Universitat Autònoma de Barcelona, Departament de Física

Àlgebra lineal

Alfredo Hernández Cavieres

2012-2013

Índex

1 Teoria de conjunts

1.1 Relacions binàries $\mathcal{R}$

$\mathcal{R}$ en $A \subseteq A^2$, $\quad (a, b) \in \mathcal{R} \subseteq A^2 = a\mathcal{R}b$.

Propietats

- Reflexiva: $a\mathcal{R}b, \quad \forall a \in A$.
- Simètrica: $a\mathcal{R}b \Rightarrow b\mathcal{R}a$.
- Antisimètrica: $a\mathcal{R}b$ i $b\mathcal{R}a \Rightarrow a = b$.
- Transitiva: $a\mathcal{R}b$ i $b\mathcal{R}c \Rightarrow a\mathcal{R}c$.

Relacions d'ordre $\leq$

- Reflexiva: $a \leq b, \quad \forall a \in A$.
- Antisimètrica: $a \leq b$ i $b \leq a \Rightarrow a = b$.
- Transitiva: $a \leq b$ i $b \leq c \Rightarrow a \leq c$.

Relacions d'equivalència $\sim$

- Reflexiva: $a \sim b, \quad \forall a \in A$.
- Simètrica: $a \sim b \Rightarrow b \sim a$.
- Transitiva: $a \sim b$ i $b \sim c \Rightarrow a \sim c$.

Classe d'equivalència de a $\quad [a]$ és el conjunt d'elements $\in A$ relacionats amb a.

$$[a] \equiv \{b \in a \mid b \sim a\} \tag{1.1}$$

Conjunt quocient de A $\quad A/\sim$ és el conjunt de totes les classes (disjuntes, per definició) de A.

$$a \in A, \ [a] \subseteq A, \text{ però } [a] \in A/\sim \tag{1.2}$$

1.2 Principi d'inducció

El principi d'inducció diu que si $S \subseteq \mathbb{N}$ tal que

i) $0 \in S$ (a vegades, però, es treballa amb S^*).

ii) $n \in S \Rightarrow n + 1 \in S$.

$\Rightarrow S = \mathbb{N}$, demostrant així que una propietat $P(n)$ que és certa $\forall n \in S$, ho serà també $\forall n \in \mathbb{N}$.

1.3 Aplicacions

Una aplicació de A a B és la tripleta (A, B, f) on $f \subseteq A \times B$ que compleix:

i) $\forall a \in A, \quad \exists b \in B$ tal que $(a, b) \in f$.

ii) $(a, b), (a', b') \in f \Rightarrow b = b'$.

Per denotar que (A, B, f) és aplicació, s'escriu $f : A \to B$.

Tipus d'aplicacions

- Injectiva: $\hookrightarrow$ o ι.
  $\iota \Leftrightarrow f(a) = f(a') \Rightarrow a = a'$.
- Exhaustiva: $\twoheadrightarrow$ o π.
  $\pi \Leftrightarrow \forall b \in B, \exists a \in A$ tal que $f(a) = b$.
- Bijectiva: $\leftrightarrow$ o $\tilde{f}$.
  $\tilde{f} \Leftrightarrow f$ és ι i π alhora.

Descomposició canònica d'una aplicació

Tota aplicació $f : A \to B$ pot ésser expressada com a:

$$f = \iota \circ \tilde{f} \circ \pi = \iota(\tilde{f}(\pi(A))) \subseteq B \tag{1.3}$$

Exemple 1.1.

$$A \to B = A \twoheadrightarrow A/\sim \leftrightarrow f(A) \hookrightarrow B$$

▲

Inclusió canònica

Sigui $B \subseteq A$,
$\iota : B \to A$ és definida per $\iota(x), \quad \forall b \in B$.

Aplicació identitat

És un cas concret de $\iota(x)$.
$id_A : A \to A$ és definida per $\iota(x), \quad \forall a \in A$.

Imatge i antiimatge

Sigui $f : A \to B$,
Imatge de A: $\mathrm{im}(f) = f(A) \equiv \{f(x) \mid x \in A\}$
Antiimatge de B: $f^{-1}(B) \equiv \{x \in A \mid f(x) \in B\}$

Composició d'aplicacions

Siguin $f : A \to B$ i $g : B \to C$,
$g \circ f : A \to C$, on $(g \circ f)(x) = g(f(x)), \quad \forall x \in A.$

Inversa d'una funció bijectiva

Sigui $\tilde{f} : A \to B,\ A \neq 0$ i $B \neq 0$,
$\exists \tilde{g} : A \to B$ tal que $\tilde{g} \circ \tilde{f} = id_A$ i $\tilde{f} \circ \tilde{g} = id_B$

2 Grups

2.1 Grups

Un grup és un conjunt G amb una operació $*$ qualsevol.

$$(G,*), \text{ on } \quad \begin{array}{rccc} *: & G\times G & \to & G \\ & (a,b) & \mapsto & a*b \end{array} \tag{2.1}$$

Propietats

- Associativa: $(a*b)*c = a*(b*c), \quad \forall a,b,c \in G$.
- Element neutre: $\exists e$ tal que $a*e = e*a = a, \quad \forall a \in G$.
- Element simètric: $\forall a \in G, \quad \exists a'$ tal que $a*a' = a'*a = e$.
- (Commutativa): Si $a*b = b*a, \quad \forall a \in G \Rightarrow G$ és un grup abelià o commutatiu.

Notacions

- Additiva:

  $a*b = a+b, \quad e = 0$ (zero de G), $\quad a' = -a$ (oposat de a).
- Multiplicativa:

  $a*b = ab, \quad e = 1_G$ (unitat de G), $\quad a' = a^{-1}$ (invers de a).

2.2 Subgrups

Sigui $H \subseteq G$. H és un subanell de $G \Leftrightarrow$

i) $ab \in H, \quad \forall a,b \in H$.

ii) $a^{-1} \in H, \quad \forall a \in H$.

iii) $1_G \in S$.

O equivalentment:

i) $H \neq \varnothing$.

ii) $ab^{-1} \in H, \quad \forall a,b \in H$.

2.3 Construcció de grups

- Producte cartesià:

  Siguin $(G_1,*)$ i $(G_2,\perp)$ grups,

  $G_1 \times G_2 = (a,b)(x,y) = (a*x, b\perp y)$ és grup.

- Intersecció de grups:

  $H_1, H_2 \subseteq G \Rightarrow H_1 \cap H_2 \subseteq G.$
- Subgrup generat per un subconjunt:

  $S \subseteq G \Rightarrow \langle S \rangle \equiv$ mínim subgrup que conté S.

  e.g., en $(\mathbb{Z}, +)$, $\quad \langle 3 \rangle = 3\mathbb{Z}$.

2.4 Grups cíclics i grups finits

Grups cíclics

$(G, \cdot)$ és un grup cíclic si $\exists a \in G$ tal que $\langle a \rangle = G$

$$\langle a \rangle \equiv \{a^n \mid n \in \mathbb{Z}\} = G \tag{2.2}$$

Exemple 2.1.

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \langle [1] \rangle$$

▲

Grups finits

Sigui $(G, \cdot)$ un grup finit i $a \in G$,

i) $\{a_n\} = a, a^2, a^3, \ldots, a^m, \ldots$

ii) $\exists n \geq m,\ m, n \in \mathbb{N}$ tal que $a^n = a^m \Rightarrow a^m(a^m)^{-1} = a^n(a^m)^{-1} \Rightarrow a^{n-m} = 1_G$.

Ordre de grups i d'elements d'un grup

- L'ordre de $G \equiv \#G$: nombre d'elements de G.
- L'ordre de $a \in G \equiv \text{ord}(a)$ és el mínim $m \in \mathbb{N}$ tal que $a^m = 1_G \Rightarrow \text{ord}(a) = m \Rightarrow \langle a \rangle = \{a, a^2, a^3, \ldots a^{m-2}, a^{m-1}, a^m = 1_G\}$. $\text{ord}(a) =$ mínim b tal que $\text{mcm}(a, b) = \dot{n} = 1_G, \quad \forall a \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
- $\text{ord}(a) = \# \langle a \rangle$.

Teorema de Lagrange

Sigui $(G, \cdot)$ un grup finit,

$$\#G = n \Rightarrow a^n = 1_G, \quad \forall a \in G \Rightarrow \# \langle S \rangle \leq n, \quad \forall a \in G \tag{2.3}$$

Teorema d'estructura dels grups cíclics

Sigui $(G, \cdot)$ un grup cíclic,

$$\#G \text{ infinit } \Rightarrow (G, \cdot) \leftrightarrow (\mathbb{Z}, +) \tag{2.4}$$

$$\#G \text{ finit } \Rightarrow (G, \cdot) \leftrightarrow (\mathbb{Z}/n, +) \tag{2.5}$$

2.5 Morfismes de grups

Siguin G_1 i G_2 grups. $f : G_1 \to G_2$ és morfisme de grups o homomorfisme $\Leftrightarrow$

i) $f(xy) = f(x)f(y)$.

Tipus d'homomorfismes

- ι: monomorfisme.
- π: epimorfisme.
- $\tilde{f}$: isomorfisme.

Si f és isomorfisme, f^{-1} és morfisme de grups.

2.6 Nucli (ker) i imatge (im) d'un grup

Sigui $f : G \to G'$,

$$\ker(f) \equiv \{x \in G \mid f(x) = 1_G\} \tag{2.6}$$

$$\mathrm{im}(f) \equiv \{y \in G' \mid f(x) = y\} \equiv f(G) \subseteq G' \tag{2.7}$$

Observació:

- Monomorfisme $\Leftrightarrow \ker(f) = \{1_G\}$.
- Epimorfisme $\Leftrightarrow \mathrm{im}(f) = G'$.

3 Anells

3.1 Anells

Un anell és un conjunt R amb dues operacions: $(R, +, \cdot)$.

$$\begin{array}{rccc} +: & R \times R & \to & R \\ & (a,b) & \mapsto & a+b \end{array} \tag{3.1}$$

$$\begin{array}{rccc} \cdot: & R \times R & \to & R \\ & (a,b) & \mapsto & ab \end{array} \tag{3.2}$$

Propietats

- $(R, +)$ és un grup abelià.
- Associativa del producte: $(ab)c = a(bc), \quad \forall a, b, c \in R$.
- Doble distributiva: $a(b+c) = ab + ac,\ (b+c)a = ba + ca, \quad \forall a, b, c \in R$.
- Si el producte és commutatiu⇔R és un anell commutatiu.

