ale-cci

Modelli Algoritmi per il Supporto alle Decisioni

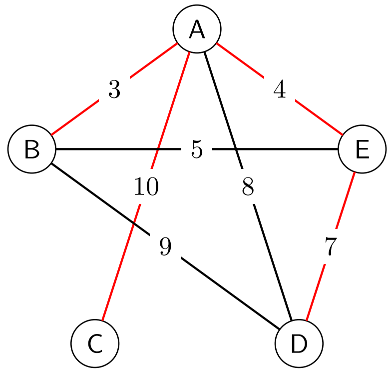
April 1, 2020

Introduction

TODO

Minimum Spanning Tree

Algoritmo di Kruskal (Greedy)




```
from utils import num_vertices

def kruskal(edges: list, N: int) -> list:
    connected = set()
    mst = []

    edges = sorted(graph)
    for edge in edges:
        weight, lhs, rhs = edge

        # Two nodes already connected
        if lhs in connected and rhs in connected:
            continue

        mst.append(edge)
        connected.update({lhs, rhs})

        if len(mst) == N:
            break

    return mst


if __name__ == '__main__':
    graph = [(10, 'A', 'C'), (8, 'A', 'D'),
             (7, 'D', 'E'), (4, 'A', 'E'),
             (3, 'B', 'A'), (9, 'B', 'D'), (5, 'B', 'E')]
    N = num_vertices(edges=graph)

    print(kruskal(graph, N))
```

Correttezza algoritmo di Kruskal

Supponiamo per assurdo che esista un' diverso MST $T' = (V, E_{T'})$ di peso inferiore a $T = (V, E_T)$, quello restituito dall'algoritmo greedy.

Siccome i due alberi hanno costo diverso, differiscono di almeno un' arco. Indichiamo con e_h l'arco a peso minore appartenente a $\{E_T - E_{T'}\}$. Dato che T' è un MST, esiste un ciclo C in $\{e_h\} \cup E_{T'}$ contenente l'arco e_h. Siccome anche T è un albero, quindi non ha cicli, allora $C \cap E_T \neq \emptyset$. Chiamiamo e_r l'arco a peso minore appartenente a $C \cap \{E_T - E_{T'}\}$. Necessariamente $w_{e_r} \leq w_{e_h}$, altrimenti l'algoritmo greedy applicato a T avrebbe selezionato prima e_h al posto di e_r. Sostituendo in T' l'arco e_r con e_h ottengo un nuovo albero di peso inferiore.

Questo va contro l'ipotesi T' è l'albero di supporto a peso minore.

Analisi complessità

$O(E \cdot \log(E))$, dovuta all'ordinamento degli archi in ordine di peso. Il controllo dell'esistenza di cicli è effettuato in $O(1)$.

Foresta di supporto

Viene chiamata foresta di supporto di un grafo G un grafo parziale $F = (V, E_F)$ privo di cicli. In particolare, un albero di supporto è una foresta con una sola componente connessa.

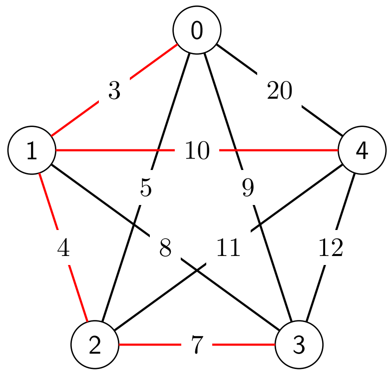
Teorema

Indichiamo con $(V_1, E_1), \ldots, (V_k, E_k)$ le componenti connesse di una foresta di supporto $F = (V, E_F)$ del grafo G. Sia inoltre (u, v) un arco a peso minimo tra quelli con un unico estremo in V_1. Allora esiste almeno un albero di supporto a peso minimo appartenente a $\bigcup_{i=1}^{k} E_i$, che contiene (v, v).

Dimostrazione

Per assurdo, l'albero a peso minimo non contiene (u, v). Ma aggiungendo (u, v) a tale albero si forma un ciclo contenente un altro arco (u', v') con un solo estremo in V_1. Se si toglie questo arco e si lascia (u, v) si ottiene un albero di peso minore, contraddicendo l'ipotesi.

