

ale-cci

---

## Elettronica 1

April 28, 2020

# Contents

---

<b>Diodo a giunzione PN</b>	<b>1</b>
Diodo . . . . .	1
Modello a soglia . . . . .	1
Circuito limitatore di tensione . . . . .	2
Circuito limitatore inferiore . . . . .	4
Circuito rivelatore di massimo . . . . .	4
Circuito rivelatore di minimo . . . . .	6
Circuito limitatore di tensione superiore ed inferiore . . . . .	7
Raddrizzatore a doppia semionda . . . . .	9
Rivelatore di cresta . . . . .	10
Diodi in regime dinamico . . . . .	12
 <b>Transistore bipolare a giunzione BJT</b>	 <b>16</b>
Modello di Ebers e Moll . . . . .	16
Amplificatore invertente di tensione per piccoli segnali . . . . .	21
Approssimazione Transistor BJT . . . . .	24
 <b>Logica RTL: Transistor Resistor Logic</b>	 <b>28</b>
Margine di immunità al rumore . . . . .	28
Porta logica NOR . . . . .	32
 <b>Transistor in regione dinamica</b>	 <b>36</b>
 <b>Dispositivi e Circuiti Elettronici</b>	 <b>38</b>

# Diodo a giunzione PN

## Diodo

La relazione corrente-tensione per il diodo è esponenziale. Per piccoli spostamenti dall'origine è ben approssimata dalla formula  $I_s(e^{V/V_T} - 1)$ . Da una rapida analisi è facile osservare come per  $V \rightarrow -\infty$  la corrente tende a saturare in un valore  $-I_s$ , chiamato per questo motivo *corrente di saturazione*.

Tale corrente assume un valore molto basso ( $\approx 10^{-15}V$ ) risultando trascurabile rispetto al resto delle correnti misurabili nel circuito in polarizzazione diretta.

Diremo quindi che il diodo è spento e non fa passare corrente quando si trova in regione di polarizzazione diretta. Diversamente diremo che è acceso quando si trova in polarizzazione diretta.

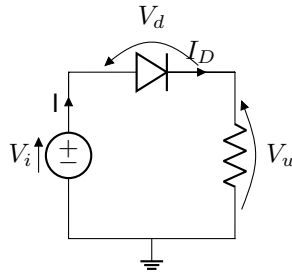


Figure 1: Raddrizzatore a singola semionda

Il circuito in figura 1 è descritto dalle relazioni:

$$\begin{cases} V_i = V_d + V_u \\ I_D = I_s(e^{V_d/V_T} - 1) \\ I = I_D \end{cases}$$

$V_T$  indica la tensione termica:  $V_T = K \frac{T}{q}$ , con  $K$  costante di Boltzmann,  $q$  la carica di un elettrone e  $T$  la temperatura del circuito (misurata a temperatura ambiente:  $300K$ ).

Siccome è prodotto di costanti,  $V_T$  è considerabile come una costante che vale approssimativamente  $26mV$ .

## Modello a soglia

Per semplificare la risoluzione del circuito, approssimiamo le zone di polarizzazione diretta ed inversa con due tratti lineari: Il primo descritto dalla caratteristica  $I = 0$  (diodo spento) valido per  $V_d < V_\gamma$ , ed il secondo una semiretta perpendicolare alle ascisse  $V = V_\gamma$  a rappresentare la corrente costante a diodo acceso.

**P. INVERSA (off)**

$$\begin{cases} I = 0 \\ V < V_\gamma \end{cases}$$

**P. DIRETTA (on)**

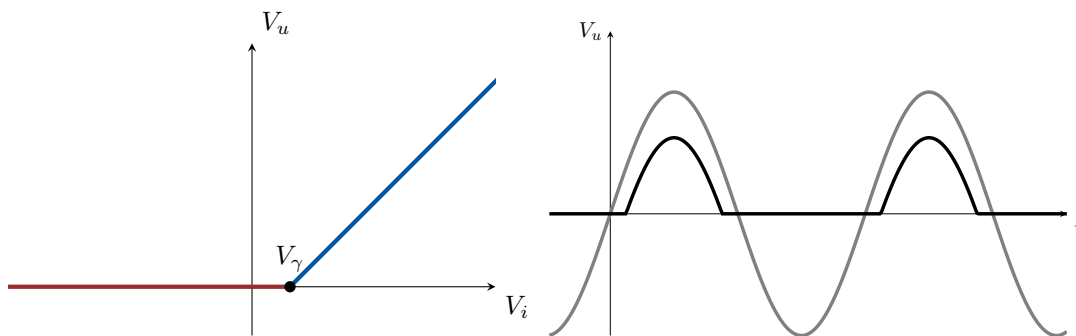
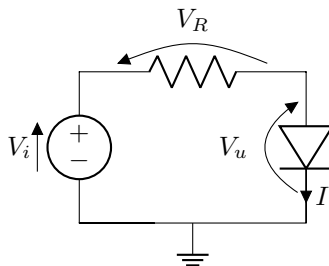
$$\begin{cases} V = V_\gamma \\ I > 0 \end{cases}$$

Questa semplificazione porta a dover risolvere il circuito due volte, una per ogni stato di funzionamento per cui il diodo si può trovare. Inoltre è necessario anche controllare le relative ipotesi di funzionamento.

Partendo dall'ipotesi che il diodo sia spento,  $V_u = R \cdot I = 0$ . Inoltre abbiamo che  $V_d = V_i - V_u = V_i$ , e per ipotesi di funzionamento  $V_d < V_\gamma$ , quindi il diodo è spento per  $V_i < V_\gamma$ .

Studiando ora la seconda ed ultima ipotesi per questo circuito, diodo acceso, abbiamo che:  $V_u = V_i - V_d = V_i - V_\gamma$ . E come condizioni di validità:

$$\begin{cases} V_u = R \cdot I \\ I \cdot R > 0 \\ V_u = V_i - V_d \end{cases} \Rightarrow V_i - V_d > 0 \Rightarrow V_i > V_d$$

**Circuito limitatore di tensione**

**Diodo OFF**

$$V_R = I \cdot R = 0$$

$$V_i - \cancel{V_R} - V_u = 0 \quad \Rightarrow V_u = V_i$$

$$V_u < V_\gamma \quad \Rightarrow V_i < V_\gamma$$

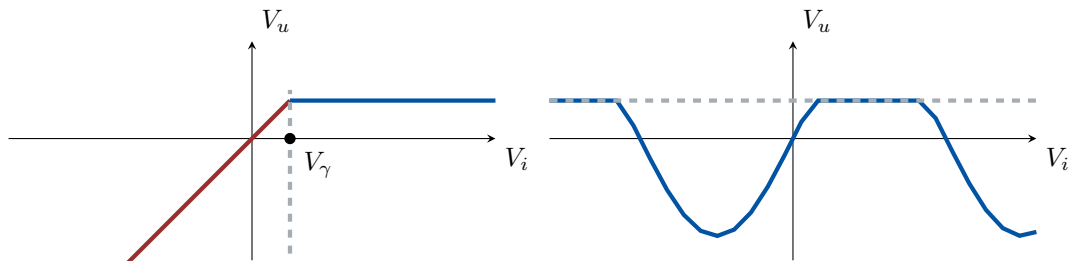
**Diodo ON**

$$V_d = V_\gamma \quad \Rightarrow V_u = V_\gamma$$

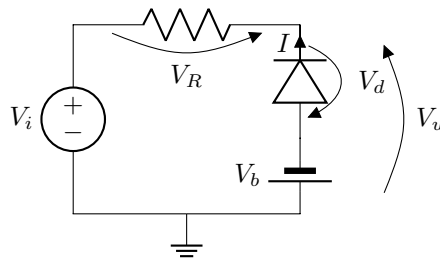
$$I \cdot R > 0 \quad \Rightarrow V_i - V_d > 0$$

$$V_i > V_\gamma$$

Se il segnale in ingresso eccede il valore  $V_\gamma$ , viene limitato a  $V_\gamma$ , da questo il nome limitatore di tensione.



## Circuito limitatore inferiore



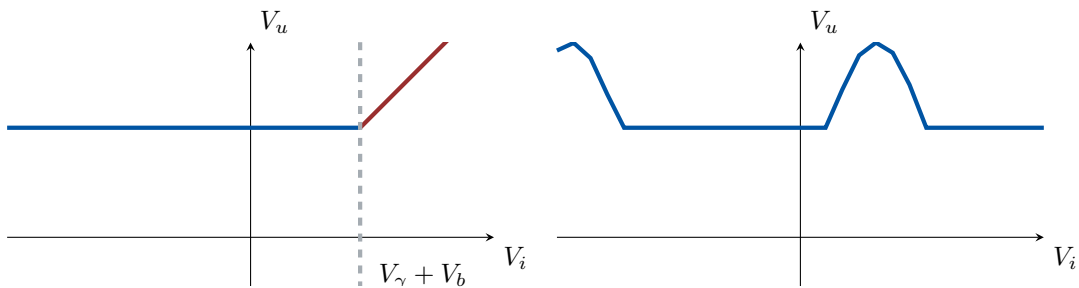
### Diodo OFF

$$\begin{cases} I = 0 \\ V_d < V_\gamma \end{cases} \cup \begin{cases} V_i = V_u - V_R \\ V_u = V_b - V_d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V_i = V_u \\ V_i > V_b - V_\gamma \end{cases}$$

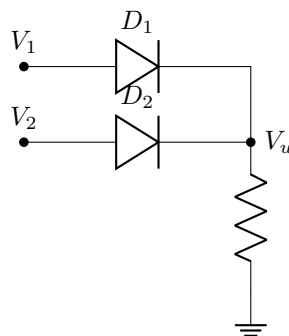
### Diodo ON

$$\begin{cases} V_d = V_\gamma \\ I > 0 \end{cases} \cup \begin{cases} V_i = V_u - V_R \\ V_u = V_b - V_d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V_u = V_b - V_\gamma \\ V_i < V_b - V_\gamma \end{cases}$$

Il circuito effettua una limitazione sui valori bassi, e la soglia di intervento è regolabile dal parametro  $V_b$ .



## Circuito rivelatore di massimo



In questo caso, avendo due diodi, ciascuno descritto da un modello lineare a tratti, caratterizzato da due regioni distinte, abbiamo quattro regimi di funzionamento differenti.

### Relazioni fondamentali

$$V_{d1} = V_1 - V_u$$

$$V_{d2} = V_2 - V_u$$

$$V_u = R \cdot I$$

$$I_1 + I_2 = I$$

#### D1 e D2 OFF

$$\begin{cases} V_u = 0 \\ V_1 < V_\gamma \\ V_2 < V_\gamma \end{cases}$$

#### D1 ON e D2 OFF

$$\begin{cases} V_u = V_1 - V_\gamma \\ V_1 > V_\gamma \\ V_1 > V_2 \end{cases}$$

#### D1 OFF e D2 ON

$$\begin{cases} V_u = V_2 - V_\gamma \\ V_2 > V_\gamma \\ V_2 > V_1 \end{cases}$$

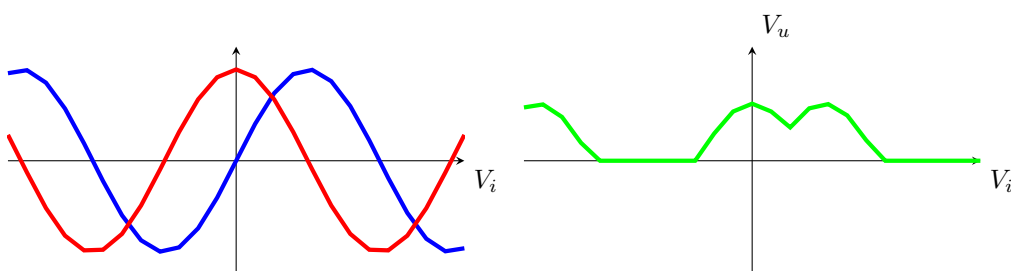
#### D1 ON e D2 ON

$$\begin{cases} V_1 = V_2 \\ V_1 > V_\gamma \\ V_2 > V_\gamma \end{cases}$$

Quando entrambi i diodi sono spenti, l'uscita è 0.

Quando la tensione  $V_1$  è maggiore sia di  $V_\gamma$ , che di  $V_2$ , la tensione di uscita segue il valore di  $V_1$  a meno di una costante,  $V_\gamma$ . In maniera del tutto analoga, quando  $V_2$  è maggiore di  $V_\gamma$  e  $V_1$ , la tensione di uscita segue il valore di  $V_2$  a meno di  $V_\gamma$ .

