



Máster Interuniversitario en Matemáticas



Modelos Matemáticos y Algoritmos

Ejercicios Tema 1

Alejandro José Florido Tomé

Curso académico 2024/25

1 Ejercicio

Se describe la evolución de una población con el siguiente modelo que incluye un tiempo de retardo τ :

$$\frac{dx}{dt}(t) = x(t) \cdot (ab + (a - b)x(t) - x(t - \tau)^2), \quad (1)$$

con $a > 0$, $b > 0$

a)

Centrémonos en este apartado en el modelo sin tiempo de retardo, en el límite $\tau \rightarrow 0$, siendo la ecuación a evaluar:

$$\frac{dx}{dt}(t) = x(t) \cdot (ab + (a - b)x(t) - x(t)^2) = F(x). \quad (2)$$

Los puntos de equilibrio de la función $F(x)$ son $x_1 = 0$, y

$$x = \frac{-(a - b) \pm \sqrt{(a - b)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot ab}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-(a - b) \pm (a + b)}{-2} = \begin{cases} x_2 = -b \\ x_3 = a \end{cases} \quad (3)$$

Tomaremos la solución de equilibrio positiva del modelo sin tiempo de retardo, $x_3 = a$. Dicha solución verifica que

$$F'(x = a) = a^2 + (a - b)a - a^2 + a(a - b - 2a) = -a^2 - ab < 0, \quad (4)$$

para cualquier valor de a y b , tratándose por ende $x = a$ de una solución asintóticamente estable para el modelo sin tiempo de retardo.

Continuemos linealizando nuestra solución para encontrar el intervalo de valores b/a que nos piden, tomándose $y(t) = x(t) - a$, siendo la ecuación (2) en función de esta nueva variable

$$\begin{aligned} \frac{dy(t)}{dt} &= (y(t) + a) \cdot (ab + (a - b)(y(t) + a) - (y(t - \tau) + a)^2) = \\ &= y(t) \cdot (a^2 - ab) - ay(t - \tau) \cdot (2a + y(t - \tau)) + y^2(t) \cdot (a - b) - y(t)y(t - \tau) \cdot (y(t - \tau) + 2a). \end{aligned}$$

Los términos cuadráticos serán subdominantes frente a los lineales siempre que $y(t)$ se mantenga pequeño (que nos encontremos cerca de la solución de equilibrio $x(t) = a$), dando lugar a

$$\frac{dy(t)}{dt} = y(t) \cdot (a^2 - ab) - 2a^2y(t - \tau). \quad (5)$$

Estudiemos la ecuación característica de la ecuación anterior proponiendo como solución $y(t) = C \cdot e^{\lambda t}$, con $\lambda \in \mathbb{C}$:

$$\lambda = a^2 - ab - 2a^2e^{-\lambda\tau}. \quad (6)$$

Será estable si la parte real de la ecuación anterior es negativa. Definiendo $\mu, \nu \in \mathbb{R}$ tal que $\lambda = \mu + i\nu$, podremos dividir la ecuación característica (6) en sus partes reales e imaginarias:

$$\mu + 2a^2e^{-\mu\tau}\cos(\nu\tau) - a^2 + ab = 0, \quad (7)$$

$$\nu - 2a^2 e^{-\mu\tau} \sin(\nu\tau) = 0. \quad (8)$$

Verifican que las soluciones (μ, ν) y $(\mu, -\nu)$ dan lugar a los mismos escenarios.

Para este primer apartado, particularizamos para $\tau = 0$, reduciéndose a $v(\tau = 0) = 0$ y a

$$\mu(\tau = 0) = -a^2 - ab. \quad (9)$$

Para que deje de ser estable, calculemos el valor de $\tau = \tau_0$ para que cambie el carácter de μ de negativo a positivo, de tal manera que $\mu(\tau = \tau_0) = \mu_0 = 0$ y $\nu(\tau = \tau_0) = \nu_0$, siendo las ecuaciones (8) y (7):

$$2a^2 \cos(\nu_0 \tau_0) - a^2 + ab = 0 \rightarrow \cos(\nu_0 \tau_0) = \frac{1}{2} - \frac{b}{2a}, \quad (10)$$

$$\nu_0 - 2a^2 \sin(\nu_0 \tau_0) = 0 \rightarrow \sin(\nu_0 \tau_0) = \frac{\nu_0}{2a^2}. \quad (11)$$

De la primera de ellas, podemos obtener el rango de valores de b/a en los que se satisface este cambio de carácter

$$-1 \leq \frac{1}{2} - \frac{b}{2a} \leq 1 \Leftrightarrow 3 \geq \frac{b}{a} \geq -1. \quad (12)$$

Como $a > 0$, $b > 0$, la verdadera condición para que el tiempo de retardo desestabilice la solución de equilibrio $x = a$ es entonces:

$$3 \geq \frac{b}{a} > 0. \quad (13)$$

Por ende, cuando $b/a > 3$, el tiempo de retardo no desestabiliza la solución $x = a$.

Este sería el fin del apartado, pero hay que tener el resultado que acabaremos obteniendo en el siguiente apartado, véase la expresión del tiempo de retardo presente en la ecuación (16). Este presenta una particularidad, y es que cuando:

$$\lim_{b \rightarrow 3a} \tau_0 = +\infty. \quad (14)$$

De manera numérica, nos será imposible alcanzar el valor de τ_0 en este caso, y todas las soluciones con $\tau < \tau_0$ tenderán a $x = a$. Entonces, nunca encontraremos un valor de τ para $b = 3a$ mayor o igual que τ_0 en este caso. Dicho de otra manera, podemos incluir el caso $b = 3a$ como un valor permitido que no desestabiliza la solución de equilibrio cuando se incluye un tiempo de retardo.

Concluimos el apartado con que el intervalo que no desestabiliza la solución $x = a$ será $b/a \geq 3$.

Breve resumen de lo obtenido en Mathematica

Se han realizado en Mathematica simulaciones para $a = 1$ y $b = 5$, con $\tau = 0, 1$ y 50 , y por otro lado para $a = 1$ y $b = 15$, con $\tau = 0, 5$ y 50 . Se ha demostrado que cuando $b > 3a$, sin importar el valor de τ , todas las soluciones acaban tendiendo a la solución de equilibrio $x = a = 1$.

También se estudió el caso $b = 3 = 3a = 3 \cdot 1$ para mostrar que numéricamente todas las soluciones, sin importar si τ es $0, 5$ o 100 , acaban tendiendo a $x = a = 1$. Con ello se mostró que el intervalo lo ya dicho: $b \geq 3$ no desestabiliza la solución $x = a$.

b)

Hemos dicho pues que es el intervalo $3 > b/a > 0$ el necesario para que el tiempo de retardo desestabilice la solución $x = a$. Dentro de este intervalo, obtenido a partir de la ecuación (10), podemos obtener la expresión de ν_0 elevando (10) y (11) al cuadrado y sumando las expresiones resultantes:

$$\cos^2(\nu_0\tau_0) + \sin^2(\nu_0\tau_0) = 1 = \frac{a^4 + a^2b^2 - 2a^3b}{4a^4} + \frac{\nu_0^2}{4a^4} \rightarrow \nu_0 = \sqrt{3a^4 - a^2b^2 + 2a^3b}. \quad (15)$$

Se ha tomado directamente la solución positiva porque, como mencionamos anteriormente, ν y $-\nu$ dan lugar a los mismos escenarios.