Algoritmo MST-1




```python
def mst_1(w: list) -> list:
    V = set(range(len(w)))  # {0, 1, 2, 3, 4}
    c = [0] * len(V)        # [0, 0, 0, 0, 0]
    U = {0}
    mst = []

    while U != V:
        weight, u = min((w[v][c[v]], v) for v in V - U)
        U.add(u)
        mst.append((u, c[u]))

        for v in V - U:
            if w[v][u] < w[v][c[v]]:
                c[v] = u

    return mst

if __name__ == '__main__':
    w = [[ 0,  3,  5,  9, 20],
         [ 3,  0,  4,  8, 10],
         [ 5,  4,  0,  7, 11],
         [ 9,  8,  7,  0, 12],
         [20, 10, 11, 12,  0]]

    print(mst_1(w))
```

Correttezza MST-1

Inizialmente abbiamo la foresta con $V_1 \equiv U = \{v_1\}, V_i = \{v_i\} \quad i = 2 \ldots n$, con tutti gli $E_i = \emptyset$.

Alla prima iterazione si inserisce l'arco (V_i, v_{j_1}), $j_1 \neq 1$, a peso minimo tra quelli con un solo estremo in $U \equiv V_1$ e quindi, per il teorema visto al paragrafo della foresta di supporto, tale arco farà parte dell'albero di supporto a peso minimo tra tutti i possibili alberi di supporto.

Con l'aggiunta di questo arco, le due componenti connesse (V_1, E_1) e (V_{j_1}, E_{j_1}) si fondono in un'unica componente connessa con nodi $U = \{v_i, v_{j_1}\}$ e l'insieme di archi $E_T = \{(v_1, v_{j_1})\}$, mentre le altre componenti connesse non cambiano. Abbiamo cioè che le componenti connesse

$$(U, E_T), \quad (V_i, \emptyset) i \in \{2, \ldots n\} - \{j_1\}$$

Alla seconda iterazione andiamo a selezionare il nodo v_{j_2} e il relativo arco $(v_{j_2}, c(v_{j_2}))$ con il peso minimo tra tutti quelli con un solo estremo in U. In base al teorema, l'arco $(v_{j_2}, c(v_{j_2}))$ farà parte di un albero di supporto a peso minimo tra tutti quelli che contengono l'unione di tutti gli archi delle componenti connesse, che si riduce ad E_T.

Effettuiamo lo stesso ragionamento per tutti gli n ottenendo l'albero di supporto a peso minimo.

Complessità dell'algoritmo

Il numero di operazioni richiesto è pari a $O(V^2)$ dovuta al ciclo eseguito V volte $(O(V))$ e la ricerca del minimo in tempo lineare.

Confronto con algoritmo di Kruskal

Anche se risulta essere peggiore rispetto all'algoritmo di greedy Kruskal, è possibile dimostrare che, in caso di grafi densi ha una complessità ottima. Infatti per tali grafi non possiamo aspettarci di fare meglio di $O(V^2)$: la sola operazione di lettura dei pesi degli archi richiede $O(V^2)$.

Algoritmo MST-2

```python
import utils

def mst_2(edges):
    N = utils.num_vertices(edges=edges)
    mst = set()
    component = list(range(N))

    while len(set(component)) > 1:
        minimum = {set_name: None for set_name in set(component)}
        shortest = {set_name: None for set_name in set(component)}

        for weight, u, v in edges:
            s_u = component[u]
            s_v = component[v]

            if s_u == s_v:
                continue

            if minimum[s_u] is None or weight < minimum[s_u]:
                shortest[s_u] = (u, v)
                minimum[s_u] = weight

            if minimum[s_v] is None or weight < minimum[s_v]:
                shortest[s_v] = (u, v)
                minimum[s_v] = weight

        mst.update(shortest.values())

        # Find connected components with union-disjoint set
        for u, v in shortest.values():
            utils.union_set(component, u, v)
        component = [utils.get_set(component, i) for i in component]

    return mst


if __name__ == '__main__':
    edges = [(1, 0, 1), (2, 0, 2), (4, 0, 3), (3, 1, 2), (4, 1, 3), (1, 2, 3)]
    N = utils.num_vertices(edges=edges)

    print(mst_2(edges))
```

