

UNIVERSIDAD DE CÓRDOBA

Facultad de Ciencias

Grado de Física

Trabajo Fin de Grado

Ondas gravitacionales: obtención de la ecuación y simulaciones

Código del TFG: **FS22-39-FSC**

Tipo de TFG: **Trabajo teórico-práctico general**

Autor: Alejandro José Florido Tomé



10/09/2023

Agradecimientos

Quería agradecer a la Universidad de Córdoba por haberme permitido estudiar el Grado de Física, con el cual he disfrutado y aprendido tanto durante estos años, y de haberme dado la oportunidad de cursar el último año en la Universidad de Granada, donde pude complementar mis estudios, y profundizar más en asignaturas como Relatividad General, dada por Bert Janssen.

Todo esto no hubiera sido capaz sin la ayuda de mi padre, quien siempre me ha apoyado y luchado por que yo tuviera el mejor futuro, y al que le estaré eternamente agradecido por introducirme en la física indirectamente con series como Doctor Who, que incentivaron mi curiosidad por el tiempo desde pequeño.

Gracias a todos mis amigos, tanto de Benalmádena, Torremolinos, Córdoba, Granada, Murcia, Extremadura, Roma, etc. Han sido unos años no sólo para estudiar, sino también para conocer, y formarme como persona adulta, siempre acompañado.

Y como no podía faltar, muchísimas gracias a Beatriz Ruiz Granados, sin la que el TFG no hubiera llegado a ningún lado. Me apoyó siempre desde el primer momento, y vio en mí un potencial que ni yo mismo era capaz de apreciar. Siempre ha estado cuando lo he necesitado, resolviendo todas mis dudas, y apoyándome. Trabajar con ella ha sido todo un placer y honor.

Índice general

| | |
|---|-----------|
| Índice general | 3 |
| Índice de figuras | 4 |
| Resumen. Palabras clave | 5 |
| Abstract. Keywords | 6 |
| 1. Introducción | 7 |
| 1.1. Contexto matemático | 7 |
| 1.2. Relatividad general | 9 |
| 2. Objetivos | 11 |
| 3. Fundamento teórico | 12 |
| 3.1. Límite Newtoniano | 12 |
| 3.1.1. Campo gravitatorio débil | 12 |
| 3.1.2. Velocidades no relativistas | 16 |
| 3.2. Perturbaciones de métricas arbitrarias | 17 |
| 3.2.1. Ecuación de Einstein | 17 |
| 3.2.2. Perturbaciones equivalentes | 20 |
| 3.3. Ondas gravitatorias en Minkowski | 23 |
| 3.3.1. Polarización | 25 |
| 3.3.2. Fuentes | 31 |
| 3.3.3. Potencia de radiación emitida | 34 |
| 4. Caso práctico: sistema binario | 37 |
| 4.1. Planteamiento | 37 |
| 4.2. Perturbación métrica | 38 |
| 4.3. Potencia total radiada | 40 |
| 4.3.1. Radio de la órbita y momento angular | 41 |

| | |
|------------------------------------|-----------|
| 4.3.2. Tiempo de colapso | 41 |
| 4.4. Ejemplo concreto | 42 |
| Conclusiones | 45 |
| Conclusions | 46 |
| Bibliografía | 47 |
| Anexo | 50 |

Índice de figuras

| | |
|---|----|
| 3.1. Representación de unas ondas gravitatorias producidas por dos cuerpos astrofísicos, orbitando uno alrededor del otro. Se ve un comportamiento normal de las ondas, con sus máximos y mínimos. [21] | 16 |
| 3.2. Imagen tomada del impacto de una piedra verticalmente sobre la superficie del agua, produciéndose ondas. [16] | 16 |
| 3.3. Distintos modos de oscilación de una onda gravitatoria transversal que se propaga según la dirección del eje z . Se va sumando en cada fila $\pi/2$ para ver como evolucionan los modos con el tiempo. Lo que se representa es la perturbación $h_{\mu\nu}$ para cada caso. [19] | 28 |
| 4.1. Representación gráfica de la potencia radiada con ayuda de 4.25 frente a la distancia radial 4.38. Se toma como valor inicial $a_0 = 10^5 \text{ m}$, y con ella se halla, con las ecuaciones recién indicadas, la potencia radiada asociada a cada distancia, y el valor nuevo de la distancia, conforme las masas se van acercando. Es un gráfico que hay que ver de derecha a izquierda, ya que van disminuyendo los valores del radio a , para comprenderla bien. De elaboración propia con ayuda de Python [25]. | 44 |

Resumen

En este trabajo se ha abordado el estudio teórico de las ecuaciones de campo de Einstein particularizándolas para el vacío con el fin de obtener unas soluciones no nulas que se propagan a la velocidad de la luz. Al igual que en el electromagnetismo se encuentran las ondas electromagnéticas, en la teoría de la relatividad general se encuentran las ondas gravitatorias.

Dichas ondas se propagarán por todo el Universo sin verse alteradas, y pueden llegar a transmitir una gran información sobre la fuente de la que provienen. El único problema de dichas ondas es que están asociadas a la fuerza más débil del Cosmos, siendo muy difíciles de detectar. A pesar de ello, a día de hoy se pueden medir con bastante exactitud, siendo compatibles con los resultados teóricos, afianzando la teoría de la relatividad general de Einstein.

Presentamos un estudio sobre las ondas gravitatorias: cómo surgen en el vacío que las produce, cómo se propagan, qué potencia asociada llevan y finalmente presentamos una aplicación práctica en la que se estudian las ondas gravitatorias producidas por la colisión de dos agujeros negros.

Palabras clave: Relatividad General, aproximación de campo débil, ondas gravitatorias, agujeros negros.

Abstract

In this work, the theoretical study of Einstein's field equations has been approached, particularising them for the vacuum in order to obtain non-zero solutions that propagate at the speed of light. Just as electromagnetic waves are found in electromagnetism, gravitational waves are found in the theory of general relativity.

These waves will propagate throughout the Universe undisturbed, and can transmit a great deal of information about the source from which they come. The only problem with these waves is that they are associated with the weakest force in the Cosmos and are very difficult to detect. Despite this, they can nowadays be measured quite accurately and are compatible with theoretical results, supporting Einstein's theory of general relativity.

We present a study of gravitational waves: how they arise in the vacuum that produces them, how they propagate, what associated power they carry, and finally we present a practical application in which we study the gravitational waves produced by the collision of two black holes.

Keywords: General relativity, weak field approximation, gravitational waves, black holes.

CAPÍTULO 1

Introducción

La teoría de la relatividad general fue propuesta por Albert Einstein en 1915 con el fin de dar una nueva explicación a la teoría gravitatoria [8]. Poco después probó la existencia de la radiación gravitatoria a partir de pequeñas perturbaciones de la métrica de Minkowski, demostrando que se propagarían a la velocidad de la luz [9]. Demostró que estas ondas, una vez abandonan la fuente de su generación, al tener una longitud de onda muy corta en comparación con el radio de curvatura del espacio-tiempo de fondo por el que se propagan, recorren las geodésicas nulas (aquellos caminos que minimizan la acción), al igual que la luz.

1.1. CONTEXTO MATEMÁTICO

Se trabajará en una geometría riemanniana [24], que es una variedad (un espacio que localmente se parece a \mathbb{R}^n), donde se ha definido una métrica $g_{\mu\nu}$ (un tensor dos veces covariante, simétrica y no degenerada, definida punto a punto y con toda la información de dicho espacio). El alfabeto griego en los tensores se usa para remarcar que varía entre la coordenada temporal y las tres espaciales, mientras que si usamos el alfabeto latino, será para referirse solamente a las coordenadas espaciales. La métrica se define a partir de la distancia entre dos puntos cercanos con el uso de la forma cuadrática diferencial:

$$ds^2 = \sum_{\mu} \sum_{\nu} g_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu} = g_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu}, \quad (1.1)$$

donde se ha utilizado en la última igualdad el convenio de suma de Einstein, esto es, cuando aparecen índices repetidos, se puede suprimir el sumatorio, indicando que está implícito aunque no aparezca.

Para pasar de un tensor covariante (subíndices) a uno contravariante (superíndices), se puede usar el tensor métrico de la siguiente manera para subir y bajar índices:

$$x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu, \quad (1.2)$$

$$x^\mu = g^{\mu\nu} x_\nu. \quad (1.3)$$

Por otro lado, para introducir los símbolos de Christoffel, se parte de la definición de la derivada covariante, de una forma general, de un vector general V^ρ viene dada por:

$$\nabla_\mu V^\rho = \partial_\mu V^\rho + \Gamma_{\mu\nu}^\rho V^\nu, \quad (1.4)$$

que tiene un sumando extra respecto al concepto de derivada que se suele tener. Este segundo término corrige la derivada debido a que los vectores en unas coordenadas generales varían de un punto a otro, conocido como transporte paralelo del vector. Un ejemplo coloquial son los vectores de la base de las coordenadas esféricas, que tienen distintos valores en función de la distancia y la dirección.

El término $\Gamma_{\mu\nu}^\rho$ que aparece en 1.4 se le conoce como conexión afín, definida como:

$$\Gamma_{\mu\nu}^\rho = \frac{1}{2} g^{\rho\lambda} (\partial_\mu g_{\lambda\nu} + \partial_\nu g_{\mu\lambda} - \partial_\lambda g_{\mu\nu}). \quad (1.5)$$

Se podría trabajar con una conexión arbitraria, pero en toda variedad con una métrica se puede definir la conexión de Levi-Civita, usada porque es capaz de simplificar bastante los cálculos, y es la que depende del tensor métrico como se ve en 1.5. Ésta conexión específica satisface que la conexión es simétrica:

$$\Gamma_{\mu\nu}^\rho = \Gamma_{\nu\mu}^\rho, \quad (1.6)$$

y que la derivada covariante de la métrica es cero:

$$\nabla_\mu g_{\nu\rho} = 0, \quad (1.7)$$

conocida habitualmente como la compatibilidad con la métrica.

Con todas estas herramientas matemáticas entendidas, se puede saltar a la ecuación de la relatividad general.

1.2. RELATIVIDAD GENERAL

Las ecuaciones de campo de Einstein que describen la gravedad [10] vienen dadas por:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + k\Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}. \quad (1.8)$$

En ella se tienen 16 ecuaciones diferenciales parciales, no lineales y de segundo orden en $g_{\mu\nu}$, siendo muy difíciles de resolver.

En el primer término de la izquierda de 1.8, se presenta el tensor de Ricci, $R_{\mu\nu}$, definido a partir del tensor de Riemann:

$$R_{\mu\nu\rho}^{\lambda} = \partial_{\mu}\Gamma_{\nu\rho}^{\lambda} - \partial_{\nu}\Gamma_{\mu\rho}^{\lambda} + \Gamma_{\mu\sigma}^{\lambda}\Gamma_{\nu\rho}^{\sigma} - \Gamma_{\nu\sigma}^{\lambda}\Gamma_{\mu\rho}^{\sigma}, \quad (1.9)$$

que mide la variación de un vector tras transporte paralelo alrededor de una curva cerrada. Por ende, se obtiene el tensor de Ricci contrayendo el segundo término covariante con el contravariante:

$$R_{\mu\nu} = R_{\mu\rho\nu}^{\rho}, \quad (1.10)$$

que tendrá bastante importancia; y $R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$ el escalar de Ricci, que es un invariante bajo cambios generales de coordenadas, y que aparece en el segundo término de la izquierda.

En el tercer término de la izquierda aparece Λ , conocida como constante cosmológica, y que tomaremos durante el resto del trabajo como nula para simplificar los cálculos, y porque no nos interesa para lo que vamos a estudiar.

En el lado derecho de 1.8 se presenta el tensor de energía-momento $T_{\mu\nu}$, que describe la densidad de energía y el flujo de energía y momento lineal a través de una superficie $x^{\mu} = cte$.

Es decir, la ecuación 1.8 relaciona la cantidad de materia del sistema con la curvatura del espacio-tiempo, un entorno que adopta un papel dinámico, y que puede verse deformado, a diferencia de la concepción clásica de tiempo y espacios absolutos.

Nos ayudaremos de una propiedad importante que se debe verificar siempre, y es la conservación de la energía [13]:

$$\nabla_{\mu}T^{\mu\nu} = 0, \quad (1.11)$$

que se traduce en, gracias a 1.8, en:

$$\nabla_{\mu}\left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}\right) = \nabla_{\mu}G_{\mu\nu} = 0, \quad (1.12)$$

con $G_{\mu\nu}$ llamado el tensor de Einstein. Dicha ecuación impone 4 ligaduras, quitándonos 4 grados de libertad de 1.8, por lo que en realidad las ecuaciones de Einstein se reducen a 6 ecuaciones independientes. Las ligaduras se pueden imponer también a través de una elección correcta de un gauge correcto, imponiendo unas condiciones específicas sobre el sistema. Más adelante se verán usos específicos de unos gauges en concreto.

En el presente trabajo se estudiará en profundidad las ondas gravitatorias [12], para lo que se toma una perturbación de la métrica, y con lo que obtendremos una gravedad linealizada dentro del marco de la relatividad general, donde se parte de ecuaciones no lineales tal y como se ve en 1.8.

A partir de aquí se trabajará en el sistema natural de unidades, donde $c = 1$, y sólo se pondrá su presencia en caso de querer discutir alguna ecuación en concreto, y en la que haga falta la presencia de la constante. Que la velocidad de la luz, medida en m/s , sea igual a 1, conlleva que las distancias y los tiempos tengan unidades de longitud; y recurriendo a la otra famosa de ecuación de Einstein [14], $E = mc^2$, la masa se medirá en unidades de energía.