3.2 Subanells

Sigui $S \subseteq R$. S és un subanell de $R \Leftrightarrow$

i) S és un subanell de $(R, +)$.
ii) $ab \in S, \quad \forall a, b \in S$.
iii) $1_R \in S$.

3.3 Anell de matrius

$M(m, n, R) = M_{m \times n}(R) \equiv$ matriu de m files i n columnes sobre l'anell R. Si la matriu és quadrada ($M(n, n, R) = M_{n \times n}(R)$), s'escriu $M(n, R) = M_n(R)$. Si pel context se sobreentén l'anell sobre el qual es treballa, es pot escriure $M(m, n) = M_{m \times n}$.

Operacions

- Suma (per a matrius del mateix tipus).
  $A + B = (a_{ij} + b_{ij}) \quad e = 0$.
- Producte per escalars.
  $kA = k(a_{ij})$.
- Producte.
  $M(m, l) \times M(l, n) = M(m, n), \quad$ en $M(n),\ \exists e,\ e = I(n)$.
  $AB = C \Rightarrow A_i B = C_i$ i $AB^j = C^j$.

3.4 Elements invertibles d'un anell

$a \in R$ és invertible$\Leftrightarrow \exists b$ tal que $ab = ba = 1_R \Rightarrow b = a^{-1}$.

Grup d'elements invertibles

$U(R) \equiv \{x \mid x \text{ és invertible}\}$.

Divisors de zero

$a \neq 0$ i $b \neq 0$ són divisors de zero si $ab = 0$ o $ba = 0$.

Domini d'integritat i cos

Un anell R sense divisors de zero és un domini d'integritat. Un cos K (cas particular de domini d'integritat) és un anell commutatiu no nul on tot element $a \neq 0$ és invertible.

Grup lineal de matrius

$GL(n, K) \equiv \{M(n, K) \mid M \text{ és invertible}\}$

4 El cos dels complexos

4.1 Els nombres complexos

Els nombres complexos són expressions de la forma:

$$a + b\imath \in \mathbb{C}, \quad a, b \in \mathbb{R}, \quad \imath^2 = -1 \tag{4.1}$$

Definicions

- El conjugat d'un nombre complex $z = a + b\imath$ és $a - b\imath$, i es denota per $\bar{z}$.
- La norma o mòdul d'un nombre complex $z = a + b\imath$ és $\sqrt{a^2 + b^2}$, i es denota per $|z|$.
- L'argument d'un nombre complex $z = a + b\imath$ és l'angle que forma z amb la recta dels reals al pla dels complexos, i es denota per $\arg(z) = \theta$.

Operacions

- Suma: $(a + b\imath) + (c + d\imath) = (a + c) + (b + d)\imath$.
- Producte: $(a + b\imath)(c + d\imath) = (ac - bd) + (ad + bc)\imath$.

$\mathbb{C}$ és un abelià amb la suma i el producte.

4.2 Coordenades polars

$$\text{Fórmula d'Euler: } e^{\imath\theta} = \cos\theta + \imath\sin\theta \tag{4.2}$$

Tot $z \in \mathbb{C}$ por ésser expressat com a

$$z = |z|e^{\imath\theta} \tag{4.3}$$

Aleshores, el producte de complexos en forma polar compleix:

i) $|zw| = |z||w|$.

ii) $\arg(zw) = \arg(z) + \arg(w)$.

4.3 Arrels n-èsimes d'un complex

Tot nombre complex té n arrels n-èsimes.

$$w = z_k^n \Rightarrow z_k = \sqrt[n]{|w|}\exp\left[\imath\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2\pi k}{n}\right)\right], \quad 0 \le k < n \tag{4.4}$$

4.4 Els 16 arguments bonics

Angles de la forma $\frac{1}{4}k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

$$\pm\frac{\sqrt{2}}{2} \pm \frac{\sqrt{2}}{2}\imath \tag{4.5}$$

- Ambdues components són $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}R$.

Angles de la forma $\frac{1}{6}k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

$$\pm\frac{\sqrt{3}}{2} \pm \frac{1}{2}\imath \quad \text{o} \quad \pm\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \tag{4.6}$$

- La component gran és $\pm\frac{\sqrt{3}}{2}R$.
- La component petita és $\pm\frac{1}{2}R$.

4.5 Conceptes trigonomètrics

La funció arctangent

Sigui $z = a + b\imath$, $\Rightarrow \tan\theta = \frac{a}{b}$,

$$\theta = \begin{cases} \arctan\left(\frac{a}{b}\right), & \text{si } a > 0 \\ \frac{\pi}{2}, & \text{si } a = 0,\ b > 0 \\ -\frac{\pi}{2}, & \text{si } a = 0,\ b < 0 \\ \arctan\left(\frac{a}{b}\right) + \pi, & \text{si } a < 0 \end{cases} \tag{4.7}$$

Identitats trigonomètriques

$$\begin{gathered} \sin^2 x + \cos^2 x = 1 \\ \sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y \\ \cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y \end{gathered} \tag{4.8}$$

5 Anell de polinomis sobre un cos commutatiu

5.1 L'anell dels polinomis

Sigui $a(x) \in K[x] = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_i x^i + \cdots + a_1 x + a_0,\ (n \in \mathbb{N},\ a_i \in K)$.

- a_i són els coefincients del polinomi, essent a_n el coeficient principal.
- i són els graus del polinomi, essent n el grau màxim del polinomi. S'expressa com a $\mathrm{gr}(a(x)) = n$.

Definicions

- Monomi: polinomi d'un sol element.
- Polinomi mònic: polinomi amb el coeficient principal = 1.

Operacions

- Suma:
  $\mathrm{gr}(a(x) + b(x)) \leq \max\{\mathrm{gr}(a(x)), \mathrm{gr}(b(x))\}$
- Producte:
  $\mathrm{gr}(a(x)b(x)) = \mathrm{gr}(a(x)) + \mathrm{gr}(b(x))$
- Divisió entera:
  Siguin $a(x), b(x) \in K[x],\ (b(x) \neq 0),\quad \exists$ dos úncs $q(x)$ i $r(x)$ tals que:
  i) $a(x) = q(x)b(x) + r(x)$.
  ii) $\mathrm{gr}(r(x)) < \mathrm{gr}(b(x))$.

5.2 Arrels d'un polinomi

$r \in K$ és una arrel de $a(x) \Leftrightarrow a(r) = 0$

Teorema de la resta

$u \in K$ és una arrel de $a(x) \Leftrightarrow a(x)$ és divisible, exactament, per $x - u$.

$$a(x) = q(x)(x-u) + a(u), \quad a(u) = r(x) = 0 \tag{5.1}$$

5.3 Divisibilitat a un anell

Siguin $a, b \in R$,

$D(a) \equiv \{d \in R \mid a \in dR\}, \quad D(a,b) \equiv D(a) \cap D(b) = \{d \in R \mid d|a \text{ i } d|b\}$

Lema d'Euclides

$$a = qb + r, \begin{cases} R = \mathbb{Z} \Rightarrow 0 \leq r < |b| \\ R = K[x] \Rightarrow \mathrm{gr}(r) < \mathrm{gr}(b) \end{cases} \quad \Rightarrow \tag{5.2}$$

i) $D(a, b) = D(b, r)$.
ii) $aR + bR = bR + rR$.

Algoritme

$$\begin{aligned} a &= bq_0 + r_0 \\ b &= r_0 q_1 + r_1 \\ &\dots \\ r_{n-2} &= r_{n-1} q_n + (r_n = 0) \end{aligned} \tag{5.3}$$

Per força, després d'un nombre finit n d'iteracions, arribem a tenir $r_n = 0 \Rightarrow$ (pel Lema d'Euclides) $D(a, b) = D(r_{n-1}) \Rightarrow aR + bR = r_{n-1}R \Rightarrow$

i) $\mathrm{mcd}(a, b) = r_{n-1}$
ii) $\mathrm{mcm}(a, b) = \frac{ab}{\mathrm{mcd}(a,b)}$

Tant mcd i mcm són únics i de la següent forma: $\begin{cases} < 0 \text{ a } R = \mathbb{Z} \\ \text{mònic a } R = K[x] \end{cases}$

Identitat de Bezout

$$aR + bR = r_{n-1}R \Rightarrow a\alpha + b\beta = r_{n-1} \tag{5.4}$$

Exemple 5.1.

$$a = bq_0 + r_0,\ b = r_0 q_1 + r_1,\ r_0 = r_1 q_2 + 0 \Rightarrow a\alpha + b\beta = r_1$$

▲

a) Mètode 1.

$$r_1 = b - r_0 q_1 = b - q_1(a - bq_0) = a \underbrace{(-q_1)}_{\alpha} + b \underbrace{(1 + q_0 q_1)}_{\beta}$$

b) Mètode 2.

$$\begin{pmatrix} b \\ r_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -q_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} r_0 \\ r_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -q_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ r_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -q_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -q_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} r_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -q_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_0 \\ r_1 \end{pmatrix} = \dots = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ * & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

5.4 Factorització

Tot $a(x) \in \mathbb{K}[x]$ és factoritzable en polinomis irreductibles $b(x) \in \mathbb{K}[x]$. La factorització d'un polinomi pot variar segons el cos K sobre el qual s'estengui l'anell de polinomis.

Polinomis irreductibles

- Els polinomis irreductibles a $\mathbb{Q}[x]$ poden ésser de qualsevol grau possitiu.
- Els polinomis irreductibles a $\mathbb{R}[x]$ són els de garu 1 i els de grau 2 de la forma $ax^2 + bx + c$ amb $\Delta < 0$.
- Els polinomis irreductibles a $\mathbb{C}[x]$ són els de grau 1.

Teorema fonamental de l'àlgebra

Tot $a(x) \in \mathbb{C}[x]$ de $\text{gr}(a(x)) = n > 0$ té exactament n arrels complexes $\Rightarrow a(x) = \lambda(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \ldots (x - \alpha_{n-1})(x - \alpha_n)$.

