FCA

ale-cci

May 29, 2019

1 Lezione 8 - Stabilitá dei sistemi dinamici

Un sistema lineare $\sum$ si dice:

1. STABILE se per ogni perturbazione $y_{lib}(t)$ é limitata su $[0, +\infty)$

   $\sum$ é stabile $\Leftrightarrow$ tutti i poli hanno parte reale non positiva e gli eventuali poli puramente immaginari sono semplici

2. ASINTOTICAMENTE STABILE, se stabile e $lim_{t \to +\infty} y_{lib}(t) = 0$A per ogni perturbazione introdotta.

3. SEMPLICEMENTE STABILE é stabile ed esiste una perturbazione per cui

$$lim_{t \to +\infty} y_{lib}(t) = y_{\infty} \neq 0 \vee \left\{ \text{Non esiste } lim_{t \to \infty} y_{lib}(t) \right\}$$

4. INSTABILE non é stabile

2 Criterio di Juri

Sia dato il polinomio $a(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_n$ con $a_n > 0$. Condizione necessaria affiché $a(z)$ abbia tutte le radici di modulo minore di 1 é che le seguenti disuguaglianze siano soddisfatte:

1. $a(1) > 0$
2. $(-1)^n a(-1) > 0$
3. $|a_0| < a_n$

Perndendo come esempio il caso $n - 1$:

$$a(z) = a_1 z + a_0 = 0$$

$$z = -\frac{a_0}{a_1} \qquad |z| < 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{|a_o|}{a_1} < 1 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{|a_o| < a_1}$$

Otteniamo che:

- $a(1) = a_1 + a_0 > 0$
- $a(-1) = -a_1 + a_0 < 0$

di queste tre disuguaglianze solo 2 sono indipendenti: la terza é l'insieme della prima e della seconda
Per il caso $n = 2$: 3 condizioni distinte (page 14 di Lez. 21)

Anche nel criterio di Jury é necessario costruire una trabella: (slide 15 Lez 21)

- iniziamo a scrivere le prime due righe: con la prima riga iniziamo a scrivere a partire da a_0
- Per la seconda riga partiamo da a_n e terminiamo la riga a a_0
- Per costruire le right successive calcoliamo il determinante della matrice 2×2 sopra e riportiamo la stessa riga sotto al contrario

Per calcolare il termine di una determinata riga si utilizza la formula:

$$b_k = \det \begin{pmatrix} a_0 & a_{n-k} \\ a_n & a_k \end{pmatrix} \qquad k = 0, 1 \ldots n - 1$$

3 Teorema (criterio di Jury)

Il polinomio $a(z) = \ldots$ ha tutte le radici di modulo minore di 1 se e solo se le seguenti $n + 1$ disuguaglianze sono soddisfatte:

1. $a(1) > 0$
2. $(-1)^n a(-1) > 0$
3. $\ldots$ slide 16

4 Scelta del periodo di campionamento (Slide 18 Lez 21)

Per il teorema di campionamento

$$w_s > 2w_b$$

con $w_s = \frac{2\pi}{}$ pulsazione di campionamento, T il corrispondente periodo

Una volta realizzato il progetto in tempo continuo é necessario implementare una $C_d(z)$

Alla funzione $C(s)$ é associata un'equazine differenziale in tempo continuo, a $C_d(z)$ un equazione di differenze

Metodo di eulero: $Dx(T) \Rightarrow \mathcal{L}[Dx(t)] = s \cdot \mathcal{L}[x(t)]$ (condizione iniziale nulla)

$$Dx(kT) \approx \frac{x((k+1)T) - x(kT)}{T}$$

$$\mathcal{Z}[Dx(kT)] \approx \frac{z-1}{T}\mathcal{Z}[x(kT)]$$

$$s = \frac{z-1}{Tz}$$

4.0.1 Alla lavagna

Immaginando di avere la funzione differenziale $a_1Dy + a_0y = b_1Du + b_0u$ corrisponde una funzione di trasferimento. Trasformandola secondo laplace con, condizioni iniziali nulle si ottiene:

