«SKRIPSI/TUGAS AKHIR»

MENCARI SOLUSI UNTUK PERSAMAAN DIFERENSIAL DENGAN MENGGUNAKAN ALGORITMA GENETIK

ALDY MARCELLINO CHRISTIAN

NPM: 2013730005

PROGRAM STUDI «MATEMATIKA/FISIKA/TEKNIK INFORMATIKA»
FAKULTAS TEKNOLOGI INFORMASI DAN SAINS
UNIVERSITAS KATOLIK PARAHYANGAN
2002

FINAL PROJECT/UNDERGRADUATE THESIS

FINDING SOLUTIONS FOR DIFFERENTIAL EQUATIONS BY USING GENETIC ALGORITHM

ALDY MARCELLINO CHRISTIAN

NPM: 2013730005

DEPARTMENT OF «MATHEMATICS/PHYSICS/INFORMATICS»
FACULTY OF INFORMATION TECHNOLOGY AND SCIENCES
PARAHYANGAN CATHOLIC UNIVERSITY
2002

LEMBAR PENGESAHAN

MENCARI SOLUSI UNTUK PERSAMAAN DIFERENSIAL DENGAN MENGGUNAKAN ALGORITMA GENETIK

ALDY MARCELLINO CHRISTIAN

NPM: 2013730005

Bandung, 1 Agustus 2002

Menyetujui,

Pembimbing

Prof. B. Suprapto Brotosiswojo, Ph.D.

Ketua Tim Penguji	Anggota Tim Penguji
Dott. Thomas Anung Basuki	**Lionov, M.Sc.**

Mengetahui,

Ketua Program Studi

«Ketua Program Studi»

PERNYATAAN

Dengan ini saya yang bertandatangan di bawah ini menyatakan bahwa «skripsi/tugas akhir» dengan judul:

MENCARI SOLUSI UNTUK PERSAMAAN DIFERENSIAL DENGAN MENGGUNAKAN ALGORITMA GENETIK

adalah benar-benar karya saya sendiri, dan saya tidak melakukan penjiplakan atau pengutipan dengan cara-cara yang tidak sesuai dengan etika keilmuan yang berlaku dalam masyarakat keilmuan.

x Atas pernyataan ini, saya siap menanggung segala risiko dan sanksi yang dijatuhkan kepada saya, apabila di kemudian hari ditemukan adanya pelanggaran terhadap etika keilmuan dalam karya saya, atau jika ada tuntutan formal atau non-formal dari pihak lain berkaitan dengan keaslian karya saya ini.

Dinyatakan di Bandung,
Tanggal 1 Agustus 2002

Meterai
Rp. 6000

ALDY MARCELLINO CHRISTIAN
NPM: 2013730005

ABSTRAK

Tuliskan abstrak anda di sini, dalam bahasa Indonesia

Kata-kata kunci: Tuliskan di sini kata-kata kunci yang anda gunakan, dalam bahasa Indonesia

ABSTRACT

Tuliskan abstrak anda di sini, dalam bahasa Inggris

Keywords: Tuliskan di sini kata-kata kunci yang anda gunakan, dalam bahasa Inggris

Pain is temporary, glory is eternal...?

KATA PENGANTAR

Tuliskan kata pengantar dari anda di sini . . .

Bandung, Agustus 2002

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

BAB 1

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Persamaan diferensial adalah suatu persamaan matematika yang mengandung turunan-turunan dari suatu fungsi yang tidak diketahui ($y(x)$) dari satu atau lebih variabel bebas terhadap satu atau lebih peubah tak bebas. Persamaan diferensial banyak digunakan untuk pemodelan dalam berbagai bidang seperti fisika (hukum Newton), kimia (hukum Bernoulli), ekonomi, biologi, dan lain-lain. Persamaan diferensial dibagi menjadi dua, yaitu persamaan diferensial biasa dan persamaan diferensial parsial. Persamaan diferensial biasa adalah persamaan diferensial yang hanya mengandung satu variabel bebas (variabel yang dapat dimanipulasi dan mempengaruhi variabel lain) dan satu variabel terikat (variabel yang keadaannya dipengaruhi oleh variabel bebas) (contoh: $y"+3y'+2 = \sin x$). Persamaan diferensial parsial adalah persamaan diferensial yang mengandung lebih dari satu variabel bebas dan satu variabel terikat (contoh: $\frac{\partial x}{\partial y} = (x+y)\frac{\partial y}{\partial z}$).

Untuk mencari solusi persamaan diferensial, akan digunakan implementasi algoritma genetik. Algoritma genetik adalah suatu teknik heuristik yang bekerja berdasarkan pada prinsip seleksi makhluk hidup di alam (proses evolusi) dan proses penurunan genetika (hereditas) pada makhluk hidup. Algoritma ini adalah perpaduan antara bidang ilmu komputer dan bidang biologi. Dalam algoritma genetik, kumpulan solusi diibaratkan seperti sebuah makhluk individu di alam. Individu-individu ini akan mengalami proses seleksi (memilih individu mana yang memiliki kemungkinan bertahan hidup yang tinggi di alam, dalam hal ini solusi mana yang paling mendekati untuk mampu memecahkan persamaan diferensial) dan mutasi (perubahan karakteristik individu, mutasi diperlukan untuk menjaga keberagaman gen-gen individu agar tidak monoton sehingga diharapkan mampu memperbaiki individu agar dapat mencari solusi). Algoritma genetik akan berhenti berjalan apabila algoritma sudah menemukan solusi pada ambang batas (*threshold*) iterasi (generasi) yang telah ditetapkan atau tidak ditemukan solusi yang lebih baik setelah sekian kali iterasi.

Individu dalam algoritma genetik akan diproses dengan menggunakan Backus-Naur *Form* (BNF). BNF adalah sebuah notasi untuk mengekspresikan suatu tata bahasa (*grammar*) dalam bentuk aturan produksi. BNF terdiri atas simbol *terminal* dan simbol *non-terminal*. Sebuah *grammar* dapat direpresentasikan dengan *tuple* (*record*): (N, T, P, S). N adalah himpunan simbol-simbol *non-terminal*. T adalah himpunan simbol-simbol *terminal*. P adalah himpunan aturan-aturan produksi yang memetakan simbol-simbol *non-terminal* ke simbol-simbol *terminal* maupun simbol-simbol *non-terminal*. S adalah simbol awal (*start symbol*) yang merupakan anggota dari N.

Dalam skripsi ini akan dibangun sebuah perangkat lunak dengan masukkan (*input*) berupa persamaan diferensial, baik persamaan diferensial biasa atau persamaan diferensial parsial dan keluaran (*output*) perangkat lunak adalah fungsi solusi (jawaban) dari persamaan diferensial. Perangkat lunak ini akan memakai implementasi algoritma genetik. Algoritma genetik dipilih karena algoritma ini dapat mendapatkan solusi dari persamaan diferensial dengan memasukkan banyak parameter persamaan diferensial. Individu yang dihasilkan algoritma genetik akan diterjemahkan ke dalam perangkat lunak menggunakan notasi Backus-Naur *Form* (BNF).

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang telah diuraikan di atas, dapat dirumuskan permasalahan sebagai berikut:

1. Bagaimana cara membangun solusi untuk persamaan diferensial dengan algorima genetik?
2. Bagaimana cara memproses individu dalam algoritma genetik dengan notasi BNF?

1.3 Tujuan

Berdasarkan rumusan masalah yang telah dirumuskan, maka tujuan dari pembuatan skripsi ini adalah:

1. Membangun dan merancang perangkat lunak untuk solusi persamaan diferensial dengan implementasi algoritma genetik
2. Mengimplementasikan notasi BNF ke dalam perangkat lunak agar dapat memproses individu dalam algoritma genetik

1.4 Batasan Masalah

Ruang lingkup dari skripsi ini dibatasi oleh batasan-batasan masalah sebagai berikut:

1. Persamaan diferensial biasa dan persamaan diferensial parsial yang akan diuji dalam pengujian perangkat lunak hanya persamaan diferensial bersifat linier
2. Persamaan diferensial parsial yang akan diuji dalam pengujian perangkat lunak hanya persamaan diferensial parsial berdimensi dua

1.5 Metodologi

Langkah-langkah yang akan dilakukan dalam pembuatan skripsi ini adalah:

1. Melakukan studi literatur
   (a) Studi literatur persamaan diferensial biasa dan persamaan diferensial parsial
   (b) Studi literatur algoritma genetik
   (c) Studi literatur algoritma *evolutionary grammar*
   (d) Studi literatur notasi Backus-Naur *Form* (BNF)
2. Menganalisis, merancang, membangun, dan mengembangkan perangkat lunak
   (a) Menganalisis dan merancang kebutuhan fitur-fitur utama perangkat lunak seperti fitur syarat batas persamaan diferensial dan fitur untuk mencari solusi persamaan diferensial
   (b) Membangun dan mengembangkan perangkat lunak berdasarkan fitur-fitur utama yang telah ditentukan
   (c) Mengimplementasikan algoritma genetik ke dalam perangkat lunak
   (d) Mengimplementasikan notasi BNF ke dalam perangkat lunak
3. Melakukan pengujian perangkat lunak dengan masukkan persamaan diferensial biasa dan persamaan diferensial parsial

4. Menguji performansi algoritma genetik dari berapa banyak iterasi yang dibutuhkan untuk mencari dan menemukan solusi persamaan diferensial

5. Membuat grafik perkembangan iterasi algoritma genetik dalam mencari dan menemukan solusi persamaan diferensial

6. Menarik dan membuat kesimpulan dari hasil pengujian perangkat lunak

1.6 Sistematika Pembahasan

Sistematika pembahasan skripsi ini adalah sebagai berikut:

1. Bab 1 berisi tentang pendahuluan, yaitu latar belakang, rumusan masalah, tujuan, batasan masalah, metodologi penelitian, dan sistematika pembahasan

2. Bab 2 berisi tentang landasan teori yang digunakan untuk mendukung perancangan dan pembangunan perangkat lunak, yaitu persamaan diferensial (persamaan diferensial biasa dan persamaan diferensial parsial), algoritma genetik, notasi Backus-Naur *Form*, dan *evolutionary grammar*

3. Bab 3 berisi tentang analisis kebutuhan fitur-fitur utama perangkat lunak untuk mencari solusi persamaan diferensial, yaitu fitur syarat batas persamaan diferensial dan fitur untuk menampilkan keluaran solusi persamaan diferensial

4. Bab 4 berisi tentang perancangan dan pembangunan perangkat lunak untuk mencari solusi persamaan diferensial. Bab ini berisi perancangan antarmuka (*interface*) perangkat lunak, masukkan (*input*), keluaran (*output*), diagram kelas *class diagram*, dan *use-case diagram*. Perangkat lunak akan dibangun berdasarkan perancangan-perancangan yang telah disebutkan

5. Bab 5 berisi tentang pengujian perangkat lunak dengan masukkan persamaan diferensial biasa dan persamaan diferensial parsial. Masukkan tersebut akan dicari solusinya dengan implementasi algoritma genetik dan notasi BNF di dalam perangkat lunak. Setelah solusi persamaan diferensial ditemukan, maka perangkat lunak akan menampilkan grafik perkembangan iterasi algoritma genetik untuk mencari keluaran solusi

6. Bab 6 berisi tentang kesimpulan dari hasil pengujian perangkat lunak dan saran untuk pengembangan penelitian dengan topik sama di waktu yang akan datang

BAB 2

LANDASAN TEORI

2.1 Persamaan Diferensial

Persamaan diferensial adalah suatu persamaan matematika yang mengandung turunan-turunan dari suatu fungsi yang tidak diketahui ($y(x)$) dari satu atau lebih variabel bebas terhadap satu atau lebih peubah tak bebas. Di dalam aplikasi di dunia nyata, fungsi yang tidak diketahui tersebut digunakan untuk merepresentasikan perubahan secara kontinu. Turunan-turunan fungsi merepresentasikan laju perubahan. Persamaan diferensial merepresentasikan hubungan antar fungsi dan turunan. Hubungan antar fungsi dan turunan tersebut atau persamaan diferensial memegang peranan penting dalam berbagai bidang disiplin ilmu seperti fisika (hukum Newton), kimia (hukum Bernoulli), biologi (laju pertumbuhan bakteri), ekonomi, dan lain-lain.

Contoh persamaan diferensial adalah sebagai berikut:

1. $\dfrac{d^2y}{dx^2} + xy(\dfrac{dy}{dx})^2 = 0$ (persamaan diferensial dengan peubah tak bebas y dan peubah bebas x)
2. $\dfrac{d^2x}{dt^2} + \dfrac{dx}{dt} - 5\cos t + 2x = 0$ (persamaan diferensial dengan peubah tak bebas x dan peubah bebas t)
3. $\dfrac{d^2u}{dy^2} + u^2y = 0$ (persamaan diferensial dengan peubah tak bebas u dan peubah bebas y)
4. $\dfrac{\partial v}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} = xy$ (persamaan diferensial dengan peubah tak bebas v dan peubah bebas x dan y)
5. $\dfrac{\partial v}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{\partial v}{\partial t} + \dfrac{\partial u}{\partial x} = 3$ (persamaan diferensial dengan peubah tak bebas v dan u dan peubah bebas x dan y)

Persamaan diferensial memiliki orde (tingkat) dan turunan. Orde persamaan diferensial adalah n jika turunan (y) ke-n-nya merupakan turunan tertinggi. Derajat persamaan diferensial adalah pangkat tertinggi dari turunan tertinggi persamaan diferensial tersebut.

Contoh orde dan turunan pada persamaan diferensial adalah sebagai berikut:

1. $2\dfrac{dy}{dx} + y = x^3$ (persamaan diferensial orde 1 derajat 1)
2. $y''' + 2(y'')^2 + y' = \tan x$ (persamaan diferensial orde 3 derajat 1)
3. $y^{iv} + y''' + y = \ln x$ (persamaan diferensial orde 4 derajat 1)
4. $y^2y' + x = 0$ (persamaan diferensial orde 1 derajat 2)
5. $y'' + xy(y')^3 = 0$ (persamaan diferensial orde 2 derajat 4)

Solusi persamaan diferensial dapat dicari dan ditemukan dengan menggunakan metode analitik (menggunakan rumus-rumus matematika yang sudah baku) dan metode numerik (menggunakan bantuan formulasi matematis pada program komputer). Solusi dengan metode analitik akan berupa sebuah fungsi eksak dan solusi dengan metode numerik akan berupa hamparan (*range*) angka. Dalam skripsi ini, solusi persamaan diferensial akan dicari dan ditemukan dengan metode analitik karena keluaran perangkat lunak akan berbentuk fungsi matematika yang eksak.

Persamaan diferensial dibagi menjadi dua berdasarkan jumlah peubah bebas dan jumlah peubah tak bebasnya, yaitu persamaan diferensial biasa dan persamaan diferensial parsial. Persamaan diferensial biasa adalah persamaan diferensial yang memiliki tepat satu buah peubah bebas dan tepat satu buah peubah tak bebas. Persamaan diferensial parsial adalah persamaan diferensial yang memiliki satu buah atau lebih peubah bebas dan satu buah atau lebih peubah tak bebas.

2.1.1 Aturan Turunan Fungsi

Seperti yang sudah dijelaskan pada bag 2.1, persamaan diferensial memuat turunan-turunan dari suatu fungsi yang tidak diketahui. Turunan-turunan tersebut memiliki aturan berupa rumus-rumus untuk menemukan fungsi yang tidak diketahui tersebut. Berikut adalah aturan turunan fungsi:

1. Aturan turunan fungsi aljabar tunggal

   - Jika $f(x) = k$ dengan $k =$ konstanta riil, maka turunan $f(x)$ adalah $f'(x) = 0$
   - Jika $f(x) = x$ (fungsi identitas), maka $f'(x) = 1$
   - Jika $f(x) = ax^n$, dengan a adalah konstanta riil tidak nol dan n merupakan bilangan bulat positif, maka $f'(x) = a.n.x^{n-1}$

2. Aturan turunan fungsi aljabar ganda

   Misalkan $u(x)$ dan $v(x)$ masing-masing mempunyai turunan $u'(x)$ dan $v'(x)$

   - Jika $f(x) = u(x) \pm v(x)$, maka $f'(x) = u'(x) \pm v'(x)$
   - Jika $f(x) = u(x).v(x)$, maka $f'(x) = u'(x).v(x) + u(x).v'(x)$
   - Jika $f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}, v(x) \neq 0$, maka $f'(x) = \dfrac{u'(x).v(x) - u(x).v'(x)}{(v'(x))^2}$

3. Aturan turunan fungsi aljabar berpangkat N

   - Jika $f(x) = (u(x))^n \pm v(x)$, dengan $u(x)$ adalah fungsi dari x yang mempunyai turunan $u'(x)$ dan n adalah bilangan riil, maka $f'(x) = n.(u(x))^{n-1}.u'(x)$

4. Aturan turunan fungsi trigonometri

   - Jika $f(x) = \sin x$, maka turunannya adalah $f'(x) = \cos x$
   - Jika $f(x) = \cos x$, maka turunannya adalah $f'(x) = -\sin x$
   - Jika $f(x) = \sin x$, maka turunannya adalah $f'(x) = \sec^2 x$
   - Jika $f(x) = \csc x$, maka turunannya adalah $f'(x) = -\csc x.\cot x$
   - Jika $f(x) = \sec x$, maka turunannya adalah $f'(x) = \sec x.\tan x$
   - Jika $f(x) = \cot x$, maka turunannya adalah $f'(x) = -\csc^2 x$

2.1.2 Solusi Persamaan Diferensial

Solusi persamaan diferensial adalah suatu fungsi matematika ($f(x)$) atau keluarga fungsi yang menjadi fungsi yang tepat untuk memenuhi fungsi yang tidak diketahui (y) dalam persamaan diferensial. Jika $f(x)$ disubstitusikan untuk y dalam persamaan diferensial, maka akan menghasilkan suatu fungsi yang benar. Solusi persamaan diferensial terbagi atas solusi umum dan solusi khusus.

Solusi umum persamaan diferensial adalah suatu fungsi matematika ($f(x)$) yang memuat atau mengandung beberapa parameter dan memenuhi persamaan diferensialnya. Banyaknya parameter dalam solusi umum sama dengan orde persamaan diferensialnya. Contoh solusi umum persamaan diferensial adalah sebagai berikut:

1. aa

Solusi khusus persamaan diferensial adalah fungsi matematika ($f(x)$) yang merupakan anggota dari keluarga fungsi solusi umum persamaan diferensialnya. Solusi khusus diperoleh dengan mensubstitusikan parameter pada solusi umum oleh suatu konstanta. Contoh solusi khusus persamaan diferensial adalah sebagai berikut:

2.1.3 Persamaan Diferensial Biasa

Persamaan diferensial biasa adalah persamaan diferensial yang memiliki tepat satu buah peubah bebas dan tepat satu buah peubah tidak bebas. Persamaan diferensial biasa memegang peranan penting dalam hal menurunkan fungsi-fungsi yang tidak diketahui dalam beberapa aplikasi dalam bidang fisika (hukum Newton), biologi (laju pertumbuhan bakteri), dan lain-lain. Persamaan diferensial biasa yang bersifat linier dapat dipecahkan dengan metode analitik, sementara persamaan diferensial biasa yang bersifat non-linier sulit dipecahkan dengan metode analitik, sehingga harus menggunakan bantuan komputasi program komputer (dengan bantuan metode numerik). Cakupan bahasan skripsi ini hanya sampai pada persamaan diferensial biasa linier.