Objetivos

En el presente trabajo, donde partimos de las ecuaciones de Einstein, nos proponemos los siguientes objetivos como puntos claves para llegar a comprender de dónde surgen y ver cómo se producen las ondas gravitatorias. Los objetivos son:

- Uso de la aproximación en campo débil para la obtención de la ecuación que describe a las ondas gravitatorias en el vacío y en presencia de fuentes, en el caso de que la métrica sea la de Minkowski o una general.
- Descripción física de la onda gravitatoria, estudiando sus modos de oscilación, y su relación con el espín asociado al supuesto gravitón.
- Perturbación gravitatoria en función de las fuentes del sistema.
- Potencia radiada por un sistema gravitatorio.
- Descripción de un sistema binario, para el que se halla la forma de la perturbación y la potencia radiada.
- Aplicación a un caso práctico de un sistema de dos agujeros negros para una mayor comprensión de los principales resultados.

Fundamento teórico

3.1. LÍMITE NEWTONIANO

La relatividad general explica la precesión del perihelio de Mercurio, dando unos valores mucho más ajustados a los obtenidos experimentalmente en comparación con lo que se obtendría con las ecuaciones de Newton de la gravedad [22]. Sin embargo, cuando nos encontremos en la aproximación de campo débil y casi-estático; es decir, que la curvatura del espacio-tiempo sea prácticamente nula (lo que se traduce en un tensor de Riemann 1.9 nulo porque no hay apenas curvatura), y las partículas tengan velocidades no relativistas ($v \ll c$), las afirmaciones anteriores nos llevan a un sistema de coordenadas con un tiempo y un espacio absolutos, tal y como postulaba Newton.

Veamos en que se traduce exactamente encontrarnos ante un campo gravitatorio débil o con partículas con velocidades no relativistas.

3.1.1. CAMPO GRAVITATORIO DÉBIL Obtengamos la ecuación que describe las ondas gravitatorias en el espacio de Minkowski. Se usará la métrica de Minkowski en coordenadas cartesianas [26], definida como:

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.1)$$

en la que la componente η_{00} y η_{ij} tienen distintos signo, diferenciando la coordenada temporal de las espaciales, la cual se define en espacio-tiempos sin curvatura ($R_{\mu\nu\rho}^\sigma = 0$). Entonces, escribamos la métrica del espacio como una perturbación de 3.1, con el parámetro $\epsilon \ll 1$ para destacar la perturbación:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \epsilon h_{\mu\nu}, \quad (3.2)$$

con $h_{\mu\nu}$ la métrica perturbada. La forma dos veces contravariante de 3.2 será, a primer orden, $g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} + A h^{\mu\nu}$. Aprovechando las propiedades de la métrica, el valor de la constante A:

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu} g^{\nu\alpha} &= \delta_\mu^\alpha = (\eta_{\mu\nu} + \epsilon h_{\mu\nu})(\eta^{\nu\alpha} + A h^{\nu\alpha}) = \eta_{\mu\nu} \eta^{\nu\alpha} + A \eta_{\mu\nu} h^{\nu\alpha} + \epsilon h_{\mu\nu} \eta^{\nu\alpha} + A \epsilon h_{\mu\nu} h^{\nu\alpha} \\ &= \delta_\mu^\alpha + h_\mu^\alpha (A + \epsilon) + A \epsilon h_{\mu\nu} h^{\nu\alpha}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Es lógico pues que, a primer orden, $A = -\epsilon$, para así poder verificar la igualdad.

Con el tensor métrico en forma covariante y contravariante, busquemos la solución para la ecuación de Einstein 1.8 a primer orden. Para ello, comencemos con el cálculo de los símbolos de Christoffel según la ecuación 1.5, cuyo valor a primer orden en ϵ será:

$$\begin{aligned} \Gamma_{\mu\nu}^\sigma &\approx \frac{1}{2}(\eta^{\sigma\lambda} - \epsilon h^{\sigma\lambda})[\partial_\mu(\eta_{\lambda\nu} + \epsilon h_{\lambda\nu}) + \partial_\nu(\eta_{\mu\lambda} + \epsilon h_{\mu\lambda}) - \partial_\lambda(\eta_{\mu\nu} + \epsilon h_{\mu\nu})] \\ &= \frac{1}{2}(\eta^{\sigma\lambda} - \epsilon h^{\sigma\lambda})\epsilon(\partial_\mu h_{\lambda\nu} + \partial_\nu h_{\mu\lambda} - \partial_\lambda h_{\mu\nu}) + \dots \approx \frac{1}{2}\epsilon\eta^{\sigma\lambda}(\partial_\mu h_{\lambda\nu} + \partial_\nu h_{\mu\lambda} - \partial_\lambda h_{\mu\nu}). \end{aligned} \quad (3.4)$$

Nuestro siguiente paso será el del cálculo del tensor de Ricci 1.10, que se puede escribir como:

$$R_{\mu\nu} = R_{\mu\rho\nu}{}^\rho = \partial_\mu \Gamma_{\lambda\nu}^\lambda - \partial_\lambda \Gamma_{\mu\nu}^\lambda + \Gamma_{\mu\sigma}^\lambda \Gamma_{\lambda\nu}^\sigma - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \Gamma_{\sigma\lambda}^\sigma. \quad (3.5)$$

Fijándonos en la expresión 3.4, los símbolos de Christoffel son proporcionales a ϵ , y como en los dos últimos sumandos de 3.5 tenemos el producto de dos de ellos, corresponderán con términos de segundo orden, y por ende, despreciables, por lo que:

$$R_{\mu\nu} \approx \frac{1}{2}\epsilon\eta^{\lambda\alpha}\partial_\mu(\partial_\lambda h_{\alpha\nu} + \partial_\nu h_{\lambda\alpha} - \partial_\alpha h_{\lambda\nu}) - \frac{1}{2}\epsilon\eta^{\lambda\alpha}\partial_\lambda(\partial_\mu h_{\alpha\nu} + \partial_\nu h_{\mu\alpha} - \partial_\alpha h_{\mu\nu}). \quad (3.6)$$

El primer sumando se puede simplificar usando que $\eta^{\lambda\alpha}\partial_\alpha h_{\lambda\nu} = \eta^{\alpha\lambda}\partial_\lambda h_{\alpha\nu}$ gracias al convenio de suma de Einstein, donde hemos redefinido los índices: hemos redefinido λ como α , y α como λ . Es decir, que dentro del primer sumando, ahora el primer y tercer término serán iguales:

$$R_{\mu\nu} \approx \frac{1}{2}\epsilon[\eta^{\lambda\alpha}\partial_\mu\partial_\nu h_{\lambda\alpha} - \eta^{\lambda\alpha}\partial_\lambda\partial_\mu h_{\alpha\nu} - \eta^{\lambda\alpha}\partial_\lambda\partial_\nu h_{\mu\alpha} + \eta^{\lambda\alpha}\partial_\lambda\partial_\alpha h_{\mu\nu}]. \quad (3.7)$$

En el segundo término, usaremos la definición de la traza de la perturbación de la métrica: $h = \eta^{\lambda\alpha} h_{\lambda\alpha}$; y en el último sumando, nos encontramos ante el D'Alambertiano del espacio de Minkowski: $\partial^2 = \eta^{\lambda\alpha} \partial_\lambda \partial_\alpha$, por lo que:

$$R_{\mu\nu} \approx \frac{1}{2} \epsilon [\partial_\mu (\partial_\nu h - \partial^\alpha h_{\alpha\nu}) - \partial^\alpha \partial_\nu h_{\mu\alpha}] + \frac{1}{2} \epsilon \partial^2 h_{\mu\nu}. \quad (3.8)$$

Por simplicidad, y gracias a las propiedades de la relatividad general, fijemos los grados de libertad no físicos de $h_{\mu\nu}$ (recordar que hay 4 grados de libertad no físicos debido a la conservación de la energía) a través de la siguiente elección gauge, conocida como armónico de Donder [23]:

$$\partial^\mu h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \partial_\nu h = 0. \quad (3.9)$$

Con dicho gauge, y con $\partial_\alpha \partial_\beta a = \partial_\beta \partial_\alpha a$, 3.8 se reescribirá como:

$$R_{\mu\nu} \approx \frac{1}{2} \epsilon [\partial_\mu (2\partial^\alpha h_{\alpha\nu} - \partial^\alpha h_{\alpha\nu}) - \partial_\nu \partial^\alpha h_{\mu\alpha}] + \frac{1}{2} \epsilon \partial^2 h_{\mu\nu} = \frac{1}{4} \epsilon (\partial_\mu \partial_\nu h - \partial_\nu \partial_\mu h) + \frac{1}{2} \epsilon \partial^2 h_{\mu\nu}, \quad (3.10)$$

dejándonos una expresión muy sencilla para el tensor de Ricci en el caso que nos encontremos ante un campo gravitatorio débil:

$$R_{\mu\nu} \approx \frac{1}{2} \epsilon \partial^2 h_{\mu\nu}. \quad (3.11)$$

Contraigamos el tensor de Ricci para obtener el escalar de Ricci:

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \approx (\eta^{\mu\nu} - \epsilon h^{\mu\nu}) \frac{1}{2} \epsilon \partial^2 h_{\mu\nu} \approx \frac{1}{2} \epsilon \eta^{\mu\nu} \partial^2 h_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon \partial^2 h. \quad (3.12)$$

Con éste último, ya tenemos lo necesario para sustituir en la ecuación de Einstein. Sustituyendo en 1.8:

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + \kappa \Lambda g_{\mu\nu} &= -\kappa T_{\mu\nu} \approx \frac{1}{2} \epsilon \partial^2 h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} (\eta_{\mu\nu} + \epsilon h_{\mu\nu}) \frac{1}{2} \epsilon \partial^2 h \\ &\approx \frac{1}{2} \epsilon \left(\partial^2 h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} \partial^2 h \right). \end{aligned} \quad (3.13)$$

Tiene una forma parecida a una ecuación de ondas, debido a las derivadas segundas de la perturbación, inhomogénea por la presencia del tensor energía-impulso. Otra ecuación con el mismo significado pero del que se puede ver más claramente el sentido físico se obtiene contrayendo la ecuación original de Einstein 1.8 con el uso de la métrica:

$$g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} g_{\mu\nu} R = -\kappa g^{\mu\nu} T_{\mu\nu} = -\kappa T = R - \frac{1}{2} 4R = -R, \quad (3.14)$$

de donde se deduce que $R = \kappa T$. Sustituyendo en la ecuación de Einstein 1.8, se obtiene una ecuación equivalente:

$$R_{\mu\nu} = -\kappa \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T \right). \quad (3.15)$$

Sustituyendo 3.11 en la ecuación anterior, y teniendo en cuenta que, según 3.13, $T_{\mu\nu}$ es proporcional a ϵ :

$$\frac{1}{2} \epsilon \partial^2 h_{\mu\nu} \approx -\kappa \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} (\eta_{\mu\nu} + \epsilon h_{\mu\nu}) T \right) \approx -\kappa \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} T \right), \quad (3.16)$$

de donde se desprende un resultado muy importante en relatividad general: en la ecuación 3.16 nos encontramos a una forma parecida a una ecuación de ondas inhomogénea para la perturbación $h_{\mu\nu}$, cuya solución serán unas perturbaciones del campo gravitatorio que se propagan a la velocidad de la luz: las llamadas ondas gravitatorias.

En el caso en el que no tenemos ni masa ni materia, en el vacío, tal y como suele hacer en electromagnetismo para encontrar unas ondas que se propagan por él a la velocidad de la luz, se encuentra una ecuación clara para las ondas gravitatorias:

$$\frac{1}{2} \epsilon \partial^2 h_{\mu\nu} = 0 \rightarrow \partial_\rho \partial^\rho h_{\mu\nu} = \partial^2 h_{\mu\nu} = \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right) h_{\mu\nu} = 0. \quad (3.17)$$

Es decir, en el vacío, tal y como ocurría para el caso electromagnético, nos encontramos que la perturbación $h_{\mu\nu}$ efectivamente se comporta como una onda llamada gravitatoria que se propaga a la velocidad de luz. Es decir, en la teoría gravitatoria surgen unas ondas que se propagan a la misma velocidad que las electromagnéticas, y que ha sido verificado experimentalmente [1], habiendo cierta analogía entre ambas teorías, y que se irá haciendo más clara conforme avancemos en el trabajo.

Fijándonos en la Figura 3.1, se ve un claro ejemplo de unas ondas gravitatorias producidas por un sistema binario (caso que se profundizará más adelante. Se pretende desde el comienzo se tenga una idea visual de qué es lo que se está estudiando). Se puede comparar con la Figura 3.2, donde el impacto de una piedra sobre la superficie del agua produce unas ondas, que son análogas, con sus máximos y mínimos, y que van desde la fuente hasta el resto del estanque. Nuestras ondas gravitatorias son producidas por una forma específica del tensor energía momento, que es la fuente tal y como se ve en 3.16, y que debe ser un dato conocido para poder resolver la ecuación, y hallar la forma de la perturbación $h_{\mu\nu}$

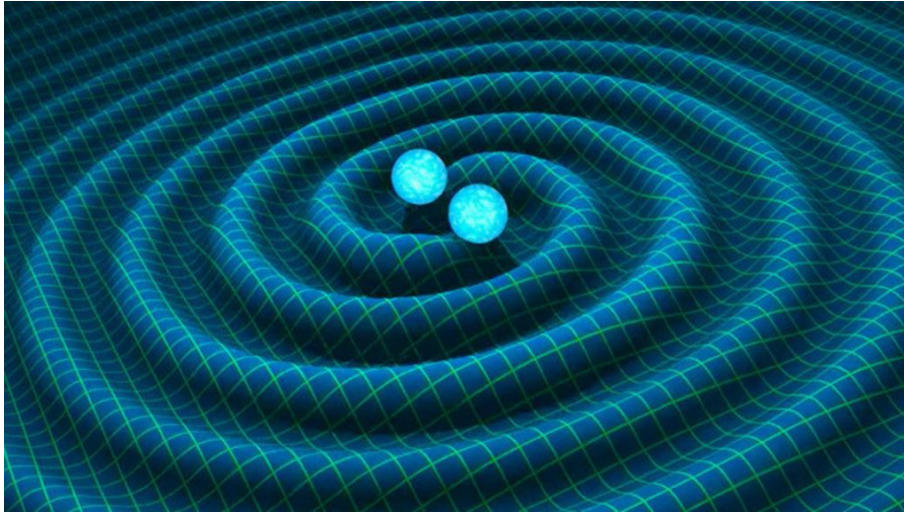


Figura 3.1: Representación de unas ondas gravitatorias producidas por dos cuerpos astrofísicos, orbitando uno alrededor del otro. Se ve un comportamiento normal de las ondas, con sus máximos y mínimos. [21]



Figura 3.2: Imagen tomada del impacto de una piedra verticalmente sobre la superficie del agua, produciéndose ondas. [16]

3.1.2. VELOCIDADES NO RELATIVISTAS Esto nos restringe a que $v \ll 1$, junto a $\epsilon \ll 1$ la perturbación (ambas son adimensionales en el sistema de unidades naturales). Esto nos permite elegir la velocidad de la partícula como $v \sim \epsilon \ll 1$, cuyo tiempo propio en movimiento en el seno de un campo gravitatorio corresponderá con $d\tau = \sqrt{1 - v^2} dt \approx dt$ [20].