6 Matrius

6.1 Transformacions elementals

Tipus de transformacions elementals

- Intercanviar les files i i j: $F_i \leftrightarrow F_j$.
- Multiplicar una fila i per un escalar μ: $F_i \mapsto \mu F_i$.
- Sumar a la fila i la fila j multiplicada per μ: $F_i \mapsto F_i + \mu F_j$.

El mateix és aplicable per a columnes.

Matrius elementals

Si apliquem una transformació elemental a la matriu identitat $I(n)$, obtenim una matriu elemental $E(n)$ que compleix:

i) E és invertible.

ii) E és un operador universal.

Sigui $A \in M(m, n, K)$, EA coincideix amb aplicar la mateixa transformació elemental a A.

Si apliquem una sèrie finita de transformacions $(I \mapsto P)$, aleshores:

i) P és invertible.

ii) P és un operador universal.

PA coincideix amb aplicar les mateixes transformacions elementals a A amb la propietat que no es perd l'informació que proporciona la matriu A: $PA = A' \Rightarrow A = P^{-1}A'$.

El mateix és aplicable per a columnes, amb la diferència que aplicar les transformacions elementals coincideix amb multiplicar per la dreta $(AQ = A')$.

6.2 Matriu de Gauss–Jordan

Definicions prèvies

- El pivot d'una fila $\neq 0$ és el primer element $\neq 0$ d'esquerra a dreta.
- Una matriu és esglaonada si les files zero estan a la part inferior de la matriu i si els pivots estan en columnes que creixen estrictament.

Una matriu de Gauss–Jordan és una matriu esglaonada que compleix:

i) Els pivots són tots 1.

ii) A cada columna dels pivots, tots elements són 0 excepte el pivot.

Tota matriu A pot convertir-se en una de Gauss–Jordan aplicant una sèrie adequada de transformacions elementals, i aquesta $(\mathrm{GJ}(A))$ és única.

Algoritme de Gauss–Jordan

Fase de Gauss (esglaonar):

i) Buscar col·lumnes nul·les i posar-les al principi de la matriu.
ii) Buscar un pivot $\neq 0$ i canviar files tal que el pivot de la matriu sigui $\neq 0$.
iii) Transformar la columna tal que tot el que hi ha a baix del pivot sigui 0.
iv) Reiterar amb la resta de columnes no nul·les.

Fase de Jordan (reduir):

i) Començant pel pivot més avançat, transformar tots els pivots en 1.
ii) Transformar tots els elements d'una columna en 0.

6.3 Criteri d'invertibilitat

Sigui $A \in M(n, K)$, les condicions següents són equivalents:

i) A és invertible.
ii) A és producte de matrius elementals.
iii) $\mathrm{GJ}(A) = I(n)$.

Algoritme d'inversa d'una matriu

$$\begin{gathered} PA = I \Rightarrow PI = A^{-1} \\ (A|I) \mapsto (I|A^{-1}) \end{gathered} \tag{6.1}$$

6.4 Relació d'equivalència

Siguin $A, B \in M(m, n, K)$, les condicions següents són equivalents:

i) $A \sim B$.
ii) $\exists P \in GL(n, K)$ tal que $PA = B$.
iii) $\mathrm{GJ}(A) = \mathrm{GJ}(B)$.

$\Rightarrow M(m, n, K)/\sim = \{[\mathrm{GJ}_i] \mid \mathrm{GJ} \in M(m, n, K)\} \Rightarrow [A] = GL(n, K)A$.

6.5 Resolució de sistemes lineals

Sigui un sistema $(*)$ de, per exemple, 5 incògnites x, y, z, t i u,

- Una solució de $(*)$ és una 5-tupla$(x, y, z, t, u) \in K^5$ que satisfà totes les equacions.
- El conjunt de solucions forma una varietat lineal L de K^5:

  $L \equiv \{(x, y, z, t, u) \in K^5 \mid \text{satisfan } (*)\} \subseteq K^5$.

- Diem que $(*)$ és una equació cartesiana de V.
  - Sistema compatible $\Leftrightarrow V \neq \varnothing$.
  - Sistema incompatible $\Leftrightarrow V = \varnothing$.
- Resoldre el sistema vol dir trobar una equació paramètrica de V que descrigui com són tots els seus punts en funció d'uns paràmetres que prenen valors lliurement. El nombre de paràmetres lliures s'anomena dimensió de V $\equiv \dim(V)$.

Mètode de Gauss–Jordan

i) Calcular GJ$(A|B)$ del sistema.

ii) Reinterpretar aquesta matriu en el llenguatge de les equacions.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1/2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \text{(Gauss–Jordan del sistema)}$$

$$\begin{cases} x &= 2 + \frac{1}{2}y \\ y &= y \\ z &= 3 \\ t &= 2 \end{cases} \quad \text{(Eq. paramètrica de } V\text{)}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{(Eq. paramètrica vectorial de } V\text{)}$$

$$(2, 0, 3, 2) \in V, \quad (1/2, 1, 0, 0) \text{ és un vector director de } V$$

$$L = \{(2 + \frac{1}{2}y, y, 3, 2) \mid y \in \mathbb{R}\}$$

6.6 Rang d'una matriu

El rang d'una matriu A és el nombre de files no nul·les a la forma de Gauss–Jordan de A, i s'escriu rank(A).

Teorema de Rouché-Capelli

Sigui $AX = B$, amb $A \in M(m, n, K)$, $X \in M(n, 1, K)$, $B \in M(m, 1, K)$. Llavors, podem veure el següent

i) Sistema compatible $\Leftrightarrow$ rank$(A) = $ rank$(A|B)$.

ii) $\dim(V) = n - $ rank(A).

Propietats

- $\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(A^t)$.
- $\mathrm{rank}(PA) = \mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(AQ)$.
- Sigui B una columna de la mateixa mida que les columnes, B és combinació lineal de les columnes de $A \Leftrightarrow \mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(A|B)$. El mateix és aplicable per a files.

7 Espais vectorials

7.1 Espais vectorials

Un espai vectorial sobre K o K-espai vectorial és un grup abelià $(V,+)$ junt amb el producte per elements de K,

$$\begin{array}{rccc} \cdot: & K\times V & \to & V \\ & (\lambda,u) & \mapsto & \lambda u \end{array} \tag{7.1}$$

que compleix les propietats següents:

i) $\lambda(u+v)=\lambda u+\lambda v, \quad \forall \lambda\in K, \forall u,v\in V$.

ii) $(\lambda+\mu)u=\lambda u+\mu u, \quad \forall \lambda,\mu\in K, \forall u\in V$.

iii) $(\lambda\mu)u=\lambda(\mu u), \quad \forall \lambda,\mu\in K, \forall u\in V$.

iv) $1\cdot u=u, \quad \forall u\in V$.

Els elements de V es diuen vectors i els de K escalars.

Exemples

- K^n amb la suma de n-tuples i el producte per elements de K.
- $M(m,n,K)$ amb la suma de matrius i el producte per elements de K.
- $K[x]$ amb la suma de polinomis i el producte per elements de K.

7.2 Subespais vectorials

Un subconjunt $W\neq\varnothing$ d'un K-espai vectorial V és un subespai vectorial de V $\Leftrightarrow$

i) $(W,+)$ és un subgrup de $(V,+)$.

ii) $\lambda\in K,\ u\in W \Rightarrow \lambda u\in W$.

O equivalentment,

i) Suma de vectors tancada: $u,v\in W\Rightarrow u+v\in W$.

ii) Magnificació tancada: $\lambda u\in W, \quad \forall\lambda\in K,\ u\in W$.

Exemples

- El subespai trivial: $\{0_V\}$.
- El subespai total: V.
- Les varietats lineals L de $V=K^n$ que passen per l'origen.

En efecte, $L=\{(x_1,\dots,x_n)\mid A\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}\}\subseteq K^n$ és un subespai vectorial.

7.3 Dependència i independència lineal

Combinació lineal

El vector u del K-espai vectorial V és una combinació lineal dels vectors $u_1, \ldots, u_n \in V$, si $\exists \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$ tals que:

$$u = \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n. \tag{7.2}$$

Sigui $S \in V$ un subespai vectorial, $\langle S \rangle$ és el conjunt de totes les combinacions lineals de S. $\langle S \rangle$ és un subespai vectorial de V i, a més, és el mínim subespai que conté S.

Generadors

Si W és un subespai vectorial de V i $W = \langle A \rangle$, llavors diem que A genera W o equivalentment que A és un conjunt de generadors de W.

Si existeix un subconjunt finit A de V que generi V, llavors diem que V és un espai vectorial finitament generat.

Independència lineal

Diem que $u_1, \ldots, u_m \in V$ són una família linealment independent (LI) si cap vector u_i és combinació lineal de la resta de vectors. Si no és així, diem que són una família linealment dependent (LD).

Criteri teòric d'independència lineal

Siguin $u_1, \ldots, u_m \in V$ i $c : K^m \to V$ una funció tal que $c(\lambda_1, \ldots, \lambda_m) = \lambda_1 u_1, \ldots, \lambda_m u_m$. Les condicions següents són equivalents:

i) $u_1, \ldots, u_m$ són una família LI.

ii) $\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_m u_m = 0_V \Leftrightarrow \lambda_1 = \cdots = \lambda_m = 0$. (A la pràctica és el més útil).

iii) c és una aplicació injectiva.

$$\begin{gathered}(*) : \begin{pmatrix} u_1 & \ldots & u_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{pmatrix} = 0_V \Rightarrow \\ \Rightarrow W = \{(\lambda_1, \ldots, \lambda_m) \in K^m \mid \text{ satisfan } (*)\} \\ \Rightarrow \begin{cases} LI : \dim(W) = 0 \Leftrightarrow 0_W \text{ és l'únic element } \in V. \\ LD : \dim(W) > 0 \Leftrightarrow 0_W \text{ no és l'únic element } \in W. \end{cases}\end{gathered} \tag{7.3}$$

Criteri pràctic d'independència lineal

$$u_1, \dots, u_m \in V \text{ són una família } LI \Leftrightarrow \operatorname{rank}\begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix} = m.$$

7.4 Bases i dimensió

Una base d'un K-espai vectorial V és una família de vectors de V, $\{v_1, \dots, v_n\}$ tal que:

i) $V = \langle\{v_1, \dots, v_n\}\rangle$.

ii) $\{v_1, \dots, v_n\}$ són una família LI.

