Tugas Besar 1 IF2123 Aljabar Linier dan Geometri

Sistem Persamaan Linier, Determinan, dan Aplikasinya

Semester I Tahun 2021/2022

Disusun oleh:

13520059 Suryanto

13520113 Brianaldo Phandiarta

13520167 Aldwin Hardi Swastia

Institut Teknologi Bandung
Sekolah Teknik Elektro dan Informatika

BAB I
DESKRIPSI MASALAH

Sistem persamaan linier (SPL) banyak ditemukan di dalam bidang sains dan rekayasa. Anda sudah mempelajari berbagai metode untuk menyelesaikan SPL, termasuk menghitung determinan matriks. Sembarang SPL dapat diselesaikan dengan beberapa metode, yaitu metode eliminasi Gauss, metode eliminasi Gauss-Jordan, metode matriks balikan ($x = A^{-1}b$), dan kaidah Cramer (khusus untuk SPL dengan n peubah dan n persamaan). Solusi sebuah SPL mungkin tidak ada, banyak (tidak berhingga), atau hanya satu (unik/tunggal).

Di dalam Tugas Besar 1 ini, anda diminta membuat satu atau lebih *library* aljabar linier dalam Bahasa Java. Library tersebut berisi fungsi-fungsi seperti eliminasi Gauss, eliminasi Gauss-Jordan, menentukan balikan matriks, menghitung determinan, kaidah Cramer (kaidah Cramer khusus untuk SPL dengan n peubah dan n persamaan). Selanjutnya, gunakan *library* tersebut di dalam program Java untuk menyelesaikan berbagai persoalan yang dimodelkan dalam bentuk SPL, menyelesaikan persoalan interpolasi, dan persoalan regresi. Penjelasan tentang interpolasi dan regresi adalah seperti di bawah ini.

Beberapa tulisan cara membuat library di Java:

1. https://www.programcreek.com/2011/07/build-a-java-library-for-yourself/
2. https://developer.ibm.com/tutorials/j-javalibrary/
3. https://stackoverflow.com/questions/3612567/how-to-create-my-own-java-libraryapi

BAB II

TEORI SINGKAT

A. Sistem Persamaan Linier

Sistem persamaan linier adalah persamaan linier yang jumlahnya lebih dari satu dan membentuk suatu sistem. Adapun bentuk umum dari sistem persamaan linear adalah sebagai berikut.

$$\begin{array}{ccccccc}
a_{11}x_1 & + a_{12}x_2 & + & \dots + & a_{1n}x_n & = b_1 \\
a_{21}x_1 & + a_{22}x_2 & + & \dots + & a_{2n}x_n & = b_2 \\
a_{31}x_1 & + a_{32}x_2 & + & \dots + & a_{3n}x_n & = b_3 \\
\vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots \\
a_{m1}x_1 & + a_{m2}x_2 & + & \dots + & a_{mn}x_n & = b_m
\end{array}$$

B. Matriks

Matriks adalah suatu susunan bilangan real atau bilangan kompleks (atau elemen-elemen) yang disusun dalam baris dan kolom sehingga membentuk jajaran persegi panjang.

1. Determinan

   Determinan adalah nilai yang dapat dihitung dari unsur suatu matriks persegi. Terdapat dua cara dasar untuk mencari nilai determinan dari suatu matriks, yaitu dengan reduksi baris dan ekspansi kofaktor.

   Reduksi baris dilakukan hingga terbentuk matriks segitiga atas maupun segitiga bawah yang kemudian determinan didapat dari hasil kali diagonal utama.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{bmatrix} \longrightarrow \det(A) = a_{11}a_{22}\,a_{33}a_{44}$$

   Pada cara ekspansi kofaktor, determinan matriks dicari dengan menjumlah semua produk perkalian dari elemen-elemen suatu baris atau kolom dengan kofaktornya. Kofaktor merupakan $(-1)^{i+j} \times M_{ij}$. M_{ij} adalah determinan dari submatriks tanpa baris i dan kolom j.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & -2 & 6 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 3 & 7 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13} + a_{14}C_{14}$$

$$\det(A) = 3\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \\ 7 & 5 & 3 \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 5 & 3 \end{vmatrix} + (-2)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 3 & 7 & 3 \end{vmatrix} - 6\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 7 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= 3\{ 2\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 7 & 5 \end{vmatrix}\} - 5\{1\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}\} + \dots$$

$$= -18$$

2. Matriks Balikan

   Balikan dari sebuah matriks adalah matriks yang apabila dikalikan dengan matriks awalnya menghasilkan matriks identitas.

3. Matriks Kofaktor

   Matriks kofaktor adalah matriks yang elemennya merupakan entri kofaktor dari elemen-elemennya.

   Misalkan:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 6 & 3 \\ 2 & -4 & 0 \end{bmatrix}$$

   Maka matriks kofaktornya:

$$\begin{bmatrix} +\begin{vmatrix} 6 & 3 \\ -4 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 0 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 6 & -16 \\ 4 & 2 & 16 \\ 12 & -10 & 16 \end{bmatrix}$$

4. Matriks Adjoin

Matriks adjoin adalah matriks kofaktor yang di transpos.

matriks kofaktor: $\begin{bmatrix} 12 & 6 & -16 \\ 4 & 2 & 16 \\ 12 & -10 & 16 \end{bmatrix}$

adj(A) = $\begin{bmatrix} 12 & 4 & 12 \\ 6 & 2 & -10 \\ -16 & 16 & 16 \end{bmatrix}$

Invers dengan Adjoin matriks

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \times Adj(A)$$

5. Matriks Eselon Baris

   Matriks eselon baris adalah matriks yang memiliki 1 utama pada setiap baris, kecuali pada baris yang seluruhnya elemennya adalah 0.

$$\begin{bmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & * & * & * \\ 0 & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Keterangan: * adalah sembarang nilai

C. Metode Eliminasi Gauss

Metode eliminasi Gauss adalah metode untuk menyelesaikan suatu sistem persamaan linear dengan mengubahnya menjadi matriks augmented. Kemudian matriks augmented diubah menjadi matriks eselon baris dengan melakukan OBE (Operasi Baris Elementer) dan diselesaikan melalui teknik penyulihan mundur.