Nuestra partícula de prueba tendrá una velocidad ϵ tal que recorrerá una distancia dx^i en un intervalo de tiempo dt , siendo la relación entre estas variables, a primer orden, $dx^i \sim \epsilon dt$, correspondiendo x^i con las coordenadas espaciales.

Por tanto, para un función $f(x^i, t)$, se verificará que:

$$\partial_t f = \frac{\partial f}{\partial t} \sim \frac{\partial f}{\partial(x^i/\epsilon)} = \epsilon \frac{\partial f}{\partial x^i} = \epsilon \partial_i f, \quad (3.18)$$

indicándonos que la derivada temporal de una función arbitraria, dependiente de las coordenadas espaciales y de la temporal, tiene un orden en ϵ mayor que las derivadas espaciales, que corresponde con el gradiente. Por ende, $\partial_t f \ll \partial_i f$.

3.2. PERTURBACIONES DE MÉTRICAS ARBITRARIAS

3.2.1. ECUACIÓN DE EINSTEIN Evaluemos ahora el caso de unas perturbaciones lineales en espacios arbitrarios y en coordenadas curvilíneas (no limitados al caso de Minkowski como en el capítulo anterior).

Al igual que antes, tomaremos una perturbación de la métrica hasta primer orden, por lo que, por analogía con 3.2, y el resultado obtenido en 3.3, la forma de nuestra métrica será:

$$\begin{aligned} \tilde{g}_{\mu\nu} &= g_{\mu\nu} + \epsilon h_{\mu\nu}, \\ \tilde{g}^{\mu\nu} &\approx g^{\mu\nu} - \epsilon h^{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (3.19)$$

De nuevo, para obtener las ecuaciones de Einstein, tendremos que calcular los símbolos de Christoffel, el tensor y escalar de Ricci, y para un futuro, nos convendrá tener también el tensor de Riemann. Nos quedamos en primer orden en ϵ para simplificar algo los cálculos. A continuación se presentan los cálculos mencionados [15]:

- Símbolos de Christoffel:

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^{\sigma} &= \frac{1}{2} \tilde{g}^{\sigma\lambda} (\partial_{\mu} \tilde{g}_{\lambda\nu} + \partial_{\nu} \tilde{g}_{\mu\lambda} - \partial_{\lambda} \tilde{g}_{\mu\nu}) \approx \frac{1}{2} (g^{\sigma\lambda} - \epsilon h^{\sigma\lambda}) [\partial_{\mu} (g_{\lambda\nu} + \epsilon h_{\lambda\nu}) + \partial_{\nu} \tilde{g}_{\mu\lambda} - \partial_{\lambda} \tilde{g}_{\mu\nu}] \\ &\approx \frac{1}{2} g^{\sigma\lambda} (\partial_{\mu} g_{\lambda\nu} + \partial_{\nu} g_{\mu\lambda} - \partial_{\lambda} g_{\mu\nu}) + \frac{1}{2} \epsilon g^{\sigma\lambda} (\partial_{\mu} h_{\lambda\nu} + \partial_{\nu} h_{\mu\lambda} - \partial_{\lambda} h_{\mu\nu}). \end{aligned} \quad (3.20)$$

Gracias a la conexión de Levi-Civita, a la compatibilidad de la métrica, se verifica que:

$$g_{\mu\nu} \nabla_{\rho} S^{\mu\nu} = \nabla_{\rho} S_{\nu}^{\mu}, \quad (3.21)$$

por lo que la expresión buscada es:

$$\tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^{\sigma} \approx \Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} + \frac{1}{2} \epsilon (\nabla_{\mu} h_{\nu}^{\sigma} + \nabla_{\nu} h_{\mu}^{\sigma} - \nabla^{\sigma} h_{\mu\nu}). \quad (3.22)$$

■ Tensor de Ricci:

$$\begin{aligned}
\tilde{R}_{\mu\nu} &= \partial_\mu \tilde{\Gamma}_{\lambda\nu}^\lambda - \partial_\lambda \tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^\lambda + \tilde{\Gamma}_{\mu\sigma}^\lambda \tilde{\Gamma}_{\lambda\nu}^\sigma - \tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^\lambda \tilde{\Gamma}_{\sigma\lambda}^\sigma \\
&\approx R_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\epsilon[\partial_\mu(\nabla_\lambda h_\nu^\lambda + \nabla_\nu h_\lambda^\lambda - \nabla^\lambda h_{\lambda\nu}) - \partial_\lambda(\nabla_\mu h_\nu^\lambda + \nabla_\nu h_\mu^\lambda - \nabla^\lambda h_{\mu\nu})] \quad (3.23) \\
&= R_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\epsilon[\nabla_\mu \partial_\nu h + \nabla_\lambda \nabla^\lambda h_{\mu\nu} - \nabla_\lambda \nabla_\mu h_\nu^\lambda - \nabla_\lambda \nabla_\nu h_\mu^\lambda].
\end{aligned}$$

■ Escalar de Ricci:

$$\begin{aligned}
\tilde{R} &= \tilde{g}^{\mu\nu} \tilde{R}_{\mu\nu} \approx (g^{\mu\nu} - \epsilon h^{\mu\nu}) \tilde{R}_{\mu\nu} \\
&\approx g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\epsilon[g^{\mu\nu} \nabla_\lambda \nabla^\lambda h_{\mu\nu} + g^{\mu\nu} \nabla_\mu \partial_\nu h - g^{\mu\nu} \nabla_\lambda \nabla_\mu h_\nu^\lambda - g^{\mu\nu} \nabla_\lambda \nabla_\nu h_\mu^\lambda] - \epsilon h^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \\
&= R + \epsilon[\nabla_\lambda \nabla^\lambda h - \nabla_\mu \nabla_\nu h^{\mu\nu} - h^{\mu\nu} R_{\mu\nu}]. \quad (3.24)
\end{aligned}$$

- Tensor de Riemann: Si intentamos sustituir en su ecuación directamente, nos será un trabajo casi imposible hallar su expresión analítica sin equivocarnos por el camino. Como camino alternativo se ve que $\tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^\rho = \Gamma_{\mu\nu}^\rho + K_{\mu\nu}^\rho$ en 3.22, donde el segundo sumando corresponderá con el término de primer orden. Por ende, el tensor de Riemann será, para la conexión de Levi-Civita:

$$\tilde{R}_{\mu\nu\rho}^\lambda = R_{\mu\nu\rho}^\lambda + \nabla_\mu K_{\nu\rho}^\lambda - \nabla_\nu K_{\mu\rho}^\lambda + K_{\mu\sigma}^\lambda K_{\nu\rho}^\sigma - K_{\nu\sigma}^\lambda K_{\mu\rho}^\sigma. \quad (3.25)$$

Sustituyendo $K_{\mu\nu}^\rho \approx \epsilon(\nabla_\mu h_\nu^\rho + \nabla_\nu h_\mu^\rho - \nabla^\rho h_{\mu\nu})/2$ en la expresión anterior:

$$\begin{aligned}
\tilde{R}_{\mu\nu\rho}^\lambda &\approx R_{\mu\nu\rho}^\lambda + \frac{1}{2}\epsilon[\nabla_\mu(\nabla_\nu h_\rho^\lambda + \nabla_\rho h_\nu^\lambda - \nabla^\lambda h_{\nu\rho}) - \nabla_\nu(\nabla_\mu h_\rho^\lambda + \nabla_\rho h_\mu^\lambda - \nabla^\lambda h_{\mu\rho})] \\
&= R_{\mu\nu\rho}^\lambda + \frac{1}{2}\epsilon([\nabla_\mu, \nabla_\nu]h_\rho^\lambda + \nabla_\mu \nabla_\rho h_\nu^\lambda - \nabla_\mu \nabla^\lambda h_{\nu\rho} - \nabla_\nu \nabla_\rho h_\mu^\lambda + \nabla_\nu \nabla^\lambda h_{\mu\rho}). \quad (3.26)
\end{aligned}$$

Se puede calcular también que el conmutador que se nos presenta viene dado por:

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu]h_\rho^\lambda = R_{\mu\nu\sigma}^\lambda h_\rho^\sigma - R_{\mu\nu\rho}^\sigma h_\sigma^\lambda \approx R_{\mu\nu\sigma}^\lambda h_\rho^\sigma - R_{\mu\nu\rho\sigma} h^{\sigma\lambda}. \quad (3.27)$$

Finalmente, tenemos lo necesario para obtener la expresión buscada:

$$\tilde{R}_{\mu\nu\rho}^\lambda \approx R_{\mu\nu\rho}^\lambda + \frac{1}{2}\epsilon(\nabla_\mu \nabla_\rho h_\nu^\lambda - \nabla_\mu \nabla^\lambda h_{\nu\rho} - \nabla_\nu \nabla_\rho h_\mu^\lambda + \nabla_\nu \nabla^\lambda h_{\mu\rho} + R_{\mu\nu\sigma}^\lambda h_\rho^\sigma - R_{\mu\nu\rho\sigma} h^{\sigma\lambda}). \quad (3.28)$$

Es un término no nulo, como se esperaba porque ya no nos encontramos en el caso de Minkowski, y con una estructura muy compleja, que depende de la perturbación y del tensor de Riemann cuatro veces covariante de la métrica sin perturbar.

Para esta métrica, se sigue verificando, a primer orden, todas las propiedades importantes de la relatividad general como la compatibilidad con la métrica, las identidades de Bianchi [11], y la divergencia nula del tensor de Einstein.

Con 3.23 y 3.24 para sustituir en la ecuación de Einstein, junto al factor de que debido a la métrica perturbada, el tensor energía-momento se puede escribir de manera perturbada tal que $\tilde{T}_{\mu\nu} \approx T_{\mu\nu} + \epsilon t_{\mu\nu}$, con $t_{\mu\nu}$ la perturbación del tensor recién mencionado a primer orden, la ecuación 1.8 aplicado a nuestro caso será:

$$\begin{aligned} \tilde{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\tilde{g}_{\mu\nu}R = -k\tilde{T}_{\mu\nu} \approx R_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\epsilon[\nabla_\mu\partial_\nu h + \nabla_\lambda\nabla^\lambda h_{\mu\nu} - \nabla_\lambda\nabla_\mu h_\nu^\lambda - \nabla_\lambda\nabla_\nu h_\mu^\lambda] \\ - \frac{1}{2}(g_{\mu\nu} + \epsilon h_{\mu\nu})(R + \epsilon[\nabla_\lambda\nabla^\lambda h - \nabla_\mu\nabla_\nu h^{\mu\nu} - h^{\mu\nu}R_{\mu\nu}]) \approx -k(T_{\mu\nu} + \epsilon t_{\mu\nu}). \end{aligned} \quad (3.29)$$

Podemos ir igualando la ecuación anterior por órdenes:

- Orden cero:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = -kT_{\mu\nu}, \quad (3.30)$$

que corresponde con la ecuación de Einstein 1.8. Es un resultado lógico ya que, si la métrica 3.19 la dejamos a orden cero, tenemos $g_{\mu\nu}$, que podemos ver que se trata de una solución exacta de la ecuación de Einstein, obviamente.

- Orden uno:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}[\nabla_\mu\partial_\nu h + \nabla_\lambda\nabla^\lambda h_{\mu\nu} - \nabla_\lambda\nabla_\mu h_\nu^\lambda - \nabla_\lambda\nabla_\nu h_\mu^\lambda] - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}[\nabla_\lambda\nabla^\lambda h - \nabla_\mu\nabla_\nu h^{\mu\nu} - h^{\mu\nu}R_{\mu\nu}] \approx -kt_{\mu\nu} \\ \frac{1}{2}[\nabla_\mu\partial_\nu h + \nabla^2 h_{\mu\nu} - \nabla_\lambda\nabla_\mu h_\nu^\lambda - \nabla_\lambda\nabla_\nu h_\mu^\lambda - h_{\mu\nu}R - g_{\mu\nu}\nabla^2 h + g_{\mu\nu}\nabla_\lambda\nabla_\rho h^{\lambda\rho} + g_{\mu\nu}h^{\rho\lambda}R_{\rho\lambda}] \approx -kt_{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (3.31)$$

La ecuación en primer orden consiste en un sistema de ecuaciones diferenciales de segundo orden para $h_{\mu\nu}$ (segundo orden porque aparecen segundas derivadas del mismo), que será la incógnita del problema, lo que buscamos resolver. Se supone la métrica $g_{\mu\nu}$ y sus tensores de curvatura conocidos. Estas ecuaciones diferenciales están acopladas, por lo que resolverlas es muy difícil.

