PCA: Applicazioni

Analisi Esplorativa

Aldo Solari

1. Dati `Marks`
2. Dati `Wine`
3. Dati `Face`
4. Dati `PES`

Outline

Dati `Marks`

Studente	Mechanics	Vectors	Algebra	Analysis	Statistics
1	77	82	67	67	81
2	63	78	80	70	81
3	75	73	71	66	81
4	55	72	63	70	68
5	63	63	65	70	63
6	53	61	72	64	73
7	51	67	65	65	68
8	59	70	68	62	56
9	62	60	58	62	70
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	
88	0	40	21	9	14

Dati `Marks`: Analisi delle componenti principali

- Domanda di interesse: come descrivere in maniera sintetica (i.e. in $q < p = 5$ dimensioni) i voti di ciascun studente?
- Calcolo la matrice degli autovettori standardizzati $\underset{5\times5}{V}$ di $\underset{5\times5}{S}$
- Calcolo le $p = 5$ componenti principali

$$\underset{88\times5}{Y} = \underset{88\times5}{\tilde{X}}\ \underset{5\times5}{V}$$

Dati `Marks`: matrice dei pesi V

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
Mechanics	-0.51	-0.75	0.30	-0.30	-0.08
Vectors	-0.37	-0.21	-0.42	0.78	-0.19
Algebra	-0.35	0.08	-0.15	0.00	0.92
Analysis	-0.45	0.30	-0.60	-0.52	-0.29
Statistics	-0.53	0.55	0.60	0.18	-0.15

- I pesi (*loadings*) $\underset{5\times1}{v_1}$ della prima componente principale sono più o meno omogenei, quindi il vettore dei punteggi (*scores*) $\underset{88\times1}{y_1} = \underset{88\times5}{\tilde{X}}\,\underset{5\times1}{v_1}$ della prima componente principale sarà più o meno la media dei voti (centrati)
- I pesi $\underset{5\times1}{v_2}$ della seconda componente principale sono concentrati sulle variabili `Mechanics` (-0.75) e `Statistics` (0.55)

Dati `Marks`: matrice dei punteggi Y

Studente	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
1	-66.32	-6.45	7.07	9.65	-5.46
2	-63.62	6.75	0.86	9.15	7.57
3	-62.93	-3.08	10.23	3.72	0.38
4	-44.54	5.58	-4.38	4.48	-4.41
5	-43.28	-1.13	-1.53	-5.81	-0.74
6	-42.55	10.97	4.87	0.48	7.10
7	-39.11	8.26	-0.81	4.35	0.13
8	-37.53	-5.60	-5.50	3.78	4.37
9	-39.39	1.13	9.41	-2.51	-5.33
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	
88	65.96	2.27	2.52	17.70	-7.22

Scelta del numero di componenti principali

- Scegliere le prime q componenti con q pari al valore minimo tale per cui la proporzione di varianza spiegata cumulata dalle prime $q \leq p$ componenti principali

$$\frac{\sum_{j=1}^{q} \lambda_j}{\sum_{j=1}^{p} \lambda_j}$$

  sia superiore a una prefissata percentuale, generalmente dell'ordine di 70, 80%, dove la soglia può essere diminuita qualora p sia molto grande

Scelta del numero di componenti principali

- Ignorare le componenti principali che spiegano un ammontare di varianza inferiore a un livello prefissato c
- Una scelta tipica è

$$c = \frac{1}{p} \sum_{j=1}^{p} \lambda_j$$

- Procedendo in questo modo non è predeterminata la percentuale di varianza spiegata in totale

Scree plot

- Scegliere q esaminando il diagramma *scree* (*scree plot*), cioè la rappresentazione sul piano cartesiano di (j, λ_j)
- Si cerca di selezionare q in corrispondenza a un gomito del grafico, cioè un punto tale per cui gli autovalori precedenti sono 'grandi' e quelli successivi 'piccoli'.
- Chiaramente è ben possibile che tale grafico non offra alcuna indicazione (se ad esempio gli autovalori λ_j decrescono linearmente con j).

