la derivada direccional màxima i que té la direcció en què aquesta derivada direccional és màxima.

Diferencial d'un camp escalar diferenciable

Definició 4.8 (Diferencial total)**.** Reexpressant el «pla» tangent a $y = f(\vec{a}) + (\vec{\nabla} f)_{\vec{a}} \cdot (\vec{x} - \vec{a})$ en un sistema de coordenades $\mathrm{d}x_1, \mathrm{d}x_2, \ldots, \mathrm{d}x_n$ local, tenim la diferencial o diferencial total de $f(\vec{x})$ en el punt $\vec{a}$:

$$\mathrm{d}y = (\vec{\nabla} f)_{\vec{a}} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_{\vec{a}} \mathrm{d}x_1 + \cdots + \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)_{\vec{a}} \mathrm{d}x_n \tag{4.8}$$

■

Teorema 4.6 (Condició suficient per a la diferenciabilitat)**.** *Si $f(\vec{x})$ té derivades parcials en algun entorn del punt $\vec{a}$ i són contínues en el punt $\vec{a} \Rightarrow f(\vec{x})$ és diferenciable en el punt $\vec{a}$.* □

Corol·lari 4.7. *Si $f(\vec{x})$ és de classe $C^1_D \Rightarrow f(\vec{x})$ és diferenciable a D.* □

4.3 Regla de la cadena $1-n-1$

Sigui $\vec{x}=\vec{g}(u)$ una funció $\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n$ diferenciable en el punt $u=a$; sigui $y=f(\vec{x})$ una funció $\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ diferenciable en el punt $\vec{x}=\vec{g}(u)$; sigui $F(u)\equiv(f\circ\vec{g})(u)$. Llavors $F(u)$ és diferenciable en el punt $u=a$ i es compleix

$$F'(a)=(\vec{\nabla}f)_{\vec{g}(a)}\cdot\vec{g}'(a) \tag{4.9}$$

o, també

$$\left(\frac{\partial F}{\partial u}\right)_a=\sum_{i=1}^n\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_{\vec{g}(a)}\left(\frac{\partial x_i}{\partial u}\right)_a \tag{4.10}$$

Corbes de nivell

Sigui un $y=f(x_1,x_2)$ un camp escalar diferenciable definit a $\mathbb{R}^2$. El seu gràfic és una superfície de $\mathbb{R}^3$. La intersecció d'aquesta superfície amb el pla $y\equiv c$ determina una corba sobre el gràfic que, projectada sobre el pla de les variables x_1,x_2, és la corba de nivell $f(x_1,x_2)\equiv c$. El vector gradient és, en cada punt de $\mathbb{R}^2$, ortogonal a les corbes de nivell.

Generalitzant aquesta propietat a un camp escalar definit a $\mathbb{R}^n$, $\vec{\nabla}f$ és, en cada punt, ortogonal a l'hiper-pla tangent a la hiper-superfície de nivell.

4.4 Derivades parcials d'ordre superior

Si el camp escalar $f(\vec{x})$ té derivades parcials en el domini $D\subseteq\mathbb{R}^n$, considerem els camps escalars $\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)(\vec{x})$ que poden tenir o no derivades parcials les quals, en cas d'existir, anomenem derivades parcials de segon ordre

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x})\right)\right]\right)_{\vec{a}}\equiv\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_i}\right)_{\vec{a}} \tag{4.11}$$

Reiterant el procés podem parlar de derivades de tercer, quart, cinquè, etc. ordre. Cal remarcar que l'ordre en què es fan les successives derivades és, en principi, no permutable.

Teorema 4.8 (de Schwarz)**.** *Si $f(\vec{x})=f(x_1,\ldots,x_m)$ té derivades parcials d'ordre m en algun entorn de $\vec{x}_0$ i són contínues en aquest punt, es compleix*

$$\left(\frac{\partial^m f}{\partial x_{i_1}\partial x_{i_2}\ldots\partial x_{i_m}}\right)_{\vec{x}_0}=\left(\frac{\partial^m f}{\partial x_{j_1}\partial x_{j_2}\ldots\partial x_{j_m}}\right)_{\vec{x}_0} \tag{4.12}$$

On $x_{i_1},x_{i_2},\ldots,x_{i_m}$ i $x_{j_1},x_{j_2},\ldots,x_{j_m}$ són dues permutacions d'un conjunt de m variables de les n variables $x_1,x_2,\ldots,x_n$. □

Corol·lari 4.9. *Si $f(\vec{x})$ és de classe C^m_D, llavors l'ordre derivació de les derivades parcials mixtes d'ordre m és indiferent.* □

4.5 Fórmula de Taylor per a un camp escalar

Sigui $f(\vec{x}$ un camp escalar de n variables de classe C^m en algun entorn del punt $\vec{a}$. Com en el cas de les funcions d'una variable, volem trobar la millor aproximació polinòmica de f en aquest punt. Es tracta, doncs, de trobar un polinomi $P_m^{(\vec{a})}(\vec{x})$ de n variables, de gray m, que tingui contacte d'ordre superior a m amb $f(\vec{x})$ en el punt $\vec{a}$, és a dir, que compleixi

$$f(\vec{x}) - P_m^{(\vec{a})}(\vec{x}) = o[\|\vec{x} - \vec{a}\|^m] \tag{4.13}$$

Polinomi de Taylor de grau m de $f(\vec{x})$ en el punt $\vec{a}$

L'expressió del polinomi amb millor ajust polinòmic (de grau m) de la funció $f(\vec{x})$ en el punt $\vec{a}$ és

$$\begin{aligned} P_m^{(\vec{a})}(\vec{x}) =& f(\vec{a}) + \sum_{i_1} \left(\frac{\partial f}{\partial x_{i_1}} \right)_{\vec{a}} (x_{i_1} - a_{i_1}) \\ &+ \frac{1}{2!} \sum_{i_1,i_2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2}} \right)_{\vec{a}} (x_{i_1} - a_{i_1})(x_{i_2} - a_{i_2}) + \dots \\ &+ \frac{1}{m!} \sum_{i_1,\dots,i_m} \left(\frac{\partial^m f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_m}} \right)_{\vec{a}} (x_{i_1} - a_{i_1}) \dots (x_{i_m} - a_{i_m}) \end{aligned} \tag{4.14}$$

Fórmula de Taylor

Si $f(\vec{x})$ és de classe C^{m+1} en algun entorn del punt $\vec{a}$, el terme $o[\|\vec{x} - \vec{a}\|^m]$ es pot precisar més.

Teorema 4.10 (de la Fórmula de Taylor)**.** *Si $f(\vec{x})$ és de classe C^{m+1} en algun entorn del punt $\vec{a} \Rightarrow f(\vec{x}) = P_m^{(\vec{a})}(\vec{x}) + R_m^{(\vec{a})}(\vec{x})$. On $R_m^{(\vec{a})}(\vec{x})$ és la resta de Lagrange, que s'expressa: $\exists \tilde{t} \in (0,1)$ tal que*

$$\begin{aligned} R_m^{(\vec{a})}(\vec{x}) =& \frac{1}{(m+1)!} \sum_{i_1,\dots,i_{m+1}} \left(\frac{\partial^{m+1} f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_{m+1}}} \right)_{\vec{a}+\tilde{t}(\vec{x}-\vec{a})} \\ & \cdot (x_{i_1} - a_{i_1}) \dots (x_{i_{m+1}} - a_{i_{m+1}}) \end{aligned} \tag{4.15}$$

□

4.6 Hessià

Sigui $f(\vec{x})$ un camp escalar de, al menys, classe C^2 en algun entorn del punt $\vec{a}$. La fórmula de Taylor de segon ordre s'escriu

$$\begin{aligned} f(\vec{x}) =& f(\vec{a}) + \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_{\vec{a}} (x_i - a_i) \\ &+ \frac{1}{2!}\sum_{i,j}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right)_{\vec{a}} (x_i - a_i)(x_j - a_j) \\ &+ o[\|\vec{x}-\vec{a}\|^2] \end{aligned} \tag{4.16}$$

que podem escriure de forma matricial

$$f(\vec{x}) = f(\vec{a}) + (\vec{\nabla} f)_{\vec{a}} \cdot (\vec{x}-\vec{a}) + \frac{1}{2!}(\vec{x}-\vec{a}) \cdot ((H^f)_{\vec{a}}(\vec{x}-\vec{a})) + \dots \tag{4.17}$$

On $(H^f)_{\vec{a}}(\vec{x}-\vec{a})$ és l'hessià, o matriu hessiana, multiplicat per la matriu del vector $\vec{x}-\vec{a}$

$$(H^f)_{\vec{a}}(\vec{x}-\vec{a}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}_{\vec{a}} \begin{pmatrix} x_1 - a_1 \\ \vdots \\ x_n - a_n \end{pmatrix} \tag{4.18}$$

L'hessià té un paper important en la determinació dels màxims i mínims relatius dels camps escalars.

