

Decomposizione Spettrale e Decomposizione in Valori Singolari

Analisi Esplorativa

Aldo Solari



- ① Decomposizione Spettrale
- ② Matrice dei dati ortogonalizzati
- ③ Decomposizione in Valori Singolari
- ④ Appendice



Outline

- ① Decomposizione Spettrale
- ② Matrice dei dati ortogonalizzati
- ③ Decomposizione in Valori Singolari
- ④ Appendice



Direzione e lunghezza di un vettore

Sia $\underset{k \times 1}{a}$ un vettore a valori reali. Allora $\underset{k \times 1}{a}$ si può decomporre in due componenti,

- Lunghezza

$$\lambda = \left\| \underset{k \times 1}{a} \right\| = \sqrt{\underset{1 \times k}{a'} \underset{k \times 1}{a}} = \sqrt{\sum_{j=1}^k a_j^2}$$

- Direzione *normalizzata*

$$\underset{k \times 1}{v} = \frac{\underset{k \times 1}{a}}{\lambda}$$

$$\text{con } \left\| \underset{k \times 1}{v} \right\| = 1$$



Autovalori e autovettori

- Questa idea si può estendere ad una matrice simmetrica $A_{k \times k}$ a valori reali, che è un insieme di vettori
- Gli autovalori (*eigenvalues*) λ e gli autovettori (*eigenvectors*) normalizzati $v_{k \times 1}$ con $\|v_{k \times 1}\| = 1$ sono definiti dall'equazione

$$A_{k \times k} v_{k \times 1} = \lambda v_{k \times 1}$$

- Ci sono esattamente k coppie $(\lambda_j, v_j)_{k \times 1}, j = 1, \dots, k$ che soddisfano l'equazione
- Per convenzione, gli autovalori sono ordinati in maniera decrescente:

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_k$$



Autovalori e autovettori

- $A_{k \times k}$ una matrice simmetrica a valori reali
- $A_{k \times k}$ definita positiva \Leftrightarrow tutti gli autovalori di $A_{k \times k}$ sono positivi, i.e. $\lambda_j > 0, j = 1, \dots, k$
- $A_{k \times k}$ semidefinita positiva \Leftrightarrow tutti gli autovalori di $A_{k \times k}$ sono non negativi, i.e. $\lambda_j \geq 0, j = 1, \dots, k$
- $A_{k \times k}$ con $\text{rango}(A_{k \times k}) = r \leq k$. Allora $A_{k \times k}$ ha r autovalori non nulli, e i rimanenti $k - r$ autovalori nulli
- Autovettori normalizzati $v_j_{k \times 1}$ e $v_l_{k \times 1}$ associati ad autovalori distinti $\lambda_j \neq \lambda_l$ sono perpendicolari, i.e. $v_j'_{1 \times k} v_l_{k \times 1} = 0$

Teorema di Decomposizione Spettrale

Sia $A_{k \times k}$ una matrice simmetrica a valori reali. Allora $A_{k \times k}$ si può esprimere come

$$A_{k \times k} = V_{k \times k} \Lambda_{k \times k} V'_{k \times k} = \sum_{j=1}^k \lambda_j \underset{k \times 1}{v_j} \underset{1 \times k}{v'_j}$$

dove

- $\Lambda_{k \times k} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ è una matrice diagonale dove il j -simo elemento diagonale λ_j è il j -simo autovalore associato ad $A_{k \times k}$
- $V_{k \times k} = \begin{bmatrix} v_1 & \cdots & v_k \\ k \times 1 & & k \times 1 \end{bmatrix}$, dove la j -sima colonna v_j è il j -simo autovettore normalizzato ($\|v_j\|_{k \times 1} = 1$) associato all'autovalore λ_j
- $V_{k \times k}$ è una matrice ortogonale: $V_{k \times k} V'_{k \times k} = V'_{k \times k} V_{k \times k} = I_{k \times k}$



Esempio

$A_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 2.2 & 0.4 \\ 0.4 & 2.8 \end{bmatrix}$ simmetrica e a valori reali. Otteniamo gli autovalori

$\lambda_1 = 3$ e $\lambda_2 = 2$, a cui corrispondono gli autovalori (normalizzati)

