



Modelado, análisis, simulación y control del movimiento oscilatorio de un edificio ante un sismo

Gil Félix, Abraham; Hernández Coronado, Joshua Daniel; Sandoval Suarez, Cristian Aldo; Vidaña Cerda, Brenda Paola

Profesores: Martínez Martínez, Rafael; Otero Hernández, José Antonio; Santiago Acosta, Rubén Darío

*Departamento de Ingeniería y Ciencias, Tecnológico de Monterrey campus Estado de México
Av Lago de Guadalupe KM 3.5, Margarita Maza de Juárez, Cd López Mateos, Méx., C. P. 52926, México*

16 de junio de 2022

Resumen: En este artículo se discute y presenta el modelado, análisis, simulación y control del comportamiento de un edificio ante un movimiento oscilatorio de un sismo. Para esto se presenta un análisis de datos de los sismos registrados en México y un ejemplo de un edificio icónico en México, la Torre Latinoamericana diseñada con un sistema anti-sismos. Para el modelado del edificio se estudiaron y se usaron como base los Sistemas de Varios Grados de Libertad (MDOFS) y el Modelo Múltiple Masa-Resorte-Amortiguador. De igual forma, se implementó el Modelo de Espacio de Estado para obtener la solución analítica del sistema. En busca de la estabilidad de la estructura, se practicó control al sistema con ayuda del Modelo de Retroalimentación con y sin Observador y el Modelo de Control Óptimo LQR. Finalmente, se presenta las estructuras de funcionamiento de las simulaciones y sus resultados.

Palabras clave: sismos, modelación, teoría de control, espacio de estados, simulación.

1. Introducción

Un sismo es un fenómeno que se produce, principalmente, por la ruptura de la corteza terrestre, lo cual genera vibraciones que se propagan y son percibidas como sacudidas con duración e intensidad variables. [2] Los sismos se clasifican por su origen: naturales y artificiales:

- Naturales

Sismos tectónicos Son aquellas que son generadas por la interacción de las placas tectónicas. Existen 2 subgrupos: los interplacas que son ocasionados por fricción en las zonas de contacto entre las placas, y los intraplaca generados por la parte interna de las placas.

Sismos volcánicos Ocasionado principalmente por la fractura de rocas debido al movimiento de magma, este tipo de sismos pueden ocurrir incluso si el volcán no hace erupción.

Sismos de colapso Generados por el derrumbamiento de cavernas, minas, montañas. Suelen ocurrir cerca de la superficie y tener un área de alcance reducida.

- Artificiales Producidos por el ser humano al realizar explosiones con fines de investigación, exploración,

explotación, etcétera. Estas explosiones pueden ser comunes o nucleares, en el caso de nucleares son suficientemente grandes de modo que las detectan instrumentos en diversas partes del planeta, pero sentidos únicamente en zonas cercas al origen. Los sismos naturales no están ligados con los artificiales, ocurren de forma independiente. [3]

Los sismos son compuestos de ondas sísmicas, al ocurrir un sismo, 3 tipos de ondas producen la sacudida que es percibida y causan daños, pero únicamente 2 se propagan en el interior de la Tierra, las llamadas ondas internas.

La onda primaria o también conocida como onda P es una de las ondas internas ya que se puede propagar en un medio sólido (rocas) o líquido (magma, océanos). Esta es la más rápida, tiene una velocidad entre $1100 - 8000 \frac{m}{s}$ dependiendo del tipo de roca. Se caracteriza por comprimir y expandir la roca alternadamente. El segundo tipo de onda, onda secundaria u onda S, tiene menor velocidad, viaja normalmente entre $500 - 4,400 \frac{m}{s}$, sin embargo, tienen mayor amplitud. A diferencia de la onda P, la onda S deforma el material de forma transversal a su trayectoria, por ende, solo se transmite en sólidos. Al ocurrir un sismo, la onda P se siente generando vibraciones horizontales, segundos después se percibe la onda S la cual genera movimientos

verticales. Estas 2 ondas son medibles con base en su magnitud.

El tercer tipo de onda son las superficiales las cuales se propagan por la parte superficial de la corteza terrestre. La amplitud disminuye a medida que la profundidad aumenta. Este tipo de ondas viajan más despacio que las internas. Existe una subclasificación en las ondas superficiales: Ondas Love y Ondas Rayleigh. La primera de estas deforman las rocas de forma similar a las ondas S pero en dirección horizontal, mientras que las segundas generan movimiento verticales parecidas a las olas marinas. Las ondas Love son más rápidas que las Rayleigh, sin embargo, las Rayleigh pueden afectar a los cuerpos de agua puesto que la onda se propaga en ellos, mientras que las Love no.

Existen diferentes escalas para medir los sismos entre esas la escalada Mercalli la cual evalúa cualitativamente el daño causado por un sismo, esta escala surge en 1902 y fue modificada y llamada Modificada de Mercalli (MM) en 1931, desde entonces cuenta con 12 grados de intensidad con las respectivas características de cada grado (Fig. 1).

Grado de Intensidad		Descripción
I	Muy Débil	No se advierte, sino por pocas personas y en condiciones de perceptibilidad especialmente favorables.
II	Débil	Se percibe sólo por algunas personas en reposo, particularmente aquellas que se encuentran ubicadas en los pisos superiores de los edificios.
III	Leve	Se percibe en los interiores de los edificios y casas.
IV	Moderado	Los objetos colgantes oscilan visiblemente. La sensación percibida es semejante a la que produciría el paso de un vehículo pesado. Los automóviles detenidos se mecen.
V	Poco Fuerte	La mayoría de las personas lo percibe aun en el exterior. Los líquidos oscilan dentro de sus recipientes y pueden llegar a derramarse. Los péndulos de los relojes alteran su ritmo o se detienen. Es posible estimar la dirección principal del movimiento sísmico.
VI	Fuerte	Lo perciben todas las personas. Se siente inseguridad para caminar. Se quiebran los vidrios de las ventanas, la vajilla y los objetos frágiles. Los muebles se desplazan o se vuelcan. Se hace visible el movimiento de los árboles, o bien, se les oye crujir.
VII	Muy Fuerte	Los objetos colgantes se estremecen. Se experimenta dificultad para mantenerse en pie. Se producen daños de consideración en estructuras de albañilería mal construidas o mal proyectadas. Se dañan los muebles. Caen trozos de mampostería, ladrillos, parapetos, cornisas y diversos elementos arquitectónicos. Se producen ondas en los lagos.
VIII	Destruyivo	Se hace difícil e inseguro el manejo de vehículos. Se producen daños de consideración y aun el derrumbe parcial en estructuras de albañilería bien construidas. Se quiebran las ramas de los árboles. Se producen cambios en las corrientes de agua y en la temperatura de vertientes y pozos.
IX	Muy Destruyivo	Pánico generalizado. Todos los edificios sufren grandes daños. Las casas sin cimentación se desplazan. Se quiebran algunas canalizaciones subterráneas, la tierra se fisura.
X	Desastroso	Se destruye gran parte de las estructuras de albañilería de toda especie. El agua de canales, ríos y lagos sale proyectada a las riberas.
XI	Muy Desastroso	Muy pocas estructuras de albañilería quedan en pie. Los rieles de las vías férreas quedan fuertemente deformados. Las cañerías subterráneas quedan totalmente fuera de servicio.
XII	Catastrófico	El daño es casi total. Se desplazan grandes masas de roca. Los objetos saltan al aire. Los niveles y perspectivas quedan distorsionados.

Figura 1: Tabla de Escala Modificada de Mecalli.[4]

Otra escala de magnitud es Richter (Fig. 2), surge en 1935 y utiliza la energía sísmica liberada en cada sismo independientemente de la intensidad para clasificar de forma cuantitativa el fenómeno. Se basa en la amplitud de onda

registrada y sus valores van del 1 al extremo abierto. No tiene límite teóricamente, sin embargo, 9 equivale a un Grado XII de Mercalli.

Magnitud	Efectos del sismo o terremoto
Menos de 3.5	Generalmente no se siente, pero es registrado.
3.5 - 5.4	A menudo se siente, pero sólo causa daños menores.
5.5 - 6.0	Ocasiona daños ligeros a edificios.
6.1 - 6.9	Puede ocasionar daños severos en áreas donde vive mucha gente.
7.0 - 7.9	Terremoto mayor. Causa graves daños.
8 o mayor	Gran terremoto. Destrucción total a comunidades cercanas.

Figura 2: Tabla de Escala de magnitud o Richter.[5]

1.1. Sismología en México

El Servicio Sismológico Nacional de México (SSN) es una dependencia del Instituto de Geofísica de la Universidad Nacional Autónoma de México que registra, almacena y distribuye datos del movimiento terrestre para informar a las autoridades y población sobre la sismicidad del país. A continuación se muestra un análisis de sismicidad en México, hecho con datos registrados desde enero 1, 1985 hasta junio 9, 2022 tomados del SSN.