Dimostrazione correttezza

Lasciata per esercizio, si basa sul teorema della foresta. *"Tutti gli archi shortest aggiunti ad una certa iterazione, sono tutti archi che fanno parte ad un albero di supporto ottimo, tra tutti i possibili alberi di supporto."*

Complessità algoritmo

$O(E \cdot \log_2(V))$ derivato dal costo dell'iterazione su tutti gli archi $O(E)$, eseguita un numero massimo di $\log(|V|)$ volte.

Inizialmente il numero di componenti connesse è pari al numero di nodi. Sicuramente ad ogni iterazione, il numero di componenti connesse viene almeno dimezzato. Per cui, il primo ciclo viene eseguito al più $\log(|V|)$ volte.

Per grafi densi con $|E| = O(|V|^2)$ questa complessità è peggiore di quella di MST-1, ma se il numero di archi scende sotto l'ordine $O(|V|^2/log(|V|))$ l'algoritmo MST-2 ha prestazioni migliori.

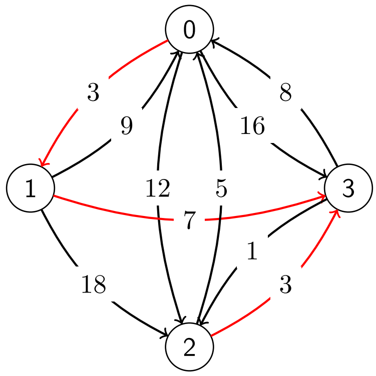
Note

Questi tre algoritmi appena visti sono tutti e tre algoritmi costruttivi, senza revisione delle decisioni passate.

Shortest Path

Algoritmo di Dijkstra

Applicabile soltanto nel caso in cui i pesi degli archi siano sempre non negativi.




```python
def dijkstra(adj_matrix: list, source: int):
    N = len(adj_matrix)
    W = {source}
    V = set(range(N))

    dist = [0 if i == source else adj_matrix[source][i]
            for i in range(N)]
    parent = [source] * N
    parent[source] = None

    while W != V:
        _, x = min((dist[i], i) for i in V - W if dist[i] is not None)
        W.add(x)

        for y in V - W:
            if adj_matrix[x][y] is None:
                continue

            if dist[y] is None or dist[y] > dist[x] + adj_matrix[x][y]:
                parent[y] = x
                dist[y] = dist[x] + adj_matrix[x][y]

    return parent


if __name__ == '__main__':
    w = [[None,    3,   12,   16],
         [   9, None,   18,    7],
         [   5, None, None,    3],
         [   8, None,    1, None]]

    print(dijkstra(w, 0))
```

Dimostrazione Correttezza

La dimostrazione viene effettuata per ragionamento induttivo sui due seguenti punti:

1. $\forall y \in V$, il valore `dist[y]` rappresenta ad ogni iterazione la lunghezza del cammino minimo da `source` a `y`, passando solo attraverso i nodi contenuti in W. `dist[y] == None` indica

che il nodo non è raggiungibile passando solamente attraverso i nodi di W. In `parent[y]` è memorizzato il nodo che precede immediatamente y in tale cammino. `parent[source] == None` indica che `source` non è preceduto da altri nodi.

2. quando il nodo x viene aggiunto a W, il valore `dist[x]` rappresenta la distanza minima tra `source` e x. Il cammino minimo è ricostruibile procedendo a ritroso partendo da `parent[x]`.

Per $n = i = 0$ sono ovviamente vere entrambe.

Dimostrazione punto 1

Per il passo $n = i + 1$, quando analizziamo y, abbiamo due casi possibili: x non è contenuto all'interno del cammino minimo, per cui, per ipotesi induttiva, la distanza minima è `dist[y]`; oppure x precede immediatamente y nel cammino minimo, quindi in tal caso deve avere distanza `dist[x] + weight[x][y]`.

