Instituto de Matemáticas
Universidad de Granada

Máster Interuniversitario en Matemáticas

Modelos Matemáticos y Algoritmos

Ejercicios Tema 2

Alejandro José Florido Tomé

Curso académico 2024/25

1 Ejercicio

Calcula el generador infinitesimal correspondiente a cada uno de los siguientes grupos de Lie uniparamétricos de transformaciones:

a) $(x^*, y^*) = (x + 3\epsilon, y - 4\epsilon)$.

En general, el generador infinitesimal del grupo de transformaciones de Lie uniparamétrico es el operador:

$$\mathbb{X} = \mathbb{X}(x) = \xi(x) \cdot \nabla = \sum_{i=1}^{n} \xi_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}, \tag{1}$$

con $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ en un dominio $D \subseteq \mathbb{R}$, el vector tangente en (x, y) definido como

$$\xi(x) = (\xi(x,y), \eta(x,y)) = \left(\left.\frac{dx^*}{d\epsilon}\right|_{\epsilon=0}, \left.\frac{dy^*}{d\epsilon}\right|_{\epsilon=0} \right), \tag{2}$$

con $x^* = X(x;\epsilon)$ para todo $x \in D$ y para todo $\epsilon \in S \subseteq \mathbb{R}$, y $\nabla = (\partial/\partial x_1, \partial/\partial x_2, ..., \partial/\partial x_n)$ el operador nabla.

Comencemos entonces calculando los infinitesimales $\xi(x, y)$ y $\eta(x, y)$ para nuestro caso:

$$\xi(x,y) = \left.\frac{dx^*}{d\epsilon}\right|_{\epsilon=0} = 3|_{\epsilon=0} = 3 \qquad , \qquad \eta(x,y) = \left.\frac{dy^*}{d\epsilon}\right|_{\epsilon=0} = -4. \tag{3}$$

Por ende, su generador infinitesimal, a partir de la ecuación (1) particularizado para (x, y) no será más que:

$$\mathbb{X} = \xi(x,y)\frac{\partial}{\partial x} + \eta(x,y)\frac{\partial}{\partial y} = 3\frac{\partial}{\partial x} - 4\frac{\partial}{\partial y}. \tag{4}$$

b) $(x^*, y^*) = (e^{\epsilon}x, e^{-2\epsilon}y)$.

Los infinitesimales serán:

$$\xi(x,y) = \left.\frac{dx^*}{d\epsilon}\right|_{\epsilon=0} = xe^{\epsilon}|_{\epsilon=0} = x \qquad , \qquad \eta(x,y) = \left.\frac{dy^*}{d\epsilon}\right|_{\epsilon=0} = -2e^{-2\epsilon}y|_{\epsilon=0} = -2y. \tag{5}$$

Y el generador infinitesimal asociado:

$$\mathbb{X} = \xi(x,y)\frac{\partial}{\partial x} + \eta(x,y)\frac{\partial}{\partial y} = x\frac{\partial}{\partial x} - 2y\frac{\partial}{\partial y}. \tag{6}$$

c) $(x^*, y^*) = \big(x \cdot cos(10\epsilon) + \frac{5}{2}y \cdot sen(10\epsilon), y \cdot cos(10\epsilon) - \frac{2}{5}x \cdot sen(10\epsilon)\big)$.

Los infinitesimales serán:

$$\xi(x,y) = \left.\frac{dx^*}{d\epsilon}\right|_{\epsilon=0} = \left.\frac{50}{2}y \cdot cos(10\epsilon) - 10x \cdot sen(10\epsilon)\right|_{\epsilon=0} = 25y, \tag{7}$$

$$\eta(x,y) = \left.\frac{dy^*}{d\epsilon}\right|_{\epsilon=0} = -\frac{20}{5}x \cdot cos(10\epsilon) - 10y \cdot sen(10\epsilon)\Big|_{\epsilon=0} = -4x. \tag{8}$$

Conque el generador infinitesimal asociado será:

$$\mathbb{X} = \xi(x,y)\frac{\partial}{\partial x} + \eta(x,y)\frac{\partial}{\partial y} = 25y\frac{\partial}{\partial x} - 4x\frac{\partial}{\partial y}. \tag{9}$$

2 Ejercicio

Determina los grupos uniparamétricos de transformaciones y coordenadas canónicas correspondientes a los siguientes generadores infinitesimales:

a) $\mathbb{X}_1 = 2x\partial_x + y\partial_y$.