La base de datos contaba con 252,126 registros de sismos y 10 variables que se mencionan a continuación:

- Fecha
- Hora
- Magnitud
- Latitud
- Longitud
- Profundidad
- Referencia de localización
- Fecha UTC
- Hora UTC
- Estatus

En el procesamiento de los datos se eliminaron las variables *Fecha UTC* y *Hora UTC* puesto que se rebajó con las variables *Fecha* y *Hora*. Se eliminaron los valores “no calculables” de la variables *Magnitud*, al igual que los valores “en revisión” y “menos de 1” de la variable *Profundidad*. Para la variable *Estatus* se realizó una binarización donde “revisado” tomo el valor 0 y “verificado” el valor 1. Finalmente, se reformuló el formato de formato de las variables *Fecha* y *Hora* para que estas se pudieran usar en el análisis.

Una vez concluido el pre-procesamiento y la limpieza de los datos se realizaron diferentes métodos de visualización de datos que se muestran a continuación:

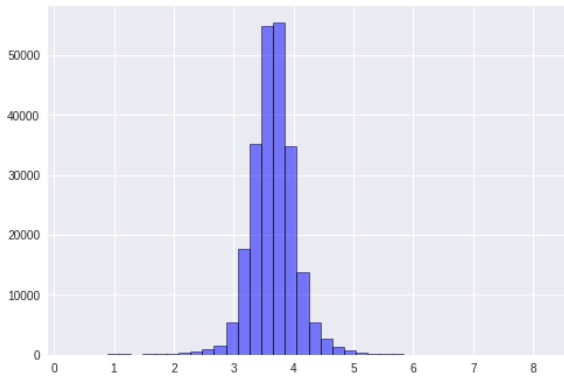


Figura 3: Distribución de la magnitud de los sismos de 1985 a 2022.

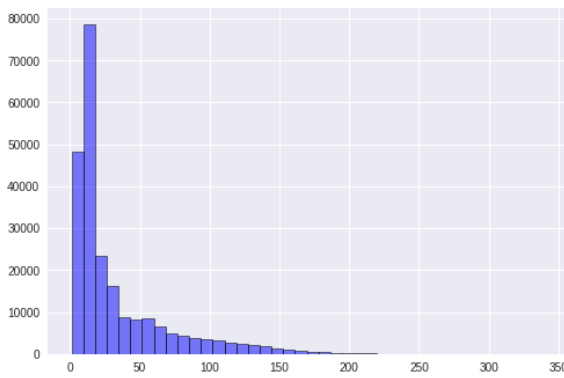


Figura 4: Distribución de la profundidad de los sismos.

La Figura 3 muestra la distribución de la magnitud que han sido registrados, esta distribución tiene un comportamiento normal y muestra de mejor manera el intervalo de magnitud que presentan los sismos en México. Por otro lado, la distribución de la profundidad tiene un comportamiento exponencial, esto se puede observar en la Figura 4.



Figura 5: Magnitud promedio (Richter) por año.

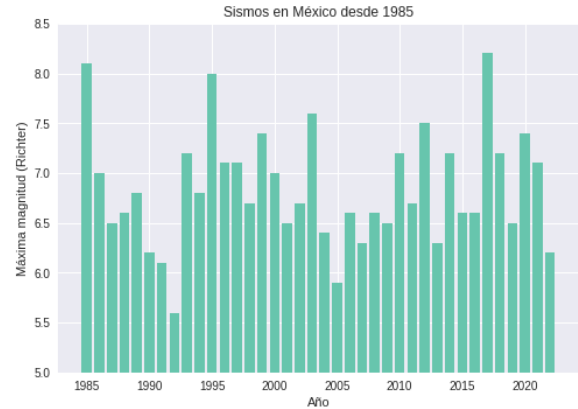


Figura 6: Magnitud máxima (Richter) por año.

En la gráfica de la Figura 5 se muestra la magnitud promedio de los sismos registrados en cada año, aquí se puede observar que la magnitud promedio ha ido disminuyendo con el paso de los años, esto se relaciona con que con el paso de los años, la tecnología ha ido mejorando y las herramientas para medir sismos también y cada vez son capaces de detectar sismos de menor magnitud. Mientras que en la gráfica de la Figura 6, se muestra la magnitud más alta registrada cada año, mostrando los sismos con mayor magnitud que fueron en 1985, 1995 y 2017.

Del mismo modo, se analizó el comportamiento de los sismos por mes; en la gráfica de la Figura 7 se muestran todos los sismos registrados en cada mes sin importar el año. En esta gráfica se puede observar que los meses con mayor cantidad de sismos registrados son enero, febrero y septiembre. Mientras que la magnitud promedio de los sismos en cada mes se muestra en la gráfica de la Figura 8, en esta se puede ver que septiembre es el mes que mayor promedio tiene seguido de octubre. La Figura 9 se muestra la gráfica de las magnitudes máximas de cada mes donde se muestra que septiembre tiene una magnitud máxima de 8.2 y octubre 8.

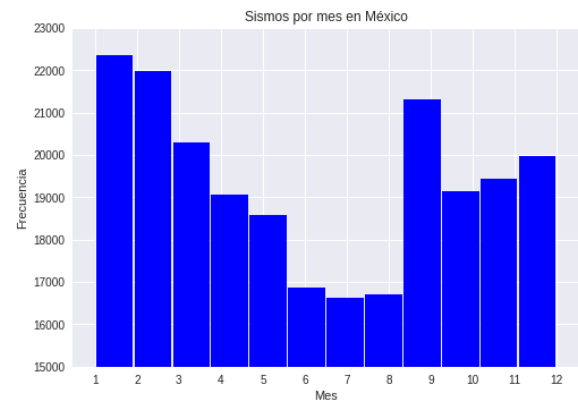


Figura 7: Sismos registrados por meses.

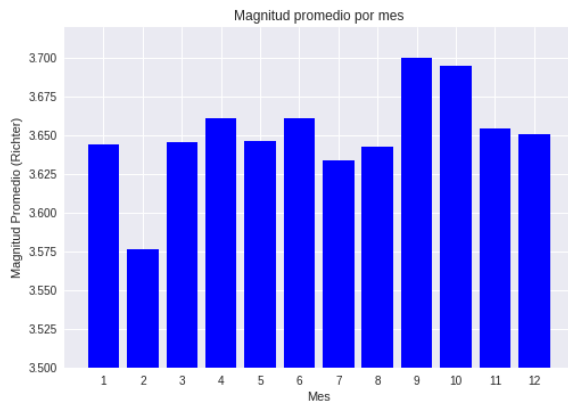


Figura 8: Magnitud promedio (Richter) por mes.

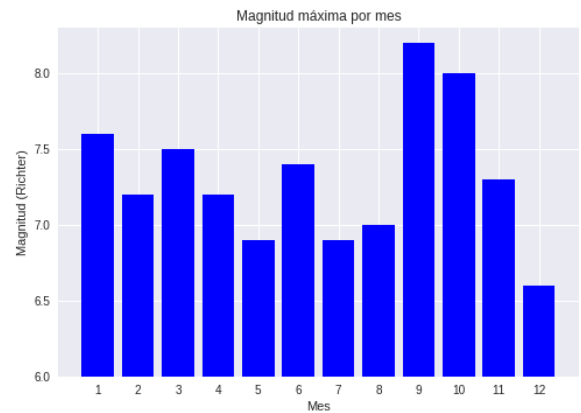


Figura 9: Mágnitud máxima (Richter) por mes.

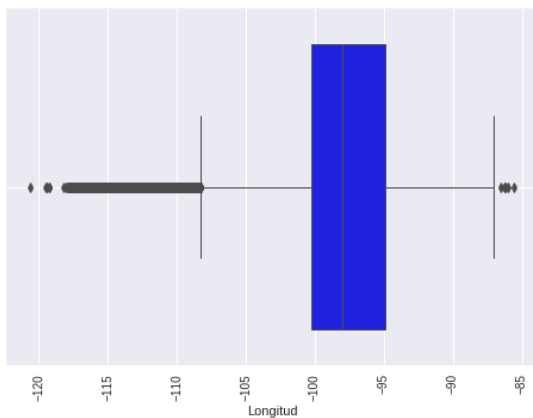


Figura 10: Gráfica de caja y bigotes de longitud.[5]

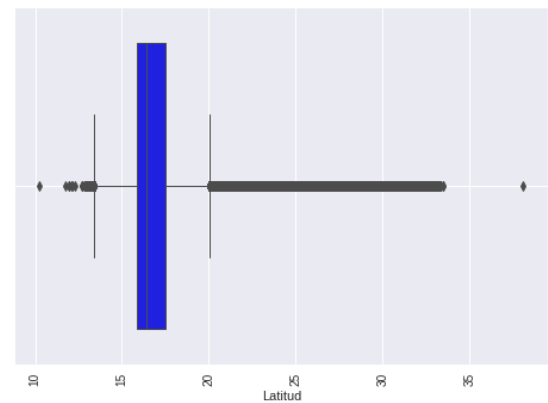


Figura 11: Gráfica de caja y bigotes de latitud.

