

FCA

ale-cci

June 8, 2019

# 1 Lezione 8 - Stabilità dei sistemi dinamici

Un sistema lineare  $\Sigma$  si dice:

1. STABILE se per ogni perturbazione  $y_{lib}(t)$  é limitata su  $[0, +\infty)$   
 $\Sigma$  é stabile  $\Leftrightarrow$  tutti i poli hanno parte reale non positiva e gli eventuali poli puramente immaginari sono semplici
2. ASINTOTICAMENTE STABILE, se stabile e  $\lim_{t \rightarrow +\infty} y_{lib}(t) = 0$  per ogni perturbazione introdotta.
3. SEMPLICEMENTE STABILE é stabile ed esiste una perturbazione per cui

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} y_{lib}(t) = y_{\infty} \neq 0 \vee \{\text{Non esiste } \lim_{t \rightarrow \infty} y_{lib}(t)\}$$

4. INSTABILE non é stabile

## 2 Criterio di Juri

Sia dato il polinomio  $a(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$  con  $a_n > 0$ . Condizione necessaria affinché  $a(z)$  abbia tutte le radici di modulo minore di 1 è che le seguenti disuguaglianze siano soddisfatte:

1.  $a(1) > 0$
2.  $(-1)^n a(-1) > 0$
3.  $|a_0| < a_n$

Prendendo come esempio il caso  $n = 1$ :

$$a(z) = a_1 z + a_0 = 0$$

$$z = -\frac{a_0}{a_1} \quad |z| < 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{|a_0|}{a_1} < 1 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{|a_0| < a_1}$$

Otteniamo che:

- $a(1) = a_1 + a_0 > 0$
- $a(-1) = -a_1 + a_0 < 0$

di queste tre disuguaglianze solo 2 sono indipendenti: la terza è l'insieme della prima e della seconda. Per il caso  $n = 2$ : 3 condizioni distinte (page 14 di Lez. 21)

Anche nel criterio di Jury è necessario costruire una tabella: (slide 15 Lez 21)

- iniziamo a scrivere le prime due righe: con la prima riga iniziamo a scrivere a partire da  $a_0$
- Per la seconda riga partiamo da  $a_n$  e terminiamo la riga a  $a_0$
- Per costruire le righe successive calcoliamo il determinante della matrice  $2 \times 2$  sopra e riportiamo la stessa riga sotto al contrario

Per calcolare il termine di una determinata riga si utilizza la formula:

$$b_k = \det \begin{pmatrix} a_0 & a_{n-k} \\ a_n & a_k \end{pmatrix} \quad k = 0, 1, \dots, n-1$$

## 3 Teorema (criterio di Jury)

Il polinomio  $a(z) = \dots$  ha tutte le radici di modulo minore di 1 se e solo se le seguenti  $n + 1$  disuguaglianze sono soddisfatte:

1.  $a(1) > 0$
2.  $(-1)^n a(-1) > 0$
3. ... slide 16

## 4 Scelta del periodo di campionamento (Slide 18 Lez 21)

Per il teorema di campionamento

$$w_s > 2w_b$$

con  $w_s = \frac{2\pi}{T}$  pulsazione di campionamento,  $T$  il corrispondente periodo

Una volta realizzato il progetto in tempo continuo é necessario implementare una  $C_d(z)$

Alla funzione  $C(s)$  é associata un'equazione differenziale in tempo continuo, a  $C_d(z)$  un'equazione di differenze

Metodo di eulero:  $Dx(T) \Rightarrow \mathcal{L}[Dx(t)] = s \cdot \mathcal{L}[x(t)]$  (condizione iniziale nulla)

$$Dx(kT) \approx \frac{x((k+1)T) - x(kT)}{T}$$

$$\mathcal{Z}[Dx(kT)] \approx \frac{z-1}{T} \mathcal{Z}[x(kT)]$$

$$s = \frac{z-1}{Tz}$$

### 4.0.1 Alla lavagna

Immaginando di avere la funzione differenziale  $a_1 Dy + a_0 y = b_1 Du + b_0 u$  corrisponde una funzione di trasferimento. Trasformandola secondo laplace con, condizioni iniziali nulle si ottiene:

$$a_1 sY + a_0 Y = b_1 sU + b_0 U$$

Immaginandola in tempo discreto, imponendo  $t = kT$

$$a_1 Dy(kT) + a_0 y(kT) = b_1 Du(kT) + b_0 u(kT)$$

NOTA: Fino ad adesso Non é una approssimazione

Ora per calcolare la derivata utilizzo l'equazione di eulero

$$a_1 \frac{y((k+1)T) - y(kT)}{T} + a_0 y(kT) = b_1 \frac{u((k+1)T) - u(kT)}{T} + b_0 u(kT)$$

Trasformando:

$$\mathcal{Z} \left\{ a_1 \frac{y((k+1)T) - y(kT)}{T} + a_0 y(kT) = b_1 \frac{u((k+1)T) - u(kT)}{T} + b_0 u(kT) \right\}$$

...

$$a_1 \frac{z-1}{T} \mathcal{Z}[y(kT)] + a_0 \mathcal{Z}[y(kT)] = b_1 \frac{z-1}{T} \mathcal{Z}[u(kT)] + b_0 \mathcal{Z}[u(kT)]$$

Trovo così che:

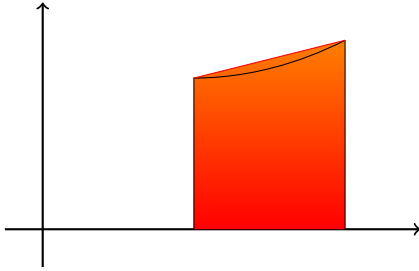
$$Y(z) = \frac{b_1 \frac{z-1}{T} + b_0}{a_1 \frac{z-1}{T} + a_0} U(z) = C(s)|_{s=\frac{z-1}{T}} U(z) := H(z)U(z)$$

**Metodo di Eulero all'indietro:** Stimo la derivata guardando il campione precedente

$$Dx(kT) \approx \frac{x(kT) - x((k-1)T)}{T}$$

#### 4.0.2 Metodo di Tustin (slide 21)

Viene utilizzata l' 'approssimazione col metodo del trapezio'



(x: Approssimare due punti con trapezio)

Da slide 24:  $C_d(z)$  è asintoticamente stabile siccome tutti i poli sono contenuti nella circonferenza unitaria

## 5 Esercizi

### 5.0.1 1

$$a(z) = z^3 - z^2 + z0.5$$

1.  $a(1) > 0$       $1 - 1 + 1 + 0.4 = 1.5 > 0$     OK
2.  $(-1)^3 a(-1) > 0, a(-1) < 0$   
 $-a(-1) > 0$       $-1 - 1 - 1 + 0.5 = -2.5 < 0$     OK
3.  $|a_0| < a_3$       $|0.5| < 1$  OK!

1	0.5	1	-1	1
2	1	-1	2	0.5
3	-0.75	1.5	-1.5	
4	-0.75	-1.5		

$|-0.75| > |-1.5|$  Not OK!

### 5.0.2 Secondo esercizio (slide 27)

$$a(z) = z^4 - z^3 + 0.25z^2 + 0.25z - 0.125$$

Per calcolare se il sistema é asintoticamente stabile

1.  $a(1) > 0!$      $a(1) = 1 - 1 + 0.25 + 0.25 - 0.125 = 0.357 > 0$                       OK
2.  $(-1)^4 a(-1) > 0$   
 $a(-1) > 0$      $a(-1) = 1 + 1 + 0.25 - 0.25 - 0.125 = 1.875 > 0$                       OK
3.  $|a_0| < a_4$      $|-0.125| < 1$     OK
4.  $|b_0| > |b_1|$       $|-0.9875| > |-0.125|$     OK
5.  $|c_0| > |c_2|$       $|0.9534| > |0.3979|$     OK

1	-0.125	0.25	0.25	-1	1
2	1	-1	0.25	0.25	-0.125
3	-0.98475	0.96875	-0.28125	-0.125	
4	-0.125	-0.28125	0.96875	-0.984375	
5	0.9534	*	0.3979		