Persamaan diferensial biasa memiliki fungsi-fungsi turunan yang tidak diketahui berupa $y = g(x)$. Fungsi y merupakan solusi persamaan diferensial biasa apabila $g(x)$ dapat diferensialkan sehingga persamaan tersebut menjadi solusi tunggal (identitas) pada persamaan tersebut. Hal utama dalam persamaan diferensial biasa adalah mencari semua solusi persamaan yang diberikan.

Langkah-langkah untuk menentukan solusi persamaan diferensial biasa adalah sebagai berikut:

1. Tentukan banyaknya konstanta sembarang (y^n)
2. Turunkan sebanyak konstanta sembarangnya sampai menjadi sebuah fungsi (solusi)
3. Jika solusi hasil turunan tersebut didiferensialkan sehingga konstanta sembarangnya sudah lenyap maka hasil diferensialnya merupakan persamaan diferensial biasa
4. Jika konstanta sembarangnya masih ada maka eliminasi konstanta sembarangnya sampai tidak ada

Klasifikasi persamaan diferensial biasa adalah sebagai berikut:

1. Homogen
   Persamaan diferensial biasa homogen adalah persamaan diferensial biasa yang memiliki bentuk

$$a_0(x)y^n + a_1(x)y^{n-1} + ... + a_n - 1(x)y' + a_n(x)y = 0 \tag{2.1}$$

   pada orde N.

2. Non-homogen
   Persamaan diferensial biasa non-homogen adalah persamaan diferensial biasa yang tidak memiliki bentuk seperti persamaan 2.1

3. Linier
   Persamaan diferensial biasa linier adalah persamaan diferensial biasa yang memiliki bentuk

   $$a_0(x)y^n + a_1(x)y^{n-1} + ... + a_n - 1(x)y' + a_n(x)y = f(x) \tag{2.2}$$

   pada orde *N*.

   Kriteria-kriteria persamaan diferensial biasa linier adalah:

   1. Tidak terdapat perkalian antara peubah bebas dan peubah tak bebas
   2. Tidak terdapat fungsi transeden dalam peubah tak bebas
   3. Peubah tak bebas dan turunannya paling besar berpangkat satu
   4. $a_i(x)$, di mana $i = 0, 1, 2, ...$ masing-masing merupakan fungsi kontinu dalam x pada suatu interval

   Contoh persamaan diferensial biasa linier (dalam skripsi ini persamaan diferensial biasa linier yang akan langsung dibahas adalah persamaan diferensial biasa linier orde dua):

   1. $x(\frac{d^2y}{dx^2}) + 3\frac{dy}{dx} - 2xy = 0$
   2. $(\cos x)y" + (\sin x)y' + 4y \tan x = 0$
   3. $xy'' + 3y' - x^2y = e^x$
   4. $y^{iv} + x^2y'' + x^3y' = 0$
   5. $(x^2 - 1)y" + (x + 1)y' + 2y = 0$

4. Non-linier
   Persamaan diferensial biasa non-linier adalah persamaan diferensial biasa yang tidak memiliki bentuk seperti persamaan 2.2.
   Contoh persamaan diferensial biasa non-linier:

   1. $y(\frac{d^2y}{dx^2}) + x(\frac{dy}{dx})^2 - 4x = \cos x$
   2. $y" + 6yy' + 4xy = 0$
   3. $x(y")^2 + x^2y' - 2y = 0$
   4. $y' \sin x - x \sin y = 7x$
   5. $y" - 2xy + 3 \cos y = 0$

Berikut akan dibahas persamaan diferensial biasa homogen dan persamaan diferensial biasa non-homogen. Di bawah ini adalah jenis-jenis persamaan diferensial biasa homogen, selanjutnya akan dibahas persamaan diferensial biasa non-homogen.

2.1.3.1 Persamaan Diferensial Biasa Orde Satu Derajat Satu

Bentuk umum persamaan diferensial biasa orde satu derajat satu dapat ditulis dalam bentuk:

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0 \tag{2.3}$$

Bentuk ini dapat dimanipulasi menjadi bentuk lain dengan pengertian yang sama dengan bentuk:

$$(y+x)\,dx + (y-x)\,dy = 0$$

Dari hasil manipulasi terlihat bahwa:

$$M(x,y) = (y+x), N(x,y) = (y-x)$$

Bentuk di atas dapat pula ditulis menjadi:

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y+x}{y-x}$$

Persamaan diferensial biasa orde satu derajat satu dapat diselesaikan dengan menggunakan beberapa metode. Metode-metode ini adalah:

2.1.3.1.1 Memisahkan Peubah

Bentuk $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$ dapat diubah menjadi $P(x)\,dx + Q(y)\,dy = 0$ di mana $P(x)$ adalah suatu fungsi dari konstanta x saja dan $Q(y)$ adalah suatu fungsi dari konstanta y saja. Persamaan dengan bentuk tersebut dinamakan persamaan dengan peubah terpisah (memisahkan peubah). Dengan mengintegralkan kedua ruas ($P(x)$ dan $Q(y)$), maka diperoleh:

$$\int P(x)\,dx + \int Q(y)\,dy = 0 \tag{2.4}$$

Jika diasumsikan bahwa P dan Q adalah fungsi yang kontinu, maka persamaan 2.3 dapat dihitung dan diperoleh solusi umum dan khusus-nya.

Contoh kasus persamaan diferensial biasa yang dapat diselesaikan dengan metode memisahkan peubah adalah:

1. $yy' + 4x = 0$

   $y\dfrac{dy}{dx} + 4x = 0$

   $y\,dy + 4x\,dx = 0$

   $\int y\,dy + \int 4x\,dx = \int 0$

   $\dfrac{1}{2}y^2 + 2x^2 = C$

   $y^2 = C - 4x^2$

   $y = \sqrt{C - 4x^2}$

2. $y' = 1 + y^2$

   $\dfrac{dy}{dx} + 4x = 0$

   $\dfrac{dy}{1+y^2} = dx$

$$\int \frac{dy}{1+y^2} = \int dx$$

$$\arctan(y) = x + C$$

$$y = \tan(x + C)$$

2.1.3.1.2 PDB Homogen

Bentuk $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$ adalah persamaan diferensial biasa homogen apabila $M(x,y)$ dan $N(x,y)$ berderajat sama. Contoh persamaan diferensial biasa homogen adalah:

1. $y = x^3 - 2x^2y$ (persamaan diferensial biasa homogen berderajat 3)
2. $y = x^2 - 3xy^2$ (persamaan diferensial biasa non-homogen)

Persamaan diferensial dapat diselesaikan dengan cara substitusi:

$$v = \frac{y}{x}$$
$$y = vx$$

sehingga diperoleh:

$$dy = v\,dx + x\,dv \tag{2.5}$$

Contoh kasus persamaan diferensial biasa homogen adalah:

1. $(x+y)\,dx + (y-x)\,dy = 0$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x+y}{y-x} = \frac{x+y}{x-y}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1+\frac{y}{x}}{1-\frac{y}{x}} \text{ (misalkan } y = vx\text{, sehingga } dy = v\,dx + x\,dv)$$

$$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{1+v}{1-v}$$

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{1+v}{1-v} - v$$

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{1+v-v(1-v)}{1-v}$$

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{1+v^2}{1-v}$$

$$\frac{dv}{dx} = \frac{1+v^2}{1-v}$$

$$\frac{1-v}{1+v^2}\,dv = \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{1}{1+v^2}\,dv - \int \frac{v}{1+v^2}\,dv = \int \frac{1}{x}\,dx$$

$$\arctan(v) - \frac{1}{2}\ln(1+v^2) = \ln x + C$$

$$\arctan(v) = \ln(1+v^2)^{\frac{1}{2}} + \ln x + C$$

$\arctan(\frac{y}{x}) = \ln x(1+\frac{y^2}{x^2})^{\frac{1}{2}} + C$

2.1.3.1.3 Persamaan Diferensial Biasa dengan Koefisien Linier

Bentuk umum persamaan diferensial biasa dengan koefisien linier adalah:

$$(ax+by+c)\,dx + (px+qy+r)\,dy = 0 \tag{2.6}$$

Metode-metode penyelesaian persamaan diferensial biasa dengan koefisien linier adalah sebagai berikut:

1. Bila $c = 0$ dan $r = 0$, maka bentuk persamaan 2.6 menjadi:

$$(ax+by)\,dx + (px+qy)\,dy = 0 \tag{2.7}$$

,

adalah persamaan diferensial biasa homogen sehingga dapat diselesaikan dengan mensubstitusikan $v = \frac{y}{x}$

2. Bila $px+qy = k(ax+by)$, di mana k adalah konstanta, maka bentuk persamaan 2.6 menjadi:

$$(ax+by+c)\,dx + k(ax+by) + r\,dy = 0 \tag{2.8}$$

,

Misalkan $ax+by = z$, sehingga diperoleh $a\,dx + b\,dy = \, dz$ dan $dy = \frac{dz - a\,dx}{b}$
Akibatnya bentuk 2.8 menjadi:

$(z+c)\,dx + (kz+r)\,dy = 0$

$(z+c)\,dx + (kz+r)\frac{dz - a\,dx}{b} = 0$

$b(z+c)\,dx + (kz+r)\,dz - a(kz+r)\,dx0$

$b(z+c) - a(kz+r)\,dx + (kz+r)\,dz = 0$ (persamaan diferensial biasa dengan variabel terpisah)

3. Bila $\frac{a}{p} \neq \frac{b}{q}$ dan $r \neq 0$, dapat diselesaikan dengan memisalkan:

$ax+by+c = u$

$px+qy+r = v$

$a\,dx + b\,dy = \, du$

$p\,dx + q\,dy = \, dy$

$dx = \frac{\begin{vmatrix} du & b \\ dv & q \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ p & q \end{vmatrix}} = \frac{q\,du - b\,dy}{aq - bp}$

Substitusi pada persamaan 2.8, maka diperoleh persamaan diferensial homogen.

Contoh-contoh kasus persamaan diferensial biasa dengan koefisien linier adalah:

1. $(x+y+1)\,dx+(2x+2y+1)\,dy=0$

   Misalkan $x+y=z$, sehingga

   $dz = dx + dy$ atau $dy = dz - dx$

   Persamaan menjadi:

   $(z+1)\,dx+(2z+1)(\,dz-\,dx)=0$

   $(z+1)\,dx+(2z+1)\,dz-(2z+1)\,dx=0$

   $(2z+1)\,dz-z\,dx=0$

   $\int dx=\int \frac{2z+1}{2}\,dz$

   $x=2z+\ln z+C$

   $x=2(x+y)+\ln(x+y)+C$

2.1.3.1.4 Persamaan Diferensial Biasa Eksak

Suatu persamaan diferensial biasa orde pertama berbentuk $M(x,y)\,dx+N(x,y)\,dy=0$ dikatakan eksak jika ruas kiri persamaan total atau diferensial eksak ($du=\frac{\partial u}{\partial x}\,dx+\frac{\partial u}{\partial y}\,dy$) dari fungsi $u(x,y)$, maka $M(x,y)\,dx+N(x,y)\,dy=0$ dapat ditulis menjadi $du=0$. Dengan melakukan pengintegralan, maka diperoleh penyelesaian umum persamaan diferensial biasa orde pertama tersebut dalam bentuk:

$$u(x,y)=0$$

Dengan membandingkan $M(x,y)\,dx+N(x,y)\,dy=0$ dan persamaan yang berikutnya, terlihat bahwa persamaan $u(x,y)=0$, terlihat bahwa persamaan $u(x,y)=0$ adalah persamaan yang eksak jika terdapat suatu fungsi $u(x,y)=0$ sedemikian sehingga:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=M$$

dan

$$\frac{\partial u}{\partial y}=N$$

Misalkan M dan N terdefinisi dan mempunyai turunan parsial yang pertama dan kontinu pada suatu daerah di bidang xy yang dibatasi oleh suatu kurva tertutup yang tak beririsan dengan dirinya sendiri. Maka diperoleh turunan sebagai berikut:

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}$$

dan

$$\frac{\partial N}{\partial x}=\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$$

Dengan asumsi kontinuitas turunan, maka dua turunan kedua dari fungsi ini akan sama sehingga diperoleh:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial y}$$

Penyelesaian dari persamaan eksak diperoleh sebagai berikut:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = M(x, y) \tag{2.9}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = N(x, y) \tag{2.10}$$

Dengan mengintegralkan persamaan 2.9, maka diperoleh:

$$u(x, y) = \int M(x, y)\, dx + K(y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left\{ \int M(x, y)\, dx + K(y) \right\} = N(x, y)$$

atau

$$\frac{\partial}{\partial y}\left\{ \int M(x, y)\, dx \right\} + \frac{\partial K(y)}{\partial y} = N(x, y)$$

$$\frac{\partial K(y)}{\partial y} = N(x, y) - \frac{\partial}{\partial y}\left\{ \int M(x, y)\, dx \right\}$$

Integralkan ruas kiri dan ruas kanan maka diperoleh:

$$K(y) = N(x, y)\, dy - \int \left\{ t\frac{\partial}{\partial y} \int M(x, y)\, dx \right\} dy$$

Dengan demikian penyelesaian persamaan diferensial biasa eksak adalah:

$$u(x, y) = \int M(x, y)\, dx + \int \left\{ N - \frac{\partial}{\partial y} \int M\, dx \right\} dy \tag{2.11}$$

Contoh kasus-kasus persamaan diferensial biasa eksak:

1. $xy' + y + 4 = 0$

   $x\dfrac{dy}{dx} + y + 4 = 0$

   $(y + 4)\, dx + x\, dy = 0$

   $M(x, y) = y + 4$, $N(x, y) = x$

   $\dfrac{\partial M}{\partial y} = 1$, $\dfrac{\partial N}{\partial x} = 1$ (eksak)

   $u(x, y) = \int M(x, y)\, dx + K(y)$

   $u(x, y) = \int (y + 4)\, dx + K(y)$

   $u(x, y) = xy + 4x + K(y)$

$\dfrac{\partial u}{\partial y} = x + K'(y) = N(x,y)$

$x + K'(y) = x$

$K'(y) = 0$

$K'(y) = C$

$u(x,y) = xy + 4x = C$

2. $(4x^3y^3 + \dfrac{1}{x})\,dx + (3x^4y^2 - \dfrac{1}{y})\,dy = 0$

   $M(x,y) = 4x^3y^3 + \dfrac{1}{x}$, $3x^4y^2 - \dfrac{1}{y}$

   $\dfrac{\partial M}{\partial y} = 12x^3y^2$, $\dfrac{\partial N}{\partial x} = 12x^3y^2$ (eksak)

   $u(x,y) = \int M(x,y)\,dx + K(y)$

   $u(x,y) = \int (4x^3y^3 + \dfrac{1}{x})\,dx + K(y)$

   $u(x,y) = \int x^4y^3 + \ln x + K(y)$

   $\dfrac{\partial u}{\partial y} = 3x^4y^2 + K'(y) = N(x,y)$

   $3x^4y^2 + K'(y) = 3x^4 - \dfrac{1}{y}$

   $K'(y) = \dfrac{1}{y}$

   $K(y) = \ln y$

   $u(x,y) = x^4y^3 + \ln x - \ln y = C$

   $u(x,y) = x^4y^3 + \ln\dfrac{x}{y} = C$

2.1.3.1.5 Faktor Integrasi

Jika pada $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$, di mana $\dfrac{\partial M}{\partial y} \neq \dfrac{\partial N}{\partial x}$, maka persamaan diferensial biasa tersebut bukan merupakan persamaan diferensial biasa eksak. Persamaan diferensial biasa tersebut dapat dijadikan persamaan diferensial biasa eksak dengan menggandakan persamaan diferensial biasa tersebut dengan suatu faktpr integrasi. Faktor integrasi dapat ditentukan melalui:

1. Jika $\dfrac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}}{N} = f(x)$ (fungsi dari x saja), maka faktor integrasi $= e^{\int f(x)\,dx}$
2. Jika $\dfrac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}}{M} = -g(y)$ (fungsi dari y saja), maka faktor integrasi $= e^{\int g(y)\,dy}$
3. Mencari bentuk persamaan dengan analitik

Tabel 2.1: Mencari bentuk persamaan dengan analitik

Bentuk persamaan	Faktor Integrasi	Differensial Eksak
$x\,dy - y\,dx$	$\frac{1}{x^2}$	$\frac{x\,dy - y\,dx}{x^2} = d(\frac{y}{x})$
$x\,dy - y\,dx$	$\frac{1}{y^2}$	$\frac{x\,dy - y\,dx}{y^2} = -d(\frac{x}{y})$
$x\,dy - y\,dx$	$\frac{1}{xy}$	$\frac{dy}{y} - \frac{dx}{x} = d(\ln\frac{y}{x})$
$x\,dy - y\,dx$	$\frac{1}{x^2+y^2}$	$\frac{\frac{x\,dy - y\,dx}{x^2}}{1+(\frac{y}{x})^2} = d(\arctan\frac{y}{x})$
$x\,dy + y\,dx$	$\frac{1}{x^2+y^2}$	$\frac{x\,dy + y\,dy}{x^2+y^2} = d\left\{\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)\right\}$

Contoh kasus persamaan diferensial biasa yang dapat diselesaikan dengan faktor integrasi:

1. $(2y - 3x)\,dx + x\,dy = 0$

   $\frac{\partial M}{\partial y} = 2$, $\frac{\partial N}{\partial x} = 1$ (non-eksak)

   $$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = \frac{2-1}{x} = \frac{1}{x} = f(x)$$

   Faktor integrasi $= e^{f(x)\,dx} = e^{\frac{1}{x}} = e^{\ln x} = x$ (kalikan faktor integrasi dengan persamaan)

   $(2xy - 3x^2)\,dx + x^2\,dy = 0$

   $\frac{\partial M}{\partial y} = 2x$, $\frac{\partial N}{\partial x} = 2x$ (eksak)

   $2xy\,dx + x^2\,dy - 3x^2\,dx = 0$

   $d(x^2y) - 3x^2\,dx = 0$

   $\int d(x^2y) - \int 3x^2\,dx = \int 0$

   $x^2y - x^3 = C$

2. $(x^2 - 2y)\,dx + 2x\,dy = 0$

   $2(x\,dy - y\,dx) + x^2\,dx = 0$

   Faktor integrasi $= \frac{1}{x^2}$

   $\frac{2(x\,dy - y\,dx)}{x^2} + dx = 0$

   $2d(\frac{y}{x}) + dx = 0$

   $2\int d(\frac{y}{x}) + \int dx = \int 0$

   $2\frac{y}{x} + x = C$

$2y + x^2 = Cx$

$y = \dfrac{Cx - x^2}{2}$

3. $x\,dy - y\,dx = 2xy^2\,dx$

   Faktor integrasi $= \dfrac{1}{y^2}$ (kalikan faktor integrasi dengan persamaan)