Con la expresión de ν_0 , podemos despejar directamente el tiempo de retardo crítico τ_0 de la ecuación (10):

$$\tau_0 = \frac{\text{ArcCos}\left(\frac{1}{2} - \frac{b}{2a}\right)}{a^2 \left(3 - \left(\frac{b}{a}\right)^2 + 2\left(\frac{b}{a}\right)\right)^{1/2}} \quad (16)$$

Para $\tau < \tau_0$, las soluciones tenderán a $x = a$, mientras que si $\tau = \tau_0$, $\mu_0 = 0$ y ν_0 dado por la ecuación (15) (recordando que para presentar la solución general también tenemos que tomar el valor negativo) las soluciones que propusimos, $y(t) = Ce^{\lambda t}$, adoptarán la forma:

$$y(t) = A_1 e^{i\nu_0 t} + A_2 e^{-i\nu_0 t} = C_1 \cdot \cos(\nu_0 t) + C_2 \cdot \sin(\nu_0 t), \quad (17)$$

con $A_1, A_2 \in \mathbb{R}$ y $C_1, C_2 \in \mathbb{C}$. Se tratan de soluciones periódicas cuyo periodo viene dado por:

$$T_0 = \frac{2\pi}{\nu_0} = \frac{2\pi}{a^2 \left(3 - \left(\frac{b}{a}\right)^2 + 2\left(\frac{b}{a}\right)\right)^{1/2}}. \quad (18)$$

Breve resumen de lo obtenido en Mathematica

En primer lugar, se ha mostrado que τ_0 sólo adopta valores finitos para $3 > b/a > 0$, tomándose $a = 1$, dejando b como un parámetro libre. Y ya se particularizó para $b = 2$, calculando el τ_0 a partir de (16). Primero se tomó $\tau = 1.1 < \tau_0 = 1.2092$ para comprobar que la solución tendía a $x = a$, y después se tomó $\tau = \tau_0$ para ver como se obtenía una solución periódica de la que se calculó el periodo experimental y el teórico con (18). El valor teórico era $T_{0teo} = 3.62898$, obteniéndose un error relativo entre ambas soluciones del 0.03 %, siendo la solución periódica propuesta prácticamente la solución real del problema para $\tau = \tau_0$.

c)

Para $3 > b/a > 0$, estudiemos el comportamiento de las soluciones para valores del tiempo de retardo ligeramente superiores a los valores críticos. Para ello, consideraremos un tiempo de retardo τ muy próximo a τ_0 ,

$$\tau = \tau_0 + \epsilon = \frac{\text{ArcCos}\left(\frac{1}{2} - \frac{b}{2a}\right)}{a^2 \left(3 - \left(\frac{b}{a}\right)^2 + 2\left(\frac{b}{a}\right)\right)^{1/2}} + \epsilon, \quad 0 < \epsilon \ll 1. \quad (19)$$

A ϵ lo denominaré como perturbación (ϵ se suele llamar de dicha manera dentro de muchos ámbitos, por ejemplo dentro del marco de la Relatividad General se toma una perturbación de la métrica para obtener las ecuaciones que describen la propagación de

las ondas gravitacionales). Con una perturbación tan pequeña, podremos aproximar a primer orden del desarrollo de Taylor las funciones $\mu(\tau)$ y $\nu(\tau)$ por:

$$\mu = \mu(\tau_0) + \mu'(\tau_0) \cdot \epsilon + O(\epsilon^2), \quad \nu = \nu(\tau_0) + \nu'(\tau_0) \cdot \epsilon + O(\epsilon^2). \quad (20)$$

Ya teníamos las expresiones de $\mu(\tau_0) = 0$ y $\nu(\tau_0)$ en la ecuación (15).

Centrémonos en obtener las expresiones de $\mu'(\tau_0)$ y $\nu'(\tau_0)$. Para ello, definamos la ecuación (7) como $f(\mu, \nu, \tau) = f(\Gamma) = 0$ y la ecuación (8) como $g(\mu, \nu, \tau) = g(\Gamma) = 0$, con $\Gamma = (\mu, \nu, \tau)$ para simplificar. Calculemos sus derivadas, donde definiré $\frac{\partial}{\partial x} \equiv \partial_x$:

$$\partial_\mu f(\Gamma) = 1 - 2a^2 \tau \cos(\nu\tau) e^{-\mu\tau}, \quad \partial_\mu g(\Gamma) = 2a^2 \tau e^{-\mu\tau} \sin(\nu\tau), \quad (21)$$

$$\partial_\nu f(\Gamma) = -2a^2 \tau e^{-\mu\tau} \sin(\nu\tau), \quad \partial_\nu g(\Gamma) = 1 - 2a^2 \tau \cos(\nu\tau) e^{-\mu\tau}, \quad (22)$$

$$\partial_\tau f(\Gamma) = -\mu 2a^2 e^{-\mu\tau} \cos(\nu\tau) - \nu 2a^2 e^{-\mu\tau} \sin(\nu\tau), \quad (23)$$

$$\partial_\tau g(\Gamma) = \mu 2a^2 e^{-\mu\tau} \sin(\nu\tau) - \nu 2a^2 e^{-\mu\tau} \cos(\nu\tau). \quad (24)$$

Evalúadas en $\Gamma_0 = (\mu_0, \nu_0, \tau_0)$:

$$\begin{vmatrix} \partial_\mu f(\Gamma_0) & \partial_\nu f(\Gamma_0) \\ \partial_\mu g(\Gamma_0) & \partial_\nu g(\Gamma_0) \end{vmatrix} = (1 - 2a^2 \tau_0 \cos(\nu_0 \tau_0))^2 + 4(a^2 \tau_0 e^{-\mu_0 \tau_0} \sin(\nu_0 \tau_0))^2 = 1 + 4a^4 \tau_0^2 (1 - \cos \nu_0 \tau_0),$$

adoptando siempre valores positivos este determinante. Esto nos asegura, por el método de la función implícita, que podremos calcular las derivadas que buscamos resolviendo el siguiente sistema:

$$\begin{pmatrix} \partial_\mu f(\Gamma_0) & \partial_\nu f(\Gamma_0) \\ \partial_\mu g(\Gamma_0) & \partial_\nu g(\Gamma_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu'(\Gamma_0) \\ \nu'(\Gamma_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\partial_\tau f(\Gamma_0) \\ -\partial_\tau g(\Gamma_0) \end{pmatrix}$$

El sistema de dos ecuaciones al que da lugar es el siguiente:

$$(1 - 2a^2 \tau_0 \cos(\nu_0 \tau_0)) \mu'(\tau_0) - 2a^2 \tau_0 \sin(\nu_0 \tau_0) \nu'(\tau_0) = 0, \quad (25)$$

$$2a^2 \tau_0 \sin(\nu_0 \tau_0) \mu'(\tau_0) + (1 - 2a^2 \tau_0 \cos(\nu_0 \tau_0)) \nu'(\tau_0) = -2a^2 \nu_0. \quad (26)$$

Podemos despejar de la ecuación (25) $\mu'(\tau_0)$ para sustituir su expresión en (26):

$$\frac{2a^2 \tau_0 \sin(\nu_0 \tau_0)}{1 - 2a^2 \tau_0 \cos(\nu_0 \tau_0)} \nu'(\tau_0) 2a^2 \tau_0 \sin(\nu_0 \tau_0) + (1 - 2a^2 \tau_0 \cos(\nu_0 \tau_0)) \nu'(\tau_0) = -2a^2 \nu_0. \quad (27)$$

De donde se obtiene directamente la expresión de $\nu'(\tau_0)$, y con la que podríamos sustituir en (25) para obtener la expresión de $\mu'(\tau_0)$. Entonces, obtenemos que las funciones buscadas se pueden aproximar por:

$$\mu \approx \frac{-4a^4 \tau_0 \nu_0 \sin(\nu_0 \tau_0)}{1 + 4a^2 \tau_0 (a^2 \tau_0 - \cos(\nu_0 \tau_0))} (\tau - \tau_0), \quad \nu \approx \nu_0 - 2a^2 \nu_0 \frac{1 - 2a^2 \tau_0 \cos(\nu_0 \tau_0)}{1 + 4a^2 \tau_0 (a^2 \tau_0 - \cos(\nu_0 \tau_0))} (\tau - \tau_0). \quad (28)$$

Por tanto, la solución del problema para $\tau > \tau_0$ se podrá escribir como $y(t) = D e^{\mu t} e^{i \nu t}$, comportándose asintóticamente como una función periódica de periodo:

$$T(\tau) = \frac{2\pi}{\nu(\tau)} \approx T_0 \left(1 - 2a^2 \frac{1 - 2a^2 \tau_0 \cos(\nu_0 \tau_0)}{1 + 4a^2 \tau_0 (a^2 \tau_0 - \cos(\nu_0 \tau_0))} (\tau - \tau_0) \right)^{-1} \quad (29)$$

Breve resumen de lo obtenido en Mathematica

Al tomar $\tau \gtrsim \tau_0$, usaremos (29) para corroborar que esta ecuación es la correcta para describir el periodo para las soluciones armónicas presentes en el intervalo dicho. Hemos vuelto a tomar $a = 1$, $b = 2$. Para $\tau = 1.21$, el error relativo entre las soluciones teórica y experimental es del 0.05 %, algo mayor que el obtenido en el apartado b) para $\tau = \tau_0$, pero sigue siendo tan despreciable que podemos afirmar que la solución tiene de periodo (29). Para $\tau = 1.25$, el error relativo aumenta al 1.28 %, empezando a haber diferencias entre ambas soluciones, habiendo aumentado el error relativo respecto al caso anterior en dos órdenes de magnitud. Y para $\tau = 1.3$, el error es del 2.63 %. Sigue siendo pequeño, pero va en aumento, y mayor será la diferencia conforme aumentemos el valor de τ , habiendo cada vez diferencias más sustanciales entre nuestra expresión teórica y el resultado experimental.