Matriks augmented:

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - 6x_3 &= 9 \\ 2x_1 - 6x_2 + 4x_3 &= 7 \\ 5x_1 + 2x_2 - 5x_3 &= -2 \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 & -6 & 9 \\ 2 & -6 & 4 & 7 \\ 5 & 2 & -5 & -2 \end{bmatrix}$$

Contoh OBE:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 4 & 4 & -3 & 3 \\ -2 & 3 & -1 & 1 \end{bmatrix} \overset{R1/2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 3/2 & -1/2 & 5/2 \\ 4 & 4 & -3 & 3 \\ -2 & 3 & -1 & 1 \end{bmatrix} \underset{R3+2R1}{\overset{R2-4R1}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & 3/2 & -1/2 & 5/2 \\ 0 & -2 & -1 & -7 \\ 0 & 6 & -2 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\overset{R2/(-2)}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 3/2 & -1/2 & 5/2 \\ 0 & 1 & 1/2 & 7/2 \\ 0 & 6 & -2 & 6 \end{bmatrix} \overset{R3-6R2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 3/2 & -1/2 & 5/2 \\ 0 & 1 & 1/2 & 7/2 \\ 0 & 0 & -5 & -15 \end{bmatrix} \overset{R3/(-5)}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 3/2 & -1/2 & 5/2 \\ 0 & 1 & 1/2 & 7/2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Teknik Penyulihan Mundur:

(iii) $x_3 = 3$
(ii) $x_2 + 1/2x_3 = 7/2 \rightarrow x_2 = 7/2 - 1/2(3) = 2$
(i) $x_1 + 3/2x_2 - 1/2x_3 = 5/2 \rightarrow x_1 = 5/2 - 3/2\,(2) - 1/2\,(3) = 1$

1. Solusi Unik

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{Eliminasi Gauss}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

Solusi: $x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = -1$

2. Solusi Banyak

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 6 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{Eliminasi Gauss}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

3. Tidak Memiliki Solusi

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 7 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{Eliminasi Gauss}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Perhatikan hasil eliminasi Gauss pada baris terakhir. Persamaan yang bersesuaian dengan baris terakhir tersebut adalah

$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 1$$

D. Metode Eliminasi Gauss-Jordan

Metode eliminasi Gauss-Jordan adalah metode eliminasi Gauss yang dikembangkan sehingga terbentuk matriks eselon baris tereduksi.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix} \sim\text{OBE}\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & * \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 1 & * \end{bmatrix}$$

Invers matriks menggunakan metode Gauss-Jordan

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{R3-R1}{\overset{R2-2R1}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{R3+2R2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\overset{R3/(-1)}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right) \overset{R1-2R2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 9 & 5 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right) \underset{R2+3R3}{\overset{R1-9R3}{\sim}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -40 & 16 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right) = (I|A^{-1})$$

Jadi, balikan matriks A adalah

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

E. Kaidah Cramer

Aturan Cramer (Cramer's Rule) merupakan formula yang dipakai untuk menyelesaikan sistem persamaan linear dengan menggunakan determinan dari matriks (persegi) yang terbentuk dari koefisien dan konstanta masing-masing persamaan di sistem tersebut.

Teorema: Aturan Cramer

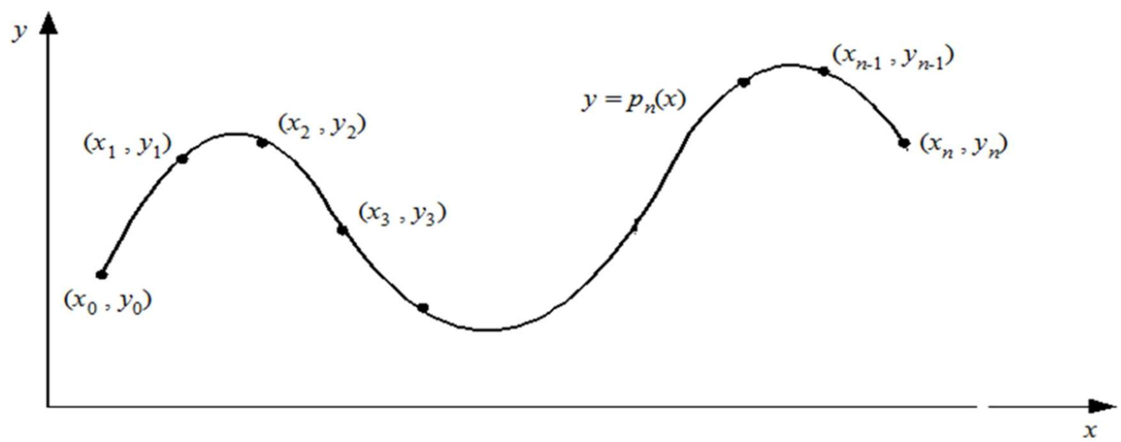
Jika Ax=b merupakan suatu sistem persamaan linear dengan n persamaan dan n variabel dengan syarat det(A)≠0, maka sistem tersebut memiliki penyelesaian tunggal (unik), yaitu

$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)}\ x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)} \ldots x_n = \frac{\det(A_3)}{\det(A)}$

dengan A_j menyatakan matriks yang diperoleh dari A dengan menggantikan entri entri pada kolom ke-j dengan entri-entri pada matriks konstanta $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix}$.