$v_1_{2 \times 1} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} \end{bmatrix}$ e $v_2_{2 \times 1} = \begin{bmatrix} 2/\sqrt{5} \\ -1/\sqrt{5} \end{bmatrix}$, quindi

$$A_{2 \times 2} = 3 \begin{bmatrix} 1/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 2/\sqrt{5} \\ -1/\sqrt{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{5} \end{bmatrix}$$



Lemma

$$\boxed{A_{k \times k}^q = V_{k \times k} \Lambda_{k \times k}^q V'_{k \times k}}$$

dove $\Lambda_{k \times k}^q = \text{diag}(\lambda_1^q, \dots, \lambda_k^q)$

- Se $A_{k \times k}$ è semidefinita positiva, vale solo per $q > 0$ razionali, ovvero per $q \in \mathbb{Q}^+$
- Se $A_{k \times k}$ è definita positiva, vale anche per $q < 0$ razionali, ovvero per $q \in \mathbb{Q} \setminus 0$



Applicazioni del Lemma

- $A_{k \times k}^{-1} = V_{k \times k} \Lambda_{k \times k}^{-1} V'_{k \times k}$
- $A_{k \times k}^{-\frac{1}{2}} = V_{k \times k} \Lambda_{k \times k}^{-\frac{1}{2}} V'_{k \times k}$
- $A_{k \times k}^2 = V_{k \times k} \Lambda_{k \times k}^2 V'_{k \times k}$
- $A_{k \times k}^{\frac{1}{2}} = V_{k \times k} \Lambda_{k \times k}^{\frac{1}{2}} V'_{k \times k}$



Decomposizione Spettrale di S

La decomposizione spettrale della matrice simmetrica $S_{p \times p}$ è

$$S_{p \times p} = V_{p \times p} \Lambda_{p \times p} V'_{p \times p}$$

Ricordando che $V_{p \times p} V'_{p \times p} = V'_{p \times p} V_{p \times p} = I_{p \times p}$, otteniamo

$$\text{tr}(S_{p \times p}) = \text{tr}(V_{p \times p} \Lambda_{p \times p} V'_{p \times p}) = \text{tr}(\Lambda_{p \times p} V'_{p \times p} V_{p \times p}) = \text{tr}(\Lambda_{p \times p}) = \sum_{j=1}^p \lambda_j$$

$$\begin{aligned} \det(S_{p \times p}) &= \det(V_{p \times p} \Lambda_{p \times p} V'_{p \times p}) = \det(V_{p \times p}) \det(\Lambda_{p \times p}) \det(V'_{p \times p}) \\ &= \det(\Lambda_{p \times p}) \det(V_{p \times p} V'_{p \times p}) = \det(\Lambda_{p \times p}) \det(I_{p \times p}) = \prod_{j=1}^p \lambda_j \end{aligned}$$

Per le proprietà di traccia e determinante, vedi Appendice della lezione su varianza totale e generalizzata;



Outline

- ① Decomposizione Spettrale
- ② Matrice dei dati ortogonalizzati**
- ③ Decomposizione in Valori Singolari
- ④ Appendice



Matrice dei dati ortogonalizzati \tilde{Z}

Sia $S_{p \times p}$, la matrice di varianze/covarianze di $X_{n \times p}$, definita positiva.

Possiamo allora ottenere la matrice dei dati ortogonalizzati

$$\tilde{Z}_{n \times p} = H_{n \times n} X_{n \times p} S_{p \times p}^{-\frac{1}{2}}$$

tale per cui

- $\tilde{Z}_{n \times p}$ ha vettore delle medie nullo $0_{p \times 1}$
- $\tilde{Z}_{n \times p}$ ha matrice di varianze/covarianze $S_{p \times p}^{\tilde{Z}} = I_{p \times p}$

Questa trasformazione lineare dei dati originali $X_{n \times p}$ si chiama
trasformazione di Mahalanobis



Dati ortogonalizzati \tilde{Z}

Dimostrazione:

