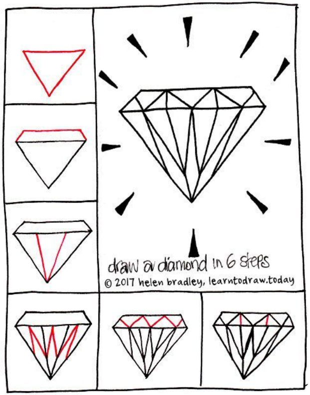
Solución Práctica 2 — Ejercicio 8

Juan Manuel Rabasedas



Enunciado

En B, al agregar la regla

$$\frac{t_2 \to t_2'}{\textbf{if } t_1 \textbf{ then } t_2 \textbf{ else } t_3 \to \textbf{if } t_1 \textbf{ then } t_2' \textbf{ else } t_3} \quad (\text{E-}\textsc{Funny}2)$$

se pierde la propiedad que si $t \to t'$ y $t \to t''$ entonces $t' = t''$. Sin embargo, se puede probar que si tenemos $r \to s$ y $r \to t$ con $s \not\equiv t$, entonces hay un termino u tal que $s \to^* u$ y $t \to^* u$.

Este lema se conoce como propiedad diamante

.

Demostración Lema

Primero vamos a probar que si tenemos $r \to s$ y $r \to t$ con $s \not\equiv t$, entonces hay un termino u tal que $s \to u$ y $t \to u$
Demostramos por inducción sobre la derivación $r \to s$

- Si la última regla aplicada para $r \to s$ fue E-IfTrue entonces

  $$r = \textbf{if } t_1 \textbf{ then } t_2 \textbf{ else } t_3 \text{ con } s = t_2 \text{ y } t_1 = \text{True}$$

  Luego la última regla de la derivación $r \to t$ no puede ser ni E-IfFalse, ni E-If ya que $t_1 = \text{True}$ es un valor.

  La única regla posible es E-Funny2

  Luego $t = \textbf{if } t_1 \textbf{ then } t_2' \textbf{ else } t_3$ con $t_2 \to t_2'$
  entonces $s \to t_2'$ y $t \to t_2'$ por E-IfTrue
  podemos elegir $u = t_2'$

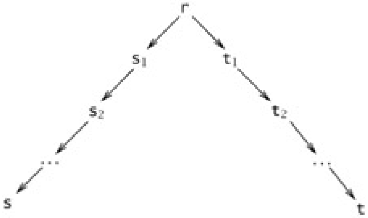
Demostración Lema

- Si la última regla aplicada para $r \to s$ fue $\textsc{E-If}$ entonces
  $$r = \textbf{if } t_1 \textbf{ then } t_2 \textbf{ else } t_3,\ s = \textbf{if } t_1' \textbf{ then } t_2 \textbf{ else } t_3 \text{ y } t_1 \to t_1'$$
  Luego la última regla de $r \to t$ no puede ser ni $\textsc{E-IfTrue}$, ni $\textsc{E-IfFalse}$ ya que t_1 no es un valor.
  Las únicas reglas de $r \to t$ pueden ser $\textsc{E-If}$ o $\textsc{E-Funny2}$.
  Primero supongamos que la última regla aplicada en ambas derivaciones sea $\textsc{E-If}$ entonces:
  $$t = \textbf{if } t_1'' \textbf{ then } t_2 \textbf{ else } t_3 \text{ y } t_1 \to t_1''$$
  Pero luego por **HI** existe un t_1''' tal que $t_1' \to t_1'''$ y $t_1'' \to t_1'''$
  podemos ver que $s \to \textbf{if } t_1''' \textbf{ then } t_2 \textbf{ else } t_3$
  y $t \to \textbf{if } t_1''' \textbf{ then } t_2 \textbf{ else } t_3$ por E-IF.
  Luego podemos tomar $u = \textbf{if } t_1''' \textbf{ then } t_2 \textbf{ else } t_3$

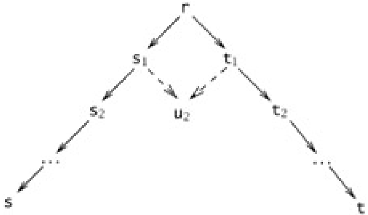
Los demás casos son similares.

Unicidad

La prueba de la unicidad de los resultados se obtiene siguiendo caminos en un diagrama con forma de diamante.Supongamos que $r \to^* s$ y $r \to^* t$

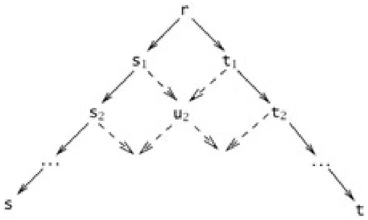


Podemos usar el lema anterior para juntar s_1 y t_1



Unicidad

Luego lo podemos usarlo para juntar s_2 con u_2 y por otro lado u_2 con t_2



y podemos continuar así hasta junta s y t, construyendo un diamante completo formado por muchos diamantes individuales de un solo paso. De esta manera queda demostrado.