Instituto de Matemáticas
Universidad de Granada

Máster Interuniversitario en Matemáticas

UNIVERSITAS · GRANATENSIS · 1531 ·

PLUS ULTRA

Modelización. Procesos Estocásticos

Trabajo Temas 7 y 8

Alejandro José Florido Tomé

Curso académico 2024/25

1 Introducción

En [1] se estudiaron como han cambiado los usos del suelo con el paso del tiempo en la Alta Alpujarra. Para ello, usaron un método basado en las cadenas de Markov, junto con la evaluación multicriterio y la evaluación multiobjetivo. Este método, al que referenciaremos como CA_MARKOV, es superior a la estimación estándar de las cadenas de Markov a partir de los datos, la cual se limita a predecir el estado del sistema en un momento determinado sin tener en cuenta las variables explicativas y descriptivas, centrándose exclusivamente en la evolución en el uso del suelo.

Sin embargo, CA_MARKOV, además de realizar una modelización temporal como las cadenas de Markov habituales, relacionan las distintas categorías de usos del suelo (se describirán todas ellas más adelante) con un conjunto de variables de diversa naturaleza (variables explicativas de tipo humano o natural) que son capaces de explicar su dinámica. Para ello, compara diferencias significativas de comportamiento espacio-temporal suponiendo un espacio homogéneo e isótropo, analizando el impacto debido a algunas variables que se pueden obtener cartográficamente.

Nos encontraremos ante una cadena markoviana de segundo orden realizada con un procedimiento discreto en tiempo discreto. Es decir, los valores obtenidos en el instante de interés se han calculado a partir de dos anteriores. Para obtener la matriz de probabilidad de transición que nosotros usaremos, el algoritmo que usaron comparaba dos mapas de ocupación del suelo sucedidas cronológicamente (1957 y 1987) para modelizar la cartografía de 2001.

Cuadro 1: CA_MARKOV 2001 (%) para la Apujarra Alta. Las categorías estudiadas son 1- formaciones arbóreas, 2- matorrales, 3- pastizales, 4- pinares de repoblación, 5- cultivos abandonados, 6- mosaico de cultivos abandonados/no abandonados, 7- cultivos de regadíos, 8- cultivos de secano, 9- mosaico de regadío/secano, 10- uso urbano, minas, canteras y rambas. Tabla extraída de [1].

Usos	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	85.72	0.35	0.00	11.72	0.89	0.00	1.32	0.00	0.00	0.00
2	1.08	84.77	0.27	13.05	0.51	0.00	0.16	0.04	0.00	0.12
3	1.06	0.05	87.49	11.39	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
4	0.13	1.80	0.00	98.06	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
5	0.85	11.78	1.08	11.84	65.97	2.77	5.43	0.00	0.26	0.00
6	1.43	10.83	0.02	3.76	14.96	6.36	62.45	0.00	0.00	0.16
7	1.94	6.89	0.00	0.17	3.58	24.94	61.06	1.26	0.00	0.16
8	0.49	5.20	0.00	0.00	34.04	9.32	0.00	50.71	0.00	0.24
9	5.06	0.85	0.00	13.68	55.02	0.00	14.18	0.00	11.19	0.00
10	0.00	0.40	0.00	0.00	0.00	0.00	1.57	0.00	0.00	98.03

En el Cuadro 1 se ha presentado la matriz de probabilidad de transición que se obtuvo en [1]. Véase que se han presentado los porcentajes de los valores, y en donde las categorías usadas se corresponden con: 1- formaciones arbóreas, 2- matorrales, 3- pastizales, 4-

pinares de repoblación, 5- cultivos abandonados, 6- mosaico de cultivos abandonados/no abandonados, 7- cultivos de regadíos, 8- cultivos de secano, 9- mosaico de regadío/secano, 10- uso urbano, minas, canteras y rambas. Las iré poniendo en todas los cuadros que exponga para no olvidar con qué corresponde cada número, y tener en mente en todo momento que nos encontramos ante un problema de suelos latente aunque comencemos con el análisis numérico con R.