Il vettore delle medie di $\tilde{Z}_{n \times p}$ è

$$\frac{1}{n} \tilde{Z}' \mathbf{1}_{n \times 1} = \frac{1}{n} (S^{-\frac{1}{2}})'_{p \times p} \tilde{X}' \mathbf{1}_{p \times n n \times 1} = S^{-\frac{1}{2}}_{p \times p} \mathbf{0}_{p \times 1} = \mathbf{0}_{p \times 1}$$

ricordando che

- il vettore delle medie di $\tilde{X}_{n \times p}$ è nullo: $\frac{1}{n} \tilde{X}' \mathbf{1}_{n \times n n \times 1} = \mathbf{0}_{p \times 1}$
- la decomposizione spettrale di $S_{p \times p}$ è $S_{p \times p} = V_{p \times p} \Lambda_{p \times p} V'_{p \times p}$
- per il Lemma, abbiamo $S^{-\frac{1}{2}}_{p \times p} = V_{p \times p} \Lambda^{-\frac{1}{2}}_{p \times p} V'_{p \times p}$ simmetrica:

$$(S^{-\frac{1}{2}})'_{p \times p} = (V_{p \times p} \Lambda^{-\frac{1}{2}}_{p \times p} V'_{p \times p})' = V_{p \times p} \Lambda^{-\frac{1}{2}}_{p \times p} V'_{p \times p} = S^{-\frac{1}{2}}_{p \times p}$$



Dati ortogonalizzati \tilde{Z}

Dimostrazione:

La matrice di varianze/covarianze di $\tilde{Z}_{n \times p}$ è

$$\begin{aligned} S^{\tilde{Z}}_{p \times p} &= \frac{1}{n} \tilde{Z}' H \tilde{Z} = \frac{1}{n} (S^{-\frac{1}{2}})' \tilde{X}' \tilde{X} S^{-\frac{1}{2}} = S^{-\frac{1}{2}} S S^{-\frac{1}{2}} \\ &= (V \Lambda^{-\frac{1}{2}} V') (V \Lambda V') (V \Lambda^{-\frac{1}{2}} V') = V \Lambda^{-\frac{1}{2}} \Lambda \Lambda^{-\frac{1}{2}} V' \\ &= V \Lambda \Lambda^{-\frac{1}{2}} \Lambda^{-\frac{1}{2}} V' = V \Lambda \Lambda^{-1} V' = V I V' = I \end{aligned}$$

ricordando che

- V è una matrice ortogonale: $V V' = V' V = I$
- $\text{diag}(a_1, \dots, a_q) \text{diag}(b_1, \dots, b_q) = \text{diag}(a_1 b_1, \dots, a_q b_q) = \text{diag}(b_1, \dots, b_q) \text{diag}(a_1, \dots, a_q)$