4.7 Punts estacionaris

Teorema 4.11. *Si $f(\vec{x})$ té un extrem relatiu en el punt $\vec{a}$ i és diferenciable en aquest punt, llavors $(\vec{\nabla} f)_{\vec{a}} = \vec{0}$.* □

El recíproc no és cert. Direm, però, que $\vec{a}$ és un punt estacionari o crític.

Si $f(\vec{x})$ és diferenciable en el punt $\vec{a}$ i aquest punt és estacionari hi ha dues possibilitats:

- Extrem (màxim o mínim) relatiu: quan en algun entorn de $\vec{a}$ hi ha punts $\vec{x}$ on $f(\vec{x}) \leq f(\vec{a})$ o $f(\vec{x}) \geq f(\vec{a})$.
- Punt de sella: quan en tot entorn de $\vec{a}$ hi ha punts $\vec{x}$ on $f(\vec{x}) < f(\vec{a})$ i punts on $f(\vec{x}) > f(\vec{a})$.

Caracterització dels punts estacionaris a partir de l'hessià

Si $f(\vec{x})$ és un camp escalar de classe C^2 en algun entorn d'un punt estacionari $\vec{a}$, $(\vec{\nabla} f)_{\vec{a}} \cdot (\vec{x}-\vec{a}) = 0)$. Llavors la fórmula de Taylor de segon ordre al voltant de $\vec{a}$ la podem expressar com

$$f(\vec{x}) - f(\vec{a}) = \frac{1}{2!}(\vec{x}-\vec{a}) \cdot ((H^f)_{\vec{a}}(\vec{x}-\vec{a})) + \dots \tag{4.19}$$

O dit d'una altra manera (de forma matricial)

$$f(\vec{x}) - f(\vec{a}) = \frac{1}{2!} h^t H h + \dots \tag{4.20}$$

Per tant,

- Si $h^t H h > 0$, $\forall h$, es tracta d'un mínim relatiu.
- Si $h^t H h < 0$, $\forall h$, es tracta d'un màxim relatiu.
- Si per alguns h tenim $h^t H h > 0$ i per altres $h^t H h < 0$, es tracta d'un punt de sella.
- Si per algun h tenim $h^t H h = 0$, no és conclusiu.

Caracterització dels punts estacionaris a partir dels valors propis de l'hessià

Un punt estacionari $\vec{a}$ de $f(\vec{x})$ (de classe C^2) és:

- Mínim relatiu: si tots els valors propis de $(H^f)_{\vec{a}}$ són > 0.
- Màxim relatiu: si tots els valors propis de $(H^f)_{\vec{a}}$ són < 0.
- Punt de sella: si hi ha valors propis > 0 i també valors propis < 0.
- Si hi ha valors propis $= 0$ i > 0 (o $= 0$ i < 0) no es pot concloure res.

Criteri de Sylvester

És un criteri pràctic que dóna una condició necessària i suficient per què els valors propis siguin estrictament positius o negatius (és fàcil de demostrar a partir del teorema de Sylvester).
Si $H^{(1)}, H^{(2)}, H^{(3)}, \dots, H^{(n)}$ són els menors principals del vèrtex superior esquerre de $(H^f)_{\vec{a}}$.

- Els valors propis són $> 0 \Leftrightarrow$
  $$\det H^{(1)} > 0, \det H^{(2)} > 0, \det H^{(3)} > 0, \dots, \det H^{(n)} > 0 \text{ (mínim relatiu).}$$
- Els valors propis són $< 0 \Leftrightarrow$
  $$\det H^{(1)} < 0, \det H^{(2)} > 0, \det H^{(3)} < 0, \dots,$$
  $$\det H^{(n)} \begin{cases} > 0 & (n \text{ parell}) \\ < 0 & (n \text{ senar}) \end{cases} \text{ (màxim relatiu).}$$

- En altres situacions:

  Si $\det(H^f)_{\vec{a}} \neq 0$, els valors propis són tots $\neq 0$, però tenen signes diferents (punt de sella).

  Si $\det(H^f)_{\vec{a}} = 0$ algun valor propi és 0 (no és conclusiu).

5 Derivació de camps vectorials

5.1 Matriu jacobiana

Sigui $\vec{f}(\vec{x}) = (f_1(\vec{x}), f_2(\vec{x}), \ldots, f_m(\vec{x}))$ un camp vectorial definit a $D \subseteq \mathbb{R}^n$, amb valors a $\mathbb{R}^m$.

Definició 5.1 (Derivada direccional i derivades parcials)**.** Si $\hat{u}$ és un vector unitari de $\mathbb{R}^n$,

$$(D_{\hat{u}}\vec{f})_{\vec{a}} = \lim_{\lambda \to 0} \frac{\vec{f}(\vec{a} - \lambda\hat{u})}{\lambda} = \begin{pmatrix} D_{\hat{u}}f_1 \\ D_{\hat{u}}f_2 \\ \vdots \\ D_{\hat{u}}f_m \end{pmatrix}_{\vec{a}} \quad ; \quad \left(\frac{\partial \vec{f}}{\partial x_i}\right)_{\vec{a}} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_i} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_i} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_i} \end{pmatrix}_{\vec{a}} \tag{5.1}$$

■

Definició 5.2 (Matriu jacobiana)**.**

$$(\vec{J}^{\vec{f}})_{\vec{a}} \equiv \begin{pmatrix} \vec{\nabla} f_1 \\ \vdots \\ \vec{\nabla} f_m \end{pmatrix}_{\vec{a}} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}_{\vec{a}} \tag{5.2}$$

■

5.2 Camps vectorials diferenciables

Un camp vectorial $\vec{f}(\vec{x}) = (f_1(\vec{x}), f_2(\vec{x}), \ldots, f_m(\vec{x}))$ és diferenciable al punt $\vec{x} = \vec{a}$ si les seves components ho són, és a dir, si

$$\vec{f}(\vec{x}) = \vec{f}(\vec{a}) + (\vec{J}^{\vec{f}})_{\vec{a}}(\vec{x} - \vec{a}) + \vec{o}[\|\vec{x} - \vec{a}\|] \tag{5.3}$$

Teorema 5.1 (Condició suficient per a la diferenciabilitat)**.** *Si les components de la matriu jacobiana ($\partial f_i/\partial x_j$) existeixen en algun entorn del punt $\vec{a}$ i són contínues en aquest punt $\Rightarrow$ $\vec{f}(\vec{x})$ és diferenciable en el punt $\vec{a}$.* □

Diferencial d'un camp vectorial diferenciable

Definició 5.3 (Diferencial)**.** És el «pla tangent» $\vec{y} = \vec{f}(\vec{a}) + (\vec{J}^{\vec{f}})_{\vec{a}}(\vec{x} - \vec{a})$ reexpressat en coordenades locals de $\mathbb{R}^{n+m}$ $(\mathrm{d}\vec{x}, \mathrm{d}\vec{y})$ que tenen l'origen en el punt de contacte $(\vec{a}, \vec{f}(\vec{a}))$ d'aquest pla amb el gràfic de la funció:

$$(\mathrm{d}\vec{y}) = (\vec{J}^{\vec{f}})_{\vec{a}}(\mathrm{d}\vec{x}) \tag{5.4}$$

o en forma matricial

$$\begin{pmatrix} \mathrm{d}y_1 \\ \vdots \\ \mathrm{d}y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}_{\vec{a}} \begin{pmatrix} \mathrm{d}x_1 \\ \vdots \\ \mathrm{d}x_n \end{pmatrix} \tag{5.5}$$

■

Definició 5.4 (Jacobià)**.** Quan $m = n$, la matriu jacobiana de $\vec{f}(\vec{x})$ és quadrada. El determinant s'anomena jacobià de $\vec{f}$ en el punt $\vec{a}$, i s'expressa

$$\left(\frac{\partial(f_1, \ldots, f_n)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)}\right)_{\vec{a}} = \det(\vec{J}^{\vec{f}})_{\vec{a}} \tag{5.6}$$