Si una base de V és finita, l'escriurem en la forma $(v_1, \dots, v_n)$.

Amplació d'una família linealment independent

Siguin $v_1, \dots, v_m \in V$ una família LI. Considerem un vector $v \in V$, aleshores:

$$\{v_1, \dots, v_m, v\} \; LI \Leftrightarrow v \notin \langle v_1, \dots, v_m\rangle \tag{7.4}$$

Teorema de la base

Sigui V és un K-espai vectorial. Si $V = \langle v_1, \dots, v_m\rangle$, aleshores qualsevol subfamília LI maximal de $\{v_1, \dots, v_m\}$ és una base de V.

i) Totes les bases tenen el mateix nombre de vectors; aquest nombre l'anomenem $\dim(V)$.

ii) #generadors $\geq \dim(V) \geq$ # família LI.

iii) Si $\dim(V) = n$ i tenim n vectors $u_1, \dots, u_n \in V$, aleshores, si $u_1, \dots, u_n$ són $LI \Leftrightarrow$ base $\Leftrightarrow$ generadors. A K^n, a més, rank $= n \Leftrightarrow GJ(A) = I(n)$.

iv) Qualsevol subespai $W \subseteq V$ és generat finitament i $\dim(W) \leq \dim(V)$. Així doncs, $\dim(W) = \dim(V) \Leftrightarrow W = V$.

Completació d'una família LI en base

Siguin $e_1, \dots, e_n \in V$ una família LI i $\langle v_1, \dots, v_m\rangle = V$, aleshores es poden afegir a la família $e_1, \dots, e_n \in V$ vectors v_i (convenientment escollits) tals que $e_1, \dots, e_n, \dots, v_i \in V$ siguin una base de V.

Teorema de Steinitz

Sigui $(v_1, \ldots, v_n)$ una base d'un K-espai vectorial V i sigun $u_1, \ldots, u_m \in V$ una família de vectors LI. Alerhores:

i) $m \leq n$.

ii) Es poden substituir m vectors de la base $(v_1, \ldots, v_n)$ per $u_1, \ldots, u_m$ amb tal d'obtenir una nova base.

Propietat fonamental de les bases

$(v_1, \ldots, v_n)$ és una base de $V \Leftrightarrow c : K^n \to V$ és una aplicació bijectiva. Aleshores, $\exists$ una única n-tupla que multiplicada per la base doni un vector v_i (les bases finites són conjunts ordenats).

Càlcul de bases i dimensió d'un espai vectorial $V = K^n$

Mètode I:

i) Sigui $W = \langle v_1, \ldots, v_m \rangle \subseteq V$. Aplicant la fase de Gauss, obtenim una família de vectors LI maximal i, per tant, una base de W i la seva dimensió.

ii) Apliquem la fase de Jordan per obtenir una base canònica de W.

Mètode II (e.g.,):

$$F = \{(x, y, z, t, u) \in K^5 \mid \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & 6 & 9 \\ 0 & 1 & 4 & 8 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \} \subseteq K^5.$$

Aleshores,

- $\dim(W) = \#\text{vectors directors} = \#\text{paràmetres lliures} = n - \operatorname{rank}(A)$.
- Una base és la família de vectors directors de l'equació paramètrica.

7.5 Teorema del rang

Els següents 5 nombres coincideixen $\forall A \in M(m, n, K)$:

i) $\operatorname{rank}(A)$.

ii) $\dim(\langle \text{files de } A \rangle)$.

iii) màxim nre. files de A | família LI

iv) $\dim(\langle \text{columnes de } A \rangle)$.

v) màxim nre. columnes de A | família LI

$\Rightarrow \operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(A^t)$

7.6 Suma i intersecció de subespais vectorials

Siguin W_1 i W_2 subespais vectorials d'un K-espai vectorial V.

Operacions

- Suma: $W_1+W_2 = \langle W_1 \cup W_2 \rangle \subseteq V \equiv$ mínim subespai W' tal que $W_1, W_2 \subseteq W' \subseteq V$.
- Intersecció: $W_1 \cap W_2 \equiv$ màxim subespai W' tal que $W' \subseteq W_1$ i $W' \subseteq W_3$ alhora.
- Suma directa: $W_1 \oplus W_2 \equiv W_1 + W_2$ si $W_1 \cap W_2 = \{0_V\}$. $W_1 \oplus W_2 \Leftrightarrow B_{W_1} \cup B_{W_2} = B_{W_1 \oplus W_2}$.

Teorema de Grassman

$$\dim(W_1) + \dim(W_2) = \dim(W_1 + W_2) + \dim(W_1 \cap W_2) \tag{7.5}$$

Algoritme de la suma i intersecció

Si ens proporcionen famílies de vectors que generin W_1 i W_2, podem aplicar el següent algoritme (esglaonant la matriu inicial per Gauss):

$$\left(\begin{array}{c|c} \text{gen. } W_1 & \text{gen. } W_1 \\ \hline \text{gen. } W_2 & 0 \end{array}\right) \mapsto \left(\begin{array}{c|c} \text{base } W_1 + W_2 & \star \\ \hline 0 & \text{base } W_1 \cap W_2 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) \tag{7.6}$$

Cal observar que la matriu es construeix amb els vectors en fila.

8 Aplicacions lineals

8.1 Aplicacions lineals

Siguin V i V' K-espais vectorials. Una aplicació lineal de V a V' és una aplicació $f : V \to V'$ que compleix les propietats següents:

i) $f(u+v) = f(u) + f(v), \quad \forall u, v \in V.$

ii) $f(\lambda u) = \lambda f(u), \quad \forall \lambda \in K, \forall u \in V.$

O equivalenment:

i) $f(\lambda u + \mu v) = \lambda f(u) + \mu f(v), \quad \forall \lambda, \mu \in K, \quad \forall u, v \in V.$

En particular, f envia subespais vectorials de V a subespais vectorials de V'.

$$f(\langle u_1, \dots, u_n \rangle) = \langle f(u_1), \dots, f(u_n) \rangle \tag{8.1}$$

8.2 L'espai vectorial de totes les aplicacions lineals

$$\mathcal{L}(V, V') \equiv \{f : V \to V' \mid f \text{ aplicació lineal}\} \tag{8.2}$$

8.3 Coordenades respecte d'una base

Sigui $B = (u_1, \dots, u_n)$ una base de V i $c_B : K^n \to V$ una aplicació lineal.

$$c_B(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \mapsto \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n u_n = u \in V \tag{8.3}$$

Llavors, escriurem $C(u, B) = \begin{pmatrix} \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$ per denotar que u té coordenades $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ respecte de la base B.

Observacions i conseqüències:

i) Aquesta coordenació és una aplicació lineal bijectiva.

ii) A K-espai vectorial V finitament generat es pot establir una aplicació bijectiva amb $K^{\dim(V)}$.

iii) Qualsevol problema lineal sobre V es pot traduir en un problema numèric a $K^{\dim(V)}$, que es pot resoldre amb ordinador fàcilment.

8.4 Matriu d'una aplicació lineal

Sigui $f_A : V_1 \to V_2$ una aplicació entre K-espais vectorials de dimensió finita no nuls. Siguin $B_1 = (v_1, \ldots, v_n)$ una base de V_1 i $B_2 = (u_1, \ldots, u_n)$ una base de V_2. Llavors:

$$A = M(f, B_1, B_2) \tag{8.4}$$

Així doncs,

$$C(f_A(v), B_2) = M(f, B_1, B_2)C(v, B_1) \tag{8.5}$$

Observacions sobre la matriu A:

i) Les files de A són els coeficients de les formes lineals que descriuen les coordenades del vector imatge.

ii) Les columnes de A són les imatges per f_A de la base B_1 de V_1.

Canvi de coordenades

Siguin $B = (v_1, \ldots, v_n)$ i $B' = (u_1, \ldots, u_n)$ bases de V i $u \in V$. Llavors:

$$C(u, B') = M(id, B, B')C(u, B) \tag{8.6}$$

Aquesta matriu, que denotarem simplement per $M(B, B')$ transforma les coordenades de u respecte B e coordenades del mateix vector resoecte de B'. Aquesta matriu s'anomena matriu del canvi de coordenades de B a B'.

8.5 Nucli i imatge d'una aplicació lineal

Sigui $f : V \to V'$ una apliació lineal.

i) f és monomorfisme $\Leftrightarrow \ker(f) = \{0_V\}$. f envia famílies LI de V a famílies LI de V'.

ii) f és epimorfisme $\Leftrightarrow \operatorname{im}(f) = f(V) = V'$. f envia generadors de V a generadors de V'.

iii) f és isomorfisme $\Leftrightarrow$ f és monomorfisme i epimorfisme alhora. f envia bases de V a bases de V'.

Criteri a $f_A : K^n \to K^m$

i) Monomorfisme: $\operatorname{rank}(A) = n$.

ii) Epimorfisme: $\operatorname{rank}(A) = m$.

iii) Isomorfisme: $\operatorname{rank}(A) = n = m$.

8.6 Problema típic

Donada una aplicació lineal $f : V \to V'$, trobar una base i la dimensió de $\ker(f) \subseteq V'$ i $\operatorname{im}(f) \subseteq V'$.

Exemple 8.1.

$$f : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$$
$$f(x, y, z, t, u) = (4z + 8t + 2u, x + y + 2t + u, 3y + z + 2t + 2u)$$

▲

Procediment:

i) Calculem la varietat lineal del sistema igualat a zero (nucli), tot simplificant per Gauss–Jordan el sistema. $\dim(\ker(f)) = \operatorname{rank}(A)$.

ii) Transformem la matriu de Gauss–Jordan a la forma paramètrica. Una base del nucli són els vectors directors del sistema.

iii) Tenint en compte que $\dim(\ker(f)) + \dim(\operatorname{im}(f)) = \dim(V)$, calculem $\dim(\operatorname{im}(f))$.

iv) Una base de $\operatorname{im}(f)$ és qualsvol família LI dels vectors columna de A (sense simplificar per Gauss–Jordan). En concret les columnes de la matriu original que a Gauss–Jordan tenen pivot, són una base.

