Solución Práctica 2 — Ejercicio 7

Juan Manuel Rabasedas

Enunciado

La clausura reflexo-transitiva de una relación $\rightarrow$ se puede definir como:

$$\frac{x \rightarrow y}{x \Rightarrow y} \quad (R1) \qquad \frac{x \rightarrow y \quad y \Rightarrow z}{x \Rightarrow z} \quad (R2) \qquad \frac{}{x \Rightarrow x} \quad (R3)$$

a) Probar que si $x \Rightarrow y$, y $y \Rightarrow z$, entonces $x \Rightarrow z$.

b) Probar la equivalencia entre esta forma de clausura reflexo-transitiva y la vista en la práctica. Es decir, probar que:

$$t \rightarrow^* u \text{ sii } t \Rightarrow u$$

Probar que si $x \Rightarrow y$, y $y \Rightarrow z$, entonces $x \Rightarrow z$

Demostración por inducción en la derivación $x \Rightarrow y$

- Si la última regla aplicada fue R1, tememos que:

$$\frac{x \to y}{x \Rightarrow y} \tag{R1}$$

entonces $x \to y$, como tengo que $y \Rightarrow z$ puedo aplicar R2:

$$\frac{x \to y \;\; y \Rightarrow z}{x \Rightarrow z} \tag{R2}$$

de lo cual sigue que $x \Rightarrow z$

Probar que si $x \Rightarrow y$, y $y \Rightarrow z$, entonces $x \Rightarrow z$

- si la última regla aplicada fue R2. Tenemos que:

$$\frac{x \rightarrow x' \quad x' \Rightarrow y}{x \Rightarrow y} \tag{R2}$$

  para algún x'
  Luego como $x' \Rightarrow y$ y $y \Rightarrow z$ por Hipotesis Inductiva $x' \Rightarrow z$
  Aplicando R2

$$\frac{x \rightarrow x' \quad x' \Rightarrow z}{x \Rightarrow z} \tag{R2}$$

  Por lo que $x \Rightarrow z$

- Si la última regla fue R3 entonces significa que $x = y$, luego como $y \Rightarrow z$ vale que $x \Rightarrow z$

Probar $t \to^* u$ sii $t \Rightarrow u$

- $\Rightarrow$)
  Demostramos por inducción en la derivación de $t \to^* u$:

$$\frac{t \to u}{t \to^* u}\ (\mathrm{R1}') \qquad \frac{t \to^* t' \quad t' \to^* u}{t \to^* u}\ (\mathrm{R2}') \qquad \frac{}{t \to^* t}\ (\mathrm{R3}')$$

  - Si la última regla utilizada fue R1$'$ entonces $t \to u$, luego por R1 tenemos que $t \Rightarrow u$
  - Si la última regla aplicada fue R2$'$ entonces:
    - $t \to^* t'$ y $t' \to^* u$ del antecedente
    - y por HI $t \Rightarrow t'$ y $t' \Rightarrow u$

    Luego por el apartado anteriro $7 - a)$ se tiene que $t \Rightarrow u$
  - Si la última regla aplicada fue R3$'$ entonces $t = u$
    Luego $t \Rightarrow u$ por R3

Probar $t \to^* u$ sii $t \Rightarrow u$

- $\Leftarrow$)
  Demuestro por inducción en la derivación $t \Rightarrow u$
  - Si la última regla aplicada fue R1
    entonces $t \to u$, luego por R1$'$ $t \to^* u$
  - Si la última regla aplicada fue R2 entonces:

    $$\frac{t \to t' \quad t' \Rightarrow u}{t \Rightarrow u} \tag{R2}$$

    Luego por:
    - R1$'$ como $t \to t'$ tenemos que $t \to^* t'$
    - HI como $t' \Rightarrow u$ tenemos que $t' \to^* u$

    finalmente por R2$'$ se tiene que $t \to^* u$
  - Si la última regla fue R3

    $$\frac{}{x \Rightarrow x} \tag{R3}$$

    entonces $t = u$ luego por R3$'$ se tiene que $t \to^* u$