Dati `Marks`: varianza spiegata

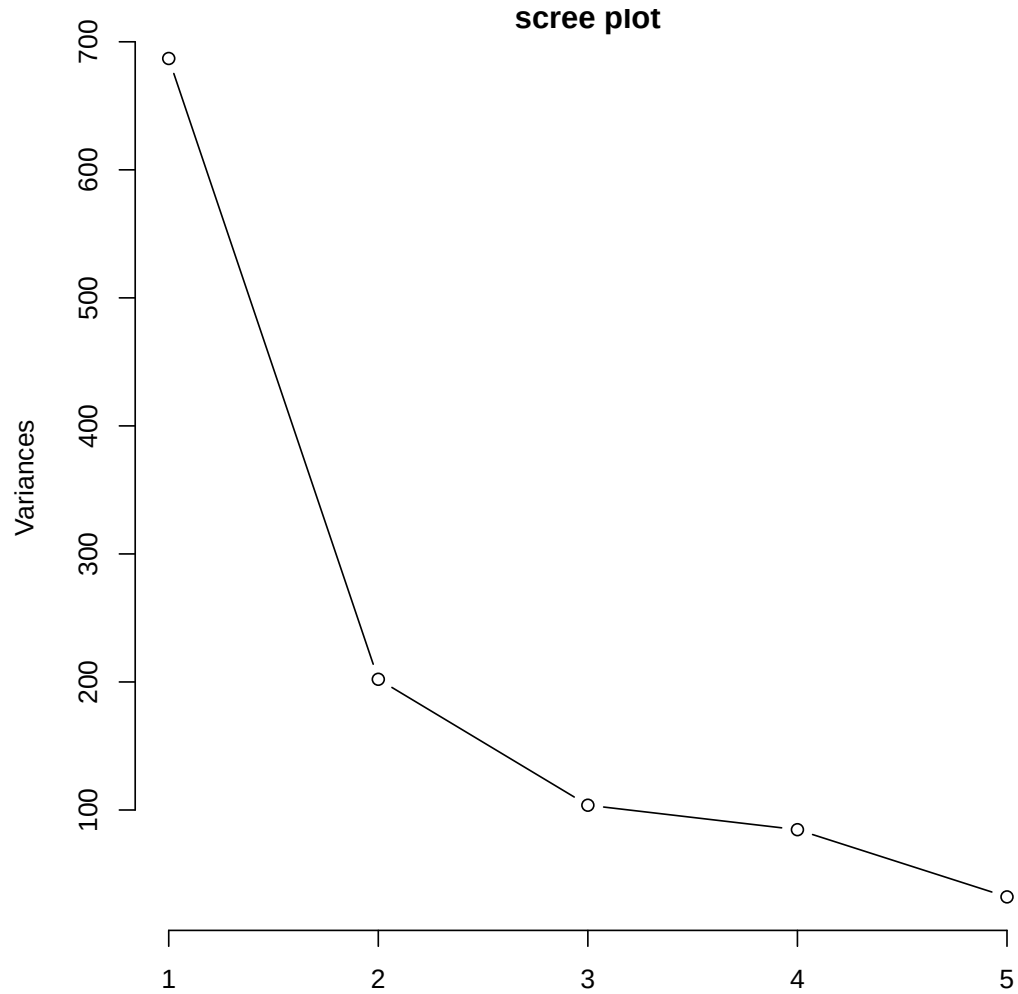
	PC1	PC2	PC3	PC4	PC5
Varianza spiegata λ_j	679.18	199.81	102.57	83.67	31.79
Prop. di var. spiegata	0.6191	0.1821	0.0935	0.0763	0.0290
Proporzione cumulata	61.91%	80.13%	89.48%	97.10%	100%

- Se vogliamo spiegare almeno l'80% della variabilità
  $\rightarrow$ Prime due componenti principali
- Se ignoriamo le componenti con varianza spiegata inferiore a