9 Espai dual

9.1 Teoria

9.2 Màquina de xurros

Exemple 9.1. Sigui $B = ((1,2,3),(4,5,6),(7,8,9))$ una base de l'espai vectorial V. Llavors,

$$M(id, B, \mathcal{C}) = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

que és la matriu de canvi de base de B a $\mathcal{C}$ (la base canònica), o dit d'una altra manera, la base B expressada en funció de la base C.

La base dual B^* es calcula de la manera següent:

$$M(id, B^*, \mathcal{C}^*) = M(id, \mathcal{C}, B)^t = (M(id, B, \mathcal{C})^t)^{-1}$$

▲

Exemple 9.2. Es consideren $B = (v_1, v_2)$ una base de l'espai vectorial V i $B^* = (\varphi_1, \varphi_2)$ la seva base dual. Sigui $B' = (v_1 + 2v_2, 3v_1 + 4v_2)$ una altra base de la qual volem trobar la seva base dual. Per començar, fem:

$$M(id, B', B) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Llavors,

$$M(id, B'^*, B^*) = M(id, B, B')^t = (M(id, B', B)^t)^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1.5 \\ 1 & -0.5 \end{pmatrix}$$

Així doncs, $B'^* = (-2\varphi_1 + 1.5\varphi_2, \varphi_1 - 0.5\varphi_2)$. ▲

10 Permutacions

10.1 Permutacions

Una permutació de n elements és una aplicació bijectiva $\sigma : \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\}$. S'escriu σ posant els valors que pren en tots els nombres $(1, \dots, n)$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n-1 & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n-1) & \sigma(n) \end{pmatrix} \tag{10.1}$$

El conjunt de les permutacions de n elments s'anomena S_n. N'hi ha $n!$ permutacions possibles:

$$\begin{aligned} &S_1 = \{I\} \quad (1!) \\ &S_2 = \left\{ I, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \right\} \quad (2!) \\ &S_3 = \left\{ I, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \right\} \quad (3!) \\ &\dots \end{aligned} \tag{10.2}$$

A S_n hi ha una operació (composició): $\sigma \circ \tau : S_n \times S_n \to S_n$.

Exemple 10.1.

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \sigma \circ \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

▲

Propietats

- Té propietat associativa.
- Té element neutre: $e \equiv I$.
- $\forall \sigma$, $\exists \sigma^{-1}$.

Inversa d'una permutació

Sigui $\sigma = \tau_1 \dots \tau_n$, on $\tau_i = (x_1 \dots x_n)$ són cicles disjunts.

$$\begin{aligned} \tau_i &: x_1 \mapsto x_2, \quad \dots, \quad x_{n-1} \mapsto x_n, \\ \tau_i^{-1} &: x_n \mapsto x_{n-1}, \quad \dots, \quad x_2 \mapsto x_1 \end{aligned}$$

Així doncs, per calcular σ^{-1} escribim els cicles τ_i del revés:

$$\begin{aligned}\sigma &= \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 2 & 5 & 4 & 3 & 1\end{pmatrix},\\ \sigma^{-1} &= \begin{pmatrix}2 & 5 & 4 & 3 & 1\\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 5 & 1 & 4 & 3 & 2\end{pmatrix}\end{aligned} \tag{10.3}$$

$$\sigma = (1\,2\,5)(3\,4), \quad \sigma^{-1} = (5\,2\,1)(4\,3) = (1\,5\,2)(3\,4) \tag{10.4}$$

10.2 Cicles de permutacions

Un cicle de longitud k a $S_n = \{\text{permutacions de } n \text{ elements}\}$ és una σ que mou k elements $n_1, n_2, \ldots, n_{k-1}, n_k$: $\sigma(n_1) = n_2, \ldots, \sigma(n_i) = n_{i+1}, \ldots, \sigma(n_k) = n_1$.

Exemple 10.2.

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 3 & 1 & 4 & 2 & 5\end{pmatrix} \in S_5 \equiv (1\,3\,4\,2) \text{ és un cicle de longitud 4.}$$

▲

Descomposició en cicles disjunts

Qualsevol permutació es pot escriure com a un producte (composició) de cicles en què intervenen elements diferents.

Exemple 10.3.

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6\\ 1 & 4 & 6 & 5 & 2 & 3\end{pmatrix} \in S_6 = (2\,4\,5)(3\,6) = (3\,6)(2\,4\,5)$$

Quan dues permutacions mouen elements diferents, commuten.

▲

Un cicle de longitud n qualsevol es pot escriure com a producte de $n-1$ transposicions (cicles de longitud 2):

$$(n_1\, n_2\, \ldots\, n_{k-1}\, n_n) = (n_1\, n_2) \ldots (n_{k-1}\, n_k) \tag{10.5}$$

Exemple 10.4.

$$(1\,3\,4\,2) = (1\,3)(3\,4)(4\,2)$$

▲

$\Rightarrow$ Qualsevol permutació σ es pot expressar com a un producte de transposicions no únic.

10.3 Ordre d'una permutació

L'ordre d'una permutació σ és el mínim enter positiu m tal que σ^m sigui la identitat.

Sigui σ una permutació de cicles disjunts. Com que els cicles disjunts commuten,

$$\sigma = \sigma_1\sigma_2 \dots \sigma_n \Rightarrow \sigma^m = \sigma_1^m\sigma_2^m \dots \sigma_n^m \tag{10.6}$$

Així doncs, és fàcil veure que l'ordre d'una permutació és el mínim comú múltiple de les longituds dels cicles que formen la descomposició de la permutació en cicles disjunts.

Exemple 10.5.

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 5 & 3 & 4 \end{pmatrix} = (1\,2)(3\,5\,4)$$

$$\text{L'ordre de } \sigma = \mathrm{mcm}(2,3) = 6 \Rightarrow \sigma^6 = (1\,2)^6(3\,5\,4)^6 = I$$

▲

10.4 Signe d'una permutació

El signe o paritat d'una permutació σ es defineix com a:

$$\mathrm{sgn}(\sigma) = (-1)^m, \quad \text{on } m \text{ és el nombre de transposicions.} \tag{10.7}$$

Per a una σ donada, la paritat és independent de la tria de transposicions.

11 Determinants

11.1 Determinants

Un determinant és una aplicació det : $M(n,K) \to K$ que compleix les propietats següents:

i) Depèn linealment de les columnes.

   a) $\det(C_1,\ldots,C_i+C_{i'},\ldots,C_n) = \det(C_1,\ldots,C_i,\ldots,C_n) + \det(C_1,\ldots,C_{i'},\ldots,C_n)$.

   b) $\det(C_1,\ldots,\alpha C_i,\ldots,C_n) = \alpha\det(C_1,\ldots,C_i,\ldots,C_n), \quad \forall\alpha\in K$.

ii) $\forall A\in M(n,K)$ amb dues columnes iguals $\Rightarrow \det(A)=0$.

iii) $\det(I(n))=1$.

Teorema

i) $\det(C_1,\ldots,C_i,\ldots,C_j,\ldots,C_n) = -\det(C_1,\ldots,C_j,\ldots,C_i,\ldots,C_n)$.

ii) $\det(C_1,\ldots,C_i,\ldots,C_j,\ldots,C_n) = \det(C_1,\ldots,C_i+\mu C_j,\ldots,C_j,\ldots,C_n)$, $\forall\mu\in K$.

iii) $\det(AB)=\det(A)\det(B)$.

iv) $\det(A^t)=\det(A)$.

v) $U = M_{\text{triangular superior}} \Rightarrow \det(U) = \prod$ elements de la diagonal $\Rightarrow \det(A)=\det(GJ(A)) = \prod$ elements de la diagonal.

vi) $\det(A)\neq 0 \Leftrightarrow A$ és invertible.

vii) Totes les propietats són equivalents per a files.

11.2 Càlcul d'un determinant

Forma permutacional

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix} &= \begin{vmatrix}a+0 & b\\ 0+c & d\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}0 & b\\ c & d\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}a & b\\ 0 & d\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}a & b\\ 0 & 0\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}a & 0\\ 0 & d\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}0 & b\\ c & 0\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}0 & 0\\ c & d\end{vmatrix}\\ &= ab\begin{vmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{vmatrix} + ad\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix} + bc\begin{vmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix} + cd\begin{vmatrix}0 & 0\\ 1 & 1\end{vmatrix}\\ &= ab(0)+ad(1)+bc(-1)+cd(0) = ad-bc\end{aligned} \tag{11.1}$$

Sigui $A\in M(n,K)$. $\det(A)$ és la suma dels productes de n (2 en aquest cas) coeficients de columnes diferents pel determinant d'una matriu amb n uns en n columnes i la resta zeros.

$$\det(A) = \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\, a_{\sigma(1)1}a_{\sigma(2)2}\ldots a_{\sigma(n)n} \tag{11.2}$$

Aquesta fórmula és important, ja que demostra que $\exists\det(A)$ i també que $\det(A) = \det(A)^t$, però a la pràctica és poc eficient.

Desenvolupament per files/columnes

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} C_{ij}, \quad C_{ij} \equiv (-1)^{i+j} M_{ij},$$
$$M_{ij} \equiv \text{ matriu adjunta a } a_{ij} \tag{11.3}$$

Exemple 11.1.

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 7 & 8 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 7 & 8 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 18 - 12 = 6$$

▲

Aquest mètode a la pràctica és també poc eficient, ja que quan es treballa amb matrius amb incògnites el càlcul es complica força.

Esglaonar

Com que $\det(U) = \prod$ elements de la diagonal, es tracta de diagonalitzar la matriu aplicant canvis elementals. Un cop diagonalitzada, el càlcul de $\det(U)$ és trivial.

Exemple 11.2.

$$\begin{vmatrix} b & b & b \\ c & c & b \\ d & c & b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b & c & d \\ 0 & b-c & b-c \\ 0 & 0 & c-d \end{vmatrix} = b(b-c)(c-d)$$

▲

Encara que aquest mètode és força eficient, el millor mètode és esglaonar quan convingui per fer zeros a files/columnes i després desenvolupar per files/columnes, estalviant molts càlculs.

11.3 Fórmula de la matriu inversa

Hem dit que $\det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} C_{ij}$. Si $j \neq i$, $a_{i1} A_{j1} + \cdots + a_{ij} A_{ji} + \cdots + a_{in} A_{jn} = \delta_{ij} \det(A)$.