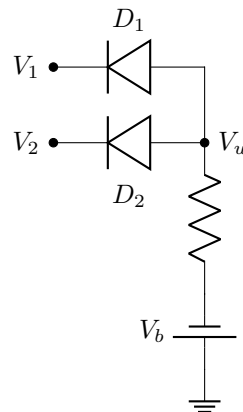
Quando  $V_1$  e  $V_2$  sono uguali, e sono entrambi maggiori di  $V_\gamma$ , allora l'uscita segue l'uno o l'altro a meno di una costante. In altre parole  $V_u = \max \{0, V_1 - V_\gamma, V_2 - V_\gamma\}$ .



Se si volesse estendere questo circuito per trovare il massimo tra tre ingressi, si potrebbe tranquillamente fare aggiungendo un' altro ramo in ingresso.

Nel caso in cui  $V_1$  e  $V_2$  siano segnali digitali, ovvero che possono solo assumere due valori  $V_h$  e  $V_l$ , il circuito si comporta come una porta logica **OR**.

## Circuito rivelatore di minimo



### Relazioni fondamentali

$$\begin{aligned}V_{d1} &= V_u - V_1 \\V_{d2} &= V_u - V_2 \\I &= I_1 + I_2 \\V_R &= R \cdot I = V_b - V_u\end{aligned}$$

#### D1 e D2 OFF

$$\begin{cases} V_u = V_b \\ V_1 > V_b - V_\gamma \\ V_2 > V_b - V_\gamma \end{cases}$$

#### D1 ON e D2 OFF

$$\begin{cases} V_u = V_1 + V_\gamma \\ V_1 < V_b - V_\gamma \\ V_1 < V_2 \end{cases}$$

#### D1 OFF e D2 ON

$$\begin{cases} V_u = V_2 + V_\gamma \\ V_2 < V_b - V_\gamma \\ V_2 < V_1 \end{cases}$$

#### D1 e D2 ON

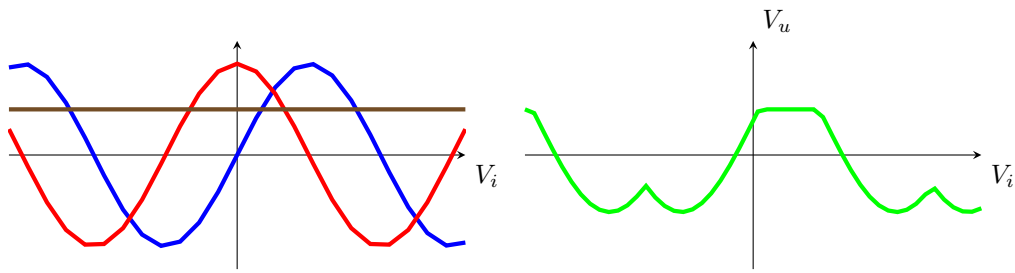
$$\begin{cases} V_u = V_1 + V_\gamma \\ V_1 = V_2 \\ V_1 < V_b - V_\gamma \end{cases}$$

Quando entrambi i segnali di ingresso sono superiori a  $V_b - V_\gamma$ , entrambi i diodi sono spenti e la tensione coincide con  $V_b$ . Se la tensione  $V_1$  scende al di sotto di  $V_b - V_\gamma$  ed è minore di  $V_2$ , allora l'uscita segue  $V_1$  a meno di una costante  $V_\gamma$ . Stesso succede quando  $V_2$  scende al di sotto di  $V_b - V_\gamma$ . Se entrambe le tensioni di ingresso hanno lo stesso valore e sono al di sotto di  $V_b - V_\gamma$ , entrambi i diodi sono accesi e l'uscita segue l'uno o l'altro a meno di una costante.

L'uscita  $V_u$  può essere vista come  $V_u = \min \{ V_1 + V_\gamma, V_2 + V_\gamma, V_b \}$ .

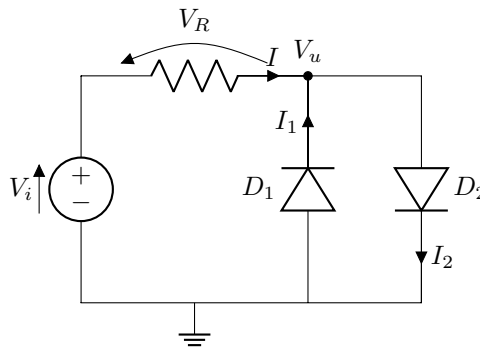
Se si fa riferimento a segnali di tipo digitale, il circuito si comporta come una porta logica **AND**.





## Circuito limitatore di tensione superiore ed inferiore

Negli ultimi due esempi abbiamo dovuto analizzare quattro casi, uno per ogni zona possibile in cui i due diodi del circuito potevano trovarsi. È evidente quindi, che nel caso più generale, con  $n$  diodi presenti nel circuito, il numero di casi da analizzare crescerebbe come  $2^n$ . Quello che è importante da osservare è che non tutte le combinazioni sono significative dal punto di vista fisico. Alcune di esse possono essere escluse facendo ragionamenti a priori.



### Equazioni generali

$$V_u + I \cdot R = V_i$$

$$V_1 = -V_u$$

$$V_2 = V_u$$

$$I + I_1 = I_2$$

### D1 e D2 OFF

$$\begin{cases} V_i = V_u \\ V_i < V_\gamma \\ V_i > -V_\gamma \end{cases}$$

### D1 ON e D2 OFF

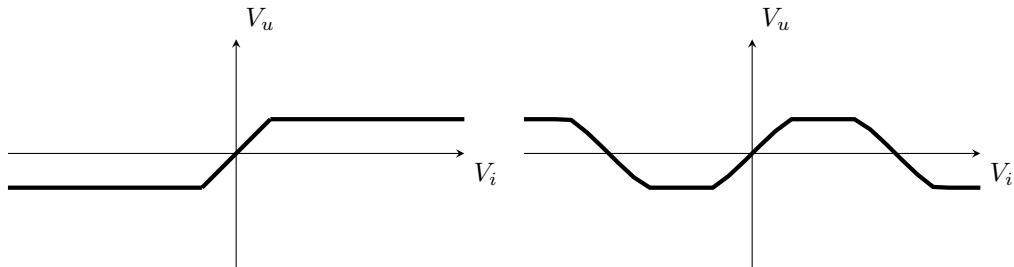
$$\begin{cases} V_u = -V_\gamma \\ V_i < -V_\gamma \end{cases}$$

**D1 OFF e D2 ON**

$$\begin{cases} V_u = V_\gamma \\ V_i > V_\gamma \end{cases}$$

**D1 e D2 ON**

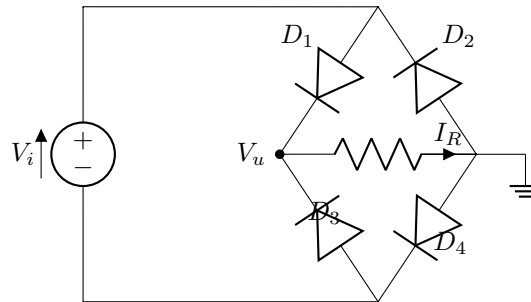
$$\begin{cases} V_u = -V_\gamma \\ V_u = V_\gamma \\ \text{Non verificabile} \end{cases}$$



Al momento dell'impostazione delle equazioni generali, si poteva direttamente notare che  $V_1 = -V_2$ , quindi entrambi i diodi non potevano essere accesi allo stesso tempo.

Per modificare le due soglie del raddrizzatore basta mettere in serie nel circuito due generatori di tensione.

## Raddrizzatore a doppia semionda



Dal numero di diodi presenti nel circuito mi attendo  $2^4 = 16$  combinazioni delle regioni di funzionamento del circuito.

### Equazioni Generali

$$I = I_1 - I_2 = I_3 - I_4$$

$$V_i = V_1 + V_R + V_4$$

$$-V_i = V_3 + V_R + V_2$$

$$I_R = I_2 + I_4$$

$$I_R = I_3 + I_1$$

$$V_u + V_1 + V_2 = 0$$

$$V_u + V_3 + V_4 = 0$$

Risolviendo il circuito, otteniamo che le uniche soluzioni che hanno senso fisico sono le seguenti:

**D1,D4 OFF  
D2,D3 ON**

$$\begin{cases} V_u = -2V_\gamma - V_i \\ V_i < -2V_\gamma \end{cases}$$

**D1,D2  
D3,D4 OFF**

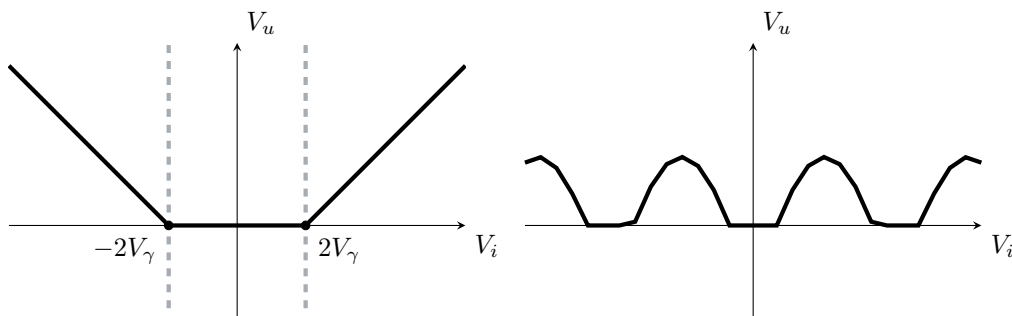
$$\begin{cases} V_u = 0 \\ V_i < 2V_\gamma \\ V_i > -2V_\gamma \end{cases}$$

**D1,D4 ON  
D2,D3 OFF**

$$\begin{cases} V_u = V_i - 2V_\gamma \\ V_i > 2V_\gamma \end{cases}$$

Il circuito ha un comportamento analogo al raddrizzatore a singola semionda, ha di diverso un tratto a pendenza negativa. Ciò significa che per un valore negativo di  $V_i < -V_\gamma$ , l'uscita assume il valore positivo opposto. Quindi a differenza del circuito a singola semionda, che taglia la semionda negativa, questo circuito la trasforma in semionda positiva.

Il circuito raddrizzatore a doppia semionda è utilizzato per la trasformazione da corrente alternata a corrente continua.



## Rivelatore di cresta

Quando ho in ingresso un segnale sinusoidale (a valor medio nullo), tutti i circuiti raddrizzatori visti fino ad ora, hanno la caratteristica di aver il valor medio della tensione in uscita, maggiore di zero. In particolare nel caso del raddrizzatore a doppia semionda, la trasformazione delle semionde negative, contribuisce ulteriormente al valor medio risultando in un valore maggiore rispetto al raddrizzatore a singola semionda. È stato anche accennato che questi circuiti sono utilizzati per la trasformazione di corrente alternata in corrente continua, resta comunque visibile dai grafici, che il segnale ottenuto in uscita dai circuiti è periodico e non assimilabile ad un segnale di tensione continua.

Quello che vogliamo ottenere ora è estrarre il valor medio della tensione dal segnale periodico in uscita. Attraverso le serie di Fourier possiamo ricostruire una qualunque funzione periodica attraverso una combinazione lineare di toni sinusoidali a frequenza decrescente.

In particolare ricordiamo che tra le armoniche ottenute dalla serie di Fourier, l'armonica con frequenza di  $0Hz$  rappresenta il valor medio del segnale. Il nostro obiettivo diventa quindi quello di isolare la componente continua. Possiamo fare ciò attraverso un filtro passa-basso capace di fare passare le componenti a frequenza più bassa, filtrando quelle a frequenza più alta.

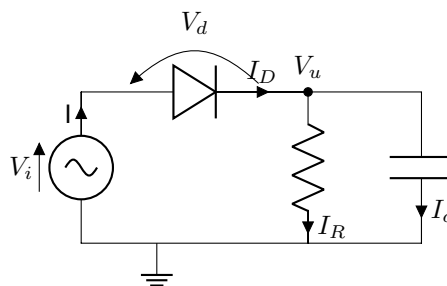


Figure 2: Raddrizzatore a singola semionda con filtro passa-basso

### Equazioni Generali

$$I_D = I_R + I_C$$

$$I_R = \frac{V_u}{R}$$

$$I_C = C \frac{dV_u}{dt}$$

Nel caso del diodo acceso, il termine  $\frac{V_u}{R}$ , è positivo se  $V_u$  è positivo, quindi fino a quando siamo nel 1° o 2° quadrante. Mentre il secondo termine, essendo derivata di  $V_u$  è negativa in caso di segnale decrescente. Quindi il diodo è sicuramente acceso nell'intervallo  $[0; \pi/2]$ , mentre è sicuramente spento nell'intervallo  $[\pi; \frac{3}{4}\pi]$ .