Ahora haremos lo contrario a lo realizado en el ejercicio anterior. A partir del generador infinitesimal, queremos determinar los grupos uniparamétricos de Lie. Para ello nos ayudaremos del primer teorema fundamental de Lie. Este nos dice que existe una parametrización $\tau(\epsilon)$ tal que el grupo de Lie de transformaciones $x^* = X(x;\epsilon)$ es equivalente a la solución de un problema de valores iniciales para un sistema de EDOs de primer orden de la forma $dx^*/d\tau = \xi(x^*)$, con $x^*(\tau = 0) = x$.

En nuestro caso, $\mathbb{X}_1 = \xi(x,y)\partial_x + \eta(x,y)\partial_y$, se tendrán las siguientes igualdades. Por un lado:

$$\frac{dx^*}{d\epsilon} = \xi(x^*, y^*) = 2x^* \rightarrow \frac{dx^*}{x^*} = 2d\epsilon \rightarrow ln(x^*) = 2\epsilon + cte \rightarrow x^* = Ke^{2\epsilon}, \tag{10}$$

con K una constante. Gracias a la condición $x^*(0) = K = x$, conque se tendrá que $x^* = xe^{2\epsilon}$. Por otro lado,

$$\frac{dy^*}{d\epsilon} = \eta(x^*, y^*) = y^* \rightarrow \frac{dy^*}{y^*} = d\epsilon \rightarrow ln(y^*) = \epsilon + cte \rightarrow y^* = Ce^{\epsilon}, \tag{11}$$

con C una constante que se puede determinar con el uso de $y^*(0) = C = y$, siendo por ende $y^* = ye^{\epsilon}$.

Entonces, el grupo de Lie uniparamétricos correspondientes al generador $\mathbb{X}_1$ son $(x^*, y^*) = (xe^{2\epsilon}, ye^{\epsilon})$.

Con lo anterior, el siguiente paso es hallar las coordenadas canónicas. En nuestro caso, un cambio de coordenadas $\overline{y} = Y(x,y) = (r(x,y), s(x,y))$ define un conjunto de coordenadas canónicas para el grupo de Lie uniparamétrico si, en términos de tales coordenadas, este grupo se convierte en $r^* = r$ y $s^* = s + \epsilon$, siendo el generador infinitesimal asociado $\mathbb{Y} = \partial/\partial s$.

El infinitesimal con respecto a las coordenadas canónicas es $\eta_j = \mathbb{X}_1\overline{y}_j$. Se tendrá que $\mathbb{X}_1 r = 0$ y $\mathbb{X}_1 s = 1$:

1. $\mathbb{X}_1 r = 0 = 2x\partial_x r + y\partial_y r = 0$. Sus ecuaciones características serán:

$$\frac{dx}{2x} = \frac{dy}{y} = \frac{dr}{0}. \tag{12}$$

2. $\mathbb{X}_1 s = 1 = 2x\partial_x s + y\partial_y s = 1$. Sus ecuaciones características serán:

$$\frac{dx}{2x} = \frac{dy}{y} = \frac{ds}{1}. \tag{13}$$

Combinando ambas obtenemos el siguiente sistema:

$$\frac{dx}{2x} = \frac{dy}{y} = \frac{dr}{0} = \frac{ds}{1}. \tag{14}$$

Vayamos igualando ahora por pares.

1. $dx/x = 2dy/y \to ln(x) = 2ln(y) + C \to C = x/y^2 \equiv z$.
2. $dr = 0 \to r = cte = f(z) = x/y^2$.
3. $dy/y = ds \to s = ln(|y|)$.

En resumen, las coordenadas canónicas asociadas a $\mathbb{X}_1$ son $(r, s) = (x/y^2, ln(|y|))$.

Los siguientes apartados consistirán en hacer lo mismo, siendo la diferencia el generador infinitesimal.

b) $\mathbb{X}_2 = (1 - x^2)\partial_x + y^2\partial_y$.