Utilitzarem el terme jacobià també en el cas $m \neq n$ per referir-nos a determinants de menors de matrius jacobianes. Per exemple, si $\vec{f}(\vec{x}) = (f_1(x, y, z), f_2(x, y, z))$, podem parlar del jacobià $(\partial(f_1, f_2)/\partial(x, y))$. ■

5.3 Regla de la cadena $l - n - m$

Sigui $\vec{x} = \vec{g}(\vec{u})$ una funció $\mathbb{R}^l \to \mathbb{R}^n$ diferenciable en el punt $\vec{u} = \vec{a}$; sigui $\vec{y} = \vec{f}(\vec{x})$ una funció $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ diferenciable en el punt $\vec{x} = \vec{g}(\vec{u})$; sigui $\vec{F}(\vec{u}) \equiv (\vec{f} \circ \vec{g})(\vec{u})$. Llavors $\vec{F}(\vec{u})$ és diferenciable en el punt $\vec{u} = \vec{a}$ i es compleix

$$(\vec{J}^{\vec{F}})_{\vec{a}} = (\vec{J}^{\vec{f}})_{\vec{g}(\vec{a})}(\vec{J}^{\vec{g}})_{\vec{a}} \tag{5.7}$$

o, també

$$\left(\frac{\partial F_i}{\partial u_j}\right)_{\vec{a}} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_k}\right)_{\vec{g}(\vec{a})} \left(\frac{\partial x_k}{\partial u_j}\right)_{\vec{a}} \tag{5.8}$$

5.4 Funció inversa

Definició 5.5. Si $\vec{f}(\vec{x})$ és un camp vectorial, anomenem funció inversa de $\vec{f}$ a la funció $\vec{f}^{-1}$ que compleix $\vec{f} \circ \vec{f}^{-1} = \vec{f}^{-1} \circ \vec{f} = \vec{I}$ (si existeix), on $\vec{I}$ és la funció identitat. Per tal que una funció tingui inversa és necessari i suficient que sigui injectiva. ■

Matriu jacobiana de la funció inversa

Teorema 5.2. *Si $\vec{f}$ i $\vec{f}^{-1}$ són diferenciables, la matriu jacobiana de $\vec{f}^{-1}$ és la inversa de la matriu jacobiana de $\vec{f}$.* □

Corol·lari 5.3. *Si $\vec{f}$ és diferenciable i té inversa diferenciable, el jacobià de $\vec{f}$ ha de ser $\neq 0$.* □

Teorema 5.4 (de la funció inversa)**.** *Sigui $\vec{f}(\vec{x})$ un camp vectorial definit a $D \subseteq \mathbb{R}^n$ amb valors a $\mathbb{R}^n$. Si es compleix*

i) $\vec{f}(\vec{x})$ *és de classe* C^1_D.

ii) $\dfrac{\partial(f_1, \ldots, f_n)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)} \neq 0$.

Llavors,

i) Hi ha un entorn $\varepsilon(\vec{x}_0)$ de $\vec{x}_0$ en què $\vec{f}$ té inversa $\vec{f}^{-1}$.

ii) $\vec{f}^{-1}$ és de classe C^1 en la imatge de $\varepsilon(\vec{x}_0)$.

□

5.5 Funcions implícites

Teorema 5.5 (de la funció implícita)**.** *Sigui $\vec{F}(\vec{x}) = (F_1(\vec{x}), \ldots, F_n(\vec{x}))$ un camp vectorial definit a $D \subseteq \mathbb{R}^n$ amb valors a $\mathbb{R}^m$, amb $m < n$. Si es compleix*

i) $\vec{F}(\vec{x})$ és de classe C^1_D (les derivades parcials són contínues).

ii) $\vec{F}(\vec{x}_0) = \vec{0}$.

iii) $\left(\dfrac{\partial(f_1, \ldots, f_m)}{\partial(x_1, \ldots, x_m)}\right)_{\vec{x_0}} \neq 0$.

Llavors, hi ha un entorn de $(x_{0_{m+1}}, \ldots, x_{0_n}) \in \mathbb{R}^{n-m}$ en el qual existeixen m funcions de classe C^1 úniques $g_i(x_{m+1}, \ldots, x_n)$, $i = 1, \ldots, m$, tals que

$$\vec{F}(g_1(\ldots), \ldots, g_m(\ldots), x_{m+1}, \ldots, x_n) \equiv \vec{0} \tag{5.9}$$

□

Corol·lari 5.6. *$\vec{F}(\vec{x}) = \vec{0}$ defineix implícitament m funcions $x_i = g_i(x_{m+1}, \ldots, x_n)$, $i = 1, \ldots, m$ en algun entorn de $(x_{0_{m+1}}, \ldots, x_{0_n})$.* □

En general, aplicant la regla de la cadena, podem arribar a la següent expressió

$$\frac{\partial g_i}{\partial x_k} = -\left(\frac{\dfrac{\partial(F_1, \ldots, F_m)}{\partial(x_1, \ldots, x_k, \ldots, x_m)}}{\dfrac{\partial(F_1, \ldots, F_m)}{\partial(x_1, \ldots, x_m)}}\right) \tag{5.10}$$

amb $i = 1, 2, \ldots, m$ i $k = m+1, m+2, \ldots, n$; on la columna que correspon a x_k del jacobià és la columna i.

És a dir, al jacobià del numerador se substitueix la columna de la variable que volem aïllar per la columna de la variable respecte la qual derivem parcialment.

Exemple 5.1. Sigui $f(x, y) = x^2y^2 + 6x^xy + 5y^3 + 3x^2 - 12 = 0$. Es pot afirmar que $y = g(x)$ està definida implícitament?

i) $f(x,y)$ és de classe C^∞.

ii) $\dfrac{\partial f}{\partial y} \neq 0 = 2x^2y + 6x^2 + 15y^2$.

iii) $f(x_0, y_0) = 0$, per a algun x_0, y_0.

Així doncs, es pot aïllar y en funció de x.

$$\frac{\partial g}{\partial x} = -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}}{\dfrac{\partial f}{\partial y}} = -\frac{2xy^2 + 2xy + 6x}{2x^2y + 6x^2 + 15y^2}$$

▲

5.6 Extrems condicionats: multiplicadors de Lagrange

Sigui $f(x_1, \ldots, x_n)$ un camp escalar $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe C^1. Considerem el problema de trobar els màxims i mínims de $f(\vec{x})$, on les variables $\vec{x}$ estan condicionades a satisfer $F_i(\vec{x}) = 0$, $i = 1, \ldots, m(< n)$.

Teorema 5.7 (dels multiplicadors de Lagrange)**.** *Sigui $f(x_1, \ldots, x_n)$ un camp escalar de classe C^1. Si es compleix*

i) $F_i(x_1, \ldots, x_n)$, $i = 1, \ldots, m(< n)$ són de classe C^1.

ii) S és el conjunt de punts que satisfan $F_i(\vec{x}) = 0$, $i = 1, \ldots, m$ i $\partial(F_1, \ldots, F_m)/\partial(x_1, \ldots, x_m) \neq 0$.

iii) $f(\vec{x})$ té un màxim o mínim relatiu a $\vec{x}_0 \in S$.

Llavors $(\vec{\nabla} f)_{x_0}$ és combinació lineal dels $(\vec{\nabla} F_i)_{\vec{x}_0}$. És a dir existeixen m números reals $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ (multiplicadors de Lagrange) tals que

$$(\vec{\nabla} f)_{x_0} = \lambda_1 (\vec{\nabla} F_1)_{\vec{x}_0} + \cdots + \lambda_m (\vec{\nabla} F_m)_{\vec{x}_0} \tag{5.11}$$

□

5.7 Divergència, rotacional i laplaciana

Divergència d'un camp vectorial $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

Definició 5.6 (Divergència)**.** Sigui $\vec{f}(\vec{x})$ un camp vectorial definit a $D \subseteq \mathbb{R}^n$, amb valors a $\mathbb{R}^n$. Si existeixen les derivades parcials de $\vec{f}$, definim la divergència de $\vec{f}$ com el camp escalar

$$\operatorname{div} \vec{f} \equiv \vec{\nabla} \cdot \vec{f} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x_1} & \ldots & \dfrac{\partial}{\partial x_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} \tag{5.12}$$

■

Propietats: si $\vec{f}(\vec{x})$ i $\vec{g}(\vec{x})$ són camps vectorials $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ i $\phi(\vec{x})$ és un camp escalar de $\mathbb{R}^n$,

i) $\vec{\nabla} \cdot (\vec{f} + \vec{g}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{f} + \vec{\nabla} \cdot \vec{g}$.

ii) $\vec{\nabla} \cdot (\phi \vec{f}) = (\vec{\nabla}\phi) \cdot \vec{f} + \phi(\vec{\nabla} \cdot \vec{f})$.

