Монгуш Алдын-Сай

Контрольная работа №1

**Теоретические вопросы**

1. В чем заключается роль математического моделирования в научных исследованиях? Какова связь между физической и математической моделями?

Математическое моделирование позволяет проводить эксперименты для научных исследований, условия которых тяжело осуществить в лабораторных условиях. Есть критерий «адекватности», который выступает важным связующим между физической и математической моделями. Математическая модель описывает физические модели математическим языком.

1. Какие свойства должны иметь численные методы для обеспечения надежности вычислений? Как добиться устойчивости численных алгоритмов?

**Свойства численных методов**

1. **Сходимость**:
   * Численный метод должен сходиться к точному решению задачи при уменьшении шага разбиения (h→0h \to 0h→0).
   * Условие сходимости: ошибка метода должна стремиться к нулю при увеличении числа шагов.
2. **Стабильность (устойчивость)**:
   * Метод должен быть устойчив к накоплению ошибок округления и других возмущений, возникающих при вычислениях.
   * Устойчивость особенно важна для задач, где даже малые погрешности могут экспоненциально возрастать (например, для жестких дифференциальных уравнений).
3. **Точность**:
   * Метод должен давать малую ошибку при заданном шаге hhh. Это зависит от порядка метода:
     + Высокий порядок точности обычно снижает погрешность аппроксимации.
4. **Численная эффективность**:
   * Метод должен быть вычислительно эффективным, т.е. давать приемлемую точность за разумное время, используя ограниченные ресурсы.
5. **Чувствительность к начальному условию**:
   * Методы должны минимизировать влияние ошибок в начальных данных на итоговый результат.
6. **Устойчивость к накоплению ошибок округления**:
   * Итоговая ошибка численного метода не должна существенно возрастать из-за погрешностей арифметики с плавающей точкой.

**Как добиться устойчивости численных алгоритмов**

1. **Выбор подходящего метода**:
   * Для **жестких задач** выбирают устойчивые методы, например, неявные методы (метод трапеций, метод Рунге-Кутты с весами).
   * Для задач с быстро меняющимися решениями полезны адаптивные методы, регулирующие шаг интегрирования.
2. **Контроль шага вычислений**:
   * Использование переменного шага позволяет улучшить устойчивость, например, уменьшая шаг hhh при резких изменениях функции.
3. **Регуляризация задачи**:
   * Если исходная задача плохо обусловлена, её можно модифицировать (регуляризовать), чтобы избежать некорректности решения.
4. **Оценка и компенсация ошибок округления**:
   * Использование алгоритмов с повышенной точностью (например, вычисления в многократной точности или компаративные алгоритмы).
   * Уменьшение количества операций, увеличивающих ошибки округления.
5. **Применение методов повышения устойчивости**:
   * Использование устойчивых схем интегрирования, таких как метод Кранка-Николсона для уравнений в частных производных.
   * Использование специальных аппроксимаций, минимизирующих влияние ошибок округления (например, фильтрация данных).
6. **Адаптивные численные схемы**:
   * Методы, которые автоматически корректируют параметры вычислений (например, величину шага hhh) в зависимости от поведения функции.
7. **Оценка собственных чисел системы**:
   * Для линейных задач выбор устойчивого метода можно базировать на спектре собственных чисел матрицы, связанной с системой.
8. **Контроль ошибок**:
   * Использование методов с апостериорной оценкой ошибки позволяет адаптировать параметры вычислений для достижения устойчивости.
9. Что такое дискретизация и какую роль она играет в численном моделировании?

**Дискретизация** — это процесс замены непрерывной математической модели или объекта на её конечную или дискретную аналогию, что позволяет проводить численные вычисления. Этот процесс лежит в основе численного моделирования, так как компьютеры работают с конечными наборами данных и чисел.

**Роль дискретизации в численном моделировании**

Дискретизация играет ключевую роль в численных методах, так как позволяет:

Представить непрерывные задачи в вычислимой форме:

В реальных задачах физические процессы часто описываются дифференциальными уравнениями, интегралами или другими непрерывными моделями. Дискретизация переводит их в форму, пригодную для вычисления на компьютере (например, разностные уравнения, системы линейных уравнений).

Сократить сложность задачи:

Вместо работы с бесконечным числом точек (как в аналитической модели) численные методы обрабатывают конечное количество узлов, что упрощает вычисления.

Реализовать численные методы:

Такие методы, как метод конечных разностей, метод конечных элементов или метод конечных объёмов, основываются на дискретизации для аппроксимации производных, интегралов и других математических операций.

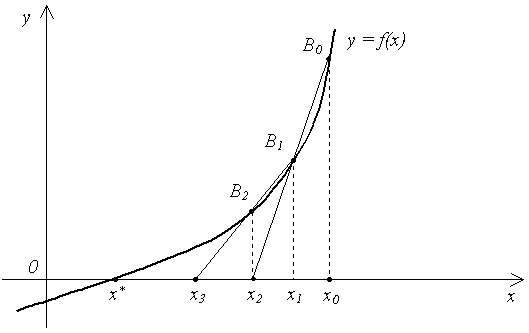
Приблизить решение сложных задач:

Для уравнений, которые нельзя решить аналитически, дискретизация позволяет построить приближённое численное решение.

Контролировать точность вычислений:

Разбиение непрерывной модели на дискретные элементы управляет точностью аппроксимации и даёт возможность балансировать между точностью и вычислительной затратностью.

1. Дайте геометрическую интерпретацию метода секущих для решения нелинейных уравнений.



1. Что такое обусловленность задачи и как она влияет на решение? Приведите пример задачи с плохой обусловленностью.
2. Что такое QR-разложение? Что такое метод Холесского? В чем разница между LU и QR разложениями?

Для матрицы A представление A = QR в виде произведения ортогональной матрицы Q и правой треугольной матрицы R называется QR-разложением