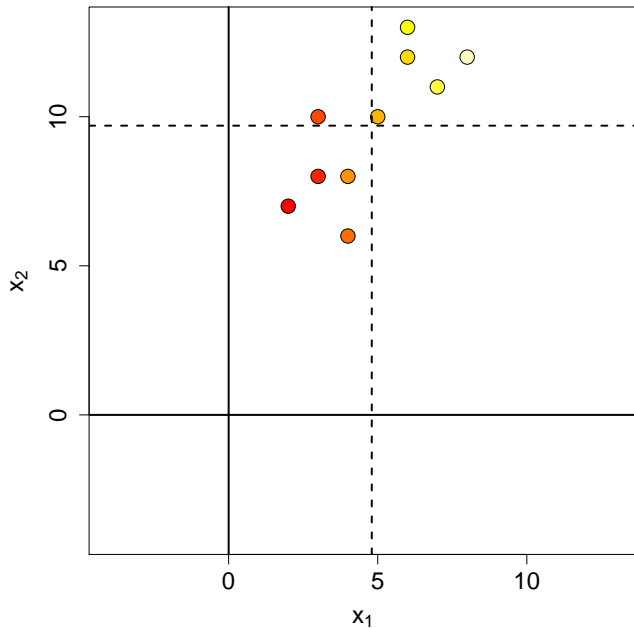


Dati ortogonalizzati \tilde{Z}

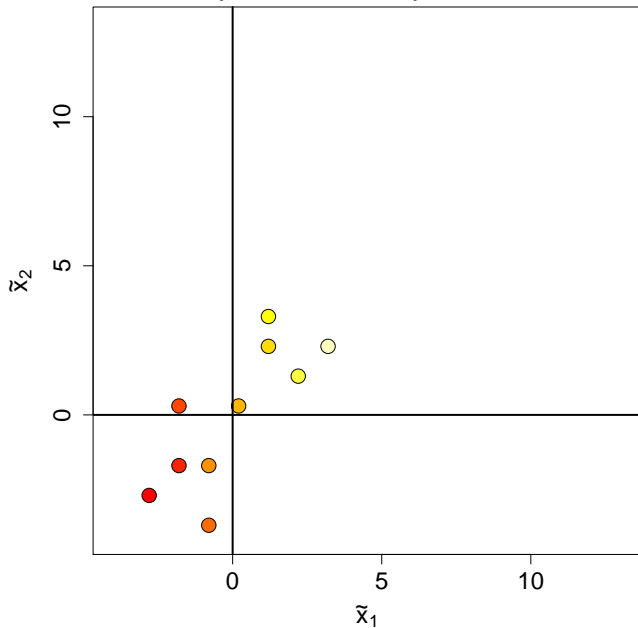
Matrice dei dati	Vettore delle medie	Matrice di varianze/covarianze	Matrice di correlazione
$X_{n \times p}$	$\bar{x}_{p \times 1}$	$S_{p \times p}$	$R_{p \times p}$
$\tilde{X}_{n \times p}$	$0_{p \times 1}$	$S^{\tilde{X}} = S_{p \times p}$	$R^{\tilde{X}} = R_{p \times p}$
$Z_{n \times p}$	$0_{p \times 1}$	$S^Z = R_{p \times p}$	$R^Z = R_{p \times p}$
$\tilde{Z}_{n \times p}$	$0_{p \times 1}$	$S^{\tilde{Z}} = I_{p \times p}$	$R^{\tilde{Z}} = I_{p \times p}$



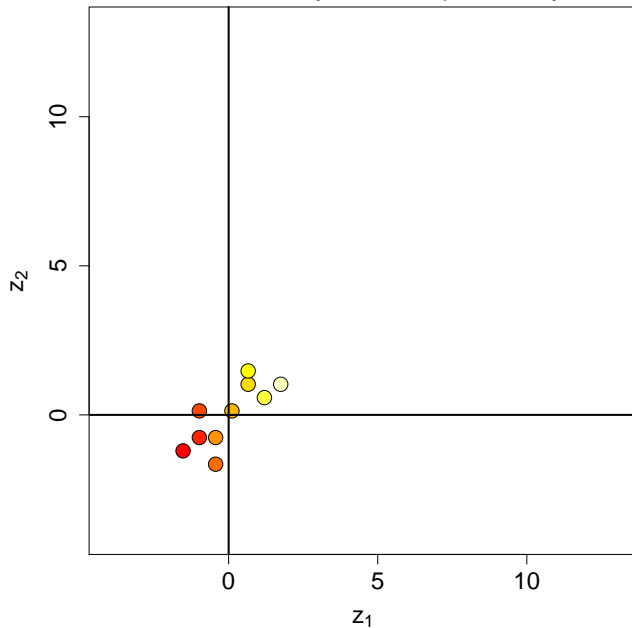
Matrice originale X



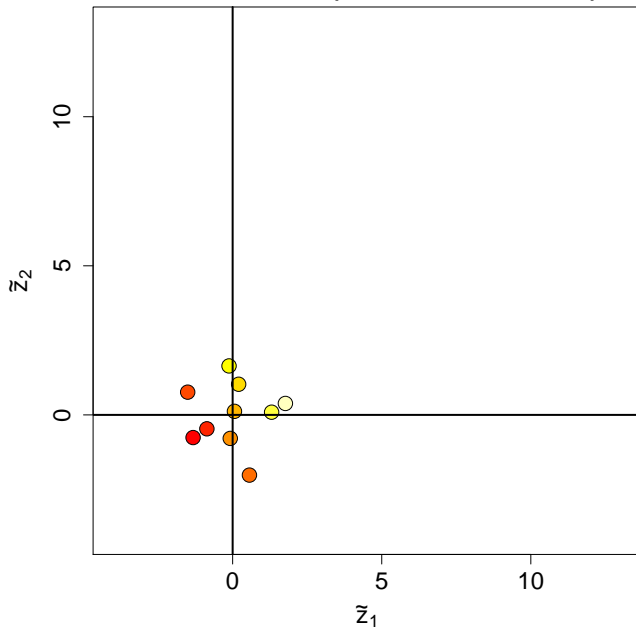
Matrice centrata \tilde{X} (traslazione)



Matrice standardizzata Z (compr./dilat.)