Partiendo del primer teorema fundamental de Lie, $X_2 = \xi(x, y)\partial_x + \eta(x, y)\partial_y$, por un lado se tiene:

$$\frac{dx^*}{d\epsilon} = \xi(x^*, y^*) = (1-(x^*)^2) \to \frac{dx^*}{1-(x^*)^2} = \frac{-dx^*}{(x^*-1)(x^*+1)} = \left(\frac{1}{x^*+1} - \frac{1}{x^*-1}\right)\frac{dx^*}{2} = d\epsilon, \tag{15}$$

$$\to \frac{ln(|x^*+1|) - ln(|x^*-1|)}{2} = \epsilon + cte \to \frac{|x^*+1|}{|x^*-1|} = Ke^{2\epsilon} \to x^* = \frac{1+Ke^{2\epsilon}}{-1+Ke^{2\epsilon}}. \tag{16}$$

No me he preocupado por el valor absoluto por simplicidad, limitándome al valor positivo. Como $x^*(0) = x = (1+K)/(-1+K)$, entonces:

$$x^* = \frac{x - 1 + (x+1)e^{2\epsilon}}{1 - x + (x+1)e^{2\epsilon}}. \tag{17}$$

Por otro lado,

$$\frac{dy^*}{d\epsilon} = \eta(x^*, y^*) = y^{*2} \to \frac{dy^*}{y^{*2}} = d\epsilon \to \frac{-1}{y^*} = \epsilon + C \to y^* = \frac{-1}{\epsilon + C}, \tag{18}$$

que junto a $y^*(0) = y$ da lugar a:

$$y^* = \frac{y}{1 - \epsilon y}. \tag{19}$$

Conque el grupo de Lie uniparamétrico correspondiente a X_2 son (x^*, y^*) dados en las ecuaciones (17) y (19), respectivamente. Este grupo verifica que $dx^*/d\epsilon|_{\epsilon=0} = \xi(x, y)$ y $dy^*/d\epsilon|_{\epsilon=0} = \eta(x, y)$.

A continuación, hallemos las coordenadas canónicas para $\mathbb{X}_2$. Exactamente igual que antes, $\mathbb{X}_2 r = 0$ y $\mathbb{X}_2 s = 1$:

1. $\mathbb{X}_2 r = 0 = (1 - x^2)\partial_x r + y^2\partial_y r = 0$. Sus ecuaciones características serán:

$$\frac{dx}{1-x^2} = \frac{dy}{y^2} = \frac{dr}{0}. \tag{20}$$

2. $\mathbb{X}_2 s = 1 = (1-x^2)\partial_x s + y^2 \partial_y s = 1$. Sus ecuaciones características serán:

$$\frac{dx}{1-x^2} = \frac{dy}{y^2} = \frac{ds}{1}. \tag{21}$$

Combinando ambas obtenemos el siguiente sistema:

$$\frac{dx}{1-x^2} = \frac{dy}{y^2} = \frac{dr}{0} = \frac{ds}{1}. \tag{22}$$

Vayamos igualando ahora por pares.

1. $dx/(1-x^2) = dy/y^2 \to ln[(x+1)/(x-1)] = -1/y + C \to C = e^{2/y}(x+1)/(x-1) \equiv z$.
2. $dr = 0 \to r = cte = f(z) = z = e^{2/y}(x+1)/(x-1)$.
3. $dy/y^2 = ds \to s = -1/y$.

En resumen, las coordenadas canónicas asociadas a $\mathbb{X}_2$ son:

$$(r, s) = \left(e^{2/y} \cdot \frac{x+1}{x-1}, -\frac{1}{y}\right). \tag{23}$$

c) $\mathbb{X}_3 = y\partial_x - x\partial_y$.

Teniendo de nuevo en mente el primer teorema fundamental de Lie para $\mathbb{X}_3 = \xi(x,y)\partial_x + \eta(x,y)\partial_y$,

$$\frac{dx^*}{d\epsilon} = \xi(x^*, y^*) = y^*, \tag{24}$$

$$\frac{dy^*}{d\epsilon} = \eta(x^*, y^*) = -x^*. \tag{25}$$

Podemos derivar en primer lugar la primera ecuación y sustituir en ella la segunda,

$$\frac{d^2x^*}{d\epsilon^2} = \frac{dy^*}{d\epsilon} = -x^*, \tag{26}$$

cuya solución es de la forma $x^* = C \cdot e^{a\epsilon}$, con C y a constantes a determinar. Sustituyendo en la ecuación anterior, $C \cdot a^2 e^{a\epsilon} = -Ce^{a\epsilon}$, $a = i$, y como $x^*(0) = x$, la solución es $x^* = xe^{i\epsilon}$. Haciendo lo mismo pero derivando (25) y sustituyendo en ella (24), se llega a una expresión análoga, $y^* = ye^{i\epsilon}$. Por ende, el grupo de Lie uniparamétrico correspondiente a $\mathbb{X}_3$ es $(x^*, y^*) = (xe^{i\epsilon}, ye^{i\epsilon})$.

