1 Resolució d'equacions diferencials

Equacions de primer ordre

Equacions homogènies

$\boxed{M(x,y)\,\mathrm{d}x + N(x,y)\,\mathrm{d}y = 0}$ amb M i N del mateix grau. Es resolen per separació de variables: $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\dfrac{M}{N} \equiv f\left(\dfrac{y}{x}\right)$.

$$\text{Canvi: } y = vx \Rightarrow v + \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}x = f(v) \tag{1.1}$$

Mètode de Picard

$\boxed{y' = f(x,y)}$ amb solució $y(x_0) = y_0$.

$$y_n = y_{n-1} + \int_{x_{n-1}}^{x} f(x, y_{n-1})\,\mathrm{d}x \tag{1.2}$$

Equacions lineals

$\boxed{y' + P(x)y = Q(x)}$.

$$y = Ce^{-\int P(x)\,\mathrm{d}x} + e^{-\int P(x)\,\mathrm{d}x}\int Q(x)e^{\int P(x)\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x \tag{1.3}$$

Equacions de Bernoulli

$\boxed{y' + P(x)y = Q(x)y^n}$.

$$\text{Canvi: } z = y^{1-n} \tag{1.4}$$

Equacions de Ricatti

$\boxed{y' = P(x)y^2 + Q(x)y + R(x)}$ amb solució partitcular y_p.

$$\text{Canvi: } y - y_p = z \tag{1.5}$$

Equacions de Clairaut

$\boxed{y = xy'' + f(y')}$.

$$\text{Canvi: } y' = C \Rightarrow y = xC^2 + f(C) \tag{1.6}$$

Envolvent $\Rightarrow x = -f'(C)$; és una solució singular no inclosa a la general.

Equacions exactes

$\boxed{M(x,y)\,\mathrm{d}x + N(x,y)\,\mathrm{d}y = 0}$. Exacta si $\partial M/\partial y = \partial N/\partial x$ ($\mathrm{d}f = M\,\mathrm{d}x + N\,\mathrm{d}y \equiv 0$).

$$C = \int M\,\mathrm{d}x + \int \left(N - \frac{\partial}{\partial y}\int M\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y \tag{1.7}$$

Factors integrants

$\boxed{\mu M(x,y)\,\mathrm{d}x + \mu N(x,y)\,\mathrm{d}y = 0}$ exacta.

$$\mu = e^{\int \mathrm{FI}}$$

$$\mathrm{FI} = \begin{cases} G = \dfrac{1}{M}\left(\dfrac{\partial N}{\partial x} - \dfrac{\partial M}{\partial y}\right) \\ H = \dfrac{1}{N}\left(\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}\right) \end{cases} \tag{1.8}$$

Equacions lineals

Coeficients constants

$\boxed{y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \cdots + p_n y = Q(x)}$.

La solució de la reduïda depèn de l'arrel del polinomi de derivades $P(D)$:

- $m \in \mathbb{R}$: $y = e^{m_1 x}(A_1 + A_2 x + \dots) + e^{m_2 x}(B_1 + B_2 x + \dots) + \dots$
- $\alpha \pm \beta\imath \in \mathbb{C}$: $y = e^{\alpha x}[(A_1 + A_2 x + \dots)\sin(\beta x) + (B_1 + B_2 x + \dots)\cos(\beta x)] + \dots$

Per a $Q(x)$ amb forma $x^n e^{\alpha x}$ o $x^n e^{\alpha x}(\cos\beta x + \sin\beta x)$ es fa a través dels anihiladors.

Variació de paràmetres

$\boxed{y'' + P(x)y' + Q(x)y = R(x)}$. Amb solucions LI de la reduïda u_1 i u_2. Permet trobar la solució per a $R(x)$ diferents del casos del mètode dels anihiladors.

$$y = -u_1 \int \frac{Ru_2}{W} + u_2 \int \frac{Ru_1}{W} \tag{1.9}$$

Equació de Cauchy–Euler

$\boxed{x^2y'' + pxy' + qy = R(x)}$.

$$\text{Canvi: } x = e^t \Rightarrow y'' - y' + pxy' + qy = R(t) \tag{1.10}$$

Equacions exactes de 2n ordre

$\boxed{P_2(x)y'' + P_1(x)y' + P_0(x)y = R(x)}$. Exacta si $P_2'' - P_1' + P_0 \equiv 0$.

$$P_2y' + (P_1 - P_2')y = C + \int R \, \mathrm{d}x \tag{1.11}$$

Reducció d'ordre

$\boxed{y'' + P(x)y' + Q(x)y = R(x)}$ amb una solució particular $u(x)$.

$$\text{Canvis successius: } y = tu \quad t' = v \tag{1.12}$$

Transformades de Laplace