Podemos volver a recurrir a la ecuación de Einstein sin traza para obtener unos resultados más sencillos y que tengan un sentido físico más claro. Para ello, usemos 3.15 para el caso actual:

$$\begin{aligned} \tilde{R}_{\mu\nu} = -k\left(\tilde{T}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\tilde{g}_{\mu\nu}\tilde{T}\right) \approx R_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\epsilon[\nabla_\mu\partial_\nu h + \nabla_\lambda\nabla^\lambda h_{\mu\nu} - \nabla_\lambda\nabla_\mu h_\nu^\lambda - \nabla_\lambda\nabla_\nu h_\mu^\lambda] \\ \approx -k\left[T_{\mu\nu} + \epsilon t_{\mu\nu} - \frac{1}{2}(g_{\mu\nu} + \epsilon h_{\mu\nu})(g^{\lambda\rho} - \epsilon h^{\lambda\rho})(T_{\lambda\rho} + \epsilon t_{\lambda\rho})\right]. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Si tomamos sólo el primer orden en ϵ de la ecuación anterior (porque se ve que, de nuevo, a primer orden, obtenemos la ecuación de Einstein sin traza que verifica la métrica $g_{\mu\nu}$, 3.15):

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(\nabla^2 h_{\mu\nu} + \nabla_\mu \partial_\nu h - \nabla_\lambda \nabla_\mu h^\lambda_\nu - \nabla_\lambda \nabla_\nu h^\lambda_\mu) &\approx -k \left(t_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} g^{\lambda\rho} t_{\lambda\rho} + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} h^{\lambda\rho} T_{\lambda\rho} - \frac{1}{2} h_{\mu\nu} g^{\lambda\rho} T_{\lambda\rho} \right) \\ &= -k \left(t_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} t + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} h^{\lambda\rho} T_{\lambda\rho} - \frac{1}{2} h_{\mu\nu} T \right). \end{aligned} \quad (3.33)$$

En ausencia de materia y energía, $T_{\mu\nu} = t_{\mu\nu} = 0$, por lo que el término derecho de 3.33 sería nulo, y sólo nos quedaría el izquierdo, describiendo la dinámica compleja de las perturbaciones métricas, parecida a una ecuación de ondas compleja, y de donde se vuelve a desprender que $h_{\mu\nu}$ se propaga por el vacío a la velocidad de la luz.

En el término derecho de la ecuación (lo que sería el término inhomogéneo de la ecuación de ondas) tenemos las fuentes de las perturbaciones métricas $h_{\mu\nu}$, que son las perturbaciones del tensor energía-momento $t_{\mu\nu}$, y las interacciones entre $h_{\mu\nu}$ y $T_{\mu\nu}$. Es decir, ocurre lo que se conoce como *retroacción*: la presencia de las perturbaciones métricas interaccionando con el contenido de energía y materia causan más perturbaciones, es decir, se retroalimentan.

La retroacción es algo bastante curioso, ya que la interacción de la perturbación con la materia y energía provoca más perturbaciones. Nos hemos limitado al primer orden, pero si nos fijamos en la última igualdad de 3.32, específicamente en el último sumando, donde tenemos $\tilde{g}_{\mu\nu} \tilde{g}^{\lambda\rho} \tilde{T}_{\lambda\rho}$, surgen términos como $h_{\mu\nu} h^{\rho\lambda}$. Esto se apreciaría mejor si hubiésemos hecho todo el cálculo hasta segundo orden, pero nos indica una cosa muy interesante: las propias perturbaciones pueden retro alimentarse a sí mismas, causando unas interacciones no-lineales debido al carácter no lineal de las ecuaciones de Einstein.

3.2.2. PERTURBACIONES EQUIVALENTES Habrá configuraciones de $h_{\mu\nu}$ que serán perturbaciones físicas equivalentes debido a que nos encontramos ante una teoría invariante bajo cambios generales de coordenadas al estar formulada de manera co-variante. A continuación vemos cómo afecta este hecho a nuestro problema.

Sea un cambio de coordenadas de la forma $y^\alpha = y^\alpha(x^\mu)$, la métrica 3.19 transformará como:

$$g_{\alpha\beta}(y) + \epsilon h_{\alpha\beta}(y) = \tilde{g}_{\alpha\beta}(y) = \frac{\partial x^\mu}{\partial y^\alpha} \frac{\partial x^\nu}{\partial y^\beta} \tilde{g}_{\mu\nu}(x) = \frac{\partial x^\mu}{\partial y^\alpha} \frac{\partial x^\nu}{\partial y^\beta} (g_{\mu\nu}(x) + \epsilon h_{\mu\nu}(x)). \quad (3.34)$$

Igualando orden a orden, está claro que tanto $g_{\mu\nu}$ como $h_{\mu\nu}$ se comportan como un tensor de rango dos bajo transformadas generales de coordenadas.

Si tomamos un cambio infinitesimal de coordenadas de la forma $x^\mu = \tilde{x}^\mu + \epsilon \xi^\mu(x)$, con $\partial x^\mu / \partial \tilde{x}^\nu = \delta_\nu^\mu + \epsilon \partial_\nu \xi^\mu$, y sustituimos en 3.34, con $y^\alpha \equiv \tilde{x}^\alpha$, podemos relacionar dos métricas $\tilde{g}'_{\mu\nu}$ y $\tilde{g}_{\mu\nu}$:

$$\tilde{g}'_{\mu\nu}(\tilde{x}) = \frac{\partial x^\rho}{\partial \tilde{x}^\mu} \frac{\partial x^\lambda}{\partial \tilde{x}^\nu} \tilde{g}_{\rho\lambda}(x) = (\delta_\mu^\rho + \epsilon \partial_\mu \xi^\rho)(\delta_\nu^\lambda + \epsilon \partial_\nu \xi^\lambda) \tilde{g}_{\rho\lambda}(x) = \tilde{g}_{\mu\nu}(x) + \epsilon (\partial_\mu \xi^\rho) \tilde{g}_{\rho\lambda}(x) + \epsilon (\partial_\nu \xi^\lambda) \tilde{g}_{\mu\lambda}(x). \quad (3.35)$$

Expandamos por otro lado $\tilde{g}'_{\mu\nu}(\tilde{x})$ en un desarrollo de Taylor alrededor de x^μ hasta primer orden en ϵ para comparar con la ecuación anterior. Por definición, el desarrollo en serie de Taylor de una función $f(x)$ [18] será :

$$f(x) = \sum_0^\infty \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x - a)^n, \quad (3.36)$$

por lo que, aplicado a nuestra métrica, teniendo en cuenta la definición del cambio infinitesimal de coordenadas tomado y quedándonos hasta el primer orden en ϵ :

$$\tilde{g}'_{\mu\nu}(\tilde{x}) = \tilde{g}'_{\mu\nu}(x) + \partial_\lambda \tilde{g}'_{\mu\nu}(x) (\tilde{x}^\lambda - x^\lambda) + \dots \approx (g'_{\mu\nu}(x) + \epsilon h'_{\mu\nu}) - \epsilon \xi^\lambda \partial_\lambda (g'_{\mu\nu} + \epsilon h'_{\mu\nu}). \quad (3.37)$$

Con las ecuaciones 3.35 y 3.37, podemos igualar según los órdenes de ϵ . A orden cero obtenemos que $g'_{\mu\nu}(x) = g_{\mu\nu}$, revelando que ambas métricas darán lugar a las mismas ecuaciones, y que dan la misma física, a pesar de diferenciarse por el cambio de coordenadas. Para el orden uno encontramos un resultado más interesante:

$$h'_{\mu\nu} - \xi^\lambda \partial_\lambda g'_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} + (\partial_\mu \xi^\rho) g_{\rho\nu} + \xi^\lambda \partial_\lambda g'_{\mu\nu}. \quad (3.38)$$

Para continuar con el cálculo, nos ayudaremos de la derivada covariante 1.4, con la que se puede reescribir 3.38:

$$h'_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} + (\nabla_\mu \xi^\rho - \Gamma_{\mu\sigma}^\rho \xi^\sigma) g_{\rho\nu} + (\nabla_\nu \xi^\lambda - \Gamma_{\nu\sigma}^\lambda \xi^\sigma) g_{\mu\lambda} + \xi^\lambda (\nabla_\lambda g_{\mu\nu} + \Gamma_{\lambda\mu}^\sigma g_{\sigma\nu} + \Gamma_{\lambda\nu}^\sigma g_{\mu\sigma}). \quad (3.39)$$

Gracias al convenio de suma de Einstein, y a que, en la conexión de Levi-Civita, se verifican 1.6, 1.7, y $g_{\mu\nu} \nabla_\sigma \xi^\nu = \nabla_\sigma \xi_\mu$ (expresión análoga a 3.21 pero para un tensor de orden 1), se nos simplifica 3.39 a:

$$h'_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} + g_{\rho\nu} \nabla_\mu \xi^\rho + g_{\mu\lambda} \nabla_\nu \xi^\lambda = h_{\mu\nu} + \nabla_\mu \xi_\nu + \nabla_\nu \xi_\mu. \quad (3.40)$$

Es decir, que las perturbaciones métricas $h'_{\mu\nu}$ y $h_{\mu\nu}$, que difieren en $\nabla_\mu \xi_\nu + \nabla_\nu \xi_\mu$, describen la misma perturbación pero en coordenadas distintas, ya que hemos obtenido

la relación entre ellas bajo un cambio general de coordenadas. Por ende, se podría pensar que la perturbación $h_{\mu\nu} = \nabla_\mu \xi_\nu + \nabla_\nu \xi_\mu$ es un cambio de coordenadas que se propaga por el espacio, sin ningún sentido físico. Esto se puede ver si se sustituye en 3.28, de donde se obtiene, tras una serie de cálculos:

$$\tilde{R}^\lambda_{\mu\nu\rho} \approx \frac{\partial \tilde{x}^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial \tilde{x}^\beta}{\partial x^\nu} \frac{\partial \tilde{x}^\gamma}{\partial x^\rho} \frac{\partial \tilde{x}^\lambda}{\partial x^\delta} R^\delta_{\alpha\beta\gamma}, \quad (3.41)$$

siendo claro que la geometría del espacio es invariante bajo una transformación del tipo dado en 3.40, con ξ^m_u arbitrario, confirmándonos que no tiene sentido físico alguno.

Al igual que los potenciales electromagnéticos A_μ y $A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \Lambda$ describen la misma física [6], ocurre lo mismo con 3.40: se trata de una transformación gauge en gravedad linealizada. Entonces, como $F_{\mu\nu}$, el llamado tensor electromagnético, es invariante bajo las transformaciones gauge A_μ , el tensor de Riemann y sus contracciones son objetos que transforman de forma covariante bajo transformaciones de $h_{\mu\nu}$, dando lugar a las mismas ecuaciones que sí tienen sentido físico como las de Einstein.

Esto nos permite eliminar cuatro grados de libertad físicos (debido a que ξ^μ tiene cuatro distintas componentes) con una elección apropiada de una simetría gauge. En nuestro caso, el más apropiado para poder simplificar 3.33 corresponde con el ya mencionado en 3.9. En ese caso era para Minkowski, mientras que para el caso arbitrario, toma la siguiente forma:

$$g^{\mu\nu} \tilde{\Gamma}^\rho_{\mu\nu} = 0, \quad (3.42)$$

que permite reescribir 3.22 como:

$$g^{\mu\nu} \left[\Gamma^\sigma_{\mu\nu} + \frac{1}{2} \epsilon (\nabla_\mu h^\sigma_\nu + \nabla_\nu h^\sigma_\mu - \nabla^\sigma h_{\mu\nu}) \right] = 0. \quad (3.43)$$

Igualando por órdenes de ϵ , a orden cero se tiene que $g^{\mu\nu} \Gamma^\sigma_{\mu\nu} = 0$, mientras que, a orden uno, con ayuda de 1.7, podemos introducir la métrica dentro de la derivada covariante para subir y bajar los índices de lo que haya dentro de la derivada, obteniéndose a primer orden:

$$\nabla_\mu (g^{\mu\nu} h^\sigma_\nu) + \nabla_\nu (g^{\mu\nu} h^\sigma_\mu) - \nabla^\sigma (g^{\mu\nu} h_{\mu\nu}) = \nabla_\mu h^{\mu\sigma} + \nabla_\nu h^{\nu\sigma} - \nabla^\sigma h = 0. \quad (3.44)$$

Redefiniendo los índices, y recordando que, para un escalar, $\nabla^\sigma h = \partial^\sigma h$, obtenemos finalmente la forma del gauge armónico de Donder que más usaremos:

$$\nabla_\mu h^{\mu\nu} - \frac{1}{2} \partial^\nu h = 0. \quad (3.45)$$

Si aplicamos el gauge armónico en la ecuación de Einstein a primer orden 3.33, se nos simplifica a:

$$\frac{1}{2}(\nabla^2 h_{\mu\nu} + R_{\mu}^{\rho} h_{\nu\rho} + R_{\nu}^{\rho} h_{\mu\rho}) - R_{\mu\rho\nu\lambda} h^{\rho\lambda} \approx -k \left(t_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} t + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} h^{\lambda\rho} T_{\lambda\rho} - \frac{1}{2} h_{\mu\nu} T \right). \quad (3.46)$$

La parte física de las perturbaciones métricas son como ondas que se propagan a la velocidad de la luz (se puede ver debido a la presencia de $\nabla^2 h_{\mu\nu}$) por el espacio-tiempo, cuyo operador diferencial es una generalización del laplaciano para espacios curvos.

3.3. ONDAS GRAVITATORIAS EN MINKOWSKI

Las ecuaciones presentes en 3.46 son muy difíciles de resolver, por lo que las utilizamos en el caso del espacio de Minkowski para simplificar el problema y obtener algunos resultados con sentido físico.