De igual manera, se realizaron gráficas de caja y bigote para conocer las distribuciones de la longitud y latitud respectivamente (Figuras 10 Y 11). En el caso de la longitud, los cuartiles 2 y 3 están dentro de -100 y -95 y su media está en 98. Mientras que en la latitud, los cuartiles 2 y 3 están en 16 y 17 y su media está en 16. Esto viéndolo geográficamente demuestra que la zona donde más epicentros se originan es entre las coordenadas con longitudes -100 a -95 y latitudes 16 y 17. En estas coordenadas se encuentra localizada la zona de subducción de la Placa de Cocos y la Placa de Norteamérica (Figura 12).



Figura 12: Placas tectónicas de México (Ilustración de: SSN[6])

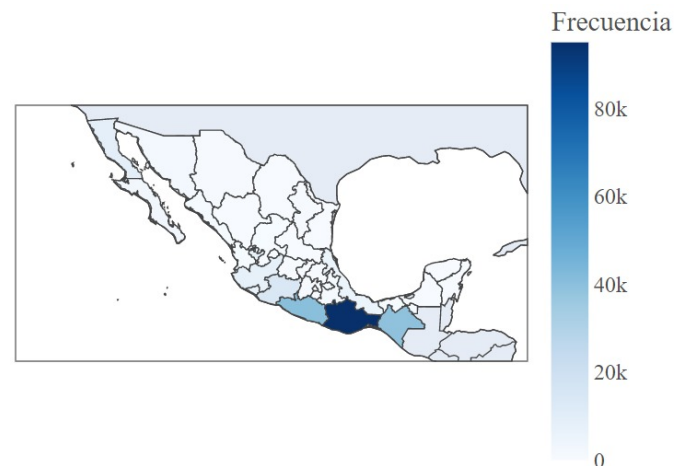


Figura 13: Estados con mayor actividad sísmica.

Con esto se puede concluir que Oaxaca, Guerrero y Chiapas son los estados con mayor actividad sísmica como se en la Figura 13.

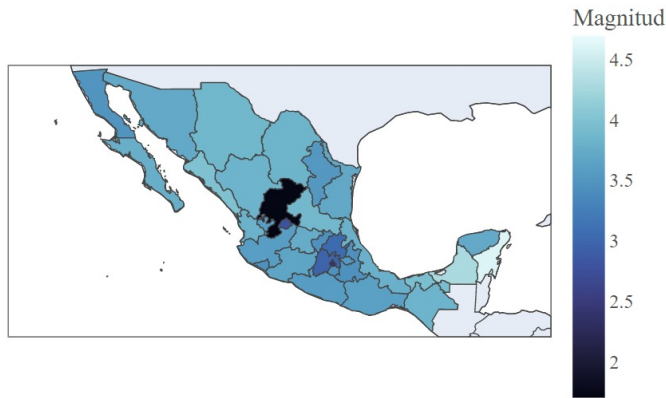


Figura 14: Magnitud promedio por estado.

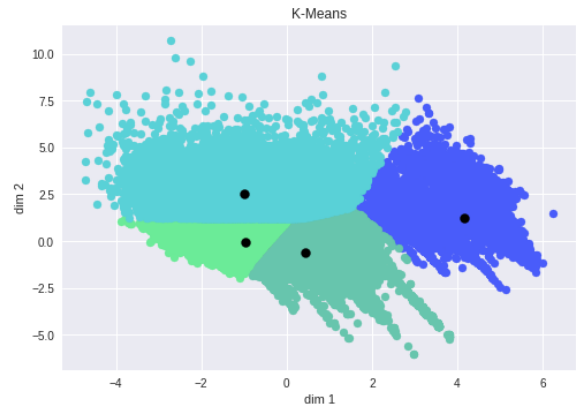


Figura 16: Agrupación de los datos.

La magnitud promedio de sismos por estado se puede ver en la Figura 14. Los estados señalados de color azul claro no representan a los estados más propensos a registrar un sismo, al contrario, su número de registro de sismos es tan bajo que los sismos con una magnitud moderada es la magnitud promedio, mientras que en estados como Chiapas y Oaxaca que suelen registrar sismos diarios de baja magnitud, su promedio se reduce y, por lo tanto, los sismos de alta magnitud no se ven reflejados en el promedio.

Para finalizar el análisis de los sismos registrados, se realizó un agrupamiento (clustering) de los datos. Para esto se estandarizaron los datos y se realizó el método del codo para ver el número óptimo de clusters, el resultado de esto fueron 4 clusters (Figura 15). Con esta información se implementó kmeans y se validó la coherencia de los grupos con la métrica Silhouette, esta métrica va de -1 a 1, donde los valores altos indican un buen agrupamientos. Los clusters realizados obtuvieron un coeficiente de Silhouette de 0.4091, siendo esto un buen agrupamiento. Para la graficación de los grupos, se utilizó componente principal para poder visualizar la información (Figura 16).

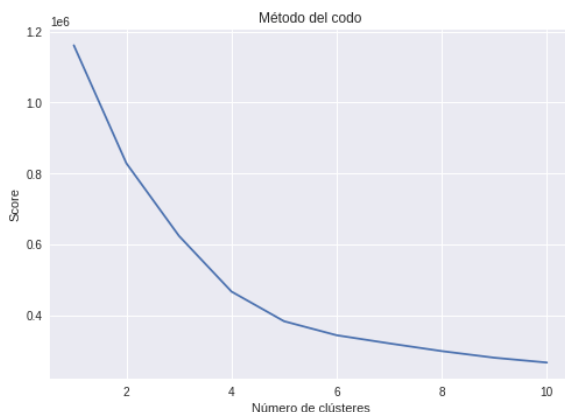


Figura 15: Gráfica del método del codo.

Características de los clusters:

- Cluster 1
Magnitud promedio: 3.7862
Latitud promedio: 167.2584
Longitud promedio: -949.3359
Profundidad promedio: 102.804.52
Año promedio: 2016.7906
- Cluster 2
Magnitud promedio: 3.5980
Latitud promedio: 29.9816.64
Longitud promedio: -113.4794.30
Profundidad promedio: 12.379.03
Año promedio: 2016.125.42
- Cluster 3
Magnitud promedio: 4.113.71
Latitud promedio: 16.602
Longitud promedio: -986.0871
Profundidad promedio: 262.19.77
Año promedio: 1999.32
- Cluster 4
Magnitud promedio: 3.56
Latitud promedio: 16.71
Longitud promedio: -98.22
Profundidad promedio: 19.11
Año promedio: 2017.932015.58

Una de las principales componentes fue la profundidad, esta es la razón por la que el cluster 1 tiene profundidades alrededor de 14.52, el cluster 2 tiene profundidad de 129.03 y el cluster 3 una profundidad media de 62.19, es decir, el cluster 1 tiene profundidad baja, el cluster 3 media y el cluster 2 alta. Otro componente importante es longitud, siendo esta otra de las componentes más importantes y nos habla de en que parte de la longitud se encuentra. Al realizar una mapa de calor, se puede observar que la profundidad y la longitud son las variables con mayor correlación (0.35) (Figura 17).

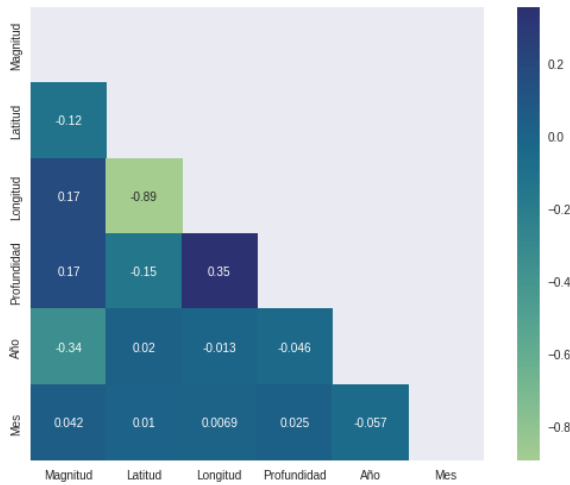


Figura 17: Mapa de calor.

Con base en lo visto en el análisis de la base de datos de los registros de los sismos en México, se puede concluir que México es un país con riesgos sísmico alto y cuenta con zona de riesgo sísmico muy alto, como lo es la costa del Océano Pacífico, donde termina la Placa de Norte América y empieza la Placa de Cocos.

Debido al riesgo sísmico y las catástrofes que han ocurrido como lo fueron los sismos de 1985, 1995 y 2017, se implementaron políticas de construcción que deben aplicarse al diseño sísmico de edificios urbanos para que las estructuras solo sufran daños que no conduzcan a la interrupción de la ocupación del edificio, además de que no ocurran fallas estructurales mayores ni pérdidas de vidas, aunque pueden presentarse daños y/o deformaciones residuales de consideración que lleguen a afectar el funcionamiento del edificio y requerir reparaciones importantes como resultado de los sismos presentados a lo largo de la vida de la construcción. [7]

La primera política con nombre *Normas técnicas complementarias del reglamento de construcciones para el DF 1987* surge en noviembre 19 de 1987. En octubre 6 de 2004 se modificó y se establecieron las *Normas Técnicas Complementarias Sobre Criterios y Acciones para el Diseño Estructural de las Edificaciones* las cuales estuvieron en vigor hasta el sismo de septiembre 2017 que tras las pérdidas materiales y humanas se revisaron y modificaron para salvaguardar la vida de más personas. De esta forma, se establecieron las actuales políticas con nombre *Norma Técnica Complementaria para la Revisión de la Seguridad Estructural de las Edificaciones (NTC-RSEE)* establecida diciembre 2017.