A continuación, hallemos las coordenadas canónicas para $\mathbb{X}_3$. Al igual que antes, $\mathbb{X}_3 r = 0$ y $\mathbb{X}_3 s = 1$:

1. $\mathbb{X}_3 r = 0 = y\partial_x r - x\partial_y r = 0$. Sus ecuaciones características serán:

$$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{-x} = \frac{dr}{0}. \tag{27}$$

2. $\mathbb{X}_3 s = 1 = y\partial_x s - x\partial_y s = 1$. Sus ecuaciones características serán:

$$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{-x} = \frac{ds}{1}. \tag{28}$$

Combinando ambas obtenemos el siguiente sistema:

$$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{-x} = \frac{dr}{0} = \frac{ds}{1}. \tag{29}$$

Vayamos igualando ahora por pares.

1. $dx/y = -dy/x \rightarrow x \cdot dx = -y \cdot dy \rightarrow x^2/2 = -y^2/2 + C/2 \rightarrow C \equiv cte = z = x^2 + y^2$.
2. $dr = 0 \rightarrow r \equiv cte = f(z) = \sqrt{z} = \sqrt{x^2 + y^2}$.
3. $dx/y = ds = dx/\sqrt{r^2 - x^2} \rightarrow$

$$\int (r^2 - x^2)^{-1/2} dx = \int ds = \int \frac{1}{r\sqrt{1 - (x/r)^2}} dx = arcsin\left(\frac{x}{r}\right) = s = arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right). \tag{30}$$

En resumen, las coordenadas canónicas asociadas a $\mathbb{X}_3$ son:

$$(r, s) = \left(\sqrt{r^2 - x^2}, arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)\right). \tag{31}$$

3 Ejercicio

Para el generador infinitesimal

$$\mathbb{X} = x^2\partial_x + xy\partial_y - \left(\frac{y^2}{4} + \frac{x}{2}\right) z\partial_z. \tag{32}$$

a) Determina un conjunto de coordenadas canónicas y comprueba el resultado.

Se hace de manera análoga, pero al encontrarnos en el caso actual con (x, y, z), el conjunto de coordenadas canónicas serán de la forma (r, s, p) tal que $\mathbb{X}r = 0$, $\mathbb{X}s = 0$ y $\mathbb{X}p = 1$. Con esto como punto de partida, somos capaces de obtener las coordenadas canónicas:

1. $\mathbb{X}r = 0 = x^2\partial_x r + xy\partial_y r - \left(\frac{y^2}{4} + \frac{x}{2}\right) z\partial_z r = 0.$
2. $\mathbb{X}s = x^2\partial_x s + xy\partial_y s - \left(\frac{y^2}{4} + \frac{x}{2}\right) z\partial_z s = 0.$
3. $\mathbb{X}p = x^2\partial_x p + xy\partial_y p - \left(\frac{y^2}{4} + \frac{x}{2}\right) z\partial_z p = 1.$

Combinando todas las ecuaciones características asociadas se obtiene:

$$\frac{dx}{x^2} = \frac{dy}{xy} = \frac{dz}{-z\left(\frac{y^2}{4} + \frac{x}{2}\right)} = \frac{dr}{0} = \frac{ds}{0} = \frac{dp}{1}. \tag{33}$$

Vayamos igualando ahora por pares.

1. $$\frac{dx}{x^2} = \frac{dy}{xy} \to ln\left(\frac{x}{y}\right) \equiv cte \to x/y = \gamma \equiv cte.$$
2. $dr = 0 \to r \equiv cte = f(\gamma) = \gamma = x/y.$
3. $ds = 0 \to s \equiv cte = \alpha.$
4. $$\frac{dx}{x^2} = dp \to p = -\frac{1}{x}.$$
5. $$\frac{dx}{x^2} = \frac{dz}{-z\left(\frac{y^2}{4} + \frac{x}{2}\right)} = \frac{dz}{-z\left(\frac{x^2}{4r^2} + \frac{x}{2}\right)} \to \left(\frac{1}{4r^2} + \frac{1}{2x}\right) dx = -\frac{dz}{z},$$

   donde he usado que $r = x/y$ para que la igualdad sólo dependa de las variables x y z y así poder integrarlas por separado, con C una constante:

   $$-ln(z) + C \to \frac{x}{4r^2} + \frac{1}{2}ln(x) \to ln(z \cdot x^{1/2}) = -\frac{x}{4r^2} + C \to cte = z \cdot x^{1/2} \cdot e^{y^2/4x} \equiv f(\alpha) = \alpha = s$$

