1 Teorema (poli di $\sum$ e stabilitá)

1. $\sum$ é *stabile* se e solo se tutti i poli hanno parte reale non positiva e gli eventuali pli puramente immaginari sono semplici
2. $\sum$ é *asintoticamente stabile* se e solo se tutti i suoi poli hanno parte reale negativa
3. $\sum$ é *semplicemente stabile* se e solo se tutti i poli hanno partre reale non positiva e quelli puramente immaginari (che devono esistere) sono semplici
4. $\sum$ é *instabile* se e solo se esiste almeno un polo a parte reale positiva o un polo puramente immaginario con molteplicitá maggiore di uno

1.1 Teorema (Stabilitá BIBO)

Un sistema $\sum$ é BIBO se e solo se $\int_0^{+\infty} |g(\tau)| d\tau < +\infty$

1.2 Stabilitá asintotica $\Leftrightarrow$ Stabilitá BIBO

$\sum$ é BIBO stabile se e solo se $\sum$ é asintoticamente stabile

1.3 Polinomio di Hurwitz

Un polinomio $a(s)$ é detto di Hurwitz se tutte le sue radici hanno parte reale negativa

proprietá: Il polinomio $a(s)$ é hurwitziano se e solo se tutti i suoi coefficenti sono positivi

1.4 Criterio di Routh

Il polinomio $a(s)$ é hurwitziano se e solo se l'associata tabella di Routh puó essere completata (con l'algoritmo base) e presenta nella prima colonna solo permanenze.

(TODO:Aggiungere come calcolare il resto dei coefficenti)

I **Casi singolari** nella costruzione della Tablella di Routh avvengono quando il primo o tutti gli elementi di una riga sono nulli

1.5 Metodo di Benidir-Picinbono

Ogni riga, non nulla che nizia con p zeri viene sommata con la riga da questa ottenuta moltiplicandola er $(-1)^p$ e traslandola verso sinistra di p posizioni. (slide 23 lezione 8)

$$a(s) - s^3 + 3s - 2 = 0$$

3	1	3	0
2^i	0	-2	0
2^{ii}	2	0	0
2	2	-2	0
1	4	0	
0	-2		

1.6 Prosecuzione tabella nel caso di riga tutta nulla

1. Derivare polinomio ausiliario
2. i coefficenti ottenuti dalla derivata sostituiscono gli zeri della riga nulla.
3. Proseguire la tabella nel modo usuale

2i	$\gamma_{n-2i,1}$	$\gamma_{n-2i,2}$	$\gamma_{n-2i,3}$	$\cdots$	$\gamma_{n-2i,i+1}$	0
2i -1	0	0	0	$\cdots$	0	0

Polinomio ausiliario: $\beta(s) = \gamma_{n-2i,1}s^{2i} + \gamma_{n-2i,1}s^{2i-2} + \gamma_{n-2i,3}s^{2i-4} + \cdots \gamma_{n-2,1}s^2 + \cdots \gamma_{n-2i,1}$
Equazione ausiliaria: $\beta(s) = 0$
Esempio:

$$a(s) = s^6 + s^5 - 2s^4 - 3s^3 - 7s^2 - 4s - 4$$

6	1	-2	-7	-4	0
5	1	-3	-4	0	
4	1	-3	-4	0	
3	2	-3	0	0	
2	-3	-8	0		
1	-25	0			
0	-8				

polinomio ausiliario $\beta(s) = s^4 - 3s^2 - 4$
$D\beta(s) = 4s^3 - 6s$

1.7 Teorema di analisi armonica

Dato $\sum$ sistema asintoticamente stabile cond f.d.t. $G(s) \in \mathbb{Q}$. La risposta forzata di $\sum$ ad un segnale armonico é un segnale armonico con stessa frequenza dell'ingresso.

$$F(w) = G(jw)$$

(Dimostrazione a Lezione 9 slide 6)

Rappresentazioni grafiche della funzione di risposta armonica sono i Diagrammi di Bode, diagrammi di Nyquist.