Indichiamo con  $\omega t_{\text{off}}$  il punto appartenente a  $]\pi/2; \pi[$  in cui il diodo passa dallo stato ON allo stato OFF. Il punto  $\omega t_{\text{off}}$  è facilmente calcolabile osservando che corrisponde al punto di spegnimento, quindi dal passaggio di  $I_D > 0$  a  $I_D = 0$ .

$$\left. \begin{array}{l} V_d = V_\gamma \\ V_i - V_d - V_u = 0 \\ V_i = V_M \sin(\omega t) \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} V_u = V_M \sin(\omega t) - V_\gamma \text{ trascurabile} \\ \frac{dV_u}{dt} = V_M \cos(\omega t) \omega \end{array} \right.$$

$$I_D = \frac{V_M \sin(\omega t)}{R} + C V_M \omega \cos(\omega t)$$

$$\sin(\omega t_{\text{off}}) + C R \omega \cos(\omega t_{\text{off}}) = 0$$

Siccome il punto che cerchiamo appartiene all'intervallo  $]\pi/2; \pi[$ , possiamo tranquillamente dire che  $\omega t_{\text{off}} = \arctan(-C R \omega)$ , tenendo presente di prendere la soluzione in tale intervallo. Osserviamo inoltre il fatto che per  $\omega R C$  crescente, il punto  $\omega t_{\text{off}}$  tende a  $\pi/2$ .

Per il caso di diodo basta risolvere l'equazione differenziale  $\frac{V_u}{R} + C \frac{dV_u}{dt} = 0$ , ottenendo:

#### Diodo ON

$$\left\{ \begin{array}{l} \tan(\omega t) > -C R \omega \\ V_u = V_M \sin(\omega t) - V_\gamma \text{ trascurabile} \end{array} \right.$$

#### Diodo OFF

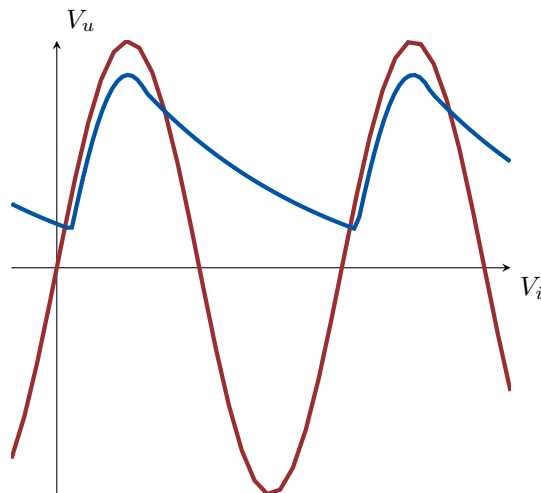
$$\left\{ \begin{array}{l} V_u(t) = V_u(t_{\text{off}}) e^{-\frac{1}{RC}(t-t_{\text{off}})} \\ V_u > V_M \sin(\omega t) - V_\gamma \text{ trascurabile} \end{array} \right.$$

Quindi al momento di spegnimento del diodo, l'andamento della tensione decade seguendo l'andamento di un esponenziale negativo.

L'effetto della capacità diventa quindi evidente, La presenza della capacità fa sì che il diodo si spenga prima, tanto prima quanto più elevata la capacità, ed una volta che si è spento la tensione non segue più la sinusoide ma un esponenziale decrescente con costante di tempo dipendente da RC. Maggiore è il prodotto RC, minore è il decadimento.

L'idea di partenza era quella di trasformare la tensione alternata in tensione continua, e per RC sufficientemente grande, siamo in grado di approssimare un generatore di tensione continua.

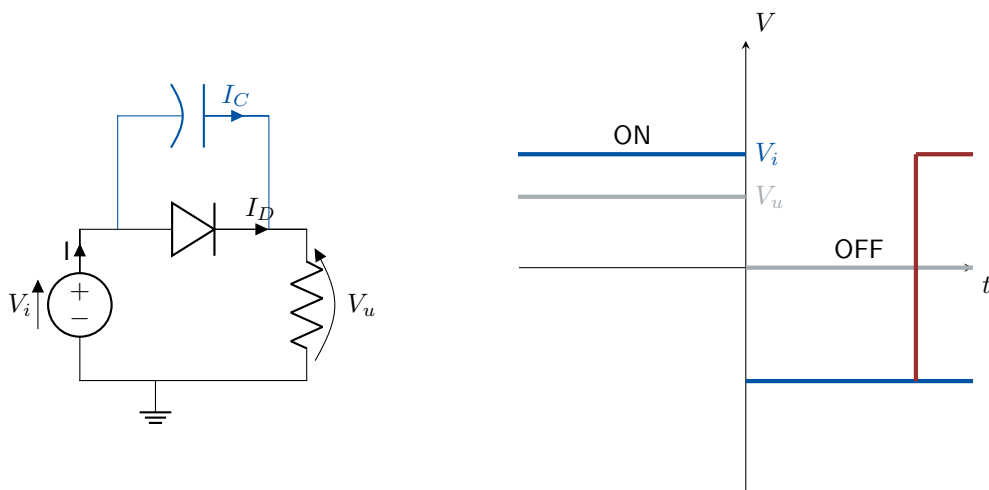
Questo circuito può essere utilizzato anche come un demodulatore di ampiezza, portando l'uscita a seguire l'andamento dell'ampiezza della sinusoide in ingresso.



## Diodi in regime dinamico

Fin'ora abbiamo tracciato delle caratteristiche di trasferimento ingresso-uscita, presupponendo che in ogni istante fosse possibile determinare la tensione d'uscita in funzione di quella in ingresso indipendentemente dal tempo, come se fosse una relazione statica. Ma nel diodo, per passare dalla condizione di polarizzazione diretta, alla condizione di polarizzazione inversa, è necessario che avvenga uno spostamento di carica all'interno del dispositivo, ed è impossibile muovere elettrone in tempi nulli. Quindi a questo spostamento, che corrisponde alla commutazione di polarizzazione diretta ed inversa, è associato un ritardo.

Vogliamo stimare questo ritardo per capire se i risultati sino ad ora calcolati sono effettivamente realistici o devono essere a loro volta corretti alla luce di questa considerazione.



In grigio riportata la risposta statica del circuito in risposta al segnale in ingresso  $V_i$ .

Per calcolare il ritardo dobbiamo introdurre un modello nel diodo, che, in aggiunta a quanto descritto fino ad ora, tenga conto anche degli effetti di reazione appena introdotti. Introduciamo in parallelo al diodo una capacità, che ci permette di simulare il comportamento del diodo in regime dinamico. La relazione associata alla carica di questo condensatore parassita non è descritta dalla relazione

$Q = CV$ , ma da una relazione non lineare, dove nel primo quadrante segue la relazione esponenziale  $Q = Q_s(e^{V_d/V_t} - 1)$ . È facile osservare che il rapporto  $Q/I_D = Q_s/I_s$  è una costante delle dimensioni fisiche di un tempo, che indicheremo genericamente con la costante  $\tau$ . Sintetizziamo quindi la regione di funzionamento della capacità in funzione diretta, come  $Q = \tau I$ .

La stessa relazione non vale in polarizzazione inversa, dove la carica non segue un asintoto, ma ha un andamento simile a quello di una radice quadrata.

Dato che abbiamo approssimato l'andamento della corrente con un andamento lineare a tratti, faremo lo stesso con la carica. È del tutto evidente che la qualità di questa approssimazione è meno buona ma ci accontenteremo, mettendo in evidenza i momenti in cui questa approssimazione risulterà inadeguata.

#### Diodo OFF

$$\begin{cases} I_D = 0 \\ Q = 0 \\ V_d < V_\gamma \end{cases}$$

#### Diodo ON

$$\begin{cases} V_D = V_\gamma \\ I_D > 0 \\ Q > 0 \end{cases}$$

Ed in entrambe è valida  $Q = \tau I$ .

Per  $t < 0$ , siccome arriviamo da tempo  $t = -\infty$ , il circuito è ancora in regione statica, per questo la derivata della corrente è nulla e valgono ancora le equazioni del diodo in regione statica.

Stesso ragionamento è valido se attendo un tempo sufficientemente lungo, dove ogni fenomeno transitorio tenderà ad esaurirsi.

#### Equazioni generali

$$V_i - V_d - V_u = 0$$

$$I_d + I_c = I$$

$$I_c = \frac{dQ_u}{dt}$$

$$I_d = \frac{Q}{\tau}$$

#### Circuito a diodo acceso

$$\begin{cases} V_i = V_f > V_\gamma \\ V_u = V_f - V_\gamma \\ I = \frac{V_f - V_\gamma}{R} \\ Q = \frac{\tau}{R}(V_f - V_\gamma) \end{cases}$$

#### Circuito da $t > 0$ a $t \rightarrow \infty$

$$\begin{cases} V_u = 0 \\ I_c = 0 \\ I = 0 \\ Q = 0 \end{cases}$$

**Condizioni iniziali  $t = 0^+$** 

$$Q(0^+) = Q(0^-) = \frac{\tau}{R}(V_f - V_\gamma)$$

$$V_d(0^+) = V_d(0^-) = V_\gamma$$

$$V_u(0^+) = -V_R - V_\gamma$$

$$I(0^+) = \frac{-V_R - V_\gamma}{R}$$

**Circuito a  $t > 0$** 

$$\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{\tau} = -\frac{V_R + V_\gamma}{R}$$

da cui

$$Q(t) = \frac{\tau}{R}(V_f + V_R)e^{-\frac{t}{\tau}} - \frac{\tau}{R}(V_R + V_\gamma)$$

Analizzando l'equazione del transitorio di  $Q(t)$  ottenuta, possiamo osservare che per  $t = 0$ , allora  $Q(t) = \frac{\tau}{R}(V_f - V_\gamma)$ , che corrisponde a  $Q(0^+)$ . Mentre per  $t \rightarrow \infty$ , otteniamo  $-\frac{\tau}{R}(V_R + V_\gamma)$ , che, essendo  $V_R + V_\gamma$  positivo  $Q(t) < 0$  per  $t \rightarrow \infty$ .

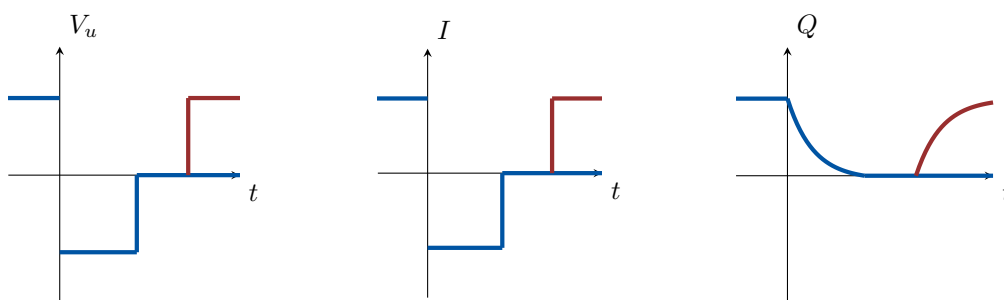
L'equazione  $V_d = V_\gamma$ , ipotesi utilizzata per il transitorio, è valida fino a quando il valore di  $Q$  è positivo, maggiore o al limite 0.

L'equazione del transitorio è valida fino a quando l'equazione del diodo una costante e pari a  $V_\gamma$ ,  $Q(t) > 0$  Il valore finale di  $Q(t)$  può essere al minimo 0,

Il diodo, dovendo smaltire la carica positiva sulla giunzione, per un certo periodo di tempo tiene costante la tensione ai suoi capi, quindi ritarda a spegnersi. Chiamiamo questo tempo: tempo di storage. Per calcolare questo tempo dobbiamo trovare il punto in cui l'equazione della carica raggiunge il valore 0.

$$\begin{aligned} \frac{\tau}{R}(V_f + V_R)e^{-t_s/\tau} - \frac{\tau}{R}(V_R + V_\gamma) &= 0 \\ t_s &= \tau \ln \left( \frac{V_f + V_R}{V_R + V_\gamma} \right) \end{aligned}$$

Si vede subito che il rapporto è maggiore di 1, e che il tempo di storage, non dipende dal valore della resistenza, ma dipende unicamente dalla escursione di tensione e dalle caratteristiche fisiche  $\tau$  del diodo.



Nel modello approssimato che stiamo utilizzando si impiega un tempo  $t_s$  per passare da  $Q = Q(0^-)$ , a  $Q = 0$  perché abbiamo dovuto spostare le cariche interne al diodo fino ad arrivare al valore 0. Dato che nel modello approssimato che stiamo utilizzando non c'è ulteriore carica da spostare, il tempo del transitorio è necessariamente nullo, quindi la tensione è libera di variare istantaneamente.

Abbiamo già commentato che la qualità dell'approssimazione della carica è inferiore a quella della corrente, dato che in regione di polarizzazione inversa, una si comporta come radice e l'altra come esponenziale negativo che tende ad un valore di  $I_s$  pressoché 0.