2 Ejercicios propios

En este apartado se va a estudiar el sistema descrito en la sección anterior. Iremos dividiendo apartado en distintos subapartados, cada uno con un ejercicio, para una mejor

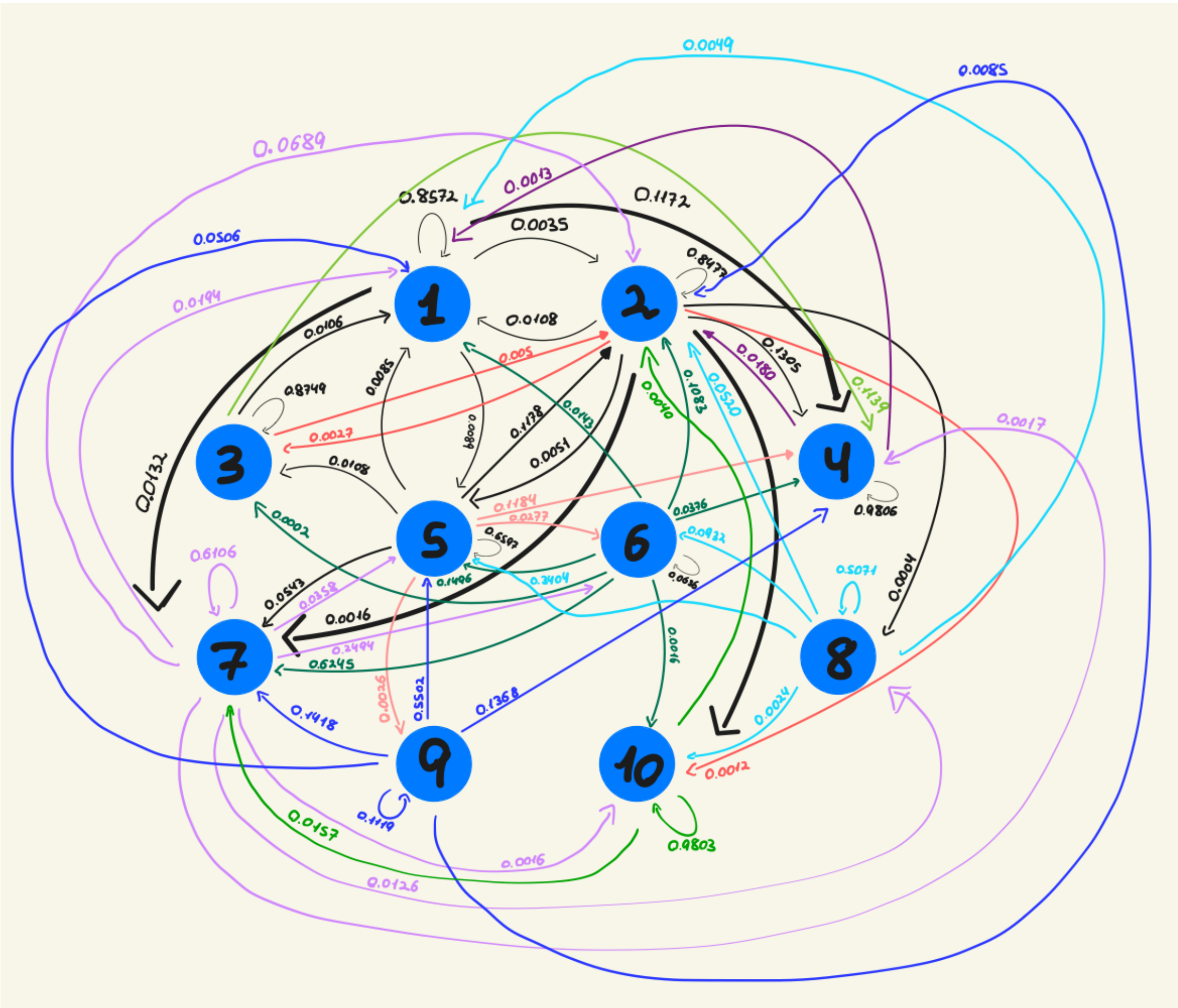

Figura 1: Diagrama de transición para el caso de estudio a partir de las probabilidades dadas en el Cuadro 1. Así se presenta claramente la complejidad de nuestro problema, donde las relaciones que se dan entre los distintos usos del suelo no son triviales.

visualización de lo que se está haciendo, de manera ordenada y clara para ir de un paso al siguiente sin perdernos.