$$c = \frac{1}{5}\sum_{j=1}^{5}\lambda_j = 219.4$$

  $\rightarrow$ Prima componente principale

Dati `Marks`: *scree plot*

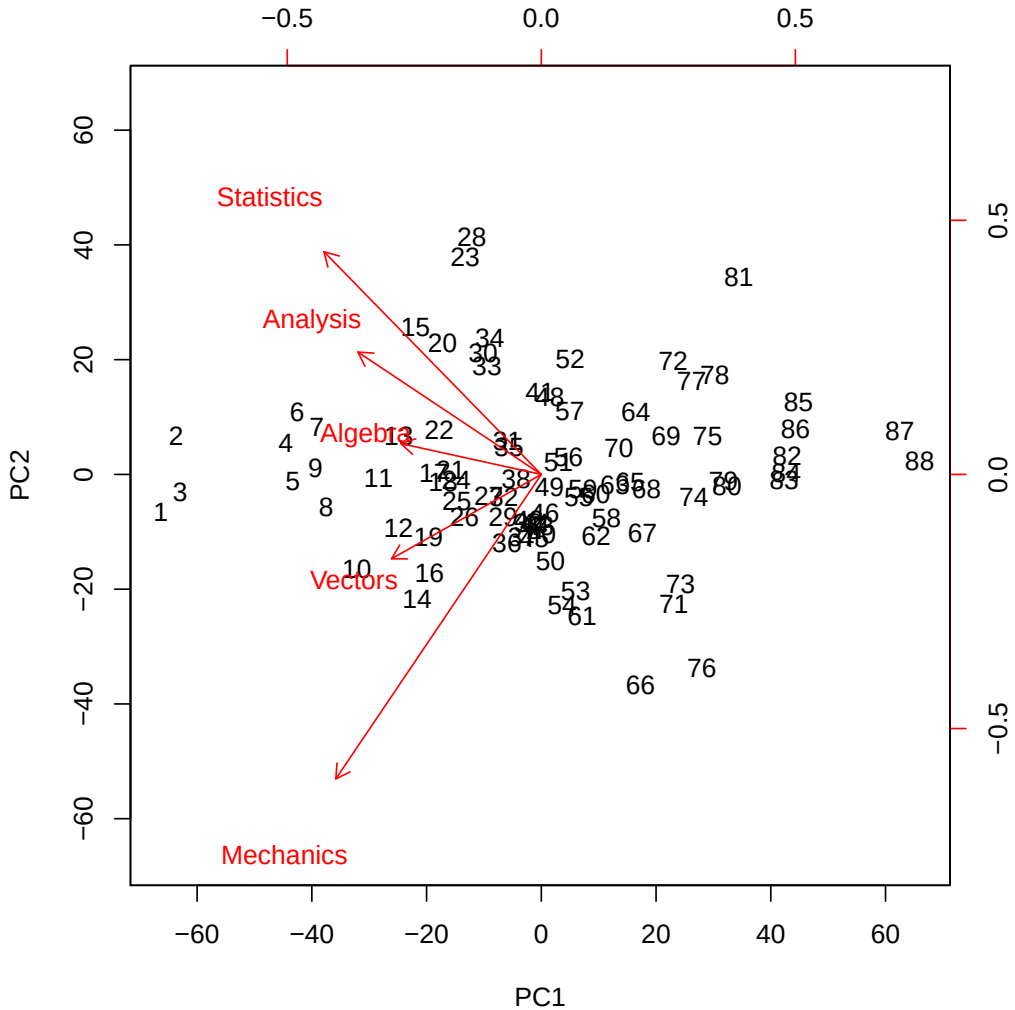


Il 'gomito' indica le prime due componenti principali

Rappresentazione grafica: *biplot*

- Il *biplot* è una rapprentazione grafica bidimensionale dei punteggi (y_{i1}, y_{i2}) $i = 1, \ldots, n$ (n punti) e dei pesi $\begin{pmatrix} v_{j1} \\ v_{j2} \end{pmatrix}$, $j = 1, \ldots, p$ (p vettori) della prime due componenti principali
- Permette l'ispezione visiva della posizione di ciascuna unità statistica e di ciascuna variable nello spazio delle prime due componenti principali

Dati `Marks`: *biplot*



Studente 3 : $(y_{31}, y_{32}) = (-62.93, -3.08)$

Algebra : $(v_{31}, v_{32})' = (-0.35, 0.08)'$

Outline

Dati `Wine`

	Alcohol	MalicAcid	Ash	AlcAsh	Mg	Phenols	Flav	⋮
1	14.23	1.71	2.43	15.60	127	2.80	3.06	⋮
2	13.20	1.78	2.14	11.20	100	2.65	2.76	⋮
3	13.16	2.36	2.67	18.60	101	2.80	3.24	⋮
4	14.37	1.95	2.50	16.80	113	3.85	3.49	⋮
5	13.24	2.59	2.87	21.00	118	2.80	2.69	⋮
6	14.20	1.76	2.45	15.20	112	3.27	3.39	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