F. Interpolasi Polinom

Interpolasi polinom adalah interpolasi titik-titik data dengan polinom.



G. Regresi Linier Berganda

Regresi Linear merupakan salah satu metode untuk memprediksi nilai selain menggunakan Interpolasi Polinom. Regresi Linier Berganda adalah hubungan secara linier antara dua atau lebih variable independen (X 1 , X 2 , …, X n) dengan variabel dependen (Y). Analisis ini digunakan untuk mengetahui arah hubungan antara variabel independen dengan variabel dependen apakah masing-masing variabel independen berhubungan positif atau negatif, serta untuk memprediksi nilai dari variabel dependen apabila nilai variabel independent mengalami kenaikan atau penurunan. Data yang digunakan biasanya berskala interval atau rasio.

Persamaan regresi linier berganda secara matematik diekspresikan oleh :
$Y = a + b_1 X_1 + b_2 X_2 + \ldots + bn\ Xn$

yang mana :
Y = variable tak bebas (nilai variabel yang akan diprediksi)

a = konstanta
$b_1, b_2, \ldots, b_n$ = nilai koefisien regresi
$X_1, X_2, \ldots, X_n$ = variable bebas

BAB III

IMPLEMENTASI PUSTAKA DAN PROGRAM

Dalam mengimplementasikan program, kami membagi program menjadi 8 pustaka untuk mempermudah dalam pengerjaan, yaitu

1. Pustaka Matrix

   Berisi operasi-operasi primitif matriks atau array dua dimensi.

   a. Atribut (*Attribute*)

Nama Attribute	Tipe Data	Deskripsi
row	int	Jumlah baris matriks.
col	int	Jumlah kolom matriks.
content	double[][]	Array dua dimensi dengan tipe data double pada setiap elemenya.

   b. Konstruktor (*Constructor*)

Tipe Konstruktor	Parameter Input	Deskripsi
Bawaan (*Default*)	-	Menginisialisasi matriks berukuran 0×0.
Berparameter (*Parameterized*)	nRow (int), nCol (int)	Menginisialisasi matriks berukuran nRow × nCol.
Salin (*Copy*)	matrix (Matrix)	Menginisialisasi matriks dengan cara menyalin matriks masukan.

   c. Selektor (*Selector*)

Nama Selektor	Parameter Input	Deskripsi
getRowEff	-	Mengembalikan row (integer).
getColEff	-	Mengembalikan col (integer).
getLastIdxRow	-	Mengembalikan indeks baris terakhir (integer).
getLastIdxCol	-	Mengembalikan indeks kolom terakhir (integer).
getElement	row (int), col (int)	Mengembalikan elemen dari matriks[row][col] (double).
setRowEff	row (int)	Mengubah row matriks menjadi row.
setColEff	col (int)	Mengubah col matriks menjadi col.
setElement	row (int), col (int), x (double)	Mengubah elemen dari matriks[row][col] menjadi x.

   d. Metode (*Method*)

Nama Metode	Parameter Input	Deskripsi

readMatrix	-	Menginput matriks melalui keyboard.
displayMatrix	-	Menampilkan matriks ke layar.
swapRow	idxRow1 (int), idxRow2 (int)	Menukarkan baris berindeks idxRow1 dengan baris berindeks idxRow2.
swapCol	idxCol1 (int), idxCol2 (int)	Menukarkan kolom berindeks idxCol1 dengan kolom berindeks idxCol2.
multiplyRow	idxRow (int), multiplier (double)	Mengalikan seluruh elemen pada baris berindeks idxRow dengan multiplier.
plusMinusRow	idxRow1 (int), idxRow2 (int), multiplier1 (double), multiplier2 (double), operator (boolean)	Mengubah elemen pada baris berindeks idxRow1 menjadi penjumlahan (jika operator true) /pengurangan (jika operator false) dari perkalian antara elemen pada idxRow1 dengan multiplier1 dengan perkalian antara elemen pada idxRow2 dengan multiplier2.
isSquare	-	Mengembalikan nilai true jika matriks merupakan matriks persegi
addIdentity	-	Menkontkatenasi matriks identitas pada belakang matriks.
isIdentity	-	Mengembalikan true jika matriks merupakan matriks identitas
transpose	-	Mentranpose matriks
deleteRow	idxRow (int)	Menghapus baris indeks ke-idxRow pada matriks.
deleteCol	idxCol (int)	Menghapus kolom indeks ke-idxCol pada matriks.
rowIsZero	row (int)	Mengembalikan true jika seluruh elemen pada baris indeks ke-row bernilai 0.
multiplyMatrix	matriks (Matrix)	Mengalikan content dengan matriks.

2. Pustaka Determinant
   Berisi dua metode dalam mencari deteriminant.

Nama Metode	Parameter Input	Deskripsi

detKofaktor	matrix (Matrix)	Mengembalikan determinan dengan menggunakan metode ekspansi kofaktor.
detReduksiBaris	matrix (Matrix)	Mengembalikan determinan dengan menggunakan metode reduksi baris.