Consideriamo per assurdo che x non preceda immediatamente y, allora $\exists t \in W$ nel cammino minimo tra x ed y, il cammino da s a t, per ipotesi induttiva, ha almeno una lunghezza che è $\geq$ `dist[t]`, con relativo cammino minimo che non comprende x. Il cammino da `source` a y, passante per x è quindi sostituibile da un' altro cammino di lunghezza inferiore, non passante per x, ma questo ricadrebbe nel primo caso, dove x non è contenuto all'interno del cammino minimo.

Dimostrazione punto 2

per assurdo, ipotizziamo che esista un cammino da s a x di lunghezza inferiore a $\rho(x)$ che passi per nodi $\notin W$, chiamato z il primo di tali nodi. Chiamato $L(s, x)$, la lunghezza del cammino passante per z, abbiamo che per ipotesi per assurdo: $L(s, z) + L(z, x) < \rho(x)$. Osserviamo che $L(s, z) \geq \rho(z)$ perché tra s e z tutti i nodi sono contenuti in W, e $\rho(z)$ è la lunghezza minima dei cammini da s a z non passanti per nodi al di fuori di W. $L(z, x) \geq 0$ perché per ipotesi tutte le distanze sono non negative, quindi abbiamo:

$$\rho(z) \leq L(s, z) + L(z, x) = L(s, x) < \rho(x)$$

Siamo giunti ad un assurdo perché, da come è definito l'algoritmo $x = \arg\min_{y \notin W} \{\rho(y)\}$, e di conseguenza $\rho(x) < \rho(z)$.

Complessità

Il numero di operazioni richiesto è $O(V^2)$, dovuta ad il ciclo principale di complessità $O(|V|)$ ed il calcolo del minimo ed il ciclo sui nodi adiacenti, entrambi di complessità $O(|V|)$.

Operazione di Triangolazione

Data una matrice $n \times n$ di distanze R, per un dato $j \in \{1 \dots n\}$, chiamiamo "operazione di triangolazione" il seguente aggiornamento:

$$R_{jk} = \min \{R_{ik}, R_{ij} + R_{jk}\} \quad \forall i, k \in \{1 \dots n\} - \{j\}$$

Algoritmo di Floyd-Warshall

Applicabile solo se nel grafo non sono presenti cicli di lunghezza negativa. Restituisce la lunghezza dei cammini minimi tra ogni coppia di nodi.

```python
infty = 10**20

def floyd_warshall(w):
    N = len(w)
    R = [weights[:] for weights in w]
    E = [[None]*N for _ in range(N)]

    for i in range(N):
        for j in range(N):
            if R[i][j] is None:
                R[i][j] = +infty

    for j in range(N):
        for i in set(range(N)) - {j}:
            for k in set(range(N)) - {j}:
                if R[i][k] > R[i][j] + R[j][k]:
                    E[i][k] = j
                    R[i][k] = R[i][j] + R[j][k]

        if any(R[i][i] < 0 for i in range(N)):
            break

    return R, E


if __name__ == '__main__':
    w = [[None,    3,   12,   16],
         [   9, None,   18,    7],
         [   5, None, None,    3],
         [   8, None,    1, None]]

    R, E = floyd_warshall(w)
```

Note

In caso di distanze $d_{ij} > 0$, la condizione di arresto $R_{ij} < 0$ non si potrà mai verificare, e si dimostra che i valori di R_{ij} danno la lunghezza del cammino minimo da i a j per ogni $i \neq j$, mentre le etichette E_{ij} consentono di ricostruire tali cammini minimi.

In caso di distanze negative, se non interviene la condizione di arresto $R_{ii} < 0$, allora anche qui gli R_{ij} danno la lunghezza del cammino minimo da i a j.