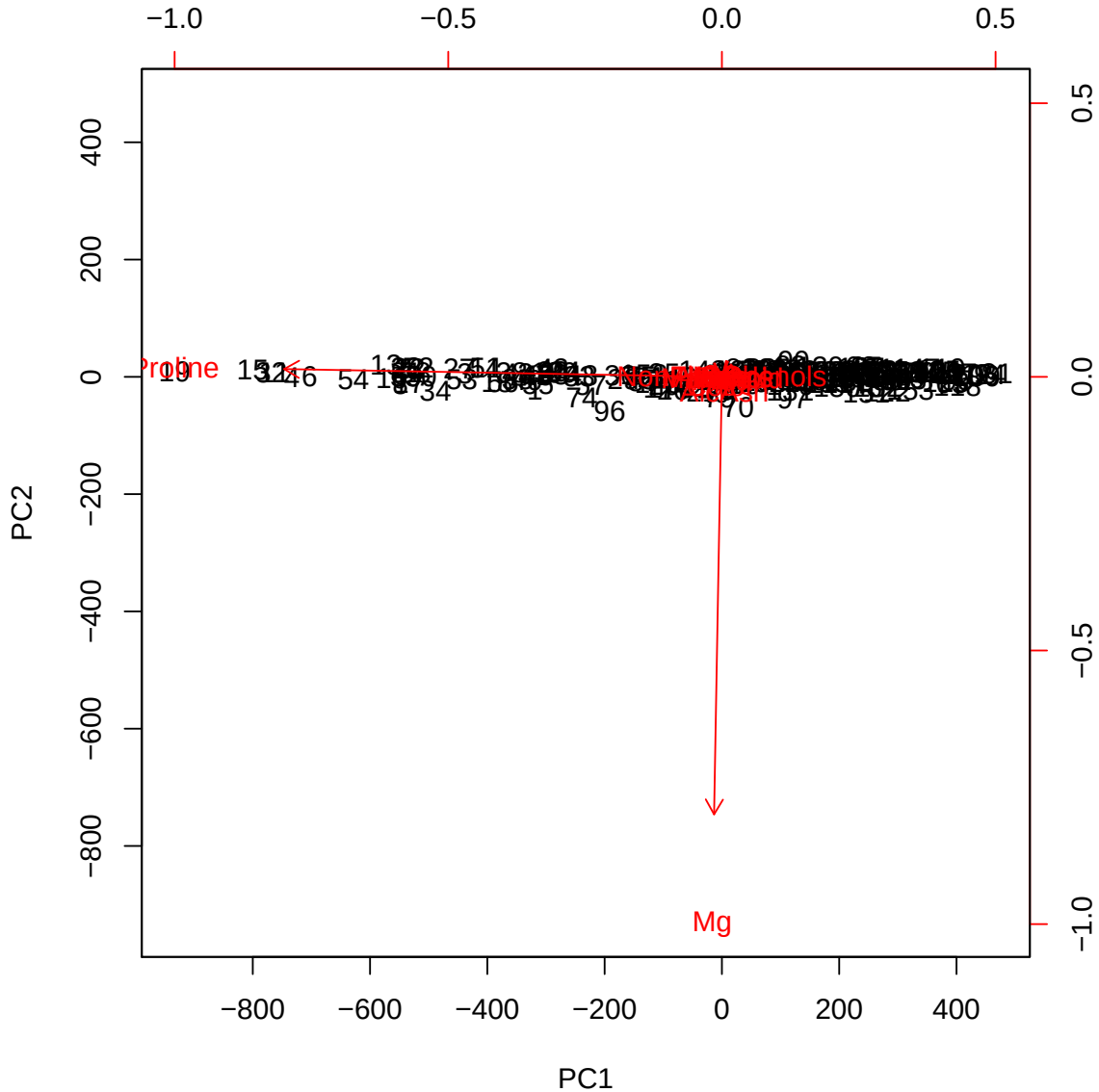
Dati `Wine`: varianze

j	s_{jj}
Alcohol	0.66
MalicAcid	1.24
Ash	0.07
AlcAsh	11.09
Mg	202.84
Phenols	0.39
Flav	0.99
NonFlavPhenols	0.02
Proa	0.33
Color	5.34
Hue	0.05
OD	0.50
Proline	98609.60

Dati `Wine`: pesi per PCA($\tilde{X}$)

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	
Alcohol	-0.00	-0.00	0.02	-0.14	0.02	-0.19	0.92	-0
MalicAcid	0.00	-0.00	0.12	-0.16	-0.61	-0.74	-0.15	0
Ash	-0.00	-0.00	0.05	0.01	0.02	-0.04	0.05	0
AlcAsh	0.00	-0.03	0.94	0.33	0.06	0.02	0.03	-0
Mg	-0.02	-1.00	-0.03	0.01	-0.01	0.00	0.00	0
Phenols	-0.00	-0.00	-0.04	0.07	0.32	-0.28	-0.02	0
Flav	-0.00	0.00	-0.09	0.17	0.52	-0.43	-0.04	0
NonFlavPhenols	0.00	0.00	0.01	-0.01	-0.03	0.02	-0.00	-0
Proa	-0.00	-0.01	-0.02	0.05	0.25	-0.24	-0.31	-0
Color	-0.00	-0.02	0.29	-0.88	0.33	-0.00	-0.11	0
Hue	-0.00	0.00	-0.03	0.06	0.05	0.02	0.03	0
OD	-0.00	0.00	-0.07	0.18	0.26	-0.29	0.10	0
Proline	-1.00	0.02	0.00	0.00	-0.00	0.00	-0.00	-0