En resumen, las coordenadas canónicas asociadas a $\mathbb{X}$ son:

$$(r,s,p)=\left(\frac{x}{y}, z\cdot x^{1/2}\cdot e^{y^2/4x}, -\frac{1}{x}\right). \tag{34}$$

A continuación, vamos a demostrar que estas coordenadas son las correctas calculando $\mathbb{X}r=0$, $\mathbb{X}s=0$ y $\mathbb{X}p=1$.

1. $\mathbb{X}r=0$:
$$\mathbb{X}r = x^2\partial_x\left(\frac{x}{y}\right)+xy\partial_y\left(\frac{x}{y}\right)+0 = x^2\frac{1}{y}+xy\frac{-x}{y^2}=0. \tag{35}$$

2. $\mathbb{X}s=0$:
$$\mathbb{X}s=\left[x^2z\left(\frac{1}{2}x^{-1/2}+x^{1/2}\cdot\frac{-y^2}{4x^2}\right)+xy\cdot x^{1/2}z\frac{2y}{4x}-\left(\frac{y^2}{4}+\frac{x}{2}\right)zx^{1/2}\right]e^{\frac{y^2}{4x}}= \tag{36}$$
$$=\left(z\frac{x^{3/2}}{2}-z\frac{x^{1/2}y^2}{4}+z\frac{x^{1/2}y^2}{2}-z\frac{y^2x^{1/2}}{4}-z\frac{x^{3/2}}{2}\right)e^{y^4/4x}=0 \tag{37}$$

3. $\mathbb{X}p=1$:
$$\mathbb{X}p=x^2\partial_x\left(-\frac{1}{x}\right)=x^2\cdot\frac{1}{x^2}=1. \tag{38}$$

Comprobando así que efectivamente, las coordenadas canónicas de $\mathbb{X}$ son las presentadas en (34).

b) Determina el correspondiente grupo de Lie uniparamétrico de transformaciones integrando el conveniente problema de valores iniciales.

Según el primer teorema fundamental de Lie para $\mathbb{X}=\xi(x,y,z)\partial_x+\eta(z,y,z)\partial_y+\chi(x,y,z)\partial_z$:

$$\frac{dx^*}{d\epsilon}=\xi(x^*,y^*,z^*)=x^{*2}\rightarrow\frac{dx^*}{x^{*2}}=d\epsilon\rightarrow-\frac{1}{x^*}=C+\epsilon\rightarrow x^*=\frac{-1}{C+\epsilon}, \tag{39}$$

con $x^*(0)=x=-1/C$, Entonces, $x^*=x/(1-\epsilon x)$.

Para η:

$$\frac{dy^*}{d\epsilon}=\eta(x^*,y^*,z^*)=x^*y^*\rightarrow\frac{dy^*}{y^*}=x^*d\epsilon=\frac{x}{1-\epsilon x}d\epsilon\rightarrow ln(y^*)=-ln(|x\epsilon-1|)+K, \tag{40}$$

que despejando será $y^*=k/(x\epsilon-1)$. Usando que $y^*(0)=y=-K$, la solución será $y^*=y/(1-\epsilon x)$.

Y para χ:

$$\frac{dz^*}{d\epsilon}=\chi(x^*,y^*,z^*)\rightarrow\frac{dz^*}{z^*}=-\left(\frac{y^{*2}}{4}+\frac{x^*}{2}\right)d\epsilon=-\left(\frac{y^2}{4(1-\epsilon x)^2}+\frac{x}{2(1-\epsilon x)}\right)d\epsilon \tag{41}$$

$$ln(z^*)=\frac{1}{2}ln(|\epsilon x-1|)+\frac{y^2}{4x(\epsilon x-1)}+cte\rightarrow z^*=\lambda\sqrt{|\epsilon x-1|}e^{y^2/4x(\epsilon x-1)}, \tag{42}$$

con λ a determinar con ayuda de $z^*(0) = z = \lambda e^{-y^2/4x}$.