$$a_1sY + a_0Y = b_1sU + b_0U$$

Immaginandola in tempo discreto, imponendo $t = kT$

$$a_1Dy(kT) + a_0y(kT_{=}b_1Du(kT) + b_0u(kT)$$

NOTA: Fino ad adesso Non é una approssimazione

Ora per calcolare la derivata utilizzo l'euqazione di eulero

$$a_1\frac{y((k+1)T) - y(kT)}{T} + a_0y(kT) = b_1\frac{u((k+1)T) - u(kT)}{T} + b_0u(kT)$$

Trasformanso:

$$\mathcal{Z}\left\{a_1\frac{y((k+1)T) - y(kT)}{T} + a_0y(kT) = b_1\frac{u((k+1)T) - u(kT)}{T} + b_0u(kT)\right\}$$

$$\dots$$

$$a_1\frac{z-1}{T}\mathcal{Z}[y(kT)] + a_0\mathcal{Z}[y(kT)] = b_1\frac{z-1}{T}\mathcal{Z}[u(kT)] + b_0\mathcal{Z}[u(kT)]$$

Trovo così che:

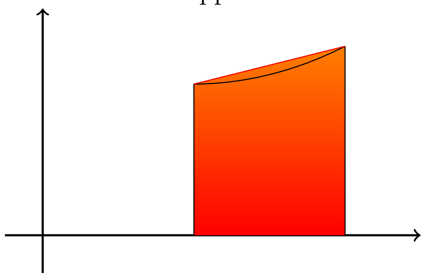
$$Y(z) = \frac{b_1\frac{z-1}{T} + b_0}{a_1\frac{z-1}{T} + a_0}U(z) = C(s)|_{s=\frac{z-1}{T}}U(z) := H(z)U(z)$$

Metodo di Euolero all'indietro: Stimo la derivata guardando il campione precedente

$$Dx(kT) \approx \frac{x(kT) - x((k-1)T)}{T}$$

4.0.2 Metodo di Tustin (slide 21)

Viene utilizzata l' 'approssimazione col metodo del trapezio'



(x: Approssimare due punti con trapezio)
Da slide 24: $C_d(z)$ è asintoticamente stabile siccome tutti i poli sono contenuti nella circonferenza unitaria

5 Esercizi

5.0.1 1

$$a(z) = z^3 - z^2 + z0.5$$

1. $a(1) > 0 \qquad 1 - 1 + 1 + 0.4 = 1.5 > 0 \quad \text{OK}$
2. $(-1)^3 a(-1) > 0, a(-1) < 0$
   $-a(-1) > 0 \qquad -1 - 1 - 1 + 0.5 = -2.5 < 0 \quad \text{OK}$
3. $|a_0| < a_3 \qquad |0.5| < 1\text{OK!}$

1	0.5	1	-1	1
2	1	-1	2	0.5
3	-0.75	1.5	-1.5	
4	-0.75	-1.5		

$|-0.75| > |-1.5|$ Not OK!

5.0.2 Secondo esercizio (slide 27)

$$a(z) = z^4 - z^3 + 0.25z^2 + 0.25z - 0.125$$

Per calcolare se il sistema é asintoticamente stabile

1. $a(1) > 0! \quad a(1) = 1 - 1 + 0.25 + 0.25 - 0.125 = 0.357 > 0$ OK
2. $(-1)^4 a(-1) > 0$
   $a(-1) > 0 \quad a(-1) = 1 + 1 + 0.25 - 0.25 - 0.125 = 1.875 > 0$ OK
3 $|a_0| < a_4 \quad |-o.125| < 1$ OK
4. $|b_0| > |b_1| \qquad |-0.9875| > |-0.125|$ OK
5. $|c_0| > |c_2| \qquad |0.9534| > |0.3979|$ OK