Se invece ad una certa iterazione si verifica la condizione $R_{ii} < 0$, indica la presenza di un ciclo a costo negativo nel grafo. In tal caso, anche ignorando la condizione di arresto $R_{ii} < 0$, non possiamo garantire che al memento della terminazione con $j = n$ gli R_{ij} diano la lunghezza del cammino minimo da i a j.

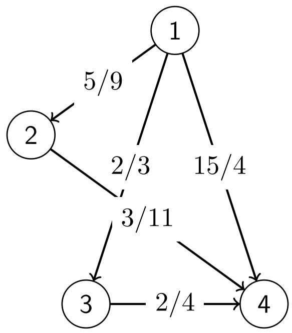
Complessità

È facile osservare che la complessità per questo algoritmo è $O(|V|^3)$, dovuta ai tre cicli nidificati, ognuno di complessità $O(|V|)$.

Note

Entrambi quest algoritmi, rientrano nella categoria di raffinamento locale. Infatti in entrambi i casi, data una coppia di nodi, si parte da una soluzione ammissibile, e ad ogni iterazione, tale cammino viene aggiornato nel caso se ne trovi uno di lunghezza inferiore.

Flusso a costo minimo



Classificazione dei nodi

Nei problemi di flusso a costo minimo, i nodi sono divisi in tre categorie, in base a b_i:

1. Nodi sorgente: $b_i > 0$, in essi viene realizzato il prodotto.
2. Nodi di transito: $b_i = 0$, il prodotto transita, senza variazioni
3. Nodi destinazione: $b_i < 0$, dove il prodotto viene consumato.

La proprietà $\sum_i^n b_i = 0$, quando non risulta valida, è forzabile aggiungendo un fittizio con $b_{n+1} = -\sum_i^n b_i$, collegato a tutti i nodi sorgente, attraverso archi di costo 0 e capacità $+\infty$.

Nel caso di archi con capacità illimitata

In un problema di flusso su rete a costo minimo una **base** coincide con un albero di supporto. Ad ogni base è associabile una soluzione di base, ottenuta ponendo a 0 il flusso (quantità di prodotto inviata) su tutti gli archi che non fanno parte della base.

Nell'esempio in figura 1 prendiamo come esempio la base $B_0 = \{\}$. Prendiamo come esempio nella rete $G = (V, A)$ in figura 1, la base $B_0 = \{(1, 5), (2, 3), (3, 4), (4, 5)\}$ se poniamo nullo il flusso degli archi non appartenenti alla base. Di conseguenza, otteniamo che i flussi relativi agli archi sono:

(1, 5) = 2
(2, 3) = 5
(3, 4) = 6
(4, 5) = 2

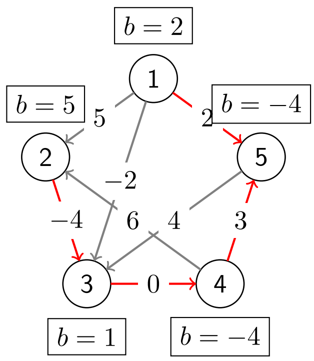


Figure 1: b_i sono indicati vicino al nodo

Se i flussi agli archi in base hanno valore non negativo,
allora la soluzione è ammissibile, inoltre se i flussi sono tutti strettamente maggiore di 0, allora si parla di soluzione non degenere. Il costo totale di trasporto si calcola semplicemente sommando per ogni arco il prodotto tra quantità di flusso e costo di trasporto. Nel caso di esempio:

$$c_{15}x_{15} + c_{23}x_{23} + c_{34}x_{34} + c_{45}x_{45} = 2 \cdot 2 - 4 \cdot 5 + 0 \cdot 6 + 3 \cdot 2 = 10$$

NOTA: questa è solo una possibile soluzione, per sapere se è ottimale occorre confrontarla con le altre possibili soluzioni al problema.

Coefficienti di costo ridotto

I coefficienti a costo ridotto sono valori numerici associati agli archi che non fanno parte della base, misurano la variazione del costo di trasporto al crescere dell'unità del valore del flusso associato tale arco.