3. Pustaka SPL
   Berisi metode-metode menyelesaikan sistem persamaan linier.

Nama Metode	Parameter Input	Deskripsi
BackwardSubstitution	matrix (Matrix)	Mengembalikan solusi dari sistem persamaan linier dalam bentuk array dari double. Prekondisi: matriks telah diproses menggunakan OBE dan memiliki solusi unik.
solusiBanyak	matrix (Matrix)	Mengembalikan solusi dari sistem persamaan linier dalam bentuk array dari string (bentuk parametrik). Prekondisi: matriks telah diproses menggunakan OBE dan memiliki solusi banyak.
cramerMethod	matrix (Matrix)	Mengembalikan solusi dari sistem persamaan linier dalam bentuk array dari double dengan metode Cramer. Prekondisi: col matriks lebih banyak 1 dari row matriks.
inverseMethod	matrix (Matrix)	Mengembalikan solusi dari sistem persamaan linier dalam bentuk array dari double dengan metode matriks balikan. Prekondisi: matriks persegi dan determinan tidak nol.

4. Pustaka Eliminasi
   Berisi metode untuk mendapatkan balikan matriks, eselon baris, dan eselon baris tereduksi.

Nama Metode	Parameter Input	Deskripsi
getMatrixEselonBaris	matrix (Matrix)	Mengembalikan matrix dalam bentuk eselon baris.

getEselonBarisTereduksi	matrix (Matrix)	Mengembalikan matrix dalam bentuk eselon baris tereduksi.
inverseGaussJordanMethod	matrix (Matrix)	Mengembalikan balikan matrix dengan metode Gauss Jordan.
inverseCofactorMethod	matrix (Matrix)	Mengembalikan balikan matrix dengan metode minor, kofaktor, dan adjoin.

5. Pustaka Interpolasi
   Berisi metode untuk melakukan interpolasi.

Nama Metode	Parameter Input	Deskripsi
solveInterpolasi	matrix (Matrix), N (int)	Mengembalikan solusi dari sistem persamaan polinom berderajat N
solveTaksiran	solusi (array dari double), x (double)	Mengembalikan nilai taksiran fungsi pada x

6. Pustaka Regresi
   Berisi metode untuk melakukan regresi linier berganda.

Nama Metode	Parameter Input	Deskripsi
NormalEstimation	matrix (Matrix), n (int), m (int)	Mengeluarkan matriks augmented dari SPL regresi
TaksiranRegresi	solusi (array dari double), x (double)	Mengeluarkan hasil taksiran dari regresi linear berganda

7. Pustaka FileManager
   Berisi metode untuk membaca dan menulis file.

Nama Metode	Parameter Input	Deskripsi
readFile	-	Membaca file.
writeMatrixFile	matriks (Matrix)	Menulis matiks pada file.
writeDoubleFile	solusi (array dari double)	Menulis solusi pada file.
writeString	pesan (string)	Menulis pesan (contoh: tidak ada determinan) pada file.
writeStringFile	solusi (array dari string)	Menulis solusi (parametrik) pada file.
writeInterpolasi	solusi (array dari double), taksiran (array dari double), hasilTaksiran (array dari double)	Menulis hasil interpolasi pada file.
writeRegresi	solusi (array dari double), taksiran (array dari double), hasilTaksiran (array dari double), matriks (Matrix)	Menulis hasil regresi linier berganda pada file.

BAB IV

EKSPERIMEN

No	Eksperimen

1.a.	Kasus:
	$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 5 & -7 & -5 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & -4 & 2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$
	Hasil:
	`==============Matrix Eselon Baris==============`
	`1.0 1.0 -1.0 -1.0 1.0`
	`0.0 1.0 -1.6666666666666665 -1.0 -1.3333333333333333`
	`0.0 0.0 1.0 -1.0 1.0`
	`0.0 0.0 0.0 0.0 1.0`
	`===============================================`
	`SPL tidak memiliki solusi!`

1.b.	Kasus:
	$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -3 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 & -2 & -1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix}$
	Hasil:
	`==============Matrix Eselon Baris==============`
	`1.0 -1.0 0.0 0.0 1.0 3.0`
	`0.0 1.0 0.0 -1.5 -0.5 1.5`
	`0.0 0.0 0.0 1.0 -1.0 -1.0`
	`0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0`
	`===============================================`
	`x1 : t + 3.0`
	`x2 : 2.0t`
	`x3 : s`
	`x4 : t - 1.0`
	`x5 : t`

1.c.

Kasus:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Hasil:

```
==========Matrix Eselon Baris Tereduksi==========
0.0 1.0 0.0 0.0 0.0 0.0 1.0
0.0 0.0 0.0 1.0 0.0 0.0 -2.0
0.0 0.0 0.0 0.0 1.0 0.0 1.0
===============================================
x1 : s
x2 : 1.0
x3 : t
x4 : -2.0
x5 : 1.0
x6 : u
```

1.d.