Podemos concluir de este apartado que (29) nos da el periodo de las soluciones en el intervalo $3 > b/a > 0$ cuando $\tau \gtrsim \tau_0$, cercano al valor de τ_0 .

d)

Este apartado se ha realizado por completo en Mathematica. Se tomaron $\tau = 2$, con un periodo de $5.95275 > T_{0teo} = 3.62898$, y $\tau = 5$ con un periodo de 14.9159. Los valores del periodo van aumentando considerablemente al aumentar τ , y dejarán de poder describirse correctamente con (29). No conocemos técnicas teóricas para hallar una expresión experimental del periodo, y sólo de esta manera hallaremos su valor.

2 Ejercicio

El modelo que describe el mecanimo en el que dos compuestos X e Y experimentan una reacción tipo activación-inhibición en presencia de un tercer compuesto A , manteniendo constante la concentración del compuesto de A y que el compuesto Y está siempre presente, es:

$$\frac{dx}{dt} = a - bx + c \frac{x^2}{y}, \quad y > 0, \quad (30)$$

$$\frac{dy}{dt} = -qy + px^2, \quad (31)$$

con x , y y a son las concentraciones de los compuestos X , Y y A , respectivamente, y q , b , c y p se tratan de constantes positivas.

a)

En primer lugar, adimensionalizemos las ecuaciones (30) y (31) de tal manera que no aparezca ningún parámetro en la primera de ellas.

Por un lado, centrémonos en las dimensiones de la ecuación (30) al dividirla por $a > 0$:

$$\frac{1}{a} \frac{dx}{dt} = 1 - \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \frac{x^2}{y}. \quad (32)$$

Esta forma de escribirla tiene la ventaja que todos los sumandos son adimensionales, gracias al primer término del lado derecho, que es la unidad. Y para poder sumar 1 a cualquier cantidad, siendo ese 1 un valor sin dimensiones, el resto de sumando deben ser por ende también adimensionales. Gracias a este simple razonamiento, concluimos que la siguiente igualdad se verifica (se denotan las unidades de una magnitud entre corchetes):

$$1 = \frac{1}{[a]} \frac{[x]}{[t]} = \frac{[b]}{[a]} [x] = \frac{[c]}{[a]} \frac{[x^2]}{[y]}. \quad (33)$$

De ella se obtiene, de la segunda igualdad:

$$\frac{1}{[t]} = [b] \rightarrow [t] = [b^{-1}] \rightarrow \tau = t \cdot b, \quad (34)$$

con τ una variable que adimensionaliza el tiempo. De la primera igualdad:

$$1 = \frac{[x]}{[a][t]} = \frac{[x][b]}{[a]} \rightarrow u = xb/a, \quad (35)$$

con u la variable que adimensionaliza la concentración del compuesto X . En último lugar, igualando el último término con 1, sustituyendo $[t] = 1/[b]$ y $[x] = [a][t] = [a]/[b]$:

$$1 = \frac{[c]}{[a]} \frac{[x^2]}{[y]} = \frac{[c]}{[a]} \frac{[a^2]}{[b^2]} \frac{1}{[y]} = \frac{[c][a]}{[b^2][y]} \rightarrow v = y \frac{b^2}{ca}, \quad (36)$$

con v la variable que adimensionaliza la concentración del compuesto Y .

Con las variables adimensionales $\tau = t \cdot b$, $u = xb/a$ y $v = y \frac{b^2}{ca}$, las ecuaciones (32) y (31) se reescribirán como:

$$\frac{1}{a} \frac{dx}{dt} = \frac{1}{a} \frac{d(ua/b)}{d(\tau/b)} = \frac{du}{d\tau} = 1 - \frac{b}{a} \left(\frac{a}{b} u \right) + \frac{c}{a} \frac{(au/b)^2}{(cav/b^2)} = 1 - u + \frac{u^2}{v}, \quad (37)$$

$$\frac{d(cav/b^2)}{d(\tau/b)} = \frac{ca}{b} \frac{dv}{d\tau} = -q \frac{ca}{b^2} v + p \frac{a^2}{b^2} u^2 \rightarrow \frac{dv}{d\tau} = -\frac{q}{b} v + p \frac{a}{bc} u^2. \quad (38)$$

Veamos que dimensiones tienen q y p para ver si los sumandos son adimensionales en la ecuación inferior. Igualando las dimensiones del lado izquierdo de la ecuación (31) con las dimensiones del primer sumando de la derecha:

$$\frac{[y]}{[t]} = [q][y] \rightarrow [q] = 1/[t] = [b], \quad (39)$$

corroborando que $\beta = q/b$ es adimensional. Y, si igualamos ahora de nuevo el lado izquierdo de (31), pero ahora al segundo sumando de la derecha. Tendremos en cuenta que de la ecuación (33) se obtiene que $[x^2]/[y] = [a]/[c]$:

$$\frac{[y]}{[t]} = [p][x^2] \rightarrow [p] = \frac{[y]}{[x^2][t]} = \frac{[c]}{[a]} \frac{1}{[t]} = \frac{[c][b]}{[a]}, \quad (40)$$

asegurándonos que $\alpha = pa/bc$ es adimensional. Por ende, el problema equivalente adimensionalizado es:

$$\frac{du}{d\tau} = 1 - u + \frac{u^2}{v} \equiv f(u, v), \quad (41)$$

$$\frac{dv}{d\tau} = -\beta v + \alpha u^2 \equiv g(u, v). \quad (42)$$

b)

El campo vectorial asociado a nuestro sistema de ecuaciones es:

$$F(u, v) = \begin{pmatrix} 1 - u + u^2/v \\ -\beta v + \alpha u^2 \end{pmatrix},$$

tal que en los puntos de equilibrio verifica ser un campo nulo, $F(u_e, v_e) = 0$. Despejando de la ecuación inferior:

$$-\beta v_e + \alpha u_e^2 = 0 \rightarrow v_e = \alpha u_e^2 / \beta, \quad (44)$$

podemos sustituirlo en la superior para obtener u_e en función de α y β :

$$1 - u_e + u_e^2/v_e = 1 - u_e + \beta/\alpha = 0 \rightarrow \left\{ u_e = 1 + \beta/\alpha = \frac{\alpha + \beta}{\alpha} \right\}. \quad (45)$$

Sustituyendo u_e en la expresión que teníamos para v_e :

$$v_e = \frac{\alpha}{\beta} \left(\frac{\alpha + \beta}{\alpha} \right)^2 = \frac{(\alpha + \beta)^2}{\alpha \beta}. \quad (46)$$

Por lo que el único punto de equilibrio del sistema es (u_e, v_e) , con sus expresiones dadas anteriormente.

Para clasificar el punto, comencemos con:

$$DF(u, v) = \begin{pmatrix} \partial_u f & \partial_v f \\ \partial_u g & \partial_v g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 + 2u/v & -u^2/v^2 \\ 2\alpha u & -\beta \end{pmatrix},$$

que evaluada en dicho punto da lugar a:

$$DF(u_e, v_e) = \begin{pmatrix} -1 + 2\frac{(\alpha+\beta)/\alpha}{(\alpha+\beta)^2/(\alpha\beta)} & -\frac{(\alpha+\beta)^2/\alpha^2}{(\alpha+\beta)^4/(\alpha\beta)^2} \\ 2\alpha(\alpha+\beta)/\alpha & -\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\beta-\alpha)/(\alpha+\beta) & -(\beta/(\alpha+\beta))^2 \\ 2(\alpha+\beta) & -\beta \end{pmatrix},$$

Entonces, su determinante será:

$$\det[DF(u_e, v_e)] = \left(\frac{\beta-\alpha}{\alpha+\beta}\right)(-\beta) - \left(\frac{-\beta^2}{(\alpha+\beta)^2}\right)2(\alpha+\beta) = \frac{-\beta^2 + \alpha\beta + 2\beta^2}{\alpha+\beta} = \beta > 0. \quad (49)$$

Por lo que no se tratará de un punto silla, para todo $\beta = q/b > 0$. Entonces, la estabilidad dependerá de signo de la siguiente traza:

$$\text{tr}[DF(u_e, v_e)] = \frac{\beta-\alpha}{\alpha+\beta} - \beta = \frac{\beta-\alpha-\beta^2-\beta\alpha}{\alpha+\beta} \quad (50)$$

Esta traza puede ser positiva o negativa en función de los valores de α y β .