Ya se vio que la forma de la ecuación de Einstein para el espacio de Minkowski (sin curvatura, $R_{\mu\nu\rho}^{\sigma} = 0$) en ausencia de fuentes ($T_{\mu\nu} = 0 = t_{\mu\nu}$) se simplifica a 3.17. Al igual que en el caso electromagnético, la solución más general de esta ecuación homogénea corresponderá con la superposición lineal de unas ondas planas. Por sencillez, nos limitaremos al caso de una sola onda plana, cuya solución será [19]:

$$h_{\mu\nu} = C_{\mu\nu} e^{ik_{\lambda} x^{\lambda}}, \quad (3.47)$$

con k_{λ} el vector de ondas (que es constante respecto a las coordenadas espaciales), x^{λ} el vector posición, y $C_{\mu\nu}$ un tensor constante conocido como tensor polarización.

Veamos que condición debe verificar la solución 3.47 para verificar la ecuación 3.17 bajo las condiciones $R_{\mu\nu\rho}^{\sigma} = 0$ y $T_{\mu\nu} = 0 = t_{\mu\nu}$:

$$\begin{aligned} \partial_{\rho} \partial^{\rho} (C_{\mu\nu} e^{ik_{\lambda} x^{\lambda}}) &= 0 = C_{\mu\nu} \partial_{\rho} \partial^{\rho} (e^{ik_{\lambda} x^{\lambda}}) = C_{\mu\nu} \partial_{\rho} [e^{ik_{\lambda} x^{\lambda}} \partial^{\rho} (ik_{\nu} x^{\nu})] = i C_{\mu\nu} k_{\nu} \partial_{\rho} \left[e^{ik_{\lambda} x^{\lambda}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial \rho} \right] \\ &= i C_{\mu\nu} \eta^{\rho\alpha} \delta_{\alpha}^{\nu} e^{ik_{\lambda} x^{\lambda}} \partial_{\rho} (ik_{\lambda} x^{\lambda}) = -C_{\mu\nu} e^{ik_{\lambda} x^{\lambda}} k^{\rho} k_{\lambda} \delta_{\rho}^{\lambda} = -C_{\mu\nu} e^{ik_{\lambda} x^{\lambda}} k^{\rho} k_{\rho}. \end{aligned} \quad (3.48)$$

Tomemos $C_{\mu\nu} \neq 0$ para evitar soluciones triviales, y es claro que $e^{ik_{\lambda} x^{\lambda}} \neq 0$, por lo que la única opción es $k^{\rho} k_{\rho} = 0$. Esta igualdad nos indica que k^{μ} corresponde con un vector nulo: nos encontramos ante ondas que se propagan por el espacio a la velocidad de

la luz siguiendo unas estructuras matemáticas llamadas geodésicas, que minimizan la acción. La naturaleza, a través de las ecuaciones, nos vuelve a indicar que las ondas gravitatorias se propagan a la velocidad de la luz.

Como el vector de polarización es simétrico por construcción del problema, tendrá diez componentes independientes entre sí. Podemos ir relacionándolas entre ellas con ayuda de los gauge y de las transformaciones generales de coordenadas para disminuir el número de grados de libertad del sistema.

Si elegimos el gauge 3.9, nuestra solución 3.47 cumplirá la siguiente relación:

$$\begin{aligned} 0 &= \partial_\mu (C^{\mu\nu} e^{ik_\lambda x^\lambda}) - \frac{1}{2} \partial^\nu (\eta^{\alpha\beta} h_{\alpha\beta}) = iC^{\mu\nu} k_\lambda (\partial_\mu x^\lambda) e^{ik_\lambda x^\lambda} - \frac{1}{2} \eta^{\nu\gamma} \eta^{\alpha\beta} \partial_\gamma (C_{\alpha\beta} e^{ik_\lambda x^\lambda}) \\ &= iC^{\mu\nu} k_\lambda \delta_\mu^\lambda e^{ik_\lambda x^\lambda} - \frac{1}{2} \eta^{\nu\gamma} \eta^{\alpha\beta} C_{\alpha\beta} i k_\lambda \partial_\gamma x^\lambda e^{ik_\lambda x^\lambda} = iC^{\mu\nu} k_\mu e^{ik_\lambda x^\lambda} - \frac{1}{2} i \eta^{\nu\gamma} \eta^{\alpha\beta} C_{\alpha\beta} k_\gamma e^{ik_\lambda x^\lambda}. \end{aligned} \quad (3.49)$$

Como $i e^{ik_\lambda x^\lambda} \neq 0$, obtendremos que:

$$k_\mu C^{\mu\nu} = \frac{1}{2} k^\nu \eta^{\alpha\beta} C_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} k^\nu C_\mu^\mu. \quad (3.50)$$

Esta relación, que no es más que la condición del gauge armónico de Donder aplicado al problema actual, nos elimina cuatro grados de libertad, dejándonos seis grados de libertad físicos.

Si realizamos una transformación del tipo 3.40, tendremos libertad para elegir la forma de ξ^μ que más nos convenga. El más general que podemos tomar, fijándonos en la forma que tiene la perturbación 3.47, es $\xi^\mu = iU^\mu e^{ik_\lambda x^\lambda}$, con U^μ un vector constante. Con esta elección, la perturbación transformará de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} h'_{\mu\nu} &= C'_{\mu\nu} e^{ik_\lambda x^\lambda} = h_{\mu\nu} - iU_\nu \nabla_\mu e^{ik_\lambda x^\lambda} - iU_\mu \nabla_\nu e^{ik_\lambda x^\lambda} = h_{\mu\nu} + U_\nu k_\mu e^{ik_\lambda x^\lambda} + U_\mu k_\nu e^{ik_\lambda x^\lambda} \\ &= (C_{\mu\nu} + k_\mu U_\nu + k_\nu U_\mu) e^{ik_\lambda x^\lambda}. \end{aligned} \quad (3.51)$$

Veamos si $C'_{\mu\nu}$ verifica también 3.50:

$$k_\mu C'^{\mu\nu} + k_\mu k^\mu U_\nu + k_\mu k^\nu U_\mu = \frac{1}{2} (k^\nu C_\mu^\mu + k^\nu k_\mu U^\mu + k^\nu k_\mu U^\mu). \quad (3.52)$$

Como k^μ es un vector nulo, es claro que tanto $C'_{\mu\nu}$ como $C_{\mu\nu}$ satisfacen la relación 3.50. Es decir, con la transformación realizada hemos eliminado otras cuatro componentes de la perturbación gracias a una buena elección de U^μ .

Finalmente, podemos concluir que el tensor polarización $C_{\mu\nu}$ tiene solo dos grados físicos. Veamos como aplicar esto en un ejemplo concreto.

3.3.1. POLARIZACIÓN Supongamos una onda propagándose en la dirección del eje z tal que $k_\mu = (k, 0, 0, -k)$, verificando que se trata de un vector nulo ($k_\mu k^\mu = k^2 - k^2 = 0$).

Conociendo la forma del vector de ondas, usemos adecuadamente la condición del gauge armónico 3.50 y la transformación 3.51, para quedarnos sólo con los dos grados de libertad físicos que nos describirán completamente el problema.

- Condición gauge: Particularicemos para las componentes temporal y espaciales.

Para la coordenada temporal, 3.50 será:

$$k_\mu C^{\mu t} = \frac{1}{2} k^t C_\mu^\mu = k C^{tt} - k C^{zt} = \frac{1}{2} k C_\mu^\mu; \quad (3.53)$$

para la componente x e y se obtiene un resultado análogo. Sea $i = x$ o $i = y$:

$$k_\mu C^{\mu i} = \frac{1}{2} k^i C_\mu^\mu = 0 = k C^{ti} - k C^{zi} \rightarrow C^{ti} = C^{zi}, \quad (3.54)$$

de donde hemos obtenido dos ecuaciones que nos relacionan las distintas componentes del tensor de polarización, eliminándonos dos grados de libertad. Por último, para la componente z :

$$k_\mu C^{\mu z} = \frac{1}{2} k^z C_\mu^\mu = k C^{tz} - k C^{zz} = \frac{1}{2} k C_\mu^\mu. \quad (3.55)$$

Igualando las ecuaciones 3.53 y 3.55:

$$\frac{1}{2} k C_\mu^\mu = k C^{tt} - k C^{zt} = k C^{tz} - k C^{zz} \rightarrow C^{tz} = \frac{1}{2} (C^{tt} + C^{zz}). \quad (3.56)$$

Esta ecuación nos elimina el tercer grado de libertad. El último lo eliminaremos sustituyendo esta ecuación recién obtenida en 3.53:

$$C^{tt} - \frac{1}{2} (C^{tt} + C^{zz}) = \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} C^{\mu\nu} = \frac{1}{2} (C^{tt} - C^{xx} - C^{yy} - C^{zz}) = \frac{1}{2} C^{tt} - \frac{1}{2} C^{zz}, \quad (3.57)$$

de donde se obtiene $C^{xx} = -C^{yy}$. De todas las ecuaciones anteriores es claro que las seis componentes independientes corresponden con C_{tt} , C_{xx} , C_{zz} , C_{xz} y C_{yz} , junto a C_{xy} que no aparece en ellas (razón por la que es independiente).

- Cambio de coordenadas: realizando el cambio de coordenadas 3.40, con parámetro $\xi^\mu = iU e^{k_\lambda x^\lambda}$ tal que se verifica 3.51, las componentes independientes del tensor de polarización transformarán como:

$$C'_{tt} = C_{tt} + k_t U_t + k_t U_t = C_{tt} + 2k U_t, \quad (3.58)$$

$$C'_{xx} = C_{xx} + 2k_x U_x = C_{xx}, \quad (3.59)$$

$$C'_{zz} = C_{zz} + 2k_z U_z = C_{zz} - 2k U_z, \quad (3.60)$$

$$C'_{xy} = C_{xy}, \quad (3.61)$$

$$C'_{xz} = C_{xz} + 0 + k_z U_x = C_{xz} - k U_x, \quad (3.62)$$

$$C'_{yz} = C_{yz} + 0 + k_z U_y = C_{yz} - k U_y. \quad (3.63)$$

Tomemos $U_\mu = k^{-1}(-\frac{1}{2}C_{tt}, C_{xz}, C_{yz}, \frac{1}{2}C_{zz})$ como vector constante (recordar que con una buena elección de dicho vector, podemos eliminar otros cuatro grados de libertad), se quedan igualadas a cero todas las componentes independientes salvo C_{xx} y C_{xy} , eliminándonos otros cuatro grados de libertad.

Si definimos $C_+ = C_{xx} = -C_{yy}$, y $C_\times = C_{xy}$, tendremos una onda descrita por $h_{\mu\nu} = C_{\mu\nu}e^{ik_\lambda x^\lambda}$, dependiente de sólo dos parámetros del tensor de polarización, el cual viene dado por:

$$C_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_+ & C_\times & 0 \\ 0 & C_\times & -C_+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.64)$$

Como nuestra perturbación se propaga según la dirección del eje z , y tiene sus componentes en el plano xy , se deduce que las ondas gravitatorias que surgen en el espacio de Minkowski son ondas transversales; es decir, que la dirección en la que oscilan las ondas (plano xy) es perpendicular a la dirección de propagación (eje z).

Modos de oscilación

Una vez conocida la forma de $h_{\mu\nu}$ gracias a 3.64, veamos los distintos comportamientos que este puede presentar.

A) Oscilación +: Tomando $C_\times = 0$, la métrica del espacio adopta la siguiente forma:

$$\begin{aligned} ds^2 &= (\eta_{\mu\nu} + \epsilon h_{\mu\nu})dx^\mu dx^\nu = \eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu + \epsilon h_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu \\ &= dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 - \epsilon h_{xx}dx^2 - \epsilon h_{yy}dy^2. \end{aligned} \quad (3.65)$$

Como ahora vamos a obtener algo que tiene en sí sentido físico, tenemos que tomar la parte real de 3.47, que no será más que $h_{\mu\nu} = C_{\mu\nu}\cos(k_\lambda x^\lambda)$, con $k_\lambda x^\lambda = kt - kz$, en este caso. Continuando con la métrica:

$$ds^2 = dt^2 - (1 + \epsilon C_+ \cos[k(t - z)])dx^2 - (1 - \epsilon C_+ \cos[k(t - z)])dy^2 - dz^2. \quad (3.66)$$

De esta se deduce que una onda gravitatoria perturba un anillo de partículas de prueba colocadas en el plano xy , las cuales oscilarán con una amplitud ϵC_+ , y con una frecuencia k . Además, el desplazamiento en el eje x e y van desfasadas π , lo que implica que si las partículas se acercan en la dirección del eje x , se alejarán en el eje y , y viceversa, dando lugar a una deformación en forma de $+$ (véase la Figura 3.3, la primera columna comenzando por la izquierda).

B) Oscilación \times : Ahora, $C_+ = 0$, por lo que la métrica será:

$$ds^2 = dt^2 - dy^2 - dz^2 + 2\epsilon C_\times \cos[k(t - z)]dxdy, \quad (3.67)$$

que se vuelven a tratar de perturbaciones en el plano xy , de nuevo con una frecuencia k , pero donde los desplazamientos ocurren en las direcciones diagonales $x + y$ y $x - y$, dando lugar a una deformación en forma de \times (véase la Figura 3.3, la segunda columna comenzado por la izquierda).

Destacar que las oscilaciones \times y $+$ corresponden con polarizaciones lineales, tal que se pasa de una a otra a través de una rotación de $\pi/4$, por lo que, en el fondo, se tratan de la misma polarización. De hecho, dan lugar a tensores de Riemann con formas análogas.

C) Oscilaciones circulares: Haciendo superposiciones lineales de las dos oscilaciones anteriores, podemos obtener los dos siguientes modos de oscilación:

$$C_R = \frac{1}{2}(C_+ + iC_\times), \quad (3.68)$$

$$C_L = \frac{1}{2}(C_+ - iC_\times), \quad (3.69)$$

obteniéndose ondas gravitacionales con polarizaciones circulares, donde la elipse de las partículas gira en anti horario para la primera, y horario para la segunda. Es decir, son modos invariantes, y no podemos pasar de C_R a C_L bajo rotaciones (véase la Figura 3.3, las dos columnas de la derecha).

