

## Lezione : Approfondimenti ed esercizi

Docente: Aldo Solari

## 1 La matrice dei dati

**Example 1.1.** (a) Calcolare la traccia della matrice di centramento  $H_{n \times n}$ (b) Calcolare  $H \mathbf{1}_{n \times 1}$ (c) Si supponga che  $a_{n \times 1}$  è un vettore i cui elementi sommano 0. Calcolare  $H a_{n \times 1}$ 

Dimostrazione. (a)

$$\text{tr}(H) = \text{tr}\left(I - \frac{1}{n} \mathbf{1} \mathbf{1}'\right) = \text{tr}(I) - \frac{1}{n} \text{tr}(\mathbf{1} \mathbf{1}') = n - \frac{1}{n} n = n - 1$$

(b)

$$H \mathbf{1} = \left(I - \frac{1}{n} \mathbf{1} \mathbf{1}'\right) \mathbf{1} = \mathbf{1} - \frac{1}{n} \mathbf{1} \mathbf{1}' \mathbf{1} = \mathbf{1} - \frac{1}{n} n \mathbf{1} = \mathbf{0}_{n \times 1}$$

(c)

$$H a = \left(I - \frac{1}{n} \mathbf{1} \mathbf{1}'\right) a = a - \frac{1}{n} \mathbf{1} \mathbf{1}' a = a - \frac{1}{n} \mathbf{1} \sum_{i=1}^n a_i = a_{n \times 1}$$

□

**Example 1.2.** Sia  $J_{n \times n} = \frac{1}{n} \mathbf{1} \mathbf{1}'$ , quindi  $H = I - J$ .(a) Calcolare  $J a_{n \times 1}$  per un generico vettore  $a$ .(b) Si dimostri che  $J_{n \times n}$  è una matrice idempotente.

Dimostrazione. (a)

$$J a = \frac{1}{n} \mathbf{1} \mathbf{1}' a = \frac{1}{n} \mathbf{1} \sum_{i=1}^n a_i = \begin{bmatrix} \bar{a} \\ \bar{a} \\ \vdots \\ \bar{a} \end{bmatrix}$$

(b)  $J$  è una matrice simmetrica, i.e.  $J' = \left(\frac{1}{n} \mathbf{1} \mathbf{1}'\right)' = \frac{1}{n} \mathbf{1} \mathbf{1}' = J$ . Inoltre

$$J J = \frac{1}{n} \mathbf{1} \mathbf{1}' \frac{1}{n} \mathbf{1} \mathbf{1}' = \frac{1}{n^2} \mathbf{1} \mathbf{1}' \mathbf{1} \mathbf{1}' = \frac{1}{n^2} n \mathbf{1}' = \frac{1}{n} \mathbf{1} \mathbf{1}' = J$$

□