Així doncs,

$$\text{Si } \det(A) \neq 0 \Rightarrow A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A)^t}{\det(A)} \tag{11.4}$$

11.4 Interpretació geomètrica

Es pot donar una interpretació geomètrica al valor del determinant d'una matriu $A \in M(n)$ amb entrades reals: el valor absolut del determinant ens dóna el factor pel qual una àrea o volum (o qualsevol anàleg de dimensió major) està multiplicat sota la transformació lineal associada, mentre que el signe indica si la transformació manté l'orientació.

En altres paraules: $|\det(A)| \equiv$ volum del paral·lelepípede n-dimensional que formen els vectors fila/columna de A.

12 Diagonalització

12.1 Conceptes bàsics

Diem que una matriu $A \in M(n,K)$ és diagonalitzable si $\exists P \in M(n,K)$ invertible tal que $P^{-1}AP \in D(n,K)$, és a dir

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \tag{12.1}$$

per a certs $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$.

Un endomorfisme f de V és diagonalitzable si existeix una base B de V tal que la matriu A de f en aquesta base sigui diagonal.

Sigui $f : V \to V$ un enfomorfisme. Suposem que $B = (v_1, \dots, v_n)$ és una base de V tal que $M(f, B)$ és la matriu diagonal $\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$. Això vol dir que, per a $i = 1, \dots, n$

$$f(v_i) = \lambda_1 v_i \tag{12.2}$$

és a dir B és una base tal que tots els seus elements satisfan que la seva imatge per f és un múltiple d'ell mateix. Aquest tipus de vectors es diuen vectors propis de f.

Sigui $A = M(f,B)$ i $B' = (u_1, \dots, u_n)$. Llavors A diagonalitza en $A' = P^{-1}AP = M(f, B')$, i en particular $P = \begin{pmatrix} u_1 & \dots & u_n \end{pmatrix}$.

12.2 Vectors i valors propis

Sigui f un endomorfisme de V. Un valor propi (vap) de f és un escalar $\lambda \in K$ tal que $\exists u \in V \backslash \{0_V\}$ que compleix:

$$f(u) = \lambda u \tag{12.3}$$

Un vector propi (vep) de f és un vector no nul $v \in V$ tal que

$$f(v) = \lambda v \quad \text{per a algun } \lambda \in K \tag{12.4}$$

En aquest cas diem que v és un vep de f amb vap λ.

Exemple 12.1.

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow u = (1,1)$ és un vector propi de f amb valor propi $\lambda = 4$. ▲

Subespai propi d'un vap

Si λ és un vap de f, es diu que $\ker(f - \lambda id)$ és el subespai propi de f de vap λ.

Sigui $f : V \to V$ un endomorfisme. Per a un vector $v \in V$ les afirmacions següents són equivalents.

i) v és un vep de f.

ii) $\exists \lambda \in K$ tal que v és un vector no nul de $\ker(f - \lambda id)$.

Sigui λ un vap de f de V. Llavors:

$$\langle \text{vep de vap } \lambda \rangle \equiv \ker(f - \lambda id) \backslash \{0_V\} \tag{12.5}$$

12.3 Polinomi característic d'un endomorfisme

Sigui $A \in M(n, K)$. Definim el polinomi característic de A com:

$$p_A(x) \equiv \det(A - xI(n)) \tag{12.6}$$

Sigui f un endomorfisme de V i sigui $\lambda \in K$. Llavors:

$$\lambda \text{ és vap de } f \Leftrightarrow p_f(\lambda) = 0 \tag{12.7}$$

Sigui f un endomorfisme de V. Suposem que $p_f(x) = (x - \lambda)^m q(x)$, $q(\lambda) \neq 0$ i $m \geq 1 \equiv$ multiplicitat de l'arrel. Llavors:

$$1 \leq \dim(\ker(f - \lambda id) \leq m \tag{12.8}$$

Teorema de diagonalització

Un endomorfisme f de V és diagonalitzable si i només si $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_r \in K$ diferents i $n_1, \dots, n_r \in \mathbb{N}$ tals que

$$\begin{aligned} & p_f(x) = (-1)^n (x - \lambda_1)^{m_1} \dots (x - \lambda_k)^{m_k} \\ \text{i} \quad & \dim(\ker(f - \lambda_i id)) = m_i, \quad \forall i \in \{1, \dots, k\} \end{aligned} \tag{12.9}$$

En particular, tot endomorfisme f de V tal que

$$p_f(x) = (x - \lambda_1) \dots (x - \lambda_n) \tag{12.10}$$

amb $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ diferents, és diagonalitzable.

Exemple 12.2. Sigui $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'endomorfisme definit per $g(x, y) = (x - y, x + y)$. La matriu de g respecte de la base canònica de $\mathbb{R}^2$ és

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

El polinomi característic de g és

$$p_A(x) = (x - 2)x$$

Per tant, g diagonalitza amb vap $\lambda_1 = 0$ i $\lambda_2 = 2$. $(1, 1)$ és un vep de vap 0 i $(1, -1)$ és un vep de vap 2. Llavors:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow P^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

i

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

▲

12.4 Aplicacions de la diagonalització

Potències de matrius/endomorfismes

Si $A \in M(n, K)$ és diagonalitzable, $\exists P \in GL(n, K)$ tal que

$$D = P^{-1}AP \tag{12.11}$$

Llavors, es compleix que

$$A^n = PD^nP^{-1} \tag{12.12}$$

Recurrència i dinàmica

Exemple 12.3. WIP: problema 20 de la primera entrega d'Àlgebra II ▲

13 Formes bilineals

13.1 Formes bilineals

Sigui K un cos, i V un K-espai vectorial. Una aplicació

$$\langle - \mid - \rangle : V \times V \to K \tag{13.1}$$

es diu que és una forma bilineal sobre V si es compleixen les propietats següents:

i) $\langle \lambda u + \mu u' \mid v \rangle = \lambda \langle u \mid v \rangle + \mu \langle u' \mid v \rangle, \quad \forall \lambda, \mu \in K,\ u, u', v \in V.$

ii) $\langle u \mid \lambda v + \mu v' \rangle = \lambda \langle u \mid v \rangle + \mu \langle u \mid v' \rangle, \quad \forall \lambda, \mu \in K,\ u, v, v' \in V.$

La forma bilineal $\langle - \mid - \rangle$ es diu que és simètrica si $\langle u \mid v \rangle = \langle v \mid u \rangle, \quad \forall u, v \in V.$

Producte escalar estàndard

El producte estàndard de $\mathbb{R}^n$ és l'aplicació $\langle - \mid - \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida per

$$\langle (x_1, \ldots, x_n) \mid (y_1, \ldots, y_n) \rangle = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n \tag{13.2}$$

El producte escalar estàndard és una forma bilineal simètrica.

13.2 Matriu associada a una forma bilineal

Sigui $\langle - \mid - \rangle : V \times V \to K$ una forma bilineal, i sigui $B = (v_1, \ldots, v_n)$ una base de V. Considerem la matriu $A = (a_{ij}) \in M(n, K)$, definida per

$$a_{ij} = \langle v_i \mid v_j \rangle \tag{13.3}$$

La matriu A és diu que és la matriu associada a la forma bilineal $\langle - \mid - \rangle$ en la base B i la denotem per

$$A = M(\langle - \mid - \rangle, B) \tag{13.4}$$

Amb aquesta matriu podem calcular la forma bilineal sobre qualsevol parell de vectors:

$$\langle u \mid v \rangle = u^t A v \equiv C(u, B)^t A C(v, B) \tag{13.5}$$

Sigui $B = (v_1, \ldots, v_n)$ una base de V. Una forma lineal $\langle - \mid - \rangle$ sobre V és simètrica $\Leftrightarrow M(\langle - \mid - \rangle, B)$ és una matriu simètrica.

Un exemple n'és el producte escalar estàndard, on $\langle u \mid v \rangle = u^t I(n) v$.

Fórmula del canvi de base

$$M(\langle - \mid - \rangle, B_2) = M(B_2, B_1)^t M(\langle - \mid - \rangle, B_1) M(B_2, B_1) \tag{13.6}$$

13.3 L'espai vectorial de les formes bilineals

Considerem el conjunt

$$\mathrm{Bil}(V) \equiv \{\langle - \mid - \rangle : V \times V \to K \mid \langle - \mid - \rangle \text{ és una forma bilineal}\}. \tag{13.7}$$

Sobre aquest conjunt, definim una suma i un producte per escalars de K de la manera següent:

$$\begin{array}{rccc} \langle - \mid - \rangle_1 + \langle - \mid - \rangle_2 : & V \times V & \to & K \\ & (v, w) & \mapsto & \langle v \mid w \rangle_1 + \langle v \mid w \rangle_2 \end{array} \tag{13.8}$$

$$\begin{array}{rccc} \lambda \langle - \mid - \rangle : & V \times V & \to & K \\ & (v, w) & \mapsto & \lambda \langle v \mid w \rangle \end{array} \tag{13.9}$$

Aquest conjunt té estructura de K-espai vectorial.

La dimensió de $\mathrm{Bil}(V)$ és n^2 perquè és un K-espai vectorial isomorf a $M(n, K)$.

Conjunt de les formes bilineals simètriques

El conjunt de les formes bilineals simètriques és un subespai vectorial de $\mathrm{Bil}(V)$:

$$\mathrm{SBil}(V) \equiv \{\langle - \mid - \rangle : V \times V \to K \mid \langle - \mid - \rangle \text{ és simètrica}\}. \tag{13.10}$$

La dimensió de $\mathrm{SBil}(V)$ és $\frac{n(n+1)}{2}$ perquè és un subespai vectorial isomorf al subespai vectorial de les matrius simètriques de $M(n, K)$.

13.4 Bases ortogonals

Sigui $\langle - \mid - \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ una forma bilineal simètrica. Es diu que $u, v \in V$ són ortogonals si $\langle u \mid v \rangle = 0 \Rightarrow u \perp v$.

Un vector no nul $v \in V$ és isòtrop si és ortogonal a si mateix, és a dir, si $\langle v \mid v \rangle = 0$.

Sigui $B = (v_1, \dots, v_n)$ una base de V. Es diu que B és una base ortogonal respecte de $\langle - \mid - \rangle$ si $\langle v_i \mid v_j \rangle = 0, \quad \forall i \neq j$.