(n = 6)

Kasus:

$$H = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \cdots & \frac{1}{n+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \frac{1}{n+2} & \cdots & \frac{1}{2n+1} \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Hasil (versi A):

```
=============Matrix Eselon Baris=============
1.0 0.5 0.3333333333333333 0.25 0.2 0.1666666666666667 1.0
0.0 1.0 1.0000000000000004 0.9000000000000004 0.8000000000000007 0.7142857142857147 -6.000000000000002
0.0 0.0 1.0 3.0000000000000186E17 1.714285714285721 1.7857142857142863 30.000000000000224
0.0 0.0 0.0 1.0 5.714285714285701E-18 5.952380952380917E-18 1.0000000000000012E-16
0.0 0.0 0.0 0.0 1.0 0.892857142857143 -7.500000000000007
0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 1.0 -210.0000000000015
============================================
x1 : 4.8012372860197E-15
x2 : -2.892857142856813E-16
x3 : -5.6843418860808015E-14
x4 : 3.214285714285678E-16
x5 : 180.00000000000136
x6 : -210.0000000000015
```

	Hasil (versi B):
	`=============Matrix Eselon Baris=============`
	`1.0 0.5 0.333333 0.25 0.2 0.166667 1.0`
	`0.0 1.0 1.0000060000240003 0.9000036000144003 0.8000072000288003 0.7142848571394288 -6.000024000096001`
	`0.0 0.0 1.0 1.500114009636836 1.7142771424833925 1.7858385824695262 30.00300025898251`
	`0.0 0.0 0.0 1.0 2.0062233080620944 2.7849177051305665 -140.5789633376317`
	`0.0 0.0 0.0 0.0 1.0 2.682057794359095 744.4113310512869`
	`0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 1.0 2226.0609143087217`
	`==========================================`
	`x1 : 11.059880345210104`
	`x2 : 58.56317576711308`
	`x3 : -1203.8804701629288`
	`x4 : 4144.573060418687`
	`x5 : -5226.012694888554`
	`x6 : 2226.0609143087217`

1.d.
(n = 10)
	Hasil:
	`==========Matrix Eselon Baris Tereduksi==========`
	`1.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 57.327280428980515`
	`0.0 1.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 -1142.3534090775534`
	`0.0 0.0 1.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 5821.691509402918`
	`0.0 0.0 0.0 1.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 -8644.015575684158`
	`0.0 0.0 0.0 0.0 1.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 -3710.1104723277845`
	`0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 1.0 0.0 0.0 0.0 0.0 7498.255251323589`
	`0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 1.0 0.0 0.0 0.0 27493.04068109131`
	`0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 1.0 0.0 0.0 -47662.393650743295`
	`0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 1.0 0.0 20504.042329685042`
	`0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 1.0 -203.96944909153984`
	`==============================================`
	`x1 : 57.327280428980515`
	`x2 : -1142.3534090775534`
	`x3 : 5821.691509402918`
	`x4 : -8644.015575684158`
	`x5 : -3710.1104723277845`
	`x6 : 7498.255251323589`
	`x7 : 27493.04068109131`
	`x8 : -47662.393650743295`
	`x9 : 20504.042329685042`
	`x10 : -203.96944909153984`

2.a.	Kasus: $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & -2 & -2 \\ -1 & 2 & -4 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & -3 & -3 \end{bmatrix}.$

<table>
<tr>
<td></td>
<td>Hasil:
==========Matrix Eselon Baris Tereduksi==========
1.0 0.0 0.0 -1.0 -1.0
0.0 1.0 -2.0 0.0 0.0
0.0 0.0 0.0 0.0 0.0
0.0 0.0 0.0 0.0 0.0
===
x1 : t - 1.0
x2 : 2.0s
x3 : s
x4 : t</td>
</tr>
<tr>
<td>2.b.</td>
<td>Kasus:
$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 8 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 6 \\ -4 & 0 & 6 & 0 & 6 \\ 0 & -2 & 0 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & -4 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}.$$
Hasil:
==========Matrix Eselon Baris Tereduksi==========
1.0 0.0 0.0 0.0 0.0
0.0 1.0 0.0 0.0 2.0
0.0 0.0 1.0 0.0 1.0
0.0 0.0 0.0 1.0 1.0
0.0 0.0 0.0 0.0 0.0
0.0 0.0 0.0 0.0 0.0
===
x1 : 0.0
x2 : 2.0
x3 : 1.0
x4 : 1.0</td>
</tr>
</table>

3.a.

Kasus:

$$
\begin{aligned}
8x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 &= 0 \\
2x_1 + 9x_2 - x_3 - 2x_4 &= 1 \\
x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 &= 2 \\
x_1 + 6x_3 + 4x_4 &= 3
\end{aligned}
$$

Hasil:

```
==========Matrix Eselon Baris Tereduksi==========
1.0 0.0 0.0 0.0 -0.22432432432432436
0.0 1.0 0.0 0.0 0.18243243243243246
0.0 0.0 1.0 0.0 0.7094594594594594
0.0 0.0 0.0 1.0 -0.258108108108108
================================================
x1 : -0.22432432432432436
x2 : 0.18243243243243246
x3 : 0.7094594594594594
x4 : -0.258108108108108
```

3.b.

