Instituto de Matemáticas
Universidad de Granada

Máster Interuniversitario en Matemáticas

Modelización. Procesos Estocásticos

Ejercicios Temas 1 y 2

Alejandro José Florido Tomé

Curso académico 2024/25

1 Ejercicio (5 puntos)

Sea X una variable aleatoria con función de densidad

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\} & \text{si } x < 0, \\ \frac{1}{2} exp\{-x\} & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

a) Diseña un método para generar una muestra de la variable X.

Vamos a aplicar el método de la composición para simplificar nuestra función de densidad. Para ello, descompongamos nuestra función definida a trozos en

$$f(x) = \omega_1 f_1(x) + \omega_2 f_2(x), \tag{1}$$

estando $f_1(x)$ definida para $x < 0$, y $f_2(x)$ para $x \geq 0$. ω_1 y ω_2 se corresponden con las probabilidades asociadas a cada función $f_1(x)$ y $f_2(x)$.

Para hallar $f_1(x)$ y $f_2(x)$ los tendremos que normalizar de la manera correcta. Para $f_1(x)$:

$$\int_{-\infty}^{0} f_1(x)dx = 1 = k_1 \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\} dx = \frac{k_1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\frac{\pi}{2}} = \frac{k_1}{2} \rightarrow k_1 = 2. \tag{2}$$

Por ende, $f_1(x) = \sqrt{2/\pi} \cdot exp[-x^2/2]$. Para $f_2(x)$:

$$\int_{o}^{\infty} f_2(x)dx = 1 = k_2 \frac{1}{2} \int_{0}^{\infty} exp[-x]dx = \frac{k_2}{2} \rightarrow k_2 = 2. \tag{3}$$

Entonces, $f_2(x) = e^{-x}$.

Los valores de ω_1 y ω_2 son fáciles de hallar.

- Si $x < 0$, $f(x) = exp[-x^2/2]/\sqrt{2\pi} = \omega_1 \sqrt{2/\pi} \cdot exp[-x^2/2]$. Despejando, $\omega_1 = 1/2$.
- Si $x \geq 0$, $f(x) = exp[-x]/2 = \omega_2 \cdot exp[-x]$. Despejando, $\omega_2 = 1/2$.

Con todo esto, el siguiente paso es hallar las funciones de distribuciones $F_1(x)$ y $F_2(x)$ asociadas a $f_1(x)$ y $f_2(x)$, respectivamente.

- Si $x < 0$,

  $$F_1(x) = \int_{-\infty}^{x} f_1(z)dz = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-z^2/2}dz = 2\chi(x), \tag{4}$$

  con $\chi(x)$ la integral de la distribución normal.
- Si $x \geq 0$,

  $$F_2(x) = F_1(0) + \int_{0}^{x} f_2(z)dz = 1 + (1 - e^{-x}). \tag{5}$$

Con $F_1(x)$ y $F_2(x)$, podemos hallar sus inversas para generar las muestras de X. Sean un conjunto (u_1, u_2) de números aleatorios uniformemente distribuidos en $(0, 1)$,

1. Si $u_1 < 0.5$, la muestra de la variable X se genera con $x = F_1^{-1}(u_2) = \chi^{-1}(u_2)/2$.
2. Si $u_1 \geq 0.5$, la muestra de la variable X se genera con $x = F_2^{-1}(u_2) = -log(2 - u_2)$.

b) Implementa dicho método en R.

El código que se ha usado, con los comentarios correspondientes, se exponen a continuación. Como se nos dice que se puede usar la función runif para generar números aleatorios, ésta ha sido utilizada.

```
set.seed(123)  #La semilla para generar los numeros aleatorios

generate_sample <- function(n) {
  samples <- numeric(n)  #Crearemos un vector con las muestras
  for (i in 1:n) {
    U1 <- runif(1)  # Generamos un numero aleatorio U
       uniformemente distribuido en (0, 1)
    U2<-runif(1)  #y otro numero aleatorio
    if (U1 < 0.5) {
      #De la parte normal
      samples[i] <- qnorm(U2)*2  # Inversa la distribucion
         normal dada con R directamente
    } else {
      #Y de la parte exponencial
      samples[i] <- -log(2 - U2)
    }
  }
  return(samples)
}
```

Con este código, se ha traducido lo que se ha expuesto en el apartado a), y así somos capaces de usar R para generar una muestra de la variable X.

c) Genera una muestra de tamaño 1000 y construye un histograma de dicha muestra.

Para ello, simplemente usaremos la función anterior, y representamos el histograma.

```
# Generamos 1000 muestras tal y como se nos pide (fijese que
   necesitaremos 2000 numeros aleatorios, u1 y u2, para generar
   1000 muestras)
muestras <- generate_sample(1000)

# Mostramos el histograma de la muestra de interes
hist(muestras,
     breaks = 30,  # Numero de intervalos
     main = "Histograma de la muestra de X",
     xlab = "Valores de X",
     ylab = "Frecuencia",
```

```
        col = "lightblue",
        border = "black")
```

Véase la Fig. 1 para ver el histograma de la muestra de tamaño 1000. Dicho histograma tiene una forma simétrica, adoptando valores entre -5 y 6. La mayoría de las observaciones se concentran en torno al 0, y después baja radicalmente la frecuencia para mayores valores de $x \geq 0$, tal y como se espera para una distribución exponencial como es la función de densidad para $x \geq 0$. Mientras que para $x < 0$ bajan también de manera rápida pero no tanto como la exponencial debido a que sigue una distribución normal, tal y como se spera para una distribución normal como es la función de densidad para $x < 0$.