   $\dfrac{x\,dy - y\,dx}{y^2} - 2x\,dx = 0$

   $-d(\dfrac{x}{y}) - 2x\,dx = 0$

   $-\int d(\dfrac{x}{y}) - \int 2x\,dx = \int 0$

   $-\dfrac{x}{y} - x^2 = C$

   $-x - x^2y = C$

2.1.3.1.6 Persamaan Diferensial Linier Orde Satu

Suatu persamaan diferensial biasa dikatakan linier apabila persamaan tersebut dapat ditulis dalam bentuk:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x) \tag{2.12}$$

atau

$$y' + Py = Q \tag{2.13}$$

, di mana P dan Q merupakan fungsi x saja. Untuk menyelesaikan persamaan diferensial ini dapat menggunakan tiga metode. Metode-metode tersebut adalah:

1. Metode Langrange

   Pertama-tama ambil:

   $\dfrac{dy}{dx} + P(x)y = 0$ atau $\dfrac{dy}{y} + P(x)\,dx = 0$

   $\int \dfrac{dy}{y} + \int P(x)\,dx = 0$

   $\ln y + \int P(x)\,dx = \ln C$

   $\dfrac{y}{C} = e^{-\int P(x)\,dx}$

   $y = Ce^{-\int P(x)\,dx}$

   Pandang C sebagai fungsi dari x, yakni:

   $y = C(x)e^{-\int P(x)\,dx}$

   sehingga:

$\frac{dy}{dx} = C'(x)e^{-\int P(x)\,dx} - P(x)C(x)e^{-\int P(x)\,dx}$

Substitusikan ke dalam persamaan 2.12, maka diperoleh:

$C'(x)e^{-\int P(x)\,dx} - P(x)C(x)e^{-\int P(x)\,dx} + e^{-\int P(x)\,dx} = Q(x)$

$C'(x)e^{-\int P(x)\,dx} = Q(x)$

$C'(x) = e^{-\int P(x)\,dx}Q(x)$

Maka: $\int Q(x)e^{-\int P(x)\,dx} + C$

Penyelesaian persamaan diferensial linier orde satu dengan metode Lagrange adalah:

$$e^{-\int P(x)\,dx}\left\{\int Q(x)e^{-\int P(x)\,dx}\,dx + C\right\} \tag{2.14}$$

2. Metode Bernoulli

Dari persamaan 2.12, misalkan $y = u.v$, di mana u dan v merupakan fungsi dari x, maka persamaan 2.12 menjadi:

$y' = u'v + uv'$

$u'v + uv' + P(x)uv = Q(x)$

$v(u' + P(x)u) + uv' = Q(x)$

Ambil $u' + P(x)u = 0$, maka $Q(x)$, sehingga:

$\frac{u'}{u} = -P(x)$

$\frac{\frac{du}{dx}}{u} = -P(x)$

$\frac{du}{dx} = -P(x)u$

$\int \frac{du}{u} = -\int P(x)\,dx$

$\ln u = -\int P(x)\,dx$

$u = e^{-\int P(x)\,dx}$

Dari $uv' = Q(x)$ atau $v' = \frac{Q(x)}{u}$, diperoleh:

$v' = Q(x)e^{-\int P(x)\,dx}$

' $v = \int Q(x)e^{-\int P(x)\,dx}\,dx + C$

Penyelesaian persamaan diferensial linier orde satu dengan metode Bernoulli adalah:

$$y = uv = e^{-\int P(x)\,dx}\left\{ \int Q(x)e^{-\int P(x)\,dx}\,dx + C \right\} \tag{2.15}$$

3. Metode Faktor Integrasi

Persamaan 2.12 dapat ditulis ulang sebagai:

$\left\{ P(x)y - Q(x) \right\} dx + dy = 0$

Terlihat bahwa:

$M(x,y) = P(x)y - Q(x)$

$My = \dfrac{\partial M}{\partial y} = P(x)$ dan $N(x,y) = 1$, sehingga $Nx = \dfrac{\partial N}{\partial x} = 0$

Akibatnya $\dfrac{My - Nx}{N} = \dfrac{P(x) - 0}{1} = P(x)$ hanya tergantung pada x saja, maka faktor integrasi $F = e^{-\int P(x)\,dx}$. Setelah persamaan 2.12 dikalikan dengan faktor integrasi ini, maka persamaan 2.12 menjadi:

$e^{-\int P(x)\,dx}\left\{ \dfrac{dy}{dx} + P(x)y \right\} = Q(x)e^{-\int P(x)\,dx}$

$\dfrac{d}{dx} = \left\{ e^{-\int P(x)\,dx} \right\} = Q(x)e^{-\int P(x)\,dx}$

$\int e^{-\int P(x)\,dx} = \int Q(x)e^{-\int P(x)\,dx}$

Penyelesaian persamaan diferensial linier orde satu dengan metode faktor integrasi adalah:

$$y = e^{-\int P(x)\,dx}\left\{ \int Q(x)e^{-\int P(x)\,dx}\,dx + C \right\} \tag{2.16}$$

Contoh-contoh kasus persamaan diferensial biasa linier:

1. $\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{2}{x+1}y = (x+1)^3$

   $P(x) = \dfrac{2}{x+1}$, $Q(x) = (x+1)^3$

   $\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{2}{x+1}y = 0$

   $\dfrac{dy}{y} - \dfrac{2}{x+1}\,dx = 0$

   $\int \dfrac{dy}{y} - \int \dfrac{2}{x+1}\,dx = \int 0$

   $\ln y - 2\ln(x+1) = \ln C$

   $y = C(x+1)^2$

Pandang C fungsi dari x, yakni $y = C(x)(x+1)^2$, kemudian differensialkan terhadap x, hingga diperoleh:

$$\frac{dy}{dx} = C'(x)(x+1)^2 + 2C(x)(x+1)$$

$$C'(x)(x+1)^2 + 2C(x)(x+1) - \frac{2}{x+1}C(x)(x+1)^2 = (x+1)^3$$

$$C'(x)(x+1)^2 = (x+1)^3$$

$$C'(x) = x+1$$

$$C(x) = \int(x+1)\,dx = \frac{1}{2}x^2 + x + C$$

$$y = (x+1)^2(\frac{1}{2}x^2 + x + C)$$

Jawab persamaan dengan rumus persamaan 2.14:

di mana,

$$P(x) = -\frac{2}{x+1}$$

Penyelesaian persamaan diferensial:

$$\int P(x)\,dx = -2\ln|x+1| = \ln|x+1|^{-2}$$

$$y = e^{\ln|x+1|^{-2}}\left\{\int(x+1)^3 e^{ln|x+1|^{-2}}\,dx + C\right\}$$

$$y = (x+1)^2\left\{\int(x+1)^3(x+1)^{-2}\,dx + C\right\}$$

$$y = (x+1)^2\left\{\int(x+1)\,dx + C\right\}$$

$$y = (x+1)^2(\frac{1}{2}x^2 + x + C)$$

2. $x\frac{dy}{dx} - 2y = x^3\cos 4x$

$$\frac{dy}{dx} - \frac{2}{x} = x^2\cos 4x$$

$$P(x) = -\frac{2}{x}\ ,\ Q(x) = x^2\cos 4x$$

$$\int P(x)\,dx = -\int\frac{2}{x}\,dx = -2\ln x$$

Faktor integrasi $= e^{-2\ln x} = x^{-2}$ (kalikan persamaan diferensial dengan faktor integrasi)

$$x^{-2}\frac{dy}{dx} - 2x^3y = \cos 4x$$

$$\int d(x^{-2}y) = \int\cos 4x$$

$$x^{-2}y = \frac{1}{4}\sin 4x + C$$

$y = \frac{x^2}{4}\sin 4x + Cx^2$

2.1.3.1.7 Persamaan Diferensial Bernoulli

Suatu persamaan diferensial berbentuk:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n \tag{2.17}$$

untuk $n \in R$ dan $n \notin 1$ dinamakan persamaan diferensial biasa Bernoulli. Untuk menentukan penyelesaian umumnya, dilakukan transformasi $v = y^{1-n}$. Dari transformasi ini diperoleh:

$$\frac{dv}{dx} = (1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx}$$

atau

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1-n}y^n\frac{dv}{dx}$$

Apabila persamaan 2.17 dikalikan dengan y^{-n} diperoleh:

$y^{-n}\frac{1}{1-n}y^n\frac{dv}{dx} + P(x)v = Q(x)$

$\frac{1}{1-n}\frac{dv}{dx} + P(x)v = Q(x)$

$\frac{dv}{dx} + (1-n)P(x)v = (1-n)Q(x)$ (persamaan diferensial biasa linier orde satu)

Contoh-contoh kasus persamaan diferensial biasa Bernoulli:

1. $\frac{dy}{dx} - y = xy^5$

   Kalikan dengan y^{-5}

   $y^{-5}\frac{dy}{dx} - y^{-4} = x$

   Gunakan transformasi $y^{-4} = v$, diperoleh:

   $-4y^{-5}\frac{dy}{dx} = \frac{dv}{dx}$

   $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{4}y^5\frac{dv}{dx}$ (substitusikan ke persamaan)

   $y^{-5}\left\{-\frac{1}{4}y^5\frac{dv}{dx}\right\} - v = x$

   $\frac{dv}{dx} + 4v = -4x$

   $P(x) = 4$, $Q(x) = -4x$

   Faktor integrasi $= e^{\int P(x)\,dx} = e^{4\,dx} = e^{4x}$

   $e^{4x}.v = -4\int e^{4x}.x\,dx + C$

   $e^{4x}.y^{-4} = -xe^{4x} + \frac{1}{4}$

$\frac{1}{y^4} = -x + \frac{1}{4} + Ce^{-4x}$

2. $x\frac{dy}{dx} + y + xy^3$

   Kalikan dengan x

   $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = y^3$ (kalikan dengan y^{-3})

   $y^{-3}\frac{dy}{dx} + \frac{y^{-2}}{x} = 1$

   Misalkan $y^{-2} = v$, maka:

   $\frac{dv}{dx} = -2y^{-3}\frac{dy}{dx}$

   $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2}y^3\frac{dv}{,dx}$ (substitusikan ke persamaan)

   $y^{-3}\left\{-\frac{1}{2}y^3\frac{dv}{dx}\right\} + \frac{y^{-2}}{x} = 1$

   $-\frac{1}{2}\frac{dy}{dx} + \frac{v}{x} = 1$

   $\frac{dv}{dx} - 2\frac{v}{x} = -2$

   Terlihat bahwa $P(x) = -\frac{2}{x}$, sehingga $\int P(x)\,dx = -\int \frac{2}{x}\,dx = -2\ln x$

   $v = e^{-\ln x^{-2}}\left\{\int -2e^{\ln x^{-2}}\,dx + C\right\}$

   $v = x^2\left\{\int -2x^2\,dx + C\right\}$

   $v = x^2.(2x^{-1} + C)$

   $v = 2x + Cx^2$

   $y^{-2} = 2x + Cx^2$

2.1.3.1.8 Masalah Nilai Awal

Dari subbab 2.1.3.1.1 sampai dengan 2.1.3.1.7 , setiap persamaan diferensial biasa hanya dapat ditemukan penyelesaian (solusi) umumnya, yaitu suatu penyelesaian yang mengandung sembarang konstanta. Akan tetapi untuk sebagian besar penerapan di bidang fisika, kimia, biologi, dan lain-lain yang membutuhkan ketepatan nilai angka hasil fungsi, persamaan harus memiliki suatu syarat nilai yang telah ditetapkan terlebih dahulu. Syarat nilai tersebut dinamakan nilai awal ($y(x_0) = y_0$) atau syarat awal yang digunakan untuk menentukan penyelesaian khusus, yang diperoleh dari penylesaian umum dengan cara memasukkan nilai awalnya. Dengan demikian, konstanta sembarang tidak ada lagi dan konstanta sembarang tersebut dapat diganti dengan suatu nilai yang spesifik.

Contoh persamaan diferensial dengan nilai awal adalah sebagai berikut:

1. $y' = \frac{y}{x} + \frac{2x^3\cos(x^2)}{y}$, dengan nilai awal $= y(\sqrt{\pi}) = 0$

   Misalkan $u = \frac{y}{x}$, maka $y = xu$, sehingga $y = xu' + u$

Sehingga persamaan menjadi:

$xu' + u = u + \dfrac{2x^3\cos(x^2)}{y} = \dfrac{2x^3\cos(x^2)}{u}$

$uu' = 2x\cos(x^2)$

$\int u du = \int 2x\cos(x^2)\,dx$

$\dfrac{1}{2}u^2 = \sin(x^2) + C$ (subsitusikan $u = \dfrac{y}{x}$)

$y = ux = x\sqrt{2\sin(x^2) + 2C}$

Dari nilai $y(\sqrt{\pi}) = 0$ artinya $y = 0$ dan $x = \sqrt{\pi}$, masukkan ke solusi umum persamaan:

$\sqrt{\pi}.\sqrt{2\sin\pi + 2C} = 0$

$\sqrt{\pi}.\sqrt{2.0 + 2C} = 0$

$C = 0$

Jadi, penyelesaian khusus persamaan diferensial adalah $y = x\sqrt{2\sin(x^2)}$

2. $x^2y' + 2xy - x + 1 = 0$, dengan nilai awal $y(1) = 0$

   $x^2\dfrac{dy}{dx} + 2xy - x + 1 = 0$

   $x^2\,dy + 2xy\,dx = (x-1)\,dx$

   Sederhanakan menjadi $d(x^2y) = (x-1)\,dx$

   $\int d(x^2y) = \int (x-1)\,dx$

   $x^2y = \dfrac{1}{2}x^2 - x + C$

   $\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{x} + \dfrac{C}{x^2}$

   Dari nilai awal $y(1) = 0$, maka:

   $\dfrac{1}{2} - 1 + C = 0$

   $C - \dfrac{1}{2} = 0$

   $C = \dfrac{1}{2}$

   Jadi, penyelesaian khusus persamaan diferensial adalah $y = \dfrac{1}{2} - \dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{2x^2}$

Sub-bab 2.1.3.0.1 sampai dengan 2.3.1.0.9 merupakan persamaan diferensial biasa homogen. Pada sub-bab ini akan dibahas persamaan diferensial biasa non-homogen:

2.1.3.2 Persamaan Diferensial Biasa Linier

Suatu persamaan diferensial biasa linier orde n dapat ditulis dalam bentuk:

$$a_n(x)y^n + a_(n-1)(x)y^{n-1} + ... + a_1(x)y' + a_0(x)y = r(x) \tag{2.18}$$

Koefisien-koefisien $a_n(x), a_(n-1)(x), ..., a_0(x)$ dan $r(x)$ merupakan fungsi-fungsi yang kontinu dan koefisien yang pertama yaitu $a_n(x) \neq 0$. Apabila fungsi $r(x)$ identik dengan nol ($r(x) = 0$), maka persamaan diferensial biasa tersebut disebut persamaan diferensial biasa homogen, sedangkan apabila fungsi $r(x) \neq 0$ disebut persamaan diferensial biasa non-homogen. Apabila koefisien-koefisien $a_n(x), a_(n-1)(x), ..., a_0(x)$ adalah konstan (tetap), maka dinamakan persamaan biasa dengan koefisien konstanta dan apabila koefisien-koefisien $a_n(x), a_(n-1)(x), ..., a_0(x)$ adalah tidak konstan (tidak tetap), maka dinamakan persamaan biasa dengan koefisien konstanta peubah. Contoh-contoh persamaan diferensial biasa linier:

1. $xy' = 2xy = x^2$ (persamaan diferensial biasa linier non-homogen orde satu dengan koefisien konstanta)
2. $y'' + 4y = e^x \sin x$ (persamaan diferensial biasa linier non-homogen orde dua dengan koefisien konstanta)
3. $y'' + 2y' + 3y = \cos x$ (persamaan diferensial biasa linier non-homogen orde satu dengan koefisien konstanta)
4. $y^{(4)} - y = 0$ (persamaan diferensial biasa linier homogen orde empat dengan koefisien konstanta)
5. $y''' - y'' - y' + y = 0$ (persamaan diferensial biasa linier homogen orde satu dengan koefisien konstanta)

Suatu persamaan diferensial biasa linier orde dua dikatakan linier apabila persamaan diferensial biasa tersebut dapat ditulis dalam bentuk:

$$ay'' + by' + cy = r(x) \tag{2.19}$$

di mana a, b, dan c atau:

$$a\frac{d^2y}{dx^2} + b\frac{dy}{dx} + cy = r(x)$$

Apabila $r(x) = 0$ maka persamaan diferensial merupakan persamaan diferensial biasa linier homogen orde dua, namun apabila $r(x) \neq 0$, maka persamaan diferensial merupakan persamaan diferensial biasa non-homogen linier orde dua.

