25 Gennaio 2018 - Analisi Esplorativa

Cognome: ....

Nome: ....

Matricola: ....

Tipologia d'esame: ☐ 12 CFU ☐ 15 CFU

Prova scritta - fila A

Si svolgano gli esercizi riportando il risultato dove indicato. Durata: 40 minuti

---

Esercizio 1 (7 punti)

Si consideri la seguente matrice di correlazione $\underset{3\times 3}{R} = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1 & 2/3 \\ 1/2 & 2/3 & 1 \end{bmatrix}$.

a. Riportare l'indice di variabilità relativo, arrotondando al secondo decimale: ....

b. Sia $\underset{n\times 3}{\tilde{X}}$ la matrice dei dati centrati. Determinare l'angolo (espresso in gradi) tra $\underset{n\times 1}{\tilde{x}_1}$ e $\underset{n\times 1}{\tilde{x}_3}$: = ...

c. Sapendo che $s_{11} = 4$, $s_{22} = 9$ e $\mathrm{tr}(S) = 14$, calcolare $\det(S) =$ ...., dove $\underset{3\times 3}{S}$ rappresenta la matrice di varianze/covarianze.

d. Calcolare $S = \begin{bmatrix} \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \end{bmatrix}$

e. Determinare gli autovalori di S, arrotondando al secondo decimale: $\lambda_1 =$ ......, $\lambda_2 =$ ......, $\lambda_3 =$ ......

f. Calcolare, arrotondando al secondo decimale, $S^{1/2} = \begin{bmatrix} \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \end{bmatrix}$.

g. Calcolare la correlazione tra la terza colonna $\underset{n\times 1}{\tilde{x}_3}$ di $\underset{n\times 3}{\tilde{X}}$ e i punteggi $\underset{n\times 1}{y_2}$ della seconda componente principale (calcolata a partire da S), arrotondando al secondo decimale: = ...

h. Si consideri la seguente trasformazione lineare: $\underset{n\times 3}{W} = \underset{n\times 3}{X}\underset{3\times 3}{A'}$, dove $A = \mathrm{diag}(1, 2, 3)$. Calcolare la matrice di varianze/covarianze di W, $S^W = \begin{bmatrix} \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \end{bmatrix}$

```r
R = matrix(c(1,1/2,1/2,1/2,1,2/3,1/2,2/3,1), byrow=T, ncol=3)
# a
round(det(R),2)
```

```
## [1] 0.39
```

```r
# b
acos(R[1,3])*(180/pi)
```

```
## [1] 60
```

```r
# c
s11=4
s22=9
s33=14-s11-s22
det(R)*(s11*s22*s33)
```

```
## [1] 14
```

```r
# d
D = diag(c(s11,s22,s33))
S = D^(1/2) %*% R %*% D^(1/2)
S
```

```
##      [,1] [,2] [,3]
## [1,]    4    3    1
## [2,]    3    9    2
## [3,]    1    2    1
```

```r
# e
lambdas = eigen(S)$values
round(lambdas,2)
```

```
## [1] 10.91  2.60  0.49
```

```r
# f
V = eigen(S)$vectors
sqrtS = V %*% diag( lambdas^(1/2) ) %*% t(V)
round(sqrtS,2)
```

```
##      [,1] [,2] [,3]
## [1,] 1.89  0.6 0.26
## [2,] 0.60  2.9 0.50
## [3,] 0.26  0.5 0.83
```

```r
# g
round( V[3,2]*sqrt(lambdas[2])/sqrt(s33) , 2)
```

```
## [1] 0.04
```

```r
# h
A = diag(1:3)
S_W = A %*% S %*% t(A)
S_W
```

```
##      [,1] [,2] [,3]
## [1,]    4    6    3
## [2,]    6   36   12
## [3,]    3   12    9
```

Esercizio 2 (2 punti)

Riportare le seguenti definizioni (in forma matriciale), specificando tutte le quantità coinvolte:

a. Vettore delle medie

b. Matrice di centramento

c. Matrice dei dati centrati

d. Matrice di varianze/covarianze

e. Matrice dei dati standardizzati

f. Matrice dei dati ortogonalizzati

Esercizio 3 (4 punti)

Dimostrare, esplicitando tutti i passaggi, e specificando tutte le quantità coinvolte,

a. che la matrice di varianze/covarianze S è semi-definita positiva, esplicitando tutti i passaggi.

b. che $\mathrm{tr}(S) = \sum_{j=1}^{p} \lambda_j$, dove $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ sono gli autovalori di S.

d. Enunciare il Teorema di Eckart-Young.