Solución ej 5)

1.
   - $|S_0| = 0$
   - $|S_1| = 3 + 3\,|S_0| + |S_0|^3 = 3$
   - $|S_2| = 3 + 3\,|S_1| + |S_1|^3 = 3 + 3 \cdot 3 + 3^3 = 3 + 9 + 27 = 39$
   - $|S_3| = 3 + 3\,|S_2| + |S_2|^3 = 3 + 3 \cdot 39 + 39^3 = 59439$

2. Lo demostraremos por inducción en i.
   - Caso base $i = 0$: $S_0 = \emptyset$ y $\emptyset \subseteq S_1$.
   - Caso inductivo $i = k$: Supongamos que $S_k \subseteq S_{k+1}$. Queremos ver si $S_{k+1} \subseteq S_{k+2}$. Probamos que si $s \in S_{k+1}$ entonces $s \in S_{k+2}$. Haremos análisis por casos en la forma de s.
     - Supongamos $s =$`true`. Por definición de S_{k+2} resulta `true`$\in S_{k+2}$. Análogamente para `false` y 0.
     - Supongamos $s =$`succ` t_1 para algún $t_1 \in S_k$. Por hipótesis inductiva $t_1 \in S_{k+1}$ y por definición de S_{k+2}, `succ` $t_1 \in S_{k+2}$. Análogamente para $s =$`pred` t_1 y $s =$`iszero` t_1.
     - Supongamos $s =$ `if` t_1 `then` t_2 `else` t_3 para algunos $t_1, t_2, t_3 \in S_k$. Por hipótesis inductiva $t_1, t_2, t_3 \in S_{k+1}$ y análogamente al caso anterior resulta $s \in S_{k+2}$.
     - Como hemos considerado todas las formas posibles de los elementos de S_{k+1} podemos concluir que $S_{k+1} \subseteq S_{k+2}$.

3. Mostraremos a continuación que en efecto $\mathcal{S}$ satisface las condiciones de la definición de $\mathcal{T}$ y que si existe otro conjunto $\mathcal{S}'$ que también las satisface, entonces debe ser $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{S}'$ (es decir que $\mathcal{S}$ es el «menor» de ellos).

- $\mathcal{S}$ satisface las condiciones A, B y C de la definición de $\mathcal{T}$:
  - Puesto que $S_1 \subseteq \mathcal{S}$ resulta que `true`, `false` y 0 pertenecen a $\mathcal{S}$ por lo que $\mathcal{S}$ satisface la condición A.
  - Supongamos que $s \in \mathcal{S}$, entonces por definición de $\mathcal{S}$ existirá $i \in \mathbb{N}$ tal que $s \in S_i$. Ahora, por definición de S_{i+1} resulta que `succ` t_1, `pred` t_1 y `iszero` t_1 pertenecen a S_{i+1}; y como $S_{i+1} \subseteq \mathcal{S}$ entonces también pertenecen a $\mathcal{S}$, satisfaciendo la condición B.
  - De forma análoga al caso anterior, probamos que si $s_1, s_2, s_3 \in \mathcal{S}$ entonces `if` s_1 `then` s_2 `else` $s_3 \in \mathcal{S}$, por lo que se cumple la condición C.
- $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{S}'$: Veamos que para todo $i \in \mathbb{N}$ resulta $S_i \subseteq \mathcal{S}'$ por inducción en los naturales.
  - Caso base $i = 0$: $S_0 = \emptyset \subseteq \mathcal{S}'$.
  - Caso inductivo $i = k$: Supongamos que para $i = k$ resulta que $S_i \subseteq \mathcal{S}'$ y veamos si $\mathcal{S}_{k+1} \subseteq \mathcal{S}'$. Haremos análisis por casos en la forma de $s \in S_{k+1}$.
    * Supongamos $s =$`true`. Como $\mathcal{S}'$ satisface la condición A resulta `true`$\in \mathcal{S}'$. Análogamente para `false` y 0.
    * Supongamos $s =$`succ` t_1 para algún $t_1 \in S_i$. Por hipótesis inductiva $t_1 \in \mathcal{S}'$ y como $\mathcal{S}'$ satisface la condición B entonces $s \in \mathcal{S}'$. Análogamente para $s =$`pred` t_1 y $s =$`iszero` t_1.
    * De forma análoga al caso anterior, probamos que si $t_1, t_2, t_3 \in \mathcal{S}_i$ entonces `if` t_1 `then` t_2 `else` $t_3 \in \mathcal{S}'$, puesto que $\mathcal{S}'$ satisface la condición C.
    * Como hemos mostrado que $S_i \subseteq \mathcal{S}'$ y por definición $\mathcal{S} = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} S_i$, resulta $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{S}'$.