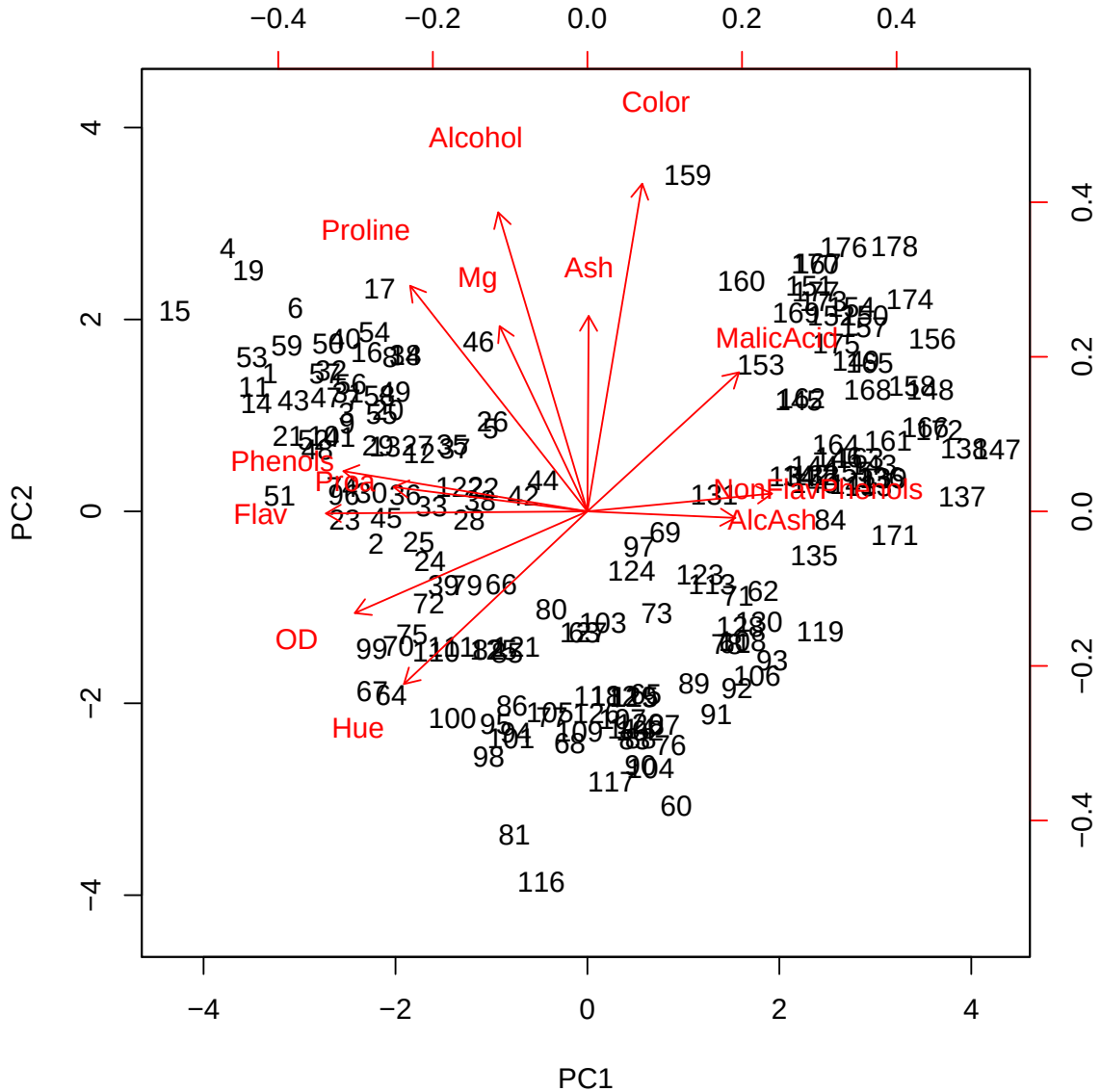
Dati `Wine`: *biplot* per PCA($\tilde{X}$)