La solución será $z^* = z\sqrt{|\epsilon x - 1|}e^{(y^2/4x)\cdot(1+1/(\epsilon x-1))}$.

Recopilando todo lo anterior, el grupo de Lie uniparamétrico correspondiente a $\mathbb{X}$ es:

$$(x^*, y^*, z^*) = \left(\frac{x}{1-\epsilon x}, \frac{y}{1-\epsilon x}, z\sqrt{|\epsilon x - 1|}e^{(y^2/4x)\cdot(1+1/(\epsilon x-1))}\right). \tag{43}$$

4 Ejercicio

---

a) Demuestra que $(x^*, y^*) = (xe^{\epsilon}, ye^{\alpha\epsilon})$ es una simetría de la EDO

$$y' = \frac{2y}{x}, \tag{44}$$

para cada α y ϵ.

Comencemos hallando el generador infinitesimal asociado:

$$\xi(x,y) = \left.\frac{dx^*}{d\epsilon}\right|_{\epsilon=0} = e^{\epsilon}x|_{\epsilon=0} = x, \quad \eta(x,y) = \left.\frac{dy^*}{d\epsilon}\right|_{\epsilon=0} = \alpha e^{\alpha\epsilon}y|_{\epsilon=0} = \alpha y. \tag{45}$$

Conque el generador será:

$$\mathbb{X} = \xi(x,y)\partial_x + \eta(x,y)\partial_y = x\partial_x + \alpha y\partial_y. \tag{46}$$

Entonces, como nos encontramos antes una EDO de primer orden, para demostrar que es una simetría podemos calcular $\mathbb{X}^{(1)}(y_1 - 2y/x)$, siendo $y_1 = 2y/x$ la superficie definida por la EDO, y $\mathbb{X}^{(1)}$ el generador infinitesimal 1-extendido dado por:

$$\mathbb{X}^{(1)} = \xi(x,y)\partial_x + \eta(x,y)\partial_y + \eta^{(1)}(x,y,y_1)\partial_{y_1}, \tag{47}$$

con $\eta^{(1)}$ el primer infinitesimal extendido del que se puede hallar su forma para este ejercicio gracias a la relación de recursión:

$$\eta^{(1)} = D\eta - y_1 D\xi = (\eta_x + \eta_y \cdot y_1) - y_1 \cdot (\xi_x + y_1\xi_y) = \eta_x + (\eta_y - \xi_x)y_1 - \xi_y \cdot y_1^2. \tag{48}$$

Según el generador obtenido para nuestro caso en (46), $\xi(x) = x$ y $\eta(y) = \alpha y$, y ya podemos obtener la forma de $\eta^{(1)} = (\alpha - 1)y_1$, y así obtener la expresión de $\mathbb{X}^{(1)}$:

$$\mathbb{X}^{(1)} = x\partial_x + \alpha y\partial_y + (\alpha - 1)y_1\partial y_1. \tag{49}$$

Aplicándola sobre nuestra EDO:

$$\mathbb{X}^{(1)}\left(y_1 - \frac{2y}{x}\right) = (\alpha - 1)y_1 - 2yx\left(\frac{-1}{x^2}\right) - \frac{2}{x}\alpha y = (\alpha - 1)y_1 - \frac{2\alpha y}{x} + \frac{2y}{x}, \tag{50}$$

donde usaremos que la eEDO se verifica para $y_1 = 2y/x$:

$$\mathbb{X}^{(1)}\left(y_1 - \frac{2y}{x}\right) = (\alpha - 1)\frac{2y}{x} - \frac{2\alpha y}{x} + \frac{2y}{x} = 0. \tag{51}$$

Como se demuestra, la primera extensión deja invariante la superficie $y_1 = 2y/x$, lo cual es análogo a que $(x^*, y^*) = (xe^{\epsilon}, ye^{\alpha\epsilon})$ dejan invariante la EDO $y' = 2y/x$, tratándose de una simetría puntual admitida por la misma.

b) Determina cada punto que es invariante bajo esta simetría.