Bentuk persamaan diferensial biasa linier orde dua homogen adalah:

$$a_2y'' + a_1y' + a_0y = 0 \tag{2.20}$$

atau:

$$a_2\frac{d^2y}{dx^2} + a_1\frac{dy}{dx} + a_0y = 0$$

, di mana a_2, a_1 dan a_0 merupakan konstanta. Metode untuk memudahkan penyelesaian persamaan diferensial biasa jenis ini adalah dengan menggunakan operator D, yakni $D = \frac{d}{dx}$, sehingga $Dy = \frac{dy}{dx}$. Dengan demikian persamaan diferensial dapat ditulis menjadi:

$$(a_2D^2 + a_1D + a_0)y = 0 \tag{2.21}$$

Jika persamaan 2.21 difaktorkan, maka diperoleh:

$$(D-\alpha)(D-\beta)=0$$

di mana α dan β merupakan konstanta.
Langkah-langkah penyelesaian selanjutnya adalah sebagai berikut:

Misalkan $(D-\alpha)y=z$, diperoleh:

$$(D-\alpha)z=0$$
$$Dz-\alpha z=0$$

Sehingga diperoleh:

$$\frac{dz}{dx}-\alpha z=0$$
$$\frac{dz}{z}-\alpha\,dx$$

Dengan pengintegralan diperoleh:

$$\int\frac{dz}{z}-\int\alpha\,dx=\int 0$$
$$\ln z-\alpha x=\ln C$$
$$\ln(\frac{z}{C})=\alpha x$$
$$\frac{z}{C}=e^{\frac{\alpha}{x}}$$
$$z=Ce\frac{\alpha}{x}$$

Sehingga diperoleh:

$$(D-\beta)y=Ce^{\frac{\alpha}{x}}$$
$$\frac{dy}{dx}-\beta y=0$$

Dengan pengintegralan diperoleh:

$$\int\frac{dy}{dx}=-\int\beta\,dx=\int 0$$
$$\ln y-\beta x=\ln C_1$$
$$\ln(\frac{y}{C_1})=\beta x$$
$$\frac{y}{C_1}=e^{\frac{\beta}{x}}$$
$$y=C_1e^{\frac{\beta}{x}}$$

Pandang C_1 adalah fungsi dari x. yaitu $C_1=C_1(x)$, sehingga $y=C_1(x)^{\beta x}$. Jadi $\frac{dy}{dx}=C_1(x)e^{\beta x}+C_1(x)\beta e^{\beta x}$, dan substitusikan pada $\frac{dy}{dx}-\beta y=Ce^{\alpha x}$ sehingga diperoleh:

$$C_1'(x)e^{\beta x}+C_1(x)\beta e^{\beta x}-\beta C_1(x)e^{\beta x}=Ce^{\alpha x}$$

Bentuk ini disederhanakan menjadi:

$$C_1(x) = \int Ce^{(\alpha-\beta)}\,dx + k$$

$$C_1(x) = \frac{C}{\alpha-\beta}e^{(\alpha-\beta)} + k$$

Tulis $(\frac{C}{\alpha-\beta}) = k_0$ sehingga $C_1(x) = k_0e^{(\alpha-\beta)} + k$. Jadi penyelesaiannya adalah:

$y = (k_0e^{(\alpha-\beta)} + k)e^{\beta x}$

$k_0e^{(\alpha-\beta)x}e^{\beta x} + ke^{\beta x}$

$k_0e^{\alpha x} + ke^{\beta x}$

Contoh soal-soal persamaan diferensial linier homogen adalah:

1. $y'' + 5y' + 6y = 0$

   Tulis ulang persamaan diferensial menjadi:

   $(D^2 + 5D + 6)y = 0$

   $(D + 2)(D + 3)y = 0$

   Diperoleh akar-akar:

   $D_1 = \alpha = -2$ dan $D_2 = \beta = -3$

   Penyelesaian persamaan diferensial:

   $y = k_0e^{-2x} + ke^{-3x}$

2. $y'' + y' - 2y = 0$

   Tulis ulang persamaan diferensial menjadi:

   $(D^2 + D - 2)y = 0$

   $(D - 1)(D + 2)y = 0$

   Diperoleh akar-akar:

   $D_1 = \alpha = 1$ dan $D_2 = \beta = -2$

   Penyelesaian persamaan diferensial:

   $y = k_0e^{x} + ke^{-2x}$

3. $4\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} + y = 0$

   Tulis ulang persamaan diferensial menjadi:

$(4D^2 - 5D + 1)y = 0$

$(4D - 1)(D - 1)y = 0$

Diperoleh akar-akar:

$D_1 = \alpha = \dfrac{1}{4}$ dan $D_2 = \beta = 1$

Penyelesaian persamaan diferensial:

$y = k_0 e^{\frac{x}{4}} + ke^x$

Cara lain untuk memperoleh penyelesaian persamaan diferensial biasa homogen orde dua dengan koefisien konstanta adalah sebagai berikut:

Panadang persamaan diferensial yang berbentuk:

$$a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$$

dengan a_0, a_1, dan a_2 adalah konstanta sembarang. Jika dimisalkan m adalah akar persamaan karakteristik:

$$a_0 m^2 + a_1 m + a_2 = 0$$

,

maka akar-akar karakteristiknya dapat diselesaikan dengan rumus a, b, c untuk persamaan kuadrat, yaitu:

$$m_1 = \frac{1}{2a_0}\left\{ -a_1 + \sqrt{(a_1)^2 - 4a_0a_2} \right\} \tag{2.22}$$

$$m_2 = \frac{1}{2a_0}\left\{ -a_1 - \sqrt{(a_1)^2 - 4a_0a_2} \right\} \tag{2.23}$$

Karena a_0, a_1, dan a_2 adalah bilangan riil sehingga akar-akar kemungkinannya mempunyai tiga kemungkinan kasus, yaitu:

1. Dua akar riil berbeda
   Kasus ini timbul karena diskriminan (D) dari persamaan karakteristiknya adalah bilangan positif atau $D < 0$, yakni: $(a_1)^2 - 4a_0.a_2 > 0$, sehingga akar-akar kuadratnya adalah bilangan riil dan berbeda. Jadi penyelesaian umum persamaan diferensialnya adalah:

$$y = c_1 e^{m_1 x} + c_2 e^{m_2 x} \tag{2.24}$$

   , dengan c_1 dan c_2 adalah konstanta sembarang.

2. Dua akar riil sama
   Kasus ini timbul karena diskriminan (D) dari persamaan karakteristiknya sama dengan nol atau $D = 0$, yakni: $(a_1)^2 - 4a_0.a_2 = 0$, sehingga akar-akar kuadratnya adalah $m_1 = m_2 == \dfrac{1}{2a_0}a_1$. Jadi penyelesaian umum persamaan diferensialnya adalah:

$$y = (c_1 + c_2 x)e^{mx} \tag{2.25}$$

, dengan c_1 dan c_2 adalah konstanta sembarang dan $m_1 = m_2 = m$.

3. Dua akar kompleks *conjugate*
   Kasus ini timbul karena diskriminan (D) dari persamaan karakteristiknya adalah negatif atau $D < 0$, yakni: $(a_1)^2 - 4a_0.a_2 < 0$, sehingga akar-akar kuadratnya adalah $m_1 = -\frac{1}{2a_0}a_1 + i\omega$ dan $m_1 = -\frac{1}{2a_0}a_1 - i\omega$, dengan $\omega = \sqrt{a_0.a_2 - \frac{1}{4}(a_1)^2}$. Jadi penyelesaian umum persamaan diferensialnya adalah:

$$y = e^{-\frac{1}{2a_0}a1_x}(c_1\cos(\omega x) + c_2\sin(\omega x)) \tag{2.26}$$

   , dengan c_1 dan c_2 adalah konstanta sembarang.

Contoh kasus-kasus persamaan diferensial biasa linier homogen orde dua adalah sebagai berikut:

1. $y'' - y' - 6y = 0$

   Misalkan m, adalah akar-akar persamaan karakteristik, sehingga diperoleh persamaan karakteristik:

   $m^2 - m - 6 = 0$

   $(m - 3)(m + 2) = 0$

   Akar-akar persamaan:

   $m_1 = 3$ dan $m_2 = -2$

   Penyelesaian umum persamaan diferensial adalah:

   $y = c_1e^{3x} + c_2e^{-2x}$

2. $y'' - 14y' + 49y = 0$

   Misalkan m, adalah akar-akar persamaan karakteristik, sehingga diperoleh persamaan karakteristik:

   $m^2 - 14m + 49 = 0$

   $(m + 7)(m + 7) = 0$

   Akar-akar persamaan:

   $m_1 = -7$ dan $m_2 = -7$

   Penyelesaian umum persamaan diferensial adalah:

   $y = c_1e^{-7x} + c_2xe^{-7x}$

3. $y'' - 2y' + 10y = 0$

Misalkan m, adalah akar-akar persamaan karakteristik, sehingga diperoleh persamaan karakteristik:

$m^2 - 2m + 10 = 0$

Cek diskriminan persamaan:

$D = b^2 - 4ac = 4 - 40 = -36$

$\omega = \sqrt{a_0.a_2 - \frac{1}{4}(a_1)^2} = \sqrt{10-1} = \sqrt{9} = \pm 3$

Akar-akar persamaan:

$m_1 = -\frac{1}{2a_0}a_1 - i\omega = 1 + 3i$ dan $m_1 = -\frac{1}{2a_0}a_1 - i = 1 - 3i\omega$

Penyelesaian umum persamaan diferensial adalah:

$y = e^x(c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x)$

2.1.3.3 Persamaan Diferensial Biasa Linier Orde Dua Non-Homogen dengan Koefisien Konstanta

Bentuk umum persamaan diferensial biasa linier orde dua non-homogen dengan koefisien konstanta adalah:

$$a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = G(x) \tag{2.27}$$

, dengan a_0, a_1, dan a_2 merupakan konstanta tetap $G(x) \neq 0$. Misal y_h merupakan penyelesaian persamaan diferensial biasa homogen yang telah dibahas pada subbab 2.2.2.2.2, dan y_p adalah penyelesaian non-homogen-nya. Penyelesaian umum persamaan diferensial biasa linier orde dua non-homogen adalah:

$$y = y_h + y_p \tag{2.28}$$

Untuk mencari y_p dapat digunakan metode:

1. Koefisien tak tentu
2. Variasi parameter

2.1.3.3.0.1 Koefisien Tak Tentu Untuk menyelesaikan kasus persamaan diferensial pada persamaan 2.28 dengan menggunakan metode koefisien tak tentu dapat dibagi menjadi beberapa kasus, yaitu:

1. Kasus 1

   Jika bentuk fungsi $G(x)$ pada persamaan diferensial merupakan fungsi eksponensial, yaitu Ee^{ax}, maka y_p adalah fungsi berbentuk $x^k(Ae^{ax})$, dengan k adalah banyaknya akar yang sama pada persamaan diferensial homogen-nya dan A merupakan koefisien tak tentu yang dicari dengan cara substitusi y_p dan turunan y_p dua kali terhadap x ke dalam persamaan. Jika $G(x) = Ee^{ax}$, maka persamaan diferensial menjadi:

$$a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = Ee^{ax} \tag{2.29}$$

Misalkan $y_p = Ae^{ax}$ dan turunkan y_p dua kali terhadap x, diperoleh:

$$y_p' = Aae^{ax} \tag{2.30}$$

$$y_p'' = Aa^2e^{ax} \tag{2.31}$$

Substitusikan y_p, y_p' dan y_p'' pada persamaan 2.29 diperoleh:

$$a_0(Aa^2e^{ax}) + a_1(Aae^{ax}) + a_2(Ae^{ax}) = Ee^{ax} \tag{2.32}$$

,
yang kemudian bagi kedua ruas dengan e^{ax}, maka didapat persamaan:

$$a_0Aa^2 + a_1Aa + a_2A = E$$
$$A(a_0a^2 + a_1a + a_2) = E$$

Sehingga diperoleh:

$$A = \frac{E}{a_0a^2 + a_1a + a_2} \tag{2.33}$$

Dari persamaan 2.30, diperoleh bahwa:

$$a_0a^2 + a_1a + a_2 = 0$$

Maka penyelesaian non-homogen kasus 1 adalah:

$$y_p = x^k(Ae^{ax}) \tag{2.34}$$

, dengan k banyaknya akar yang sama pada persamaan diferensial homogen-nya dan a adalah akar persamaan karakteristiknya. Jadi penyelesaian umum persamaan diferensial berbentuk:

$$y = y_h + y_p$$

$$y = c_1y_1 + c_2y_2 + x^k(Ae^{ax}) \tag{2.35}$$

, dengan c_1 dan c_2 adalah konstanta sembarang.

2. Kasus 2

Jika fungsi $G(x)$ pada persamaan diferensial berbentuk polinomial berderajat m, yaitu x^m, dengan $m \geq 0$, maka y_p dipilih berbentuk $x^k(A_0 + A_1x + ... + A_mx^m)$, dengan k adalah banyaknya akar yang sama pada persamaan diferensial homogen-nya. Jika $G(x) = b_0x^m + b_1x^{m-1} + ... + b_m$, persamaan diferensial menjadi:

$$a_0y'' + a_1y' + a_2y = b_0x^m + b_1x^{m-1} + ... + b_m \tag{2.36}$$

Untuk memperoleh penyelesaian persamaan diferensial non-homogen, dimisalkan:

$$y_p = A_0 + A_1x + ... + A_mx^m$$

dan diperoleh:

$$y_p' = mA_mx^{m-1} + ... + A_1 \tag{2.37}$$

$$y_p'' = m(m-1)A_mx^{m-2} + ... + 2A_2 \tag{2.38}$$

Substitusikan y_p, y_p' dan y_p'' pada persamaan 2.35 diperoleh:

Samakan koefisien ruas kiri dan ruas kanan, diperoleh:

$$a_2A_m = b_0$$

$$a_2A_(m-1) + ma_1A_m = b_1$$

$$a_2A_0 + a_1A_1 + 2a_0A_2 = b_m$$

sehingga didapat $A_m = \frac{a}{a_2}$, dengan $a_2 \neq 0$. Jika $a_2 = 0$ dan $a_1 \neq 0$, maka ruas kiri pada persamaan 2.39 menjadi polinomial berderajat $m-1$ dan tidak memenuhi persamaan 2.39. Untuk menjadikan $a_0y_p'' + a_1y_p'$ polinomial berderajat m dan penyelesaian tidak homogen y_p harus diubah menjadi polinomial berderajat $m+1$, sehingga:

$$y_p = x(A_0 + A_1x + ... + A_mx^m)$$

Jika $a_2 = 0$, maka ruas kiri pada persamaan 2.39 menjadi polinomial berderajat $m-2$, sehingga y_p berbentuk:

$$y_p = x^2(A_0 + A_1x + A - mx^m)$$

Jadi, penyelesaian persamaan diferensial non-homogen adalah:

$$y_p = x^k(A_0 + A_1x + ... + A_mx^m) \tag{2.39}$$

dengan k adalah banyaknya akar yang sama pada persamaan diferensial homogen-nya, dengan demikian penyelesaian umum persamaan diferensial adalah:

$$y = c_1y_1 + c_2y_2 + x^k(A_0 + A_1x + A_mx^m) \tag{2.40}$$

dengan c_1 dan c_2 konstanta sembarng, dan $A_0, A_1, ..., A_m$ merupakan koefisien tak tentu yang dicari dengan cara substitusi y_p dua kali terhadap x pada persamaan diferensial.

3. Kasus 3

Jika fungsi $G(x)$ pada persamaan diferensial berupa perkalian antar fungsi polinomial dengan fungsi eksponensialnya, yaitu x^me^{ax}, maka pilihan y_p berbentuk:

$$x^k(A_0 + A_1x + ... + A_mx^m)e^{ax} \tag{2.41}$$

dengan k adalah banyaknya akar yang sama pada persamaan diferensial homogen-nya. Jika $G(x) = (b_0x^m + b_1x^m + ... + b_m)e^{ax}$, maka persamaan diferensial menjadi:

$$a_0y'' + a_1y' + a_2y = (b_0x^m + b_1x^{m-1} + ... + b_m)e^{ax} \tag{2.42}$$

Misalkan:

$$y_p = (A_0 + A_1x + ... + A_mx^m)e^{ax}$$
$$y_p = e^{ax}u(x)$$

, dengan $u(x) = A_0 + A_1x + ... + A_mx^m$. Turunkan y_p dua kali terhadap x, diperoleh:

$$y_p' = e^{ax}(u'(x) + au(x)) \tag{2.43}$$

$$y_p'' = e^{ax}(u''(x) + 2au'(x) + a^2u(x)) \tag{2.44}$$

Substitusikan y_p, y_p', dan y_p'' pada persamaan 2.42 diperoleh:

$$a_0(u''(x)+2au'(x)+a^2u(x))+a_1(u'(x)+au(x))+a_2u(x) = (b_0x^m+b_1x^{m-1}+...+b_m)e^{ax} \tag{2.45}$$

$$a_0u''(x) + (2a_0a + a_1)u'(x) + (a_0a^2 + a_1a + a_2)u(x) = P_n(x) \tag{2.46}$$

, dengan $P_n(x) = (b_0x^m + b_1x^{m-1} + ...b_m)e^{ax}$. Jika $a_0a^2 + a_1a + a_2 \neq 0$, $u(x) = A_0 + A_1x + ... + A_mx^m$, sehingga penyelesaian persamaan 2.44 adalah:

$$y_p = e^{ax}(A_0 + A_1x + ... + A_,x^m) \tag{2.47}$$

Sedangkan jika $a_0a^2 + a_1a + a_2 = 0$ dan $2a_0a + a_1 = 0$, maka dalam hal ini:

$$u(x) = x^2(A_0 + A_1x + ... + A_mx^m)$$

, dikarenakan e^{ax} dan xe^{ax} adalah penyelesaian persamaan diferensial homogen-nya. Jadi penyelesaian persamaan diferensial non-homogen adalah:

$$y_p = x^k(A_0 + A_1x + ... + A_mx^m)e^{ax} \tag{2.48}$$

, dengan $A_0, A_1, ..., A_m$ adalah koefisien yang dicari dengan cara substitusi y_p dan turunkan y_p dia kali terhadap x pada persamaan 2.44. Dengan demikian, penyelesaian umum persamaan diferensial adalah:

$$y = y_h + y_p = c_1y_1 + c_2y_2 + x^k(A_0 + A_1x + ... + A_mx^m)e^{ax} \tag{2.49}$$

4. Kasus 4

Jika fungsi $G(x)$ pada persamaan diferensial berbentuk $x^m \sin Bx + x^n \cos Bx$. dengan m dan n masing-masing adalah derajat polinomial, maka y_p yang dipilih berbentuk:

$$y_(p1) = x^k \Big\{ (A_0 + A_1x + ... + A_mx^m)\cos Bx + (B_0 + B_1x + ... + B_mx^m)\sin Bx \Big\}$$

dan

$$y_(p2) = x^k \Big\{ (A_0 + A_1x + ... + A_nx^n)\cos Bx + (B_0 + B_1x + ... + B_nx^n)\sin Bx \Big\}$$

, dengan $A_0, A_1, ..., A_m$ dan $B_0, B_1, ..., B_n$ merupakan koefisien tak tentu yang dicari dengan cara substitusi y_p dan turunkan y_p dua kali terhadap x pada persamaan. Maka persamaan diferensial menjadi:

$$a_0y'' + a_1y' + a_2y = x^m \sin B_x + x^n \cos B_x \tag{2.50}$$

Untuk mencari penyelesaian partikulir persamaan 2.50, dimisalkan:

$$y_p = x^k \Big\{ (A_0 + A_1x + ... + A_sx^s)\cos Bx + (B_0 + B_1x + ... + B_sx^s)\sin Bx \Big\}$$

, dengan s adalah derajat polinomial m dan n. Dengan demikian penyelesaian umum peesamaan diferensial adalah:

$$y = y_h + y_p = c_1y_1 + c_2y_2 + y_p \tag{2.51}$$

5. Kasus 5

Jika fungsi $G(x)$ pada persamaan diferensial berbentuk $E_1 \cos Bx$ atau $E_2 \sin Bx$, dengan $B \neq 0$, maka y_p yang dipilih berbentuk $x^k(A_0 \cos Bx + B_0 \sin Bx)$, dengan A_0 dan B_0 koefisien tak tentu yang dicari dengan substitusi y_p dan turunkan y_p dua kali terhadap x kepada persamaan, maka persamaan menjadi:

$$a_0y'' + a_1y' + a_2y = E_1 \cos Bx \tag{2.52}$$

atau

$$a_0y'' + a_1y' + a_2y = E_2 \sin Bx \tag{2.53}$$

Untuk mencari penyelesaian persamaan 2.52 dan 2.53, dimisalkan $y_p = x^k = (A_0 \cos Bx + B_0 \sin Bx)$, dengan k adalah banyaknya akar yang sama pada persamaan diferensial homogennya. Jadi penyelesaian umum persamaan diferensialnya adalah:

$$y = c_1y_1 + c_2y_2 + x^k = (A_0 \cos Bx + B_0 \sin Bx) \tag{2.54}$$

,

dengan c_1 dan c_2 adalah konstanta sembarang.