Cal observar que la matriu associada a la forma bilineal simètrica en una base ortogonal és una matriu diagonal, és a dir, $M(\langle - \mid - \rangle, B) \in D(n)$.

Teorema

Sigui $\langle - \mid - \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ una forma bilineal simètrica. Llavors V té una base ortogonal respecte $\langle - \mid - \rangle$.

Complement ortogonal

Sigui W un SBil(V) i $\langle u_1, \dots, u_r \rangle = W$, llavors, definim el subespai ortogonal a W com:

$$W^{\perp} \equiv \{v \in V \mid u \perp v, \quad \forall u \in W\} \tag{13.11}$$

El complement ortogonal compleix les següents propietats:

i) $W \oplus W^{\perp} = V$.

ii) $\dim(W) + \dim(W^{\perp}) = \dim(V)$.

Mètode de Gram–Schmidt d'ortogonalització

Sigui $B = (v_1, v_2, v_3 \dots, v_k)$ una base de V i $\langle - \mid - \rangle$ una forma bilineal simètrica. Llavors, per trobar uns vectors $u_1, u_2, u_3, \dots u_k$ que formin una base B' ortogonal respecte de $\langle - \mid - \rangle$, apliquem el mètode de Gram–Schmidt.

Definim l'operador projector com:

$$\mathrm{proj}_u(v) \equiv \frac{\langle u \mid v \rangle}{\langle u \mid u \rangle} u \tag{13.12}$$

El mètode de Gram–Schmidt va de la manera següent:

$$\begin{aligned}
u_1 &= v_1, \\
u_2 &= v_2 - \mathrm{proj}_{u_1}(v_2), \\
u_3 &= v_3 - \mathrm{proj}_{u_1}(v_3) - \mathrm{proj}_{u_2}(v_3), \\
&\vdots
\end{aligned}$$

$$u_k = v_k - \sum_{j=1}^{k-1} \mathrm{proj}_{u_j}(v_k) \tag{13.13}$$

Cal notar que per què aquest mètode es pugui aplicar, $\langle v_1 \mid v_1 \rangle \neq 0$, és a dir, si el element $a_{1,1}$ de $M(\langle - \mid - \rangle, B)$ és zero, haurem de permutar files abans de fer Gram–Schmidt.

Definició d'una forma bilineal

Sigui $\langle - \mid - \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ una forma bilineal simètrica i $v \in V$.

i) $\langle - \mid - \rangle$ és definida positiva $\Leftrightarrow \langle v \mid v \rangle > 0 \Leftrightarrow M(\langle - \mid - \rangle, B) = I(n)$.

ii) $\langle - \mid - \rangle$ és definida negativa $\Leftrightarrow \langle v \mid v \rangle < 0 \Leftrightarrow M(\langle - \mid - \rangle, B) = -I(n)$.

iii) $\langle - \mid - \rangle$ és semidefinida positiva $\Leftrightarrow \langle v \mid v \rangle \geq 0$.

iv) $\langle - \mid - \rangle$ és semidefinida negativa $\Leftrightarrow \langle v \mid v \rangle \leq 0$.

Les formes bilineals definides positives s'anomenen productes escalars.

Teorema de Sylvester

Sigui $\langle - \mid - \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ una forma bilineal simètrica. Llavors V té una base ortogonal respecte $\langle - \mid - \rangle$ tal que la matriu associada respecte d'aquesta base és de la forma

$$M(\langle - \mid - \rangle, B) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & \ddots^{r_+} & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & & -1 & & & & & \\ & & & & \ddots^{r_-} & & & & \\ & & & & & -1 & & & \\ & & & & & & 0 & & \\ & & & & & & & \ddots^{r_0} & \\ & & & & & & & & 0 \end{pmatrix} \tag{13.14}$$

on r_+, r_- i r_0 no depenen de la base B. És a dir, $\forall M(\langle - \mid - \rangle, B) \in M(n, \mathbb{R})$, $r_+ + r_- + r_0 = n$.

La terna (r_+, r_-, r_0) s'en diu signatura de la forma bilineal, i és un invariant.

13.5 Productes escalars

Aquesta secció la dedicarem a l'estudi dels $\mathbb{R}$-espai vectorials V de dimensió finita amb un producte escalar. Aquests espais vectorials també es diuen espai euclidians. Algunes propietats importants del producte escalar són:

- En una base ortogonal B, tots els elements de la diagonal de la matriu $M(\langle - \mid - \rangle, B)$ són > 0.
- $\exists$ una base B tal que $M(\langle - \mid - \rangle, B) = I(n)$.
- $\forall v \in V, \quad \langle v \mid v \rangle \geq 0$ i $\langle v \mid v \rangle \Leftrightarrow v = 0$.

Desigualtat de Cauchy-Schwartz

Sigui $\langle - \mid - \rangle$ un producte escalar sobre un $\mathbb{R}$-espai vectorial V. Llavors:

$$\langle u \mid v \rangle^2 \leq \langle u \mid u \rangle \langle v \mid v \rangle, \quad \forall u, v \in V \tag{13.15}$$

Norma sobre V

Sigui V un $\mathbb{R}$-espai vectorial. Una norma sobre V és una aplicació:

$$\begin{array}{rccc} \| \ \| : & V & \to & \mathbb{R} \\ & u & \mapsto & \|u\| \end{array} \tag{13.16}$$

que compleix les següents propietats:

i) $\|u\| \geq 0, \quad \forall u \in V$.
ii) $\|u\| = 0 \Leftrightarrow u = 0$.
iii) $\|\lambda u\| = |\lambda| \|u\|, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall u \in V$
iv) $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|, \quad \forall u, v \in V$ (desigualtat triangular).

Norma associada a $\langle - \mid - \rangle$

Sigui $\langle - \mid - \rangle$ un producte escalar sobre un $\mathbb{R}$-espai vectorial V. Llavors l'aplicació

$$\begin{array}{rccc} \| \ \|_{\langle - \mid - \rangle}: & V & \to & \mathbb{R} \\ & u & \mapsto & \|u\|_{\langle - \mid - \rangle} \end{array} \tag{13.17}$$

$$\text{on} \quad \|u\|_{\langle - \mid - \rangle} = \sqrt{\langle u \mid u \rangle} \tag{13.18}$$

és una norma, que es diu norma associada a $\langle - \mid - \rangle$.

13.6 Bases ortonormals

Una base ortonormal és una base ortogonal B que compleix que $\|u\| = 1, \forall u \in B$. Cal notar que $M(\langle - \mid - \rangle, B) = I(n)$.

Sigui $\langle - \mid - \rangle$ un producte escalar sobre un $\mathbb{R}$-espai vectorial V de dimensió finita. Llavors V té una base ortonormal respecte $\langle - \mid - \rangle$.

Per calcular una base ortonormal B' es pot calcular una base ortogonal B pel mètode de Gramm–Schmidt i dividir els vectors de B per la seva norma:

$$B = (u_1, \ldots, u_n) \Rightarrow B' = \left(\frac{u_1}{\|u_1\|}, \ldots, \frac{u_n}{\|u_n\|} \right) \tag{13.19}$$

13.7 El Teorema Espectral

Tota matriu simètrica de $M(n, \mathbb{R})$ diagonalitza en una base ortonormal respecte el producte escalar estàndard de $\mathbb{R}^n$.

Enfomorfisme autoadjunt

Es diu que f és un endomorfisme autoadjunt si i només si:

$$\langle f(u) \mid v \rangle = \langle u \mid f(v) \rangle \tag{13.20}$$

Sigui $\langle - \mid - \rangle$ un producte escalar sobre un $\mathbb{R}$-espai vectorial V de dimensió finita $n > 0$. Sigui $f : V \to V$ un endomorfisme autoadjunt de V. Llavors $\exists \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tals que:

$$P_f(x) = (-1)^n (x - \lambda_1) \ldots (x - \lambda_n) \tag{13.21}$$

Teorema espectral

Sigui $\langle - \mid - \rangle$ un producte escalar sobre un $\mathbb{R}$-espai vectorial V de dimensió finita $n > 0$. Sigui $f : V \to V$ un endomorfisme autoadjunt de V. Lavors V té una base ortonormal de vectors propis de f. En particular, l'endomorfisme f diagonalitza.

$$M(f, B, B) = M(\langle - \mid - \rangle, B) \Rightarrow \langle u \mid v \rangle = \langle f(u) \mid v \rangle \tag{13.22}$$

Observació: si bé el mètode de Gramm–Schmidt d'ortonormalització és invàlid per a matrius no definides positives, sí que ho és el d'ortogonalització, ja que no treballa amb normes. De manera que es pot ortogonalitzar qualsevol forma bilineal sense haver d'utilitzar el teorema espectral, tot i que pot arribar a ser un procés més llarg.

14 Geometria euclidiana

14.1 Espai afí euclidià i varietats lineals

Un espai vectorial euclidià és un $\mathbb{R}$-espai vectorial junt amb un producte escalar.

Un espai afí euclidià és un conjunt $E \neq \varnothing$ junt amb un espai vectorial euclidià $(V, \langle - \mid - \rangle)$ i una aplicació

$$\begin{array}{rccc} \alpha: & E \times E & \to & V \\ & (P,Q) & \mapsto & \overrightarrow{PQ} \end{array} \tag{14.1}$$

que compleix:

i) Per a cada $P \in E$, l'aplicació

$$\begin{array}{rccc} \alpha_P: & E \times E & \to & V \\ & Q & \mapsto & \overrightarrow{PQ} \end{array}$$

és bijectiva.

ii) $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}, \quad \forall P, Q, R \in E.$

Els elements de E es diuen punts en l'espai, V és l'espai vectorial associat a E. Definim la dimensió de l'espai afí euclidià E com

$$\dim E \equiv \dim V \tag{14.2}$$

Varietats lineals

Diem que un subconjunt L de E és una varietat lineal de E si

i) $\alpha(L \times L)$ és un subespai vectorial de V.

ii) $\forall P \in L$,

$$\begin{array}{rccc} \alpha_P: & L \times L & \to & \alpha(L \times L) \\ & Q & \mapsto & \overrightarrow{PQ} \end{array}$$

és bijectiva.

Exemple 14.1. Siguin $V = \mathbb{R}^n$ i $E = \mathbb{R}^n$. Sigui

$$\alpha(u, v) = u - v$$

Llavors E amb α s'anomena espai afí euclidià estàndard.