- Si $\beta > \alpha + \beta^2 + \alpha\beta$, se tratará de un punto inestable.
- Si $\beta < \alpha + \beta^2 + \alpha\beta$, se tratará de un punto asintóticamente estable.

c)

Debido a la forma compleja de las condiciones recién obtenidas, haremos a continuación de manera cualitativa como se verían las órbitas en cada situación.

Comentar que no tendremos que estudiar las órbitas sobre los ejes. El estudio sobre el eje u (equivalente a $v = 0$) daría lugar a una singularidad en la ecuación (41). Y si buscamos soluciones de la forma $(0, v(\tau))$ sustituyendo en (41), nos encontramos con la contradicción $0 = 1$.

Estudiemos pues el campo de direcciones:

- $g(u, v) = 0$, asociada al campo vectorial horizontal, se verifica para $v = \alpha u^2/\beta$. Se trata de una parábola que parte del origen. Por encima de dicha curva, $g(u, v) < 0$, las órbitas se dirigen hacia abajo, mientras que por debajo de la curva, $g(u, v) > 0$, se dirigirán hacia arriba, véase la Fig. 1a.

Sobre el eje $v(u = 0)$ se tiene $F(0, v) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, dirigiéndose el campo en dicho eje hacia la derecha.

- $f(u, v) = 0$, asociada al campo vectorial vertical, se verifica para $v = u^2/(u-1)$. Dicha curva presenta el siguiente comportamiento: $\lim_{u \rightarrow 1} v(u) = +\infty$ y $\lim_{u \rightarrow \infty} v(u) =$

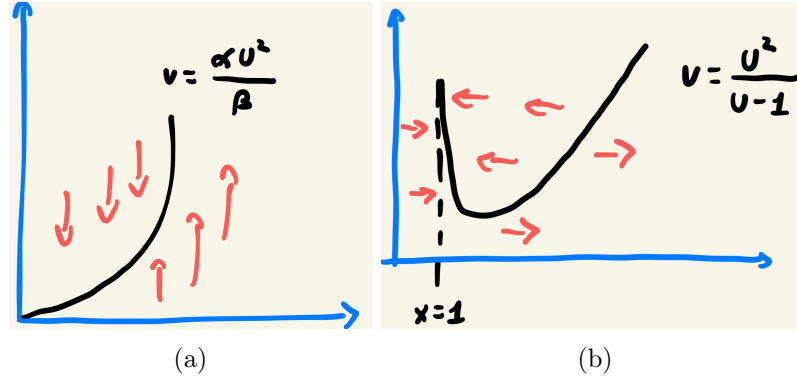


Figura 1: En 1a se presenta el comportamiento descrito cuando $g(u, v) = 0$, mientras que en 1b es cuando $f(u, v) = 0$.

$\lim_{u \rightarrow \infty} u = +\infty$. Dicha función presentará una barrera en $u = 1$, y para altos valores de u , v se comportará como una recta centrada de ordenada nula.

Esta función presenta por ende con esa forma un punto mínimo, dado al derivarla en $u_{min} = 2$. Conque la función decrecerá entre 1 y 2, y a partir de 2 volverá a crecer. Destacar que entre 0 y 1, la función v ya adoptaría valores negativos y estaría fuera del primer cuadrante, y por ende de nuestra zona de estudio.

Las órbitas se dirigirán hacia la izquierda por encima de la curva, $f(u, v) < 0$, y hacia la derecha por debajo, $f(u, v) > 0$, véase la Fig. 1b.

Sobre el eje $u(v = 0)$, ahora el campo será $F(0, v) = \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha u^2 \end{pmatrix}$, yendo hacia arriba, mientras que sobre el eje $v(u = 0)$, $F(0, v) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\beta v \end{pmatrix}$, irá hacia abajo.

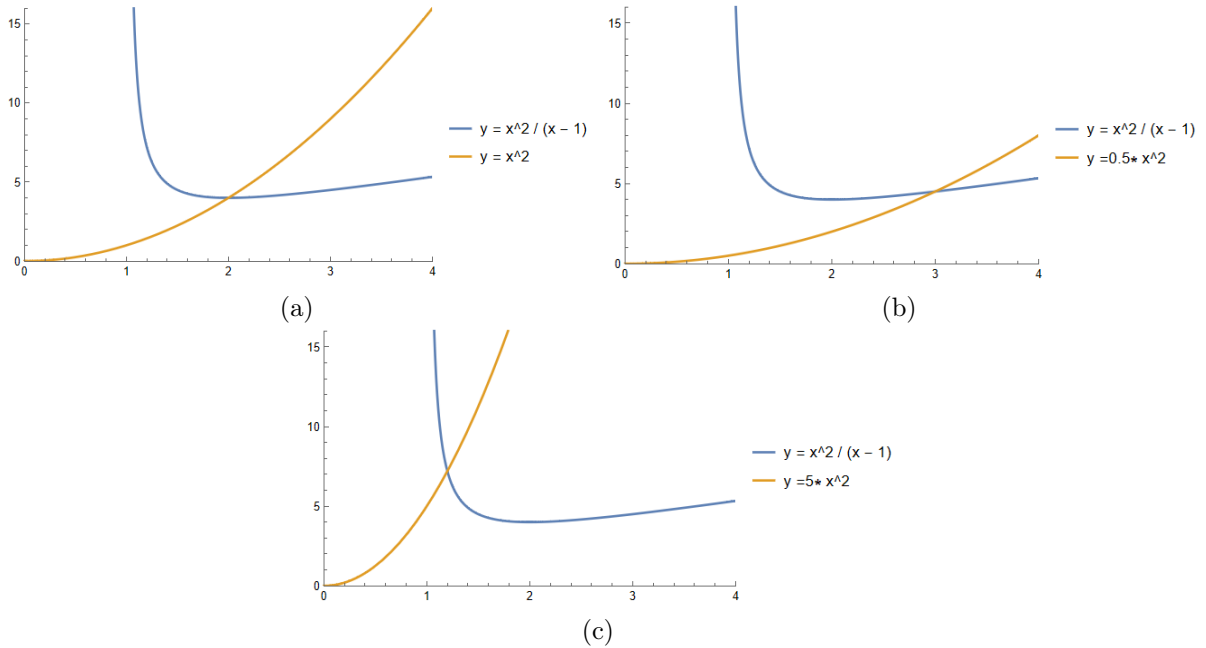


Figura 2: En 1a se presenta el comportamiento descrito cuando $g(u, v) = 0$, mientras que en 1b es cuando $f(u, v) = 0$.

Ahora debemos unir andas descripciones en una. Para ello, discutamos brevemente donde coinciden ambas curvas. Sean $v = \alpha u^2/\beta$, y $v = u^2/(u - 1)$ con el mínimo en $u_{min} = 2$ para cualquier valor de α y β . Sólo la primera de ellas depende de los parámetros, y será por la que nos tengamos que preocupar, ya que la otra siempre adoptará el mismo perfil. Entonces, ambas gráficas justo coinciden en u_{min} cuando $\alpha = \beta = 1$, $v(u_{min} = 2) = 1 \cdot 2^2 = 2^2/(2 - 1)$, véase la Fig. 2a. A la derecha de u_{min} las gráficas se tocarán si $\alpha/\beta < 1$, véase la Fig. 2b, y se tocarán a la izquierda si $\alpha/\beta > 1$, véase Fig. 2c.