2. Análisis de sistema

La modelación matemática ayuda a comprender que el sistema debe ser estable siempre y cuando las raíces del sistema sean negativas en su parte real. Los modelos matemáticos permite simular situaciones y contexto similares a los

que ocurren cuando un edificio interactúa con un sismo lo que permite observar el comportamiento entre estos dos. Así mismo permite predecir las áreas del edificio que tiene mayor y menor riesgo de colapsar en caso de sismo, lo que permite diseñar estructuras con mayor capacidad y resistencia contra estos fenómenos naturales.

La Torre Latinoamericana es un ejemplo de un edificio diseñado inteligentemente con un sistema anti-sismos. La Torre Latinoamericana es un rascacielos ubicado en el Centro Histórico de la Ciudad de México. Su ubicación céntrica, su altura de 181.33 metros, incluyendo sus 44 pisos y la antena, y su historia la han convertido en uno de los edificios más emblemáticos de la Ciudad de México. Forma parte de las seis estructuras en estar en una zona de alto riesgo sísmico junto con La Torre Taipei 101, La Torre Ejecutiva Pemex, La Torre Mayor, El U.S. Bank Tower y El Costanera Center.[9]



Figura 18: Datos importantes de la Torre Latinoamericana. [9]

La Torre Latinoamericana es el primer edificio diseñado dinámicamente en el mundo y por lo mismo, se ha convertido en un referente de la ingeniería moderna. No hay registro público de la existencia de un modelo matemático, aunque es seguro se haya contemplado uno para su diseño y construcción ya que este edificio cuenta con un sistema anti-sismos que le ha permitido resistir desde la fecha de su construcción. El secreto de su resistencia radica en tres factores:

1. Cimentación con apoyo directo que consiste en 361

pilotes de concreto colocados a 33 metros de profundidad donde se encontró que hay una buena capacidad de carga.

2. Principio de flotación donde el cajón consiste en 3 pisos de sótano que fungen como cajones hidráulicos, característica que le permite “flotar” como el casco de un barco pues se aprovecha el agua del subsuelo para que cargue parte del peso del edificio.
3. Principio de compensación, aplicado a través de la sustitución de masas pues para construir el cajón de cimentación se tuvo que retirar tierra y esa masa se compensa con parte del peso del edificio.

Estos 3 factores junto con su estructura de acero permiten que la torre pueda absorber de mejor forma las vibraciones producidas durante un sismo. [12]

El sistema anti-sismos de la Torre Latinoamericana ha sido probado de manera real debido a que ha soportado un gran número de sismos desde su construcción en el año 1956. Su sistema cuenta de una base de 98 amortiguadores que le permiten reducir el esfuerzo estructural ante las vibraciones además de contar con 3 pisos subterráneos que mitigan el impacto en la estructura.

Sumado a que para su construcción se utilizaron vigas de acero, material que permite a las estructuras responder con flexibilidad, de tal forma que al generarse un sismo, la estructura tiene cierta elasticidad que le permite minimizar el impacto del fenómeno. Gracias a esto, el acero es muy utilizado para los elementos estructurales de los edificios [13]. Estas características hacen que la Torre Latinoamericana sea capaz de resistir por más de 3 segundos un terremoto siempre y cuando el terremoto tenga una magnitud en la escala de Richter menor a 8.5 ya que después de ese nivel el edificio podría sufrir de daños que lo lleven a colapsar, aunque en realidad sismos de magnitud mayores a 8.5 no ocurren con mucha frecuencia.

2.1. Modelación

La introducción de dispositivos de disipación de energía dentro del sistema estructural de un edificio es un claro ejemplo del cambio en los criterios de diseño sísmico a consecuencia del desarrollo de nuevas tecnologías (herramientas y estrategias de protección innovadoras).

El sistema de un solo grado de libertad (SDOF) es útil para demostrar los principios de disipación de energía, pero no es útil para modelar estructuras de edificios. Por lo que, es necesario modelar con un sistema lineal de varios grados de libertad (MDOF). Sin embargo, es necesario estudiar los elementos de la respuesta dinámica de un SDOF antes de modelar las ecuaciones de movimiento para un edificio de tres pisos.

2.1.1. Sistemas de un solo grado de libertad (SDOF)

El movimiento lateral del modelo básico de un solo grado de libertad (SDOF) consiste en una masa (m) sostenida

por resortes con rigidez elástica lineal total (k), y un amortiguador con viscosidad lineal (c). La presencia de una entrada sísmica en el sistema determina los desplazamientos del suelo, es decir, el modelo después de una fuerza externa responde con un desplazamiento lateral $x(t)$ con respecto al suelo.

Considerando que, la rigidez y las propiedades de amortiguamiento son lineales, la ecuación dinámica general de un SDOF es:

$$M\ddot{x}(t) + B\dot{x}(t) + Kx(t) = -m\ddot{x}_g(t) \quad (1)$$

Además, suponiendo que el sistema está sujeto a una excitación armónica, expresada en forma exponencial compleja, caracterizada por la amplitud F_0 y frecuencia x_n :

$$p(t) = F_0 e^{i\omega_n t} \quad (2)$$

Evaluando la relación de amortiguamiento en el sistema con amortiguador viscoso lineal bajo un historial de tiempo de desplazamiento sinusoidal, se obtiene:

$$u = u_0 \sin(\omega_n t) \quad (3)$$

donde u es el desplazamiento del sistema; u_0 es el amortiguador; y es la amplitud del desplazamiento; y x_n es la frecuencia de excitación.

La fuerza de resistencia medida es:

$$F = F_0 \sin(\omega_n t + \delta) \quad (4)$$

donde F es la respuesta de fuerza del sistema, F_0 es la amplitud de la fuerza y δ es el ángulo de fase.

Dado lo anterior, la ecuación dinámica del sistema SDOF se muestra a continuación:

$$M\ddot{x}(t) + B\dot{x}(t) + Kx(t) = F_0 e^{i\omega_n t} \quad (5)$$

La solución de dicha ecuación diferencial es la suma entre la solución de la ecuación homogénea asociada, representativa de vibraciones libres del sistema y la solución particular.

2.1.2. Sistemas de varios grados de libertad (MDOFS)

Los sistemas estructurales pueden tener un gran número N de parámetros cinemáticos (grados de libertad), y generalmente son considerados como los componentes de un vector $x(t)$. Dicho número N representa también el número de ecuaciones de movimiento del sistema lineal de varios grados de libertad MDOF.

Por lo que, existen N ecuaciones de movimiento del sistema. La ecuación matricial dinámica del sistema tiene la siguiente forma:

$$\hat{M}\ddot{x}(t) + \hat{B}\dot{x}(t) + \hat{K}x(t) = -\hat{M}\ddot{x}_g(t) \quad (6)$$

donde M, B, K representan respectivamente las matrices de masa, amortiguamiento y rigidez del sistema principal, $\bar{M}, \bar{B}, \bar{K}$ simbolizan respectivamente la masa, amortiguamiento y matrices de rigidez del sistema amortiguador lineal. $\hat{M}, \hat{B}, \hat{K}$ está dadas por la ecuación 7. Además, el vector $x_g(t)$ representa la excitación sísmica relacionado con los grados de libertad.

$$\begin{aligned}\hat{M} &= M + \bar{M} \\ \hat{B} &= B + \bar{B} \\ \hat{K} &= k + \bar{K}\end{aligned}\quad (7)$$

La matriz dinámica representa un sistema de coeficientes constantes de N ecuaciones diferenciales de Segundo Orden acopladas. Respecto a la resolución de la ecuación, esta se complica a menos de que $\hat{M}, \hat{B}, \hat{K}$ puedan diagonalizarse por la misma base de vectores.

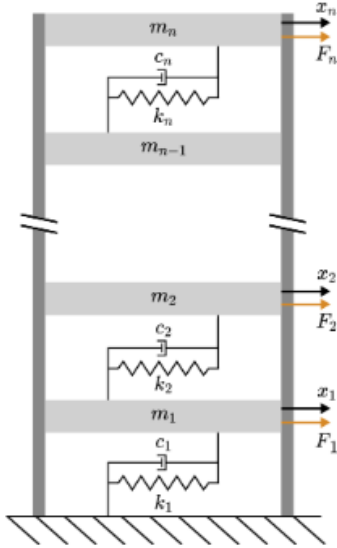


Figura 19: Multiple mass-spring-damper model. (Ilustración de: “Mass-Spring-Damper Systems” Courseware [14])

2.1.3. Implementación Sistema MIMO

El caso de estudio de este apartado es el *Modelo Múltiple Masa-Resorte-Amortiguador*. Se considera un edificio con tres pisos, amortiguadores y resortes (Figura 19).