Partiendo de que nos encontramos ante una cadena de Markov homogénea de parámetro discreto finita, pasemos con el estudio profundo de este ejercicio práctico.

2.1. Diagrama de transición

En la Fig. 1 se ha representado el diagrama de transición obtenido a partir del Cuadro 1.

2.2. Matriz irreducible

Podemos preguntarnos si la matriz es irreducible o no. Como todos los estados se acaban comunicando y formando parte de un gran todo, se dice que la matriz es irreducible, teniéndose una sola clase de equivalencia, $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Es decir, la cadena puede transitar desde cualquier estado a cualquier otro.

2.3. Clasifique los estados

Según la teoría, como nos encontramos antes una cadena de Markov de parámetro discreto irreducible finita, todos los estados de la misma serán recurrentes con $\sum_i p_{ii}^{(n)} = \infty$.

Para comprobar dicho resultado con R, se usó el siguiente código, definiendo previamente la matriz que usaremos (en el código no añado las tildes ni las eñes porque no son compatibles con el formato):

```
#Rellenamos por filas la matriz de probabilidad de transicion
P <- matrix(c(
  0.8572, 0.0035, 0.0000, 0.1172, 0.0089, 0.0000, 0.0132,
     0.0000, 0.0000, 0.0000,0.0108, 0.8477, 0.0027, 0.1305,
     0.0051, 0.0000, 0.0016, 0.0004, 0.0000, 0.0012,0.0106,
     0.0005, 0.8749, 0.1139, 0.0000, 0.0000, 0.0000, 0.0000,
     0.0000, 0.0000,0.0013, 0.0180, 0.0000, 0.9806, 0.0000,
     0.0000, 0.0000, 0.0000, 0.0000, 0.0000,0.0085, 0.1178,
     0.0108, 0.1184, 0.6597, 0.0277, 0.0543, 0.0000, 0.0026,
     0.0000,0.0143, 0.1083, 0.0002, 0.0376, 0.1496, 0.0636,
     0.6245, 0.0000, 0.0000,0.0016,0.0194, 0.0689, 0.0000,
     0.0017, 0.0358, 0.2494, 0.6106, 0.0126, 0.0000,
     0.0016,0.0049, 0.0520, 0.0000, 0.0000, 0.3404, 0.0932,
     0.0000, 0.5071, 0.0000, 0.0024,0.0506, 0.0085, 0.0000,
     0.1368, 0.5502, 0.0000, 0.1418, 0.0000, 0.1119,
     0.0000,0.0000, 0.0040, 0.0000, 0.0000, 0.0000, 0.0000,
     0.0157, 0.0000, 0.0000, 0.9803
), nrow = 10, byrow = TRUE)
P #mostramos la matriz
```

```
> P #la mostramos
      [,1]   [,2]   [,3]   [,4]   [,5]   [,6]   [,7]   [,8]   [,9]  [,10]
 [1,] 0.8572 0.0035 0.0000 0.1172 0.0089 0.0000 0.0132 0.0000 0.0000 0.0000
 [2,] 0.0108 0.8477 0.0027 0.1305 0.0051 0.0000 0.0016 0.0004 0.0000 0.0012
 [3,] 0.0106 0.0005 0.8749 0.1139 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000
 [4,] 0.0013 0.0180 0.0000 0.9806 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000
 [5,] 0.0085 0.1178 0.0108 0.1184 0.6597 0.0277 0.0543 0.0000 0.0026 0.0000
 [6,] 0.0143 0.1083 0.0002 0.0376 0.1496 0.0636 0.6245 0.0000 0.0000 0.0016
 [7,] 0.0194 0.0689 0.0000 0.0017 0.0358 0.2494 0.6106 0.0126 0.0000 0.0016
 [8,] 0.0049 0.0520 0.0000 0.0000 0.3404 0.0932 0.0000 0.5071 0.0000 0.0024
 [9,] 0.0506 0.0085 0.0000 0.1368 0.5502 0.0000 0.1418 0.0000 0.1119 0.0000
[10,] 0.0000 0.0040 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0157 0.0000 0.0000 0.9803
```

```
rowSums(P) #comprobamos que la matriz es estocastica
```

```
> rowSums(P)
 [1] 1.0000 1.0000 0.9999 0.9999 0.9998 0.9997 1.0000 1.0000 0.9998 1.0000
```