6. Kasus 6

Jika $G(x)$ pada persamaan berbentuk $E_1e^{ax} \cos Bx$ atau $E_2e^{ax} \sin Bx$, dengan E_1, E_2 adalah konstanta yang tidak sama dengan nol, maka y_p yang dipilih berbentuk $x^k(A_0e^{ax} \cos Bx + B_0e^{ax}$.

Maka persamaan diferensial menjadi:

$$a_0y'' + a_1y' + a_2y = E_1e^{ax}\cos Bx \tag{2.55}$$

atau

$$a_0y'' + a_1y' + a_2y = E_2e^{ax}\sin Bx \tag{2.56}$$

Untuk mencari persamaan partikulir 2.55 dan 2.56 dimisalkan:

$$y_p = x^k(A_0e^{ax}\cos Bx + B_0e^{ax}\sin Bx)$$

Dengan demikiran penyelesaian umum persamaan diferensial adalah:

$$y = c_1y_1 + c_2y_2 + x^k(A_0e^{ax}\cos Bx + B_0e^{ax}\sin Bx) \tag{2.57}$$

k adalah banyaknya akar yang sama pada persamaan diferensial biasa homogen-nya dan A_0 dan B_0 adalah koefisien yang dicari dengan cara substitusi y_p dan turunkan y_p dua kali terhadap x kepada persamaan. Untuk lebih memudahkan dalam mencari penyelesaian persamaan diferensial biasa linier homogen dengan koefisien tak tentu, dapat dilihat pada tabel 2.2.

Dalam mencari penyelesaian persamaan diferensial biasa linier dengan metode koefisien tak tentu berlaku aturan-aturan sebagai berikut:

1. Aturan dasar

   Jika $G(x)$ pada persamaan diferensial merupakan salah satu fungsi yang terdapat di kolom pertama pada tabel 2.2, maka pilihlah fungsi y_p yang bersesuaian di kolom kedua, lalu tentukan koefisien tak tentu, lalu tentukan koefisien tak tentunya dengan cara substitusi y_p dan turunkan y_p dua kali terhadap x ke persamaan diferensialnya.

2. Aturan modifikasi

   Jika $G(x)$ pada persamaan diferensial merupakan bentuk penyelesaian persamaan diferensial biasa homogen, maka kalikan y_p yang dipilih dengan x^k, dengan k adalah banyaknya akar yang sama dengan persamaan diferensial biasa homogennya.

3. Aturan penjumlahan

   Jika $G(x)$ pada persamaan diferensial penjumlah fungsi-fungsi yang berasal dari beberapa baris pada kolom pertama pada tabel 2.2, maka pilihlah y_p yang berupa penjumlahan fungsi-fungsi dari baris yang bersesuaian pada kolom kedua.

Contoh-contoh kasus persamaan diferensial biasa linier orde dua non-homogen dengan koefisien konstanta dengan metode koefisien tak tentu:

1. $y'' - 3y' = 2x^2 + 1$

   Cari penyelesaian persamaan diferensial homogennya:

   $y'' - 3y' = 0$

Misalkan m adalah akar-akar karakteristik pada persamaan diferensial kasus nomor 1, maka persamaan karakteristiknya adalah:

$m^2 - 3m = 0$

$m(m-3) = 0$

$m_1 = 0$, $m_2 = 3$

Penyelesaian umum persamaan diferensial biasa homogen adalah:

$y_h = c_1 e^{0x} + c_2 e^{3x}$

$y_h = c_1 + c_2 e^{3x}$ (c_1 dan c_2 adalah konstanta sembarang)

Untuk mencari penyelesaian persamaan diferensial non-homogen (y_p), maka gunakan aturan dasar:

$y_p = x^k(A_0 + A_1 x + A_2 x^2)$

Karena $2x^2 + 1$ ditulis dalam bentuk penyelesaian persamaan diferensial homogen kasus nomor 1 dengan tidak ada akar yang sama, artinya $k = 1$, sehingga:

$y_p = x(A_0 + A_1 x + A_2 x^2)$

$= y_p' = A_0 x + A_1 x^2 + A_2 x^3$ (turunkan dua kali)

$y_p' = A_0 + 2A_1 x + 3A_2 x^2$

$y_p'' = 2A_1 + 6A_2 x$

Subtitusikan y_p, y_p', y_p'' ke persamaan kasus nomor 1, diperoleh:

$2A_1 + 6A_2 x - 3A_0 - 6A_1 x - 9A_2 x^2 = 2x^2 + 1$

Samakan koefisien ruas kiri dan kanan menjadi:

$2A_1 - 3A_0 = 1$

$-6A_1 - 6A_2 = 0$

$-9A_2 = 2$

Penyelesaian persamaan kasus nomor 1 adalah:

$A_2 = -\frac{2}{9}$, $A_1 = -\frac{2}{9}$, dan $A_0 = -\frac{13}{27}$

Penyelesaian persamaan diferensial biasa linier tidak homogen kasus nomor 1 adalah:

$y_p = -\frac{2}{9}x^3 - \frac{2}{9}x^2 - \frac{13}{27}x$

Penyelesaian umum persamaan kasus nomor 1 adalah:

$$y = y_h + y_p = c_1 + c_2e^{3x} - \frac{2}{9}x^3 - \frac{2}{9}x^2 - \frac{13}{27}x$$

2. $y'' - 5y'' + 6y = 4e^{2x}$

Cari penyelesaian persamaan diferensial homogennya:

$$y'' - 5y' + 6y = 0$$

Misalkan m adalah akar-akar karakteristik pada persamaan diferensial kasus nomor 2, maka persamaan karakteristiknya adalah:

$$m^2 - 5m + 6 = 0$$

$$(m-2)(m-3) = 0$$

$$m_1 = 2,\ m_2 = 3$$

Penyelesaian umum persamaan diferensial biasa homogen adalah:

$$y_h = c_1e^{2x} + c_2e^{3x}(c_1 \text{ dan } c_2 \text{ adalah konstanta sembarang})$$

Untuk mencari penyelesaian persamaan diferensial non-homogen (y_p), maka gunakan aturan modifikasi:

$$y_p = x^kAe^{2x}$$

Karena Ae^{2x} ditulis dalam bentuk penyelesaian persamaan diferensial homogen kasus nomor 2 dengan tidak ada akar yang sama, artinya $k = 1$, sehingga:

$$y_p = xAe^{2x} \text{ (turunkan dua kali)}$$

$$y_p' = 2Axe^{2x} + Ae^{2x}$$

$$y_p'' = 4Axe^{2x} + 4Ae^{2x}$$

Subtitusikan y_p, y_p', y_p'' ke persamaan kasus nomor 2, diperoleh:

$$4Axe^{2x} + 4Ae^{2x} - 5(2Axe^{2x} + Ae^{2x}) + 6Axe^{2x} = 4e^{2x}$$

$$4Axe^{2x} + 4Ae^{2x} - 10Axe^{2x} - 5Ae^{2x}) + 6Axe^{2x} = 4e^{2x}$$

$$-Ae^{2x} = 4e^{2x}$$

$$A = -4$$

Penyelesaian persamaan diferensial biasa linier tidak homogen kasus nomor 2 adalah:

$$y_p = -4xe^{2x}$$

Penyelesaian umum persamaan kasus nomor 2 adalah:

$y = y_h + y_p = c_1e^{2x} + c_2e^{3x} - 4xe^{2x}$

3. $y'' - 2y' + y = 7xe^x$

Cari penyelesaian persamaan diferensial homogennya:

$y'' - 2y' + y = 0$

Misalkan m adalah akar-akar karakteristik pada persamaan diferensial kasus nomor 2, maka persamaan karakteristiknya adalah:

$m^2 - 2m + 1 = 0$

$(m - 1)(m - 1) = 0$

$m_1 = 1$, $m_2 = 1$

Penyelesaian umum persamaan diferensial biasa homogen adalah:

$y_h = c_1e^x + c_2xe^x(c_1$ dan c_2 adalah konstanta sembarang)

Untuk mencari penyelesaian persamaan diferensial non-homogen (y_p), maka gunakan aturan penjumlahan:

$y_p = x^k(A_0 + A_1x)e^x$

Karena $7xe^x$ ditulis dalam bentuk penyelesaian persamaan diferensial homogen kasus nomor 3 dengan dua akar yang sama, artinya $k = 2$, sehingga:

$y_p = x^2(A_0 + A_1x)e^x$ (turunkan dua kali)

$y_p' = (2A_0x + 3A_1x^2)e^x + (A_0x^2 + A_1x^3)e^x$

$y_p'' = e^x.\left\{(A_0x^2 + A_1x^3) + (4A_0x + 6A_1x^2) + (2A_0 + 6A_1x)\right\}$

Subtitusikan y_p, y_p', y_p'' ke persamaan kasus nomor 3, diperoleh:

$4Axe^{2x} + 4Ae^{2x} - 5(2Axe^{2x} + Ae^{2x}) + 6Axe^{2x} = 4e^{2x}$

$4Axe^{2x} + 4Ae^{2x} - 10Axe^{2x} - 5Ae^{2x}) + 6Axe^{2x} = 4e^{2x}$

$-Ae^{2x} = 4e^{2x}$

$A = -4$

Penyelesaian persamaan diferensial biasa linier tidak homogen kasus nomor 3 adalah:

$y_p = -4xe^{2x}$

Penyelesaian umum persamaan kasus nomor 3 adalah:

$y = y_h + y_p = c_1e^{2x} + c_2e^{3x} - 4xe^{2x}$

4. $y'' + 2y' + 2y = 3e^{-x} + 4\cos x$

   Cari penyelesaian persamaan diferensial homogennya:

   $y'' + 2y' + 2y = 0$

   Misalkan m adalah akar-akar karakteristik pada persamaan diferensial kasus nomor 2, maka persamaan karakteristiknya adalah:

   $m^2 + 2m + 2 = 0$ (akar kompleks *conjugate*)

   $m_1 = -1 + i$, $m_2 = -1 - i$

   Penyelesaian umum persamaan diferensial biasa homogen adalah:

   $y_h = e^{-x}(c_1 \cos x + c_2 \sin x)$($c_1$ dan c_2 adalah konstanta sembarang)

   Untuk mencari penyelesaian persamaan diferensial non-homogen (y_p), maka gunakan aturan penjumlahan:

   $y_p = x^k(A_1e^{-x} + A_2 \cos x + A_3 \sin x)$

   Karena $3e^{-x} + 4\cos x$ bukan bentuk penyelesaian persamaan diferensial homogen kasus nomor 4 dan tidak ada akar yang sama, maka:

   $y_p = A_1e^{-x} + A_2 \cos x + A_3 \sin x$ (turunkan dua kali)

   $y_p' = -A_1e^{-x} - A_2 \sin x + A_3 \cos x$

   $y_p'' = A_1e^{-x} - A_2 \cos x - A_3 \sin x$

   Subtitusikan y_p, y_p', y_p'' ke persamaan kasus nomor 4, diperoleh:

   $A_1e^{-x} - A_2 \cos x - A_3 \sin x + 2(-A_1e^{-x} - A_2 \sin x + A_3 \cos x) + (A_1e^{-x} + A_2 \cos x + A_3 \sin x) = 3e^{-x} + 4\cos x$

   $A_1e^{-x} - A_2 \cos x - A_3 \sin x - 2A_1e^{-x} - 2A_2 \sin x + 2A_3 \cos x + A_1e^{-x} + A_2 \cos x + A_3 \sin x = 3e^{-x} + 4\cos x$

   $-A_2 \sin x + A_3 \cos x = 3e^{-x} + 4\cos x$

   Samakan koefisien ruas kiri dan kanan hasil substitusi menjadi:

   $A_1 = 3$

   $A_2 + 2A_3 = 4$

   $-2A_2 + A_3 = 0$

Penyelesaian persamaan kasus nomor 4 adalah:

$A_1 = 3,\ A_2 = \frac{4}{5}$, dan $A_3 = \frac{8}{5}$

Penyelesaian persamaan diferensial biasa linier tidak homogen kasus nomor 4 adalah:

$y_p = 3e^{-x} + \frac{4}{5}\cos x + \frac{8}{5}\sin x$

Penyelesaian umum persamaan kasus nomor 4 adalah:

$y = y_h + y_p = e^{-x}(c_1 \cos x + c_2 \sin x) + 3e^{-x} + \frac{4}{5}\cos x + \frac{8}{5}\sin x$

2.1.3.3.0.2 Variasi Parameter Jika fungsi $G(x)$ pada persamaaan diferensial bukan fungsi koefisien tak tentu, maka untuk mencari penyelesaian umum persamaan diferensial biasa non-homogen-nya dapat diselesaikan dengan menggunakan metode variasi parameter. Jika (y_1, y_2) merupakan himpunan penyelesaian fundamental dari persamaan diferensial biasa homogen orde dua, maka langkah-langkah yang digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial biasa linier orde dua dengan koefisien konstanta dengan metode menggunakan metode variasi parameter adalah sebagai berikut:

1. Menyelesaikan persamaan diferensial homogen-nya yaitu:

$$a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$$

, sehingga penyelesaian umum persamaan diferensial biasa homogen-nya adalah:

$$y_h = c_1 y_1 + c_2 y_2 \tag{2.58}$$

, dengan c_1 dan c_2 adalah konstanta sembarang dan y_1 dan y_2 adalah penyelesaian fundamental dari persamaan diferensial biasa homogen-nya.

2. Menggantikan konstanta-konstanta sembarang pada penyelesaian umum persamaan diferensial biasa homogen dengan fungsi-fungsi x sembarang, sehingga penyelesaian persamaan diferensial biasa homogen-nya adalah:

$$y_p = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x) \tag{2.59}$$

, dengan $u_1(x)$ dan $u_2(x)$ adalah dan $y_1(x)$ dan $y_2(x)$ adalah basis penylesaian persamaan diferensial biasa homogen-nya.

3. Jika y_p pada langkah 2 diturunkan terhadap x dua kali, maka diperoleh:

$$(u_1'(x)y_1(x) + u_1(x)y_1'(x)) + (u_2'(x)y_2(x) + u_2(x)y_2'(x))$$

Karena u_1 dan u_2 merupakan dua fungsi sembarang dari x, diperoleh:

$$(u_1'(x)y_1(x)) + (u_2'(x)y_2(x)) \tag{2.60}$$

sehingga diperoleh:

$$y_p' = (u_1(x)y_1'(x)) + (u_2(x)y_2'(x)) \tag{2.61}$$

dan

$$y_p'' = (u_1'(x)y_1'(x) + u_1(x) + y_1''(x)) + (u_2'(x)y_2(x) + u_2(x) + y_2''(x)) \tag{2.62}$$

4. Mensubstitusikan y_p , y_p' , dan y_p'' pada langkah 3 ke persamaan diferensial, diperoleh:

$$\begin{aligned}
&a_0\Big\{(u_1'(x) + y_1'(x) + u_1(x)y_1''(x)) + (u_2'(x) + y_2'(x) + u_2(x) + y_2''(x)\Big\}+\\
&a_1\Big\{(u_1(x) + y_1'(x) + u_2(x)y_2'(x))\Big\} + \Big\{a_2(u_1(x) + y_1(x) + u_2(x) + y_2(x)\Big\}\\
&= u_1(x)\Big\{a_0y_1''(x) + a_1y_1'(x) + a_2y_1(x)\Big\}+\\
&u_2(x)\Big\{a_0y_2''(x) + a_1y_2'(x) + a_2y_2(x)\Big\}+\\
&a_0(x)\Big\{u_1'(x)y_1'(x) + u_2'(x)y_2'(x)\Big\} = G(x)
\end{aligned} \tag{2.63}$$

Karena y_1 dan y_2 merupakan penyelesaian persamaan diferensial biasa homogen, mengakibatkan:

$$a_0y_1''(x) + a_1y_1'(x) + a_2y_1(x) = 0$$

dan

$$a_0y_2''(x) + a_1y_2'(x) + a_2y_2(x) = 0$$

Persamaan 2.63 menjadi:

$$a_0\{u_1'(x)y_1'(x) + u_2'(x)y_2'(x)\} = G(x) \tag{2.64}$$

5. Dari persamaan 2.60 pada langkah 3 dan persamaan 2.64 pada langkah 4 diperoleh sistem persamaan:

$$u_1'(x) + y_1(x) + u_2'(x) + y_2(x) = 0 \tag{2.65}$$

,

$$u_1'(x) + y_1(x) + u_2'(x) + y_2(x) = \frac{G(x)}{a_0} \tag{2.66}$$

6. Menyelesaikan sistem persamaan pada langkah 5, sehingga didapat $u_1'(x)$ dan $u_2'(x)$
7. Mengintegralkan $u_1'(x)$ dan $u_2'(x)$ pada langkah 6, diperoleh $u_1(x)$ dan $u_2(x)$
8. Mensubsititusikan $u_1(x)$ dan $u_2(x)$ ke y_p pada langkah 2, diperoleh persamaan 2.59 lagi.
9. Menjumlahkan penyelesaian umum persamaan diferensial biasa homogen dengan penyelesaian persamaan diferensial non-homogen, sehingga penyelesaian umum persamaan diferensial adalah:

$$y = y_h + y_p = c_1y_1 + c_2y_2 + u_1(x)y_1 + u_2(x)y_2 \tag{2.67}$$

Contoh-contoh kasus persamaan diferensial biasa linier orde dua non-homogen dengan koefisien konstanta dengan metode variasi parameter:

1. $2y'' - 4y' + 2y = x^{-1}e^x, x > 0$

   Langkah pertama selesaikan persamaan diferensial biasa homogennya:

   $2y'' - 4y' + 2y = 0$

   Persamaan karakteristiknya adalah:

   $2m^2 - 4m + 2 = 0$

   $2(m-1)^2 = 0$

   Akar-akar persamaan karakteristiknya adalah:

   $m_1 = 1$ dan $m_2 = 1$

   Penyelesaian umum persamaan diferensial biasa homogen kasus 1 adalah:

   $y_h = c_1e^x + c_2xe^x$ (c_1 dan c_2 adalah konstanta sembarang, sedangkan e^x dan xe^x adalah penyelesaian fundamental penyelesaian persamaan diferensial biasa homogen-nya)

   Langkah kedua, ganti c_1 dan c_2 pada penyelesaian umum persamaan diferensial biasa homogen-nya menjadi fungsi-fungsi x sembarang, sehingga penyelesaian persamaan diferensial biasa non-homogen-nya:

   $y_p = u_1(x)e^x + u_2(x)xe^x$

   Langkah ketiga, turunkan y_p pada penyelesaian umum persamaan diferensial biasa homogen-nya dua kali terhadap x, diperoleh:

   $y_p' = u_1'(x)e^x + u_1(x)e^x + u_2'(x)xe^x + u_2(x)\{xe^x + e^x\}$

   Kemudian dari hasil turunan penyelesaian umum persamaan diferensial biasa homogen terhadap x diperoleh:

   $u_1'(x)e^x + u_2'(x)xe^x = 0$

   , sehingga:

   $y_p' = u_1(x)e^x + u_2(x)\{xe^x + x\}$ (turunan pertama)

   $y_p'' = (u_1'(x)e^x + u_1(x)e^x) + (u_2'(x)\{xe^x + x\} + u_2(x)\{2e^x + xe^x\})$ (turunan kedua)

   Langkah keempat, substitusikan y_p , y_p' , dan y_p'' pada langkah 3 ke persamaan diferensial:

   $2\{u_1'(x) + u_1(x)e^x + u_2'(x)\{xe^x + e^x\} + u_2(x)\{2e^x + xe^x\}\}$

   $4\{u_1(x)e^x + u_2(x)\{xe^x + e^x\}\} + 2\{u_1(x)e^x + u_2(x)xe^x\}$

   $= 2\{u_1'(x)e^x + u_2'(x)\{xe^x + e^x\}\} = x^{-1}e^x$

$$\{u_1'(x)e^x + u_2''(x)\{xe^x + e^x\}\} = \frac{x^{-1}e^x}{2}$$

Langkah kelima, bentuk sistem persamaan dari hasil turunan penyelesaian umum persamaan diferensial biasa homogen terhadap x dan hasil substitusi y_p , y_p' , dan y_p'' pada langkah keempat:

$$u_1'(x)e^x + u_2'(x)xe^x = 0$$

$$u_1'(x)e^x + u_2'(x)\{xe^x + e^x\} = \frac{x^{-1}e^x}{2}$$

Langkah keenam, selesaikan sistem persamaan pada langkah keenam sehingga diperoleh:

$$u_1'(x) = -u_2'(x)x$$

Substitusikan penyelesaian sistem persamaan pada persamaan kedua dari langkah kelima, sehingga diperoleh:

$$-u_2'(x)x + u_2'(x)x + 1 = \frac{x^{-1}}{2}$$

Sederhanakan hasil substitusi penyelesaian sistem persamaan pada persamaan kedua, sehingga diperoleh:

$$u_2'(x) = \frac{1}{2x}$$

, dan substitusikan ke penyelesaian sistem persamaan pada persamaan kedua dari langkah kelima, sehingga diperoleh:

$$u_1'(x) = -\frac{1}{2}$$

Langkah ketujuh, integralkan $u_1(x)$ dan $u_2(x)$, sehingga diperoleh:

$$u_1(x) = \int -\frac{1}{2}\,dx = -\frac{x}{2}$$
$$u_2(x) = \int \frac{1}{2x}\,dx = \frac{\ln x}{2}$$

Langkah kedelapan, substitusikan $u_1(x)$ dan $u_2(x)$ ke penyelesaian persamaan diferensial biasa non-homogen-nya:

$$y_p = -\frac{x}{2}e^x + \frac{\ln x}{2}xe^x$$

yang merupakan penyelesaian persamaan diferensial non-homogen kasus 1.

Langkah kesembilan, jumlahkan penyelesaian umum persamaan diferensial biasa homogen (y_h) dengan penyelesaian umum persamaan diferensial non-homogen (y_p), sehingga diperoleh:

$$y = y_h + y_p = c_1e^x + c_2xe^x - \frac{x}{2}e^x + \frac{\ln x}{2}xe^x$$

2. $y'' + y = \sec x$

   Langkah pertama selesaikan persamaan diferensial biasa homogennya:

$y'' + y = 0 = 0$

Persamaan karakteristiknya adalah:

$m^2 + 1 = 0$

Akar-akar persamaan karakteristiknya adalah:

$m_1 = i$ dan $m_2 = -i$

Penyelesaian umum persamaan diferensial biasa homogen kasus 1 adalah:

$y_h = e^{0x}(c_1 \cos x + c_2 \sin x) = (c_1 \cos x + c_2 \sin x)$ (c_1 dan c_2 adalah konstanta sembarang)

Langkah kedua, ganti c_1 dan c_2 pada penyelesaian umum persamaan diferensial biasa homogen-nya menjadi fungsi-fungsi x sembarang, sehingga penyelesaian persamaan diferensial biasa non-homogen-nya:

$y_p = u_1(x) \cos x + u_2(x) \sin x$

Langkah ketiga, turunkan y_p pada penyelesaian umum persamaan diferensial biasa homogen-nya dua kali terhadap x, diperoleh:

$y_p' = u_1'(x) \cos x - u_1(x) \sin x + u_2'(x) \sin x + u_2(x) \cos x$

Kemudian dari hasil turunan penyelesaian umum persamaan diferensial biasa homogen terhadap x diperoleh:

$u_1'(x) \cos x + u_2'(x) \sin x = 0$

, sehingga:

$y_p' = u_1'(x) \sin x + u_2'(x) \cos x = 0$ (turunan pertama)

$y_p'' = -u_1'(x) \sin x - u_1(x) \cos x + u_2'(x) \cos x - u_2 \sin x$ (turunan kedua)

Langkah keempat, substitusikan y_p dan y_p'' pada langkah 3 ke persamaan diferensial:

$-u_1'(x) \sin x + u_2'(x) \cos x = \sec x$

Langkah kelima, bentuk sistem persamaan dari hasil turunan penyelesaian umum persamaan diferensial biasa homogen terhadap x dan hasil substitusi y_p , dan y_p'' pada langkah keempat:

$u_1'(x) \cos x + u_2'(x) \sin x = 0$

$-u_1'(x) \sin x + u_2'(x) \cos x = \sec x$

Langkah keenam, selesaikan sistem persamaan pada langkah keenam sehingga diperoleh:

$u_1'(x) = -\tan x$

$u_2'(x) = 1$

Langkah ketujuh, integralkan $u_1(x)$ dan $u_2(x)$, sehingga diperoleh:

$u_1(x) = \int -\tan x \, dx = \ln \cos x$

$u_2(x) = \int 1, dx = x$

Langkah kedelapan, substitusikan $u_1(x)$ dan $u_2(x)$ ke penyelesaian persamaan diferensial biasa non-homogen-nya:

$y_p = \ln \cos x . \cos x + x . \sin x$

yang merupakan penyelesaian persamaan diferensial non-homogen kasus 2.

Langkah kesembilan, jumlahkan penyelesaian umum persamaan diferensial biasa homogen (y_h) dengan penyelesaian umum persamaan diferensial non-homogen (y_p), sehingga diperoleh:

$y = y_h + y_p = (c_1 \cos x + c_2 \sin x) + \ln \cos x . \cos x + x . \sin x$

2.1.3.4 Persamaan Diferensial Biasa Linier Orde N Homogen dengan Koefisien Konstanta

Bentuk umum persamaan diferensial biasa linier homogen orde N dengan koefisien konstanta adalah:

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + ... + a_(n-1) y' + a_n y = 0 \tag{2.68}$$

, dengan $a_0, a_1, ..., a_(n-1), a_n$ adalah konstanta sembarang. Pada prinsipnya, untuk menyelesaikan persamaan diferensial ini sama saja dengan persamaan diferensiel linier homogen orde dua, akan tetapi untuk menyelesaikan persamaan karakterisiktik untuk persamaan diferensial biasa linier orde N homogen diperlukan metode penyelesaian akar-akar persamaan polinomial sehingga penyelesaian persamaan diferensial biasa linier homogen orde N adalah perluasan dari penyelesaian persamaan diferensial biasa linier homogen orde dua.

Misalkan m adalah akar karakteristik dari persamaan 2.68, maka persamaan dalam bentuk m adalah:

$$a_0 m^n + a_1 m^{n-1} + ... + a_(n-1) m + a_n = 0 \tag{2.69}$$

Jika persamaan 2.69 diselesaikan, maka akar-akar persamaan 2.69 dapat diketahui oleh penyelesaiannya. Secara umum:

1. Kasus 1

   Untuk $m_1 \neq m_2 \neq m_3 \neq ... \neq m_n$, diperoleh penyelesaian persamaan diferensial biasa homogen sebagai berikut:

$$y_h = c_1 e^{m_1 x} + c_2 e^{m_2 x} + c_3 e^{m_3 x} + ... + c_n e^{m_n x} \tag{2.70}$$

   , dengan $c_1, c_2, c_3, ..., c_n$ adalah konstanta sembarang.

2. Kasus 2

Untuk $m_1 = m_2 = m_3 = ... = m_n$, diperoleh penyelesaian persamaan diferensial biasa homogen sebagai berikut:

$$y_h = (c_1 + c_2x + c_3x^2 + c_4x^3 + ... + c_nx^{n-1})e^{mx} \tag{2.71}$$

, dengan $c_1, c_2, c_3, ..., c_n$ adalah konstanta sembarang.

Contoh kasus-kasus persamaan diferensial biasa linier homogen orde N dengan koefisien konstanta:

1. $y^{(4)} - 7y'' + 6y' = 0$

   Misalkan m adalah akar persamaan karakteristik:

   $m^4 - 7m^2 + 6m = 0$

   $m(m-1)(m-2)(m+3) = 0$

   Akar-akar persamaan karakteristik:

   $m_1 = 0$, $m_2 = 1$, $m_3 = 2$, $m_4 = -3$

   Penyelesaian umum kasus nomor 1 adalah:

   $y_h = c_1 + c_2e^x + c_3e^{2x} + c_4e^{-3x}$

   dengan c_1, c_2, c_3, dan c_4 adalah konstanta sembarang.

2. $y^{(4)} + 2y''' - 3y'' - 4y' + 4y = 0$

   Persamaan karakteristiknya adalah:

   $m^4 + 2m^3 - 3m^2 - 4m + 4 = 0$

   $(m-1)^2.(m+2)^2 = 0$

   Akar-akar persamaan karakteristik:

   $m_1 = 1$, $m_2 = 1$, $m_3 = -2$, $m_4 = -2$

   Penyelesaian umum kasus nomor 2 adalah:

   $y_h = c_1e^x + c_2xe^x + c_3e^{-2x} + c_4xe^{-2x}$

   $y_h = (c_1 + c_2x).e^x + (c_3 + c_4).xe^{-2x}$

   dengan c_1, c_2, c_3, dan c_4 adalah konstanta sembarang.

3. $y^{(7)} + 18y^{(5)} - 81y''' = 0$

   Persamaan karakteristiknya adalah:

$m^7 + 18m^5 - 81m^3 = 0$

$m^3(m^2 + 9)(m^2 + 9) = 0$

Akar-akar persamaan karakteristik:

$m_1 = m_2 == m_3 = 0$, $m_4 = m_7 = 3i$, $m_5 = m_6 = -3i$

Penyelesaian umum kasus nomor 3 adalah:

$y_h = c_1 + c_2 + c_3x^2 + c_4 \cos 3x + c_5 \sin 3x + x(c_6 \cos 3x + c_7 \sin 3x)$

dengan $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6$ dan c_7 adalah konstanta sembarang.

2.1.3.5 Persamaan Diferensial Biasa Linier Orde N Non-Homogen dengan Koefisien Konstanta

Bentuk umum persamaan diferensial biasa linier linier non-homogen orde N dengan koefisien konstanta adalah:

$$a_0y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + ... + a_(n-1)y' + a_ny = G(x) \tag{2.72}$$

, dengan $a_0, a_1, ..., a_n$ adalah konstanta dan $G(x) \neq 0$.
Penyelesaian umum persamaan diferensial homogen:

$$y = y_h + y_p$$

Penyelesaian persamaan diferensial homogen:

$$y_h = c_1y_1 + c_2y_2 + ... + c_ny_n$$

Untuk penyelesaian hon-homogen (y_p) dapat ditentukan dengan metode sama seperti

1. Koefisien tak tentu
2. Variasi parameter

2.1.3.5.0.1 Koefisien Tak Tentu Dengan menggunakan metode koefisien tak tentu, dilakukan sebagai berikut:

1. Jika $G(x)$ atau fungsi non-homogen persamaan diferensialnya merupakan jumlah bentuk x^me^{ax} dengan x^m adalah polinomial berderajat m, dengan $m \geq 0$ dan $a \neq 0$, maka y_p, maka y_p yang dipilih berbentuk:

$$x^k(A_0 + A_1x + ...A_mx^m)e^{ax} \tag{2.73}$$

   , dengan k adalah banyaknya akar yang sama pada persamaan diferensial homogen-nya dan $A_0, A_1, ..., A_m$ adalah koefisien tidak tentunya.

2. Jika $G(x)$ berbentuk $x^me^{ax} \cos Bx + x^ne^{ax} \sin Bx$ dengan x^m adalah polinomial berderajat m dan x^n, maka y_p yang dipilih berbentuk:

$$x^k(A_0 + A_1x + ... + A_sx^s)e^{ax} \cos Bx + x^k(A_0 + A_1x + ... + A_sx^s)e^{ax} \sin Bx \tag{2.74}$$

, dengan s adalah derajat m dan n, sedangkan k adalah banyaknya akar yang sama pada persamaan diferensial biasa homogen-nya.

3. Substitusikan y_p dan turunan-nya hingga turunan ke-n sesuai dengan orde persamaan diferensial ke persamaan diferensial semula untuk mencari koefisien tak tentunya, yaitu:

$$A_0, A_1, ..., A_m; B_0, B_1, ..., B_m \tag{2.75}$$

atau

$$A_0, A_1, ..., A_n; B_0, B_1, ..., B_n \tag{2.76}$$

4. Penyelesaian umum persamaan diferensial biasa linier linier non-homogen orde N dengan koefisien konstanta dengan metode koefisien tak tentu:

$$y = y_h + y_p$$

Contoh kasus persamaan diferensial biasa linier linier non-homogen orde N dengan koefisien konstanta dengan penyelesaian metode koefisien tak tentu:

1. $y''' + 3y'' - 4y = e^{-2x}$

   - Persamaan diferensial biasa homogen kasus nomor 1 adalah:
     $y''' + 3y'' - 4y = 0$

   - Gunakan m sebagai akar karakteristik untuk memisalkan persamaan diferensial biasa homogen sebagai persamaan karakteristik:
     $m^3 + 3m^2 - 4 = 0$

     $(m-1)(m+2)(m+2) = 0$

     $(m-1)(m+2)^2 = 0$

   - Akar-akar persamaan karakteristik:

     $m_1 = 1$, $m_2, m_3 = -2$

   - Penyelesaian umum persamaan diferensial biasa homogen kasus nomor 1 adalah:
     $y_h = c_1 e^x + c_2 x e^{-2x} + c_3 x e^{-2x}$
     dengan c_1, c_2, dan c_3 adalah konstanta sembarang.

   - Untuk mencari penyelesaian persamaan diferensial biasa non-homogen, gunakan aturan modifikasi:
     $x^k(A_0 e^{-2x})$

- Karena e^{-2x} ditulis dalam bentuk penyelesaian persamaan diferensial biasa homogen, dengan dua akar yang sama ($k = 2$), maka:
  $y_p = A_0 x^2 e^{-2x}$

- Karena persamaan diferensial biasa orde tiga, maka y_p diturunkan tiga kali terhadap x, diperoleh:
  $y_p' = 2A_0 x e^{-2x} - 2A_0 x^2 e^{-2x}$

  $y_p'' = 2A_0 e^{-2x} - 8A_0 x e^{-2x} + 4A_0 x^2 e^{-2x}$

  $y_p''' = -12A_0 e^{-2x} + 24A_0 x e^{-2x} - 8A_0 x^2 e^{-2x}$

- Substitusikan y_p, y_p', y_p'', y_p''' ke dalam penyelesaian persamaan diferensial biasa non-homogen:
  Diperoleh $A_0 = \frac{1}{6}$

- Jadi, penyelesaian persamaan diferensial biasa non-homogen:
  $y_p = \frac{1}{6} x^2 e^{-2x}$

- Penyelesaian umum persamaan diferensial kasus nomor 1 adalah:
  $c_1 e^x + c_2 e^{-2x} + c_3 x e^{-2x} - \frac{1}{6} x^2 e^{-2x}$

2.1.3.5.0.2 Variasi Parameter Selain dapat menggunakan metode koefisien tak tentu, untuk mencari penyelesaian persamaan diferensial biasa linier linier non-homogen orde N dengan koefisien konstanta dapat menggunakan metode variasi parameter. Langkah-langkah dengan menggunakan metode variasi parameter adalah:

1. Gantikan konstanta-konstanta sembarang pada penyelesaian persamaan diferensial homogen dengan fungsi-fungsi x sembarang sehingga:

$$y_p = u_1(x)y_1 + u_2(x)y_2 + ... + u_n(x)y_n \tag{2.77}$$

   , merupakan penylesaian persamaan diferensial non-homogen, dan $u_1(x), u_2(x), .., u_n(x)$ merupakan fungsi-fungsi x sembarang yang belum diketahui.