En este sistema MDOF solo se modela el movimiento horizontal. Asimismo, se supone que las paredes son flexibles y sin masa, que los pisos son masas rígidas conectadas por amortiguadores de resorte (las paredes) y que la ley de Hooke (fuerza restauradora entre pisos) es válida en el sistema.

$$F_r = k_i(x_{i+1} - x_i), \quad (8)$$

donde $x_{i+1} - x_i$ es el desplazamiento del $(i + 1)$ -ésimo piso con respecto al i -ésimo.

Dado que, la respuesta de un sistema MDOF puede verse como la combinación de las respuestas individuales de los sistemas SDOF N (en este caso $N = 3$), las ecuaciones de movimiento que representan el comportamiento del sistema son:

$$\begin{aligned}M_1\ddot{X}_1 - B_2(\dot{X}_2 - \dot{X}_1) - K_2(X_2 - X_1) \\ - B_1(\dot{X}_1) - K_1X_1 &= M_1F_1 \\ M_2\ddot{X}_2 - B_3(\dot{X}_3 - \dot{X}_2) - K_3(X_3 - X_2) \\ - B_2(\dot{X}_2 - \dot{X}_1) - K_2(X_2 - X_1) &= M_2F_2 \\ M_3\ddot{X}_3 - B_3(\dot{X}_3 - \dot{X}_2) - K_3(X_3 - X_2) &= M_3F_3\end{aligned}\quad (9)$$

Ahora bien, para conocer la solución analítica del sistema se decidió pasar el Sistema en Espacio de Estados. Por lo que, a continuación se muestra el *Modelo de Estado* (Ecuación 10) y el *Modelo de Salida* (Ecuación 11) respectivamente:

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{y}_3 \\ \dot{y}_4 \\ \dot{y}_5 \\ \dot{y}_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-(K_1+K_2)}{M_1} & \frac{-(B_1+B_2)}{M_1} & \frac{K_2}{M_1} & \frac{B_2}{M_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{K_2}{M_2} & \frac{B_2}{M_2} & -\frac{(K_2+K_3)}{M_2} & -\frac{(B_2+B_3)}{M_2} & \frac{K_3}{M_2} & \frac{B_3}{M_2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{K_3}{M_3} & \frac{B_3}{M_3} & -\frac{K_3}{M_3} & -\frac{B_3}{M_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M_1} \\ 0 \\ \frac{1}{M_2} \\ 0 \\ \frac{1}{M_3} \end{bmatrix} F \quad (10)$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \end{bmatrix} + 0F \quad (11)$$

Las matrices A, B, C y D del sistema son:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{(K_1+K_2)}{M_1} & -\frac{(B_1+B_2)}{M_1} & \frac{K_2}{M_1} & \frac{B_2}{M_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{K_2}{M_2} & \frac{B_2}{M_2} & -\frac{(K_2+K_3)}{M_2} & -\frac{(B_2+B_3)}{M_2} & \frac{K_3}{M_2} & \frac{B_3}{M_2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{K_3}{M_3} & \frac{B_3}{M_3} & -\frac{K_3}{M_3} & -\frac{B_3}{M_3} \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M_1} \\ 0 \\ \frac{1}{M_2} \\ 0 \\ \frac{1}{M_3} \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (14)$$

$$D = 0 \quad (15)$$

2.2. Análisis

La solución de la ecuación de estado se obtuvo gracias al cálculo de la matriz exponencial asociada de la matriz A (Ecuación 12):

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!} \quad (16)$$

Dado que nuestro sistema es de la forma:

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (17)$$

Resolviendo para X(s) con ayuda de la transformada de Laplace (Ecuación 18). La solución se encuentra en el apartado (??) de Anexos.

$$X(s) = (sI-A)^{-1}x(0) + (sI-A)^{-1}B U(s) \quad (18)$$

La salida analítica del sistema se calculó por medio de la Ecuación 19.

$$y = Cx(t) + Du(t) \quad (19)$$

donde $u(t) = 5\cos(5\pi t)$.

Por fines prácticos esta solución se encuentra en el LiveScript **RetoMa2008BEq3.mlx** [1]

2.3. Estabilidad

Se considera que la estabilidad en sistemas de control cuando se forma o domina un bucle negativo de manera contraria un sistema es inestable cuando el bucle es positivo, Dicho de otro modo, cuando un bucle dominante es un numero impar de relaciones negativas podremos determinar un bucle negativo que nos indique que el sistema es estable. Así mismo la estabilidad es una propiedad de los sistemas de control que es imprescindible y vital para su

interpretación es así que la estabilidad responde a la necesidad del sistema por reaccionar con una variación finita de sus señales de entrada. Dicha estabilidad puede verse representada por la siguiente ecuación.

$$|x(0) - y(0)| = |x(0) - y(0)| < f \quad (20)$$

Cuando nuestra sistema es lineal al ubicar las raíces y analizar que su parte real es negativa hablamos de un sistema estable, aunque cuando el sistema es lineal perdemos precisión pero ganamos control. Así mismo cuando un sistema es no lineal tratamos de obtener un linealización para encontrar el estado estable.

2.3.1. Estabilidad externa (BIBO estabilidad)

Un sistema es BIBO estable si para toda entrada acotada se produce una salida acotada. Un sistema Lineal e Invariable en el Tiempo diferencial causal con entrada 0 BIBO estable si y solo si:

$$\int_{0^-}^{\infty} |h(t)| d\tau \leq M_h \quad (21)$$

Un sistema Lineal e Invariable en el Tiempo diferencial causal con entrada 0 y función de transferencia $H(s)$ propia, es BIBO estable si y solo si cada polo tiene parte real negativa.

2.3.2. Estabilidad interna (estabilidad Lyapunov)

Estabilidad Interna o estabilidad Lyapunov este tipo de estabilidad es conocida principalmente por constar de una condición inicial. Es marginalmente estable o estable si cada condición inicial finita genera una salida acotada; si esta salida tienden a cero cuando el tiempo tiende a infinito, se trata de un sistema asintóticamente estable, de lo contrario, el sistema es inestable. Las siguientes condiciones verifican la definición

- Es marginalmente estable si y solo si algunas de las raíces del polinomio característico tienen parte real cero y no se repiten y las demás tienen parte real negativa.
- Es asintóticamente estable si y solo si las raíces del polinomio tienen parte real negativa.
- Es inestable si y solo si alguna raíz del polinomio característico tiene parte real positiva o alguna que tenga parte real cero se repite.

Al sacar los valores propios de la matriz A se obtuvo la siguiente tabla, en donde se observa que todas las partes reales son negativas por lo tanto el sistema es asintóticamente estable y BIBO estable.

Valor propio
-0.0178 +50.2981i
-0.0178 -50.2981i
-0.0086 +34.0229i
-0.0086 -34.0229i
-0.0008 +11.2620i
-0.0008 -11.2620i

Cuadro 1: Valores propios.

De igual forma, se graficó las respuesta a las condiciones iniciales las cuales se muestran en las Figura 20.

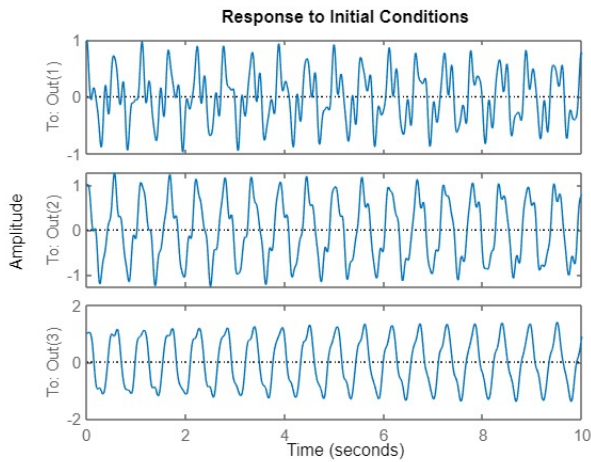


Figura 20: Respuesta a condiciones iniciales.

Con los diagramas de bode (Figura 21) se puede observar los picos que tienen, siendo el de frecuencia 11 (rad/s) el más grande, si la frecuencia de entrada coincide se produce una resonancia, por lo tanto la señal de salida se amplifica y puede tener efectos no deseados como el derrumbe del edificio. Es por esto que lo que se busca es aminorar estos picos.

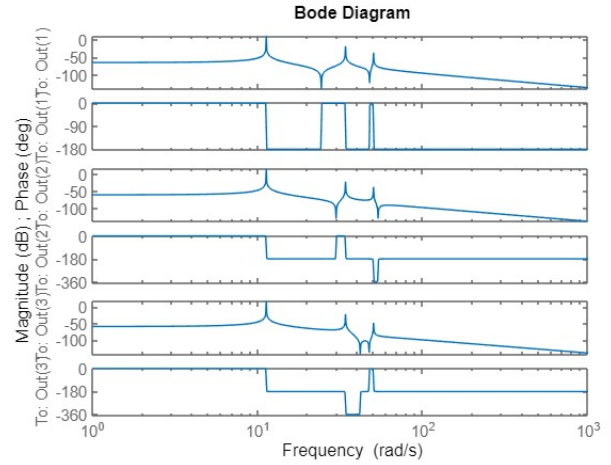


Figura 21: Diagramas de bode.