Como la suma por filas da aproximadamente 1, si se trata de una matriz estocástica donde las probabilidades suman 1. Valores un poco menores que 1 se deben a imprecisiones menores a la hora de tomar las medidas, sin relevancia porque se aprecia en la cuarta cifra significativa.

```
#y hacemos un codigo para sumar los p_ii para la matriz de
    transicion de orden m
v=diag(P) #sumamos los p_ii de la matriz de transicion
b<-v #redefinimos dicha suma
N<-P #la matriz de transicion
m=100000 #el orden de la matriz que buscamos

for(j in 1:(m-1)){ #codigo para hacer el calculo de la matriz a
    orden m
  N=P%*%N
  b=b+diag(N)
}
print("suma de las diagonales , suma P_ii^n")
b #suma diagonal para la matriz de orden m
```

Se muestra a continuación el resultado para distintos valores de m:

```
> b #para m=5
 [1] 3.2327547 3.1773177 3.4086756 4.7603197 1.7688775 0.5433141 2.2489606 0.9999684 0.1303124 4.7126891

> b #para m=50
 [1]  6.7063473  9.7406560  7.0602590 43.9576907  2.4513659  1.1072002  4.1756413  1.0755697  0.1330555 31.5205520

> b #para m=500
 [1]  14.1101825  56.6816132   8.1959458 421.6957062   3.7707287   1.5422161   5.6364552   1.1508610   0.1369198  53.0632126

> b #para m=10000
 [1]  118.2983404  717.6021246   24.0741075 5737.9475337   22.3409106    7.6051126   25.9472313    2.2063136    0.1912911
[10]   95.9713073

> b #para m=10000
 [1]  199.1848502 1230.7079757   36.4011235 9865.2213275   36.7578773   12.3120439   41.7155073    3.0257145    0.2335023
[10]  129.2810351
```

Todos los valores aumentan conforme aumenta el valor de m (tener en cuenta que m es el orden de la matriz, las veces que se multiplica por sí misma). Es decir, se verifica para todos los estados, que en este caso son 10, que $\sum_i p_{ii}^{(n)} = \infty$, tratándose efectivamente de estados recurrentes.

2.4. Si la cadena actualmente se encuentra en el estado 4, ¿cuál es la probabilidad de que al cabo de 4 pasos o transiciones se encuentre en el mismo estado? ¿Y en el estado 2? ¿Y esas mismas probabilidades al cabo de 40 pasos?

Si actualmente la cadena se encuentra en el estado 4, las probabilidades que se piden se pueden obtener de manera tan sencilla como sustituyendo $m = 4$ y $m = 40$ en el código que utilizamos anteriormente, fijándonos en los elementos de la fila 4 columna 4 y columna 2.

```
> m=4
> for(j in 1:(m-1)){
+   N=P%*%N
+   b=b+diag(N)
+ }
> N[4,4] #probabilidad estado 4 este en 4 tras 4 pasos
[1] 0.9379651
> N[4,2] #probabilidad estado 4 este en 2 tras 4 pasos
[1] 0.05553875
```

Es decir, en 4 pasos los pinares de repoblación se mantendrán como tal en el 93.79651 % de los casos, mientras que se convertirán en matorrales el 5.553875 %, bastante menos probable y frecuente.

Podemos preguntarnos lo mismo al cabo de 40 pasos.

```
> m=40
> for(j in 1:(m-1)){
+   N=P%*%N
+   b=b+diag(N)
+ }
> N[4,4] #probabilidad estado 4 este en 4 tras 40 pasos
[1] 0.8608525
> N[4,2] #probabilidad estado 4 este en 2 tras 40 pasos
[1] 0.1063714
```

Tras 40 pasos, hay un menor porcentaje aunque aún alto de que los pinares de repoblación sigan siéndolo, del 86.08525 %. Y ha aumentado la probabilidad de que se transforme el uso del suelo de los pinares de repoblación en matorrales, del 10.63714 %. Con esta tendencia, indicaría que los pinares de repoblación, con el paso del tiempo, irían perdiendo terreno de suelo en la Alpujarra Alta si todo continúa como cuando se realizó el estudio.