2. Turunkan y_p pada langkah 1 hingga turunan ke-n, lalu substitusikan y_p dan turunan y_p ke persamaan diferensial, sehingga didapat sistem persamaan:

$$u_1'(x)y_1 + u_2'(x)y_2 + ... + u_n'(x)y_n = 0$$
$$u_1'(x)y_1' + u_2'(x)y_2' + ... + u_n'(x)y_n' = 0$$
$$u_1'(x)y_1'' + u_2'(x)y_2'' + ... + u_n'(x)y_n''$$

$$u_1'(x)y_1^{(n-1)} + ... + u_n'(x)y_1^{(n-1)} = \frac{G(x)}{a_0} \tag{2.78}$$

3. Selesaikan sistem persamaan pada langkah 2, sehingga:

$$u'_m(x) = \frac{W_m(x)}{W(x)}, m = 1, 2, ..., n \tag{2.79}$$

dengan $W_m(x)$ adalah determinan yang diperoleh dari W dengan mengganti kolom ke- m menjadi kolom $(0, 0, ..., 0, \dfrac{G(x)}{a_0}$
Sedangkan W sendiri adalah:

4. Integralkan $u'_m(x)$ pada langkah 3, sehingga diperoleh:

$$u_m(x) = \int \frac{W_m(x)}{W(x)}\, dx, m = 1, 2, ..., n \tag{2.80}$$

5. Substitusi $u_m(x)$ pada penyelesaian persamaan diferensial biasa non-homogen-nya (y_p), diperoleh:

$$y_p = u_1(x)y_1 + u_2(x)y_2 + ... + u_n(x)y_n \tag{2.81}$$

6. Penyelesaian umum persamaan diferensial biasa linier linier non-homogen orde N dengan koefisien konstanta dengan metode variasi parameter:

$$y = y_h + y_p$$

2.1.4 Persamaan Diferensial Parsial

Persamaan diferensial parsial adalah persamaan diferensial yang memiliki satu buah atau lebih peubah bebas dan satu buah atau lebih peubah tidak bebas. Bentuk umum dari persamaan diferensial parsial adalah sebagai berikut:

$$F(x_1, x_2, ..., x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_n}, \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial y_1}, ..., \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial y_n}, ...) = 0 \tag{2.82}$$

Contoh-contoh persamaan diferensial parsial yang diterapkan untuk rumus-rumus dalam bidang sains adalah:

1. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ (persamaan gelombang satu dimensi)
2. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t} = c^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ (persamaan konduksi panas satu dimensi)
3. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ (persamaan Laplace dua dimensi)
4. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y)$ (persamaan Poisson dua dimensi)
5. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$ (persamaan Laplace tiga dimensi)
6. $-\dfrac{\partial V}{\partial x} = L \dfrac{\partial U}{\partial t}$ (persamaan gelombang radio)

Persamaan diferensial parsial dapat dibentuk melalui dua cara, yaitu:

1. Eliminasi konstanta
2. Eliminasi fungsi

2.1.4.0.1 Eliminasi Konstanta

1. Bentuklah persamaan diferensial parsial dari persamaan $x^2 + y^2 + (z-c)^2 = a^2$

   Terdapat dua konstanta sembarang dalam persamaan $x^2 + y^2 + (z-c)^2 = a^2$, yaitu a dan c

   Turunkan persamaan terhadap x:

   $$2x + 2(z-c)\frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

   $$x + (z-c)\frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

   Turunkan persamaan terhadap y:

   $$2y + 2(z-c)\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

   $$y + (z-c)\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

   Eliminasi c dengan cara:

   $$\left\{x + (z-c)\frac{\partial z}{\partial x}\right\} \times \frac{\partial z}{\partial y} - \left\{y + (z-c)\frac{\partial z}{\partial y}\right\} \times \frac{\partial z}{\partial x}$$

   Persamaan diferensial parsial yang terbentuk adalah:

   $$x\frac{\partial z}{\partial y} - y\frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

2.1.4.0.2 Eliminasi Fungsi

1. Bentuklah persamaan diferensial parsial dari persamaan $z = f(x^2 - y^2)$

   Turunkan persamaan terhadap x:

   $$p = \frac{\partial z}{\partial x} = f'(x^2 - y^2)2x$$

   Turunkan persamaan terhadap y:

   $$q = \frac{\partial z}{\partial y} = f'(x^2 - y^2) - 2y$$

   Dari turunanan persamaan terhadap x dan y didapat:

   $$\frac{p}{q} = \frac{2x}{-2y}$$

Solusi persamaan diferensial parsial dapat dibentuk melalui tiga cara, yaitu:

1. Integral langsung
2. Pemisalan $u = e^{ax+by}$
3. Pemisahan variabel

2.1.4.0.3 Integral Langsung

2.1.4.0.4 Pemisalan u

2.1.4.0.5 Pemisahan Variabel

2.2 Backus-Naur *Form*

Backus-Naur *Form* (BNF) adalah sebuah notasi untuk mengekspresikan suatu tata bahasa (*grammar*) dalam bentuk aturan produksi. BNF terdiri atas simbol *terminal* dan simbol *non-terminal*. Sebuah *grammar* dapat direpresentasikan dengan *tuple* (*record*): (N, T, P, S). N adalah himpunan simbol-simbol *non-terminal*. T adalah himpunan simbol-simbol *terminal*. P adalah himpunan aturan-aturan produksi yang memetakan simbol-simbol *non-terminal* ke simbol-simbol *terminal* maupun simbol-simbol *non-terminal*. S adalah simbol awal (*start symbol*) yang merupakan anggota dari N. Berikut adalah struktur sintaks dari BNF:

1. <> : Pengapit simbol non-*terminal* yang dapat diperluas menjadi simbol *terminal* dan simbol *non-terminal*
2. | : Simbol "*or*" untuk memisahkan antar simbol *terminal* maupun simbol non-*terminal*
3. ::= : Identik dengan simbol "=" atau "->" (sebuah simbol non-*terminal* sama dengan simbol non-*terminal* yang dapat diperluas lagi)
4. { } : Simbol untuk mengekspresikan suatu bagian opsional dari suatu aturan
5. [ ] : Simbol untuk mengulang simbol non-*terminal* dari 0 sampai n kali

Misalkan ada sebuah aturan produksi sebagai berikut:
E → T | T + E | T - E
T → a
Notasi BNF-nya adalah:
<E> ::= <T> | <T> + <E> | <T> - <E>
<T> ::= a
Contoh aturan produksi BNF untuk sebuah tata bahasa:

- <program> ::= BEGIN <statement-list> END
- <statement-list> ::= <statement> | <statement> ; <statement-list>
- <statement> ::= <var> := <expression>
- <expression> ::= <term> | <term><op1><expression>
- <term> ::= <factor> | <factor> <op2> <term>
- <factor> ::= <var> | <constant>
- <var> ::= A | B | ... | Z
- <op1> ::= + | - | =
- <op2> ::= ^ | * | /
- <constant> ::= <realNumber> | <integerPart>

- <realNumber> ::= <integerPart> <fraction>
- <integerPart> ::= <digit> | <integerPart> <digit>
- <fraction> ::= <digit> | <digit> <fraction>
- <digit> ::= 0 | 1 | ... | 9

Contoh *grammar* yang dibentuk oleh aturan produksi BNF:
BEGIN
A := 1
B := A + 2
END

2.3 Algoritma Genetik

Algoritma genetik adalah suatu teknik heuristik yang bekerja berdasarkan pada prinsip seleksi makhluk hidup di alam (proses evolusi) dan proses penurunan genetika (hereditas) pada makhluk hidup. Algoritma ini adalah perpaduan antara bidang ilmu komputer dan bidang biologi. Dalam proses evolusi, individu secara terus-menerus mengalami perubahan gen untuk menyesuaikan dengan lingkungan hidupnya (hanya individu-individu yang kuat yang mampu bertahan). Proses alamiah ini melibatkan perubahan gen yang terjadi pada individu melaluii proses perkembangbiakkan. Dalam algoritma ini, proses perkembang-biakkan ini menjadi proses dasar untuk mendapatkan keturunan yang lebih baik dari induknya.
Berikut adalah definisi-definisi penting dalam algoritma genetik:

1. Gen: Sebuah nilai yang menyatakan nilai dasar yang membentuk suatu arti tertentu dalam satu kesatuan gen yang disebut sebagai kromosom. Dalam algoritma genetik, gen ini bisa berupa nilai biner, *float*, bilangan bulat (*integer*), karakter (*String*), maupun kombinatorial
2. *Allele*: Nilai dari gen
3. Kromosom (individu): Gabungan gen-gen yang membentuk nilai tertentu
4. Populasi: Sekumpulan individu yang akan diproses bersama dalam satu siklus evolusi
5. Generasi: Satu satuan siklus dalam proses evolusi
6. Nilai *fitness* (*fitness value*): Nilai yang menyatakan seberapa baik nilai dari suatu individu atau solusi yang didapatkan

2.3.1 Proses Algoritma Genetik

Proses-proses yang terjadi pada algoritma genetik bertujuan untuk mencari individu terbaik untuk mencari dan memecahkan solusi permasalahan. Berikut adalah proses-proses algoritma genetik:

1. Mendefinisikan individu
   Pada proses ini, individu didefinisikan untuk mengetahui nilai-nilai gen (allele) yang dipakai untuk mencari dan memecahkan solusi permasalahan (dalam skripsi ini, solusi untuk persamaan diferensial). Nilai-nilai gen didefinisikan sebagai sebuah nilai, bisa berupa bilangan bulat (*integer*), bilangan desimal *float*, bilangan kombinatorial, bilangan biner *binary*, karakter, dan lain-lain. Setiap gen akan menentukan karakter kromosom yang mengandung gen-gen tersebut. Dalam skripsi ini, gen akan terdiri dari bilangan bulat untuk kemudian diproses oleh *evolutionary grammar* dengan aturan produksi yang telah ditentukan.

2. Mendefinisikan fungsi *fitness* (*fitness function*)
   Fungsi *fitness* adalah sebuah fungsi untuk menghitung seberapa baik sebuah individu untuk memecahkan solusi permasalahan. Fungsi *fitness* didefiniskan terlebih dahulu rumusnya seperti apa dan angka hasilnya tergantung permasalahannya. Apabila nilai fungsi *fitness* sebuah individu makin mendekati , maka semakin baik individu tersebut dapat memecahkan solusi permasalahan. Nilai *fitness* individu yang sama dengan nilai fungsi merupakan individu yang tepat untuk memecahkan solusi, akan tetapi kasus ini sangat jarang terjadi mengingat individu dalam populasi algoritma genetik sangat banyak dan harus melalui iterasi (generasi) yang banyak untuk tahu apakah sebuah individu mampu langsung memecahkan solusi permasalahan.

3. Menentukan proses pembangkitan populasi awal
   Pada proses ini, jumlah individu dalam suatu populasi akan ditentukan oleh pembangkit bilangan acak *random-walk*. Apabila jumlah individu dalam suatu populasi terlalu sedikit, maka keberagaman gen individu akan sedikit sehingga mempengaruhi proses seleksi dan mutasi yang akan dijelaskan setelah proses pembangkitan populasi, sehingga mempengaruhi kualitas solusi permasalahan. Sedangkan, apabila jumlah individu dalam suatu populasi terlalu banyak, maka iterasi algoritma genetik akan semakin lama sehingga pencarian solusi permasalahan akan memakan waktu yang banyak. Pada skripsi ini, jumlah populasi awal akan diatur sebanyak 100 sampai dengan 300 individu dalam populasi.

4. Menentukan metode seleksi individu
   Metode seleksi adalah metode pemilihan individu-individu dalam populasi yang memiliki nilai *fitness* terbesar untuk dilanjutkan ke proses kawin silang *cross-over*. Metode seleksi bertujuan untuk memlilih individu-individu terbaik yang dianggap dapat memecahkan solusi permasalahan. Metode seleksi terbagi atas dua jenis, yaitu metode *roulette-wheel* dan metode *tournament*.

   (a) Metode *roulette-wheel*
   Metode *roulette-wheel* adalah proses seleksi individu dengan cara memilih individu terpilih sebanyak presentase nilai gen-nya (dalam hal ini bilangan bulat) secara acak. Semakin besar nilai presentasi sebuah individu dalam populasi, maka semakin tinggi kemungkinan individu tersebut terpilih. Metode ini adalah metode seleksi paling sederhana. Metode ini dikenal dengan nama *stochastic sampling with replacement*. Proses metode *roulette-wheel* adalah sebagai berikut:
   - Dihitung nilai *fitness* dari masing-masing individu (f_i di mana i adalah individu ke 1 sampai dengan N)
   - Dihitung total nilai *fitness* semua individu
   - Dihitung probabilitas masing-masing individu
   - Dari probabilitas tersebut, dihitung jatah masing-masing individu pada angka 1 sampai 100
   - Dibangkitkan bilangan acak dari 1 sampai 100
   - Dari bilangan acak yang dihasilkan, ditentukan individu mana yang terpilih dalam metode seleksi

   (b) Metode *tournament*
   Metode *tournament* adalah proses seleksi individu dengan cara "mempertandingkan" individu-individu terpilih dalam populasi. Dalam metode *tournament*, ditetapkan sebuah nilai *tour*. Nilai *tour* adalah sebuah nilai maksimum individu terpilih di dalam suatu populasi. Ukuran nilai tour adalah 2 sampai dengan N (jumlah maksimal individu terpilih). Proses metode *tournament* adalah sebagai berikut:
   - Nilai *tour* ditetapkan terlebih dahulu (dari 2 sampai N) untuk menentukan jumlah individu terpilih maksimal di dalam populasi

- Individu-individu dalam populasi akan dipilih secara acak sebanyak ukuran nilai *tour*
- Individu dengan nilai *fitness* terbesar akan terpilih

Dalam skripsi ini, metode seleksi yang dipakai adalah metode *tournament*. Metode *tournament* dipakai karena metode ini lebih bersifat determinan daripada metode *roulette-wheel* yang lebih acak karena ada kemungkinan individu yang presentasenya kecil akan terpilih terus-menerus.

5. Melakukan proses reproduksi dengan operator genetika (kawin silang (*cross-over*) dan mutasi)
   Pada proses ini, individu-individu terpilih akan mengalami proses kawin silang dan mutasi. Proses reproduksi bertujuan untuk menghasilkan keturunan-keturunan yang diharapkan memiliki kualitas gen yang lebih baik dari keturunan-keturunan sebelumnya (melalui proses kawin silang) dan menambah keberagaman gen-gen individu dengan cara mengubah (merekayasa) gen-gen individu (melalui proses mutasi). Proses-proses yang terjadi pada kawin silang dan mutasi adalah sebagai berikut:

   (a) Kawin silang (*cross-over*)
   Proses kawin silang adalah proses "mengawinkan" antar dua individu yang berbeda. Proses kawin silang akan menukar gen-gen antar dua individu (induk) di suatu titik tertentu untuk kemudian disalin ke *template* individu kosong yang kemudian akan menjadi individu-individu baru (keturunan). Proses kawin silang bertujuan untuk menghasilkan keturunan berupa individu-individu baru yang diharapkan memiliki kualitas gen yang lebih baik dari individu-individu (induk) sebelumnya. Keturunan-keturunan tersebut diharapkan dapat memecahkan solusi permasalahan. Jenis-jenis proses kawin silang adalah sebagai berikut:
      - Kawin silang satu titik (1-*point cross-over*)
      - Kawin silang dua titik (2-*point cross-over*)
      - Kawin silang banyak titik (*N-point cross-over*)

   (b) Mutasi
   Proses mutasi adalah proses mengubah (merekayasa) gen pada individu di suatu titik tertentu. Proses mutasi bertujuan untuk menjaga keanekaragaman gen dalam populasi. Proses mutasi sendiri bersikap opsional atau tidak terlalu dibutuhkan dalam algoritma genetik, akan tetapi proses mutasi amat krusial untuk meningkatkan kualitas gen dari iterasi ke iterasi. Jenis-jenis proses mutasi adalah sebagai berikut:
      - *Bit string mutation*
      - *Flip bit mutation*

6. Melakukan proses terminasi
   Proses terminasi adalah proses akhir algoritma genetik. Dalam proses ini, algoritma genetik apabila salah satu dari hal berikut terjadi:
   - Iterasi pada gen-gen kromosom sudah mencapai angka maksimum yang ditentukan
   - Sudah mencapai ambang batas (*threshold*) yang ditentukan (solusi sudah ditemukan)
   - Tidak ada lagi perkembangan gen yang terjadi

2.3.2 *Grammatical Evolution*

Grammatical evolution adalah teknik perkembangan dari algoritma genetik konvensional. *Grammtical evolution* mengubah kromosom yang memiliki *allele* bertipe bilangan bulat menjadi karakter (*String*) dengan cara memetakan masing-masing *allele* ke dalam aturan produksi dalam notasi BNF ke dalam simbol yang sesuai dengan nilai *allele*. Dalam *grammatical evolutiion*, kromosom direpresentasikan sebagai sebuah vektor berisi bilangan bulat dengan panjang berukuran tertentu $()S$. Bilangan-bilangan bulat tersebut menyatakan posisi simbol *non-terminal* dan simbol *terminal.* Algoritma ini bekerja dari *allele* posisi pertama hingga *allele* posisi akhir (S). Langkah-langkah *grammatical evolution* adalah:

1. Baca sebuah *allele* dalam kromosom (dengan nilai V)

2. Aturan dipilih berdasarkan:

$$Rule = V mod NR \tag{2.83}$$

di mana *NR* adalah jumlah aturan untuk simbol-simbol *non-terminal* yang spesifik. Proses mengganti simbol *non-terminal* dengan aturan produksi yang benar selesai apabila:

1. *String* dalam keadaan utuh sudah dihasilkan, maka seluruh isi kromosom dapat dibiarkan

2. Jika sudah mencapai ujung kromosom, maka algoritma akan mulai lagi dari awal (disebut dengan *wrapping event*) dari elemen pertama dalam kromosom.

Berikut adalah contoh aturan produksi suatu *grammar* di dalam notasi BNF:

Simbol S dalam *grammar* menyatakan *start symbol.* Kemudian setiap elemen (gen) kromosom dengan panjang N dan berisi bilangan *integer* dari 0 sampai S akan diproses di dalam aturan produksi.

Contoh, ada kromosom $x = [16, 3, 7, 4, 10, 28, 24, 1, 2, 4]$. Pada tabel 1, ditunjukkan bagaimana sebuah fungsi yang valid diproduksi dari x. Hasil fungsi menggunakan aturan produksi di gambar 9 menghasilkan $f(x) = \log(x^2)$

Tabel 2.2: Pembentukan *string*

String	Kromosom	Operasi
<expr>	16, 3, 7, 4, 10, 28, 24, 1, 2, 4	16 mod 7 = 2
<func>(<expr>)	3, 7, 4, 10, 28, 24, 1, 2, 4	3 mod 4 = 3
log(<expr>)	7, 4, 10, 28, 24, 1, 2, 4	7 mod 7 = 0
log(<expr><op><expr>)	4, 10, 28, 24, 1, 2, 4	4 mod 7 = 4
log(x<op><expr>)	10, 28, 24, 1, 2, 4	10 mod 4 = 2
log(x*<expr>)	28, 24, 1, 2, 4	28 mod 7 = 0
log(x*<expr><op><expr>)	24, 1, 2, 4	24 mod 7 = 3
log(x*<digit><op><expr>)	1, 2, 4	1 mod 10=1
log(x*1<op><expr>)	2, 4	2 mod 4 = 2
log(x*1*<expr>)	4	4 mod 7 = 4
log(x*1*x)		

2.3.3 Aplikasi Algoritma Genetik (menggunakan *grammatical evolution*) untuk Mencari Solusi Persamaan Diferensial

Dalam algoritma genetika untuk mencari solusi persamaaan diferensial biasa dan persamaan diferensial parsial, terjadi proses-proses berikut ini:

1. *Initialization*
   Pada proses ini, nilai-nilai gen (allele) didefinisikan (dalam kasus ini *allele* bertipe bilangan bulat (*integer*)).Nilai untuk *mutation rate* dan *replication rate* ditentukan. *Replication rate* menyatakan pecahan jumlah kromosom yang tidak akan berubah sampai generasi selanjutnya (replikasi). Artinya, peluang untuk kawin silang (*cross-over*) ditentukan 1 - *replication rate. Mutation rate* mengendalikan rata-rata jumlah perubahan di dalam kromosom.