1	-0.125	0.25	0.25	-1	1
2	1	-1	0.25	0.25	-0.125
3	-0.98475	0.96875	-0.28125	-0.125	
4	-0.125	-0.28125	0.96875	-0.984375	
5	0.9534	*	0.3979		

6 Esercitazione Wed 29 May 2019 01:46:34 PM CEST

(. . . copiare parte prima da appunti)

$$P_d(s) = s^3 + (4+c)s^2 + (5+4c)s + 5c$$

$$\begin{cases} 2 + 4b_2 = 4 + c \\ 5 + 4c = 9 + 4b_1 \\ 90 = 5c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_2 = 5 \\ b_1 = 17 \\ c = 18 \qquad \text{Accetto come soluzione siccome} \gg 2 \end{cases}$$

$$C(s) = \frac{5s^2 + 17s + 18}{s^2 + 9}$$

$$e_r = \lim t \to \infty r(t) - y(t) = 0 \Leftrightarrow \lim_{t\to\infty} r(t) = \lim_{t\to\infty} t(t)$$

(Grafico)

$$T_{ry} = \frac{FL(s)}{1 + L(s)} \Rightarrow T_{ry}(0) = 1$$

$$T_{ry}(0) = \frac{FL(0)}{1 + L(0)} = \boxed{\tfrac{F4}{1+4} = 1}$$

$$F = \frac{5}{4} = 1.25$$

7 Esercizio 4

$\exists K \in \mathcal{R}$ t.c. $e_r = 0.05$, $r(t) = 1(t)$

$$e_r = \frac{1}{1 + K_P} \quad , \quad 0.05 = \frac{1}{K_P} \Leftrightarrow 0.05 + 0.05K_P = 1$$

$\boxed{K_P = 19}$

$$K_P = \lim_{s_0} C(s)P(s) = \lim_{s\to 0} K\frac{10}{(s+2)(s+5)(s+10)} = \frac{K}{10}$$

$$19 = \frac{K}{10} \Leftrightarrow \boxed{K = 190}$$

Verifichiamo che il sistema sia asintoticamente stabile:
Poli del sistema retroazionato

$$1 + C(s)P(s) = 0 \Leftrightarrow 1 + \frac{1900}{(s+2)(s+5)(s+10)} = 0$$

$$\Leftrightarrow (s+2)(s+5)(s+10) \neq 0$$

$$s^3 + 17s^2 + 80s + 2000 = 0$$

Routh:

3	1	80	0
2	17	2000	0
1	1360 - 2000	0	
0	2000		

Per la presenza di due variazioni, vi sono 2 poli retroazionati a parte reale positiva $\Rightarrow$ Sistema Instabile
$\Rightarrow \nexists k$ che garantisce $e_r = 0.005$
b

$$C(s) = K\frac{1 + \tau s}{1 + \alpha\tau s}$$

$$e_r = \frac{1}{1+K_P} = 0.05 \Leftrightarrow K_P = 19$$

$$K_p = \lim_{s\to 0} C(s)P(s) = \lim_{s\to 0} \frac{1+\tau s}{1+\alpha\tau s}\frac{10}{(s+2)(s+5)(s+10)} = \frac{K10}{100} = \frac{K}{10}$$

$$19 - \frac{K}{10} \Leftrightarrow \boxed{K = 190}$$

$$C(s) = 190\frac{1+\tau s}{1 = \alpha\tau s}$$

Modo 1 (Con Routh):

$$1 + K\frac{1+\tau s}{1+\alpha\tau s}\frac{10}{(s+2)(s+5)(s+10)} = 0$$

Sfrutto lo zero della rete anticipatrice per realizzare una cancellazione polo-zero ammissibile

$$1 + \frac{\cancel{\tau}\cancel{(s+\frac{1}{\tau})}}{\cancel{\tau}\left(\alpha s + \frac{1}{\tau}\right)}\frac{1900}{\cancel{(s+2)}(s+5)(s+10)} = 0$$

$$L(jw) = \frac{1900}{(2+\alpha jw)(jw+5)(jw+10)}$$

$$\left.\begin{array}{l} |L(jw)| = \frac{1900}{\sqrt{4+\alpha^2w^2}\sqrt{25+w^5}\sqrt{100+w^2}} \\ \arg(L(jw)) = -\mathrm{arctg}\left(\frac{\alpha w}{2}\right) - \mathrm{arctg}\left(\frac{w}{5}\right) - \mathrm{arctg}\left(\frac{w}{10}\right) \end{array}\right\}$$

