CHAPITRE 1

Calcul matriciel, déterminants, sytèmes

Dans ce chapitre on se limitera à définir une matrice et à apprendre à faire des opérations sur les matrices sans faire intervenir la notion de base, d'applications linéaires et de leur matrices.

1.1 Notion Générale de matrice

Définition: 1.1.0.1 *Dans tout ce cours, on fixe un corps $\mathbb{K}$: soit $\mathbb{R}$, soit $\mathbb{C}$*

On appelle matrice à coefficients dans $\mathbb{K}$ la donnée :

- d'un nombre p de colonnes ; d'un nombre n de lignes ;
- d'un ensemble de np coefficients de $\mathbb{K}$ rangés dans un tableau de n lignes et p colonnes.

On numérote les coefficients avec deux indices : le premier indique le numéro de la ligne, le second le numéro de la colonne. Ainsi, le coefficient (a_{ij}) est l'intersection de la $i^{\text{ème}}$ ligne et de la $j^{\text{ème}}$ colonne. On note alors $(a_{ij})_{1\leqslant i\leqslant n, 1\leqslant j\leqslant p}$ la matrice. On dit que la matrice est de taille $n\times p$. (*lire "n croix p" et respecter l'ordre*

$$A_{np} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1,k} & \dots & a_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{i,k} & \dots & a_{ip} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{n,k} & \dots & a_{np} \end{pmatrix}$$

Exemple: 1.1.0.1 $A_{25} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$; $A_{32} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$; $A_{34} = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 5 & 0 \end{bmatrix}$

Définition: 1.1.0.2 ***Matrices Particulières***

❶ *Les matrices colonnes sont les matrices à une colonne :* $\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ a_{3j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}$

Exemple: 1.1.0.2 $A_{31} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$

❷ *Les matrices lignes sont les matrices à une ligne :* $\begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \dots & a_{ip} \end{pmatrix}$

Exemple: 1.1.0.3 $A_{14} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -3 & -2 \end{bmatrix}$

❸ *La matrice nulle est la matrice dont tous les coefficients sont nuls. On la note 0_{np} si elle a n lignes et p colonnes, 0 s'il n'y a pas d'ambiguiẗé.*

$$0_{np} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Exemple: 1.1.0.4 $0_{35} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

❹ *Les matrices carrées sont les matrices dont les nombres de lignes et de colonnes sont égaux. (n=p). Ce nombre de ligne et de colonne s'appelle l'ordre de la matrice.*

$$M_n = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

La matrice étant carrée, le coefficient a_{ij} vérifie $a_{ij} = a_{ii} = a_{jj}$ car $i = j$ à ce endroit. Les coefficients ayant même indice de ligne et de *colonne s'appellent les coefficient diagonaux.*

$$M_n = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Exemple: 1.1.0.5 $A_{11} = \begin{bmatrix} -3 \end{bmatrix}$; $A_{22} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}$; $A_{33} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -3 & 0 & 3 \\ -4 & 3 & -2 \end{bmatrix}$

❺ *Les matrices triangulaires inférieures sont les matrices carrées dont tous les coefficients strictement au dessus de la diagonale (c'est-à-dire d'indice ij avec $j > i$) sont nuls.*

$$M_n = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & 0 \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Exemple: 1.1.0.6 $A_{22} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$; $A_{33} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

❻ *Les matrices triangulaires supérieures sont les matrices carrées dont tous les coefficients strictement en dessous de la diagonale (c'est-à-dire d'indice ij avec $j < i$) sont nuls.*

$$M_n = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ 0 & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Exemple: 1.1.0.7 $A_{22} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$; $A_{33} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

❼ *Les matrices diagonales sont les matrices carrées à la fois triangulaires supérieures et triangulaires inférieures. Les seuls coefficients non nuls sont donc ceux de la diagonale.*

$$M_n = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & a_{ij} & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Exemple: 1.1.0.8 $A_{22} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$; $A_{44} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

❽ *La matrice identité est la matrice diagonale dont tous les coefficients diagonaux valent 1. On note I_n la matrice identité d'ordre n. On a*

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exemple: 1.1.0.9 $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$; $I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; $I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

1.2 Opérations sur les matrices

1.2.1 égalité de deux matrices

Deux matrices M et N sont égales, ce qu'on note $M = N$ si

❶ elles ont le même nombre de ligne ;
❷ elles ont le même nombre de colonnes ;
❸ les coefficients à la même position sont égaux.