Questo significa che l'approssimazione considera nulla la carica in polarizzazione inversa non è accuratissima, perché la carica essendo anche debolmente negativa, comporta un transitorio di scarica del condensatore, dove ci dobbiamo aspettare che il valore della resistenza  $R$  influirà sul tempo di scarica.

Abbiamo descritto il transitorio di spegnimento del diodo, descrivendolo in due tratti: il primo caratterizzato da una tensione costante  $V_d = V_\gamma$  ed una carica che varia da un valore positivo ad un valore nullo in un tempo  $t_s$ , ed un secondo tratto dove la carica è costante e vale 0, e la tensione  $V_d < V_\gamma$  che si compie in un tempo nullo.

Per determinare come funziona il passaggio di accensione del diodo, dovremo percorrere questi due tratti all'inverso, entrambi descritti dalle stesse equazioni. Dato che percorrendo il secondo tratto impieghiamo un tempo nullo, visto che non comporta spostamento di carica, nel primo tratto avremo ai capi del diodo una tensione costante pari a  $V_f - V_\gamma$ . Ma siccome non appena il condensatore comincia a caricarsi la tensione ai capi del diodo ha assunto già il suo valore definitivo, il transitorio inverso ha un comportamento totalmente differente. Mentre per spegnere il diodo è necessario un tempo di spegnimento  $t_s$ , per accendere il diodo (in termini di tensione in uscita) il tempo di accensione non è visibile.

Il transitorio del diodo è asimmetrico, è lento a spegnersi e molto rapido ad accendersi.

Abbiamo stimato che il tempo di spegnimento del diodo è di circa  $20ns$ , e questo tempo è pressoché indipendente dalla resistenza.

Le approssimazioni fatte sino ad ora sono del tutto accettabili quando il periodo del segnale è maggiore come ordine di grandezza al ritardo intrinseco del diodo. Diventa non trascurabile quando le frequenze del segnale sono notevolmente maggiori rispetto al ritardo. Al crescere della frequenza il capacitore tende a cortocircuitare il diodo.

Esiste quindi un limite alla frequenza massima di commutazione che posso richiedere ad un diodo. Questo è uno dei motivi per cui la frequenza di clock è limitata ad un valore massimo e che il periodo associato a quella frequenza deve essere sufficientemente lungo per permettere ai transienti del circuito di completarsi.

# Transistore bipolare a giunzione BJT

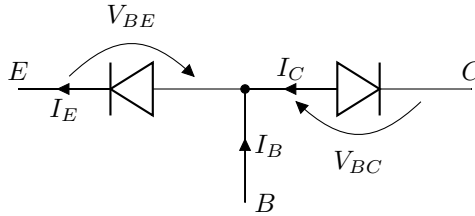


Figure 3: transistor bipolare

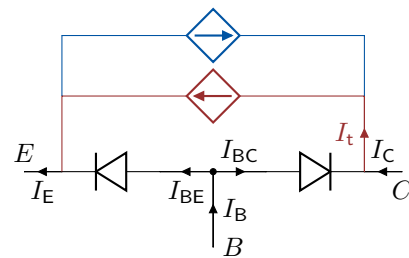
## Modello di Ebers e Moll

Supponiamo che  $V_{BE} > 0$  e  $V_{BC} < 0$ . Questo ci permetterà di dire che il diodo tra base ed emettitore è polarizzato in regione diretta ed il diodo tra base e collettore è polarizzato in inversa. Questo comporta che  $I_E > 0$  e  $I_C \approx 0$  e, considerando la legge di Kirchhoff  $I_B + I_C = I_E$ , abbiamo  $I_B \approx I_E$ .

Quello che accade se la distanza tra i due diodi è ridotta (che indicheremo con  $w$ ), l'interazione tra le loro cariche porta fa cambiare loro comportamento radicalmente, portando a far valere le relazioni  $I_e \approx -I_c$  e  $I_b \approx 0$ .

Quando  $w$  è sufficientemente piccolo, quello che accade è che nel momento in cui il diodo tra base ed emettitore è polarizzato in diretta, ed il diodo tra base e collettore è polarizzato in inversa, la corrente fluisce prevalentemente fra collettore ed emettitore a fronte di una corrente di base molto più piccola rispetto alle altre due regioni.

Possiamo tenere conto di questo comportamento attraverso un generatore aggiuntivo di corrente (riportato in rosso) che aggiunga alla corrente prevista dal modello del diodo polarizzata in inversa, correntemente trascurabile, una nuova corrente che dipende a sua volta esponenzialmente da  $V_{BE}$ . Chiameremo questa corrente  $I_t$ : corrente dell'**effetto transistorore**.



## Equazioni caratteristiche transistorore

$$I_{BE} = I_{BES} (e^{V_{BE}/V_T} - 1)$$

$$I_{BC} = I_{BCS} (e^{V_{BC}/V_T} - 1)$$

$$I_t = I_S (e^{V_{BE}/V_T} - 1) - I_S (e^{V_{BC}/V_T} - 1)$$

È semplice calcolare l'espressione della corrente di emettitore  $I_E$ , di collettore  $I_C$  e di base  $I_B$ , attraverso le equazioni di Kirchoff ai tre nodi. Bisogna considerare che abbiamo utilizzato solo una particolare condizione di polarizzazione. Se studiassimo il caso opposto, ovviamente otterremmo risultati simmetrici: vedremo che con  $V_{BE} < 0$  e  $V_{BC} > 0$  avremo una componente aggiuntiva di corrente ad effetto transistorore, diretta in direzione opposta, rappresentabile anch'essa con un generatore di corrente pilotato.

#### Equazioni caratteristiche transistorore (linearm. dipendenti)

$$\begin{aligned} I_B &= I_{BES}(e^{V_{BE}/V_T} - 1) - I_{BC}(e^{V_{BC}/V_T} - 1) \\ I_E &= (I_S + I_{BE})(e^{V_{BE}/V_T} - 1) - I_S(e^{V_{BC}/V_T} - 1) \\ I_C &= I_S(e^{V_{BE}/V_T} - 1) - (I_S + I_{BCS})(e^{V_{BC}/V_T} - 1) \end{aligned}$$

Il transistorore in figura 4 prevede due giunzioni ed ha il nome di **transistorore npn**. Esiste anche il suo duale, **transistorore pnp** al quale faremo solo un rapido cenno più avanti ma suo comportamento è del tutto identico a quello che stiamo discutendo.

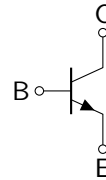


Figure 4: transistor npn

Per la legge di Kirchoff abbiamo se conosciamo due tra le differenze di potenziale ai lati del transistorore, la terza è univocamente determinata. Ragionamento del tutto analogo vale per le correnti.

Per determinare completamente il regime di funzionamento del transistorore, occorre determinare le 6 grandezze: 3 correnti e 3 tensioni, attraverso 6 equazioni, due delle quali sono quelle di Kirchoff appena indicate. Per trovare le altre quattro equazioni, utilizziamo lo stesso metodo che abbiamo applicato per determinare le equazioni del diodo: mettiamo un morsetto a terra e, fornendo un potenziale su uno dei due morsetti rimanenti, misuriamo il potenziale sull'ultimo morsetto.

Ovviamente è possibile connettere il transistor in 3 modi differenti: emettitore, base e collettore comune. Ma di queste ultime due ce ne occuperemo più avanti.

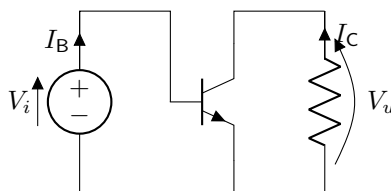


Figure 5: Connessione a Emettitore comune

Già osservando il circuito, possiamo notare che due incognite sono eliminate dalla equazione della tensione in ingresso  $V_i = V_{BE}$ , che possiamo considerare data, e dall'equazione  $V_u = R \cdot I_C$ . Ricordando che la corrente in ingresso corrisponde alla corrente di base, e che la corrente in uscita corrisponde alla corrente di collettore, per le ultime due equazioni residue possiamo utilizzare quelle fornite dalle

caratteristiche del transistor elencate precedentemente.

$$\begin{aligned}I_B(V_{BE}, V_{CE}) &= I_{BES}(e^{V_{BE}/V_T} - 1) - I_{BC}(e^{V_{BC}/V_T} - 1) \\I_C(V_{BE}, V_{CE}) &= I_S(e^{V_{BE}/V_T} - 1) - (I_S + I_{BCS})(e^{V_{BC}/V_T} - 1)\end{aligned}$$

Siccome queste relazioni di correnti sono due funzioni di due variabili ( $V_{BE}$  e  $V_{CE}$ ), è necessario un grafico in tre dimensioni per poterle rappresentare graficamente, e ciò non sarebbe pratico.

Per questo motivo riconduciamo queste espressioni ad una rappresentazione più semplice, riconducendoci ad una famiglia di curve parametriche ponendo  $V_{CE}$  come variabile indipendente e tracciando le funzioni al variare di  $V_{CE}$  (Figura 6).

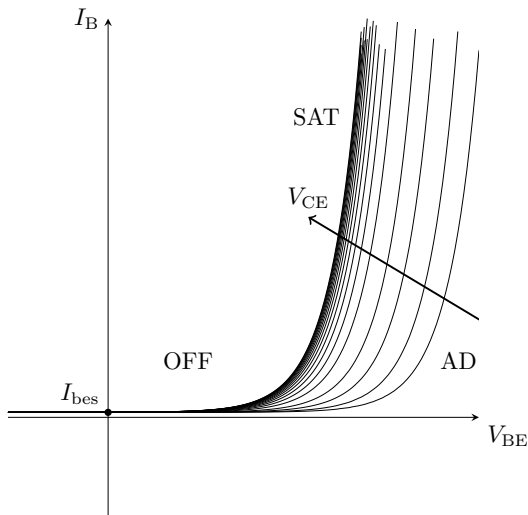


Figure 6:  $I_B(V_{BE})$  al variare di  $V_{CE}$

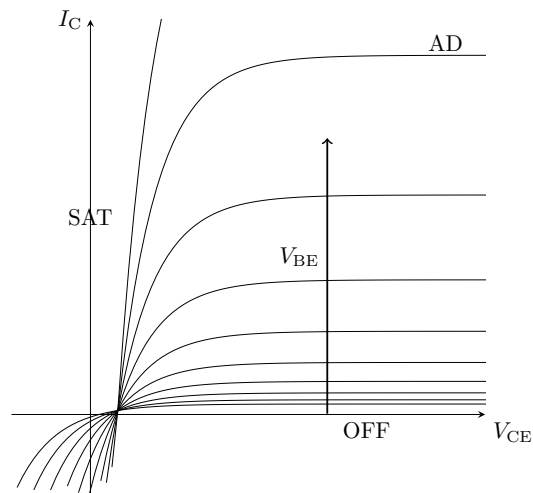


Figure 7:  $I_C(V_{CE})$  al variare di  $V_{BE}$

Il transistor è composto da 2 diodi, ognuno polarizzabile in regione diretta o regione inversa. Possiamo riconoscere quindi quattro regioni di funzionamento del transistor, dipendenti da  $V_{BE}$  e  $V_{BC}$ .

- BE on, BC off: Regione normale di funzionamento o regione di polarizzazione attiva diretta
- BE off, BC on: Regione di polarizzazione attiva inversa.
- BE off, BC off: Regione di interdizione, per brevità diremo che il transistor è spento
- BE on, BC on: Regione di saturazione.

### Regione Attiva Diretta

Prendendo in considerazione la regione di funzionamento attiva diretta, considerando che  $e^{V_{BE}/V_T} > e^{V_{BC}/V_T}$  siccome il primo termine è maggiore di 1 per  $V_{BE} > 0$  ed il secondo minore di 1 per  $V_{BC} < 0$ , possiamo semplificare le relative equazioni caratteristiche del transistor in

$$\begin{aligned} I_C &= I_s(e^{V_{BE}/V_T} - 1) \\ I_B &= I_{BEs}(e^{V_{BE}/V_T} - 1) \\ I_E &= (I_s + I_{BEs})(e^{V_{BE}/V_T} - 1) \end{aligned}$$

Osserviamo che in questa regione, tutte le correnti assumono la forma di esponenziale traslata in funzione della sola tensione  $V_{BE}$ . In questo caso particolare, il circuito in figura 5, la corrente in uscita  $I_C$  non è una funzione della tensione di uscita  $V_u = V_{CE}$ , quindi si comporta come un circuito generatore di corrente costante/controllata in funzione di  $V_i$ .