$L(s,\alpha) = -\frac{1}{2}$ $\boxed{\text{se } \exists s = jw_P : L(s,\alpha) + \frac{1}{2} = 0}$

$$\frac{1}{2} + \frac{1900}{\alpha s+2)(s+5)(s+10)} = 0 \Leftrightarrow \alpha s^3 + (15\alpha+2)s^2 + (50\alpha+30)s + 3900 = 0$$

$$\begin{array}{c|ccc} 3 & \alpha & 50\alpha+30 & 0 \\ 2 & 15\alpha+2 & 3900 & 0 \\ 1 & f(\alpha) & 0 & \end{array} \qquad f(\alpha) = (15\alpha+2)(50\alpha+30) - 3900\alpha = 750\alpha^2 - 3350\alpha + 60$$

$$f(\alpha) = 0 \quad \rightarrow \quad \begin{array}{l} \cancel{\alpha_1 = 44487} \\ \alpha_2 = 0.0180 \quad \text{OK} \end{array}$$

Verifico se ho radici immaginarie poli ausiliari $(15\alpha+2)s^2 + 3900 = 0 \Rightarrow$ Ho radici immaginarie

$$C(s) = 190\frac{1+\frac{1}{2}s}{1+0.0180\frac{1}{2}s}$$

Modo 2: Uso delle formul di inversione:

$$C(s) = 190\frac{1+\tau s}{1+\alpha\tau s}$$

$$P(jw) = \frac{1900}{(jw+2)(jw+5)} \quad , \quad |P(jw)| = \frac{1900}{\sqrt{4+w^2}frac25+w^2\sqrt{w^2+100}}$$

$$\arg(P(jw)) = -\mathrm{atan}\left(\frac{w}{2}\right) - \mathrm{atan}\left(\frac{w}{5}\right) - \mathrm{atan}\left(\frac{w}{10}\right)$$

Cerchiamo w_0 all'interno della circonferenza di raggio $\frac{1}{2}$

$$\arg(P(jw)) + \pi\phi_0 = 0 \Leftrightarrow \phi_0 = -\arg(P(jw)) - \pi$$

$$M = \frac{1}{2|P(jw)|}$$

Per potere applicare le formule di inversione abbiamo il vincolo:

$$\cos\phi_0 > \frac{1}{M} \Leftrightarrow \cos\phi_0 > 2|P(jw)|$$

$$w_0 = 10\frac{rad}{s} \qquad |P(jw)| = 1.17$$
$$w_0 = 13\frac{rad}{s} \quad |P(jw)| = 0.6323$$
$$w_0 = 15\frac{rad}{s} \quad |P(jw)| = 0.4405 \rightarrow \text{Potrebbe essere OK}$$

$$\arg(P(jw)) == -3.67 \Rightarrow \phi_0 - \arg(P(jw)) - \pi = 0.5285$$
$$\cos(\phi_0) = 0.8636 >^? 2(0.4405) = 0.811 \rightarrow \text{NO}$$

$$w_0 = 16\frac{rad}{s} \qquad |P(jw)| = 0.3726$$
$$\arg(P(jw)) = -2.726$$

$$\phi_0 = -\arg(P(jw)) - \pi = 0.5849$$

Verifica: $\cos\phi_0 = 0.8338 \geq^? 2(0.3726) = 0.742 \rightarrow$ OK

Possiamo applicare le Formule di inversione

$$\begin{cases} \phi_0 = 0.5849 \\ M = \frac{1}{2|P(jw)|} = 1.2419 \\ \tau = \frac{M - \cos\phi_0}{w_0 \sin\phi_0} = 0.0575 \\ \alpha = \frac{M\cos\phi_0 - 1}{M(M - \cos\phi_0)} = -0.174 \end{cases}$$