Les varietats lineals d'aquest espai són de la forma $P + W$, on $P \in V$ i W és un subespai vectorial de V, és a dir

$$P + W = \{P + w \mid w \in W\}$$

Aquí W és la direcció de $P + W$, i diem que $P + W$ és la varietat lineal que passa pel punt P amb direcció W. ▲

Exemple 14.2. Siguin $E = \mathbb{R}^2$, $L = \{(x,y) \mid y - x = 1\}$, i $P = (x,y)$ i $Q = (x',y')$ punts de L. Llavors:

$$\begin{aligned}\alpha(L \times L)) &= \left\{\overrightarrow{PQ} \mid y - x = 1, y' - x' = 1\right\} = \\ &= \{(x'-x, y'-y) \mid y - x = 1, y' - x' = 1\} = \langle(1,1)\rangle \\ \Rightarrow L &= P + \langle(1,1)\rangle\end{aligned}$$

▲

Intersecció de varietats lineals

Dues varietats lineals P_1+W_1, P_2+W_2, d'un espai afí euclidià es tallen $\Leftrightarrow \overrightarrow{P_1P_2} \in W_1+W_2$.

Si $P_1 + W_1$, $P_2 + W_2$ són varietats lineals paral·leles, llavors o bé no es tallen o bé una està continguda dins l'altra (i si són de la mateixa dimensió, llavors són coincidents).

La intersecció de dues varietats lineals d'un espai afí euclidià és o bé buida o bé una varietat lineal.

14.2 Coordenades

Un sistema de coordenades cartesianes ortonormal d'un espai afí euclidià E de dimensió finita n és

$$\mathcal{B} = \{P, (v_1, \ldots, v_n)\} \tag{14.3}$$

on P és l'origen de coordenades i $(v_1, \ldots, v_n)$ és una base ortonormal de l'espai vectorial associat V; $\langle v_1\rangle, \ldots, \langle v_n\rangle$ són els eixos de coordenades del sistema.

Les coordenades d'un punt $X \in E$ respecte de $\mathcal{B}$ són per definició les coordenades del vector $\overrightarrow{PX}$ respecte de la base $(v_1, \ldots, v_n)$. Escriurem $C(X, \mathcal{B}) = C(\overrightarrow{PX}, (v_1, \ldots, v_n))$.

Fórmula del canvi de coordenades

Siguin $\mathcal{B} = \{P, (v_1, \ldots, v_n)\}$, $\mathcal{B}' = \{Q, (u_1, \ldots, u_n)\}$ dos sistemes de coordenades ortonormals d'un espai afí euclidià E. Llavors:

$$C(X, \mathcal{B}) = C(Q, \mathcal{B}) + M(B', B)C(X, \mathcal{B}') \tag{14.4}$$

14.3 Distància i perpendicularitat

Definim la distància en un espai afí euclidià E com

$$\begin{array}{rccc} d: & E \times E & \to & \mathbb{R} \\ & (P,Q) & \mapsto & \|\overrightarrow{PQ}\| \end{array} \tag{14.5}$$

Observem que d compleix les propietats següents:

i) $d(P,Q) \geq 0, \quad \forall P,Q \in E$.
ii) $d(P,Q) = 0 \Leftrightarrow P = Q$.
iii) $d(P,Q) = d(Q,P), \quad \forall P,Q \in E$.
iv) $d(P,Q) + d(Q,R) \geq d(P,R), \quad P,Q,R \in E$ (desigualtat triangular).

Teorema de Pitàgores

Sigui E un espai afí euclidià. Siguin $P,Q,R \in E$ tals que $\left\langle \overrightarrow{PQ} \mid \overrightarrow{PR} \right\rangle = 0$. Llavors:

$$d(P,Q)^2 + d(P,R)^2 = d(Q,R)^2 \tag{14.6}$$

Complement ortogonal

Sigui W un subespai vectorial d'un espai vectorial euclidià, llavors, definim el subespai ortogonal a W com:

$$W^\perp \equiv \{v \in V \mid u \perp v, \quad \forall u \in W\} \tag{14.7}$$

El complement ortogonal compleix les següents propietats:
i) $W \oplus W^\perp = V$.
ii) $\dim(W) + \dim(W^\perp) = \dim(V)$.

Diem que dues varietats lineals $P_1 + W_1$, $P_2 + W_2$ en un espai afí euclidià són ortogonals si $W_1 \subseteq W_2^\perp$ o $W_1^\perp \subseteq W_2$.

Projecció ortogonal

Sigui E un espai afí euclidià de dimensió finita. Sigui V l'espai vectorial associat i $\langle - \mid - \rangle$ el seu producte escalar. Sigui L una varietat lineal amb direcció W. Definim la projecció ortogonal de E sobre L per

$$\begin{array}{rccc} \pi_L : & E & \to & L \\ & Q & \to & P + w_1 \end{array} \tag{14.8}$$

on P és un punt fixat de L i $\overrightarrow{PQ} = w_1 + w_2$ amb $w_1 \in W$ i $w_2 \in W^\perp$.
Observem que $\overrightarrow{\pi_L(Q)Q} = w_2 \in W^\perp$ i que $d(\pi_L(Q), Q)$ és mínima.

14.4 Distància entre dues varietats lineals

Siguin $L_1 = P_1 + W_1$, $L_2 = P_2 + W_2$ dues varietats lineals d'un espai afí euclidià E de dimensió finita. Definim la distància entre L_1 i L_2 com

$$d(L_1, L_2) = \inf\{d(P,Q) \mid P \in L_1, Q \in L_2\} \tag{14.9}$$

o, equivalentment,

$$d(L_1, L_2) = \inf\{\|\overrightarrow{P_1P_2} + w_1 + w_2\| \mid w_1 \in W_1, w_2 \in W_2\} \tag{14.10}$$

Observem que si L_1 i L_2 es tallen, $d(L_1, L_2) = 0$.

Mètode 1

Siguin $L_1 = P_1 + W_1$, $L_2 = P_2 + W_2$ dues varietats lineals d'un espai afí euclidià E de dimensió finita. Sigui $\pi_L : E \to L$ la projecció ortogonal de E sobre $L = P_1 + (W_1 + W_2)$. Llavors:

$$d(L_1, L_2) = d(P_2, \pi_L(P_2)) \tag{14.11}$$

i es compleix:

$$\pi_L(P_2) = P_1 + \sum_{i=1}^{\dim(W_1+W_2)} \left\langle \overrightarrow{P_1P_2} \mid v_i \right\rangle v_i \tag{14.12}$$

on $(v_1, \dots, v_i, \dots, v_n)$ és una base ortogonal de $W_1 + W_2$.

Llavors, $\overrightarrow{P_2\pi_L(P_2)} \subset W_3 \equiv$ direcció de la varietat lineal L_3 tal que $L_3 \perp L_1$ i $L_3 \perp L_2$, que anomenarem perpendicular comuna entre L_1 i L_2.

Mètode 2

Siguin $L_1 = P_1 + W_1$, $L_2 = P_2 + W_2$ dues varietats lineals d'un espai afí euclidià E de dimensió finita. Llavors per calcular $d(L_1, L_2)$ considerarem el següent:

i) Calculem $(W_1+W_2)^\perp$. Aquest subespai vectorial és ortogonal a $L = P_1+(W_1+W_2)$.

ii) $E = (W_1 + W_2) \oplus (W_1 + W_2)^\perp$.

iii) $\Rightarrow \overrightarrow{P_1P_2} = u + v, \quad u \in (W_1 + W_2), v \in (W_1 + W_2)^\perp$.

iv) $\Rightarrow d(L_1, L_2) = \|v\|$.

Per calcular, en canvi, els dos punts $X_1 \in L_1$, $X_2 \in L_2$ tals que $d(X_1, X_2) = d(L_1, L_2)$ haurem de fer les següents consideracions:

i) $X_1 = P_1 + u_1, \quad u_1 \in W_1$.

ii) $X_2 = P_2 - u_2, \quad u_2 \in W_2$.

iii) $\overrightarrow{P_1P_2} = u_1 + u_2 + v, \quad v \in (W_1 + W_2)^\perp$.

iv) $u_1 + u_2 = u, \quad u \in (W_1 + W_2)$.

14.5 Isometries i desplaçaments

Isometries

Una aplicació $f : E_1 \to E_2$ entre dos espais afins euclidians es diu isometria si

$$d(f(P), f(Q)) = d(P, Q), \quad \forall P, Q \in E_1 \tag{14.13}$$

Observem que f és injectiva.

Siguin E_1, E_2 espais afins euclidians amb espais vectorials associats V_1, V_2 i productes escalars $\langle - \mid - \rangle_1$, $\langle - \mid - \rangle_2$ respectivament. Sigui $f : E_1 \to E_2$ una isometria. Llavors l'aplicació

$$\tilde{f} : V_1 \to V_2 \tag{14.14}$$

definida per $\tilde{f}(\overrightarrow{PQ}) = \overrightarrow{f(P)f(Q)}$ està ben definida, és lineal i

$$\left\langle \tilde{f}(u_1) \mid \tilde{f}(u_2) \right\rangle_2 = \langle u_1 \mid u_2 \rangle_1, \quad \forall u_1, u_2 \in V_1 \tag{14.15}$$

i es diu aplicació lineal associada a f.
A més, si $g : V_1 \to V_2$ és una aplicació lineal que conserva el producte escalar, $P_1 \in E_1$ i $P_2 \in E_2$, llavors l'aplicació

$$\begin{array}{cccc} \tilde{g}: & E_1 & \to & E_2 \\ & P_1 + u_1 & \mapsto & P_2 + g(u_1) \end{array} \tag{14.16}$$

és una isometria i $\tilde{\tilde{g}} = g$.

Desplaçaments

Sigui E un espai afí euclidià de dimensió finita. Un desplaçament en E és una isometria de E en ell mateix.

Considerem l'espai afí euclidià (estàndard) $\mathbb{R}^n$. Sigui

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \tag{14.17}$$

un desplaçament. Llavors:

$$f \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_1 \\ \vdots \\ P_n \end{pmatrix} + A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \tag{14.18}$$

i $(P_1, \ldots, P_n)$ i $A \in M(n, \mathbb{R})$ són fixats per f.