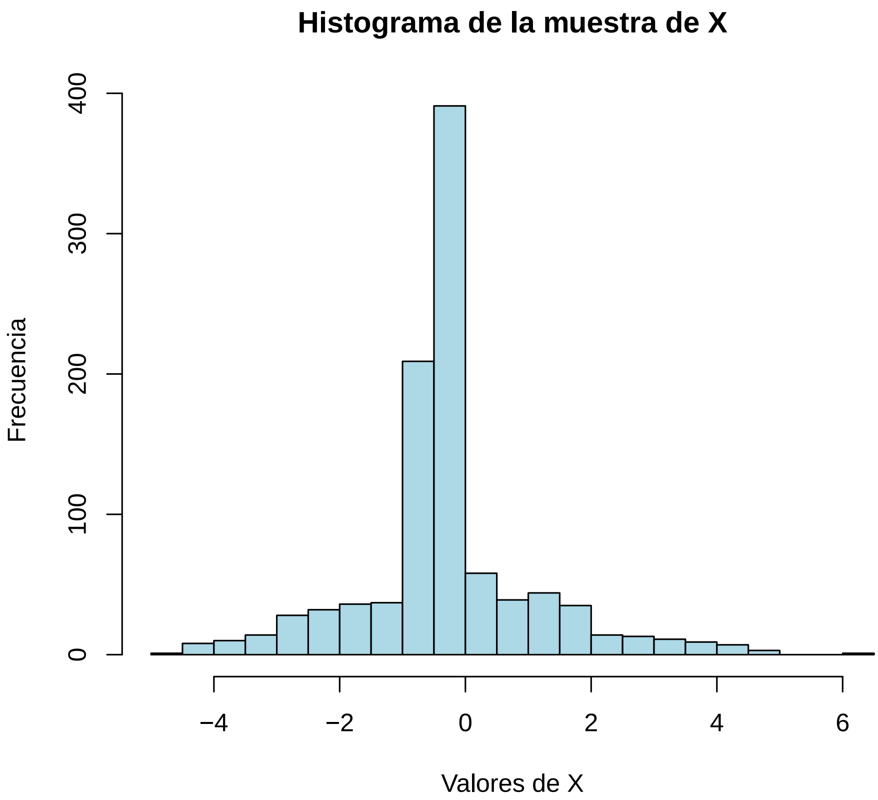

Figura 1: Histograma obtenido en R al realizar la muestra de tamaño 1000 para la función de densidad dado en el ejercicio 1.

2 Ejercicio (5 puntos)

Implementar en lenguaje R el método de la media muestral y estimar, mediante dicho método la esperanza y la varianza de X.

Tomando como referencia el pseudocódigo que se vió en teoría, se ha escrito un código en R para que realice lo pedido.

```
# Parametros a definir a partir de lo obtenido en el ejercicio 1
a <- min(muestras)       #El limite inferior corresponde con el minimo valor de la muestra X
b <- max(muestras)       #Y el superior con el maximo, ya que X tiene una distribucion U(a,b)
n <- 1000        # Tamanio de la muestra anterior
alpha <- 0.05    # Nivel de significancia que se suele tomar

#Inicialicamos dos variables que nos iran sumando dentro del bucle. La primera, s, las f(X_i) para hallar la esperanza, y la segunda, t, sera un gran sumatorio para hallar la varianza
s <- 0
t <- 0

#Definimos la funcion de densidad de nuestro ejercicio 1
f <- function(x) {
  if (x < 0) {
    return(1 / sqrt(2 * pi) * exp(-x^2 / 2))
  } else {
    return(1 / 2 * exp(-x))}}

#Usamos la muestra que ya habiamos generado y calculamos la media y varianza
for (i in 1:n) {
 X_i <-muestras[i]

  if (i > 1) {
    t <- t + (i - 1) / i * (f(X_i) - s / (i - 1))^2}

  s <- s + f(X_i)}

# Estimamos el valor de la integral I
I_est <- (b-a) * s / n

#La esperanza se puede estimar con la media muestral
esperanza_estimada <- s / n

#La varianza de la muestra se obtiene con la siguiente formula:
```

```r
s_n2 <- t / (n - 1)

sigma_theta2_cuadrado <- (b - a)^2 * s_n2 / n

#Y el intervalo de confianza para alpha=0.05
z_alpha_half <- qnorm(1 - alpha / 2)  # Valor critico z
lower_bound <- I_est - z_alpha_half * ((b-a) * s_n2 / sqrt(n))
upper_bound <- I_est + z_alpha_half * ((b-a) * s_n2 / sqrt(n))

# Resultados
cat("Valor estimado de I:", I_est, "\n")
cat("Esperanza de la muestra:", esperanza_estimada, "\n")
cat("Varianza de la muestra:", s_n2, "\n")
cat("Intervalo de confianza al nivel 1-alpha:",
    "[", lower_bound, ",", upper_bound, "]\n")
```

Para la muestra de la variable X del ejercicio anterior, los valores obtenidos para su esperanza y varianza son:

- Esperanza de X: 0.2648728.
- Varianza de X: 0.01923819.