Si $M = (a_{ij})_{(1 \leqslant i \leqslant n; 1 \leqslant j \leqslant p)}$ et $N = (b_{ij})_{(1 \leqslant i \leqslant n; 1 \leqslant j \leqslant p)}$ la condition dégalité des coefficients est : $\forall i \in \{1, ..., n\}, \forall j \in \{1, ..., p\}, \quad a_{ij} = b_{ij}$.

Exemple: 1.2.1.1 $A_{32} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$; $B_{23} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$;

ne sont pas égaux.

1.2.2 Addition des matrices

Soit M et N deux matrices de $M_{np}(\mathbb{K})$, la somme $M+N$ est la matrice de $M_{np}(\mathbb{K})$ dont chaque coefficient est somme des coefficients de même position de M et de N : Si $M = (a_{ij})_{(1\leqslant i\leqslant n;1\leqslant j\leqslant p)}$ et $N = (b_{ij})_{(1\leqslant i\leqslant n;1\leqslant j\leqslant p)}$, alors $M + N = (a_{ij} + b_{ij})_{(1\leqslant i\leqslant n;1\leqslant j\leqslant p)}$

Exemple: 1.2.2.1 $A_{23} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 4 & -1 & 1 \end{bmatrix}$; $B_{32} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix} =$; $A_{23} + B_{23} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

Proposition Si M, N et P sont trois matrices de $M_{np}(\mathbb{K})$,
- l'addition est associative : (M+N)+P=M+(N+P)
- la matrice nulle à n lignes et p colonnes est un élément neutre pour l'addition : $M + 0_{np} = M$
- toute matrice admet un symétrique : En posant $-M = (-a_{ij})_{(1\leqslant i\leqslant n;1\leqslant j\leqslant p)}$ on a : $M + (-M) = 0_{np}$
- l'addition est commutative : $M + N = N + M$ (on note $M - N$ la somme $M + (-N)$)

1.2.3 Produit d'une matrice par un élément de $\mathbb{K}$

Soit M une matrice de $M_{np}(\mathbb{K})$. On appelle produit (externe) de λ par M, on note λM la matrice dont chaque coefficient est obtenu en multipliant le coefficient de même position de M par λ : si $M = (a_{ij})_{1\leqslant i\leqslant n,1\leqslant j\leqslant p}$

$$\lambda M = (\lambda a_{ij})_{1\leqslant i\leqslant n,1\leqslant j\leqslant p}$$

Exemple: 1.2.3.1 $A_{23} = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -2 \end{bmatrix}$; $-2A_{23} = \begin{bmatrix} 6 & -4 & -6 \\ -4 & 2 & 4 \end{bmatrix}$

Proposition Soit M, N des matrices de $M_{np}(\mathbb{K})$ et λ et μ des éléments de $\mathbb{K}$. Alors
- $\lambda(M + N) = \lambda M + \lambda N$
- $(\lambda + \mu)M = \lambda M + \mu N$
- $(\lambda)\mu M = (\lambda\mu)M$
- $1M = M$

1.2.4 Produit d'une matrice ligne par une matrice colonne

Soit

- $M = (a_1, ..., a_p)$ une matrice ligne de $M_{1p}(\mathbb{K})$,
- $N = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix}$ une matrice colonne de $M_{p1}(\mathbb{K})$. Le produit de M par N est la matrice 1×1 dont le coefficient est $a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_pb_p$. On note que la matrice ligne et la matrice colonne ont même nombre d'éléments.

Exemple: 1.2.4.1 $A_{14} = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 3 & -2 \end{bmatrix}$; $A_{41} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$; $A_{14} \times A_{41} = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 3 & -2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} = A_{11} = \begin{bmatrix} (-3) \times 2 + 2 \times 4 + 3 \times (-1) + (-2) \times 3 \end{bmatrix} = [-7]$

1.2.5 Produit d'une matrice par une matrice colonne

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ip} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{np} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{coefficients de } (a_{11}, \dots, a_{1p}) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix} \\ \vdots \\ \text{coefficients de } (a_{i1}, \dots, a_{ip}) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix} \\ \vdots \\ \text{coefficients de } (a_{n1}, \dots, a_{np}) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

Autrement dit, pour $M \in M_{np}(\mathbb{K})$ une matrice et $N \in M_{p1}(\mathbb{K})$ une matrice colonne, le produit de M par N, noté MN est la matrice colonne $n \times 1$ dont la ligne n^o i est le produit de la ligne n^o i de M avec N et ce pour chaque numéro de ligne i.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ip} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{np} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_1 + \dots + a_{1p}b_p \\ \vdots \\ a_{i1}b_1 + \dots + a_{ip}b_p \\ \vdots \\ a_{n1}b_1 + \dots + a_{np}b_p \end{pmatrix}$$

On note que M a autant de colonnes que N a de lignes.