Sabiendo que efectivamente $(x^*, y^*) = (xe^\epsilon, ye^{\alpha\epsilon})$ se trata de una simetría, hallemos los puntos invariantes de la misma, que verifican $(x^*, y^*) = (x, y)$:

$$x^* = e^\epsilon x = x \to x = 0,\ \epsilon = 0, \tag{52}$$

$$y^* = ye^{\alpha\epsilon} = y \to y = 0,\ \epsilon = 0,\ \alpha = 0. \tag{53}$$

Descartamos $\epsilon = 0$, y los puntos invariantes serán:

- Si $\alpha \neq 0$, el único punto invariante es el $(0, 0)$.
- Si $\alpha = 0$, los puntos invariantes serán $(0, y)$, que son rectas completas de puntos que no varían.

c) A continuación, comprueba este resultado sabiendo que un punto (x, y) es invariante si y solo si el vector tangente es 0, esto es, $\xi(x, y) = \eta(x, y) = 0$.

Sean $\xi = x$ y $\eta = \alpha y$:

- Si $\alpha \neq 0$, para el punto $(x, y) = (0, 0)$, $\xi = x = 0$ y $\eta = \alpha y = 0$.
- Si $\alpha = 0$, para $(x, y) = (0, y)$, $\xi = 0$ y $\eta = 0y = 0$.

Para todos los puntos presentados en b), el vector tangente es efectivamente nulo, comprobando que se tratan de puntos invariantes.

5 Ejercicio

Considera la EDO de primer orden

$$y' - (1+x)y^2 - y = 0. \tag{54}$$

Determina un grupo de transformaciones de Lie no trivial admitido por esta EDO.

Definiremos un grupo de Lie uniparamétrico de la EDO (54) a primer orden en ϵ como:

$$x^* = x + \epsilon\xi(x,y), \quad y^* = y + \epsilon\eta(x,y), \tag{55}$$

donde tomaremos un generador infinitesimal de la forma:

$$\mathbb{X} = \xi(x,y)\partial_x + \eta(x,y)\partial_y = (ax+by)\partial_x + (cy + dxy + exy^2 + fx^2y^2)\partial_y. \tag{56}$$

Esto se traduce en que se trata de una simetría puntual que verifica que $\mathbb{X}^{(1)}(y_1 - (1+x)y^2 - y) = 0$, tal y como se vio en el ejercicio anterior pero aplicado a este caso.

Vamos a hallar la forma más simple (al menos que yo he encontrado) para x^* y y^*.

Calculemos $\eta^{(1)}$ con (48):

$$\eta_x = dy + ey^2 + 2fxy^2, \ \eta_y = c + dx + 2exy + 2fx^2y, \ \xi_x = a, \ \xi_y = b. \tag{57}$$

Y el cálculo a realizar es:

$$\begin{aligned}\mathbb{X}^{(1)}(y_1 - (1+x)y^2 - y) = [dy + ey^2 + 2fxy^2 + (c + dx + 2exy + 2fx^2y - a)y_1 - by_1^2] + \quad (58)\\ +(-y^2)(ax+by) - -[cy + dxy + exy^2 + fx^2y^2](2y(1+x)+1).\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que se la EDO se verifica para $y_1 = (1+x)y^2 + y$:

$$\begin{aligned}0 = dy + e^2 + 2fxy^2 + cy + cy^2 + dxy + dxy^2 + dx^2y^2 + 2exy^2 + 2exy^3 + 2ex^2y^3 + 2fx^2y^2 + 2fx^2y^3 + \\ +2fx^3y^3 - ay - ay^2 - axy^2 - b(y^2 + x^2y^4 + 2xy^4 + 2xy^3 + y^4) - axy^2 - by^3 - 2cy^2 - 2cxy^2 - cy - exy^2 + \\ -2ex^2y^3 - fx^2y^2 - 2fx^2y^3 - 2fx^3y^3 - dxy - 2dxy^2 - 2dx^2y^2.\end{aligned} \tag{59}$$

Podemos igualar según los coeficientes de x, y, y los que dan información son:

- y^4: $b = 0$.
- y: $a = d$.
- y^2: $e + c - a - 2c = 0 \rightarrow e = a + c$.
- x^2y^2: $f = d$.