1.8 Parametri caratteristici della risposta armonica

1. Pulsazione di risonanza $w_r \coloneqq \arg\max_{w \in \mathbb{R}+} |G(jw)|$
2. Picco di risonanza $M_R \coloneqq \frac{|G(jw_R)|}{|G(j0)|}$ oppure $M_R \coloneqq |G(jw_R)|$
3. Larghezza di banda $B_w \coloneqq w_{t2} - w_{t1} \geq 0$

2 Diagramma di Nyquist

Curva tracciata sul piano complesso dal vettore $G(j\omega)$ per ω che varia da 0 a $+\infty$

3 Sistemi a fase minima

Nella risposta armonica l'andamento delle fasi è strettamente legato a quello delle ampiezze

4 Approssimate di Padé

Approssimazione del ritardo finito con una funzione razionale

$T_{ry}(s) = \frac{G(s)}{1+L(s)}$

Guadagno d'anello $L(s) \coloneqq G(s)H(s)$

Un **sistema retroazionato** é **ben connesso** se $\lim\limits_{|s| \to +\infty} 1 + L(s) \neq 0$

5 Teorema dell'indice logaritmico

Se Γ é una curva su $\mathbb{C}$ e $\mathcal{D}$ la regione contenuta al suo interno, Data $F(s)$ una funzione analitica su $\Gamma \cup \mathcal{D}$ ad eccezione di un numero finito di poli in $\mathcal{D}$, e senza zeri su Γ, allora vale la relazione:

$$\frac{1}{2\pi}\Delta \arg F(s) = n_z - n_p$$

Dove:

- $\Delta \arg F(s)$ è la variazione dell'argomento di $F(s)$ lungo Γ per un giro completo antiorario
- n_z e n_p sono rispettivamente il numero di zeri e poli di $F(s)$ su $\mathcal{D}$ (contati con molteplicitá)

5.1 Corollario

Con stesse ipotesi si ha che $\psi = n_z - n_p =$ numero di giri in senso antiorario di Γ

5.2 Applicato a Nyquist

È possibile applicare questo con $\Gamma =$ Contorno di Nyquist se

- $1 + L(s)$ é analitica sul contorno ed analitica su $\mathbb{C}^+$ ad eccezione di un numero finito di poli
- $1 + L(s)$ non deve avere zeri sul contorno $\Rightarrow L(s) \neq -1 \qquad \forall s \in \Gamma$

Chiamiamo **Diagramma Polare completo** la curva chiusa immagine di $L(s)$ su Γ

6 Criterio di Nyquist

Un sistema in retroazione é asintoticamente stabile se e solo se il d.p.c non tocchi il punto critico -1, ma lo circondi tante volte in senso antiorario quanti sono i poli del guadagno di anello con parte reale positiva.

6.1 Caso particolare

Nel caso in cui non abbia poli a parte reale positiva, il d.p.c non deve ne toccare ne circondare il punto -1.

7 Margine di fase ed Ampiezza

Margine d'ampiezza: $M_A := \dfrac{1}{|L(j\omega_p)|}$ dove $\omega_p \ni \arg L(j\omega_p) = -\pi$
$\omega_p \equiv$ pulsazione di fase π
Margine di fase: $M_F := \pi - |\varphi_c|$ dove $\varphi_c = \arg L(j\omega_c)$ e $\omega_c \ni |L(j\omega_c)| = 1$
$\varphi_c \in (-\pi, 0)$, $\omega_c \equiv$ pulsazione critica

I margini di stabilitá sono 'norme" che misurano la distanza del punto dritico -1 dal diagramma polare di $L(j\omega)$

7.1 Proprietá

Sia $M > 1$, se $L(j\omega) \notin \left[-M, -\frac{1}{M}\right]$ alora vale la disequazione $|1 + \gamma L(j\omega)| > 0 \quad \forall \gamma \in \left[\frac{1}{M}, M\right] \quad \forall \omega \geq 0$