2. *Fitness evaluation*
   Pada proses ini, nilai *fitness* kromosom-kromosom di populasi akan dievaluasi berdasarkan nilai *fitness*-nya. *Fitness evaluation* untuk persamaan diferensial biasa dan persamaan diferensial parsial adalah sebagai berikut:

   1. Persamaan diferensial biasa
      Bentuk persamaan diferensial biasa dapat ditunjukkan sebagai berikut ini:

$$f(x, y, y^{(1)}, ..., y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0, x \in [a, b] \tag{2.84}$$

di mana $y^{(n)}$ menyatakan tingkatan (orde) turunan ke-n dari y. Berikut adalah batasan atau kondisi awal dari:

$$g_i(x, y, y^{(1)}, ..., y^{(n-1)})_{|x=t_i} = 0, i = 1, ..., n \tag{2.85}$$

di mana t_i adalah salah satu dari dua titik akhir a atau b. Langkah-langkah untuk *fitness evaluation* dari populasi adalah sebagai berikut:

1. Pilih titik ketetanggan (*equidistant point*) N $(x_0, x_1, ..., x_{(N-1)})$ di dalam jangkauan (*range*) yang relevan.
2. Untuk setiap kromosom i:
   - Susun *corresponding model* (fungsi penalti untuk *equidistant point*) $M_i(x)$, yang diekspresikan di dalam *evolutionary grammar* tadi.
   - Hitung jumlah *corresponding model*:

$$E(M_i) = \sum_{j=0}^{N-1} (f(x_j, M(x_j), ..., M_i^{(n)}(x_j))^2 \tag{2.86}$$

   - Hitung fungsi penalti terkait $P(M_i)$ dari persamaan (7)
   - Hitung nilai *fitness* gabungan dari *corresponding model* dan fungsi penalti terkait dan :

$$v_i = E(M_i) + P(M_i) \tag{2.87}$$

   Fungsi penalti P tergantung pada kondisi batasan dan memiliki bentuk persamaan:

$$P(M_i) = \lambda \sum_{k=1}^{n} g_k^2(x, M_i, M_i^{(1)}, ..., M_i^{n-1}|x = t_k) \tag{2.88}$$

   di mana λ adalah sebuah bilangan positif.

   2. Persamaan diferensial parsial
      Persamaan diferensial parsial yang dibahas di adalah persamaan diferensial parsial eliptis dengan dua variabel (dua dimensi) dengan kondisi batasan Dirichlet. Persamaan diferensial parsial ini diekspresikan dalam bentuk:

$$f(x, y, \Psi(x, y), \frac{\partial}{\partial x}, \Psi(x, y)\frac{\partial}{\partial y}, \Psi(x, y)\frac{\partial^2}{\partial x^2}, \Psi(x, y)\frac{\partial^2}{\partial y^2}) = 0 \tag{2.89}$$

dengan x $\in [x_0, x_1]$ x $[y_0, y_1]$. Kondisi batasan Dirichlet yang saling terkait diekspresikan sebagai berikut: $\Psi(x_0, y) = f_0(y), \Psi(x_1, y) = f_1(y) = g_0(x), \Psi(x, y_1) = g_1(x)$.
Langkah-langkah untuk *fitness evaluation* dari populasi adalah sebagai berikut:

1. Pilih *equidistant point* N^2 di dalam $[x_0, x_1]$ x $[y_0, y_1]$, N_x *equidistant point* pada batas $x = x_0$ dan $x = x_1$, N_y *equidistant point* pada batas $y = y_0$ dan $y = y_1$.
2. Untuk setiap kromosom i:
   - Bangun solusi percobaan (*trial solution*) $M_i(x, y)$ yang diekspresikan di dalam *evolutionary grammar* dalam gambar 9.

- Hitung jumlah solusi percobaan:

$$E(M_i) = \sum_{j=1}^{N^2} f(x_j, y_j, M_i(x_j, y_j), \frac{\partial}{\partial x} Mi(x_j, y_j), \frac{\partial}{\partial y} M_i(x_j, y_j), \frac{\partial^2}{\partial x^2} M_i(x_j, y_j), \frac{\partial^2}{\partial y^2} M_i(x_j, y_j)^2 \quad (2.90)$$

- Hitung jumlah-jumlah fungsi penalti terkait:

$$P_1(M_i) = \sum_{j=1}^{N_x} (M_i(x_0, y_j) - f_0(y_j))^2$$

$$P_2(M_i) = \sum_{j=1}^{N_x} (M_i(x_1, y_j) - f_1(y_j))^2$$

$$P_3(M_i) = \sum_{j=1}^{N_y} (M_i(x_j, y_0) - g_0(x_j))^2$$

$$P_4(M_i) = \sum_{j=1}^{N_y} (M_i(x_j, y_1) - g_1(x_j))^2$$

- Hitung *fitness* kromosom:

$$v_i = E(M_i) + \lambda(P_1(M_i) + P_2(M_i) + P_3(M_i) + P_4(M_i)) \quad (2.91)$$

Contoh *fitness evaluation* untuk persamaan diferensial biasa:
Terdapat sebuah persamaan diferensial biasa sebagai berikut:

$$y'' + 100y = 0, x \in [0, 1]$$

dengan kondisi batasan $y(0) = 0$ dan $y'(0) = 10$. *Range* yang diambil [0, 1] $N = 10$ *equidistant point* $x_0, ..., x_9$. Terdapat kromosom-kromosom dengan panjang 10 dalam populasi dan salah satu kromosom di dalam populasi adalah g = [7, 2, 10, 4, 4, 2, 11, 8, 18, 30, 5]. Mengacu pada aturan produksi yang ada pada gambar 3 tentang *evolutionary grammar*, fungsi yang berkorespondensi dengan kromosom g adalah $M_g(x) = exp(x) + \sin(x)$. Turunan pertama adalah $M_g^{(1)(x)} = exp(x) + \cos(x)$ dan turunan kedua adalah $M_g^{(2)(x)} = exp(x) - \sin(x)$.
Dengan persamaan 6 didapat:

$$E(M_g) = \sum_{i=0}^{9} (M_g^{(2)}(x_i) + 100M_g(x_i))^2$$

$$E(M_g) = \sum_{i=0}^{9} (101exp(x_i) + 99sin(x_i))^2$$

$$E(M_g) = 484933.2$$

Penalty function $P(M_g)$ dihitung sesuai persamaan 8 adalah:

$$P(M_g) = \lambda(M_g(0) - y(0))^2 + (M_g^{(1)}(0) - y''(0))^2$$
$$P(M_g) = \lambda(exp(0) + sin(0) + 0)^2 + (exp(0) - sin(0) - 10)^2$$
$$P(M_g) = \lambda(1 + 0 - 0)^2 + (1 - 0 - 10)^2$$
$$P(M_g) = 82\lambda$$

Jadi *fitness value* u_g dari kromosom yang diberikan adalah:

$$u_g = E(M_g) + P(M_g)$$
$$u_g = 484933.2 + 82\lambda$$

Kemudian *fitness value* setiap kromosom akan diurutkan menaik dari yang terkecil hingga terbesar. Lalu, *genetic operator* akan dipakai, lalu populasi baru akan tercipta. dan proses ini diulang sampai kriteria proses *termination* terpenuhi.

3. *Genetic operations*
   Operator genetik yang diaplikasikan pada populasi genetik adalah *initialization*, kawin silang (*cross-over*), dan mutasi. *Initialization* hanya diaplikasikan hanya sekali pada generasi pertama saja. Untuk setiap elemen pada setiap kromosom, bilangan *integer* acak pada *range* tertentu dipilih.
   Kawin silang diaplikasikan pada setiap generasi supaya kromosom baru dapat tercipta dari kromosom yang lama, yang akan mengganti individu-individu dalam populasi. Setiap pasangan dari kromosom baru, dua induk dipilih. Kedua induk ini "dipotong" pada titik terpilih secara acak dan masing-masing sub-kromosom pada sisi sebelah kanan ditukar. Contoh:

   Induk dipilih melalui seleksi turnamen sebagai berikut ini:

   - Pertama, buat grup individu yang terpilih secara acak dengan jumlah $K \geq 2$ dari populasi terkini.
   - Individu dengan *fitness* terbaik dalam grup dipilih

   Pada setiap generasi, langkah-langkah berikut ini dilakukan:

   1. Kromosom-kromosom diurutkan berdasarkan *fitness value*-nya, dengan cara kromosom terbaik ditempatkan di awal populasi, sedangkan kromosom terburuk di akhir populasi.
   2. $c = (1 - s) * g$ kromosom baru diproduksi oleh operasi *cross-over*, di mana s adalah *replication rate* dari model populasi dan g jumlah total individual di dalam populasi. Individual-individual baru akan menggantikan individual-individual terburuk di populasi pada saat operasi *cross-over* berakhir.
   3. Operasi mutasi diaplikasikan kepada setiap kromosom, di luar yang sudah dipilih untuk replikasi pada generasi selanjutnya.

4. *Termination control*
   Termination control adalah proses algoritma genetik selesai dijalankan. Proses ini terjadi apabila salah satu dari kedua hal ini terjadi:

   1. Iterasi pada gen-gen kromosom sudah mencapai angka maksimum yang ditentukan
   2. Sudah mencapai ambang batas (*threshold*) yang ditentukan (solusi sudah ditemukan)
   3. Tidak ada lagi perkembangan yang terjadi

DAFTAR REFERENSI

[1] de Berg, M., Cheong, O., van Kreveld, M. J., dan Overmars, M. (2008) *Computational Geometry: Algorithms and Applications*, 3rd edition. Springer-Verlag, Berlin.

[2] van Kreveld, M. J. (2004) Geographic information systems. Bagian dari Goodman, J. E. dan O'Rourke, J. (ed.), *Handbook of Discrete and Computational Geometry.* Chapman & Hall/CRC, Boca Raton.

[3] Buchin, K., Buchin, M., van Kreveld, M. J., Löffler, M., Silveira, R. I., Wenk, C., dan Wiratma, L. (2013) Median trajectories. *Algorithmica*, **66**, 595–614.

[4] van Kreveld, M. J. dan Wiratma, L. (2011) Median trajectories using well-visited regions and shortest paths. *Proceedings of the 19th ACM SIGSPATIAL International Conference on Advances in Geographic Information Systems*, Chicago, USA, 1-4 November, pp. 241–250. ACM, New York.

[5] Lionov (2002) Animasi algoritma sweepline untuk membangun diagram voronoi. Skripsi. Universitas Katolik Parahyangan, Indonesia.

[6] Wiratma, L. (2010) Following the majority: a new algorithm for computing a median trajectory. Thesis. Utrecht University, The Netherlands.

[7] Wiratma, L. (2022) Coming Not Too Soon, Later, Delay, Someday, Hopefully. Disertasi. Utrecht University, The Netherlands.

[8] van kreveld, M., van Lankveld, T., dan Veltkamp, R. (2013) Watertight scenes from urban lidar and planar surfaces. Technical Report UU-CS-2013-007. Utrecht University, The Netherlands.

[9] Rekhter, Y. dan Li, T. (1994) A border gateway protocol 4 (bgp-4). RFC 1654. RFC Editor, `http://www.rfc-editor.org`.

[10] ITU-T Z.500 (1997) *Framework on formal methods in conformance testing.* International Telecommunications Union. Geneva, Switzerland.

[11] Version 9.0.0 (2016) *The Unicode Standard.* The Unicode Consortium. Mountain View, USA.

[12] Version 7.0 Nougat (2016) *Android API Reference Manual.* Google dan Open Handset Alliance. Mountain View, USA.

[13] Webb, R., Daruca, O., dan Alfadian, P. (2012) *Method of optimizing a text massage communication between a server and a secure element.* Paten no. EP2479956 (A1). European Patent Organisation. Munich, Germany.

[14] Wiratma, L. (2009) Median trajectory. Report for GMT Experimentation Project at Utrecht University.

[15] Lionov (2011) Polymorphism pada C++. Catatan kuliah AKS341 Pemrograman Sistem di Universitas Katolik Parahyangan, Bandung. `http://tinyurl.com/lionov`. 30 September 2016.

[16] Erickson, J. (2003) CG models of computation? http://www.computational-geometry.org/mailing-lists/compgeom-announce/2003-December/000852.html. 30 September 2016.

[17] AGUNG (2012) Menjajal tango 12. Majalah HAI no 02, Januari 2012.

LAMPIRAN A

KODE PROGRAM

Listing A.1: MyCode.c

```c

// This does not make algorithmic sense,
// but it shows off significant programming characters.

#include<stdio.h>

void myFunction( int input, float* output ) {
    switch ( array[i] ) {
        case 1: // This is silly code
            if ( a >= 0 || b <= 3 && c != x )
                *output += 0.005 + 20050;
            char = 'g';
            b = 2^n + ~right_size - leftSize * MAX_SIZE;
            c = (--aaa + &daa) / (bbb++ - ccc % 2 );
            strcpy(a,"hello_$@?");
    }
    count = ~mask | 0x00FF00AA;
}

// Fonts for Displaying Program Code in LATEX
// Adrian P. Robson, nepsweb.co.uk
// 8 October 2012
// http://nepsweb.co.uk/docs/progfonts.pdf
```

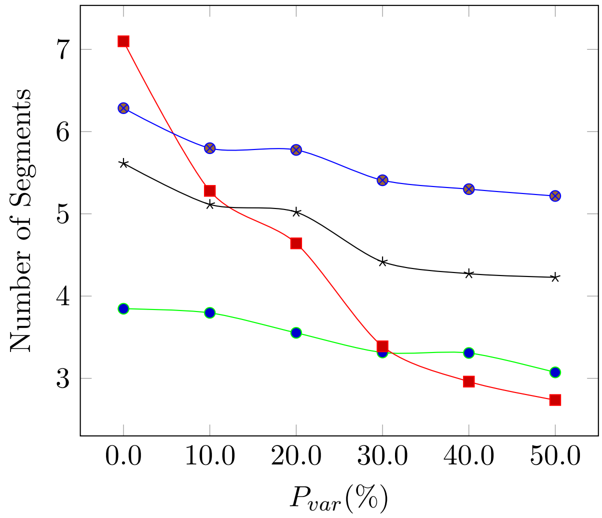
Listing A.2: MyCode.java

```java
import java.util.ArrayList;
import java.util.Collections;
import java.util.HashSet;

//class for set of vertices close to furthest edge
public class MyFurSet {
    protected int id;                                  //id of the set
    protected MyEdge FurthestEdge;                     //the furthest edge
    protected HashSet<MyVertex> set;                   //set of vertices close to furthest edge
    protected ArrayList<ArrayList<Integer>> ordered;   //list of all vertices in the set for each trajectory
    protected ArrayList<Integer> closeID;              //store the ID of all vertices
    protected ArrayList<Double> closeDist;             //store the distance of all vertices
    protected int totaltrj;                            //total trajectories in the set

    /*
     * Constructor
     * @param id : id of the set
     * @param totaltrj : total number of trajectories in the set
     * @param FurthestEdge : the furthest edge
     */
    public MyFurSet(int id,int totaltrj,MyEdge FurthestEdge) {
        this.id = id;
        this.totaltrj = totaltrj;
        this.FurthestEdge = FurthestEdge;
        set = new HashSet<MyVertex>();
        ordered = new ArrayList<ArrayList<Integer>>();
        for (int i=0;i<totaltrj;i++) ordered.add(new ArrayList<Integer>());
        closeID = new ArrayList<Integer>(totaltrj);
        closeDist = new ArrayList<Double>(totaltrj);
        for (int i = 0;i <totaltrj;i++) {
            closeID.add(-1);
            closeDist.add(Double.MAX_VALUE);
        }
    }

}
```

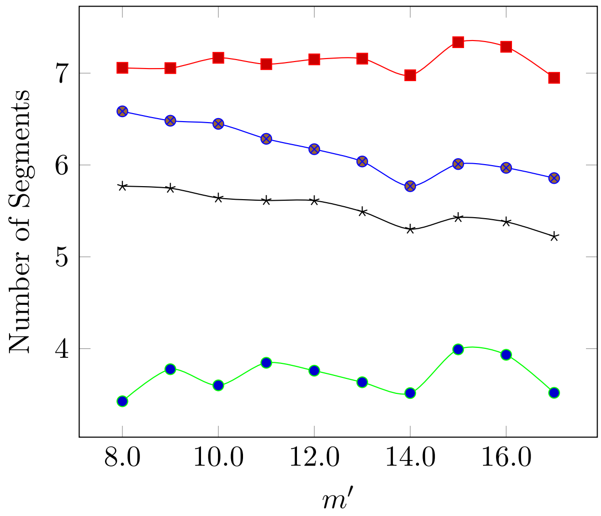
LAMPIRAN B

HASIL EKSPERIMEN

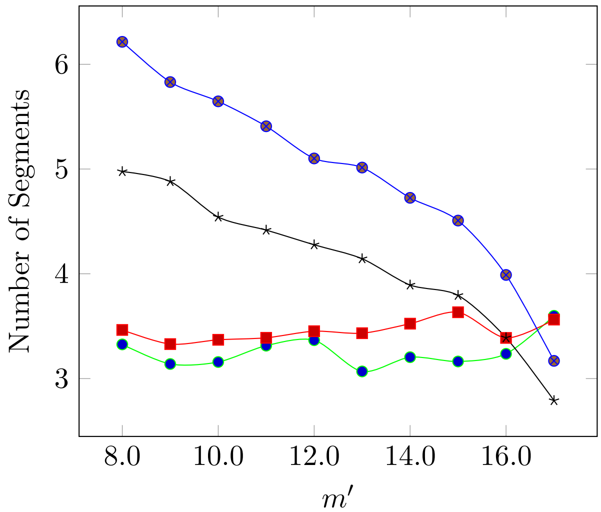
Hasil eksperimen berikut dibuat dengan menggunakan TIKZPICTURE (bukan hasil excel yg diubah ke file bitmap). Sangat berguna jika ingin menampilkan tabel (yang kuantitasnya sangat banyak) yang datanya dihasilkan dari program komputer.



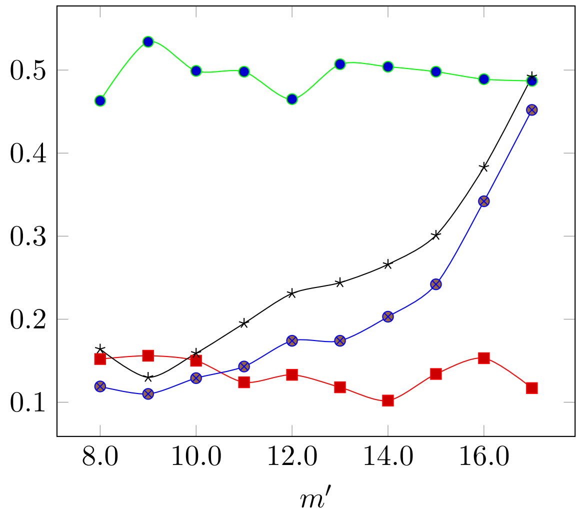
Gambar B.1: Hasil 1



Gambar B.2: Hasil 2



Gambar B.3: Hasil 3



Gambar B.4: Hasil 4