Pengukuran Galat

Metode Numerik

Dr. Ahmad Sabri

Angka signifikan

- Angka signifikian menunjukkan presisi dari sebuah pengukuran

Contoh:

- 7 meter (1 angka signifikan)
- 7,00 meter (pengukuran teliti sampai 2 angka setelah koma → 3 angka signifikan)
- 0,020 gram (2 angka signifikan)
- 20 milligram (1 angka signifikan)

Angka signifikan

- Semua angka tak nol adalah signifikan
- Nol di antara dua angka tak nol adalah signifikan
- Nol pendahulu (leading zeros) tidak signifikan
- Nol pengekor (trailing zeros) dari pecahan desimal adalah signifikan
- Nol pengekor bilangan bulat mungkin signifikan/tidak signifikan (ambigu)

Contoh:

- 0,00700 (3 angka signifikan: 7,0,0)
- 0,052 (2 angka signifikan: 5,2)
- 370,0 (4 angka signifikan: 3,7,0,0)
- 705,001 (6 angka signifikan:7,0,5,0,0,1)

Tentukan banyaknya angka signifikan pada bilangan berikut:

1. 163
2. 0,42000
3. 0,0624001
4. 4857,169
5. 601
6. 321

Mengapa diperlukan pengukuran galat?

1. Untuk menentukan akurasi solusi numerik.
2. Untuk menentukan kriteria penghentian algoritma iteratif.

Sumber galat numerik

1) Galat akibat pembulatan (round-off error)
2) Galat akibat pemotongan (truncation error)

Galat yang dihasilkan kedua sumber di atas menghasilkan *galat sejati (true error)*

Galat akibat pembulatan

Disebabkan oleh aproksimasi sebuah bilangan dengan pembulatan

Contoh:

Bilangan	Pembulatan	Galat akibat pembulatan
$\frac{2}{3} = 0{,}6666\ldots$	$0{,}67$	$-0{,}00333\ldots$
$\sqrt{2} = 1{,}4142135\ldots$	$1{,}414$	$0{,}0002135\ldots$
$\pi = 3{,}14159\ldots$	$3{,}14$	$-0{,}00159\ldots$

Galat akibat pemotongan

Galat akibat pemotongan terjadi dalam kasus antara lain:

1. Mengaproksimasi nilai deret tak hingga dengan hanya mengambil beberapa suku pertama saja
2. Mengaproksimasi $f'(x)$ dengan formula $f'(x) = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, di mana h berhingga.
3. Mengaproksimasi $\int_a^b f(x)dx$ dengan formula $\sum_a^b f(x)\Delta x$, di mana Δx berhingga

Contoh galat akibat pemotongan pada ekspansi deret tak hingga

Bilangan e didefinisikan dalam deret MacLaurin sebagai berikut:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} \dots$$

Jika diambil 3 suku pertama: $e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2!}$

Galat akibat pemotongan $= e^x - \left(1 + x + \frac{x^2}{2!}\right)$

Jenis-jenis galat numerik

1. Galat sejati
2. Galat sejati relatif
3. Galat aproksimasi
4. Galat aproksimasi relatif
5. Galat aproksimasi relatif absolut

Galat sejati (true error)

Adalah perbedaan antara nilai eksak (*exact value*) yang diperoleh dari rumus, dengan nilai aproksimasi (*approximate value*) yang diperoleh dengan metode numerik.

$$E_t = \text{nilai eksak } - \text{nilai aproksimasi}$$

Galat sejati relatif (relative true error)

Adalah rasio antara galat sejati dan nilai eksak.

$$\epsilon = \frac{E_t}{\text{Nilai eksak}}$$

Contoh

- Turunan $f'(x)$ dari fungsi $f(x)$ dapat diaproksimasi dengan persamaan $f'(x) \approx \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$
- Contoh: Diberikan $f(x) = 7e^{0.5x}$, tentukanlah:
  a) nilai eksak dari $f'(2)$
  b) nilai aproksimasi dari $f'(2)$ dengan menggunakan $h = 0,3$
  c) galat sejati
  d) galat relatif