2.4. Vibraciones

Para un sistema de vibración, los valores y vectores propios asociados con la matriz A (Ecuación 24) tienen importancia física, las raíces cuadradas de los valores propios son las frecuencias naturales del sistema, estas usualmente se ordenan de forma ascendente en orden de magnitud. Los vectores propios son llamados vectores modales porque hacen referencia a un patrón de movimiento donde cada masa se mueve armónicamente con la misma frecuencia natural asociada al vector modal (modo de vibración).

A continuación se presenta la matriz de masa y rigidez:

$$M = \begin{bmatrix} M_1 & 0 & 0 \\ 0 & M_2 & 0 \\ 0 & 0 & M_3 \end{bmatrix} \quad (22)$$

$$K = \begin{bmatrix} K_1 + K_2 & K_2 & 0 \\ 0 & K_2 + K_1 & K_3 + K_2 \\ 0 & 0 & K_3 + K_2 \end{bmatrix} \quad (23)$$

$$A_2 = -M^{-1}K = \begin{bmatrix} -1,7 & -0,8667 & 0 \\ 0 & -1,471 & -1,5143 \\ 0 & 0 & -1,1778 \end{bmatrix} \quad (24)$$

A continuación se muestra una tabla con las frecuencias y periodos de oscilaciones naturales del edificio de 3 pisos sin amortiguamiento.

Valor propio	Frecuencia	Periodo
$eig(A_2)\lambda$	$\omega = \sqrt{-\lambda}$	$\frac{2\pi}{\omega} (seg)$
-1700	41.2311	0.1524
-1514.3	38.9138	0.1615
-600	24.4949	0.2565

Cuadro 2: Frecuencias y periodos de oscilaciones naturales del edificio.

Además, los tres vectores modales ortonormales son:

$$v_1 = (1 \ 0 \ 0) \quad v_2 = (1 \ 0,2143 \ 0) \quad v_3 = (0,6648 \ 0,8438 \ 1)$$

En el modo de vibración v_3 , todas las masas oscilan a una frecuencia $\omega_3 = 24,4949$ y se mueven en la misma dirección.

2.5. Simulación

Para las estructuras sismorresistentes, cada estructura tiene un único período natural o fundamental de vibración, que es el tiempo requerido para un ciclo de vibración libre. Los factores que determinan el período fundamental incluyen la rigidez y la altura de la estructura. [15]

La frecuencia natural de un edificio es la frecuencia con la que el edificio se balancea cuando vuelve a su estado original posición después de haber sido excitado. La intensidad de la fuerza excitante afectará la aceleración y la velocidad de los movimientos del edificio, pero la frecuencia será la misma independientemente de la fuerza. Lo que determina la frecuencia natural de un edificio es su propio peso, rigidez y altura. La frecuencia se mide en Hertz y es la cantidad de ciclos por segundo, que en este caso significa cuántas veces el edificio se balancea de lado a lado en 1 segundo.

Un modo de vibración se puede definir como una forma de vibrar, o un patrón de vibración, cuando se aplica a un sistema o estructura que tiene varios puntos con diferentes amplitudes de deflexión. Un modo de vibración comprende dos elementos distintos: primero, una variación tempo-

ral de la vibración y, segundo, una variación espacial de la amplitud del movimiento a través de la estructura. La variación del tiempo define la frecuencia de las oscilaciones junto con cualquier tasa asociada de decaimiento o crecimiento. La variación espacial define las diferentes amplitudes de vibración de un punto de la estructura al siguiente [17].

La primera simulación se realizó con base en el sistema de ecuaciones de movimiento (Ecuación 9, la cuál se enfocó en imitar la estructura de un edificio de 3 pisos. Se utilizó el entorno de Simulink que permite de manera visual emular las condiciones de un evento sísmico, para ello, se generó una función mediante un bloque de comando con el objetivo de construir nuestras ecuaciones diferenciales y modificar el comportamiento de nuestra prueba con ayuda de bloques de valores constantes que varían durante el tiempo que definimos.

En particular, el modelo está compuesto por nueve entradas, entre ellas están: la fuerza aplicada a la estructura, es decir, la fuerza resultante de la actividad sísmica, la masa de cada piso y tres salidas que representan la reacción que tuvo el edificio piso por piso al interactuar con la fuerza simulada.

Parámetros de la simulación:

$$\begin{aligned} M_1 &= 6 & B_1 &= 5000 & K_1 &= 0,06 \\ M_2 &= 7 & B_2 &= 5200 & K_2 &= 0,07 \\ M_3 &= 9 & B_3 &= 5400 & K_3 &= 0,09 \\ F &= 5 \cos(5\pi t) \end{aligned}$$

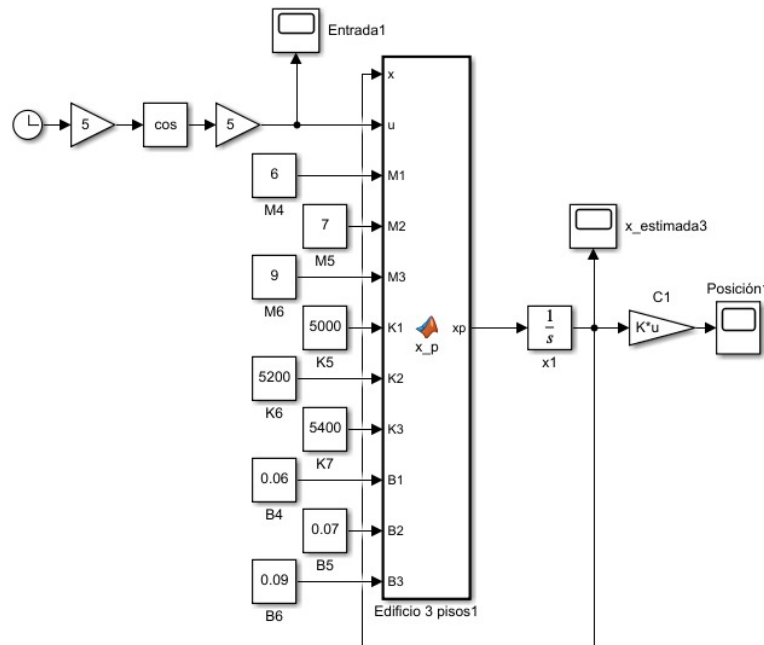


Figura 22: Estructura de funcionamiento de la simulación.

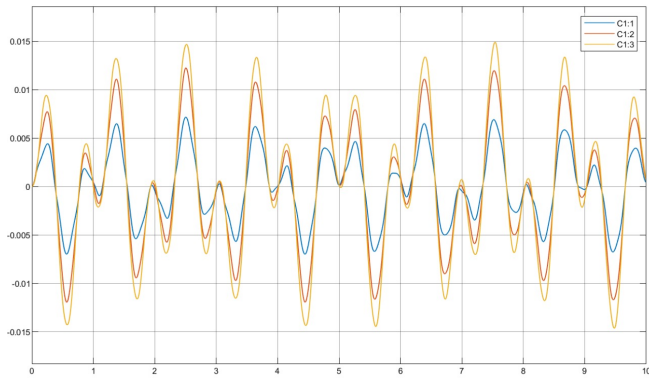


Figura 23: Resultados de la simulación.

3. Control

El manejo del comportamiento de un proceso tomando en cuenta el uso de un sistema para la interpretación del proceso así como la toma de decisiones y la ejecución de acciones se conoce como control. Un sistema de control es el conjunto de elementos o dispositivos que conforman una estructura que busca manejar el comportamiento, funcio-

namiento y procesamiento que surge del modelado de un fenómeno artificial o natural.

3.1. Control por retroalimentación

Un sistema de control por retroalimentación tiene como principal función reducir la diferencia entre la salida de un sistema y la entrada de referencia.

En este sentido, un sistema control por retroalimentación es mucho más sensible a las perturbaciones ya que considera los elementos de entrada y cómo interactúan al encontrarse con el actuador. Los elementos de entrada son medidos por sensores antes de la interacción permitiendo que se muestre una señal al actuador o control.

3.2. Control por retroalimentación con observador

El control con retroalimentación asume que se conoce las variables de estado, sin embargo, en la vida real, estos estados pueden ser no medibles o de muy difícil acceso, por lo que se implementó una solución que es el diseño de un dispositivo dinámico llamado *observador*, el cual da como salida la estimación del vector de estados.