## 6 Esercitazione Wed 29 May 2019 01:46:34 PM CEST

(... copiare parte prima da appunti)

$$P_d(s) = s^3 + (4+c)s^2 + (5+4c)s + 5c$$

$$\begin{cases} 2+4b_2 = 4+c \\ 5+4c = 9+4b_1 \\ 90 = 5c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_2 = 5 \\ b_1 = 17 \\ c = 18 \end{cases} \quad \text{Accetto come soluzione siccome } \gg 2$$

$$C(s) = \frac{5s^2 + 17s + 18}{s^2 + 9}$$

$$e_r = \lim_{t \rightarrow \infty} t \rightarrow \infty r(t) - y(t) = 0 \Leftrightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} r(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} t(t)$$

(Grafico)

$$T_{ry} = \frac{FL(s)}{1+L(s)} \Rightarrow T_{ry}(0) = 1$$

$$T_{ry}(0) = \frac{FL(0)}{1+L(0)} = \boxed{\frac{F_4}{1+4} = 1}$$

$$F = \frac{5}{4} = 1.25$$

## 7 Esercizio 4

$\exists K \in \mathcal{R}$  t.c.  $e_r = 0.05$ ,  $r(t) = 1(t)$

$$e_r = \frac{1}{1+K_P} \quad , \quad 0.05 = \frac{1}{K_P} \Leftrightarrow 0.05 + 0.05K_P = 1$$

$$\boxed{K_P = 19}$$

$$K_P = \lim_{s \rightarrow 0} C(s)P(s) = \lim_{s \rightarrow 0} K \frac{10}{(s+2)(s+5)(s+10)} = \frac{K}{10}$$

$$19 = \frac{K}{10} \Leftrightarrow \boxed{K = 190}$$

Verifichiamo che il sistema sia asintoticamente stabile:

Poli del sistema retroazionato

$$1 + C(s)P(s) = 0 \Leftrightarrow 1 + \frac{1900}{(s+2)(s+5)(s+10)} = 0$$

$$\Leftrightarrow (s+2)(s+5)(s+10) \neq 0$$

$$s^3 + 17s^2 + 80s + 2000 = 0$$

Routh:

3	1	80	0
2	17	2000	0
1	1360 - 2000	0	
0	2000		

Per la presenza di due variazioni, vi sono 2 poli retroazionati a parte reale positiva  $\Rightarrow$  Sistema Instabile  
 $\Rightarrow \nexists k$  che garantisce  $e_r = 0.005$

b

$$C(s) = K \frac{1 + \tau s}{1 + \alpha \tau s}$$



$$e_r = \frac{1}{1 + K_P} = 0.05 \Leftrightarrow K_P = 19$$

$$K_P = \lim_{s \rightarrow 0} C(s)P(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1 + \tau s}{1 + \alpha \tau s} \frac{10}{(s+2)(s+5)(s+10)} = \frac{K10}{100} = \frac{K}{10}$$

$$19 - \frac{K}{10} \Leftrightarrow \boxed{K = 190}$$

$$C(s) = 190 \frac{1 + \tau s}{1 + \alpha \tau s}$$

Modo 1 (Con Routh):

$$1 + K \frac{1 + \tau s}{1 + \alpha \tau s} \frac{10}{(s+2)(s+5)(s+10)} = 0$$

Sfrutto lo zero della rete anticipatrice per realizzare una cancellazione polo-zero ammissibile

$$1 + \frac{\cancel{\tau(s + \frac{1}{\tau})}}{\cancel{\tau(\alpha s + \frac{1}{\tau})}} \frac{1900}{(s+2)(s+5)(s+10)} = 0$$

$$L(jw) = \frac{1900}{(2 + \alpha jw)(jw + 5)(jw + 10)}$$

$$\left. \begin{aligned} |L(jw)| &= \frac{1900}{\sqrt{4 + \alpha^2 w^2} \sqrt{25 + w^2} \sqrt{100 + w^2}} \\ \arg(L(jw)) &= -\arctg\left(\frac{\alpha w}{2}\right) - \arctg\left(\frac{w}{5}\right) - \arctg\left(\frac{w}{10}\right) \end{aligned} \right\}$$