Por ende, C_+ y C_\times se transforman uno en el otro bajo una rotación de $\pi/4$, mientras que C_L y C_R son invariantes. Veremos que esto está relacionado directamente con que el espín del campo gravitatoria sea dos.

| $\omega(t - z)$ | Deformation of a ring of test particles | | | |
|-------------------------|---|-------|-------|-------|
| | e_+ | e_x | e_R | e_L |
| $2n\pi$ | | | | |
| $(2n + \frac{1}{2})\pi$ | | | | |
| $(2n + 1)\pi$ | | | | |
| $(2n + \frac{3}{2})\pi$ | | | | |

Figura 3.3: Distintos modos de oscilación de una onda gravitatoria transversal que se propaga según la dirección del eje z . Se va sumando en cada fila $\pi/2$ para ver como evolucionan los modos con el tiempo. Lo que se representa es la perturbación $h_{\mu\nu}$ para cada caso. [19]

Espín del campo gravitatorio

Comencemos viendo como transforma el tensor de polarización bajo Λ_ν^μ , que corresponde con una rotación de un ángulo θ en el plano xy , dado por:

$$\Lambda_\nu^\mu = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.70)$$

Como la perturbación transforma siguiendo la siguiente ecuación:

$$h'_{\mu\nu} = (\Lambda^{-1})_\mu^\rho (\Lambda^{-1})_\nu^\lambda h_{\rho\lambda} = C'_{\mu\nu} e^{ik_\lambda x^\lambda}, \quad (3.71)$$

las componentes independientes del tensor de polarización transforman según:

$$\begin{aligned} C'_{tt} &= (\Lambda^{-1})_t^\rho (\Lambda^{-1})_t^\lambda C_{\rho\lambda} = 1 \cdot 1 C_{tt}, \\ C'_{zz} &= (\Lambda^{-1})_z^\rho (\Lambda^{-1})_z^\lambda C_{\rho\lambda} = C_{zz}, \end{aligned} \quad (3.72)$$

$$\begin{aligned}
C'_{xy} &= (\Lambda^{-1})_x^\rho (\Lambda^{-1})_y^\lambda C_{\rho\lambda} \\
&= (\Lambda^{-1})_x^x (\Lambda^{-1})_y^x C_{xx} + (\Lambda^{-1})_x^x (\Lambda^{-1})_y^y C_{xy} + (\Lambda^{-1})_x^y (\Lambda^{-1})_y^x C_{yx} + (\Lambda^{-1})_x^y (\Lambda^{-1})_y^y C_{yy} \\
&= \cos\theta \sin\theta C_{xx} + (\cos^2\theta - \sin^2\theta) C_{xy} - \sin\theta \cos\theta C_{yy} \\
&= \cos\theta \sin\theta C_{xx} + \cos(2\theta) C_{xy} - \sin\theta \cos\theta C_{yy},
\end{aligned} \tag{3.73}$$

$$\begin{aligned}
C'_{xx} &= (\Lambda^{-1})_x^x (\Lambda^{-1})_x^x C_{xx} + 2(\Lambda^{-1})_x^y (\Lambda^{-1})_x^x C_{xy} + (\Lambda^{-1})_x^y (\Lambda^{-1})_x^y C_{yy} \\
&= \cos^2\theta C_{xx} - 2\sin\theta \cos\theta C_{xy} + \sin^2\theta C_{yy},
\end{aligned} \tag{3.74}$$

$$\begin{aligned}
C'_{xz} &= (\Lambda^{-1})_x^\rho (\Lambda^{-1})_z^\lambda C_{\rho\lambda} = \cos\theta C_{xz} - \sin\theta C_{yz}, \\
C'_{yz} &= \sin\theta C_{xz} + \cos\theta C_{yz}.
\end{aligned} \tag{3.75}$$

En 3.72 tenemos dos ecuaciones que verifican lo siguiente:

$$\begin{aligned}
C'_{tt} &= e^{i0\theta} C_{tt}, \\
C'_{zz} &= e^{-i0\theta} C_{zz}.
\end{aligned} \tag{3.76}$$

Al tener la dependencia anterior, se dicen que tienen helicidad cero, ya que la helicidad h de un campo se define a partir de un vector arbitrario P_μ que verifica la siguiente relación:

$$P'_\mu = e^{ih\theta} P_\mu, \tag{3.77}$$

donde el máximo valor de h corresponde con el espín del campo.

Con las definiciones dadas en 3.69 y 3.68, junto a las dos siguientes que introduciremos por conveniencia:

$$v_R = \frac{1}{\sqrt{2}}(C_{xz} + iC_{yz}), \tag{3.78}$$

$$v_L = \frac{1}{\sqrt{2}}(C_{xz} - iC_{yz}), \tag{3.79}$$

podemos ver como transforman 3.78 y 3.79:

$$v'_R = \frac{1}{\sqrt{2}}(C'_{xz} + iC'_{yz}) = \frac{1}{\sqrt{2}}[C_{xz}(\cos\theta + i\sin\theta) + iC_{yz}(\cos\theta + i\sin\theta)] = e^{i\theta} v_R, \tag{3.80}$$

$$v'_L = \frac{1}{\sqrt{2}}(C'_{xz} - iC'_{yz}) = \frac{1}{\sqrt{2}}[C_{xz}(\cos\theta - i\sin\theta) - iC_{yz}(\cos\theta - i\sin\theta)] = e^{-i\theta} v_L. \tag{3.81}$$

De estos dos se deduce que su helicidad es ± 1 .

Por último, 3.69 y 3.68 se transforman de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
C'_R &= \frac{1}{\sqrt{2}}(C'_{xx} + iC'_{xy}) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos^2\theta C_{xx} - 2\sin\theta\cos\theta C_{xy} + \sin^2\theta C_{yy} + i\cos\theta\sin\theta C_{xx} + i\cos(2\theta)C_{xy} - i\cos\theta\sin\theta C_{yy}) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}[C_{xx}(\cos^2\theta - \sin^2\theta + i2\sin\theta\cos\theta) + C_{xy}(-2\sin\theta\cos\theta + i\cos(2\theta))] = e^{2i\theta}C_R,
\end{aligned}
\tag{3.82}$$

$$\begin{aligned}
C'_L &= \frac{1}{\sqrt{2}}(C'_{xx} - iC'_{xy}) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos^2\theta C_{xx} - 2\sin\theta\cos\theta C_{xy} - \sin^2\theta C_{yy} - i\cos\theta\sin\theta C_{xx} - i\cos(2\theta)C_{xy} + i\cos\theta\sin\theta C_{yy}) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}[C_{xx}(\cos(2\theta) - i\sin(2\theta)) - iC_{xy}(\cos(2\theta) - i\sin(2\theta))] = e^{-2i\theta}C_L,
\end{aligned}
\tag{3.83}$$

indicándonos que tienen una helicidad de ± 2 , gracias a que $h_{\mu\nu}$ se transforme con dos matrices Λ^μ_ν .

Se sabe que $C_{\mu\nu}$ sólo tiene dos componentes independientes, indicándonos que las componentes con helicidad 0 y ± 1 las podemos eliminar con una transformación gauge, lo que nos deja sólo las componentes con helicidad ± 2 , que son las que tienen sentido físico por tener el máximo valor de la helicidad. Este hecho es el que nos dice que el campo gravitatorio tiene espín dos. [15]

Hemos podido descomponer el tensor polarización de la relatividad general linealizada en distintas componentes con diferentes helicidad: una con helicidad máxima, h , y luego una serie de componentes con helicidad menores, $h - 1, h - 2, \dots, -h$. Este resultado es el mismo que se espera en una teoría de la cuantización del momento angular, donde la simetría gauge elimina en ambas teorías las componentes no físicas que tienen helicidad menores, dejando, en este caso, las dos componentes con helicidad máxima (en valor absoluto) como grados de libertad físicos. Esto está relacionado con el hecho de que un campo cuya partícula mediadora no tenga masa, sólo tiene dos grados de libertad, caracterizado con su helicidad $\pm h$.

El campo electromagnético tiene helicidad ± 1 , descrito por un vector A_μ , mientras que el campo gravitatorio tiene helicidad ± 2 descrito por el tensor simétrico $h_{\mu\nu}$, indicándonos que ambos campos se comportan de maneras distintas.

A pesar de que todavía no se ha podido cuantizar la gravedad, según lo recién hecho en este apartado, el cuanto del campo gravitatorio, al que se le conoce como gravitón, debería tener espín dos.

3.3.2. FUENTES Estudiemos ahora que parte del tensor energía-momento es responsable de la generación de las perturbaciones métricas. Asumamos que dicho tensor toma la forma $\tilde{T}_{\mu\nu} = \epsilon t_{\mu\nu}$ en el espacio de Minkowski. Entonces, a primer orden en ϵ , la ecuación de Einstein vendría dada por 3.31, donde $T_{\mu\nu} = 0$, junto al tensor de Riemann y sus contracciones, que también son nulas (si $R_{\mu\nu\rho\sigma} = 0$ en Minkowski, es lógico que al contraerlo para obtener el tensor y escalar de Ricci, sean también nulos).

La ecuación 3.31 que tendríamos en este caso será:

$$\frac{1}{2}[\nabla_\mu \partial_\nu h + \nabla^2 h_{\mu\nu} - \nabla_\lambda \nabla_\mu h_\nu^\lambda - \nabla_\lambda \nabla_\nu h_\mu^\lambda - g_{\mu\nu} \nabla^2 h + g_{\mu\nu} \nabla_\lambda \nabla_\rho h^{\lambda\rho}] = -k t_{\mu\nu}. \quad (3.84)$$

Redefinamos la perturbación como por simplicidad:

$$\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} h, \quad (3.85)$$

por lo que podemos reescribir el gauge armónico en función de la nueva definición de la perturbación:

$$\nabla_\mu h^{\mu\nu} = \partial_\mu h^{\mu\nu} + \Gamma_{\mu\lambda}^\mu h^{\lambda\nu} + \Gamma_{\mu\lambda}^\nu h^{\lambda\mu} = \frac{1}{2} \partial^\nu h = \partial_\mu \left(\frac{1}{2} \eta^{\nu\mu} h \right), \quad (3.86)$$

habiéndose usado en la primera igualdad la definición general de la derivada covariante de un tensor dos veces covariante. Como la métrica $\eta_{\mu\nu}$ tiene sus componentes con valores constantes, y $\Gamma_{\mu\nu}^\sigma$ depende de las derivadas de dicha métrica tal y como se ve en 1.5, es claro que $\Gamma_{\mu\nu}^\sigma = 0$. Entonces, nuestro gauge en Minkowski toma la siguiente forma:

$$\partial_\mu \left(h^{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} h \right) = \partial_\mu \bar{h}^{\mu\nu} = 0 \Leftrightarrow \partial_\mu h^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \partial^\nu h. \quad (3.87)$$

Con ella, sustituyamos en 3.84:

$$\begin{aligned} -2k t_{\mu\nu} &= \partial_\mu \partial_\nu h + \partial_\lambda \partial^\lambda h_{\mu\nu} - \partial_\lambda \partial_\mu (\eta_{\nu\alpha} h^{\lambda\alpha}) - \partial_\lambda \partial_\nu (\eta_{\mu\alpha} h^{\lambda\alpha}) - \eta_{\mu\nu} \partial_\lambda \partial^\lambda h + \eta_{\mu\nu} \partial_\lambda \partial_\rho h^{\rho\lambda} \\ &= \partial_\mu \partial_\nu h + \partial_\lambda \partial^\lambda h_{\mu\nu} - \eta_{\nu\alpha} \partial_\mu \left(\frac{1}{2} \partial^\alpha h \right) - \eta_{\mu\alpha} \partial_\nu \left(\frac{1}{2} \partial^\alpha h \right) - \eta_{\mu\nu} \partial_\lambda \partial^\lambda h + \eta_{\mu\nu} \partial_\lambda \left(\frac{1}{2} \partial^\lambda h \right) \\ &= \partial_\mu \partial_\nu h + \partial_\lambda \partial^\lambda h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \partial_\mu \partial_\nu h - \frac{1}{2} \partial_\nu \partial_\mu h - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} \partial_\lambda \partial^\lambda h = \partial_\lambda \partial^\lambda \left(h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} h \right), \end{aligned} \quad (3.88)$$

donde no nos hemos preocupado por cambiar de orden las derivadas ya que, en este caso, $[\nabla_\mu, \nabla_\nu] h^{\alpha\beta} = R_{\mu\nu}^\alpha h^{\sigma\beta} + R_{\mu\nu}^\beta h^{\alpha\sigma} = 0$ [5]. En la bibliografía se define un tensor de torsión, que en la conexión de Levi-Civita es nulo gracias a la simetría de la misma. Finalmente, la ecuación que describe el problema, usando la definición 3.85, es:

$$\partial_\lambda \partial^\lambda \bar{h}_{\mu\nu} = \nabla^2 \bar{h}_{\mu\nu} = -2k t_{\mu\nu}. \quad (3.89)$$

Esta ecuación tiene una forma similar a la ecuación de Poisson del electromagnetismo, $\nabla^2 \phi = -\rho/\epsilon_0$ en el vacío, cuya solución es:

$$\phi(\vec{x}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(t_R, \vec{y})}{|\vec{x} - \vec{y}|} d^3y, \quad (3.90)$$

con $t_R = t - |\vec{x} - \vec{y}|$ el llamado tiempo retardado: es el tiempo en el que fue emitida la onda. Comparando las ecuaciones equivalentes, y la solución de la ecuación de Poisson, la solución de 3.89 será:

$$\bar{h}_{\mu\nu}(\vec{x}, t) = \frac{2k}{4\pi} \int \frac{t_{\mu\nu}(\vec{y}, t_R)}{|\vec{x} - \vec{y}|} d^3y. \quad (3.91)$$

La perturbación métrica en el instante t en la posición \vec{x} está determinada por la superposición de todas las perturbaciones del tensor energía-momento en cono de luz pasado del punto (\vec{x}, t) . Esto se debe a que las influencias causales tardan un tiempo $|\vec{x} - \vec{y}|$ para llegar desde su origen en \vec{y} hasta alcanzar la posición \vec{x} .