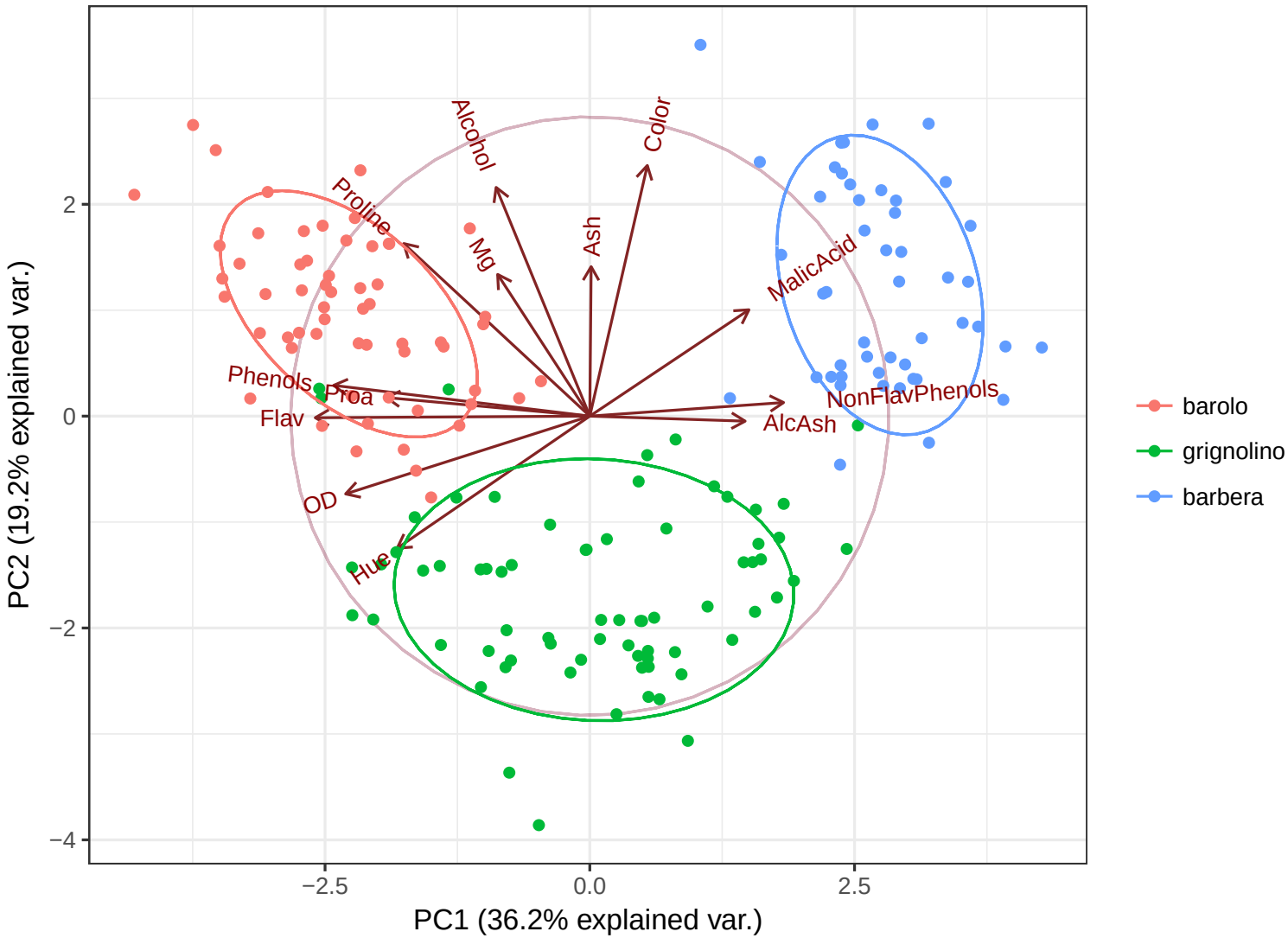
Dati `Wine`: pesi per PCA(Z)

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	
Alcohol	-0.14	-0.48	-0.21	-0.02	0.27	0.21	0.06	0
MalicAcid	0.25	-0.22	0.09	0.54	-0.04	0.54	-0.42	0
Ash	0.00	-0.32	0.63	-0.21	0.14	0.15	0.15	-0
AlcAsh	0.24	0.01	0.61	0.06	-0.07	-0.10	0.29	0
Mg	-0.14	-0.30	0.13	-0.35	-0.73	0.04	-0.32	-0
Phenols	-0.39	-0.07	0.15	0.20	0.15	-0.08	0.03	-0
Flav	-0.42	0.00	0.15	0.15	0.11	-0.02	0.06	-0
NonFlavPhenols	0.30	-0.03	0.17	-0.20	0.50	-0.26	-0.60	-0
Proa	-0.31	-0.04	0.15	0.40	-0.14	-0.53	-0.37	0
Color	0.09	-0.53	-0.14	0.07	0.08	-0.42	0.23	-0
Hue	-0.30	0.28	0.09	-0.43	0.17	0.11	-0.23	0
OD	-0.38	0.16	0.17	0.18	0.10	0.27	0.04	-0
Proline	-0.29	-0.36	-0.13	-0.23	0.16	0.12	-0.08	0

Dati `Wine`: *biplot* per PCA(Z)



Dati `Wine`: tipologia di vino



Outline

Dati Face

$$\underset{243\times220}{X}$$

Dati `Face`: PCA

- Dati centrati: $\underset{n\times p}{\tilde{X}} = \underset{n\times p}{X} - \underset{n\times 1}{1}\underset{1\times p}{\bar{x}'}$
- PCA: $\underset{n\times p}{Y} = \underset{n\times p}{\tilde{X}}\,\underset{p\times p}{V}$
- Scelta di $q \leq \mathrm{rango}(\underset{n\times p}{\tilde{X}})$
- Ricostruzione dell'immagine: migliore approssimazione di rango q di $\tilde{X}$ più vettore delle medie di X:

$$\underset{n\times p}{Y_q}\,\underset{q\times p}{V_q'} + \underset{n\times 1}{1}\underset{1\times p}{\bar{x}'}$$

Immagine compressa

$$\underset{n\times q}{Y_q}\ \underset{q\times p}{V_q'} + \underset{n\times 11}{1}\ \underset{\times p}{\bar{x}'}$$

con $q = 10$

Pixels e bytes

Immagine originale

- $\underset{243\times220}{X}$: $243 \times 220 = 53460$ pixels
- Memoria richiesta: 427880 bytes

Immagine compressa

- $\underset{243\times10}{Y}$, $\underset{220\times10}{V}$, $\underset{220\times1}{\bar{x}}$: $243 \times 10 + 220 \times 10 + 220 = 4850$ pixels
- Memoria richiesta: 40872 bytes
- Fattore di riduzione = 427880 bytes / 40872 bytes = 10.47