Inoltre, siccome tutte le correnti dipendono dallo stesso esponenziale, allora sono proporzionali tra loro

$$\frac{I_C}{I_B} = \frac{I_s}{I_{BEs}} = \beta_F$$

Per analogo ragionamento  $I_E = (\beta_F + 1)I_B$ , e  $I_C = \frac{\beta_F}{\beta_F + 1}I_E = \alpha_F I_E$ . Con  $\alpha_F$  viene definita l'*efficienza di emettitore*: maggiore è la costante più la corrente di collettore assomiglia alla corrente di emettitore. Quindi siccome  $\alpha_F = \frac{\beta_F}{\beta_F + 1}$ , maggiore è  $\beta_F$ , più  $\alpha_F$  è vicina ad 1, e migliore è il transistor.

### Regione attiva inversa

Per ragionamento analogo alla regione precedente,  $V_{BE} < 0$  e  $V_{BC} > 0$  ci porta a trascurare i termini in funzione di  $V_{BE}$

$$\begin{aligned}I_C &= -(I_S + I_{BCS})(e^{V_{BC}/V_T} - 1) \\I_B &= I_{BCS}(e^{V_{BC}/V_T} - 1) \\I_E &= -I_S(e^{V_{BC}/V_T} - 1)\end{aligned}$$

Indicando con  $\beta_R = I_S/I_{BCS}$ , abbiamo che

$$\begin{aligned}I_E &= -\beta_R I_B \\I_C &= -(\beta_R + 1)I_B \\I_E &= \frac{\beta_R}{1 + \beta_R}I_C = \alpha_R I_C\end{aligned}$$

Il crescere di  $\beta_R$  aumenta le prestazioni del transistor:  $\alpha_R \approx 1$ .

Nota:  $F$  e  $B$  a pedice, indicano *Forward* e *Reverse*

### Regione di interdizione

$V_{BE} < 0$  e  $V_{BC} < 0$  ci portano ad osservare che ciascuna delle espressioni esponenziali è trascurabile, quindi:

$$\begin{aligned}I_C &= I_{BCS} \\I_B &= -I_{BES} - I_{BCS} \\I_E &= I_{BES}\end{aligned}$$

"Il modello non ha bisogno dell'aggiunta di un generatore controllato per essere descritto".

### Regione di saturazione

$V_{BE} > 0$  e  $V_{BC} > 0$  indica che nessun esponenziale è trascurabile. Tutte le correnti dipendono da entrambe le tensioni di funzionamento  $V_{BE}$  e  $V_{BC}$ .

## Amplificatore invertente di tensione per piccoli segnali

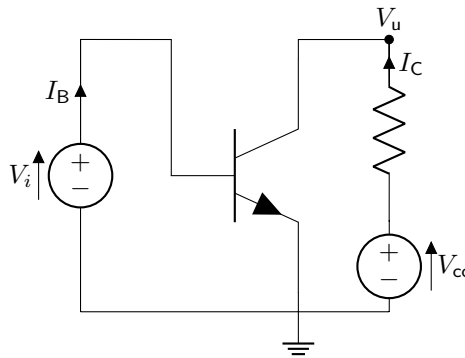
Utilizzando le approssimazioni appena ricavate nel circuito in figura 5

### Regione attiva diretta

$$V_u = V_{BE} - V_{BC} > 0$$

$$V_u = -RI_C = -RI_s(e^{V_{BE}/V_T} - 1) < 0$$

Quindi il circuito non può funzionare in regione normale. Modifichiamo quindi il circuito aggiungendo un generatore di tensione  $V_{cc}$  tale che  $V_u = V_{cc} - RI_C > 0$ . Mantenendo compatibilità con la prima ipotesi.



Siccome ci siamo assicurati che il circuito funzioni in regione attiva diretta, verifichiamo ora se è possibile che tale circuito funzioni in regione attiva inversa:

### Regione attiva inversa

$$V_u = V_{BE} - V_{BC} < 0$$

$$V_u = V_{cc} - RI_C > 0$$

Abbiamo dimostrato quindi che questo circuito, corretto appositamente per farlo lavorare in regione attiva diretta, non può lavorare in regione attiva inversa. Per funzionare in quest'ultima regione il generatore di tensione  $V_{cc}$  dovrebbe avere una tensione negativa, per questo motivo per analizzare di questo circuito, consideriamo solo tre regioni di funzionamento.

### Regione di interdizione

$$I_C = I_{BEs} \approx 0$$

$$V_u = V_{cc}$$

$$V_{BE} = V_i < 0$$

$$V_{BC} = V_i - V_u < 0$$

### Attiva diretta

$$V_{BE} = V_i > 0$$

$$V_u = V_{cc} - RI_s(e^{V_i/V_T} - 1)$$

In regione di saturazione abbiamo che

$$I_C = \frac{V_{CC} - V_{CE}}{R}$$

Ricordandoci che in figura 2.2 abbiamo già calcolato una relazione che lega  $I_C$  e  $V_{CE}$ . Tracciamo l'equazione di  $I_C$  appena trovata. Ciascuno dei punti di intersezione in tale figura, rappresenta quindi il luogo dei punti soluzione di questa equazione. Dal grafico quindi possiamo osservare che in regione di saturazione, la tensione di uscita continua a calare, ma tende asintoticamente ad un valore appena maggiore di 0.

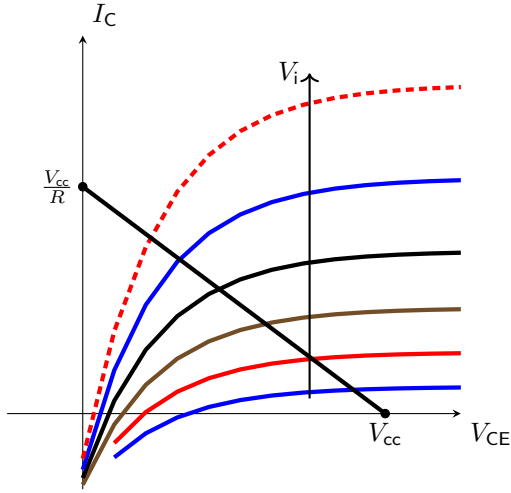


Figure 8: Grafico con ramo di carico

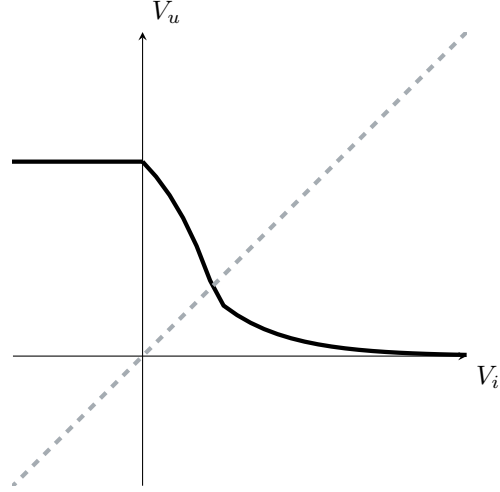


Figure 9: Andamento qualitativo di  $V_u$  in funzione di  $V_i$

In particolare, il valore a cui asintoticamente tende la tensione in uscita è dato da

$$I_C = I_S(e^{V_{BE}/V_T} - 1) - (I_S + I_{BCS})(e^{V_{BC}/V_T} - 1) = 0$$

Dove entrambi i termini 1 sono trascurabili, siccome entrambi gli esponenziali sono maggiori di 1.

$$V_{CE} = V_T \ln \frac{1}{\alpha_R}$$

Quindi  $V_{CE}$  è strettamente positivo, dato che  $\alpha_R$  è compreso tra 0 ed 1, quindi il suo reciproco è maggiore di 1, e rispettivo logaritmo è positivo. Inoltre dato che questa espressione non dipende da  $V_{BE}$ , significa che tutte le caratteristiche intersecano l'asse delle ascisse in corrispondenza di tale valore.

Considerando ora un punto  $(V_{i0}, V_{u0})$  appartenente al tratto di polarizzazione attiva diretta, la retta tangente al grafico in tale punto ha equazione  $V_u - V_{u0} = m(V_i - V_{i0})$ , il termine  $m$ , uguale alla derivata di  $V_u$  rispetto a  $V_i$ , calcolata in  $(V_{i0})$ , è chiamato "guadagno di tensione" ed è indicato dal simbolo  $A_V$ .

Dato che la corrente  $I_C(V_{i0}) = I_{c0} = I_S(e^{V_{i0}/V_T} - 1)$ , e siamo in regione attiva diretta (quindi il termine 1 è trascurabile rispetto all'esponenziale), possiamo dire che  $I_{c0} = I_S e^{V_{i0}/V_T}$ . Quindi se calcolando il guadagno di tensione in  $V_{i0}$  otteniamo:

$$V_u = V_{CC} - R I_S (e^{V_i/V_T} - 1)$$

$$\left. \frac{dV_u}{dV_i} \right|_{V_{i0}} = -\frac{R I_S}{V_T} e^{V_{i0}/V_T} = -\frac{R}{V_T} I_{c0}$$



Per dare una stima a questo rapporto, prendiamo ad esempio un punto intermedio, in cui  $V_{u0} \approx 2.5V$ . Mentre la tensione termica  $V_T$  che compare a denominatore è dell'ordine di grandezza di  $25mV$ , quindi  $A_V \approx -100$ . Questo valore significa che in regione attiva diretta, le piccole variazioni di un segnale in ingresso, vengono amplificate di un fattore  $A_V = 100$ . Comportamento tipico di un amplificatore di tensione per piccoli segnali. Ovviamente, se il segnale di ingresso raggiunge la regione di saturazione, il segnale d'uscita non sarà più sinusoidale.

Facendo riferimento ad un segnale binario, il quale può assumere solamente i valori  $V_H$  molto grande e  $V_L$  prossimo a zero, allora il circuito si comporta come un invertitore.

## Approssimazione Transistor BJT

Esattamente come abbiamo fatto nel caso del diodo, approssimiamo nello stesso modo le caratteristiche del transistor bipolare. Osservando i grafici in figura 6 e 7, possiamo formulare un modello lineare, valido nelle tre regioni di funzionamento, trascurando la regione inversa. Siccome dai calcoli svolti in precedenza, sappiamo che il grafico in figura 7 non passa per lo zero, chiamiamo tale punto  $V_{CE_{SAT}} = 0.2V$ .

Inoltre, siccome in saturazione entrambi i diodi sono in polarizzazione diretta

$$V_{CE} = V_{BE_{on}} - V_{BC_{on}} = V_{CE_{SAT}}$$

Sapendo già che in polarizzazione diretta  $V_{BE_{on}} = V_\gamma$ , possiamo dire che  $V_{BC_{on}} = 0.55V = V'_\gamma$ , quindi le tensioni base-emettitore e base-collettore in polarizzazione diretta, sono diverse tra di loro.

<b>OFF</b> $\begin{cases} I_B = 0, & V_{BE} < V_\gamma \\ I_C = 0, & V_{BC} < V'_\gamma \end{cases}$	<b>AD</b> $\begin{cases} I_B > 0, & V_{BE} = V_\gamma \\ I_C = \beta_F I_B > 0, & V_{CE} > V_{CE_{SAT}} \end{cases}$
<b>SAT</b> $\begin{cases} I_B > 0, & V_{BE} = V_\gamma \\ I_C < \beta_F I_B, & V_{CE} = V_{CE_{SAT}} \end{cases}$	

In questo caso, siccome abbiamo a che fare con due giunzioni, abbiamo bisogno di definire due correnti, e per ciascuna delle regioni abbiamo due disequazioni che descrivono la validità delle due equazioni.

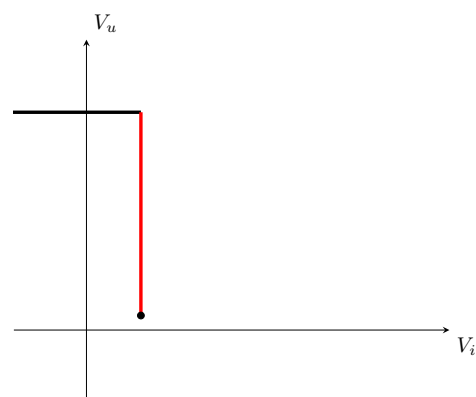
### Studio del circuito utilizzando il modello approssimato

<b>OFF</b> $\begin{cases} V_u = V_{CC} \\ V_i < V_\gamma \end{cases}$	<b>AD</b> $\begin{cases} V_{CE_{SAT}} < V_u < V_{CC} \\ V_i = V_\gamma \end{cases}$	<b>SAT</b> $\begin{cases} V_i = V_\gamma \\ V_u = V_{CE_{SAT}} \end{cases}$
---	---	---

Questo modello rappresenta il tratto a pendenza elevata, con un tratto a pendenza infinita (tratto verticale). Se stiamo progettando un' amplificatore analogico, il quale si basa sul determinare il guadagno del circuito ( $A_V$ ), non è una buona approssimazione.