2.5. Estudie el comportamiento de la cadena cuando el número de pasos tiende a infinito.

Para este último apartado, se ha creado una función que automatiza de manera más rápida el proceso.

```
Pn<-function(M,n){
    N<-M
    for (k in 1:(n-1))
        N=M%*%N
    return(N)
```

```
}

A<-Pn(P,n=10000000)
A
```

Tras tomar mayores y mayores valores de m, se obtuvo para el mayor valor lo siguiente.

```
> A<-Pn(P,n=10000000)
> A
              [,1]          [,2]          [,3]          [,4]          [,5]          [,6]          [,7]          [,8]
 [1,] 8.187656e-320 8.187656e-320 8.187656e-320 8.187656e-320 8.187656e-320 8.187656e-320 8.187656e-320 8.187656e-320
 [2,] 8.195561e-320 8.195561e-320 8.195561e-320 8.195561e-320 8.195561e-320 8.195561e-320 8.195561e-320 8.195561e-320
 [3,] 8.184691e-320 8.184691e-320 8.184691e-320 8.184691e-320 8.184691e-320 8.184691e-320 8.184691e-320 8.184691e-320
 [4,] 8.187656e-320 8.187656e-320 8.187656e-320 8.187656e-320 8.187656e-320 8.187656e-320 8.187656e-320 8.187656e-320
 [5,] 8.186174e-320 8.186174e-320 8.186174e-320 8.186174e-320 8.186174e-320 8.186174e-320 8.186174e-320 8.186174e-320
 [6,] 8.186668e-320 8.186668e-320 8.186668e-320 8.186668e-320 8.186668e-320 8.186668e-320 8.186668e-320 8.186668e-320
 [7,] 8.189138e-320 8.189138e-320 8.189138e-320 8.189138e-320 8.189138e-320 8.189138e-320 8.189138e-320 8.189138e-320
 [8,] 8.187656e-320 8.187656e-320 8.187656e-320 8.187656e-320 8.187656e-320 8.187656e-320 8.187656e-320 8.187656e-320
 [9,] 8.185186e-320 8.185186e-320 8.185186e-320 8.185186e-320 8.185186e-320 8.185186e-320 8.185186e-320 8.185186e-320
[10,] 8.188150e-320 8.188150e-320 8.188150e-320 8.188150e-320 8.188150e-320 8.188150e-320 8.188150e-320 8.188150e-320
              [,9]         [,10]
 [1,] 8.187656e-320 8.187656e-320
 [2,] 8.195561e-320 8.195561e-320
 [3,] 8.184691e-320 8.184691e-320
 [4,] 8.187656e-320 8.187656e-320
 [5,] 8.186174e-320 8.186174e-320
 [6,] 8.186668e-320 8.186668e-320
 [7,] 8.189138e-320 8.189138e-320
 [8,] 8.187656e-320 8.187656e-320
 [9,] 8.185186e-320 8.185186e-320
[10,] 8.188150e-320 8.188150e-320
```

Se ve que en dicha matriz todos los elementos son nulos, pudiendo afirmar que cuando m tiende a infinito, se tiene una matriz nula. Este resultado es digno de destacar, ya que, si todo sigue como a día de hoy, en un tiempo suficientemente largo, no habrá ningún uso de suelo actual. ¿Será por la aparición de otros suelos que no se han tenido en cuenta? Hay que destacar que no es un modelo realista para seguir al pie de la letra a largo plazo, pero podría ser un indicio de que el uso del suelo cambiará de forma radical en miles de años.

3 Conclusión

Gracias a [1], hemos podido extraer una gran cantidad de información de los usos de los distintos suelos de la Alpujarra Alta, con perspectiva a futuro. Se podría realizar un estudio mucho más exhaustivo al respecto, y usarlo junto a programas como ArcGis Pro para ver como cambiaría el terreno.

Referencias

[1] Martin Paegelow, María Teresa Camacho y José Menor. “Cadenas de Markov, evalución multicriterio y evaluación multiobjetivo para la modelización prospectiva del paisaje”. En: *GeoFocus. International Review of Geographical Information Science and Technology* 3 (2003), págs. 22-44.