Rotacional d'un camp vectorial $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

Definició 5.7 (Rotacional)**.** Sigui $\vec{f}(\vec{x})$ un camp vectorial definit a $D \subseteq \mathbb{R}^3$, amb valors a $\mathbb{R}^3$. Si existeixen les derivades parcials de $\vec{f}$, definim la divergència de $\vec{f}$ com el camp vectorial

$$\operatorname{rot} \vec{f} \equiv \vec{\nabla} \times \vec{f} = \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial x_1} & \dfrac{\partial}{\partial x_2} & \dfrac{\partial}{\partial x_3} \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix} \tag{5.13}$$

■

Propietats: si $\vec{f}(\vec{x})$ i $\vec{g}(\vec{x})$ són camps vectorials $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ i $\phi(\vec{x})$ és un camp escalar de $\mathbb{R}^3$,

i) $\vec{\nabla} \times (\vec{f} + \vec{g}) = \vec{\nabla} \times \vec{f} + \vec{\nabla} \times \vec{g}$.

ii) $\vec{\nabla} \times (\phi \vec{f}) = (\vec{\nabla}\phi) \times \vec{f} + \phi(\vec{\nabla} \times \vec{f})$.

iii) Si $\phi(\vec{x})$ és de classe C^2: $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla}\phi) = \vec{0}$.

iv) Si $\vec{f}(\vec{x})$ és de classe C^2: $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{f}) = 0$.

Laplaciana

Definició 5.8 (Laplaciana)**.** Si $\phi(\vec{x})$ és un camp escalar definit a $D \subseteq \mathbb{R}^n$, definim la laplaciana de ϕ com el camp escalar

$$\nabla^2 \phi \equiv \operatorname{div}(\operatorname{grad} \phi) = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_n^2} = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla}\phi) = (\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla})\phi \tag{5.14}$$

i si $\vec{f}(\vec{x})$ és un camp vectorial definit a $D \subseteq \mathbb{R}^n$, amb valors a $\mathbb{R}^m$, definim

$$\nabla^2 \vec{f} \equiv \left(\nabla^2 f_1, \nabla^2 f_2, \ldots, \nabla^2 f_m\right) \tag{5.15}$$

■

6 Integrals de línia

En aquest capítol estendrem el concepte d'integral de funcions d'una variable, $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ (inicialment definit per a funcions fitades en un interval finit $[a,b]$), a quan l'interval d'integració no és $[a,b]$ de $\mathbb{R}$, sinó un arc de corba de $\mathbb{R}^n$. Aquesta nova extensió ens porta al concepte d'integral de línia o integral curvilínia.

6.1 Integral de línia d'un camp vectorial

Sigui

- $\vec{f}(\vec{x}) = (f_1(\vec{x}), \ldots, f_n(\vec{x}))$ un camp vectorial definit a $D \subseteq \mathbb{R}^n$, amb valors a $\mathbb{R}^n$.
- $\mathcal{C}$ una corba $\vec{x}(u)$, $a \le u \le b$, de classe $C^1_{[a,b]}$ a trossos, continguda a D, d'extrems $\vec{a}$ i $\vec{b}$, amb $\vec{x}(a) = \vec{a}$ i $\vec{x}(b) = \vec{b}$.
- $\vec{f}(\vec{x})$ fitat sobre els punts de la corba $\mathcal{C}$.

Definició 6.1. Definim la integral de línia del camp vectorial $\vec{f}(\vec{x})$ al llarg de la corba $\mathcal{C}$ com

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{f}(\vec{x}) \cdot \mathrm{d}\vec{x} \equiv \int_a^b \vec{f}[\vec{x}(u)] \cdot \vec{x}'(u)\,\mathrm{d}u = \int_a^b \vec{f}[\vec{x}(u)] \cdot \mathrm{d}\vec{x}(u) \tag{6.1}$$

■

La notació que s'acostuma a fer servir és

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{f}(\vec{x}) \cdot \mathrm{d}\vec{x} = \int_{\vec{a}}^{\vec{b}} \vec{f}(\vec{x}) \cdot \mathrm{d}\vec{x} \tag{6.2}$$

però cal tenir present que la integral depèn del camí d'integració $\mathcal{C}$ i no únicament dels seus extrems $\vec{a}$ i $\vec{b}$.

Si la corba és tancada (és a dir, si $\vec{a} = \vec{b}$), escriurem

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{f}(\vec{x}) \cdot \mathrm{d}\vec{x} \tag{6.3}$$

Propietats de les integrals de línia

i) Linealitat:

$$\int_{\mathcal{C}} (\vec{f} + \vec{g}) \cdot \mathrm{d}\vec{x} = \int_{\mathcal{C}} \vec{f} \cdot \mathrm{d}\vec{x} + \int_{\mathcal{C}} \vec{g} \cdot \mathrm{d}\vec{x}.$$

$$\int_{\mathcal{C}} (\lambda \vec{f}) \cdot \mathrm{d}\vec{x} = \lambda \int_{\mathcal{C}} \vec{f} \cdot \mathrm{d}\vec{x}, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

ii) Additivitat del camí d'integració:

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{f} \cdot \mathrm{d}\vec{x} = \int_{\mathcal{C}_1} \vec{f} \cdot \mathrm{d}\vec{x} + \int_{\mathcal{C}_2} \vec{f} \cdot \mathrm{d}\vec{x}, \qquad \text{on} \begin{cases} \mathcal{C}: & \{\vec{x}(u) \mid u \in [a,b]\} \\ \mathcal{C}_1: & \{\vec{x}(u) \mid u \in [a,c]\} \\ \mathcal{C}_2: & \{\vec{x}(u) \mid u \in [c,b]\} \end{cases}$$

iii) Canvi de sentit:

$$\int_{\underset{\rightarrow}{\mathcal{C}}} \vec{f} \cdot \mathrm{d}\vec{x} = -\int_{\underset{\leftarrow}{\mathcal{C}}} \vec{f} \cdot \mathrm{d}\vec{x}.$$

Invariància sota reparametritzacions

Sigui

- $\vec{x}(u)$, $a \leq u \leq b$, una corba $\mathcal{C}$ de classe $C^1_{[a,b]}$, d'extrems $\vec{a}$ i $\vec{b}$.
- $u = u(v)$ una funció de classe $C^1_{[c,d]}$ amb $u'(v) > 0$, és a dir, $u(v)$ és estrictament creixent a $[c,d]$ i tenim, per tant, $u(c) = a$ i $u(d) = 4$.

La funció $\vec{y}(v) \equiv \vec{x}[u(v)]$ descriu el mateix camí $\mathcal{C}$ i en el mateix sentit, ja que $\vec{y}(c) = \vec{x}[u(c)] = \vec{x}(a) = \vec{a}$, $\quad \vec{y}(d) = \vec{x}[u(d)] = \vec{x}(b) = \vec{b}$.

Direm que $\vec{y}(v) \equiv \vec{x}[u(v)]$ és una reparametrització del camí $\mathcal{C}$ originalment definit per $\vec{x}(u)$. Aquesta reparametrització del camí $\mathcal{C}$ no modifica el valor de la integral.

6.2 Integral de línia d'un camp escalar respecte el paràmetre arc

Sigui

- $\phi(\vec{x})$ un camp escalar definit a $D \subseteq \mathbb{R}^n$, amb valors a $\mathbb{R}$.
- $\mathcal{C}$ una corba $\vec{x}(u)$, $a \leq u \leq b$, de classe $C^1_{[a,b]}$ a trossos, continguda a D, d'extrems $\vec{a}$ i $\vec{b}$, amb $\vec{x}(a) = \vec{a}$ i $\vec{x}(b) = \vec{b}$. Com que $\vec{x}(u)$ és de classe C^1, la corba $\mathcal{C}$ és rectificable i tenim el paràmetre arc $s(u) = \int_a^u \|\vec{x}'(u)\| \, \mathrm{d}u$, la derivada del qual és $s'(u) = \|\vec{x}'(u)\|$.
- $\phi(\vec{x})$ fitat sobre els punts de la corba $\mathcal{C}$.