Solusi:

a) Nilai eksak:

$$f'(x) = (0{,}5)(7e^{0{,}5x}) = 3{,}5e^{0{,}5x}$$

$$f'(2) = 3{,}5e^{0{,}5(2)} = 9{,}5140$$

b) Nilai aproksimasi $f'(2)$ dengan menggunakan $h = 0.3$

$$f'(2) \approx \frac{f(2+0{,}3) - f(2)}{0.3} = \frac{7e^{0{,}5(2{,}3)} - 7e^{0{,}5(2)}}{0.3} = 10{,}263$$

c) Galat sejati:

$$E_t = \text{eksak} - \text{aproksimasi} = 9{,}5140 - 10{,}263 = -0{,}722$$

d) Galat relatif:

$$\epsilon = \frac{E_t}{\text{Nilai eksak}} = \frac{-0{,}722}{9{,}5140} = -0{,}075888 = -7{,}5888\%$$

Galat aproksimasi (approximate error)

- *Galat aproksimasi* digunakan jika nilai eksak tidak diketahui atau sulit dihitung
- Galat aproksimasi adalah selisih antara aproksimasi terkini dengan aproksimasi sebelumnya.

$$E_a = \text{aproksimasi terkini } - \text{aproksimasi sebelumnya}$$

Galat aproksimasi relatif

Adalah rasio antara galat aproksimasi dan aproksimasi terkini

$$\epsilon_a = \frac{E_a}{\text{Aproksimasi terkini}}$$

Contoh

Untuk $f(x) = 7e^{0,5x}$, aproksimasilah $f'(2)$:

a) dengan menggunakan $h = 0,3$
b) dengan menggunakan $h = 0,15$
c) galat aproksimasi untuk $h = 0,15$
d) galat aproksimasi relatif untuk $h = 0,15$

Jawab:

a) $f'(2) \approx \frac{f(2+0.3)-f(2)}{0.3} = \frac{7e^{0,5(2,3)}-7e^{0,5(2)}}{0,3} = 10,263$

b) $f'(2) \approx \frac{f(2+0.15)-f(2)}{0.15} = \frac{7e^{0,5(2,15)}-7e^{0,5(2)}}{0,15} = 9,8800$

c) galat aproksimasi $E_a = 9,8800 - 10,263 = -0,38300$

d) galat aproksimasi relatif $\epsilon_a = \frac{-0,38300}{9,8800} = -0,38765 = -38,765\%$

Kriteria penghentian iterasi

- Algoritma pada metode numerik umumnya bersifat iteratif. Agar iterasi berakhir, maka diperlukan kriteria untuk menghentikan iterasi
- Untuk itu dapat digunakan galat aproksimasi relatif absolut $|\epsilon_a|$

Terdapat dua jenis kriteria penghentian iterasi:

1. Jika ϵ_s adalah toleransi galat, maka $|\epsilon_a| \leq \epsilon_s$, atau
2. Jika solusi mensyaratkan memiliki minimal m angka signifikan, maka $|\epsilon_a|\% \leq 0{,}5 \cdot 10^{2-m}$

Tabel aproksimasi

Aproksimasi $f'(2)$ di mana $f(x) = 7e^{0,5x}$, dengan beragam nilai h

h	$f'(2)$	$\lvert\epsilon_a\rvert\%$	m
0.3	10.263	N/A	0
0.15	9.8800	3.877%	1
0.10	9.7558	1.273%	1
0.01	9.5378	2.285%	1
0.001	9.5164	0.2249%	2

Mengaproksimasi nilai e

Hitung nilai $e^{1,2} = 1 + 1.2 + \frac{1.2^2}{2!} + \frac{1.2^3}{3!} + \cdots$ dengan galat aproksimasi relatif absolut $< 1\%$.

n	$e^{1,2}$	E_a	$\lvert\epsilon_a\rvert\%$
1	1	-	-
2	2.2	1.2	54.545
3	2.92	0.72	24.658
4	3.208	0.288	8.9776
5	3.2944	0.0864	2.6226
6	3.3151	0.020736	0.62550