Matrice ortogonalizzata \tilde{Z} (decorrelazione)



Outline

- ① Decomposizione Spettrale
- ② Matrice dei dati ortogonalizzati
- ③ Decomposizione in Valori Singolari**
- ④ Appendice



Decomposizione in Valori Singolari (SVD)

- Si possono generalizzare le idee della Decomposizione Spettrale per ottenere la Decomposizione in Valori Singolari (*Singular Value Decomposition*) di una matrice rettangolare $A_{m \times k}$, dove:
- i vettori v_j e u_j della SVD di $A_{m \times k}$ sono gli autovettori normalizzati delle matrici simmetriche $K_{k \times k} = A'_{k \times m} A_{m \times k}$ e $M_{m \times m} = A_{m \times k} A'_{k \times m}$, rispettivamente
- i valori δ_j della SVD di $A_{m \times k}$ sono la radice quadrata degli autovalori > 0 della matrice K (o, equivalentemente, della matrice M)



Decomposizione in Valori Singolari (SVD)

Sia $A_{m \times k}$ una matrice rettangolare a valori reali. Allora esiste una matrice ortogonale $U_{m \times m}$ e una matrice ortogonale $V_{k \times k}$ tali che

$$A_{m \times k} = U_{m \times m} \Delta_{m \times k} V'_{k \times k} = \sum_{j=1}^{\min(m,k)} \delta_j \begin{matrix} u_j \\ m \times 1 \end{matrix} \begin{matrix} v'_j \\ 1 \times k \end{matrix}$$

dove la matrice $\Delta_{m \times k}$ ha elemento di posizione (j, j) pari a $\delta_j \geq 0$ per $j = 1, \dots, \min(m, k)$ e gli altri elementi pari a 0.

Le costanti $\delta_1 \geq \dots \geq \delta_{\min(m,k)}$ sono dette *valori singolari* di $A_{m \times k}$.



Decomposizione in Valori Singolari (SVD)

- Sia $A_{m \times k}$ con $\text{rank}(A) = r \leq \min(m, k)$.
- Le k colonne di $V_{k \times k}$ sono gli autovettori di $K = A' A_{k \times m m \times k}$

$$\begin{aligned}
 A' A_{k \times m m \times k} &= V_{k \times k} \Delta'_{k \times m} U'_{m \times m} U_{m \times m} \Delta_{m \times k} V'_{k \times k} = V_{k \times k} \Delta'_{k \times m} \Delta_{m \times k} V'_{k \times k} \\
 &= V_{k \times k} \begin{bmatrix} \Delta_r^2 & 0 \\ r \times r & r \times (k-r) \\ 0 & 0 \\ (k-r) \times r & (k-r) \times (k-r) \end{bmatrix} V'_{k \times k} = V^K \Lambda^K (V^K)'_{k \times k}
 \end{aligned}$$

- Le m colonne di $U_{m \times m}$ sono gli autovettori di $M = A A'_{m \times k k \times m}$

$$\begin{aligned}
 A A'_{m \times k k \times m} &= U_{m \times m} \Delta_{m \times k} V'_{k \times k} V_{k \times k} \Delta'_{k \times m} U'_{m \times m} = U_{m \times m} \Delta_{m \times k} \Delta'_{k \times m} U'_{m \times m} \\
 &= U_{m \times m} \begin{bmatrix} \Delta_r^2 & 0 \\ r \times r & r \times (m-r) \\ 0 & 0 \\ (m-r) \times r & (m-r) \times (m-r) \end{bmatrix} U'_{m \times m} = U^M \Lambda^M (U^M)'_{m \times m}
 \end{aligned}$$



Decomposizione in Valori Singolari (SVD)

- Sia A con $\text{rango}(A) = r \leq \min(m, k)$.
- $\Delta_r^2 = \text{diag}(\delta_1^2, \dots, \delta_r^2)$ i cui elementi diagonali sono gli r autovalori non nulli $\lambda_1^K \geq \lambda_2^K \geq \dots \geq \lambda_r^K > 0$ di $K = A' A$ (o di $M = \begin{matrix} A & A' \\ m \times k & k \times m \end{matrix}$)

