FCA

ale-cci

May 27, 2019

1 Criterio di Juri

Sia dato il polinomio $a(z) = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_n$ con $a_n > 0$. Condizione necessaria affiché $a(z)$ abbia tutte le radici di modulo minore di 1 é che le seguenti disuguaglianze siano soddisfatte:

1. $a(1) > 0$
2. $(-1)^n a(-1) > 0$
3. $|a_0| < a_n$

Perndendo come esempio il caso $n - 1$:

$$a(z) = a_1 z + a_0 = 0$$

$$z = -\frac{a_0}{a_1} \qquad |z| < 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{|a_o|}{a_1} < 1 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{|a_o| < a_1}$$

Otteniamo che:

- $a(1) = a_1 + a_0 > 0$
- $a(-1) = -a_1 + a_0 < 0$

di queste tre disuguaglianze solo 2 sono indipendenti: la terza é l'insieme della prima e della seconda
Per il caso $n = 2$: 3 condizioni distinte (page 14 di Lez. 21)

Anche nel criterio di Jury é necessario costruire una trabella: (slide 15 Lez 21)

- iniziamo a scrivere le prime due righe: con la prima riga iniziamo a scrivere a partire da a_0
- Per la seconda riga partiamo da a_n e terminiamo la riga a a_0
- Per costruire le right successive calcoliamo il determinante della matrice 2×2 sopra e riportiamo la stessa riga sotto al contrario

Per calcolare il termine di una determinata riga si utilizza la formula:

$$b_k = \det \begin{pmatrix} a_0 & a_{n-k} \\ a_n & a_k \end{pmatrix} \qquad k = 0, 1 \ldots n-1$$

2 Teorema (criterio di Jury)

Il polinomio $a(z) = \ldots$ ha tutte le radici di modulo minore di 1 se e solo se le seguenti $n+1$ disuguaglianze sono soddisfatte:

1. $a(1) > 0$
2. $(-1)^n a(-1) > 0$
3. $\ldots$ slide 16

3 Scelta del periodo di campionamento (Slide 18 Lez 21)

Per il teorema di campionamento

$$w_s > 2w_b$$

con $w_s = \frac{2\pi}{}$ pulsazione di campionamento, T il corrispondente periodo

Una volta realizzato il progetto in tempo continuo é necessario implementare una $C_d(z)$

Alla funzione $C(s)$ é associata un'equazine differenziale in tempo continuo, a $C_d(z)$ un equazione di differenze

Metodo di eulero: $Dx(T) \Rightarrow \mathcal{L}[Dx(t)] = s \cdot \mathcal{L}[x(t)]$ (condizione iniziale nulla)

$$Dx(kT) \approx \frac{x((k+1)T) - x(kT)}{T}$$

$$\mathcal{Z}[Dx(kT)] \approx \frac{z-1}{T}\mathcal{Z}[x(kT)]$$

$$s = \frac{z-1}{Tz}$$

3.0.1 Alla lavagna

Immaginando di avere la funzione differenziale $a_1 Dy + a_0 y = b_1 Du + b_0 u$ corrisponde una funzione di trasferimento. Trasformandola secondo laplace con, condizioni iniziali nulle si ottiene:

$$a_1 sY + a_0 Y = b_1 sU + b_0 U$$

Immaginandola in tempo discreto, imponendo $t = kT$

$$a_1 Dy(kT) + a_0 y(kT_= b_1 Du(kT) + b_0 u(kT)$$

NOTA: Fino ad adesso Non é una approssimazione

Ora per calcolare la derivata utilizzo l'euqazione di eulero

$$a_1 \frac{y((k+1)T) - y(kT)}{T} + a_0 y(kT) = b_1 \frac{u((k+1)T) - u(kT)}{T} + b_0 u(kT)$$

Trasformanso:

$$\mathcal{Z}\left\{a_1 \frac{y((k+1)T) - y(kT)}{T} + a_0 y(kT) = b_1 \frac{u((k+1)T) - u(kT)}{T} + b_0 u(kT)\right\}$$

$$\ldots$$

$$a_1 \frac{z-1}{T}\mathcal{Z}[y(kT)] + a_0 \mathcal{Z}[y(kT)] = b_1 \frac{z-1}{T}\mathcal{Z}[u(kT)] + b_0 \mathcal{Z}[u(kT)]$$

Trovo così che:

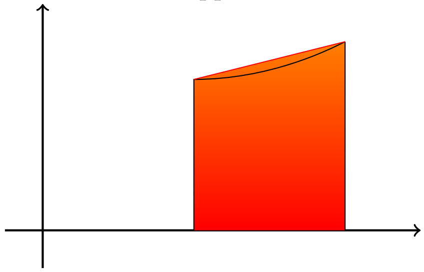
$$Y(z) = \frac{b_1 \frac{z-1}{T} + b_0}{a_1 \frac{z-1}{T} + a_0} U(z) = C(s)|_{s=\frac{z-1}{T}} U(z) := H(z)U(z)$$

Metodo di Euolero all'indietro: Stimo la derivata guardando il campione precedente

$$Dx(kT) \approx \frac{x(kT) - x((k-1)T)}{T}$$

3.0.2 Metodo di Tustin (slide 21)

Viene utilizzata l' 'approssimazione col metodo del trapezio'



(x: Approssimare due punti con trapezio)
Da slide 24: $C_d(z)$ è asintoticamente stabile siccome tutti i poli sono contenuti nella circonferenza unitaria

4 Esercizi

4.0.1 1

$$a(z) = z^3 - z^2 + z0.5$$

1. $a(1) > 0 \qquad 1 - 1 + 1 + 0.4 = 1.5 > 0 \quad \text{OK}$
2. $(-1)^3 a(-1) > 0, a(-1) < 0$

   $-a(-1) > 0 \qquad -1 - 1 - 1 + 0.5 = -2.5 < 0 \quad \text{OK}$
3. $|a_0| < a_3 \qquad |0.5| < 1\text{OK!}$

1	0.5	1	-1	1
2	1	-1	2	0.5
3	-0.75	1.5	-1.5	
4	-0.75	-1.5		

$|-0.75| > |-1.5|$ Not OK!

4.0.2 Secondo esercizio (slide 27)

$$a(z) = z^4 - z^3 + 0.25z^2 + 0.25z - 0.125$$

Per calcolare se il sistema é asintoticamente stabile

1. $a(1) > 0! \quad a(1) = 1 - 1 + 0.25 + 0.25 - 0.125 = 0.357 > 0$ OK
2. $(-1)^4 a(-1) > 0$

   $a(-1) > 0 \quad a(-1) = 1 + 1 + 0.25 - 0.25 - 0.125 = 1.875 > 0$ OK

3 $|a_0| < a_4 \quad |-o.125| < 1$ OK

4. $|b_0| > |b_1| \qquad |-0.9875| > |-0.125|$ OK
5. $|c_0| > |c_2| \qquad |0.9534| > |0.3979|$ OK

1	-0.125	0.25	0.25	-1	1
2	1	-1	0.25	0.25	-0.125
3	-0.98475	0.96875	-0.28125	-0.125	
4	-0.125	-0.28125	0.96875	-0.984375	
5	0.9534	*	0.3979		