Outline

Dati PES

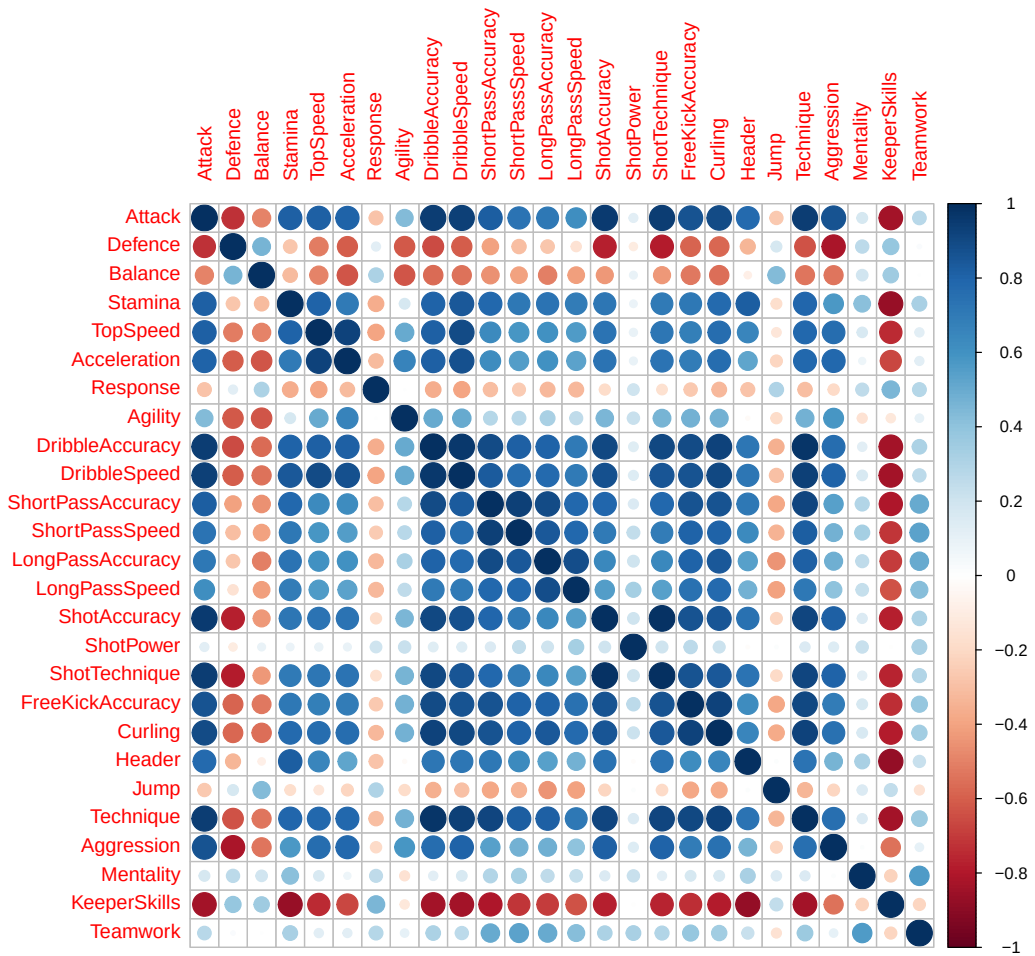
Matrice $\underset{239\times 26}{X}$ contenente le valutazioni delle abilità di giocatori di calcio italiani fornite dal database Pro Evolution Soccer (Sep 2011)

Name	Attack	Defence	Balance	Stamina	TopSpeed	Acc
Cristian Molinaro	74	70	83	87	86	
Vito Mannone	30	79	85	68	70	
Mario Balotelli	81	36	84	82	82	
Federico Macheda	78	36	83	80	82	
...						
...						
Davide Santon	72	64	78	84	86	
Carlo Cudicini	30	85	84	69	68	
Massimo Oddo	73	67	79	86	79	
Moris Carrozzieri	61	80	91	83	76	
Andrea Bertolacci	72	64	79	84	83	
Daniele Corvia	79	40	83	82	80	
David Di Michele	81	46	77	82	84	
Cristian Pasquato	76	38	76	81	84	

Dati PES: variabili

Acceleration
Aggression
Agility
Attack
Balance
Curling
Defence
DribbleAccuracy
DribbleSpeed
FreeKickAccuracy
Header
Jump
KeeperSkills
LongPassAccuracy
LongPassSpeed
Mentality
Response
ShortPassAccuracy
ShortPassSpeed
ShotAccuracy
ShotPower
ShotTechnique
Stamina
Teamwork
Technique
TopSpeed