Inoltre il modello rappresenta tutta la regione di saturazione con un unico punto, di coordinate  $(V_\gamma, V_{CE_{SAT}})$  quindi è un'approssimazione non accettabile.

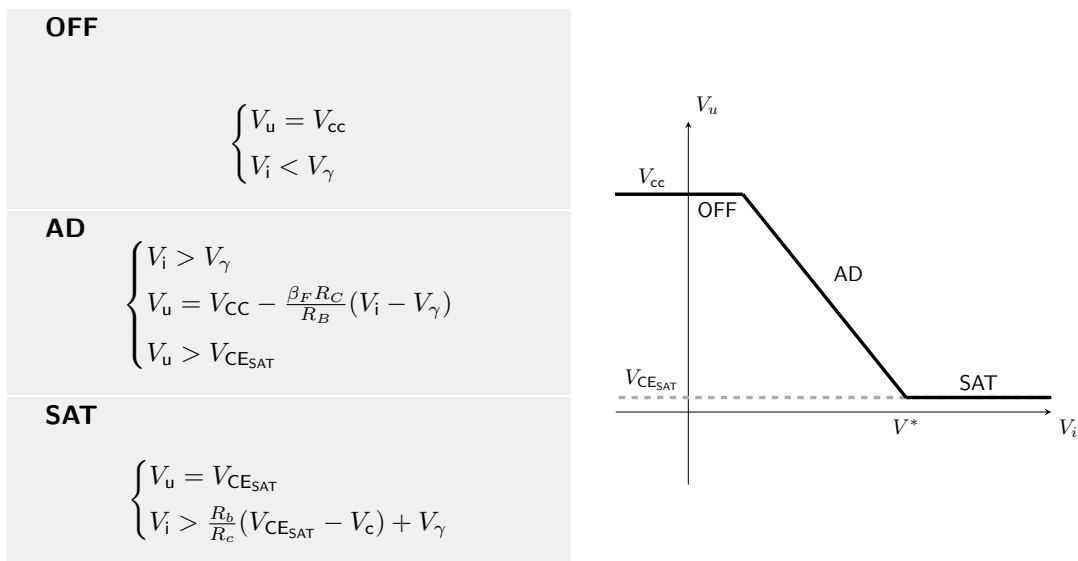
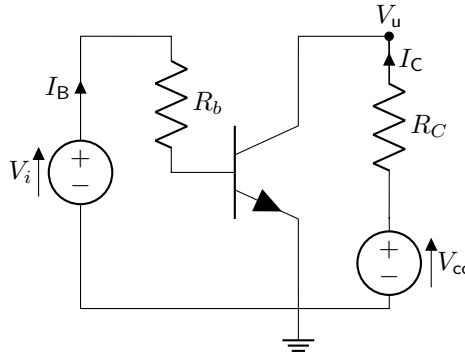
La spiegazione di questo fenomeno è che, siccome



$\lim_{V_i \rightarrow \infty} I_C = \infty$  non esiste un asintoto verticale, mentre noi stiamo approssimando tutte le possibili relazioni corrente-tensione con un'unica retta verticale.

Se osserviamo per quali ordini di grandezza di corrente, questo modello non rappresenta accuratamente il valore della tensione in uscita, sono dell'ordine dei giga ampere. Il circuito visto ora, non è realistico perché non ci sono limitazioni per i valori di corrente  $I_B$ , aggiungiamo quindi una resistenza alla base, per limitare la corrente, e rianalizziamo il circuito con il modello lineare.

### Analisi dello stesso circuito con corrente limitata



Il modello a soglia descrive con un'ottima approssimazione i casi in cui la corrente si mantiene limitata. Il guadagno in questo modello lineare è esattamente il coefficiente angolare del tratto in regione attiva diretta:  $-\beta_F R_C / R_B$ . Dato che dipende solamente dai valori delle due resistenze del circuito, è possibile aumentare o diminuire arbitrariamente il guadagno introducendo una resistenza variabile nel circuito.

### Valutazione metodo di approssimazione

Mettendo insieme l'equazione di tensione e corrente della maglia in ingresso:

$$\begin{aligned} V_i - R_B I_B - V_{BE} &= 0 \\ I_B &= I_{BES} (e^{V_{BE}/V_T} - 1) \end{aligned}$$

ottengo  $V_i = R_B I_B + V_T \ln(I_B / I_{BES} + 1)$ .

Si può vedere dall'espressione come la corrente di base influenza la tensione in ingresso con un termine logaritmico ed uno lineare, seguendo l'andamento del grafico nero in figura 10. Ad  $I_B > 0$  la tensione in ingresso ha un andamento pressoché lineare, quindi una variazione lineare

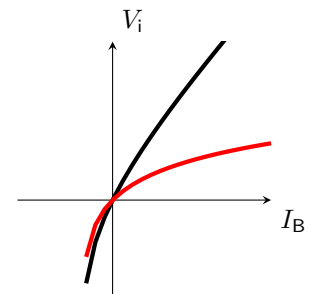


Figure 10: test

di tensione corrisponde ad una variazione lineare di corrente. Ciò significa che la corrente in ingresso è dissipata più facilmente sulla resistenza che sulla giunzione base-emettitore. Diverso è il caso precedente, rappresentato dal grafico rosso, dove per mancanza di resistenza a piccole variazioni della tensione in ingresso corrispondono grandi variazioni di corrente, e siccome manca la resistenza in ingresso, per raggiungere la stessa quantità di corrente è necessario raggiungere valori di tensione molto più elevati.

Riassumendo: Quando la giunzione è in serie ad una resistenza qualunque variazione in ingresso si scarica prevalentemente sulla resistenza consentendo un'approssimazione di tensione costante. Nel caso in cui manchi la resistenza, non si può pensare di applicare un modello che consideri la tensione in ingresso costante se quest'ultima è variabile per definizione.

# Logica RTL: Transistor Resistor Logic

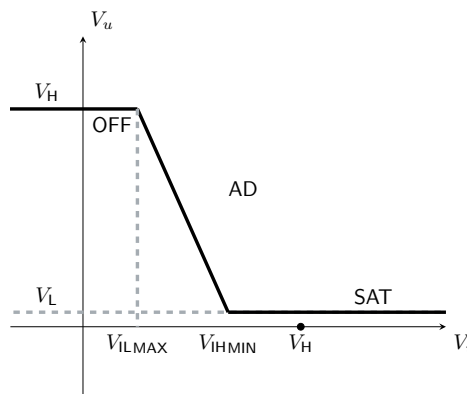
Se associamo a valori di tensione alti e bassi ( $V_H$ ,  $V_L$ ) una codifica logica 1 e 0, il circuito precedente si comporta come un invertitore logico.

Bisogna ricordare che anche il trasporto di carica (corrente) non è uniforme, ed è soggetto anch'esso a rumore. Il problema che ha questo circuito visto come amplificatore è che amplifica il rumore in ingresso ed il segnale in ingresso dello stesso fattore  $A_V$ . Inoltre dato che il segnale in ingresso varia di poco, la qualità del segnale d'uscita risente molto delle variazioni di rumore.

Diversamente lo stesso circuito visto come invertitore logico, anche a rumore elevato fa il suo lavoro.

L'immunità al rumore è caratterizzato dalle due caratteristiche a guadagno 0 (off e sat). Solo a fronte di valori estremamente alte di rumore, in grado di entrare nella fascia intermedia, si manifestano sul segnale in uscita.

## Margine di immunità al rumore



Dal grafico sono distinguibili un valore basso  $V_L \equiv V_{CE\text{SAT}}$ , ed un valore alto  $V_H \equiv V_{CC}$ . La caratteristica da invertitore è esprimibile come  $V_u(V_H) = V_L$  e  $V_u(V_L) = V_H$ . Inoltre siccome questo circuito tollera il rumore, per rumore minore di  $\delta_1$  l'uscita  $V_u$  sarà ugualmente  $V_u(V_L + \delta_1) = V_L$ . Chiamiamo quindi  $V_{IL\text{MAX}} = V_L + \delta_1$  il massimo valore della tensione d'ingresso che produce in uscita un  $V_H$ . Analogamente chiamo  $V_{IH\text{MIN}} = V_H - \delta_2$  il massimo valore della tensione d'ingresso che produce ancora un'uscita  $V_L$ . Il margine di immunità al rumore  $N_M$  è il minimo tra  $\delta_1$  e  $\delta_2$ .

Dato che sappiamo già i valori di  $V_H$  e  $V_L$ , calcolando  $V_{IH\text{MIN}}$  come punto di intersezione tra la zona attiva diretta e di saturazione, otteniamo:

$$\delta_1 = V_{IL\text{MAX}} - V_L = 0.75 - 0.2 = 0.55V$$

$$\delta_2 = V_H - V_{IH\text{MIN}} = 5 - 1.23 = 3.77V$$

Da cui  $N_M = 0.55V$ . Per avere immunità al rumore è necessario che  $\delta_1 = V_{IL\text{MAX}} - V_L$  e  $\delta_2 =$

$V_H - V_{I\text{HMIN}}$  siano positivi sarà positiva anche la loro somma, per questo possiamo dire che

$$\frac{V_H - V_L}{V_{I\text{HMIN}} - V_{I\text{LMAX}}} > 1$$

Facendo sempre riferimento al grafico è facile capire che rapporto tra  $V_H - V_L$  e  $V_{I\text{HMIN}} - V_{I\text{LMAX}}$  è  $|A_V|$ . Per cui  $|A_V| > 1$ . Maggiore sarà il valore di  $|A_V|$ , migliore è la proprietà di filtro per il rumore di questo circuito.

Il risultato ottenuto dipende fortemente dall'approssimazione lineare utilizzata, dato il valore alto  $V_H$  ed il valore basso  $V_L$  sono stati definiti graficamente, in corrispondenza di  $V_{CC}$  e  $V_{CE\text{SAT}}$ . Generalizziamo quindi questa definizione facendo riferimento ad altri circuiti.

Preso un andamento di circuito generico (es. figura 9) rimane ancora vero che esistono due regioni con guadagno basso ed una con guadagno maggiore di 1, ma la distinzione di  $V_H$  e  $V_L$  non è ovvia come nel caso precedente.

Per identificare il valore di  $V_L$  e  $V_H$ , facciamo il seguente ragionamento: considerando una serie di  $n$  invertitori, l'andamento del valore di uscita sarà identico per tutti gli invertitori di posto pari, mentre sarà invertito per tutti gli invertitori di posto dispari. Dato che gli invertitori di posto dispari dovranno corrispondere alla funzione inversa degli invertitori di posto pari, il loro grafico è uguale al grafico degli invertitori di posto pari ma specchiato rispetto alla bisettrice.

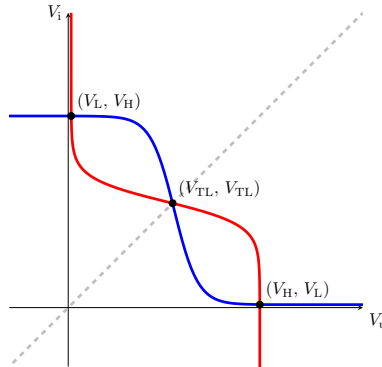


Figure 11: Grafico

Siccome è ovvio che quando tutti gli invertitori sono connessi in cascata, le loro condizioni devono essere soddisfatte, esistono solo 3 punti in queste caratteristiche che soddisfano le equazioni (vedi figura 11). Le coppie di punti  $(V_L, V_H)$  e  $(V_H, V_L)$  sono simmetrici per costruzione, per questo sono i valori  $V_H$  e  $V_L$  che stavamo cercando.

Definiamo questo punto l'escursione logica  $L_S$  (*Logic Swing*) come  $V_H - V_L$ .

Il punto  $(V_{TL}, V_{TL})$  è tale per cui se posto in ingresso al primo invertitore, si propaga invariato fino al termine della catena. In realtà questa condizione è quasi impossibile, siccome ci troviamo in una zona con  $|A_V| > 1$  ed al primo segnale di rumore veniamo spostati verso  $V_H$  o  $V_L$ , allontanandoci dal punto di precario equilibrio, detto anche metastabile.

Possiamo osservare che la qualità (intesa come distanza da  $V_H$  o  $V_L$ ), aumenta, lungo la catena di

invertitori. Questa proprietà prende il nome di **proprietà rigenerativa del segnale**.

Per questo motivo, osservando anche in ingresso un valore compreso in un intorno di  $V_L$ , per la proprietà appena citata, esso viene trattato ugualmente come valore nominale basso. Il valore  $V_{TL}$  si comporta quindi come soglia logica, discriminando i valori alti dai valori bassi.