Definició 6.2. Definim la integral de línia del camp escalar $\phi(\vec{x})$ al llarg de la corba $\mathcal{C}$ com

$$\int_{\mathcal{C}} \phi(\vec{x}) \, \mathrm{d}s \equiv \int_a^b \phi[\vec{x}(u)] s'(u) \, \mathrm{d}u \tag{6.4}$$

■

La relació entre $\int_{\mathcal{C}} \phi(\vec{x}) \, \mathrm{d}s$ i $\int_{\mathcal{C}} \vec{f}(\vec{x}) \cdot \mathrm{d}\vec{x}$ ve donada pel següent teorema.

Teorema 6.1. *Si $\phi(\vec{x})$ és la component de $\vec{f}(\vec{x})$ en la direcció tangent a la corba $\mathcal{C}$, llavors*

$$\int_{\mathcal{C}} \phi(\vec{x})\,\mathrm{d}s = \int_{\mathcal{C}} \vec{f}(\vec{x}) \cdot \mathrm{d}\vec{x} \tag{6.5}$$

□

6.3 Integrals de línia independents del camí

Conjunts connexos i conjunts convexos

Sigui un conjunt $S \subseteq \mathbb{R}^n$

- S és connex si $\forall \vec{a}, \vec{b} \in S$, $\quad \exists$ una corba contínua $\vec{x}(u)$, d'extrems $\vec{a}$ i $\vec{b}$, continguda a S.
- S és convex si $\forall \vec{a}, \vec{b} \in S$, si la recta que uneix $\vec{a}$ i $\vec{b}$ està continguda a S.

Evidentment, S convex $\Rightarrow$ S connex.

Integrals de línia independents del camí

Per als camps en què les integrals no depenen del camí $\mathcal{C}$ (és a dir que només depenen dels seus extrems), les següents afirmacions són equivalents:

- $\displaystyle\int_{\vec{a}}^{\vec{b}} \vec{f} \cdot \mathrm{d}\vec{x}$ és independent del camí que uneix $\vec{a}$ i $\vec{b}$ ($\forall \vec{a}, \vec{b} \in D$.
- $\displaystyle\oint_{\mathcal{C}} \vec{f} \cdot \mathrm{d}\vec{x} = 0$ per a qualsevol camí $\mathcal{C}$ tancat de D.

O en altres paraules

$$\int_{\underset{\rightarrow}{\mathcal{C}_1}} = \int_{\underset{\rightarrow}{\mathcal{C}_2}} \Leftrightarrow \int_{\underset{\rightarrow}{\mathcal{C}_1}} = -\int_{\underset{\leftarrow}{\mathcal{C}_2}} \Leftrightarrow \oint_{\underset{\rightarrow}{\mathcal{C}_1}+\underset{\leftarrow}{\mathcal{C}_2}} = 0 \tag{6.6}$$

Condició per a la independència del camí d'integració

Teorema 6.2 (Generalització del 2n teorema fonamental del càlcul)**.** *Sigui $\vec{f}(\vec{x})$ un camp vectorial continu definit en un conjunt obert connex $D \subseteq \mathbb{R}^n$, amb valors a $\mathbb{R}^n$.*

Si $\vec{f}(\vec{x})$ és el gradient d'un camp escalar $\phi(\vec{x})$ definit a D, és a dir $\vec{f}(\vec{x}) = \vec{\nabla}\phi(\vec{x})$, llavors $\forall \vec{a}, \vec{b} \in D$ es compleix

$$\int_{\vec{a}}^{\vec{b}} \vec{f}(\vec{x}) \cdot \mathrm{d}\vec{x} = \phi(\vec{b}) - \phi(\vec{a}) \tag{6.7}$$

La integral no depèn, per tant, del camí que uneix $\vec{a}$ i $\vec{b}$. □

Teorema 6.3 (Generalització del 1r teorema fonamental del càlcul)**.** *Sigui $\vec{f}(\vec{x})$ un camp vectorial continu definit en un conjunt obert connex $D \subseteq \mathbb{R}^n$, amb valors a $\mathbb{R}^n$.*

Si $\forall \vec{a}, \vec{b} \in D$ la integral $\int_{\vec{a}}^{\vec{b}} \vec{f}(\vec{x}) \cdot \mathrm{d}\vec{x}$ és independent del camí que uneix $\vec{a}$ i $\vec{b}$, llavors $\forall \vec{x} \in D$,

$$\vec{f}(\vec{x}) \text{ és el gradient de } \phi(\vec{x}) = \int_{\vec{a}}^{\vec{x}} \vec{f}(\vec{x}) \cdot \mathrm{d}\vec{x} \tag{6.8}$$

□

Corol·lari 6.4. *Els teoremes anteriors estableixen que si $\vec{f}(\vec{x})$ és continu en un conjunt obert connex, les següents afirmacions són equivalents*

- *$\vec{f}(\vec{x})$ és un gradient.*
- *$\int_{\vec{a}}^{\vec{b}} \vec{f} \cdot \mathrm{d}\vec{x}$ és independent del camí.*
- *$\oint_C \vec{f} \cdot \mathrm{d}\vec{x} = 0$ per a qualsevol camí tancat.*

□

Condicions per què un camp vectorial de classe C^1 sigui un gradient

Teorema 6.5 (Condició necessària)**.** *Si $\vec{f}(\vec{x})$ (de classe C^1_D) és el gradient de $\phi(\vec{x})$ a $D \subseteq \mathbb{R}^n$, llavors*

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}, \quad \forall \vec{x} \in D \tag{6.9}$$

□

Notem que a $\mathbb{R}^3$ la condició anterior equival a $\vec{\nabla} \times \vec{f} = \vec{0}$.

Teorema 6.6 (Condició suficient)**.** *Sigui $\vec{f}(\vec{x})$ un camp vectorial de classe C^1_D, on D és un obert convex de $\mathbb{R}^n$. Llavors*

$$\text{Si } \frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \Rightarrow \vec{f}(\vec{x}) \text{ és un gradient.} \tag{6.10}$$

□

7 Integrals múltiples

En aquest capítol estendrem el concepte d'integral a regions d'integració n-dimensionals. Més concretament, si $f(\vec{x})$ és un camp escalar de $\mathbb{R}^n$, donarem sentit a $\int_{\mathcal{S}} f$, on $\mathcal{S}$ és una regió de $\mathbb{R}^n$. Ho denotarem

$$\int_{\mathcal{S}} f \equiv \iint \overset{(n)}{\cdots} \int_{\mathcal{S}} f(x_1, \ldots, x_n) \, \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n$$

Considerarem, primer, el cas en què $\mathcal{S}$ és una regió «rectangular», per estendre-ho a regions més generals. Detallarem el cas en què $\mathcal{S}$ és de $\mathbb{R}^2$. La generalització a més dimensions és òbvia.

7.1 Integral d'un camp escalar sobre un «interval rectangular»

La integració en intervals rectangulars és conceptualment idèntica al cas de les funcions d'una variable.

Definició 7.1 (Interval rectangular tancat de $\mathbb{R}^n$)**.** Un interval rectangular tancat I de $\mathbb{R}^n$ és el producte cartesià de n intervals tancats de $\mathbb{R}$:

$$I = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \ldots [a_n, b_n] = \{\vec{x} \mid x_i \in [a_i, b_i]\} \tag{7.1}$$

■

Definició 7.2 (Mesura d'un interval rectangular)**.** Si I és el «rectangle n-dimensional» $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \ldots [a_n, b_n]$ de $\mathbb{R}^n$, s'anomena mesura de I, a $\mathbb{R}^n$, al producte

$$\mu(I) \equiv (b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \ldots (b_n - a_n) \tag{7.2}$$

Cal notar que a $\mathbb{R}^n$ la mesura d'un rectangle r-dimensional és 0 si $r < n$. ■

Particions d'un interval rectangular

Definició 7.3. Sigui $I = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ un interval rectangular de $\mathbb{R}^2$.
Si Π_1 és una partició de $[a_1, b_1]$: $a_1 = x_0 < \cdots < x_{k_1} = b_1$; i Π_2 és una partició de $[a_2, b_2]$: $a_2 = y_0 < \cdots < y_{k_2} = b_2$.
Llavors, $\Pi = \Pi_1 \times \Pi_2$ és una partició del rectangle I que el descompon en $k_1 k_2$ subintervals rectangulars que denotem per I_{ij}, la mesura dels quals és $\mu(I_{ij}) = \Delta x_i \Delta y_j$.
El concepte es generalitza trivialment a intervals rectangulars de dimensió superior. ■

Una partició Π' és més fina que Π si Π' s'obté afegint punts a Π (o equivalentment, si $\Pi' \supset \Pi$).