$$L(s, \alpha) = -\frac{1}{2} \boxed{\text{se } \exists s = jw_P : L(s, \alpha) + \frac{1}{2} = 0}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1900}{\alpha s + 2)(s+5)(s+10)} = 0 \Leftrightarrow \alpha s^3 + (15\alpha + 2)s^2 + (50\alpha + 30)s + 3900 = 0$$

$$\begin{array}{c|ccc} 3 & \alpha & 50\alpha + 30 & 0 \\ 2 & 15\alpha + 2 & 3900 & 0 \\ 1 & f(\alpha) & 0 & \end{array} \quad f(\alpha) = (15\alpha + 2)(50\alpha + 30) - 3900\alpha = 750\alpha^2 - 3350\alpha + 60$$

$$f(\alpha) = 0 \rightarrow \begin{array}{c} \overline{\alpha_1} \searrow 44487 \\ \alpha_2 = 0.0180 \quad \text{OK} \end{array}$$

Verifico se ho radici immaginarie poli ausiliari  $(15\alpha + 2)s^2 + 3900 = 0 \Rightarrow$  Ho radici immaginarie

$$C(s) = 190 \frac{1 + \frac{1}{2}s}{1 + 0.0180 \frac{1}{2}s}$$

Modo 2: Uso delle formul di inversione:

$$C(s) = 190 \frac{1 + \tau s}{1 + \alpha \tau s}$$

$$P(jw) = \frac{1900}{(jw+2)(jw+5)} \quad , \quad |P(jw)| = \frac{1900}{\sqrt{4 + w^2} \sqrt{25 + w^2}}$$

$$\arg(P(jw)) = -\text{atan}\left(\frac{w}{2}\right) - \text{atan}\left(\frac{w}{5}\right)$$

Cerchiamo  $w_0$  all'interno della circonferenza di raggio  $\frac{1}{2}$

$$\arg(P(jw)) + \pi \phi_0 = 0 \Leftrightarrow \phi_0 = -\arg(P(jw)) - \pi$$

$$M = \frac{1}{2|P(jw)|}$$

Per potere applicare le formule di inversione abbiamo il vincolo:

$$\cos \phi_0 > \frac{1}{M} \Leftrightarrow \cos \phi_0 > 2|P(jw)|$$

$$w_0 = 10 \frac{rad}{s} \quad |P(jw)| = 1.17$$

$$w_0 = 13 \frac{rad}{s} \quad |P(jw)| = 0.6323$$

$$w_0 = 15 \frac{rad}{s} \quad |P(jw)| = 0.4405 \rightarrow \text{Potrebbe essere OK}$$

$$\arg(P(jw)) = -3.67 \Rightarrow \phi_0 - \arg(P(jw)) - \pi = 0.5285$$

$$\cos(\phi_0) = 0.8636 \stackrel{?}{>} 2(0.4405) = 0.881 \rightarrow \text{NO}$$

$$w_0 = 16 \frac{rad}{s} \quad |P(jw)| = 0.3726$$

$$\arg(P(jw)) = -2.726$$

$$\phi_0 = -\arg(P(jw)) - \pi = 0.5849$$

Verifica:  $\cos \phi_0 = 0.8338 \stackrel{?}{\geq} 2(0.3726) = 0.7452 \rightarrow \text{OK}$

Possiamo applicare le Formule di inversione

$$\begin{cases} \phi_0 = 0.5849 \\ M = \frac{1}{2|P(jw)|} = 1.2419 \\ \tau = \frac{M - \cos \phi_0}{w_0 \sin \phi_0} = 0.0575 \\ \alpha = \frac{M \cos \phi_0 - 1}{M(M - \cos \phi_0)} = -0.174 \end{cases}$$