1.2.6 Produit de deux matrices

condition de dimensions

Le produit d'une matrice M par une matrice N exige une compatibilité des dimensions . Le nombre de colonnes de la première matrice doit être égale au nombre de lignes de la seconde matrice.

Exemple

$$\text{Si } A_{32} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad B_{33} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad C_{12} = [1\ 2] \quad D_{13} = [x\ y\ z]$$

et $E_{21} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ alors :
les produits $A_{32}E_{21}$, $B_{33}A_{32}$, $C_{12}E_{21}$, $D_{13}A_{32}$ et $D_{13}B_{33}$ sont possibles.
Les produits $A_{32}B_{33}$, $A_{32}C_{12}$, $A_{32}D_{13}$, $B_{33}C_{12}$, $B_{33}E_{21}$, $C_{12}D_{13}$ sont impossibles.

dimensions de la matrice produit

$M \in M_{np}(\mathbb{K})$ une matrice à n lignes et p colonnes, et $N \in M_{pm}(\mathbb{K})$ une matrice à p lignes et m colonnes, le produit de M par N, noté MN est la matrice C_{nm} à n lignes et m colonnes.

$M_{np}N_{pm} = C_{nm}$. Si

$$M_{np} = (a_{ij}) \text{ et } N_{pm} = (b_{ij}) \text{ alors } C_{nm} = (c_{ij}) \text{ avec } c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ik} & \dots & a_{ip} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nk} & \dots & a_{np} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1j} & \dots & b_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{k1} & \dots & b_{kj} & \dots & b_{km} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{p1} & \dots & b_{pj} & \dots & b_{pm} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{p} a_{1k}b_{k1} & \dots & \sum_{k=1}^{p} a_{1k}b_{kj} & \dots & \sum_{k=1}^{p} a_{1k}b_{km} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{k1} & \dots & \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj} & \dots & \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{km} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{k=1}^{p} a_{nk}b_{k1} & \dots & \sum_{k=1}^{p} a_{nk}b_{kj} & \dots & \sum_{k=1}^{p} a_{nk}b_{km} \end{pmatrix}$$

Exemple: 1.2.6.1 $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

$$BC = \begin{pmatrix} 1\times 2 + 0\times 1 + (-1)\times 3 & 1\times(-2) + 0\times 1 + (-1)\times 1 \\ 2\times 2 + 0\times 1 + 4\times 3 & 2\times(-2) + 0\times 1 + 4\times 1 \\ 1\times 2 + 0\times 1 + (-2)\times 3 & 1\times(-2) + 0\times 1 + (-2)\times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 16 & 0 \\ -4 & -4 \end{pmatrix}$$

Propriété du produit matriciel

Non-commutativité

Si pour des nombres $ab = ba$, il n'en est pas de même pour des matrices. Si le produit AB est possible, BA peut ne pas l'être ou peut l'être mais ne pas avoir la même dimension. On dit que le produit matriciel n'est pas commutatif.

Exemple

$$A_{22} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad B_{21} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad C_{23} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \quad D_{32} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

On a $A_{22}B_{21} = \begin{bmatrix} 5 \\ 11 \end{bmatrix}$ alors que $B_{21}A_{22}$ n'est pas possible. De même on a $C_{23}D_{32} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -6 & -9 \end{bmatrix} \neq D_{32}C_{23} = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 4 \\ 3 & -8 & 10 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ car le premier produit donne une matrice d'ordre 2 tandis que la seconde est d'ordre 3.
Enfin même si les produits AB et BA sont possibles et ont la même dimension (cas des matrices carrées de même dimension) , ils peuvent être différents.

Exemple

$A_{22} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ $\quad B_{22} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ $\quad$ on a $AB_{22} = \begin{bmatrix} 14 & 16 \\ -3 & -3 \end{bmatrix}$ et $BA_{22} = \begin{bmatrix} 9 & 6 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ Donc $AB \neq BA$

Cas particulier

Il peut cependant arriver que pour deux matrices carrées particulières, les produits AB et BA soient égaux. On dit que A et B sont commutables ou que A et B commutent.