En general, donades dues particions Π_a i Π_b del rectangle I, no es pot afirmar quina és més fina que l'altra, però sempre es pot construir una partició Π_{ab} més fina que Π_a i que Π_b alhora.

Sumer superiors i inferiors

Sigui $f(x,y)$ un camp escalar definit i fitat en un interval rectangular tancat I de $\mathbb{R}^2$. Sigui Π una partició de I.

Definició 7.4 (Suma superior).

$$S(f,\Pi) \equiv \sum_{ij} M_{ij}\mu(I_{ij}) = \sum_{ij} M_{ij}\Delta x_i \Delta y_j \tag{7.3}$$

on M_{ij} és el suprem de $f(x,y)$ al subinterval I_{ij}. ■

Definició 7.5 (Suma inferior).

$$s(f,\Pi) \equiv \sum_{ij} m_{ij}\mu(I_{ij}) = \sum_{ij} m_{ij}\Delta x_i \Delta y_j \tag{7.4}$$

on m_{ij} és l'ínfim de $f(x,y)$ al subinterval I_{ij}. ■

Propietats:

- El conjunt de les sumes superiors de f és fitat inferiorment. El seu ínfim s'anomena integral superior de f sobre l'interval I i es denota $\overline{\int_I} f$.
- El conjunt de les sumes inferiors de f és fitat superiorment. El seu suprem s'anomena integral inferior de f sobre l'interval I i es denota $\underline{\int_I} f$.

Evidentment, es compleix

$$\underline{\int_I} f \leq \overline{\int_I} f \tag{7.5}$$

Funcions integrables

El camp escalar $f(x,y)$ és integrable a l'interval rectangular tancat de I de $\mathbb{R}^2$ si $\underline{\int_I} f = \overline{\int_I} f$.
En aquest cas, aquest valor comú s'anomena integral de $f(x,y)$ sobre l'interval rectangular i tancat I, i es denota per $\int_I f$.
Aquesta definició d'integral és general per a camps escalars de $\mathbb{R}^n$. A $\mathbb{R}^n$ escriurem

$$\int_I f = \iint \cdot^{(n)} f(x_1, \ldots x_n)\,\mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n \quad \text{(integral } n\text{-múltiple)} \tag{7.6}$$

Teorema 7.1 (1r criteri d'integrabilitat). *$f(\vec{x})$ és integrable a l'interval rectangular tancat $I \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \quad \exists \Pi \mid S(f,\Pi) - s(f,\Pi) < \varepsilon$.* □

Corol·lari 7.2. *Si $f(\vec{x})$ és contínua a l'interval rectangular tancat $I \Rightarrow f(\vec{x})$ és integrable a I.* □

Sumes de Riemann

Definició 7.6. Sigui $f(\vec{x})$ un camp escalar de $\mathbb{R}^2$, definit i fitat en l'interval rectangular tancat I; i Π una partició que divideix I en subintervals I_{ij}. Escollim un punt $\vec{t_{ij}}$ en cadascun dels subintervals I_{ij}.

S'anomena suma de Riemann de $f(\vec{x})$, associada a la partició Π i als punts $\vec{t_{ij}}$, a

$$S_R(f, \Pi, \vec{t_{ij}}) \equiv \sum_{ij} f(\vec{t_{ij}})\mu(I_{ij}) \tag{7.7}$$

■

Direm que les sumes de Riemann de f, a l'interval I, tenen límit si $\forall\varepsilon, \quad \exists\Pi_0 \mid \forall\Pi \supset \Pi_0$, $|S_R(f, \Pi) - A| < \varepsilon \quad \forall$ elecció dels $\vec{t_{ij}}$.

Teorema 7.3 (2n criteri d'integrabilitat)**.** *$f(\vec{x})$ és integrable $\Leftrightarrow$ les sumes de Riemann de f, a I, tenen límit (en aquest cas, el límit és $\int_I f$).* □

Propietats de $\int_I f$:

i) $\int_I (\lambda f + \eta g) = \lambda \int_I f + \eta \int_I g, \quad \forall\mu, \eta \in \mathbb{R}$.

ii) $\int_{I\cup J} f = \int_I f + \int_J f$ si I i J són dos intervals rectangulars amb un costat comú.

iii) Si f i g són integrables i $f \geq g \Rightarrow \int_I f \geq \int_I g$.

Càlcul d'una integral doble per integració unidimensional successiva

Teorema 7.4. *Sigui $f(x, y)$ definida i fitada a l'interval rectangular $I = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ de $\mathbb{R}^2$.*

Si es dóna que

i) $f(x, y)$ és integrable a I.

ii) $\exists A(y) = \int_{a_1}^{b_1} f(x, y)\,\mathrm{d}x, \quad \forall y \in [a_2, b_2]$.

iii) $A(y)$ és integrable a $[a_2, b_2]$.

Llavors, es compleix que

$$\int_{a_2}^{b_2} A(y)\,\mathrm{d}y = \iint_I f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{a_2}^{b_2} \left[\int_{a_1}^{b_1} f(x, y)\,\mathrm{d}x\right] \mathrm{d}y \tag{7.8}$$

□

Notem que:

- Si el teorema és aplicable, l'ordre de les integrals és l'indicat i no és permutable, llevat que es compleixi que $\displaystyle\int_{a_2}^{b_2} f(x,y)\,\mathrm{d}y$ sigui, també integrable (respecte x) a $[a_1, b_1]$. En aquest cas tindríem també

$$\iint_I f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{a_1}^{b_1}\left[\int_{a_2}^{b_2} f(x,y)\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x \tag{7.9}$$

- Si $f(x,y)$ és contínua a I, el teorema és aplicable, ja que $A(y)$ és, també, contínua (i, per tant, integrable).

Corol·lari 7.5. *Així doncs, la integral doble (n-múltiple) d'un camp escalar continu, sobre un interval rectangular, es pot obtenir sempre per integració successiva (i, en aquest cas, en qualsevol ordre) respecte cadascuna de les variables.* □

Integrabilitat de funcions amb discontinuïtats

Sigui $f(\vec{x})$ un camp escalar, definit i fitat a l'interval rectangular I de $\mathbb{R}^n$; i D_I^f el conjunt de les discontinuïtats de f a I.

Llavors, direm que D_I^f té contingut nul si $\forall\varepsilon > 0$ es pot cobrir D_I^f amb un nombre finit d'intervals rectangulars de mesura total $\mu < \varepsilon$.

Teorema 7.6. *Sigui $f(\vec{x})$ definida i fitada a l'interval rectangular I i sigui D_I^f el conjunt de les discontinuïtats de f a I. Llavors, si D_I^f té contingut nul $\Rightarrow f(\vec{x})$ és integrable a I.* □

7.2 Integració sobre regions més generals

Veurem ara com estendre el concepte d'integral per incloure regions d'integració que no siguin intervals rectangulars.

Sigui $\mathcal{S}$ una regió fitada de $\mathbb{R}^n$; $f(\vec{x})$ un camp escalar, definit i fitat a $\mathcal{S}$; i I un interval rectangular tancat e $\mathbb{R}^n$ que contingui $\mathcal{S}$. Llavors, definim, a I, la funció

$$\tilde{f}(\vec{x}) = \begin{cases} f(\vec{x}), & \text{si } \vec{x} \in \mathcal{S} \\ 0, & \text{si } \vec{x} \in I \backslash \mathcal{S} \end{cases} \tag{7.10}$$

Llavors, per definició

$$\iint \overset{(n)}{\cdots} \int_{\mathcal{S}} f(\vec{x})\,\mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n = \iint \overset{(n)}{\cdots} \int_I \tilde{f}(\vec{x})\,\mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n \tag{7.11}$$

A $\mathbb{R}^2$ considerarem únicament regions $\mathcal{S}$ que anomenarem de tipus I i de tipus II.

Integrals dobles en regions de tipus I i de tipus II

Definició 7.7 (Regions de tipus I (projectables–x))**.** S'anomenen així les regions $\mathcal{S}$ limitades per

$$a \leq x \leq b, \quad \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)$$

on $\varphi_1(x)$ i $\varphi_2(x)$ són contínues a $[a, b]$.

El que caracteritza aquestes regions és el fet que els segments verticals, d'extrems $\varphi_1(x)$ i $\varphi_2(x)$, (amb $a \leq x \leq b$) estan totalment dins $\mathcal{S}$. ■

Teorema 7.7. *Si $f(x, y)$ és contínua a $\mathcal{S}$ (de tipus I) $\Rightarrow$*

$$\iint_{\mathcal{S}} f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_a^b \left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\,\mathrm{d}y\right] \mathrm{d}x$$

□

Definició 7.8 (Regions de tipus II (projectables–y))**.** S'anomenen així les regions $\mathcal{S}$ limitades per

$$c \leq y \leq d, \quad \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)$$

on $\psi_1(y)$ i $\psi_2(y)$ són contínues a $[c, d]$.