Questa proprietà è strettamente legata alla disuguaglianza  $|A_V| > 1$ . Nel caso quest'ultima non fosse verificata, osserviamo che il punto di intersezione delle due caratteristiche è uno solo (vedi figura da fare)

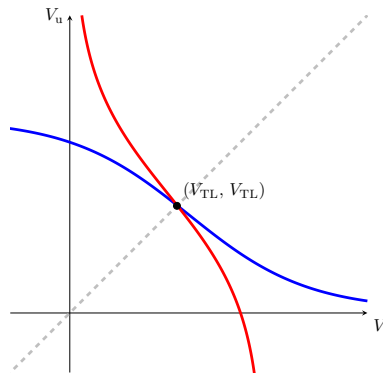


Figure 12: grafico per  $|A_V| < 1$

Quindi in caso  $|A_V| < 1$  ogni punto in ingresso alla catena di invertitori, convergerebbe in  $(V_{TL}, V_{TL})$ .

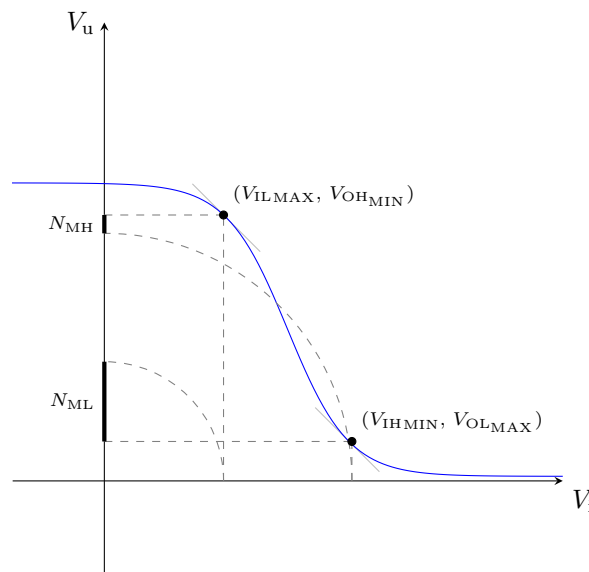


## Margine di immunità ai disturbi

Rimane comunque vero che se il guadagno è minore di 1, il rumore in uscita è minore del rumore in ingresso, mentre se il guadagno è maggiore di 1, il rumore in ingresso è amplificato. Possiamo quindi identificare due punti, con guadagno  $|A_V| = 1$ , per suddividere i tratti di caratteristica, identificati da  $|A_V| < 1$  e  $|A_V| > 1$ .

Utilizzando la stessa nomenclatura della logica RTL, chiamiamo  $V_{ILMAX}$ , il punto per cui il tratto  $0 < x < V_{ILMAX}$  ha  $|A_V| < 1$ , e  $V_{IHMIN}$  il tratto in cui  $V_{IHMIN} < x$  per cui  $|A_V| < 1$ . Di conseguenza  $V_{ILMAX} < x < V_{IHMIN}$  è caratterizzato da  $|A_V| > 1$ .

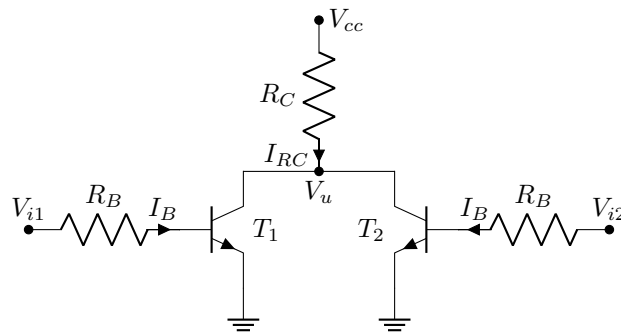
Indichiamo inoltre con  $V_{OHMIN} = V_u(V_{ILMAX})$  il più piccolo valore dell'uscita associato all'attenuazione del rumore. Analogamente  $V_{OLMAX} = V_u(V_{IHMIN})$ .



La massima quantità di rumore accettabile per non uscire dalla regione di attenuazione sono  $N_H = V_{OHMIN} - V_{IHMIN}$  e  $N_L = V_{ILMAX} - V_{OLMAX}$ . Quindi  $N_M = \min(V_{OHMIN} - V_{IHMIN}, V_{ILMAX} - V_{OLMAX})$ . Da questa costruzione risulta evidente che  $L_S > N_H + N_L$ , quindi nel caso in cui una delle due soglie sia controllata (ad esempio da una resistenza variabile) e dovesse aumentare di valore, l'altra sarebbe costretta a diminuire, per evitare che la somma superi  $L_S$ .

La condizione ottimale per avere massimo margine ai disturbi è quindi in caso in cui  $N_L$  e  $N_H$  siano simmetrici. (nel caso di approssimazione i punti coincidono con  $v_h$  e  $v_l$ , dato che per approssimazione non ci sono punti con derivata  $= -1$ , passa dal valore in modulo  $< 1$  a modulo  $> 1$ )

## Porta logica NOR



Supponendo i valori delle resistenze  $R_C = 1k\Omega$  e  $R_B = 10k\Omega$ , e  $\beta_F = 100$  vogliamo valutare il comportamento di questa rete al variare dei due ingressi  $V_{i1}$  e  $V_{i2}$ , prendendo il caso di segnali in ingresso digitali:  $V_i = \{V_H, V_L\}$ . Le combinazioni possibili in ingresso sono quindi enumerabili e studiabili individualmente.

### Equazioni Generali

$$I_{RC} = I_{C1} + I_{C2}$$

$$V_i - R_B I_B - V_{BE} = 0$$

Nel caso di un qualsiasi transistor spento, considerando che  $V_{BE} < V_\gamma$  per ipotesi, otteniamo  $V_i < V_\gamma$ .

**Per  $V_{i1} = V_{i2} = V_L$**

$$V_i < V_\gamma$$

$$V_u = V_{cc}$$

**Per  $V_{i1} V_L, V_{i2} = V_H$**

Osservando l'alta tensione ricevuta all'ingresso, è ragionevole ipotizzare che  $T_2$  si trovi in regime di funzionamento saturo. Verificando quindi le ipotesi:

$$I_B = \frac{V_{cc} - V_\gamma}{R_B} = 0.425mA > 0$$

$$I_C = \frac{V_{cc} - V_{CE_{SAT}}}{R_C} = 4.8mA < \beta_F I_B = 42.5mA$$

Per cui in questo caso  $V_u = V_{CE_{SAT}} = V_L$

Per  $V_{i1} = V_{i2} = V_H$

Per ragionamento analogo al caso precedente, ci aspettiamo che entrambi i transistori siano saturi. Quindi  $V_u = V_{CE_{SAT}} = V_L$

$$I_B = \frac{V_{cc} - V_\gamma}{R_B} = 0.425mA > 0$$

$$I_{RC} = \frac{V_{cc} - V_{CE_{SAT}}}{R_C} = 4.8mA < \beta_F I_B = 42.5mA$$

Essendo il circuito perfettamente simmetrico non c'è motivo di ipotizzare che  $I_{C1} \neq I_{C2}$ . Per cui  $I_{C1} = I_{C2} = 4.8mA$ , quindi sono verificate entrambe le condizioni  $I_C < \beta_F I_B$ .

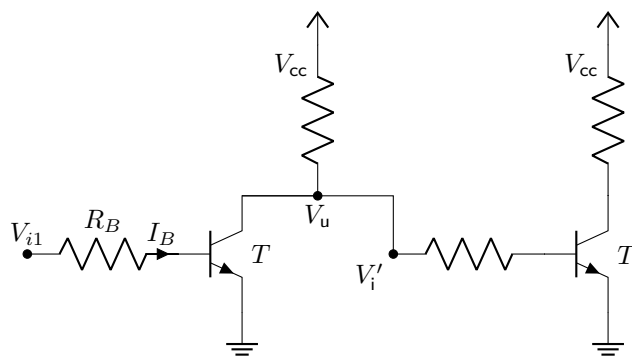
Questa rete si comporta come una porta logica NOR. La rete composta dai transistori  $T_1$  e  $T_2$  è definita come **rete di pulldown**, ovvero quando è accesa, trascina il valore di uscita verso il valore basso. Analogamente è possibile interpretare la rete composta dalla resistenza  $R_c$  come una **rete di pullup**: quando non è contrastata da reti di pulldown attive, l'uscita viene portata a  $V_H$  da  $R_c$  dove non circola corrente.

Osserviamo che questo circuito si comporta allo stesso modo se alla rete di pulldown è composta da più di due transistori, dato che la corrente  $I_{RC}$  sarebbe suddivisa equamente tra tutti i transistori accesi, mantenendo vera l'ipotesi  $I_C < \beta_F I_B$ . Quindi questo circuito è generalizzabile ad una porta NOR a numero arbitrario di ingressi.

L'insieme degli ingressi prende il nome di FAN-IN. Analogamente il numero delle uscite prende il nome di FAN-OUT.

L'operatore NOR rappresenta di per sé una famiglia funzionalmente completa. Per questo con logica RTL è possibile realizzare qualsiasi funzione combinatoria.

Manca da analizzare se la connessione in serie delle seguenti porte NOR, mantenga il valore del segnale.



### T OFF

Partendo ad analizzare la condizione per cui  $T$  OFF otteniamo che  $V_u = V_{cc} - R_C I_B$ . Nel caso in cui anche  $T'$  sia OFF, allora  $I'_B$  è 0 e di conseguenza:

$$V_u = V_{cc}$$

$$V_u = V'_i - R'_B = V'_{BE}$$

Ma ciò non è possibile dato che se  $T'$  è OFF, allora  $V'_{BE} < V_\gamma$ . Quindi  $T'$  non può essere OFF se  $T$  è OFF. Quindi  $T'$  è necessariamente acceso, con  $V'_{BE} = V_\gamma$ . Dall'equazione di kirchoff al nodo  $V_u$ :

$$\frac{V_{cc} - V_u}{R_C} = \frac{V_u - V_\gamma}{R_B}$$

Ottenendo  $V_u = \frac{R_B V_{cc} + R_C V_\gamma}{R_B + R_C} < V_\gamma$  svolgendo la disequazione si ottiene:  $V_\gamma < V_{cc}$ . Sostituendo inoltre i dati utilizzati nel circuito precedente, otteniamo  $V_u = 4.61V$

### T in AD

$$V_u = V_{cc} - R_C \left\{ \beta_f \frac{V_i - V_\gamma}{R_B} + \frac{V_u - V_\gamma}{R_B} \right\}$$

Da cui

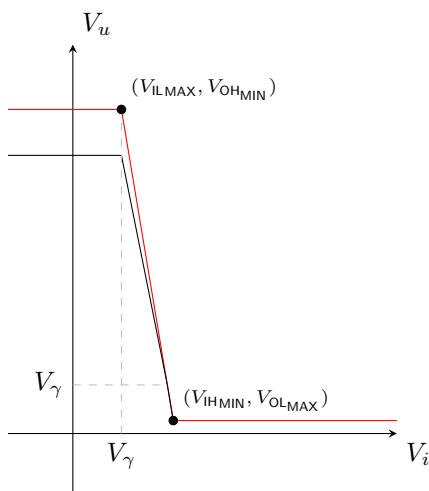
$$V_u = \frac{R_B V_{cc} + R_C V_\gamma}{R_B + R_C} - \frac{\beta_F R_C}{R_B + R_C} (V_i - V_\gamma)$$

Osserviamo come il termine blu è identico a quello calcolato in precedenza, nel tratto di regione attiva diretta, mentre il tratto rosso è un guadagno di modulo minore rispetto a quello di prima ( $\frac{\beta_F R_C}{R_B}$ ).

Questa condizione è valida fino a quando o  $T$  passa alla regione di saturazione ( $V_u = V_{CE_{SAT}}$ ) o  $T'$  passa in regione attiva diretta ( $V_u = V_\gamma$ ). Dato che  $V_u < V_\gamma$  avverrà prima, sostituendo tale valore nell'equazione di  $V_u$  segue  $V_i = 1.175V$

### T in AD e T' OFF

Questo tratto di caratteristica corrisponde esattamente al precedente.



Delle quattro coordinate utilizzate per calcolare il margine di rumore, solo una è modificata dal fatto

che il FAN-OUT è modificato da 0 a 1. Il margine  $N_{ML}$  definito quindi per il livello basso rimane invariato:  $N_{ML} = V_{ILMAX} - V_{OLMAX} = V_{\gamma} - V_{CESAT} = 0.55V$ . Diversamente il margine  $N_{MH}$  varia:  $N_{MH} = V_{OHMIN} - V_{IHMIN} = 4.61 - 1.23 = 3.37V$ .

Il margine complessivo, rimanendo definito come il minimo tra  $N_{ML}$  e  $N_{MH}$  rimane invariato a  $0.55V$ .