A pesar de donde se encuentre el punto de contacto, lo interesante es que estos tres escenarios son cualitativamente iguales, siempre que los tres verifiquen que $\text{tr}[DF(u_e, v_e)] < 0$. Sabemos que debe de ser así porque en la ecuación (50), como mínimo $\alpha \geq \beta$ hace que $\text{tr}[DF(u_e, v_e)] < 0$, y ciertos valores de $\beta > \alpha$ también.

Sólo nos llevará entonces a distintos escenarios la condición expresada a partir de (50).

Para representar, si se trata de un punto asintóticamente estable, $\beta < \alpha + \beta^2 + \alpha\beta$, será tan sencillo como simplemente seguir las líneas presentadas en la Fig. 1, teniendo en cuenta los comportamientos ya explicados. Es decir, a partir de una curva que parte del eje v (recordar que exactamente del eje v no puede venir porque nuestras ecuaciones de partida darían lugar a singularidades. Cada vez que me refiero a ello, es a un punto infinitesimalmente cercano al eje v) como se ha representado en la Fig. 3a se acaba llegando en espiral al punto de interés.

En cambio, si se trata de un punto inestable, $\beta > \alpha + \beta^2 + \alpha\beta$, las direcciones serán las mismas pero el comportamiento distinto. Busquemos gráficamente con ayuda del teorema de Pincaré-Bendixon una región acotada y positivamente invariante con el punto de equilibrio inestable en su interior para hallar la presencia de un ciclo límite al que tenderán todas las órbitas. Véase la Fig. 3b para comprender el siguiente razonamiento. Se ha partido de nuevo de una curva en el eje v . Sigamos la trayectoria de color carne hasta que corta dos veces a $g(u, v) = 0$, tal que en el segundo punto definimos A . Trazaremos una recta horizontal desde el mismo hasta que cortemos a $f(u, v) = 0$, donde definiremos B en el punto de corte. En \overline{AB} se tiene que $g(u, v) < 0$, yendo las líneas hacia abajo. Y de nuevo trazamos otra recta, ahora vertical, desde B hasta corta a $g(u, v) = 0$, llamando a dicho punto C . Ahora, en \overline{BC} , $f(u, v) > 0$, yendo las líneas hacia la derecha. Vemos que en interior de la región $U \equiv \overline{CAuABuBC}$ se encuentra el punto inestable. Como las curvas no pueden cortarse, tampoco podrán salir por la curva naranja. Es decir, la

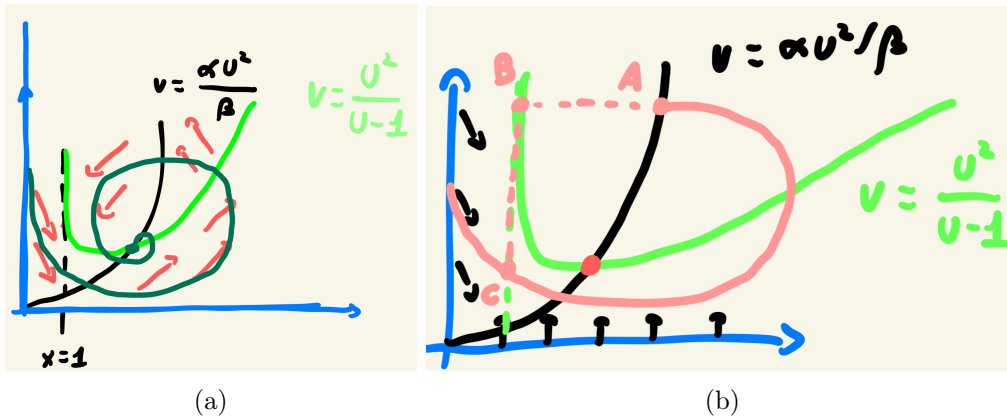


Figura 3: En 1a se presenta el comportamiento descrito cuando $g(u, v) = 0$, mientras que en 1b es cuando $f(u, v) = 0$.

curva no podrá salir de la región, y si tiene un punto inestable en su interior, la única posibilidad es que haya un ciclo límite. Nos encontramos pues en el interior de una región positivamente invariante.

d)

Realizado en su totalidad en Mathematica. Para el punto asintóticamente estable se tomará $\alpha = \beta = 1$ ($\text{tr}[DF(u_e, v_e)] < 0$), y para el inestable $\alpha = 0.01$ y $\beta = 0.9$ para así verificar que $0.9 > 0.01 + 0.9^2 + 0.01 \cdot 0.9 = 0.829$.

3 Ejercicio

Se quiere analizar las bifurcaciones de un modelo conservativo con función potencial dependiendo de un parámetro λ de la forma:

$$V(x; \lambda) = -\frac{x^4}{4} - \frac{\lambda x^3}{3} + x^2 + 2\lambda x, \quad \lambda > 0. \quad (51)$$

a)

Comencemos determinando y clasificando los puntos críticos del potencial.

Obtendremos los puntos críticos igualando la primera derivada espacial del potencial (51) a cero:

$$\partial_x V = -x^3 - \lambda x^2 + 2x + 2\lambda = 0 \rightarrow \{\bar{x}_1 = -\sqrt{2}, \bar{x}_2 = \sqrt{2}, \bar{x}_3 = -\lambda\}. \quad (52)$$

Para saber si se tratan de máximos o mínimos, calculemos la segunda derivada del potencial,

$$\partial_x^2 V = -3x^2 - 2\lambda x + 2, \quad (53)$$

y evaluémosla en los puntos críticos.

- Para $\bar{x}_1 = -\sqrt{2}$:

$$\partial_x^2 V(-\sqrt{2}; \lambda) = -4 + 2\sqrt{2}\lambda, \quad (54)$$

se tendrá un mínimo si $\lambda > \sqrt{2}$, y un máximo si $\lambda < \sqrt{2}$.

El valor del potencial en dicho punto es

$$V(-\sqrt{2}; \lambda) = 1 - \frac{4\sqrt{2}}{3}\lambda < 0, \quad (55)$$

para $\lambda > 0$.

- Para $\bar{x}_2 = \sqrt{2}$:

$$\partial_x^2 V(\sqrt{2}; \lambda) = -4 - 2\sqrt{2}\lambda < 0, \quad (56)$$

para cualquier $\lambda > 0$, tratándose siempre de un máximo.

El valor del potencial en dicho punto es

$$V(\sqrt{2}; \lambda) = 1 + \frac{4\sqrt{2}}{3}\lambda > 0, \quad (57)$$

para $\lambda > 0$.

- Para $\bar{x}_3 = -\lambda$:

$$\partial_x^2 V(-\lambda; \lambda) = 2 - \lambda^2, \quad (58)$$

será un máximo si $\lambda > \sqrt{2}$, y un mínimo si $\lambda < \sqrt{2}$.

El valor del potencial en dicho punto es

$$V(-\lambda; \lambda) = \lambda^2 \left(\frac{\lambda^2}{12} - 1 \right), \quad (59)$$

para $\lambda > 0$. Si $\lambda^2 > 12$ el potencial será positivo, mientras que si $\lambda^2 < 12$ será negativo.

Conque podemos dividir los puntos anteriores en función de valores de λ :

■ $\lambda < \sqrt{2}$:

$$\begin{cases} \bar{x}_1 = -\sqrt{2} & \text{será un máximo con } V(-\sqrt{2}; \lambda) = 1 - \frac{4\sqrt{2}}{3}\lambda < 0, \\ \bar{x}_2 = -\lambda & \text{será un mínimo con } V(-\lambda; \lambda) = \lambda^2 \left(\frac{\lambda^2}{12} - 1 \right) < 0, \\ \bar{x}_3 = \sqrt{2} & \text{será un máximo con } V(\sqrt{2}; \lambda) = 1 + \frac{4\sqrt{2}}{3}\lambda > 0. \end{cases}$$

Se verifica en este intervalo que $V(-\sqrt{2}; \lambda) > V(-\lambda; \lambda)$.