Exemple

$$A_{33} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ et } B_{33} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ alors } \quad AB_{33} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 8 & 10 & 12 \\ 4 & 2 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{et}$$

$BA_{33} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 8 & 10 & 12 \\ 4 & 2 & 2 \end{bmatrix} = AB_{33}$ mais ceci reste un cas particulier.
Dans le cas général de la non commutativité de AB on dit que B est multiplié à gauche par A ou que A est multiplié à droite par B.

La non régularité On ne simplifie pas les matrices

Soient les matrices $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ on a $AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ cela montre qu'un produit de matrices peut être nul sans qu'aucun des facteurs le soit.
Soient les matrices $C = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$ $D = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, on a $AC = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$ et $AD = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$ et pourtant $C \neq D$ On ne peut donc pas simplifier une égalité de matrice en divisant les deux membres par une même matrice.

Associativité

Sous réserve que les conditions de dimensions soient respectées, si A, B, C sont trois matrices quelconques on a

- A(BC)=(AB)C

Exemple

Soient $A_{33} = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ $B_{31} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$ $B_{31} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ Conditions et dimensions du produits (AB)C : $(A_{33}A_{31})C_{13} \to D_{31}C_{13} \longrightarrow E_{33}$

$$AB_{31}C_{13} = \begin{bmatrix} 2 \\ 13 \\ 14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 26 & 13 & 39 \\ 28 & 14 & 42 \end{bmatrix}$$

$$A_{33}BC_{33} = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 6 \\ 8 & 4 & 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 26 & 13 & 39 \\ 28 & 14 & 42 \end{bmatrix}$$

- A(B+C)=AB+AC

- (B+C)A=BA+CA

1.2.7 Transposée d'une matrice

Définition: 1.2.7.1 *On appelle matrice transposée de la matrice $A(n,p)$, la matrice notée ${}^tA(n,p) = A(p,n)$ obtenue en échangeant lignes et colonnes (des lignes deviennent des colonnes et des colonnes deviennent des lignes).*

Exemple: 1.2.7.1 *1)* $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \Longrightarrow {}^tA = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

2) $A = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}}_{(2,3)\ \textit{matrice}} \Longrightarrow {}^tA = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}_{(3,2)\ \textit{matrice}}$

Propriété 1.2.7.1 *Soit $A, B \in M_{np}(\mathbb{K})$, $\lambda \in \mathbb{K}$ on a les résultats suivants :*

- ${}^t({}^tA) = A$,
- ${}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB$
- ${}^t(\lambda A) = \lambda\, {}^tA$,
- ${}^t(AB) = {}^tB\, {}^tA$,
- ${}^t(A^{-1}) = ({}^tA)^{-1}$

Exercice: 1.2.7.1 *Soient les matrices suivantes :*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix} ; B = \begin{pmatrix} 1 & 7 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix} ; C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculer ${}^t({}^tBC)$; ${}^t((A-2B)C)$,

t(tBC) = tCB

t((A 2B)C) = tC(tA-2tB)

Matrice symétrique , Matrice adjointe

Définition: 1.2.7.2 *Une matrice carrée $A \in M_n(\mathbb{K})$ est dite symétrique si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ c'est-à-dire que A est réel et ${}^tA = A$.*

Exemple: 1.2.7.2 $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ 3 & 6 & 7 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & a & b & c \\ a & 1 & d & e \\ b & d & 1 & f \\ c & e & f & 1 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$

Définition: 1.2.7.3 *Soit $A \in M_{np}(\mathbb{K})$. On appelle adjoint de A notée A^* la matrice de $M_{np}(\mathbb{K})$ définie par $(A^*)_{ij} = \overline{A_{ji}}$*

Exemple: 1.2.7.3 *Pour* $A = \begin{pmatrix} 2 & 1-i & 0 \\ 1 & 2+i & -i \end{pmatrix}$ *on a* $A^* = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1+i & 2-i \\ 0 & i \end{pmatrix}$

Remarque 1.2.7.1 *Notons que la matrice adjointe d'une matrice A à coefficients complexes est la matrice transposée de la matrice conjuguée de A, autrement dit $A^* = \overline{{}^tA}$. Par conséquent l'adjoint d'une matrice réel est tout simplement sa transposée ; car dans ce cas $\overline{{}^tA} = {}^tA$*