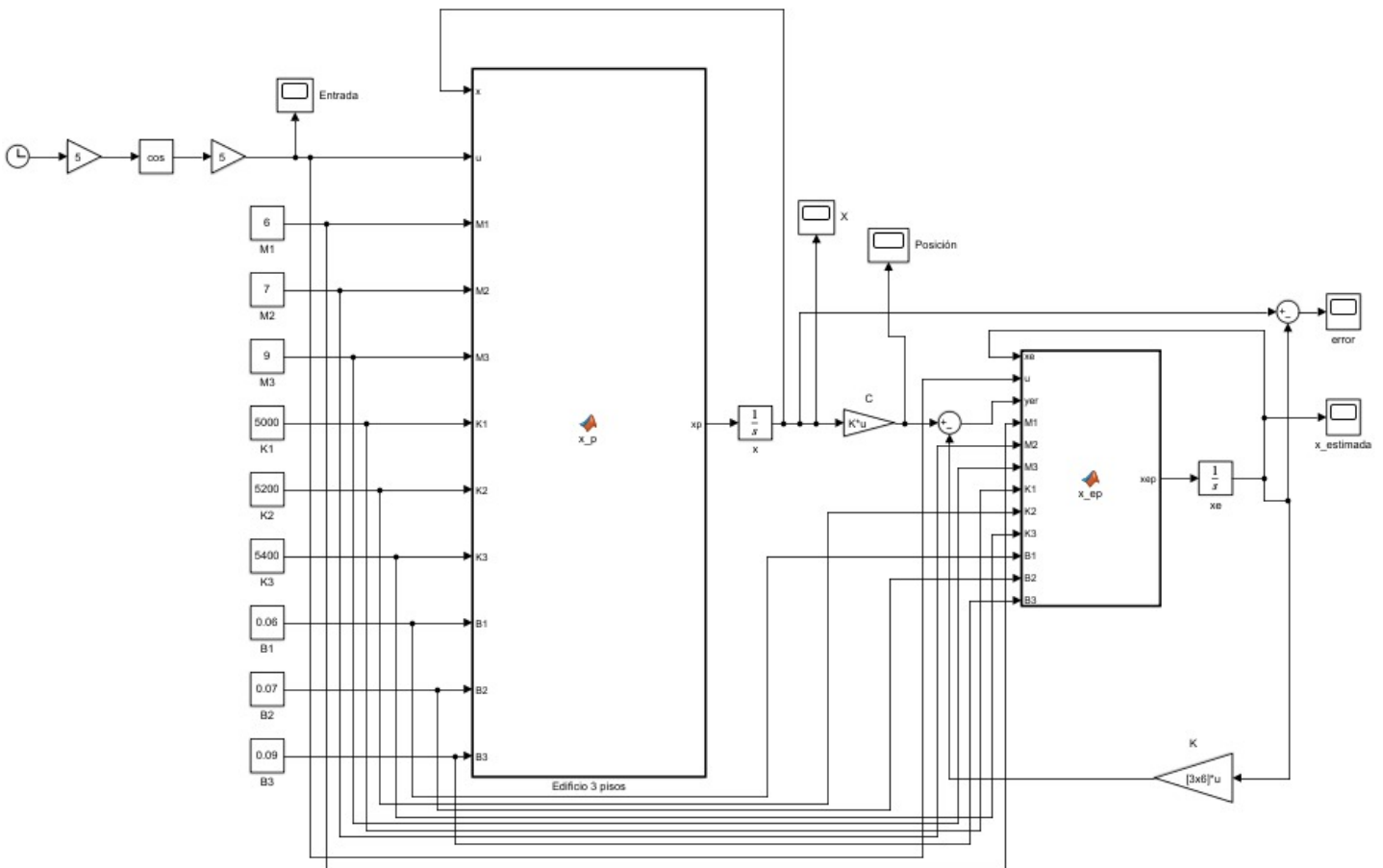


Figura 24: Estructura de funcionamiento de la simulación con retroalimentación y observador.

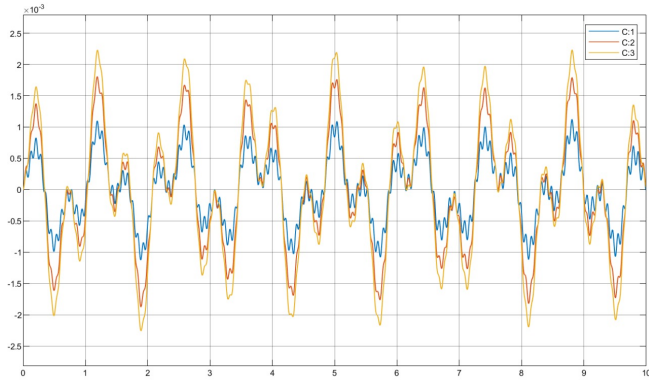


Figura 25: Resultados de la simulación con retroalimentación y observador.

Si se comparan los resultados obtenidos (Figura 25) con los resultados obtenidos de la simulación inicial (Figura 23) podemos observar que hubo una mejora, ya que la escala de la gráfica disminuyó, esto quiere decir que amplitud de las ondas disminuyeron, por lo tanto, el edificio sufre menos movimientos.

3.3. Control Óptimo LQR

El sistema LQR o linear quadratic regulator es un método de control que asegura la estabilidad del sistema dependiendo de un criterio específico. Es importante mencionar que este tipo de sistema es de lazo cerrado siendo alimentado a través de ganancias de realimentación, así mismo, es fundamental que se defina la restricción del sistema la cual es la función de costo que puede ser definida por la siguiente ecuación que interactúa con los elementos del sistema con respecto del tiempo:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad y(t) = Cx(t) \quad (25)$$

El control óptimo LQR tiene como objetivo la satisfacción de las restricciones físicas minimizando o maximizando ciertos criterios de desempeño del controlador, es decir, dependiendo del objetivo del sistema se establece un criterio con el cual se busca realizar el sistema con una medida de desempeño.

Dado que, es posible plantear la problemática de este estudio como problema regulador óptimo. La implementación de este esquema de control al sistema se muestra a continuación.

$$\dot{x}' = Ax + Bu \quad (26)$$

La matriz K de ganancias del vector de control óptimo se obtiene de la Ecuación (27).

$$u(t) = -Kx(t) \quad (27)$$

Función de costo minimizada:

$$J = \int_0^{\infty} (x * Qx + u * Ru) dt \quad (28)$$

donde Q es una matriz hermítica definida-semidefinida positiva o simétrica real y R es una matriz hermítica definida positiva o simétrica real.

Las matrices Q (Ec. 29) y R (Ec. 30) determinan la importancia relativa del error y del coste. Resolviendo para K (Ec. 31).

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (29)$$

$$R = [1] \quad (30)$$

$$K = R^{-1}BP \quad (31)$$

donde P es una matriz definida positiva que debe de satisfacer la ecuación de Riccati (Ec. 32).

$$A * P + PA - PBRR^{-1}B * P + Q = 0 \quad (32)$$

En la Figura 26, se observa el comportamiento del sistema (posiciones y velocidad de cada piso) respecto a condiciones iniciales no estacionarias.

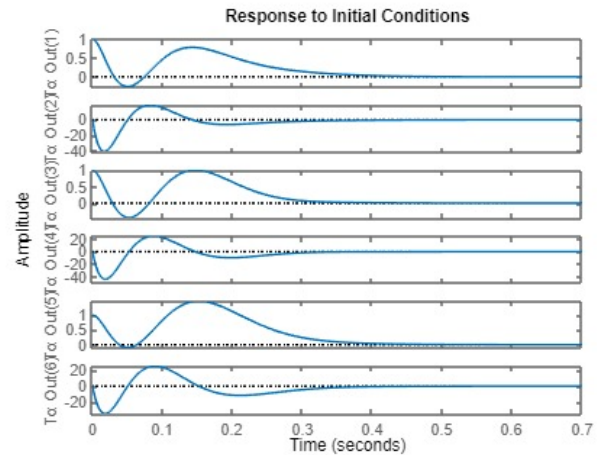


Figura 26: Soluciones del sistema retroalimentado con condiciones iniciales.

La interacción con condiciones iniciales de los tres pisos del edificio se puede observar en la Figura 27, donde al final estos regresan a su estado de reposo.

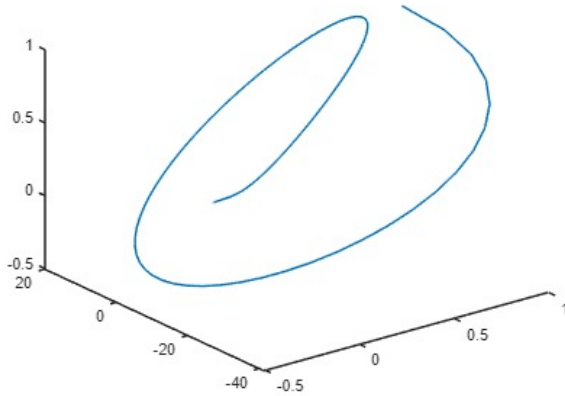


Figura 27: Espacio fase con condiciones iniciales.

Por último, los resultados de la simulación del sistema con este esquema de control se exponen en la Figura 28.

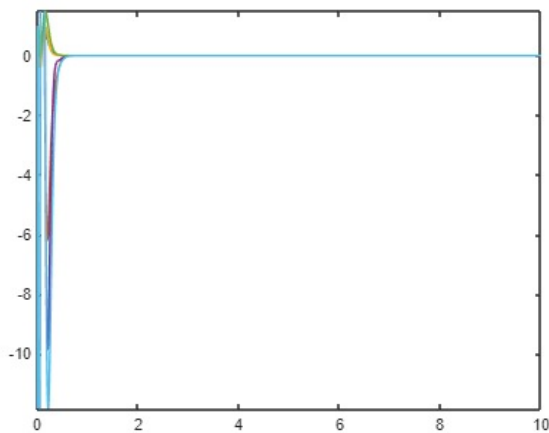


Figura 28: Simulación sistema con Control Óptimo LQR.