## 8 Esercizio 1

$$P(s) = \frac{5}{(s+1)^3}$$

Controllore PID:  $C(s) = K \left( 1 + T_d s + \frac{1}{T_i s} \right)$

$$T_i = 4T_d$$

$$M_F = 45$$

$$C(s) = \frac{K}{T_i} \left( \frac{1 + \frac{25}{w_j} s + \frac{s^2}{w_n^2}}{s} \right)$$

$$w_n = \frac{1}{\sqrt{T_i T_d}} \quad \delta = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{T_i}{T_d}}$$

$$C(jw_n) = K_P$$

$$P(jw) = \frac{5}{(jw+1)^3}$$

$$|P(jw)| = \frac{5}{(1+w^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\arg(P(jw_0)) = -3\text{atan}(2)$$

(X: Grafico)

$$\arg(P(jw_0)) + \pi = M_F = 45$$

$$\arg(P(jw_0)) = M_F - \pi \Leftrightarrow -3\arctan(w) = \frac{\pi}{4} - \pi = -\frac{3}{4}\pi \Leftrightarrow \arctan(w) = \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \boxed{w_0 = 1 \frac{rad}{s}}$$

$$|P(jw)| = \frac{5}{(1 + w_0^2)^{\frac{3}{2}}} = 1.7678$$

$$K_P := \frac{1}{|P(jw)|} = \frac{1}{1.7678} = \boxed{0.5657}$$

$$\delta = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{T_i}{T_d}} = \frac{1}{2} \frac{4}{1} = 1$$

$$T_i = \frac{2\delta}{w_n} = 2$$

$$T_d = \frac{1}{T_i w_0^2} = \frac{1}{2} sec$$

$$\boxed{C(s) = 0.5657 \left(1 + \frac{1}{2}s + \frac{1}{2s}\right)}$$

## 9 esercizio 2

$$y_{lib}(2) = \frac{1}{(z - \frac{1}{2})^2(z^2 + 1)} = \frac{1}{(z - \frac{1}{2})^2(z - j)(z + j)}$$

$$\mathcal{Z}^{-1}[y_{lib}(z)] = y_{lib}(K) \quad , \quad K \geq 0$$

Antitrasformazione per fratti semplici

$$y_{lib}(z) = \frac{C_{1,1}}{(z - \frac{1}{2})^2} + \frac{C_{1,2}}{z - 1\frac{1}{2}} + \frac{C_2}{z - j} - \frac{\bar{C}_2}{z + j}$$

$$C_{i,j} = \frac{1}{(j-1)!} D^{j-1} [(z - P_i)^{r_i} F(z)] \Big|_{z=P_i}$$

$r_i$  é la molt di  $P_i$

$$\text{Res}(F, P) = \frac{1}{(n-1)!} D^{n-1} [(z - p)^n F(z)] \Big|_{z=p}$$

$n$  é la molt di P

Prop (Per funzioni razionali Strettamente proprie)

$$\sum_i \text{Res}(F, P_i) = \begin{cases} 0 & \text{se } n - m > 1 \\ \frac{b_m}{a_n} & \text{se } n - m = 1 \end{cases}$$

$$C_{1,1} = \cancel{(z - \frac{1}{2})^2} \frac{1}{\cancel{(z - \frac{1}{2})^2} (z^2 + 1)} \Big|_{z=\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{4} + 1} = \boxed{\frac{4}{5}}$$

$$C_2 = \cancel{(z - j)^1}^+$$

## 10 Esercitazione 12

### 10.1 Esercizio 3

Viene assegnato il sistema in retroazione

$$P(s) = \frac{1}{s(s+10)}$$

Trovare i valori di  $K \in \mathbb{R}$  tale che il sistema é asintoticamente stabile