El que caracteritza aquestes regions és el fet que els segments horitzontals, d'extrems $\psi_1(y)$ i $\psi_2(y)$, (amb $c \leq y \leq d$) estan totalment dins $\mathcal{S}$. ■

Teorema 7.8. *Si $f(x, y)$ és contínua a $\mathcal{S}$ (de tipus II) $\Rightarrow$*

$$\iint_{\mathcal{S}} f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_c^d \left[\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y)\,\mathrm{d}x\right] \mathrm{d}y$$

□

Integrals dobles en altres regions

- Una regió $\mathcal{S}$ pot ser, alhora, de tipus I i II (e.g., si $\mathcal{S}$ és convex). Llavors l'ordre d'integració és irrellevant (però la dificultat pot ser diferent).
- També pot succeir que una regió $\mathcal{S}$ no sigui de tipus I ni del II. No obstant, en la majoria de casos pràctics, $\mathcal{S}$ es pot descompondre em subregions de tipus I i/o II. La integració total és, llavors, la suma de les integracions sobre cadascuna d'aquestes subregions.

INTEGRALS EN MÉS DIMENSIONS

Hem vist que les integrals dobles es poden calcular per integració successiva de les variables (en l'ordre adient) quan la regió és de tipus I o de tipus II.

Això es pot generalitzar a integrals n-múltiples. Vegem-ho en el cas de les integrals triples. En aquest cas tindrem tres tipus de regions similars a les de tipus II i I de les integrals dobles.

Definició 7.9 (Regions projectables–xy)**.** S'anomenen així les regions d'integració $\mathcal{S} \subseteq \mathbb{R}^3$, definides per

$$(x, y) \in Q, \quad \phi_1(x, y) \le z \le \phi_2(x, y)$$

on Q és una regió del pla $x - y$, i $\phi_1(x, y)$ i $\phi_2(x, y)$ són contínues a Q.

El que caracteritza aquestes regions és el fet que els segments verticals (paral·lels a l'eix z) d'extrems $\phi_1(x, y)$ i $\phi_2(x, y)$ estan totalment continguts dins $\mathcal{S}$, $\forall(x, y) \in Q$. Q és la projecció de $\mathcal{S}$ sobre el pla $x - y$. Argumentant com en el cas de les integrals dobles, tenim

$$\iiint_{\mathcal{S}} f(x, y, z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iint_Q \left[\int_{\phi_1(x,y)}^{\phi_2(x,y)} f(x, y, z)\,\mathrm{d}z\right] \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \tag{7.12}$$

■

De forma similar, es defineixen a $\mathbb{R}^3$ regions projectables–yz i projectables–zx. Cal notar que si $\mathcal{S}$ és convex, és simultàniament dels tres tipus i les seves projeccions sobre els plans $x - y$, $y - z$ i $z - x$ són simultàniament de tipus I i II. En aquest cas podem integrar successivament cada variable en qualsevol ordre, amb els límits d'integració adients.

7.3 TEOREMA DE GREEN

Teorema 7.9 (de Green)**.** *Siguin*

i) $P(x, y)$ *i* $Q(x, y)$ *dos camps escalars de classe* C^1_D, *on* $D \subseteq \mathbb{R}^2$.

ii) $\mathcal{C}$ *una corba* $\vec{x}(t)$ *de classe* $C^1_{[a,b]}$ *a trossos, tancada (i.e.,* $\vec{x}(a) = \vec{x}(b)$*) i simple (i.e., no es talla a si mateixa:* $\vec{x}(t) \neq \vec{x}(t')$, *si* $t \neq t'$*).*

iii) $\mathcal{S}$ *la regió formada per* $\mathcal{C}$ *i el seu interior.*

Llavors, si $\mathcal{S}$ *és simultàniament de tipus I i tipus II, es compleix*

$$\iint_{\mathcal{S}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \oint_{\mathcal{C}} (P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y) \tag{7.13}$$

□

Notem que la igualtat anterior és equivalent a les igualtats

$$\iint_{\mathcal{S}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \oint_{\mathcal{C}} Q\,\mathrm{d}y \quad \text{i} \quad \iint_{\mathcal{S}} \left(-\frac{\partial P}{\partial y}\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \oint_{\mathcal{C}} P\,\mathrm{d}x \tag{7.14}$$

El teorema de Green és específic de $\mathbb{R}^2$. Relaciona, sota determinades condicions, una integral doble sobre una regió de $\mathbb{R}^2$ amb una integral de línia sobre el contorn d'aquesta regió. Però és. de fet, un cas particular d'un teorema més general que relaciona integrals sobre regions n-dimensionals amb integrals sobre les fronteres $(n-1)$-dimensionals d'aquestes regions. A $\mathbb{R}^3$ hi ha dos casos particulars més d'aquest teorema general: el teorema d'Stokes i el teorema de Gauss (respectivament, teoremes 8.1 i 8.2).

Generalitzacions

- Tot i que el teorema de Green requereix que $\mathcal{S}$ sigui simultàniament de tipus I i II, també es compleix encara que no es compleixi aquest requisit si es pot descompondre en un nombre finit de subregions que siguin simultàniament de tipus I i II, ja que al sumar les contribucions de cadascuna d'aquestes subregions, les integrals de línies internes es cancel·len.
- Si $\mathcal{S}$ té un nombre finit de «forats» el teorema de Green també es compleix, amb integrals de línia sobre els contorns fetes sobre el sentit contrari. En definitiva, el contorn es recorre de forma que l'interior de $\mathcal{S}$ quedi sempre a l'esquerra.

7.4 Canvi de variables en una integral múltiple

Teorema 7.10 (del canvi de variables)**.** *Si es dóna que*

i) $f(\vec{x})$ *és una funció* $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$*, contínua a* $\mathcal{S} \subseteq \mathbb{R}^n$.

ii) $\vec{x} = \vec{g}(\vec{t})$ *és un canvi de variables* $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$*, de classe* C^1_T*, on* $\mathcal{S} = \vec{g}(T)$.

iii) $\left(\dfrac{\partial(g_1, \dots, g_n)}{\partial(t_1, \dots, t_n)}\right)_T \neq 0.$

Llavors, es compleix

$$\iint \overset{(n)}{\cdots} \int_{\mathcal{S}} f(\vec{x})\,\mathrm{d}x_1 \dots \mathrm{d}x_n = \iint \overset{(n)}{\cdots} \int_{T} f(\vec{g}(\vec{t})) \left|\frac{\partial(g_1, \dots, g_n)}{\partial(t_1, \dots, t_n)}\right| \mathrm{d}t_1 \dots \mathrm{d}t_n \tag{7.15}$$

□

8 Integrals de superfície

En aquest capítol estendrem el concepte d'integral doble quan la regió no és de $\mathbb{R}^2$ sinó que és una superfície de $\mathbb{R}^3$. Aquesta extensió ens porta al concepte d'integral de superfície.

En molts sentits, les integrals de superfície són, respecte les integrals dobles, el que les integrals de línia són respecte les integrals simples.

8.1 Superfícies a $\mathbb{R}^3$

En general, una superfície de $\mathbb{R}^3$ es pot descriure de tres formes:

- Implícita: conjunt de punts que satisfan l'equació $F(x, y, z) = 0$, on F és una funció contínua.
- Explícita: quan és possible aïllar una de les variables de l'equació anterior, per exemple $z = f(x, y)$.
- Paramètrica: expressant les coordenades dels punts com funcions contínues de dos paràmetres

$$\vec{r}(u, v) = (X(u, v), Y(u, v), Z(u, v))$$

Les funcions $X(u, v)$, $Y(u, v)$ i $Z(u, v)$ generen els punts de la superfície quan els paràmetres u i v es mouen en una regió T de $\mathbb{R}^2$:

$$\mathcal{S} \equiv \vec{r}(T)$$

Direm que la superfície $\mathcal{S}$ és simple si l'aplicació $T \to \mathcal{S}$ és un a un.