■ $\lambda = \sqrt{2}$:

$$\begin{cases} \bar{x}_1 = \bar{x}_2 = -\sqrt{2} & \text{será un punto degenerado con } V(-\sqrt{2}; \sqrt{2}) = -5/3 < 0 \text{ y } \partial_x^2 V = 0, \\ \bar{x}_3 = \sqrt{2} & \text{será un máximo con } V(\sqrt{2}; \lambda) = 1 + \frac{4\sqrt{2}}{3}\lambda > 0. \end{cases}$$

■ $\lambda > \sqrt{2}$:

$$\begin{cases} \bar{x}_2 = -\lambda & \text{será un máximo con } V(-\lambda; \lambda) = \lambda^2 \left(\frac{\lambda^2}{12} - 1 \right) < 0 \text{ si } \lambda^2 < 12, \\ \text{y } V(-\lambda; \lambda) > 0 \text{ si } \lambda^2 > 12, \\ \bar{x}_1 = -\sqrt{2} & \text{será un mínimo con } V(-\sqrt{2}; \lambda) = 1 - \frac{4\sqrt{2}}{3}\lambda < 0, \\ \bar{x}_3 = \sqrt{2} & \text{será un máximo con } V(\sqrt{2}; \lambda) = 1 + \frac{4\sqrt{2}}{3}\lambda > 0. \end{cases}$$

De este resumen hecho, debemos de destacar dos cosas: el punto degenerado que se presenta para $\lambda = \sqrt{2}$, y que para $\lambda > \sqrt{2}$ los puntos máximos \bar{x}_2 y \bar{x}_3 alcanzan el mismo valor del potencial para $\lambda = 3\sqrt{2}$.

Entonces, el potencial es genérico para $\lambda \in (0, \sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, 3\sqrt{2}) \cup (3\sqrt{2}, +\infty)$. Es obvio que es genérico en esos intervalos por tener una cantidad finita de puntos críticos, sin puntos degenerados, sin alcanzar el mismo valor del potencial en dos máximos, y el potencial adopta valores infinitos para valores de $|x| \rightarrow \infty$.

$\bar{x}_3 = \sqrt{2}$ se tratará de un punto silla para $\lambda > 0$. En cambio, $\bar{x}_1 = -\sqrt{2}$ y $\bar{x}_2 = -\lambda$ pasan de ser un máximo y mínimo para $\lambda \in (0, \sqrt{2})$, a un mínimo y un máximo para $\lambda > \sqrt{2}$, respectivamente.

b)

Al igual que realicé en el apartado anterior, dividiré el estudio para los distintos valores de λ , y presentando y explicando el comportamiento que se presenta.

Un importante detalle es que $V(0; \lambda) = 0$, para cualquier valor de λ .

- $\lambda < \sqrt{2}$: se tienen dos puntos sillas y un centro, estando $V(-\sqrt{2}; \lambda)$ por debajo de $V = 0$, pero por encima del mínimo $V(-\lambda; \lambda)$, y $V(\sqrt{2}; \lambda) > 0$ el máximo valor posible del potencial. Véase la Fig. 4 para comprender el siguiente razonamiento.
 1. Si $E_1 < V(-\lambda; \lambda)$, la energía de la partícula se encontrará con dos barreras de potencial, permitiendo que se desplace por órbitas dirigidas hacia la derecha y hacia la izquierda mientras pierde energía cinética hasta que su energía iguala al potencial, rebotando y volviendo por donde vino, aumentando de nuevo su energía cinética. Se ha representado en color **rojo**.
 2. Si $E_2 \in (V(-\lambda; \lambda), V(-\sqrt{2}; \lambda))$, a parte de las órbitas anteriores, se presenta que la partícula se encuentra atrapada en un pozo de potencial en una órbita cerrada alrededor del centro. Se ha representado en **verde**.
 3. Si $E_3 = V(-\sqrt{2}; \lambda)$, se añaden las órbitas homoclinas asociadas al punto silla \bar{x}_1 . Se ha representado en **púrpura**.
 4. Si $E_4 \in (V(-\sqrt{2}; \lambda), V(\sqrt{2}; \lambda))$, se tiene una órbita adicional acotada por la derecha que rodea a la órbita homoclina asociada a \bar{x}_1 . Se ha representado en **naranja**.
 5. Si $E_5 = V(\sqrt{2}; \lambda)$, aparecen cuatro órbitas asociadas al segundo punto silla en \bar{x}_3 . Las partículas irán perdiendo energía cinética hasta llegar a dicho punto igualando su energía a la potencial, a partir del cual pueden rebotar o seguir en la misma dirección. No se tratan de órbitas acotadas sino de unas que se acercan a punto silla en uno de los límites asintóticos. Se ha representado en **gris**.
 6. Y si $E_6 > V(\sqrt{2}; \lambda)$, la energía será superior al potencial para todo valor de x . Las órbitas no están acotadas, y son partículas siempre en movimiento o hacia la derecha en el semiplano $y > 0$ o hacia la izquierda en el semiplano $y < 0$. Se ha representado en **negro**.
- $\lambda = \sqrt{2}$: hay un punto degenerado con $\bar{x}_1 = \bar{x}_2$, y un punto silla en \bar{x}_3 . Véase la Fig. 5 para comprender el siguiente razonamiento.
 1. Si $E_1 < V(-\sqrt{2}; \sqrt{2})$, habrán dos barreras de potencial, y habrá dos órbitas solamente acotadas por una parte. Se ha representado en **rojo**.

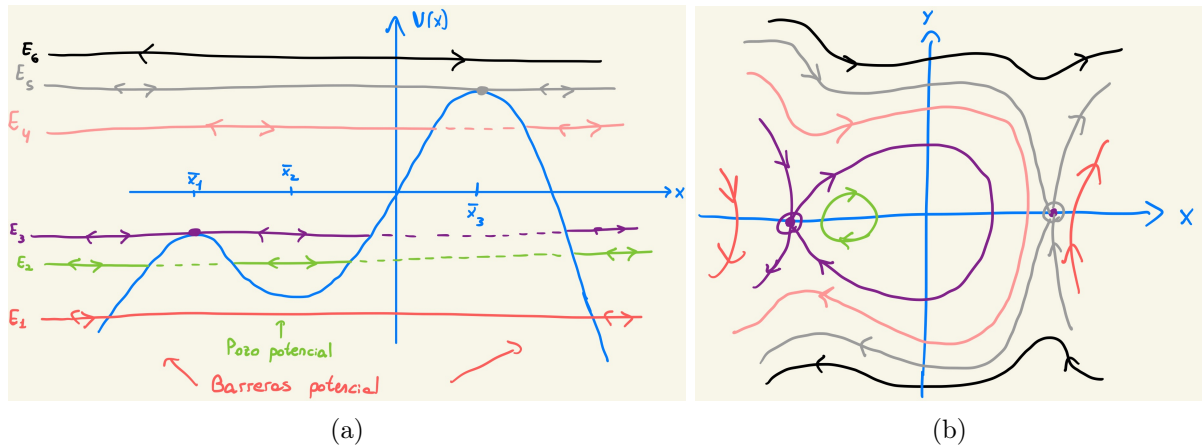


Figura 4: En 4a se presenta el perfil del potencial (51) para $\lambda < \sqrt{2}$, y en 4b el diagrama de fases asociado a dicho escenario.

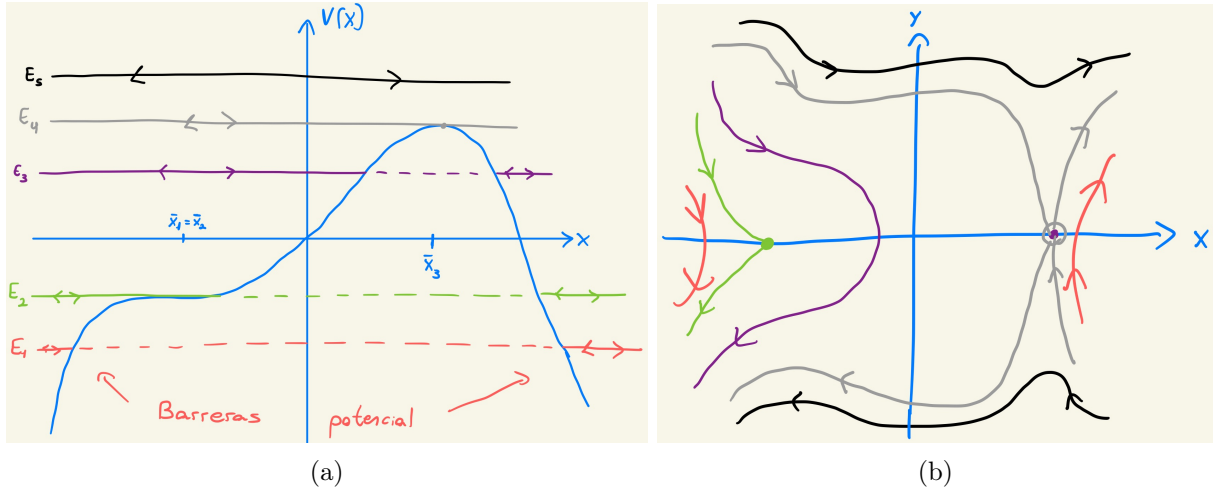


Figura 5: En 5a se presenta el perfil del potencial (51) para $\lambda = \sqrt{2}$, y en 5b el diagrama de fases asociado a dicho escenario.