Possiamo scrivere

$$A = \begin{matrix} U & \Delta & V' \\ m \times m & m \times k & k \times k \end{matrix} = \begin{matrix} U_r & \Delta_r & V_r' \\ m \times r & r \times r & r \times k \end{matrix} = \sum_{j=1}^r \delta_j \begin{matrix} u_j & v_j' \\ m \times 1 & 1 \times k \end{matrix}$$

con

- $U_r = \begin{bmatrix} u_1 & \dots & u_r \\ m \times 1 & & m \times 1 \end{bmatrix}$
- $V_r = \begin{bmatrix} v_1 & \dots & v_r \\ k \times 1 & & k \times 1 \end{bmatrix}$
- $\Delta_r = \text{diag}(\delta_1, \dots, \delta_r)$ con $\delta_j > 0$



Matrice di varianze/covarianze S

- Decomposizione spettrale di $S_{p \times p}$

$$S_{p \times p} = V_{p \times p} \Lambda_{p \times p} V'_{p \times p}$$

- Decomposizione in valori singolari di $\tilde{X}_{n \times p}$

$$\tilde{X}_{n \times p} = U_{n \times n} \Delta_{n \times p} V'_{p \times p}$$

- Decomposizione in valori singolari di $S_{p \times p}$

$$S = \frac{1}{n} \tilde{X}' \tilde{X} = \frac{1}{n} V \Delta U' U \Delta V' = V \frac{1}{n} \Delta^2 V'$$



Outline

- ① Decomposizione Spettrale
- ② Matrice dei dati ortogonalizzati
- ③ Decomposizione in Valori Singolari
- ④ Appendice**



Autovalori e autovettori

Per ogni matrice quadrata $A_{k \times k}$, si possono trovare uno scalare λ e un vettore $v_{k \times 1}$ tali che

$$A_{k \times k} v_{k \times 1} = \lambda v_{k \times 1} \quad (1)$$

λ è detto autovalore (*eigenvalue*) di $A_{k \times k}$ e $v_{k \times 1}$ è l'autovettore (*eigenvector*) di $A_{k \times k}$ corrispondente a λ . Per risolvere l'equazione (1) scriviamo:

$$(A_{k \times k} - \lambda I_{k \times k}) v_{k \times 1} = 0_{k \times 1} \quad (2)$$



Autovalori e autovettori

- Se $\det\left(\begin{smallmatrix} A & -\lambda I \\ k \times k & k \times k \end{smallmatrix}\right) \neq 0$, $\begin{pmatrix} A & -\lambda I \\ k \times k & k \times k \end{pmatrix}$ è invertibile e $\begin{pmatrix} v \\ k \times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ k \times 1 \end{pmatrix}$ è l'unica soluzione. Per escludere le soluzioni banali, imponiamo quindi $\det\left(\begin{smallmatrix} A & -\lambda I \\ k \times k & k \times k \end{smallmatrix}\right) = 0$ in modo tale da ottenere valori di λ che possano essere sostituiti in (1) e (2) per ottenere i corrispondenti valori di $\begin{pmatrix} v \\ k \times 1 \end{pmatrix}$.
- Quindi, affinché (2) abbia una soluzione, è necessario che le colonne di $\begin{smallmatrix} A & -\lambda I \\ k \times k & k \times k \end{smallmatrix}$ siano linearmente dipendenti. Concludendo, $\begin{smallmatrix} A & -\lambda I \\ k \times k & k \times k \end{smallmatrix}$ deve essere singolare (determinate pari a 0) affinché esista un $\begin{pmatrix} v \\ k \times 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ k \times 1 \end{pmatrix}$ che sia soluzione di (1).
- L'equazione $\det\left(\begin{smallmatrix} A & -\lambda I \\ k \times k & k \times k \end{smallmatrix}\right)$ è detta equazione caratteristica. Visto che $\begin{smallmatrix} A \\ k \times k \end{smallmatrix}$ ha dimensioni $k \times k$, l'equazione caratteristica ha k radici; cioè, $\begin{smallmatrix} A \\ k \times k \end{smallmatrix}$ ha k autovalori $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$. I valori λ_j non sono tutti necessariamente distinti da zero.