Nel caso di un FAN-OUT generico ad  $n$  porte il valore  $N_{MH}$  tenderà a calare, dato che, la corrente del transitorio di pullup è richiamata dagli altri componenti connessi.

Generalizzando con  $n$  componenti connessi che condividono  $V_u$  come tensione in ingresso, dato che tutti hanno la stessa  $V_i$ , tutti i transistori si troveranno nella stessa regione di funzionamento. Quindi le correnti in ingresso  $I_B$  necessariamente coincidono quindi  $I_{RC} = I_C + nI'_B$ .

Nell'ipotesi che il transistore  $T$  sia spento:

$$I_{RC} = \frac{V_{cc} - V_u}{R_C}$$

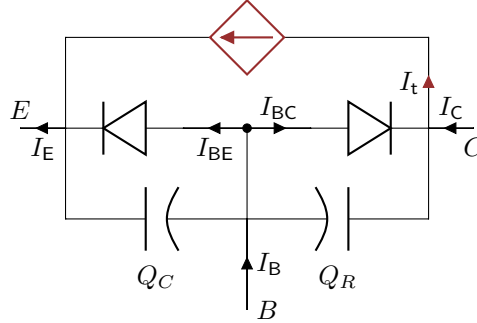
$$I'_B = \frac{V_u - V_{\gamma}}{R_B}$$

Ottenendo la generica relazione:

$$V_u(n) = V_{OHMIN}(n) = \frac{R_B V_{cc} + n R_C V_{\gamma}}{R_B + n R_C}$$

Da cui  $N_{MH} = V_{OHMIN}(n) - 1.23$ . Definiamo con FAN-OUTmax il massimo punto in per cui il valore di  $N_{MH}$  rimane superiore a  $N_{ML}$ . Risolvendo l'equazione  $0.55 = V_{OHMIN}(n) - 1.23$  otteniamo  $n = 31.26$ , per questo FAN-OUTmax è 31.

# Transistor in regione dinamica



A pagina 12 è stato analizzato il diodo in regime dinamico.

Effettuiamo quindi un'analisi analoga al transistore bipolare, utilizzando come formule, quelle del modello di Ebers e Moll.

Dato che i termini esponenziali compaiono spesso, introduciamo per semplicità le seguenti notazioni:

$$X_{BE} = (e^{V_{BE}/V_T} - 1) = \frac{I_F}{I_S}$$

$$X_{BC} = (e^{V_{BC}/V_T} - 1) = \frac{I_R}{I_S}$$

Inoltre indichiamo con  $I_F = I_S X_{BE}$  e  $I_R = I_S X_{BC}$  le correnti forward e backward che si manifestano. Ricordandoci che  $\alpha_R = \frac{I_S}{I_S + I_{BCS}}$  e  $\alpha_F = \frac{I_S}{I_S + I_{BES}}$ , le formule del modello sono esprimibili come:

$$I_C = I_F - \frac{I_R}{\alpha_R}$$

$$I_E = \frac{I_F}{\alpha_F} - I_R$$

$$I_B = \frac{I_F}{\beta_F} + \frac{I_R}{\beta_R}$$

Queste equazioni descrivono le tre correnti statiche del transistore, alle quali vogliamo aggiungere le correnti dinamiche, come nel caso del diodo.

Aggiungiamo quindi due capacità parassita alla giunzione, chiamate rispettivamente  $Q_F$  e  $Q_R$ .

Introduciamo quindi relazioni analoghe a descrivere le due cariche:

$$Q_F = Q_{Fs} X_{BE} = Q_{Fs} \frac{I_F}{I_S}$$

$$Q_R = Q_{Rs} X_{BC} = Q_{Rs} \frac{I_R}{I_S}$$

Da cui seguono le relazioni:

$$\frac{Q_F}{I_F} = \frac{Q_{Fs}}{I_S} = \tau_F$$

$$\frac{Q_R}{I_R} = \frac{Q_{Rs}}{I_S} = \tau_R$$

Sostituendo queste relazioni alle formule in regime statico otteniamo il modello:

$$\begin{aligned} I_C &= \frac{Q_F}{\tau_F} - \frac{Q_R}{\alpha_R \tau_R} \\ I_E &= \frac{Q_F}{\alpha_F \tau_F} - \frac{Q_R}{\tau_R} \\ I_B &= \frac{Q_F}{\beta_F \tau_F} - \frac{Q_R}{\beta_R \tau_R} \end{aligned}$$

In altre parole, siccome tutte le correnti e cariche dipendono linearmente dagli stessi esponenziali, è possibile ricavare una relazione che lega le correnti alle cariche.

Queste equazioni descrivono ancora il modello statico del transistor, ma lega però il valore statico della carica immagazzinata alle due giunzioni. Se ci muoviamo in regime dinamico, non è più vero che la corrente sui condensatori è nulla, ma è esprimibile come  $\frac{dQ_F}{dt}$  e  $\frac{dQ_R}{dt}$ , ottenendo le nuove relazioni:

$$\begin{aligned} I_C &= \frac{Q_F}{\tau_F} - \frac{Q_R}{\alpha_R \tau_R} - \frac{dQ_R}{dt} \\ I_E &= \frac{Q_F}{\alpha_F \tau_F} - \frac{Q_R}{\tau_R} + \frac{dQ_F}{dt} \\ I_B &= \frac{Q_F}{\beta_F \tau_F} - \frac{Q_R}{\beta_R \tau_R} + \frac{dQ_F}{dt} + \frac{dQ_R}{dt} \end{aligned}$$

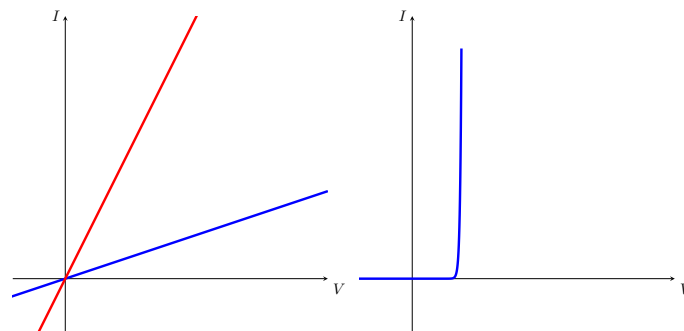
Chiameremo questo modello: **modello a controllo di carica**, nel senso che le espressioni sono dipendenti dalla carica e non più dalla tensione.

# Dispositivi e Circuiti Elettronici

I dispositivi elettronici, devono le loro proprietà dai materiali semiconduttori: La corrente elettrica  $I = \frac{dQ}{dt}$  è generata da movimenti di carica, uno dei modi per mettere in moto la carica è attraverso un campo elettrico. In particolare la densità di corrente elettrica  $\vec{J}$  può essere legata al campo elettrico  $\vec{E}$  attraverso la relazione  $\vec{J} = \sigma \vec{E}$ , con  $\sigma$  conducibilità elettrica.

I materiali sono classificabili per il valore di  $\sigma$ , un basso valore di conducibilità indica una bassa corrente, caratteristica dei materiali isolanti. Valori di  $\sigma$  alti comportano un'alta corrente, caratteristica dei materiali conduttori.

I semiconduttori sono materiali con conducibilità elettrica  $\sigma$  variabile (ad esempio in funzione della temperatura). Guardando il caso del componente resistenza, la corrente ai capi di essa dipende dall'inverso della costante  $R$ , quindi, a tensione costante, maggiore è la resistenza, minore è la corrente misurata ai due capi del componente.



Possiamo osservare che il comportamento della corrente del diodo è completamente differente, e la legge di ohm ( $\vec{J} = \sigma \vec{E}$ ) è valida in forma locale.

Analizziamo quindi più nel dettaglio la struttura dei materiali semiconduttori.

Gli elettroni dei materiali orbitano attorno ai rispettivi nuclei, perché si trovano in uno stato di equilibrio, dovuto alle forze coulombiane, tale per cui la somma complessiva delle cariche di un atomo è nulla.

Maggiore è l'orbita degli elettroni attorno al nucleo, maggiore è la velocità degli elettroni. Inoltre siccome la forza attrattiva dipende dal quadrato della distanza, più esterna è l'orbita, minore è la forza attrattiva che si manifesta.

All'ampiezza dell'orbita è quindi associato inversamente la forza attrattiva del nucleo, ed un'energia cinetica legata alla velocità di percorrenza.

Possiamo quindi, gli elettroni interni ad un atomo generico in funzione dell'energia da essi posseduta, ottenendo un diagramma simile a quello in figura ..., distinta da diversi livelli

Ad ogni elettrone è dunque associato un livello sull'asse delle energie. Per il principio di quantizzazione, dell'energia, non tutti i possibili livelli di energia sono possibili. L'asse quindi non è continua, ma quantizzata.

È importante notare che le orbite degli elettroni attorno agli atomi non sono descritte dalla meccanica





classica, ma dalla meccanica quantistica, dove gli elettroni sono descritti attraverso forme sinusoidali.

Per questo motivo è possibile associare agli elettroni una lunghezza d'onda  $\lambda$ , dove nel caso di ipotesi stazionaria, è necessario che la circonferenza dell'orbita sia multiplo di  $\lambda$ .

Questo spiega a grandi linee la presenza di valori permessi e proibiti sull'asse delle energie.

### Principio di esclusione di Pauli

Ciascun livello energetico è occupabile al più da due elettroni (con spin opposto). In altre parole, il numero di elettroni che possono avere una certa distanza dal nucleo è finito.

Da questo è possibile dedurre che è possibile occupare interamente i livelli di energia.

Spostare corrente vuol dire spostare elettroni, cambiandone la velocità, quindi aumentandone l'energia cinetica, vincolata dai livelli di energia e dal principio di esclusione.

Per muovere un'elettrone quindi serve almeno l'energia per raggiungere il livello energetico libero più vicino.

Nel momento in cui due atomi diventino abbastanza vicini da interagire, quello che mi posso aspettare è che gli elettroni dei rispettivi atomi esercitino una forza repulsiva, con l'effetto di modificare l'orbita dei due elettroni.

Considerando quindi un unico diagramma energetico per il sistema dei due atomi, quello che ottengo è che i livelli non si sovrappongono ma si scostano leggermente, mantenendo comunque i principi di quantizzazione ed esclusione.

Generalizzando il discorso con un'interazione di  $n$  atomi, otteniamo che ai precedenti livelli energetici, corrisponderà una moltitudine di livelli permessi, tra loro poco differenti, chiamata *banda permessa*. I valori di energia tra due bande permesse, prendono il nome di *banda proibita*.

È importante sottolineare che i valori interni alla banda permessa rispettano ancora il principio di esclusione e di quantizzazione, quindi è possibile che un'intera banda sia occupata da elettroni.

In condizione di quiete, gli elettroni tendono spontaneamente ad occupare i livelli con minore energia, quindi quelli più bassi.

La statistica di fermi indica un valore limite (*Livello di Fermi*) che indica, in assenza di perturbazione, in termini probabilistici, tutti i livelli che sotto tale valore risultano occupati.

La posizione di questo livello diventa quindi fondamentale per indicare le condizioni di trasporto di

carica del materiale. Nel caso di materiali conduttori, il livello di fermi ricade internamente ad una banda permessa, l'energia richiesta per spostare elettroni da livelli energetici occupati a livelli energetici liberi, è dipendente dalla loro distanza, quindi molto bassa.

Nel caso di materiali isolanti, il livello di fermi ricade all'interno di una banda proibita, l'energia sufficiente richiesta (energy gap) è quella per scavalcare l'intera banda proibita, quindi molto superiore al caso precedente.

I materiali isolanti sono dunque anch'essi soggetti a fenomeni di scarica elettrica.

## **I semiconduttori**

Il semiconduttore ha una struttura simile a quella dell'isolante, quello che differisce è l'ampiezza del gap, richiedendo una quantità di energia bassa per effettuare il "salto" della banda proibita. Se la quantità di energia ricevibile dalla temperatura dall'ambiente è pari o superiore al gap, diventa facile che elettroni passino da una banda energetica superiore. Elettroni quindi nella banda permessa superiore, trovandola completamente vuota, richiedono a loro volta poca energia per muoversi da un livello energetico all'altro, fornendo al materiale caratteristiche di un conduttore. Chiameremo quindi questa nuova banda, banda di conduzione, mentre chiameremo la vecchia banda, banda di valenza.

La banda di valenza, avendo anch'essa livelli svuotati da elettroni spostati in banda di conduzione, richiederà anch'essa poca energia per effettuare salti di gap interni alla banda. La conducibilità elettrica aumenta quindi con la temperatura del circuito.

Riassumendo quindi, un semiconduttore il livello di fermi interseca una banda proibita, la cui ampiezza è sufficientemente piccola da essere probabile l'effetto di scavalco con la sola energia termica. Il semiconduttore ha quindi "due" bande di conduzione.