La solución analítica del sistema con la implementación del esquema de Control Óptimo se encuentra en el **LiveScript** `RetoMa2008BEq3.mlx` [1]

4. Resultados y discusión

Los modelo MDFOS y MIMO cumplen la función de contemplar el uso de un modelo de lazo cerrado siendo estos modelados las estructuras fundamentales para el futuro desarrollo de la simulaciones con el fin de obtener una alta sensibilidad a las perturbaciones, siendo claves para describir la siguiente información:

- El sistema se estabiliza conforme transcurre la onda hasta disipar la fuerza sinodal de la perturbación.
- El sistema se estabiliza de mejor manera con el uso del amortiguamiento.

Por lo cual y como se puede observar en las secciones anteriores, se realizaron 3 modelos diferentes para el sistema de Masa-Resorte-Amortiguador en un edificio con tres pisos, de los cuales 2 (Control por Retroalimentación con Observador y Control Óptimo LQR) tienen control y cumplen con el objetivo que es disminuir el impacto que tiene la onda sísmica en el edificio y estabilizar el sistema.

Pese a lo anterior es importante mencionar que se demostró que el modelo sin control ni observador no es la mejor opción para implementar en la vida real ya que se debería contar con sensores para medir las magnitudes en cada piso lo cual puede salir del presupuesto de ciertos proyectos, por lo que implementar un observador permite visualizar el espacio de estado mediante cálculo de las interacciones con el sistema de manera virtual. Por otro lado y como se explica en la sección de Control Óptimo LQR, este modelo sí cumple con el objetivo sin embargo, los resultados no son los deseados.

5. Conclusión

Gracias a la estabilidad inicial del sistema y sus demás características, fue posible implementar 2 modelos diferentes de control (Control por Retroalimentación con observador y Control Óptimo LQR) para controlar su respuesta ante un fenómeno de vibración. De tal forma que, la solución propuesta permite contener la onda de excitación (sismo). Además, se estudio la vibración del sistema para tener certeza del movimiento en cada piso, su interacción y frecuencias de resonancia naturales.

Generar modelos matemáticos y físicos y simular de fenómenos como la interacción entre una fuerza y una masa nos permiten conocer información importante de eventos que pueden presentarse en situaciones reales como lo son los sismos. Los modelos y las simulaciones permiten prevenir desastres naturales y, considerando la actividad sísmica de lugares como México, es fundamental tener normativas establecidas para que las estructuras sean seguras para la población. También es importante considerar los materiales para la construcción, actualmente los materiales más comunes para la construcción de edificios son los siguientes:

- Hormigón.
- Acero.
- Madera.
- Piedra.
- Ladrillo/Mezcla.

De estas opciones, el hormigón tiene una rigidez superior al ladrillo/mezcla por lo que el hormigón es una de las mejores opciones para aumentar la rigidez, así mismo el acero permite que los edificios tengan una estructura flexible y resistente debido a la elasticidad que posee el acero, dichos materiales permiten el movimiento sin perder la forma estructural.

Este tipo de investigaciones y análisis permiten simular el comportamiento físico que se obtiene de la interacción entre el edificio y una fuerza externa que afecta las propiedades de una estructura, con esto se pueden realizar estimaciones con el objetivo de analizar posibles afectaciones, prevenir fallos estructurales por ruptura, así como valoraciones de riesgos.

No es posible aplicar lo realizado para prevenir un temblor, ya que no existe un simulador de sismos reales, pero si es posible prevenir el cómo reacciona una estructura al aplicársele la fuerza oscilatoria de un temblor, por ejemplo, se podría ver que tan probable es que teniendo ciertas características (forma, base, rigidez estructural, amortiguamiento, etc.) el daño causado por dicha fuerza oscilatoria

sea el menor.

Finalmente, y por la experimentación realizada, se concluye que es importante la labor de los elementos de amortiguamiento y los materiales que van a dar rigidez y flexibilidad a la estructura entre ellos el acero, ya que con estos elementos se puede fácilmente soportar una intensa magnitud como es el ejemplo de la torre latinoamericana que posee una fiabilidad superior debido a cómo está suspendida en una capa de pisos subterráneos que facilita el libre movimiento lo que indica que en zona con un alta frecuencia de sismos es muy factible el uso de estos sistemas de amortiguamiento probando la importancia de la prevención de riesgos y el estudio de la física detrás de la construcción de una edificación.

Referencias

- [1] Gil Félix, A. and Hernández Coronado, J. D. and Sandoval Suárez, C. A. and Vidaña Cerda, B. P. (2022) *Contenidos*. Recuperado de: <https://aldosandov.github.io/MA2008B/>
- [2] Sistema Nacional de Protección Civil (2007) *Sismos*. Recuperado de: http://www.proteccioncivil.gob.mx/work/models/ProteccionCivil/Resource/377/1/images/folleto_s.pdf
- [3] CENTRO NACIONAL DE PREVENCIÓN DE DESASTRES (2001). *Sismos*. (4° ed.). D. F., México: Serie Fascículos. Recuperado de: https://www3.azc.uam.mx/proteccioncivil/frames/doc_cons/doc/fasciculo%20sismos.pdf
- [4] INDECI DEFENSA CIVIL (2018) *Los movimientos sísmicos*. Recuperado de: <https://www.indeci.gob.pe/wp-content/uploads/2018/09/movimientos-sismicos.pdf>
- [5] Gobierno de México (2017) *Escalas de los sismos*. Recuperado de: https://www.sgm.gob.mx/Web/MuseoVirtual/Informacion_complementaria/Escalas-sismos.html
- [6] UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MÉXICO FACULTAD DE INGENIERÍA DIVISIÓN DE INGENIERÍA ELÉCTRICA (2013) *PROTECCIONES ELÉCTRICAS PARA LAS ESTACIONES SISMOLÓGICAS DE ANCHA DEL SERVICIO SISMOLÓGICO NACIONAL*. Recuperado de: <http://www.ptolomeo.unam.mx:8080/jspui/bitstream/132.248.52.100/4899/1/Tesis.pdf>
- [7] Órgano de Difusión del Gobierno de la Ciudad de México. (2017) *GACETA OFICIAL DE LA CIUDAD DE MÉXICO*. Recuperado de: <https://www.smie.org.mx/archivos/informacion-tecnica/normas-tecnicas-complementarias/normas-tecnicas-complementarias-ciudad-mexico-2017.pdf>
- [8] Sociedad Mexicana de Ingeniería Estructural, A.C. (s/f) *Normas Técnicas Complementarias Oficiales*. Recuperado de: <https://www.smie.org.mx/informacion-tecnica/normas-tecnicas-complementarias.php>
- [9] Torre Latino (s/f). *Historia*. Recuperado de: <https://torrelatinoamericana.com.mx/historia/>
- [10] Camargo, J.R., (s/f). *DOS EDIFICIOS DE GRAN ALTURA EMBLEMÁTICOS DE LA CD. DE MÉXICO: TORRE LATINOAMERICANA Y TORRE EJECUTIVA PEMEX*. Recuperado de: <https://idus.us.es/handle/11441/35129>
- [11] Metal Building Manufacturers (s/f). *Beneficios del Acero*. Recuperado de: <http://metalbuilding.com.mx/beneficios/>
- [12] Martínez, M. (2018). *Esta es la razón por la que la Torre Latinoamericana resiste los sismos de CDMX*. Architectural Digest. Recuperado de: <https://www.admagazine.com/arquitectura/razon-torre-latinoamericana-sismos-cdmx-19s-20180918-4624-articulos>
- [13] CRISAFULLI, F. (2018). *Diseño sismorresistente de construcciones de acero*. Asociación Latinoamericana del Acero. Recuperado de: https://www.construccionenacero.com/sites/construccionenacero.com/files/publicacion/disen%C3%B3_sismorresistente_de_construcciones_de_acero-5ta.ed.pdf
- [14] MathWorks. (s/f). *“Mass-Spring-Damper Systems” Courseware*. Recuperado de: https://la.mathworks.com/academia/courseware/mass-spring-damper-systems.html?s_tid=srchtitle_mass%20spring%20system5
- [15] Eldabie, S. Raheem, A. (2022). *Soil–structure interaction for seismic analysis and design of bridges*. Recuperado de: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/B978012823550800024X>
- [16] Umeå University, (2018). *Horizontal Natural Frequency in a 10 History Building*. Recuperado de: <http://www.diva-portal.org/smash/get/diva2:1251690/FULLTEXT01.pdf>
- [17] Ewins, D. (2001). *Mode of vibration*. Recuperado de: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/B012227085100062X>
- [18] Cheng, F. and Jiang, H. and Lou, Kangyu (2008). *Smart Structures: Innovative Systems for Seismic Response Control*. Recuperado de: <http://libgen.rs/book/index.php?md5=35F042E3EF05E530BC267BC92F8C2624>
- [19] Castaldo, P. (2014). *Integrated Seismic Design of Structure and Control Systems*. Recuperado de: <http://library.lol/main/16D47983D0410699B90BFF7FE7E76723>