Kasus:

$$
\begin{aligned}
x_7 + x_8 + x_9 &= 13.00 \\
x_4 + x_5 + x_6 &= 15.00 \\
x_1 + x_2 + x_3 &= 8.00 \\
0.04289(x_3 + x_5 + x_7) + 0.75(x_6 + x_8) + 0.61396x_9 &= 14.79 \\
0.91421(x_3 + x_5 + x_7) + 0.25(x_2 + x_4 + x_6 + x_8) &= 14.31 \\
0.04289(x_3 + x_5 + x_7) + 0.75(x_2 + x_4) + 0.61396x_1 &= 3.81 \\
x_3 + x_6 + x_9 &= 18.00 \\
x_2 + x_5 + x_8 &= 12.00 \\
x_1 + x_4 + x_7 &= 6.00 \\
0.04289(x_1 + x_5 + x_9) + 0.75(x_2 + x_6) + 0.61396x_3 &= 10.51 \\
0.91421(x_1 + x_5 + x_9) + 0.25(x_2 + x_4 + x_6 + x_8) &= 16.13 \\
0.04289(x_1 + x_5 + x_9) + 0.75(x_4 + x_8) + 0.61396x_7 &= 7.04
\end{aligned}
$$

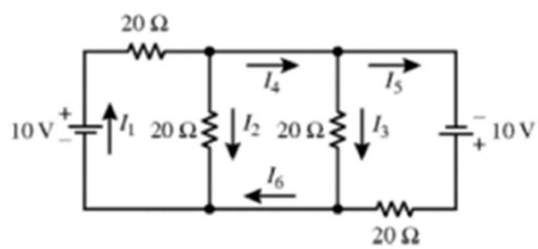
Hasil:

```
==========Matrix Eselon Baris Tereduksi==========
1.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 -1.362261371382177E12
0.0 1.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 2.1915894913993381E12
0.0 0.0 1.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 -8.293281200091595E11
0.0 0.0 0.0 1.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 -1.0979766766003702E12
0.0 0.0 0.0 0.0 1.0 0.0 0.0 0.0 0.0 -1.2540299914350679E12
0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 1.0 0.0 0.0 0.0 -1.534242941942188E12
0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 1.0 0.0 0.0 2.460238047988548E12
0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 1.0 0.0 -9.375594999522701E11
0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 1.0 2.993171299363555E12
0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 1.0
0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0
0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0
===============================================
SPL tidak memiliki solusi!
```

4

Kasus:

4. Tentukan arus yang mengalir pada rangkaian listrik di bawah ini:

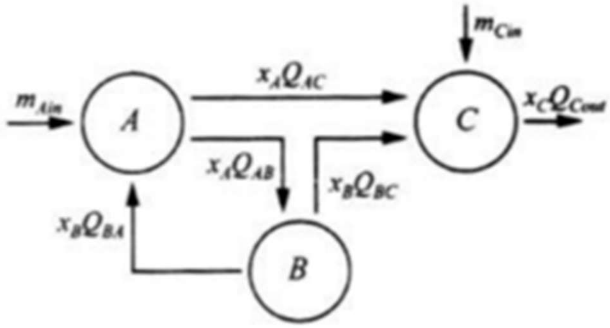


Hasil:

```
==========Matrix Eselon Baris Tereduksi==========
1.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.49999999999999994
0.0 1.0 0.0 0.0 0.0 0.0 5.551115123125783E-17
0.0 0.0 1.0 0.0 0.0 0.0 0.0
0.0 0.0 0.0 1.0 0.0 0.0 0.4999999999999999
0.0 0.0 0.0 0.0 1.0 0.0 0.49999999999999994
0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 1.0 0.4999999999999999
===============================================
x1 : 0.49999999999999994
x2 : 5.551115123125783E-17
x3 : 0.0
x4 : 0.4999999999999999
x5 : 0.49999999999999994
x6 : 0.4999999999999999
```

<table>
<tr>
<td>5</td>
<td>

Kasus:



Dengan laju volume Q dalam m^3/s dan input massa m_{in} dalam mg/s. Konservasi massa pada tiap inti reaktor adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned} &\text{A:} \quad m_{A_{in}} + Q_{BA}x_B - Q_{AB}x_A - Q_{AC}x_A = 0 \\ &\text{B:} \quad Q_{AB}x_A - Q_{BA}x_B - Q_{BC}x_B = 0 \\ &\text{C:} \quad m_{C_{in}} + Q_{AC}x_A + Q_{BC}x_B - Q_{C_{out}}x_C = 0 \end{aligned}$$

Tentukan solusi x_A, x_B, x_C dengan menggunakan parameter berikut : $Q_{AB} = 40$, $Q_{AC} = 80$, $Q_{BA} = 60$, $Q_{BC} = 20$ dan $Q_{Cout} = 150$ m^3/s dan $m_{Ain} = 1300$ dan $m_{Cin} = 200$ mg/s.

Hasil:

```
==============Matrix Eselon Baris==============
1.0 -0.5 0.0 10.833333333333334
0.0 1.0 0.0 7.222222222222222
0.0 0.0 1.0 10.0
===============================================
x1 : 14.444444444444445
x2 : 7.222222222222222
x3 : 10.0
```

</td>
</tr>
<tr>
<td>6.a.</td>
<td>Kasus:</td>
</tr>
</table>

Gunakan tabel di bawah ini untuk mencari polinom interpolasi dari pasangan titik-titik yang terdapat dalam tabel. Program menerima masukan nilai x yang akan dicari nilai fungsi $f(x)$.

x	0.1	0.3	0.5	0.7	0.9	1.1	1.3
$f(x)$	0.003	0.067	0. 148	0.248	0.370	0.518	0.697

Lakukan pengujian pada nilai-nilai default berikut:

$x = 0.2$ f(x) = ?
$x = 0.55$ f(x) = ?
$x = 0.85$ f(x) = ?
$x = 1.28$ f(x) = ?