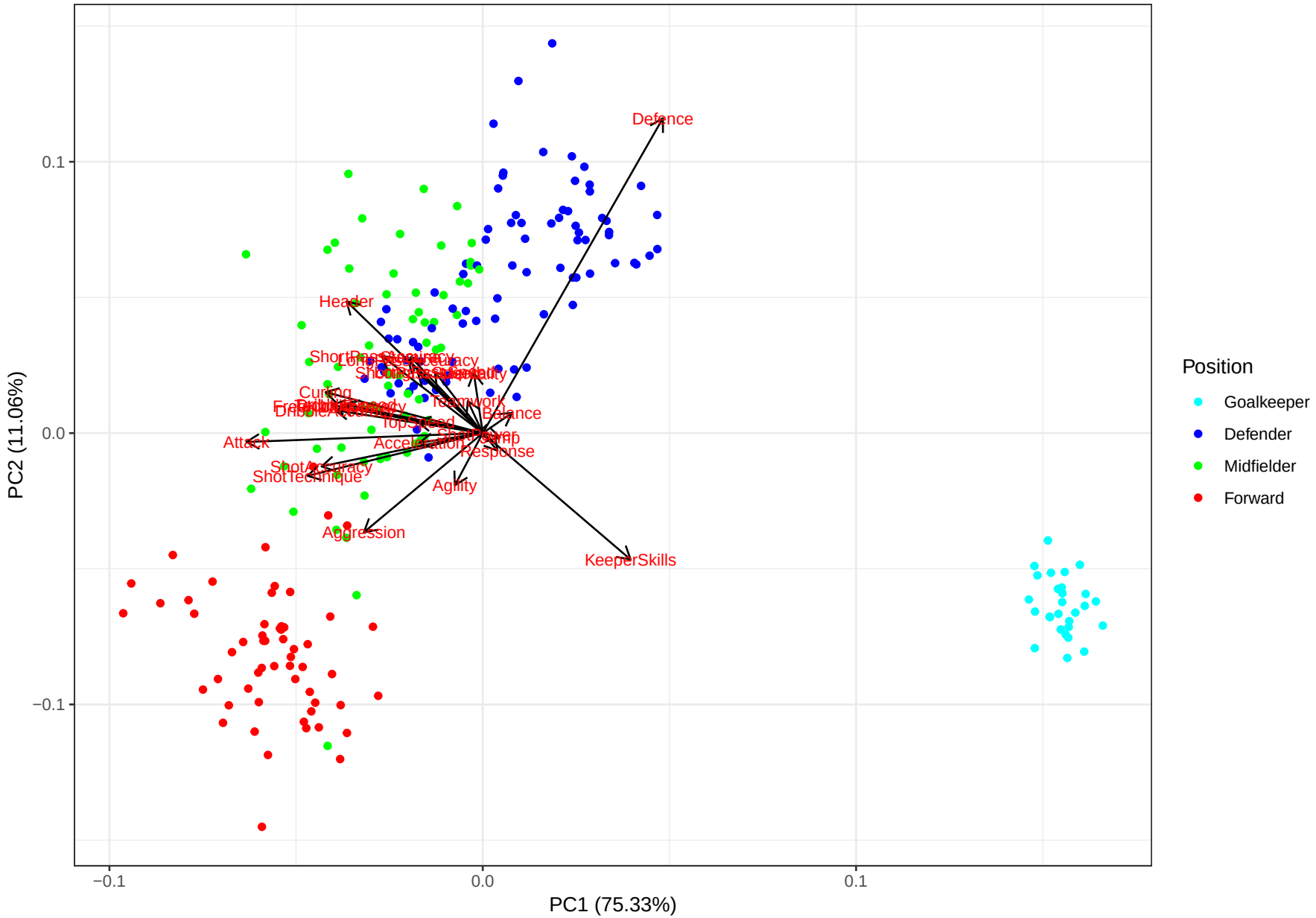
Dati PES: matrice di correlazione



Dati PES: pesi delle prime due componenti principali

	PC1	PC2
Attack	**-0.40**	-0.02
Defence	**0.31**	**0.74**
Balance	0.05	0.05
Stamina	-0.12	0.18
TopSpeed	-0.11	0.03
Acceleration	-0.11	-0.02
Response	0.03	-0.04
Agility	-0.05	-0.12
DribbleAccuracy	-0.25	0.05
DribbleSpeed	-0.23	0.07
ShortPassAccuracy	-0.17	0.18
ShortPassSpeed	-0.11	0.14
LongPassAccuracy	-0.13	0.17
LongPassSpeed	-0.08	0.14
ShotAccuracy	-0.27	-0.08
ShotPower	-0.01	-0.00
ShotTechnique	**-0.30**	-0.10
FreeKickAccuracy	-0.24	0.06
Curling	-0.27	0.10
Header	-0.23	0.31
Jump	0.03	-0.01
Technique	-0.26	0.07
Aggression	-0.20	-0.23
Mentality	-0.02	0.14
KeeperSkills	**0.25**	**-0.30**
Teamwork	-0.03	0.08

Dati PES: biplot



Three variables (V,W,U).
Two components (F1,F2) extracted.