2. Si $E_2 = V(-\sqrt{2}; \sqrt{2}) = -5/3$, nos encontraremos con el punto degenerado. Para comprender que pasa con estas órbitas, usaremos la conservación de la energía en $x = -\sqrt{2}, y = 0$. Como $E(x, y; \lambda) = y^2/2 + V(x; \lambda) = E_2 = -5/3$, para la forma de nuestro potencial se verifica que $y = \pm \sqrt{\frac{x^4}{2} + \frac{2\sqrt{2}}{3}x^3 - 2x^2 - 4\sqrt{2}x + 2E_2}$. Se tratarán de dos órbitas que vienen de $x < 0$ hasta la barrera presente en $\bar{x}_1 = \bar{x}_2 = -\sqrt{2}$ donde $y = 0$, y se quedarán ahí o debido a una perturbación se irán. Se ha representado en **verde**.
 3. Si $E_3 \in (V(-\sqrt{2}; \sqrt{2}), V(\sqrt{2}; \sqrt{2}))$, se tiene una órbita adicional acotada por la derecha que rodea a las órbitas asociadas al punto degenerado. Se ha representado en **púrpura**.
 4. Si $E_4 = V(\sqrt{2}; \sqrt{2})$, aparecen cuatro órbitas asociadas al segundo punto silla en \bar{x}_3 . No se tratan de órbitas acotadas sino de unas que se acercan a punto silla en uno de los límites asintóticos. Se ha representado en **gris**.
 5. Y si $E_5 > V(\sqrt{2}; \sqrt{2})$, la energía será superior al potencial para todo valor de x . Las órbitas no están acotadas, y son partículas siempre en movimiento o hacia la derecha en el semiplano $y > 0$ o hacia la izquierda en el semiplano $y < 0$. Se ha representado en **negro**.
- $\lambda \in (\sqrt{2}; 3\sqrt{2})$: se vuelven a tener dos puntos sillas y un centro. El punto silla de la izquierda se presenta ahora en \bar{x}_2 en vez de en \bar{x}_1 , y podrá adoptar valores del potencial tanto positivos como negativos, tal que $V(\bar{x}_2; \lambda) \in (V(\bar{x}_2; \sqrt{2}), V(\bar{x}_2; 3\sqrt{2})) = (-5/3, 9)$.

A la hora de representarlo a mano, es básicamente el mismo comportamiento y razonamiento que el presentado para $\lambda < \sqrt{2}$, pero cambiando esta vez los lugares de \bar{x}_1 y \bar{x}_2 por el otro. Ahora el máximo estará en \bar{x}_2 , y el mínimo en \bar{x}_1 . Ahora, $\bar{x}_2 < \bar{x}_1 = -\sqrt{2}$, mientras que para $\lambda < \sqrt{2}$ se tenía que $\bar{x}_1 < \bar{x}_2$. Véase la Fig. 6 para comprender el comportamiento presente para este caso. Aprecie que es básicamente igual que el presentado en la Fig. 4 pero cambiando los puntos mencionados. Mencionar que en la Fig. 6b se ha alargado la órbita homoclina con respecto a la Fig. 4b. Este alargamiento se debe a que el punto \bar{x}_2 se encuentra más alejado que \bar{x}_1 .

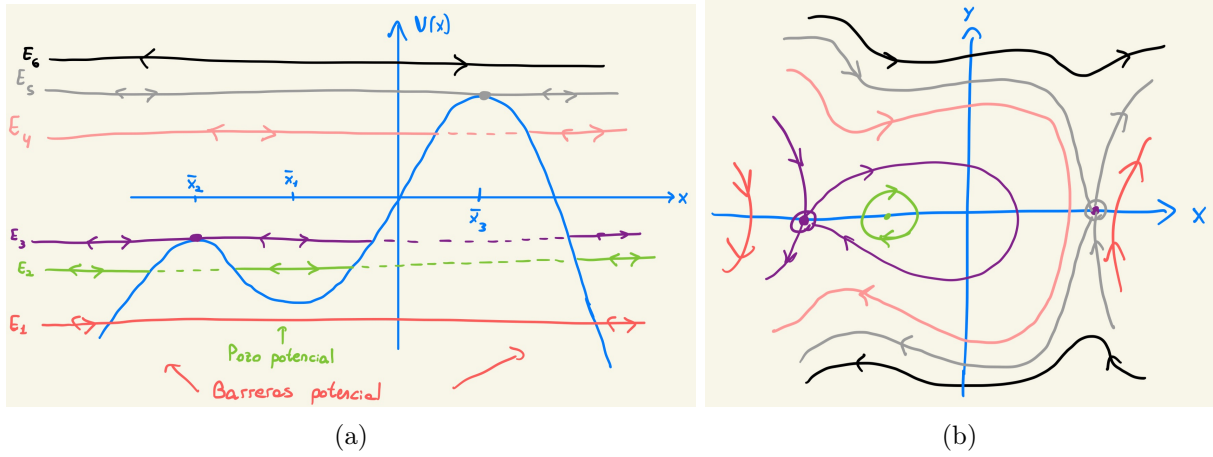


Figura 6: En 6a se presenta el perfil del potencial (51) para $\lambda \in (\sqrt{2}, 3\sqrt{2})$, y en 6b el diagrama de fases asociado a dicho escenario.

- $\lambda = 3\sqrt{2}$: ahora se tienen un centro y dos puntos silla, tales que dichos máximos adoptan el mismo valor del potencial. Véase la Fig. 7 para comprender el siguiente razonamiento.
 1. Si $E_1 < V(-\sqrt{2}; 3\sqrt{2})$, se tienen dos barreras de potencial y sólo habrán dos órbitas acotadas por uno de sus lados. Se ha representado en **rojo**.
 2. Si $E_2 \in (V(-\sqrt{2}; 3\sqrt{2}))$, aparece una órbita cerrada alrededor del centro $\bar{x}_1 = -\sqrt{2}$. Se ha representado en **verde**.
 3. Si $E_3 = V(\sqrt{2}; 3\sqrt{2}) = V(-3\sqrt{2}; 3\sqrt{2}) = 9$, nuestras órbitas tendrán la energía justa para poder pasar por ambos puntos silla ubicados en $(\bar{x}_2, 0)$ y $(\bar{x}_3, 0)$. Aparecen curvas no acotadas a la izquierda de $(\bar{x}_2, 0)$, no acotadas a la derecha de $(\bar{x}_3, 0)$, y órbitas que transcurren entre los puntos silla. La ecuación que verifican sería de la forma $y = \pm \sqrt{\frac{x^4}{2} + \frac{6\sqrt{2}}{3}x^3 - 2x^2 - 12\sqrt{2}x + 2 \cdot E_3}$, anulándose en \bar{x}_2 y \bar{x}_3 , formándose de manera efectiva de manera modelada por la ecuación anterior órbitas heteroclinas que conectan los dos puntos silla. Se ha representado en **púrpura**.

