Máster Interuniversitario en Matemáticas

Modelos Matemáticos y Algoritmos

Ejercicios Tema 2 - wxMaxima

Alejandro José Florido Tomé

Curso académico 2024/25

1 Ejercicio

Determina, haciendo uso de wxMaxima, las simetrías de la siguiente EDO:

$$y'' = \frac{y'}{y^2}. \tag{1}$$

A continuación, determina los grupos de Lie uniparamétricos correspondientes a los generadores infinitesimales obtenidos e indica qué tipo de transformaciones representan.

Con ayuda de wxMaxima, fuimos capaces de hallar las simetrías de la EDO, dando lugar a los dos siguientes generadores infinitesimales:

$$\mathbb{X}_1 = x\partial_x + \frac{y}{2}\partial_y, \tag{2}$$

$$\mathbb{X}_2 = \partial_x. \tag{3}$$

Como ya se explicó en el primer boletín de ejercicios, se procederá directamente a la obtención de los grupos de Lie uniparamétricos.

Según el primer teorema de Lie fundamental, $\mathbb{X} = \xi(x, y)\partial_x + \eta(x, y)\partial_y$. Apliquémoslo primero para $\mathbb{X}_1$:

$$\frac{dx^*}{d\epsilon} = \xi(x^*, y^*) = x^* \to ln(x^*) = \epsilon + cte \to x^* = C \cdot e^\epsilon, \tag{4}$$

con C una constante tal que $x^*(0) = x = C$, conque $x^* = xe^\epsilon$. Y para la otra componente:

$$\frac{dy^*}{d\epsilon} = \eta(x^*, y^*) = y^*/2 \to ln(y^*) = \epsilon/2 + cte \to y^* = K \cdot e^{\epsilon/2}, \tag{5}$$

con K una constante tal que $y^*(0) = y = K$, conque $y^* = ye^{\epsilon/2}$. Se trata de una transformación de homotecia.

Por otro lado, para $\mathbb{X}_2$:

$$\frac{dx^*}{d\epsilon} = \xi(x^*, y^*) = x^* \to ln(x^*) = \epsilon + cte \to x^* = C \cdot e^\epsilon, \tag{6}$$

con $C = x$, y:

$$\frac{dy^*}{d\epsilon} = \eta(x^*, y^*) = 0 \to y^* = cte = K, \tag{7}$$

con $K = y^*(0) = y$. Entonces, el grupo de Lie uniparamétrico asociado a $\mathbb{X}_2$ será $(x^*, y^*) = (xe^\epsilon, y)$. Se trata de una homotecia a lo largo del eje x.

2 Ejercicio

Determina, haciendo uso de wxMaxima, las simetrías de la EDO

$$y'' = -\frac{y'}{x} + e^y. \tag{8}$$

A continuación, considera la simetría $\mathbb{X} = x\partial_x - 2\partial_y$. Calcula las coordenadas canónicas correspondientes a $\mathbb{X}$ y extiéndelas al espacio (x, y, y', y'').

Dicha simetría la obtuvimos para la EDO de interés gracias a wxMaxima. Hallemos las coordenadas canónicas asociadas a la simetría al igual que se hizo en el boletín anterior, teniéndose que $\mathbb{X}r = 0$ y $\mathbb{X}s = 1$:

1. $\mathbb{X}r = x\partial_x r - 2\partial_y r = 0$. Sus ecuaciones características serán:

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{-2} = \frac{dr}{0}. \tag{9}$$

2. $\mathbb{X}s = x\partial_x s - 2\partial_y s = 1$. Sus ecuaciones características serán:

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{-2} = \frac{ds}{1}. \tag{10}$$

Que combinando da lugar a:

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{-2} = \frac{dr}{0} = \frac{ds}{1}. \tag{11}$$

Vayamos igualando por pares:

1. $dx/x = -dy/2 \to ln(x) = -y/2 + cte \to x = C \cdot e^{-y/2} \to C = xe^{y/2} \equiv z.$
2. $dr = 0 \to r = cte = f(z) = z = xe^{y/2}.$
3. $dy/-2 = ds \to s = -y/2.$

Siendo las coordenadas canónicas asociadas a $\mathbb{X}$ $(r, s) = (xe^{y/2}, -y/2)$.