Prima cosa da fare discretizzare l'impianto

$$P_d(z) = \frac{z-1}{z} \mathcal{Z} \left[ \frac{P(s)}{s}, T \right]$$

$$\frac{P(s)}{s} = \frac{10}{s^2(s+10)} = \frac{C_{1,1}}{s^2} + \frac{C_{1,2}}{s} + \frac{C_{2,1}}{(s+10)}$$

$$\begin{cases} C_{1,1} = \cancel{\frac{10}{s^2(s+10)}}|_{s=0} = 1 \\ C_{2,1} = \cancel{(s+10)} \frac{10}{s^2(s+10)}|_{s=10} = \frac{1}{10} \\ C_{1,2} + C_{2,1} = 0 \Leftrightarrow C_{1,2} = -\frac{1}{10} \end{cases}$$

$$\mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{P(s)}{s} \right] = 1t - \frac{1}{10} + \frac{1}{10} e^{-10t} \quad t \geq 0$$

$$\mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{P(s)}{s} \right]_{t=0.05K} = 0.05K - 0.1 + 0.1e^{-0.5K} \quad K \geq 0$$

$$P_d z = \mathcal{Z} [0.05K - 0.1 + 0.1e^{-0.5K}]$$

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{Z}[a^k] &= \frac{z}{z-a} \\ \mathcal{Z}[K1(K)] &= \frac{z}{z-1} \end{aligned} \right\} \Rightarrow P_s(z) = 0.05 \frac{z}{(z-1)^2} - 0.1 \frac{z}{z-1} + 0.1 \frac{z}{z-0.6065}$$

$$P_d(z) = \frac{z-1}{z} P_s(z) = \frac{z-1}{z} \left( 0.05 \frac{z}{(z-1)^2} - 0.1 \frac{z}{z-1} + 0.1 \frac{z}{z-0.6065} \right) =$$

$$P_d(z) = \frac{0.01065z + 0.009025}{(z-1)(z-0.6065)}$$

$$T_{\tilde{r}\tilde{y}} = \frac{L(z)}{1+L(z)} \quad , \quad L(z) = KP_d(z)$$

$$1+L(z) = 0 \Leftrightarrow \boxed{1+KP_d(z) = 0}$$

$$z^2 + (0.01065K - 1.6065)z + 0.09002K + 0.6065 = 0$$

Il sistema é asintoticamente stabile se e solo se

1.  $a(1) > 0$
2.  $(-1)^n a(-1) > 0$
3.  $|a_D| < a_n$

1.

$$\cancel{1} + (0.0165K - \cancel{1.6065} + 0.09025K + \cancel{0.6065}) > 0 \Leftrightarrow \boxed{K > 0}$$

2.

$$1 + (-0.01065K + 1.6 - 65 + 0.09025K + 0.6065) > 0 \Leftrightarrow K > -\frac{3.213}{0.0796} = -40.3643$$

3.

$$|0.09025K + 0.6065| < 1$$

$$\begin{cases} 0.09025K + 0.6065 < 1, & \text{se } 0.09025K + 0.6065 \geq 0 \\ -0.09025K - 0.6065 < 1, & \text{se } 0.09025K + 0.6065 < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0.09025K + 0.6065 < 1 & \text{se } K \geq -6.72022 \\ -0.09025K - 0.6065 < 1 & \text{se } K < -6.72022 \end{cases}$$

(a)  $K < 4.360 \Rightarrow -6.72022 \leq K < 4.360$

(b)  $K > -17.80 \Rightarrow -17.80 < K < -6.72022$

$$\left. \begin{array}{l} K > 0 \\ K > -40.3643 \\ -6.72022 \leq K < 4.360V - 17.90 < K < -6.72022 \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{0 < K < 4.360}$$

## 10.2 Es 4

$$C(s) = 20 \frac{s+1}{1+0.1s}$$

$$T = 0.01s$$

$$s = \frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1} = 200 \frac{z-1}{z+1}$$

$$C(z) = 20 \frac{200 \frac{z-1}{z+1} + 1}{1 + 20 \frac{z-1}{z+1}} = 20 \frac{\frac{200z-200+z+1}{z+1}}{\frac{z+1+20z-20}{z+1}} = 20 \frac{201z-199}{21-19} = \frac{4020z-3980}{21z-19} = C_d(z)$$

$$21\tilde{y}(K) - 19\tilde{y}(K-1) = 4020\tilde{u}(K) - 3980\tilde{u}(K-1) \quad , \quad K \in \mathbb{Z}$$