Usando como variables independientes a y c, el generador infinitesimal será:

$$\mathbb{X} = ax\partial_x + (cy + axy + (a+c)xy^2 + ax^2y^2)\partial_y. \tag{60}$$

Y el grupo de Lie uniparamétrico no trivial tendrá la siguiente forma a primer orden en ϵ:

$$(x^*, y^*) = (x + \epsilon ax, y + \epsilon[cy + axy + (a+c)xy^2 + ax^2y^2]). \tag{61}$$

Es sencillo comprobar que, al menos la forma de x^* es correcta si usamos que $dx^*/d\epsilon = ax^*$, dando lugar a $x^* = xe^{a\epsilon}$ usando que $x^*(0) = x$. Su desarrollo de Taylor centrada en cero a primer orden es $x^* = x(1 + \epsilon x) + O(\epsilon^2)$, consistente que el resultado obtenido.

Determina un conjunto de coordenadas canónicas.

Para ello, sea $\mathbb{X}r = 0$ y $\mathbb{X}s = 1$, tal y como se ha hecho durante todo el boletín, es directo saber cuáles serán sus ecuaciones características:

$$\frac{dx}{ax} = \frac{dy}{cy + axy + (a+c)xy^2 + ax^2y^2} = \frac{dr}{0} = \frac{ds}{1}. \tag{62}$$

De donde se obtiene que:

1. $dr = 0 \rightarrow r \equiv cte$.
2. $a \cdot ds = dx/x \rightarrow s = ln(x)/a \rightarrow x = e^{as}$.
3. $$\frac{dx}{ax} = \frac{dy}{y\alpha + y^2\beta}, \tag{63}$$

   con $\alpha = c + e^{as} = c + x$ y $\beta = (a+c)e^{as} + ae^{2as} = (a+c)x + ax^2$. Integrando y despejando:

   $$r \equiv C = \frac{(c+x)ln(x) + a \cdot ln(\frac{c+x}{y} + (a+c)x + ax^2)}{(c+x)a}. \tag{64}$$

Obteniéndose así las coordenadas canónicas (r, s).

$$\begin{aligned}
&\eta_1[uu] = 0,\\
&\phi_1[uu] \cdot x - 2 \cdot \eta_1[ux] \cdot x + 2 \cdot \eta_1[u] = 0,\\
&-3 \cdot \eta_1[u] \cdot e^u \cdot x^2 + 2 \cdot \phi_1[ux] \cdot x^2 - \eta_1[xx] \cdot x^2 + \eta_1[x] \cdot x - \eta_1 = 0,\\
&\phi_1[u] \cdot e^u \cdot x - \phi_1 \cdot e^u \cdot x - 2 \cdot \eta_1[x] \cdot e^u \cdot x + \phi_1[xx] \cdot x + \phi_1[x] = 0
\end{aligned} \tag{65}$$

$$\begin{aligned}
&0 = 0,\\
&\frac{4dx^2e^{\frac{x}{u^2}}}{u^4} - \frac{4d[u]xe^{\frac{x}{u^2}}}{u} + \frac{6dxe^{\frac{x}{u^2}}}{u^2} + d[uu]u^2e^{\frac{x}{u^2}} + c[uu]u^2 - 2a[x]u^2 - 2a,\\
&-\frac{4dxe^{\frac{x}{u^2}}}{u^2} + 2d[u]ue^{\frac{x}{u^2}} - 2de^{\frac{x}{u^2}} - a[xx]u^4 - b[xx]u^3 - a[x]u^2 - b[x]u + 2c = 0
\end{aligned} \tag{66}$$

$$
\begin{aligned}
&0=0,\\
&\phi_1[uu]x-2c[x]x+2c=0,\\
&-3ce^ux^2-c[xx]ux^2+2\phi_1[ux]x^2-d[xx]x^2+c[x]ux+d[x]x-cu-d=0,\\
&-2c[x]ue^ux+\phi_1[u]e^ux-\phi_1e^ux-2d[x]e^ux+\phi_1[xx]x+\phi_1[x]=0
\end{aligned}
\tag{67}
$$

$$
\begin{aligned}
&0=0,\\
&-3ce^ux^2+3c[xx]ux^2-d[xx]x^2+2a[x]x^2-3c[x]ux+d[x]x+3cu-d=0,\\
&-c[x]u^2e^ux-aue^ux-2d[x]e^ux-be^ux+ae^ux+\frac{c[x]u^2}{x}-\frac{cu^2}{x^2}+cu^2e^u-2cue^u+a[x]u+b[x]=0
\end{aligned}
\tag{68}
$$