Para extenderlas al espacio (x, y, y', y''), calculemos s_1 y s_2:

$$s_1 = \frac{ds}{dr} = \frac{s_x + y's_y}{r_x + y'r_y} = \frac{0 - y'/2}{e^{y/2} + y'xe^{y/2}/2} \tag{12}$$

$$\frac{d^2s}{dr^2} = \frac{1}{r_x + r_y y'}\frac{ds_1}{dx}. \tag{13}$$

3 Ejercicio

Determina, haciendo uso de wxMaxima, las simetrías de la EDP dada por

$$u_t = u^3 u_{xxx}. \tag{14}$$

Con wxMaxima se ha acabado obteniendo las siguientes simetrías de la EDP:

$$\mathbb{X}_1 = \partial_t, \tag{15}$$

$$\mathbb{X}_2 = x\partial_x + 3t\partial_t, \tag{16}$$

$$\mathbb{X}_3 = x\partial_x + u\partial_u, \tag{17}$$

$$\mathbb{X}_4 = x^2\partial_x + 2ux\partial_u, \tag{18}$$

$$\mathbb{X}_5 = \partial_x. \tag{19}$$

4 Ejercicio

Determina, haciendo uso de wxMaxima, las simetrías de la EDP lineal dada por:

$$u_t = u_{xx}. \tag{20}$$

A continuación, determina la solución invariante $u = \omega(x,t)$ **de la que resulta de su invariancia bajo**

$$\mathbb{X} = xt\partial_x + t^2\partial_t - \left(\frac{1}{4}x^2 + \frac{t}{2}\right)u\partial_u. \tag{21}$$

Las simetrías obtenidas para la EDP de interés con wxMaxima han sido:

$$\mathbb{X}_1 = x\partial_x + 2t\partial_t, \tag{22}$$

$$\mathbb{X}_2 = xt\partial_x + t^2\partial_t - -\left(\frac{1}{4}x^2 + \frac{t}{2}\right)u\partial_u, \tag{23}$$

$$\mathbb{X}_3 = t\partial_x - \frac{ux}{2}\partial_u, \tag{24}$$

$$\mathbb{X}_4 = \partial_x, \tag{25}$$

$$\mathbb{X}_5 = \partial_t, \tag{26}$$

$$\mathbb{X}_6 = u\partial_u. \tag{27}$$

Y, además, un grupo de Lie infinito-paramétrico trivial que se corresponde con cada una de las soluciones de la ecuación del calor (la EDP de estudio) de la forma $\mathbb{X} = q_2(x,t)\partial_u$.

Continuando con el ejercicio, hallamos la solución invariante con ayuda de las ecuaciones características asociadas a (21), que se corresponde con $\mathbb{X}_2$. Verifica que $\mathbb{X}r = 0$, $\mathbb{X}s = 0$ y $\mathbb{X}p = 1$, dando lugar a las siguientes ecuaciones características:

$$\frac{dx}{xt} = \frac{dt}{t^2} = \frac{du}{-\left(\frac{1}{4}x^2 + \frac{t}{2}\right)u} = \frac{dr}{0} = \frac{ds}{0} = \frac{dp}{1}. \tag{28}$$

Igualemos por pares:

1. $dx/x = dt/t \rightarrow ln(x) = ln(t) + cte \rightarrow C = z = x/t$, con C una constante, y z una función de x y t.
2. $dr = 0 \rightarrow r = cte \equiv f(z)$.
3. $$\frac{du}{u} = -\frac{1}{t}\left(\frac{r^2}{4}t + \frac{1}{2}\right)dt \rightarrow ln(u) = -\frac{r^2t}{4} - \frac{1}{2}ln(t) + cte \rightarrow K = w = \sqrt{t}ue^{x^2/4t}, \tag{29}$$

   con K una constante y w una función.

4. $ds = 0 \to s = cte \equiv f(w) = w = \sqrt{t}ue^{x^2/4t} \equiv r = f(z)$.

De la última igualdad obtenemos que la solución de la EDP adopta la forma:

$$u = \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-x^2/4t} f(z). \tag{30}$$

Calculando sus derivadas:

$$u_t = \left(-\frac{1}{2t} + \frac{x^2}{4t^2} \right) u + \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-x^2/4t} \frac{df(z)}{dt} = \left(-\frac{1}{2t} + \frac{x^2}{4t^2} \right) u - \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-x^2/4t} \frac{x}{t^2} f'(z), \tag{31}$$

$$u_x = -\frac{x}{2t} u + \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-x^2/4t} \frac{1}{t} f'(z), \tag{32}$$

$$u_{xx} = -\frac{u + xu_x}{2t} + \frac{e^{-x^2/4t}}{t\sqrt{t}} \left(\frac{-x}{2t} f'(z) + \frac{f''(z)}{t} \right). \tag{33}$$

Es claro que al sustituir en $u_t = u_{xx}$, el único término que no se anula es $f''(z) = 0$, cuya solución es de la forma $f(z) = c_1 + z \cdot c_2 = c_1 + xc_2/t$.

Por ende, las soluciones invariantes de la ecuación del calor vienen dadas por:

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{t}} \left(c_1 + c_2 \frac{x}{t} \right) e^{-x^2/4t}. \tag{34}$$