8 Luogo delle radici

Luogo delle radici (diretto) è il luogo geometrico descritto dalle radici dell'equazione $1 + K_1 G_1(s) = 0$ al variare di K_1 da 0 $+\infty$

Luogo delle radici (inverso) stessa roba ma con K_1 che varia da 0 a $-\infty$

8.1 Propietá del luogo

- Il luogo ha tanti rami quanti sono i poli di $G_1(s)$
- Ogni ramo parte da un polo di $G_1(s)$ e termina in uno zero di $G_1(s)$ o in un punto all'infinito
- I rami si intersecano in corrispondenza di radici multiple
- Il luogo é simmetrico rispetto all'asse reale
- Nel luogo delle radici diretto un punto dell'asse reale fa parte del luogo se si lascia alla sua destra un numero totale *dispari* di zeri e poli di $G_1(s)$

9 Angoli di partenza e di arrivo (Slide 10 Lezine 13)

nel luogo delle radici diretto $K_1 > 0$ l'angolo di partenza φ_0 da un polo p_i semplice è dato dalla relazione:

$$\varphi_0 = \pi + \sum_{j=1}^{m} \arg(p_i - z_j) - \sum_{j \neq i} (p_i - p_j)$$

l'angolo di arrivo sullo zero z_i semplice è dato da

$$\varphi_a = \pi + \sum_{j=1}^{n} \arg(z_i - p_j) - \sum_{j \neq i} \arg(z_i - z_j)$$

Se il luogo delle radici è inverso, sis sostituisce nelle relazioni 0 a π.

10 Teorema del bericentro del luogo delle radici

Se il guadagno di anello ha grado relative $\rho \geq 2$ allora vale la relazione:

$$\sum_{i=1}^{n} p_{Ci} = \sum_{i=1}^{n} p_i \qquad \forall K_1 \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad \forall z_i \in \mathbb{C}, i = 1, \dots, m$$

(Dimostrazione slide 24 lezione 13)

Grado di stabilitá di $\sum$: $G_s \coloneqq -\max\{\Re p_1, \Re p_2, \dots, \Re p_n\}$, ovvero la distanza minima dei poli dall'asse immaginario

11 Dubbi domande perplessitá ed incertezze (Domande per Felice)

1. Se non si riesce a completare la tabella di routh normalmente il sistema puó essere stabile?

   Bisogna vedere le permanenze e le variazioni di segno, non c'entra come se una riga risulta di tutti 0

2. Cos'è un sistema strettamente proprio?

   Da vedere roba del primo parziale

3. ~~Come si trova l'ascissa dell'asintoto~~ $\cancel{G(jw) = \frac{10}{jw(1+j2w)}}$ ~~?~~

   Formula dogmatica a in slide 6 lezione 10

4. ~~Ci sono esercizi con Approssimate di Padé?~~

   Esercitazione 10 es 1

5. ~~In 5.1~~ $\cancel{\psi}$ ~~é il numero di giri intorno all'origine, quando viene applicato a Nyquist diventa il numero di giri intorno a~~ $\cancel{-1}$~~, why?~~

   ϕ é il numero di giri intorno all'origine della funzione $1 + L(s)$, segue per traslazione segue che é il numero di giri di $L(s)$ intorno a 0

6. Da dove salta fuori $1 + L(s)$?

   Denominatore del guadagno ad anello?

7. ~~In esercitazione 5 dopo esercizio 1, da dove salta fuori il sistema con~~ $\cancel{2K + 8 > 0}$~~?~~

   Mancava una parte dagli appunti

8. Da Esercitazione 6, perchè la fase di $G_1(s)$ va a $\frac{3}{2}\pi$ e non a $\frac{3}{4}\pi$?

9. Da dove salta fuori il vettore rosso $G_2(s)$ Esercitazione 6 (foto 135823)

10. Perchè si studia la stabilità chiudendo il diagramma di Nyquist (A partire da esercitazione 7)

11. Foto 135837 Mossa

12. Come si fa in caso di doppio polo nell origine ($\rho \to 0$)?