Condizione di ottimalità

Se i coefficienti di costo ridotto di tutti gli archi fuori base sono non negativi, questo indica che la crescita del flusso su qualsiasi arco fuori base comporta una crescita del costo di trasporto o nessuna variazione.
In tal caso possiamo concludere che la soluzione di base attuale è ottima. Inoltre se tutti i coefficienti a costo ridotto sono strettamente positivi, la soluzione è unica.

Calcolo dei coefficienti a costo ridotto

Per calcolare il coefficiente relativo ad un arco fuori base, si aggiunge tale arco alla base attuale, considerare l'unico ciclo che si forma con tale aggiunta. Percorrendo il ciclo che si forma nel verso indicato dall'arco, sommo tutti i costi relativi agli archi percorsi in senso concorde e sottraggo tutti i costi relativi agli archi percorsi in senso opposto.

Condizione di illimitatezza

Insieme alla condizione di ottimalità, esiste una seconda condizione d'arresto per l'algoritmo, che si verifica, quando, l'aggiunta di un arco (alla base) con coefficiente di costo ridotto negativo forma un ciclo orientato.
La motivazione è facilmente intuibile, siccome il costo di trasporto diminuisce indefinitivamente.

Dimostrazione

Dato un flusso ammissibile $\{\bar{x}_{ij}\}$ corrispondente ad una certa base e con valore dell'obbiettivo (costo di trasporto) C.
Sia $\bar{c}_{rs} < 0$ il coefficiente di costo ridotto dell'arco fuori base (r, s).
Sia $r \to s \to l_1 \to \dots l_t \to r$ il ciclo orientato creato aggiungendo alla base l'arco (r, s)

Per ogni $\Delta \geq 0$ il seguente aggiornamento del flusso lungo gli archi del ciclo orientato dà origine ad un flusso ancora ammissibile, con obbiettivo di corrispondenza:

$$C + \Delta c_{rs} \to -\infty \quad \text{per } \Delta \to +\infty$$

Il che mostra come l'obbiettivo diverga a $-\infty$ sulla regione ammissibile.

Cambio di Base

Nel caso in cui la base scelta non rispetti ne la condizione di ottimalità ne la condizione di illimitatezza esiste un algoritmo per cambiare la base attuale in una ammissibile.

Scelgo l'arco fuori base con coefficiente di costo ridotto negativo [1] attraverso un approccio greedy, prendendo quello con coefficiente di costo ridotto minore, e chiamo tale coefficiente $\bar{c}$. Aggiungendo tale arco alla base, formando un ciclo. Tra tutti gli archi percorsi in verso opposto, rimuovo quello con quantità di prodotto su arco minore, e chiamo tale quantità $-\Delta$. Successivamente, assegno all'arco appena aggiunto una quantità di prodotto inviata pari a Δ ed aggiorno il flusso degli archi rimanenti dell'ex-ciclo.

Il nuovo costo è il costo precedente, Chiamato T il costo precedente, avremo che il nuovo costo sarà dato dalla formula $T + \bar{c} \cdot \Delta$.

[1] Ne esiste almeno uno altrimenti sarebbe stata soddisfatta la condizione di ottimalità

Algoritmo del simplesso su rete

Dopo aver trovato una base, ripete iterativamente

1. Condizione di illimitatezza
2. condizione di ottimalità
3. cambio di base

Si può notare che nel caso degenere può cambiare la base, tenendo costante il trasporto e la soluzione di base.

Problema di 1^a fase

Se il valore ottimo, risultato dalla 1^a fase, è maggiore di 0, allora il problema originario ha regione ammissibile vuota (non ha soluzione). Se il valore ottimo è uguale a 0, il problema originario ha regione ammissibile non vuota (ha soluzione). Questo è dovuto al fatto che tutti gli archi di collegamento a q, hanno costo 1, mentre quelli del grafo originario hanno costo nullo. Un valore ottimo nullo, indica che esiste una soluzione all'interno del grafo originario.

Inoltre, in tal caso esiste un albero di supporto ottimo che contiene solo uno dei nuovi archi (incidenti su q). Eliminando tale arco si ottiene una base ammissibile per il problema originario.

```python
def symplex():
    pass
```

Contents