Autovalori e autovettori

- Però, se $A_{k \times k}$ è non singolare, gli autovalori saranno tutti diversi tra loro. Gli autovettori v_1, v_1, \dots, v_k associati a $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ sono definiti da (2).
- Notiamo che se moltiplichiamo entrambi i membri della (1) per uno scalare c (e sfruttiamo la proprietà commutativa), otteniamo

$$(A_{k \times k} - \lambda I_{k \times k}) c v_{k \times 1} = c 0 = 0.$$

Quindi, se $v_{k \times 1}$ è un autovettore di $A_{k \times k}$, anche $c v_{k \times 1}$ è un autovettore. In generale, ogni autovettore è unico a meno di valori scalari $c \neq 0$. Si noti in ogni caso che la direzione indicata dal vettore $v_{k \times 1}$ è unica (la moltiplicazione per c mantiene costanti i rapporti delle coordinate) e quindi la soluzione è essenzialmente unica.

- Per questo motivo è uso definire l'autovettore normalizzato

$$e_{k \times 1} = v_{k \times 1} / \|v_{k \times 1}\| \text{ di lunghezza unitaria, cioè tale che } e'_{1 \times k} e_{k \times 1} = 1.$$



Autovalori e autovettori: esempio

- Facciamo un esempio, troviamo gli autovalori e autovettori della matrice

$$A_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$

- L'equazione caratteristica è

$$\det(A_{2 \times 2} - \lambda I_{2 \times 2}) = \det \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 2 \\ -1 & 4 - \lambda \end{pmatrix} = (1 - \lambda)(4 - \lambda) + 2 = 0$$
$$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = (\lambda - 3)(\lambda - 2) = 0,$$

da cui si ricavano $\lambda_1 = 3$ e $\lambda_2 = 2$.



Autovalori e autovettori: esempio

- Per trovare l'autovettore e_1 corrispondente a $\lambda_1 = 3$, usiamo la (2):

$$\begin{aligned} & \left(\underset{2 \times 2}{A} - \lambda \underset{2 \times 2}{I} \right) \underset{2 \times 1}{e_1} = \underset{2 \times 1}{0} \\ & \begin{bmatrix} 1-3 & 2 \\ -1 & 4-3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{11} \\ e_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ & \begin{cases} -2e_{11} + 2e_{21} = 0 \\ -e_{11} + e_{21} = 0. \end{cases} \end{aligned}$$



Autovalori e autovettori: esempio

- Come atteso, la seconda equazione è ridondante in presenza della prima (e viceversa), rimane quindi una sola equazione con due parametri: $e_{11} = e_{21}$. Ora se all'unica equazione aggiungiamo la condizione di vettore di lunghezza unitaria ($\| e_1 \|_{2 \times 1} = 1$ cioè

$\sqrt{e_{11}^2 + e_{21}^2} = 1$) otteniamo

$$e_1 = \begin{bmatrix} e_{11} \\ e_{21} \end{bmatrix}_{2 \times 1} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

- In modo analogo, in corrispondenza di $\lambda_2 = 2$, si ha

$$e_2 = \begin{bmatrix} 2/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} \end{bmatrix}_{2 \times 1}.$$



Autovalori e autovettori: ulteriori risultati

- Nonostante gli autovalori di una matrice $A_{k \times k}$ non siano necessariamente tutti reali, ciò è garantito nel caso $A_{k \times k}$ sia simmetrica e reale.
- Sia $A_{k \times k}$ una matrice $k \times k$ and $B_{k \times k}$ una matrice $k \times k$ con $\text{rango}(B) = k$. $A_{k \times k}$ e $B^{-1} A B_{k \times k}$ hanno gli stessi autovalori.
- una matrice $A_{k \times k}$ con $\text{rango}(A_{k \times k}) < k$ ha almeno un autovalore pari a zero.
- una matrice idempotente ha solo autovalori pari a 1 o 0.
- - Se $A_{k \times k}$ è semidefinita positiva, allora $\lambda_j \geq 0, j = 1, \dots, k$;
 - Se $A_{k \times k}$ è definita positiva, allora $\lambda_j > 0, j = 1, \dots, k$
- Autovettori associati a distinti autovalori sono perpendicolari (se $\lambda_j \neq \lambda_l, e'_j e_l = 0$)
 $1 \times k$ $k \times 1$