A partir de 3.91, si asumimos que \vec{x} se encuentra en la zona de radiación, lejos de la fuente, podemos reemplazar en el denominador $|\vec{x} - \vec{y}| = r$, con r la distancia entre el punto y la fuente. Bajo esta aproximación:

$$\bar{h}_{\mu\nu}(\vec{x}, t) \approx \frac{k}{2\pi r} \int t_{\mu\nu}(t_R, \vec{y}) d^3y. \quad (3.92)$$

Gracias al gauge armónico, podemos eliminar grados de libertad. Se ve claramente a partir de 3.87, que se puede escribir como:

$$\partial_t \bar{h}^{t\nu} + \partial_i \bar{h}^{i\nu} = 0. \quad (3.93)$$

De aquí se desprende que, a partir de \bar{h}^{ij} se puede calcular \bar{h}^{tj} , y con este se puede calcular, con el uso de la misma ecuación, \bar{h}^{tt} . Es decir, la componente que nos interesa calcular, y con la que seremos capaz de hallar el resto de componentes $\bar{h}^{\mu\nu}$ será \bar{h}^{ij} .

Según 3.92, la perturbación depende de las fuentes, pero como sólo queremos calcular \bar{h}_{ij} , necesitamos una expresión de t_{ij} . Para ello, recurramos a una ecuación que se verifica siempre, como es la conservación de la energía:

$$\nabla_\mu \tilde{T}^{\mu\nu} = 0 = \epsilon \partial_\mu t^{\mu\nu}. \quad (3.94)$$

Que se puede reescribir como:

$$\partial^\mu t_{\mu\nu} = \partial^t t_{t\nu} + \partial^i t_{i\nu} = 0 \rightarrow -\partial^t t_{t\nu} = \partial^i t_{i\nu}. \quad (3.95)$$

Entonces, consideremos la siguiente integral:

$$\int \partial_k(t^{ik}y^j)d^3y = \int (\partial_k t^{ik})y^j d^3y + \int t^{ij}d^3y, \quad (3.96)$$

donde las integrales son sobre una región del espacio que encierra a la fuente, tal que en el límite de la región, $t_{\mu\nu} = 0$. Podemos usar en la parte izquierda de la igualdad el teorema de Gauss:

$$\int_V \partial_\alpha X d^3y = \int_S X d^2y, \quad (3.97)$$

y como $t_{\mu\nu} = 0$ en la superficie límite de la región, será un término nulo. Entonces, con ayuda 3.95, podemos reescribir 3.96:

$$\int t^{ij}d^3y = - \int (\partial_k t^{ik})y^j d^3y = \int \partial_t t^{it}y^j d^3y = \partial_t \int t^{it}y^j d^3y = \frac{1}{2} \partial_t \int (t^{it}y^j + t^{jt}y^i)d^3y, \quad (3.98)$$

donde se ha podido sacar la derivada temporal de la integral porque es independiente de las coordenadas espaciales, y en la última igualdad se han intercambiado los índices i y j gracias al convenio de suma de Einstein para futura conveniencia.

También podemos calcular la siguiente integral:

$$\int \partial_k(t^{tk}y^jy^i)d^3y = \int (\partial_k t^{tk})y^jy^i d^3y + \int (t^{ti}y^j + t^{tj}y^i)d^3y. \quad (3.99)$$

De nuevo, por el teorema de Gauss y por la condición de frontera, el lado izquierdo se anula, conque, volviendo a usar 3.95:

$$\int (t^{ti}y^j + t^{tj}y^i)d^3y = - \int (\partial_k t^{tk})y^jy^i d^3y = \int (\partial_t t^{tt})y^jy^i d^3y = \partial_t \int t^{tt}y^i y^j d^3y. \quad (3.100)$$

Entonces, combinando 3.98 y 3.100:

$$\int t^{ij}d^3y = \frac{1}{2} \partial_t^2 \int t^{tt}y^i y^j d^3y. \quad (3.101)$$

Por ende, la expresión buscada para las componentes espaciales de $\bar{h}_{\mu\nu}$ es:

$$\bar{h}_{ij}(\vec{x}, t) \approx \frac{k}{4\pi r} \partial_t^2 \int t^{tt}y_i y_j d^3y. \quad (3.102)$$

Como $t^{tt} = \rho$ corresponde con la densidad de masas de la fuente, tendremos que el llamado segundo momento de la distribución de la masa es:

$$I_{ij}(t) = \int d^3y y_i y_j \rho(t, \vec{y}). \quad (3.103)$$

Es conveniente introducir el tensor momento cuadrupolar Q_{ij} , dado por:

$$Q_{ij} = \int (3y_i y_j - r^2 \delta_{ij}) \rho d^3y = 3I_{ij} - \delta_{ij} \int r^2 \rho d^3y. \quad (3.104)$$

Por lo que, despejando I_{ij} de la ecuación anterior, y sustituyendo en 3.102, tendremos la expresión de la perturbación métrica buscada [3]:

$$\bar{h}_{ij}(t, \vec{y}) \approx \frac{k}{12\pi r} \left[\partial_t^2 Q_{ij} + \delta_{ij} \partial_t^2 \int r^2 \rho(t, \vec{y}) d^3y \right]_{t=t_R}. \quad (3.105)$$

Según 3.102, las perturbaciones métricas en el instante t en la posición \vec{x} con causadas por la segunda derivada del momento cuadrupolar del tensor energía-momento en el instante anterior $t_R = t - r$. En electromagnetismo, las ondas electromagnéticas son generadas por la primera derivada del momento dipolar (principalmente). La diferencia entre las ondas es que el término dominante de la gravedad es el tercer término de la expansión multipolar, haciendo que la radiación gravitatoria sea mucho más débil que la electromagnética.

3.3.3. POTENCIA DE RADIACIÓN EMITIDA Busquemos finalmente una expresión para la potencia de la radiación emitida promediada sobre un periodo de movimiento $\langle E \rangle = \langle dE/dt \rangle$.

Partamos de 3.89, en donde sustituiremos 3.85, quedándonos:

$$\partial_\lambda \partial^\lambda \left(h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} h \right) = \partial_\lambda \partial^\lambda h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} \partial_\lambda \partial^\lambda h = -2k t_{\mu\nu}. \quad (3.106)$$

Calculemos la siguiente magnitud para una futura conveniencia. Como se hizo en el apartado anterior, $\tilde{T}_{\mu\nu} = \epsilon t_{\mu\nu}$, así que calculemos:

$$\partial_\nu (\sqrt{|g|} \tilde{T}_\mu^\nu) = \partial_\nu (\sqrt{|g|}) \tilde{T}_\mu^\nu + \sqrt{|g|} \partial_\nu \tilde{T}_\mu^\nu = \partial_\nu (\sqrt{|g|}) \tilde{T}_\mu^\nu + 0. \quad (3.107)$$

Debido a la conservación de la energía, el segundo término es nulo y el primer término se puede reescribir de la siguiente manera:

$$\partial_\mu \sqrt{|g|} = \frac{1}{2\sqrt{|g|}} \partial_\mu g = \frac{1}{2} \sqrt{|g|} g^{\rho\lambda} \partial_\mu g_{\rho\lambda} = -\frac{1}{2} \sqrt{|g|} g_{\rho\lambda} \partial_\mu g^{\rho\lambda}. \quad (3.108)$$

Sustituyendo 3.108 en 3.107, y tomando la ecuación a primer orden en ϵ (recordemos también que 3.2):

$$\partial_\nu (\sqrt{|g|} t_\mu^\nu) = -\frac{1}{2} t_{\alpha\beta} \partial_\mu h^{\alpha\beta}, \quad (3.109)$$

donde podemos sustituir si despejamos adecuadamente $t_{\mu\nu}$ de 3.106 :

$$\begin{aligned} \partial_\nu (\sqrt{|g|} t_\mu^\nu) &= \frac{1}{4k} \partial_\mu h^{\alpha\beta} \left[\partial_\lambda \partial^\lambda h_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \eta_{\alpha\beta} \partial_\lambda \partial^\lambda h \right] = \frac{1}{4k} \left[\partial_\mu h^{\alpha\beta} \partial_\lambda \partial^\lambda h_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \partial_\mu h \partial_\lambda \partial^\lambda h \right] \\ &= \frac{1}{4k} \left[\partial_\lambda (\partial_\mu h^{\alpha\beta} \partial^\lambda h_{\alpha\beta}) - \partial_\mu (\partial_\lambda h^{\alpha\beta}) \partial^\lambda h_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \partial_\lambda (\partial_\mu h \partial^\lambda h) + \frac{1}{2} \partial_\mu (\partial_\lambda h) \partial^\lambda h \right]. \end{aligned} \quad (3.110)$$

Fijándonos en el segundo y cuarto término dentro del corchete, se pueden reescribir, si los sumamos, de la siguiente manera:

$$-\partial_\gamma \partial_\lambda h^{\alpha\beta} \cdot \partial^\lambda h_{\alpha\beta} \cdot \delta_\mu^\gamma + \frac{1}{2} \partial_\gamma \partial_\lambda h \cdot \partial^\lambda h \cdot \delta_\mu^\gamma = -\frac{1}{2} \delta_\mu^\gamma \partial_\gamma [\partial_\lambda h^{\alpha\beta} \partial^\lambda h_{\alpha\beta} - \partial_\lambda h \partial^\lambda h / 2]. \quad (3.111)$$

Impongamos el gauge TT (del inglés *transverse-traceless*), donde $h_{\mu t} = 0$ y $h_\mu^\mu = 0$. Si dejamos que la onda plana gravitacional se propague según la dirección del eje z, las componentes no nulas de $h_{\mu\nu}$ son $h_{xx} = -h_{yy}$ y h_{xy} , con $h=0$. Entonces, la densidad de flujo de la radiación gravitacional a lo largo del eje z, Q , vendrá dada por:

$$\sqrt{|g|} t_t^z = \frac{1}{4k} (\partial_t h^{xx} \partial^z h_{xx} + \partial_t h^{yy} \partial^z h_{yy} + 2 \partial_t h^{xy} \partial^z h_{xy}), \quad (3.112)$$

donde podemos usar que:

$$\partial_z h_{ij} = \eta_{z\mu} \partial^\mu h_{ij} = -\partial^z h_{ij}, \quad (3.113)$$

$$\partial_t h_{ij} = \eta_{\mu i} \eta_{\nu j} \partial_t h^{\mu\nu} = \partial_t h^{ij}, \quad (3.114)$$

$$\partial_t h_{xx} = \dot{h}_{xx} = -\dot{h}_{yy} \rightarrow \frac{(\dot{h}_{xx} - \dot{h}_{yy})^2}{2} = \frac{\dot{h}_{xx}^2 + \dot{h}_{yy}^2 - 2\dot{h}_{xx}\dot{h}_{yy}}{2} = \dot{h}_{xx}^2 + \dot{h}_{yy}^2. \quad (3.115)$$

Si la onda plana es función de $(t - z)$, al igual que en caso electromagnético:

$$\partial_z h_{ij}(t - z) = \partial_t h_{ij}(t - z) \frac{\partial(t - z)}{\partial z} = -\partial_t h_{ij}(t - z) \quad (3.116)$$

Con todo lo anterior, se verá la expresión 3.112 reducida a:

$$\sqrt{|g|} t_t^z = \frac{1}{2k} [(\dot{h}_{xy})^2 + \frac{1}{4}(\dot{h}_{xx} - \dot{h}_{yy})^2], \quad (3.117)$$

y que depende de h_{xy} y $h_{xx} - h_{yy}$, que se obtienen directamente con 3.105:

$$\bar{h}_{xy} = \frac{k}{12\pi r} \left[\ddot{Q}_{ij} + \delta_{xy} \partial_t^2 \int r^2 \rho(t, \vec{y}) d^3 y \right]_{t=t_R} = \frac{k}{12\pi r} \ddot{Q}_{xy}(t_R) = h_{xy} - \frac{1}{2} \eta_{xy} h = h_{xy}, \quad (3.118)$$

$$\begin{aligned} \bar{h}_{xx} - \bar{h}_{yy} &= h_{xx} - h_{yy} = \frac{k}{12\pi r} \left[\ddot{Q}_{xx} + \partial_t^2 \int r^2 \rho(t, \vec{y}) d^3 y - \ddot{Q}_{yy} - \delta_{yy} \partial_t^2 \int r^2 \rho(t, \vec{y}) d^3 y \right]_{t=t_R} \\ &= \frac{k}{12\pi r} (\ddot{Q}_{xx}(t_R) - \ddot{Q}_{yy}(t_R)). \end{aligned} \quad (3.119)$$

Así que 3.117 vendrá dado por:

$$Q = \sqrt{|g|} t_t^z = \frac{G_N}{36\pi r^2} \left[(\ddot{Q}_{xy})^2 + \frac{1}{4} (\ddot{Q}_{xx} - \ddot{Q}_{yy})^2 \right]. \quad (3.120)$$

Sea la intensidad de radiación emitida sobre una dirección arbitraria (\hat{n} normalizado) tal que en este caso tomaremos $\hat{n} = (0, 0, 1)$ por ser la dirección en la que se propaga la onda, se define el flujo como:

$$d \langle P \rangle = Q \cdot dS, \quad (3.121)$$

con dS el elemento infinitesimal de una superficie perpendicular a \hat{n} .