Notem no que forma explícita és un cas particular de la paramètrica en què els paràmetres són x i y.

$$\vec{r}(x, y) = (x, y, f(x, y))$$

Producte vectorial fonamental

Definició 8.1. Anomenem producte vectorial fonamental de la superfície $\mathcal{S}$ al vector

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \equiv \left(\frac{\partial(Y, Z)}{\partial(u, v)}, \frac{\partial(Z, X)}{\partial(u, v)}, \frac{\partial(X, Y)}{\partial(u, v)} \right) \tag{8.1}$$

El producte vectorial fonamental és ortogonal al pla tangent a $\mathcal{S}$ en cada punt. Quan ens movem dins la regió paramètrica T, l'orientació del pla tangent a $\mathcal{S}$ varia d'un punt a una altra. Aquesta variació és contínua si les funcions $X(u, v)$, $Y(u, v)$ i $Z(u, v)$ són de classe C^1_T. ■

Si expressem $\mathcal{S}$ en forma explícita, $\vec{r}(x, y) = (x, y, f(x, y))$, el producte vectorial fonamental s'expressa

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = \left(-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1 \right)$$

Com veurem, a les integrals de superfície, el producte vectorial fonamental juga un paper similar al del factor $\vec{r}'(t)$ a les integrals de línia.

Àrea d'una superfície $\mathcal{S}$

Definició 8.2. El mòdul del producte vectorial fonamental és el factor de proporcionalitat entre les àrees del pla $u - v$ i les corresponents àrees de la superfície $\mathcal{S}$. Llavors, si $\mathcal{S}$ és de classe C^1, definim l'àrea de $\mathcal{S}$

$$a(\mathcal{S}) \equiv \iint_T \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right\| \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v = \iint_{\mathcal{S}} \mathrm{d}\mathcal{S} \tag{8.2}$$

■

Si expressem $\mathcal{S}$ en forma explícita, $z = f(x, y)$, la igualtat anterior esdevé

$$a(\mathcal{S}) = \iint_T \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$$

8.2 Integrals sobre una superfície $\mathcal{S}$ de $\mathbb{R}^3$

Integral d'un camp escalar de $\mathbb{R}^3$ sobre una superfície $\mathcal{S}$

Definició 8.3 (Integral de f sobre $\mathcal{S}$)**.** Sigui

- $f(x, y, z)$ un camp escalar de $\mathbb{R}^3$, continu a trossos.
- $\mathcal{S}$ una superfície regular de classe C^1, d'equacions paramètriques $x = X(u, v)$, $y = Y(u, v)$ i $z = Z(u, v)$.

Llavors, tenim

$$\iint_{\mathcal{S}} f \, \mathrm{d}\mathcal{S} \equiv \iint_T f(X(u, v), Y(u, v), Z(u, v)) \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right\| \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v \tag{8.3}$$

■

En particular l'àrea de $\mathcal{S}$ és la integral sobre $\mathcal{S}$ de la funció constant $f(x, y, z) \equiv 1$.

Integral d'un camp vectorial $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sobre una superfície $\mathcal{S}$

Definició 8.4 (Integral de $\vec{f}$ sobre $\mathcal{S}$)**.** Sigui

- $\vec{f}(x,y,z) = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$ un camp vectorial $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, continu a trossos.
- $\mathcal{S}$ una superfície regular de classe C^1, d'equacions paramètriques $x = X(u,v)$, $y = Y(u,v)$ i $z = Z(u,v)$.

Llavors, tenim

$$\iint_{\mathcal{S}} \vec{f} \cdot \mathrm{d}\vec{\mathcal{S}} \equiv \iint_{\mathcal{S}} (P, Q, R) \cdot (\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z, \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x, \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}z) \tag{8.4}$$

■

Invariància sota reparametritzacions

Sigui $\mathcal{S}$ és una superfície regular $\vec{r}(u,v) = (X(u,v), Y(u,v), Z(u,v))$, de classe C^1_T), i fem el canvi de paràmetres

$$\begin{cases} u & = U(s,t) \\ v & = V(s,t) \end{cases} \quad \text{amb } \frac{\partial(U,V)}{\partial(s,t)} \neq 0$$

on U i V són funcions de classe C^1_W que generen els punts (u,v) de T quan (s,t) es mou a W.

Tenim doncs, dues parametritzacions de la superfície $\mathcal{S}$

$$\vec{r} = \vec{r}(u,v) \leftrightarrow \vec{r}\vec{R}(s,t) = \vec{r}(U(s,t), V(s,t))$$

Es pot veure que les reparametritzacions de classe C^1 i jacobià no nul no afecten les integrals de superfície:

$$\begin{aligned} \iint_{\mathcal{S}} f \, \mathrm{d}\mathcal{S} &= \iint_T f(\vec{r}(u,v)) \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right\| \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v \\ &= \iint_W f(\vec{R}(s,t)) \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right\| \left| \frac{\partial(U,V)}{\partial(s,t)} \right| \mathrm{d}s \, \mathrm{d}t \\ &= \iint_W f(\vec{R}(s,t)) \left\| \frac{\partial \vec{R}}{\partial s} \times \frac{\partial \vec{R}}{\partial t} \right\| \mathrm{d}s \, \mathrm{d}t \end{aligned} \tag{8.5}$$

En el cas de $\iint_{\mathcal{S}} \vec{f} \cdot \mathrm{d}\vec{\mathcal{S}}$ el raonament és similar.

8.3 Els teoremes d'Stokes i de Gauss

Es tracta de dos teoremes de $\mathbb{R}^3$, anàlegs al teorema de Green de $\mathbb{R}^2$. El d'Stokes relaciona una integral de superfície amb una integral de línia sobre el contorn d'aquesta superfície. El de Gauss relaciona una integral triple sobre una regió de $\mathbb{R}^3$ amb una integral de superfície sobre la frontera d'aquesta regió.

Teorema 8.1 (d'Stokes). *Si*

i) $\mathcal{S}$ *és una superfície regular de* $\mathbb{R}^3$ *d'equacions paramètriques* $\vec{r}(u,v)$, *on* $(u,v) \in T$.

ii) La regió T *del pla* $u-v$ *està limitada per una corba* Γ *tancada, simple, i de classe* C^1 *a trossos.*

iii) $\vec{r}(u,v) = (X(u,v), Y(u,v), Z(u,v))$ *és de classe* C^2_D, *on* D *és un obert i conté* $T \cup \Gamma$.

iv) $\mathcal{C}$ *és la imatge per* $\vec{r}(u,v)$ *de* Γ.

v) $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$ *i* $R(x,y,z)$ *són tres camps escalars de classe* $C^1_{\mathcal{S}}$

Llavors, tenim

$$\begin{gathered}\iint_{\mathcal{S}} \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial Q}\right) \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y\right] \\ = \oint_{\mathcal{C}} [P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + R\,\mathrm{d}z]\end{gathered} \tag{8.6}$$

□

Introduint el camp vectorial $\vec{f}(\vec{x}) \equiv (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)$, podem expressar el teorema d'Stokes de la forma següent:

$$\iint_{\mathcal{S}} (\vec{\nabla} \times \vec{f}) \cdot \mathrm{d}\vec{\mathcal{S}} = \oint_{\mathcal{C}} \vec{f}(\vec{x}) \cdot \mathrm{d}\vec{x} \tag{8.7}$$

Teorema 8.2 (de Gauss). *Si*

1. $\mathcal{V}$ *és una regió sòlida (l'equivalent en 3 dimensions de regió connexa).*
2. *La regió* $\mathcal{V}$ *està limitada per una superfície* $\mathcal{S}$ *tancada, regular de classe* C^1 *a trossos, i «orientable» (i.e., que té dues «cares», una interior i una exterior).*
3. $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$ *i* $R(x,y,z)$ *són tres camps escalars de classe* C^1_D, *on* D *és un obert que conté* $\mathcal{V} \cup \mathcal{S}$.

Llavors, tenim

$$\begin{gathered}\iiint_{\mathcal{V}} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \\ = \iint_{\mathcal{S}} [P\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + Q\,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + R\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y]\end{gathered} \tag{8.8}$$

□

Introduint el camp vectorial $\vec{f}(\vec{x}) \equiv (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)$, i la notació $\mathrm{d}\mathcal{V} = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, i recordant que $\mathrm{d}\vec{\mathcal{S}} = (\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z, \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x, \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y)$, podem expressar el teorema de Gauss de la forma següent:

$$\iiint_{\mathcal{V}} (\vec{\nabla} \cdot \vec{f})\,\mathrm{d}\mathcal{V} = \iint_{\mathcal{S}} \vec{f} \cdot \mathrm{d}\vec{\mathcal{S}} \tag{8.9}$$