8 Esercizio 1

$$P(s) = \frac{5}{(s+1)^3}$$

Controllore <u>PID</u>: $C(s) = K\left(1 + T_d s + \frac{1}{T_i s}\right)$

$$T_i = 4T_d$$
$$M_F = 45$$

$$C(s) = \frac{K}{T_i}\left(\frac{1 + \frac{25}{w_j}s + \frac{s^2}{w_n^2}}{s}\right)$$

$$w_n = \frac{1}{\sqrt{T_i T_d}} \qquad \delta = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{T_i}{T_d}}$$

$$C(jw_n) = K_P$$

$$P(jw) = \frac{5}{(jw+1)^3}$$

$$|P(jw)| = \frac{5}{(1+w^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\arg(P(jw_0)) = -3\text{atan}(2)$$

(X: Grafico)

$$\arg(P(jw_0)) + \pi = M_F = 45$$

$$\arg(P(jw_0)) = M_F - \pi \Leftrightarrow -3\text{aran}(w) = \frac{\pi}{4} - \pi = -\frac{3}{4}\pi \Leftrightarrow \text{atan}(w) = \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \boxed{w_0 = 1\frac{rad}{s}}$$

$$|P(jw)| = \frac{5}{(1+w_0^2)^{\frac{3}{2}}} = 1.7678$$

$$K_P \coloneqq \frac{1}{|P(jw)|} = \frac{1}{1.7678} = \boxed{0.5657}$$

$$\delta = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{T_i}{T_d}} = \frac{1}{2}\frac{4}{=}1$$

$$T_i = \frac{2\delta}{w_n} = 2$$

$$T_d = \frac{1}{T_i w_0^2} = \frac{1}{2}sec$$

$$\boxed{C(s) = 0.5657\left(1 + \tfrac{1}{2}s + \tfrac{1}{2s}\right)}$$

9 esercizio 2

$$y_{lib}(2) = \frac{1}{(z-\frac{1}{2})^2(z^2+1)} = \frac{1}{\left(z-\frac{1}{2}\right)^2(z-j)(z+j)}$$

$$\mathcal{Z}^{-1}[y_{lib}(z)] = y_{lib}(K) \quad , \quad K \geq 0$$

Antitrasformazione per fratti semplici

$$y_{lib}(z) = \frac{C_{1,1}}{\left(z-\frac{1}{2}\right)^2} + \frac{C_{1,2}}{z-1\frac{1}{2}} + \frac{C_2}{z-j} - \frac{\bar{C_2}}{z+j}$$

$$C_{i,j} = \frac{1}{(j-1)!}D^{j-1}\left[(z-P_i)^{r_i}F(z)\right]\Big|_{z=P_i}$$

r_i é la molt di P_i

$$\text{Res}(F,P) = \frac{1}{(n-1)!}D^{n-1}[(z-p)^nF(z)]\Big|_{z=p}$$

n é la molt di P

Prop (Per funzioni razionali Strettamente proprie)

$$\sum_i \text{Res}(F,P_i) = \begin{cases} 0 \quad \text{se} \quad n-m>1 \\ \frac{b_m}{a_n} \quad \text{se} \quad n-m=1 \end{cases}$$

$$C_{1,1} = \cancel{(z-\frac{1}{2})^2}\frac{1}{\cancel{(z-\frac{1}{2})^2}(z^2+1)\Big|_{z=\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\frac{1}{4}+1} = \boxed{\frac{4}{5}}$$

$$C_2 = \cancel{(z-j)^1}$$