Propriété 1.2.7.2 *Soit $A, B \in M_{np}(\mathbb{K})$, $\lambda \in \mathbb{K}$ on a les résultats suivants :*

- $(A^*)^* = A$,
- $(A+B)^* = A^* + B^*$
- $(\lambda A)^* = \overline{\lambda} A^*$,
- $(AB)^* = B^* A^*$,
- $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$

Exercice: 1.2.7.2 *Soient les matrices suivantes :*

$$A = \begin{pmatrix} 2+i & 1+i\sqrt{3} & -1-2i \\ i & 1 & 3-i \\ -i & -2-2i & 4 \end{pmatrix} ; B = \begin{pmatrix} 2i & -i & -1+i \\ 2-i & 3-3i & 2+4i \\ -3i & -2-i & i+1 \end{pmatrix} ; C = \begin{pmatrix} 1-i & 1+i \\ 2 & 2-i \\ -1+i & 2-i \end{pmatrix}$$

Calculer $(BC)^*$; $((A+2B)C)^*$,

1.2.8 déterminant d'une matrice carrée

À toute matrice carrée A_n correspond une valeur appelée le déterminant de A que l'on définie par $det(A_n)$ ou $|A_n|$. Nous allons consacrée cette partie à son calcul plutôt qu'à sa définition complexe.

Définition: 1.2.8.1 (Mineur d'une matrice) *On appelle Mineur d'une matrice, le nombre réel M_{ij}, déterminant de la matrice A_{ij} obtenue de A_n en éliminant la $i^{\text{ème}}$ ligne et la $j^{\text{ème}}$ colonne de A_n.*

Exemple: 1.2.8.1 $A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 5 & 2 & 3 \\ 8 & 7 & 3 \end{pmatrix}$

Le mineur M_{12} est le déterminant de la matrice $A_{12} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}$ obtenue de A_3 en éliminant la $1^{\text{ère}}$ ligne et la $2^{\text{ème}}$ colonne, c'est-à-dire : $M_{12} = det \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 8 & 3 \end{pmatrix} = 5 \times 3 - 3 \times 8 = 15 - 24 = -9$

Le mineur M_{22} est le déterminant de la matrice $A_{22} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}$ obtenue de A_3 en éliminant la 2ème ligne et la 2ème colonne, c'est-à-dire : $M_{22} = det \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 8 & 3 \end{pmatrix} = 2 \times 3 - 4 \times 8 = 6 - 32 = -26$

Définition: 1.2.8.2 (Cofacteur d'une matrice) *Le cofacteur C_{ij} d'une matrice A_n, est définie par la relation $C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.*

On pourra constater que le cofacteur et le mineur ont toujours la même valeur numérique à un signe près.

Exemple: 1.2.8.2 *Considérons à nouveau la matrice* $A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 5 & 2 & 3 \\ 8 & 7 & 3 \end{pmatrix}$

Puisque le mineur $M_{12} = -9$, le cofacteur correspondant C_{12} est $C_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = (-1).(-9) = 9$. il s'avère que le mineur M_{12} et le cofacteur C_{12} sont de signes différents. Par contre le mineur $M_{22} = -26$. Son cofacteur correspondant, C_{22} est $C_{22} = (-1)^{2+2} M_{22} = 1.(-26) = -26$. Cette fois, le mineur M_{22} et le cofacteur C_{22} sont identiques.

Méthodes de calcul du déterminants

Proposition: 1.2.8.1 (Expansion par cofacteurs) *Soit A une matrice carrée et C_{ij} ses cofacteurs. Le déterminant de A est obtenu en fesant une expansion par cofacteur comme suit :*

- *Choisir une ligne ou une colonne de A (si possible celle contenant un plus grand nombre de zéros)*
- *Multiplier chacun des éléments a_{ij} de la ligne ou colonne choisit par son cofacteur C_{ij} correspondant.*
- *Faire la somme de ces résultats.*

on a alors $det(A_n) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} C_{ij} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} (-1)^{i+j} M_{ij}$ (expansion suivant la colonne j) et $det(A_n) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} C_{ij} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} (-1)^{i+j} M_{ij}$ (expansion suivant la ligne i).