Hasil:

```
P6(0.2) = 0.032960937500000004
P6(0.55) = 0.17111865234375004
P6(0.85) = 0.33723583984375
P6(1.28) = 0.6775418375
```

6.b.	Kasus:

Jumlah kasus positif baru Covid-19 di Indonesia semakin fluktuatif dari hari ke hari. Di bawah ini diperlihatkan jumlah kasus baru Covid-19 di Indonesia mulai dari tanggal 17 Juni 2021 hingga 31 Agustus 2021:

Tanggal	Tanggal (desimal)	Jumlah Kasus Baru
17/06/2021	6,567	12.624
30/06/2021	7	21.807
08/07/2021	7,258	38.391
14/07/2021	7,451	54.517
17/07/2021	7,548	51.952
26/07/2021	7,839	28.228
05/08/2021	8,161	35.764
15/08/2021	8,484	20.813
22/08/2021	8,709	12.408
31/08/2021	9	10.534

Tanggal (desimal) adalah tanggal yang sudah diolah ke dalam bentuk desimal 3 angka di belakang koma dengan memanfaatkan perhitungan sebagai berikut:

tanggal(desimal) = bulan + (tanggal / jumlah hari pada bulan tersebut)

Sebagai **contoh**, untuk tanggal 17/06/2021 (dibaca: 17 Juni 2021) diperoleh tanggal(desimal) sebagai berikut:

$$\text{Tanggal(desimal)} = 6 + (17/30) = 6{,}567$$

Gunakanlah data di atas dengan memanfaatkan **polinom interpolasi** untuk melakukan prediksi jumlah kasus baru Covid-19 pada tanggal-tanggal berikut:

a. 16/07/2021
b. 10/08/2021
c. 05/09/2021
d. beserta masukan user lainnya berupa **tanggal (desimal) yang sudah diolah** dengan asumsi prediksi selalu dilakukan untuk tahun 2021.

Hasil:

```
Masukkan N jumlah taksiran : 3
7.51612
8.3225
9.16667
P9(7.51612) = 53540.205078125
P9(8.3225) = 36328.55078125
P9(9.16667) = -664812.9296875
```

6.c.

Kasus:

c. Sederhanakan fungsi

$$f(x) = \frac{x^2 + \sqrt{x}}{e^x + x}$$

dengan polinom interpolasi derajat n di dalam selang [0, 2]. Sebagai contoh, jika n = 5, maka titik-titik x yang diambil di dalam selang [0, 2] berjarak $h = (2 - 0)/5 = 0.4$.

Hasil:

```
============================
Polinom Interpolasi yang melalui semua titik adalah p3(x) =0.3071999999999996 + 0.3217333333333346x-0.09020000000000106x^2-0.0017333333333330683x^3
============================

Masukkan N jumlah taksiran : 1
1
P3(1.0) = 0.5370000000000001
```

7

Kasus:

Diberikan sekumpulan data sesuai pada tabel berikut ini.

Table 12.1: Data for Example 12.1

Nitrous Oxide, y	Humidity, x_1	Temp., x_2	Pressure, x_3	Nitrous Oxide, y	Humidity, x_1	Temp., x_2	Pressure, x_3
0.90	72.4	76.3	29.18	1.07	23.2	76.8	29.38
0.91	41.6	70.3	29.35	0.94	47.4	86.6	29.35
0.96	34.3	77.1	29.24	1.10	31.5	76.9	29.63
0.89	35.1	68.0	29.27	1.10	10.6	86.3	29.56
1.00	10.7	79.0	29.78	1.10	11.2	86.0	29.48
1.10	12.9	67.4	29.39	0.91	73.3	76.3	29.40
1.15	8.3	66.8	29.69	0.87	75.4	77.9	29.28
1.03	20.1	76.9	29.48	0.78	96.6	78.7	29.29
0.77	72.2	77.7	29.09	0.82	107.4	86.8	29.03
1.07	24.0	67.7	29.60	0.95	54.9	70.9	29.37

Source: Charles T. Hare, "Light-Duty Diesel Emission Correction Factors for Ambient Conditions," EPA-600/2-77-116. U.S. Environmental Protection Agency.

Gunakan *Normal Estimation Equation for Multiple Linear Regression* untuk mendapatkan regresi linear berganda dari data pada tabel di atas, kemudian estimasi nilai Nitrous Oxide apabila Humidity bernilai 50%, temperatur 76°F, dan tekanan udara sebesar 29.30.

Dari data-data tersebut, apabila diterapkan *Normal Estimation Equation for Multiple Linear Regression*, maka diperoleh sistem persamaan linear sebagai berikut.

$$20b_0 + 863.1b_1 + 1530.4b_2 + 587.84b_3 = 19.42$$

$$863.1b_0 + 54876.89b_1 + 67000.09b_2 + 25283.395b_3 = 779.477$$

$$1530.4b_0 + 67000.09b_1 + 117912.32b_2 + 44976.867b_3 = 1483.437$$

$$587.84b_0 + 25283.395b_1 + 44976.867b_2 + 17278.5086b_3 = 571.1219$$

Hasil:

```
Diperoleh SPL untuk mencari Regresi dalam bentuk matrix sebagai berikut:
20.0 863.0999999999999 1530.4000000000003 587.8399999999999 19.42
863.0999999999999 54876.89 67000.09 25283.395 779.4769999999999
1530.4000000000003 67000.09 117912.32000000002 44976.866999999984 1483.4369999999997
587.8399999999999 25283.395 44976.866999999984 17278.508600000005 571.1219000000001
Bentuk regresi dari hasil penyelesaian SPL diatas ialah
y = -3.5077781408831474-0.0026249907458783875x1 + 7.989410472218425E-4x2 + 0.15415503019828913x3
Masukan x1: 50
Masukan x2: 76
Masukan x3: 29.3
F(x) = 0.938434226221665
Apakah Anda ingin Menyimpan jawaban ke File?
(1 = Iya atau 0 = Tidak)
1
```

BAB V

KESIMPULAN, SARAN, DAN REFLEKSI

Sistem persamaan linier (SPL) dapat diselesaikan dengan beberapa metode, yaitu eliminasi Gauss, metode eliminasi Gauss-Jordan, metode matriks balikan ($x = A^{-1}b$), dan kaidah Cramer. Khusus untuk metode matriks balikan dan kaidah Cramer, hanya dapat digunakan pada matriks persegi saja ($n \times n$).

