MECÀNICA ANALÍTICA

Pere Barber Lloréns

- **Principi dels Treballs Virtuals**: Estàtica
  - Condició d'equilibri: $\vec{F_i} = 0$ on $\vec{F_i} = \vec{F_i}^{(e)} + \vec{R_i}$
  - Lligams ideals: $\vec{R_i} = 0$

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} \vec{F_i}^{(e)} \delta\vec{r_i} = 0}$$

- **Principi d'Alembert**: Dinàmica
  - Condició de moviment: $\vec{F_i} = \dot{\vec{p_i}}$
  - Lligams ideals: $\vec{R_i} = 0$

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} \left(\vec{F_i}^{(e)} - \dot{\vec{p_i}}\right) \delta\vec{r_i} = 0}$$

  - Amb coordenades generalitzades:

$$\boxed{\sum_{j=1}^{n} \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q_j}} - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j\right)\delta q_j = 0}$$

  on T és *energia cinètica* i Q és la *força efectiva*. $T = T(q_j, \dot{q_j}, t)$.

- **Forma General de les Eq's Euler-Lagrange**:

$$\boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q_j}} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j}$$

- **Lagrangià**: Si imposem que les forces aplicades poden ser derivades d'una *energia potencial* del tipus $V(\vec{r_1}, \ldots, \vec{r_N}; t)$, definim el *Lagrangià* com:

$$\boxed{L \equiv T - V} \qquad \boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q_j}} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0}$$

Potencial generalitzat del tipus $U(\vec{r_i}, \vec{v_i}, t) = U(q_j, \dot{q_j}, t)$:

$$\vec{F_i} = \frac{d}{dt}\frac{\partial U}{\partial \vec{v_i}} - \frac{\partial U}{\partial \vec{r_i}}$$

- **Propietats Bàsiques del formalisme Lagrangià**:
  - Tenint un lagrangià L i un L' estan relacionats per una funció arbitrària $F(q_j, t)$:

$$L'(q_j, \dot{q_j}, t) = L(q_j, \dot{q_j}, t) + \frac{dF(q_j, t}{dt}$$

  - Les equacions del moviment són independents del conjunt de coordenades generalitzades

- **Moment generalitzat p_j (conjugat-canònic)**:

$$\boxed{p_j \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q_j}} = p_j(q_j, \dot{q_j}, t)} \qquad \boxed{\dot{p_j} = \frac{\partial L}{\partial q_j}}$$

- **Coordenada Cíclica**: q_j és *cíclica* sii $\frac{\partial L}{\partial q_j} = 0$.

- **Funció "energia" o "de Hamilton" h**:

$$\boxed{h(q_j, \dot{q_j}, t) \equiv \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q_j}}\dot{q_j}\right) - L} \qquad \boxed{\dot{h} = \frac{dh}{dt} = -\frac{\partial L}{\partial t}}$$

- **Simetries i conservacions**:

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \longrightarrow q_j \text{ és cíclica } \longrightarrow p_j = \text{const.}$$
$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0 \longrightarrow t \text{ és cíclica } \longrightarrow h = \text{const.}$$

- **Quan $h = E$?**: $T = T_2 + T_1 + T_0$. Per tal de què $h = E$:
  1. Sistema sotmès a lligams *esclerònoms*:
  $$\frac{\partial r_i}{\partial t} = 0 \longrightarrow T_1 = T_0 = 0 \longrightarrow T = T_2$$
  2. El potencial és *no generalitzat*: $V(\vec{r_i}, t) = V(q_j, t)$
  $$L_2 = T_2 \quad L_1 = T_1 \quad L_0 = T_0 - V \longrightarrow L = T - V$$

Per tant, aplicant 1 i 2:

$$\boxed{h = L_2 - L_0 = T_2 - T_0 + V = T + V = E}$$

$$\text{Si a més } \frac{\partial L}{\partial t} = 0 \longrightarrow \boxed{h = E = \text{const.}}$$

En general, perquè E es conservi, desenvolupant ha d'ocórrer que:

$$\boxed{0 = \frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt}(T_1 + 2T_0) - \frac{\partial T}{\partial t} + -\frac{\partial V}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n} \tilde{Q}_j \dot{q}_j}$$

- **Formulació Hamiltoniana**: Base de la Mecànica Quàntica i de la Mecànica Estadística. Amb la transformada de *Legendre* tenim que el *Hamiltonià* és:

$$\boxed{H(q_j, p_j, t) = \sum_{j=1}^{n} p_j \dot{q_j} - L(q_j, \dot{q_j}, t)}$$

L'HAMILTONIÀ S'ESCRIU AMB MOMENTS

- **Equacions canòniques de Hamilton**:

$$\boxed{\dot{q_j} = \frac{\partial H}{\partial p_j}} \qquad \boxed{\dot{p_j} = -\frac{\partial H}{\partial q_j}}$$

Cal destacar que tenim una relació directa entre *Hamiltonià* i *Lagrangià*:

$$\boxed{\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}} \qquad \boxed{\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{dH}{dt}}$$

- **Simetries i conservacions**:

$$\frac{\partial H}{\partial q_j} = 0 \longrightarrow q_j \text{ és cíclica } \longrightarrow p_j = \text{const.}$$
$$\frac{\partial H}{\partial t} = 0 \longrightarrow t \text{ és cíclica } \longrightarrow H = \text{const.}$$

- **Quan $H = E$?**: Dues condicions:
  1. Sistema sotmès a lligams *esclerònoms*:
  $$\frac{\partial r_i}{\partial t} = 0 \longrightarrow T_1 = T_0 = 0 \longrightarrow T = T_2$$
  2. El potencial és *no generalitzat*: $V(\vec{r_i}, t) = V(q_j, t)$
  $$L_2 = T_2 \quad L_1 = T_1 \quad L_0 = T_0 - V \longrightarrow L = T - V$$

- **Claudàtors de Poisson**: Siguin $f(\vec{q}, \vec{p}, t)$ i $g(\vec{q}, \vec{p}, t)$ dues funcions arbitràries de les variables canòniques $(\vec{q}, \vec{p})$ i dels temps t. Aleshores:

$$[f, g]_{\{\vec{q}, \vec{p}\}} \equiv \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial q_j}\frac{\partial g}{\partial p_j} - \frac{\partial g}{\partial q_j}\frac{\partial f}{\partial p_j}\right)$$
$$= \left(\frac{\partial f}{\partial \vec{q}}\right)^T \frac{\partial g}{\partial \vec{p}} - \left(\frac{\partial q}{\partial \vec{q}}\right)^T \frac{\partial f}{\partial \vec{p}}$$

Propietats:

1. Antisimètrica: $[A, B] = -[B, A] \rightarrow [A, A] = 0$
2. Linealitat: $[aA + bB, C] = a[A, C] + b[B, C]$
3. $[A \cdot B, C] = A[B, C] + [A, C]B$
4. Id. Jordan: $[[A, B], C] + [[B, C], A] + [[C, A], B] = 0$

- **Teorema de Poisson-Jacobi**: Si $f_1(\vec{q}, \vec{p}, t)$ i $f_2(\vec{q}, \vec{p}, t)$ són constants del moviment ($\dot{f_1} = \dot{f_2} = 0$) aleshores $[f_1, f_2]$ també és una constant del moviment ($\dot{[f_1, f_2]} = 0$)