Exemple: 1.2.8.3 *Soit* $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$ *Développons par rapport à la* $1^{ère}$

colonne et à la $2^{è}$ *ligne :*

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix} = +1\begin{vmatrix} 5 & 8 \\ 6 & 9 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 6 & 9 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 5 & 8 \end{vmatrix} = +1(45-48) - 2(36-42) +$$

$$+\,3(32-35) = -3 - 2(-6) + 3(-3) = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 6 & 9 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} - 8\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = -2(36-42) + 5(9-21) -$$

$$-\,8(6-12) = -2(-6) + 5(-12) - 8(-6) = 0$$

1.2.9 inverse d'une matrice carrée

Lorsque le déterminant d'une matrice carrée A_n est non nul il existe une matrice carrée B_n tel que $A_nB_n = B_nA_nI_n$: on dit que A_n est inversible d'inverse B_n. De $A_nB_n = I_n$ on a $B_n = A_n^{-1}$. Dans la suite du cours l'inverse de A_n sera noté A_n^{-1}.
Soit $\overline{A}_n$ la matrice des cofacteurs de la matrice A_n. Le calcul de A_n^{-1} est donné par

$$A_n^{-1} = \frac{1}{det(A_n)}\,{}^t\overline{A}_n$$

1.2.10 Systèmes linéaires

Définition: 1.2.10.1 *Soit* a_{ij} *et* c_j $(i \in 1,2,...,n$ *et* $j \in 1,2,...,p)$ *des réels donnés et le système linéaire de* n *équations à* p *inconnues :*

$$\left\{\begin{array}{l} a_{11}x_1 + ... + a_{1j}x_j + ... + a_{1p}x_p = b_1 \\ .... \\ a_{i1}x_1 + ... + a_{ij}x_j + ... + a_{ip}x_p = b_i \\ .... \\ a_{n1}x_1 + ... + a_{nj}x_j + ... + a_{np}x_p = b_p \end{array}\right. \quad (1.1)$$

Résoudre (**??**) *c'est trouver tous les éléments* $(x_1, x_2, ..., x_p)$ *de* $\mathbb{R}^p$ *qui vérifient les* n *équations.*

1.2.11 Résolution d'un système linéaires

Résolution à l'aide de la méthode de Gauss

Elle consiste à transformer un système linéaire en un système triangulaire équivalent en exécutant des opérations élémentaires sur les lignes. On procède ainsi comme suit :

- on vérifie que, dans la première ligne, le coefficient de la première inconnue est non nul ; sinon on l'échange avec une ligne dont ce coefficient n'est pas nul.
- à l'aide de l'opération élémentaire ($L_i \longleftarrow \lambda L_i + \beta L_j$) on annule tous les coefficients de la première inconnue dans les autres lignes ;
- on recommence le procédé pour la deuxième inconnue, la troisième, ..., jusqu'à obtention d'un système triangulaire.

1.3 TD : Sur calcul matriciel , déterminant et systèmes d'équations linéaires

Exercice 1

. On donne $A = \begin{pmatrix} cos\theta & -sin\theta \\ sin\theta & cos\theta \end{pmatrix}$

1) Calculer A^k, $\forall k \in \mathbb{Z}$
2) Développer $(A + A^{-1})^5$ et en déduire que $16cos^5\theta = cos5\theta + 5cos3\theta + 10cos\theta$.

Exercice 2

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ Calculer A^k , $k \in \mathbb{N}$. En déduire que A n'est pas inversible .

Exercice 3

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $B = A - I$

1) Calculer B^n pour $n \in \mathbb{N}$
2) Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$
3) Calculer TrA^n, si $A = (a_{ij})$ $i = \overline{i,n}$, $j = \overline{i,n}$ $(TrA = \sum_{i=1}^{n} a_{ii})$

Exercice 4

Calculer les déterminants $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & -3 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 5 & 4 \end{vmatrix}$ $\qquad$ $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 5 \end{vmatrix}$

Exercice 5

Calculer la matrice inverse de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; $\quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

Exercice 5

Déterminer le rang des matrices suivantes $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 11 \end{pmatrix}$ $\quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

Exercice 5

(Systèmes d'équations)

1) Résoudre les systèmes suivants par la méthode de CRAMER

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 5 \\ x + y - z = 0 \\ 4x - y + 2z = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 5 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -5 \\ 7x_1 + x_2 - x_3 = 10 \end{cases}$$

2) Résoudre les systèmes suivants par la méthode matricielle

$$\begin{cases} 2x + 3y + 2z = 9 \\ x + 2y - 3z = 14 \\ 3x + 4y + z = 16 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x + y = 0 \\ 6x + 2y + z = 2 \\ 9x + 3y + 7z = 14 \end{cases}$$