Metode Gauss dan metode Gauss-Jordan dapat diselesaikan dengan melakukan OBE terhadap matriks. Kemudian untuk kaidah Cramer dan matriks balikan diperlukan determinan. Determinan dapat dicari menggunakan reduksi baris dan ekspansi kofaktor.

Penyelesaian dari SPL memiliki 3 kemungkinan, yaitu solusi tunggal, solusi banyak, tidak memiliki solusi. Pada solusi tunggal didapat matriks eselon baris dengan 1 utama tanpa baris yang elemennya 0 semua. Selanjutnya pada solusi banyak, terdapat satu baris atau lebih yang elemennya berisi 0 semua. Kemudian SPL tidak memiliki solusi saat matriks eselon baris memiliki satu baris atau lebih yang memiliki hanya 1 elemen tidak 0.

Ada juga bentuk solusi dari SPL yang memiliki solusi unik berupa angka. Sedangkan SPL yang memiliki solusi banyak, bentuk solusinya bergantung dari variable bebas lain. Kemudian penyelesaian SPL dapat digunakan untuk hal-hal, seperti interpolasi polinom dan regresi linear berganda.

Melalui metode-metode yang telah diketahui, dapat diimplementasikan ke dalam algoritma dalam bahasa Java. Algoritma ini kemudian dapat digunakan untuk menyelesaikan masalah-masalah di atas.

Menurut kami, kami masih sangat kurang dalam segi kekompakan maupun manajemen waktu sehingga pengerjaan tugas tidak maksimal. Selain itu, tugas ini sebagai pembelajaran untuk kami selanjutnya dalam mengerjakan tugas. Semoga kedepannya manajemen waktu dapat ditingkatkan. Hal ini dapat dilihat dari pengerjaan dengan waktu kosong yang sangat banyak. Untuk ke depannya, masih ada banyak hal yang harus diperbaiki. Seperti yang dapat dilihat pada bab IV pada kasus 1.d., adanya ketidakkonsistennan solus penyelesaian sistem persamaan linier karena pembulatan oleh java. Hal ini dapat menjadi dasar masalah untuk mengembangkan algoritma penyelesaian sistem persamaan linier. Selain itu, kami juga menyadari bahwa penamaan *file* dan metode-metode masih belum dilakukan dengan baik. Oleh karena itu, kami juga ingin merapihkan program sehingga lebih mudah untuk dibaca, dipahami, dan diperbaiki jika terdapat masalah.

Saran kami, waktu yang diberikan dapat lebih banyak khususnya dalam pengenalan bahasa Java. Kemudian ada juga saran untuk lebih menjelaskan mengenai spesifikasi pembulatan sehingga perbedaan nilai yang berbeda dari nilai kenyataan.

Referensi:

- https://fti.ars.ac.id/blog/content/matriks--jenis-jenis-matriks (Diakses pada 30 September 2021, 20.00)
- https://informatika.stei.itb.ac.id/~rinaldi.munir/AljabarGeometri/2020-2021/Algeo-08-Determinan-bagian1.pdf (Diakses pada 30 September 2021, 20.33)
- https://informatika.stei.itb.ac.id/~rinaldi.munir/AljabarGeometri/2020-2021/Algeo-09-Determinan-bagian2.pdf (Diakses pada 30 September 2021, 20.41)
- http://dwiermawati.staff.gunadarma.ac.id/Downloads/files/65067/PERTEMUAN+14_15+-+SISTEM+PERSAMAAN+LINIER.pdf (Diakses pada 30 September 2021, 21.56)
- https://informatika.stei.itb.ac.id/~rinaldi.munir/AljabarGeometri/2020-2021/Algeo-02-Matriks-Eselon.pdf (Diakses pada 30 September 2021, 22.00)
- https://informatika.stei.itb.ac.id/~rinaldi.munir/AljabarGeometri/2020-2021/Algeo-03-Sistem-Persamaan-Linier.pdf (Diakses pada 30 September 2021, 22.35)
- https://informatika.stei.itb.ac.id/~rinaldi.munir/AljabarGeometri/2020-2021/Algeo-04-Tiga-Kemungkinan-Solusi-SPL.pdf (Diakses pada 30 September 2021, 22.35)
- https://informatika.stei.itb.ac.id/~rinaldi.munir/AljabarGeometri/2020-2021/Algeo-05-Sistem-Persamaan-Linier-2.pdf (Diakses pada 30 September 2021, 22.35)
- https://mathcyber1997.com/materi-soal-dan-pembahasan-aturan-cramer/ (Diakses pada 30 September 2021, 23.32)
- https://simdos.unud.ac.id/uploads/file_pendidikan_1_dir/5f0221d2b0bb7ced1d61798fab7f4ad3.pdf (Diakses 1 Oktober, 00.37)