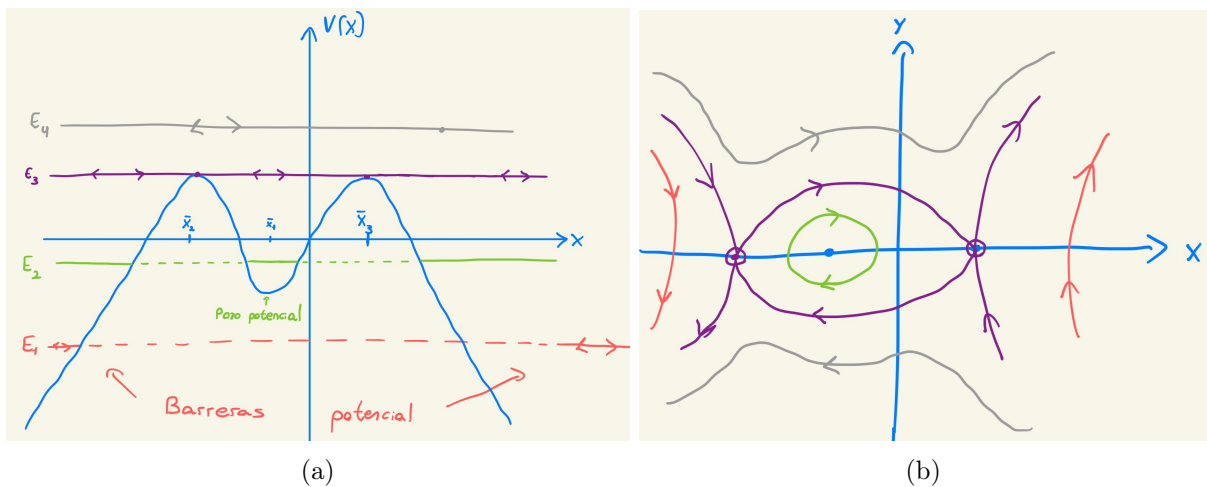


Figura 7: En 7a se presenta el perfil del potencial (51) para $\lambda = 3\sqrt{2}$, y en 7b el diagrama de fases asociado a dicho escenario.

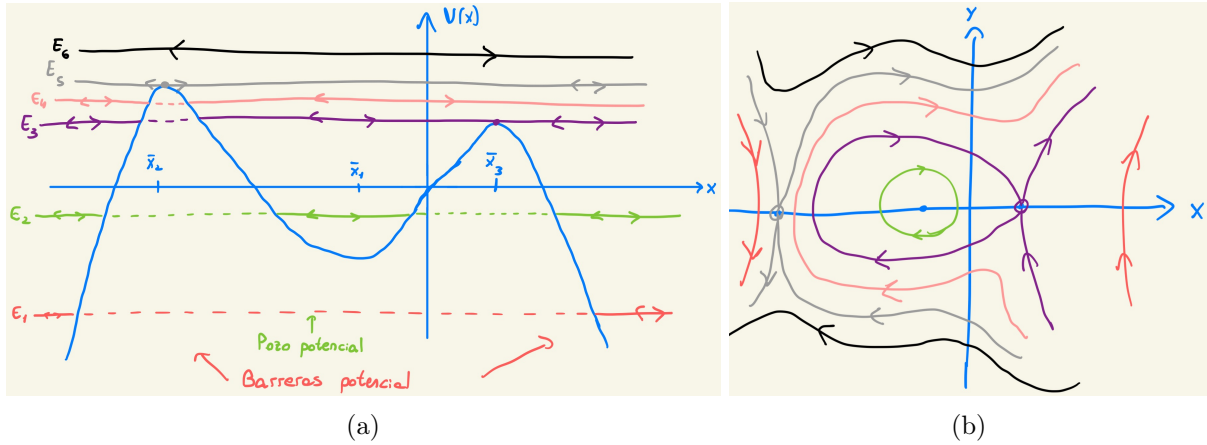


Figura 8: En 8a se presenta el perfil del potencial (51) para $\lambda > 3\sqrt{2}$, y en 8b el diagrama de fases asociado a dicho escenario.

4. Si $E_4 > E_3$, la energía será superior al potencial para todo valor de x . Las órbitas no están acotadas, y son partículas siempre en movimiento o hacia la derecha en el semiplano $y > 0$ o hacia la izquierda en el semiplano $y < 0$. Se ha representado en gris.
- Finalmente, $\lambda > 3\sqrt{2}$: habrá dos puntos silla y un centro, ubicados en los mismos puntos que los comentados anteriormente. La diferencia es que ahora $V(\bar{x}_2) > V(\bar{x}_3)$, siendo el máximo ubicado en $x < 0$ mayor que el que hay en $x > 0$. La discusión es análoga a la ya realizada para $\lambda \in (\sqrt{2}, 3\sqrt{2})$ para cuando $V(\bar{x}_2; \lambda) > 0$, diferenciándose en que ahora se formará las órbitas homoclinas en \bar{x}_3 en vez de en \bar{x}_2 . Véase la Fig. 8 para comprender el siguiente razonamiento.
 1. Si $E_1 < V(-\sqrt{2}; \lambda)$, habrá dos barreras de potencial. Se ha representado en **rojo**.
 2. Si $E_2 \in (V(-\sqrt{2}; \lambda), V(\sqrt{2}; \lambda))$, aparece una partícula atrapada en una órbita cerrada alrededor del centro. Se ha representado en **verde**.
 3. Si $E_3 = V(\sqrt{2}; \lambda)$, se añaden órbitas homoclinas asociadas al punto silla \bar{x}_3 . Se ha representado en **púrpura**.
 4. Si $E_4 \in (V(\sqrt{2}; \lambda), V(-\lambda; \lambda))$, se tiene una órbita adicional acotada por la izquierda que rodea a la órbita homoclina asociada a \bar{x}_1 . Se ha representado en **naranja**.
 5. Si $E_5 = V(-\lambda; \lambda)$, aparecen cuatro órbitas asociadas a segundo punto silla en \bar{x}_2 . Son órbitas que se acercan a dicho punto en uno de sus límites asintóticos. Se ha representado en gris.
 6. Y si $E_6 > V(-\lambda; \lambda)$, la energía será superior al potencial para todo valor de x . Las órbitas no estarán acotadas. Se ha representado en **negro**.

c)

Realizado en su totalidad en Mathematica. Para representar los distintos escenarios, se han tomado los siguientes valores de λ :

- Para $\lambda < \sqrt{2}$ se ha tomado $\lambda = \sqrt{2}/2$.

- Para $\lambda \in (\sqrt{2}, 3\sqrt{2})$ se ha tomado $\lambda = 0.9 \cdot 3\sqrt{2}$.
- Para $\lambda > 3\sqrt{2}$ se ha tomado $\lambda = 1.1 \cdot 3\sqrt{2}$.

d)

Se ha comprobado de manera clara que hay dos bifurcaciones.

La primera se presenta para $\lambda = \sqrt{2}$. Para $\lambda < \sqrt{2}$ se tenían dos puntos silla ubicados en $\bar{x}_1 = -\sqrt{2}$ y en $\bar{x}_3 = \sqrt{2}$, y un centro entre ellos en $\bar{x}_2 = -\lambda$, formándose órbitas homoclinales a la derecha de \bar{x}_1 que rodeaban al centro. Conforme aumenta el valor de λ , se va aproximando \bar{x}_2 a \bar{x}_1 , haciendo más pequeña la órbita homoclinal, hasta que para $\lambda = \sqrt{2}$ coinciden los puntos y desaparece la órbita recién mencionada y aparece una cúspide. A dicha bifurcación se le conoce como la de centro-punto silla para el potencial (51).

La segunda se presenta para $\lambda = 3\sqrt{2}$. Para $\lambda \in (\sqrt{2}, 3\sqrt{2})$, el punto $\bar{x}_2 = -\lambda$ se mueve hacia la izquierda con respecto a $\bar{x}_1 = -\sqrt{2}$, habiendo ahora dos puntos silla en \bar{x}_2 y en $\bar{x}_3 = \sqrt{2}$, y el centro en \bar{x}_1 . Vuelven a aparecer las órbitas homoclinales en el punto silla izquierdo, pero esta vez a la derecha de \bar{x}_2 que rodean ahora al centro \bar{x}_1 . Conforme aumentan los valores de λ , se va alejando el punto \bar{x}_2 , haciéndose más grande la órbita homoclinal, hasta que para $\lambda = 3\sqrt{2}$ alcanza el otro punto silla ubicado en \bar{x}_3 . Ahí, se rompe la órbita homoclinal para formar una órbita heteroclinal que une ambos puntos. Y al volver a aumentar λ , desaparece esta órbita heteroclinal y se vuelve a formar una homoclinal, esta vez a la izquierda de \bar{x}_3 que rodean de nuevo al centro \bar{x}_1 . Se trata de una bifurcación por formación de órbita heteroclinal para el potencial (51).