Construyamos Q de una manera análoga para obtener una expresión del flujo más general, y que al particularizarlo, obtengamos 3.120, que depende de términos de la forma \ddot{Q}_{ij} . Su forma más general en este caso donde $n_x = n_y = 0, n_z = 1$ es:

$$\begin{aligned} Q &= \alpha(\ddot{Q}_{ij}n_in_j)^2 + \beta(\ddot{Q}_{ji}\ddot{Q}_{jk}n_in_k) + \gamma(\ddot{Q}_{ij}\ddot{Q}_{ij}) \\ &= \alpha\ddot{Q}_{zz}^2 + \beta(\ddot{Q}_{xz}^2 + \ddot{Q}_{yz}^2 + \ddot{Q}_{zz}^2) + \gamma(\ddot{Q}_{xx}^2 + \ddot{Q}_{yy}^2 + \ddot{Q}_{zz}^2 + 2\ddot{Q}_{xy}^2 + 2\ddot{Q}_{xz}^2 + 2\ddot{Q}_{yz}^2). \end{aligned} \quad (3.122)$$

Si tenemos en cuenta que la traza del tensor cuadrupolo, $Q_{xx} + Q_{yy} + Q_{zz} = 0$, e igualamos 3.120 y 3.122, obtenemos $\gamma = 1/2$, $\beta = -1$, y $\alpha = 1/4$, tendremos que el flujo de radiación gravitatoria emitida por una fuente en un ángulo sólido Ω en la dirección \hat{n} es:

$$d < P > = \frac{G_N}{36\pi} \left[\frac{1}{2} \ddot{Q}_{ij}\ddot{Q}_{ij} - \ddot{Q}_{ji}\ddot{Q}_{jk}n_in_k + \frac{1}{4}(\ddot{Q}_{ik}n_in_k)^2 \right] d\Omega, \quad (3.123)$$

e integrando sobre el ángulo sólido, obtenemos una expresión general para la potencia total radiada en todas las direcciones:

$$\begin{aligned} < P > = \frac{G_N}{36\pi} \int \left[\frac{1}{2} \ddot{Q}_{ij}\ddot{Q}_{ij} - \ddot{Q}_{ji}\ddot{Q}_{jk}n_in_k + \frac{1}{4}(\ddot{Q}_{ik}n_in_k)^2 \right] d\Omega \\ &= \frac{G_N}{36\pi} \left[\frac{1}{2}(\ddot{Q}_{ij})^2 \int d\Omega - \ddot{Q}_{ji}\ddot{Q}_{jk} \int n_in_k d\Omega + \frac{1}{4} \ddot{Q}_{ij}\ddot{Q}_{kl} \int n_in_jn_kn_l d\Omega \right]. \end{aligned} \quad (3.124)$$

Obtenemos la expresión más general sustituyendo $n_x = \sin\theta\cos\varphi$, $n_y = \sin\theta\sin\varphi$, y $n_z = \cos\theta$:

$$\begin{aligned} < P > &= \frac{G_N}{36\pi} \left[\frac{1}{2}(\ddot{Q}_{ij})^2 4\pi - \ddot{Q}_{ji}\ddot{Q}_{jk} \delta_{ik} \int n_z^2 d\Omega + \frac{1}{4} \ddot{Q}_{ij}\ddot{Q}_{kl} \int n_z^2 (\delta_{ij}\delta_{kl} + \delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) d\Omega \right] \\ &= \frac{G_N}{36\pi} \left[2\pi \ddot{Q}_{ij}^2 - \frac{4\pi}{3} \ddot{Q}_{ji}\ddot{Q}_{ij} + \frac{\pi}{15} \ddot{Q}_{ij}\ddot{Q}_{kl} (\delta_{ij}\delta_{kl} + \delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) \right] = \frac{G_N}{45c^5} \sum_{i,j} |\ddot{Q}_{ij}\ddot{Q}_{ij}|. \end{aligned} \quad (3.125)$$

Es decir, que la radiación cuadrupolar de las ondas gravitacionales depende de $1/c$ a la quinta, del orden de 10^{-40} , y es directamente proporcional a G_N , del orden de 10^{-11} , conque se ve que la potencia radiada tendrá un valor muy pequeño, y se necesitará de eventos que tengan unas componentes espaciales del tensor cuadrupolo muy elevadas.

CAPÍTULO 4

Caso práctico: sistema binario

4.1. PLANTEAMIENTO

Particularicemos los principales resultados del capítulo anterior para un sistema binario de estrellas, el cual tiene un gran interés en el ámbito de la astrofísica, y que pueden ser observadas con nuestros telescopios.

Sean m_1 y m_2 las masas de cada estrella, que se encuentran orbitando en torno a su centro de masas común en órbitas circulares (por simplicidad, en la realidad son elípticas), con \vec{r}_1 y \vec{r}_2 , las posiciones de las masas respecto al centro de masas.

Con esto podemos estudiar el sistema como cuando se estudian los potenciales centrales en mecánica Newtoniana. Sea la distancia relativa $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ tal que $|\vec{r}| = a$ es el radio de la órbita circular en el problema equivalente de un único cuerpo en un potencial central. Si colocamos las estrellas en el plano xy , donde $z = 0$, se puede describir:

$$\vec{r} = a \begin{pmatrix} \cos(\omega_* t) \\ \sin(\omega_* t) \\ 0 \end{pmatrix} = x\hat{u}_x + y\hat{u}_y, \quad (4.1)$$

donde ω_* es la velocidad angular de la estrella, de la que podemos hallar una expresión con ayuda de la tercera ley de Kepler [28]:

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{G_N(m_1 + m_2)} a^3 \rightarrow \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = \omega_*^2 = \frac{G_N(m_1 + m_2)}{a^3}. \quad (4.2)$$

Definiendo la masa reducida $\mu = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$, y $a = a_1 + a_2$ (corresponden con los radios de las órbitas de cada estrella respecto al centro de masas), tendremos que se verificarán las tres siguientes relaciones:

$$m_1 a_1 = m_2 a_2 = \mu a, \quad (4.3)$$

$$\vec{r}_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{r} = \frac{\mu a}{m_1} \begin{pmatrix} \cos(\omega_* t) \\ \sin(\omega_* t) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (4.4)$$

$$\vec{r}_2 = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{r} = -\frac{\mu a}{m_2} \begin{pmatrix} \cos(\omega_* t) \\ \sin(\omega_* t) \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (4.5)$$

4.2. PERTURBACIÓN MÉTRICA

Con todo esto, hallemos la expresión de la perturbación métrica 3.102. Para ello, si aproximamos las estrellas por masas puntuales, la densidad de masas de la fuente será:

$$t_{tt} = m_1 \delta(x - x_1) \delta(y - y_1) \delta(z - z_1) + m_2 \delta(x - x_2) \delta(y - y_2) \delta(z - z_2) = \mu \delta(x) \delta(y) \delta(z), \quad (4.6)$$

con la que podemos hallar las componentes no nulas del segundo momento de la distribución de masas 3.103. Como estamos en el plano $z=0$, esto nos elimina tres componentes a calcular. Las no nulas serán:

$$I_{xx}(t) = \int dx dy dz [a \cos(\omega_* t)]^2 \mu \delta(x) \delta(y) \delta(z) = \mu a^2 \cos^2(\omega_* t) = \frac{\mu a^2}{2} (1 + \cos(2\omega_* t)), \quad (4.7)$$

$$I_{yy}(t) = \mu a^2 \sin^2(\omega_* t) = \frac{\mu a^2}{2} (1 - \cos(2\omega_* t)), \quad (4.8)$$

$$I_{xy}(t) = \mu a^2 \cos(\omega_* t) \sin(\omega_* t) = \frac{\mu a^2}{2} \sin(2\omega_* t). \quad (4.9)$$

Por ende, las perturbaciones vendrán dadas por (recordar que $t_R = t - r$):

$$\bar{h}_{xx}(\vec{x}, t) \approx \frac{k}{4\pi r} \frac{d^2}{dt^2} \left[\frac{1}{2} \mu a^2 (1 + \cos(2\omega_* t_R)) \right] = \frac{k}{4\pi r} \frac{1}{2} \mu a^2 (2\omega_*)^2 (-\cos^2(\omega_* t_R)) = -\frac{k \mu a^2 \omega_*^2}{2\pi} \frac{\cos^2(\omega_* t_R)}{r}. \quad (4.10)$$

A la vista de lo anterior, se define la amplitud de la perturbación como ($k = 8\pi G_N$):

$$h_0 = \frac{k \mu a^2 \omega_*^2}{2\pi} = \frac{k a^2}{2\pi} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \frac{G_N (m_1 + m_2)}{a^3} = \frac{8 G_N^2 m_1 m_2}{2a}, \quad (4.11)$$

la cual es proporcional al producto de las masas e inversamente proporcional a la distancia entre ellas. Entonces:

$$\bar{h}_{xx}(\vec{x}, t) \approx -h_0 \frac{\cos(2\omega_* t_R)}{r}, \quad (4.12)$$

$$\bar{h}_{yy}(\vec{x}, t) \approx \frac{k}{4\pi r} \frac{d^2}{dt^2} \left[\frac{1}{2} \mu a^2 (1 - \cos(2\omega_* t_R)) \right] = h_0 \frac{\cos(2\omega_* t_R)}{r}, \quad (4.13)$$

$$\bar{h}_{xy}(\vec{x}, t) \approx \frac{k}{4\pi r} \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{1}{2} \mu a^2 \sin(2\omega_* t_R) \right) = -h_0 \frac{\sin(2\omega_* t_R)}{r}, \quad (4.14)$$

y el resto de componentes son nulas.

En este caso específico, se puede demostrar que no hay diferencia entre \bar{h}_{ij} y h_{ij} . Partiendo de 3.85, contraigámoslo:

$$\bar{h} = \eta^{\mu\nu} \bar{h}_{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} \eta_{\mu\nu} h = h - \frac{1}{2} 4h = -h. \quad (4.15)$$

Por otro lado, podemos sustituir la expresión de la perturbación tal que:

$$\bar{h} = \eta^{\mu\nu} \bar{h}_{\mu\nu} = \eta^{tt} \bar{h}_{tt} + \eta^{xx} \bar{h}_{xx} + \eta^{yy} \bar{h}_{yy} + \eta^{zz} \bar{h}_{zz} = (-1) \left(-h_0 \frac{\cos(2\omega_* t_R)}{r} \right) + (-1) h_0 \frac{\cos(2\omega_* t_R)}{r} = 0. \quad (4.16)$$

Usando las dos ecuaciones recién obtenidas, es claro que $h = -\bar{h} = 0$, y recurriendo a 3.85, $\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu}$, demostrándose la indiferencia presente entre ambas métricas.

De la forma de la perturbación, se desprende que la frecuencia angular de las ondas, ω , es proporcional al doble de la frecuencia angular de las masas (se deduce porque $h_{xx} = \bar{h}_{xx} \propto \cos(\omega t_R) = \cos(2\omega_* t_R)$), así que la frecuencia f observada experimentalmente será:

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{\omega_*}{\pi} = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{G_N(m_1 + m_2)}{a^3}}. \quad (4.17)$$

Dicha frecuencia es directamente proporcional a la raíz de la suma de las masas que producen las ondas gravitacionales, e inversamente proporcional a la distancia relativa entre ellas elevado a 3/2. Es decir, que el sistema es muy sensible a dicha distancia, y conforme la distancia va disminuyendo porque las masas se van acercando, aumenta dicha frecuencia, haciendo que las masas giren más rápido en torno al centro de masas.

4.3. POTENCIA TOTAL RADIADA

Para este sistema binario, podemos obtener la radiación total radiada en todas las direcciones a partir de 3.125, que será en nuestro caso:

$$\langle P \rangle = \frac{45}{G_N} [\ddot{Q}_{xx}^2 + \ddot{Q}_{yy}^2 + \ddot{Q}_{xy}^2]. \quad (4.18)$$

Calculemos las componentes no nulas del tensor cuadrupolo teniendo en cuenta que podemos tratar a las dos masas como puntuales, por lo que, calculemos con ayuda de 3.104:

$$Q_{xx} = \int (3x^2 - r^2 \delta_{xx}) \rho(x) d^3x = m_1(3x_1^2 - r_1^2) + m_2(3x_2^2 - r_2^2), \quad (4.19)$$

donde sustituiremos 4.4 y 4.5, y usando 4.3:

$$Q_{xx} = 3(m_1 a_1^2 + m_2 a_2^2) \cos^2(\omega_* t) - (m_1 a_1^2 + m_2 a_2^2) = \mu a^2 (3 \cos^2(\omega_* t) - 1). \quad (4.20)$$

Análogamente, las otras dos componentes serán:

$$Q_{yy} = 3(y_1^2 m_1 + y_2^2 m_2) - (m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2) = \mu a^2 (3 \sin^2(\omega_* t) - 1), \quad (4.21)$$

$$Q_{xy} = 3(m_1 x_1 y_1 + m_2 x_2 y_2) = 3 \cos(\omega_* t) \sin(\omega_* t) (m_1 a_1 a_2 + m_2 a_2 a_1) = \frac{3}{2} \mu a^2 \sin(2\omega_* t). \quad (4.22)$$

Derivándolas tres veces respecto del tiempo:

$$\ddot{\ddot{Q}}_{xx} = \frac{d^3}{dt^3} Q_{xx} = 12 \mu a^2 \omega_*^3 \sin(2\omega_* t) = -\ddot{\ddot{Q}}_{yy}, \quad (4.23)$$

$$\ddot{\ddot{Q}}_{xy} = -12 \mu a^2 \omega_*^3 \cos(2\omega_* t), \quad (4.24)$$

por lo que tenemos todo lo necesario para obtener la expresión de la potencia radiada sustituyendo en 4.18:

$$\langle P \rangle = \frac{G_N}{45} (12 \mu a^2 \omega_*^3)^2 2 = \frac{12^2 \cdot 2 \cdot \mu^2 a^4 G_N}{45} \left(\frac{G_N (m_1 + m_2)}{a^3} \right)^2 = \frac{32 G_N^4 m_1^2 m_2^2}{5 a^5} (m_1 + m_2). \quad (4.25)$$

Por definición, $\langle P \rangle = - \langle dE/dt \rangle$, indicándonos que el sistema pierde energía en forma de ondas gravitatorias, disminuyendo su energía mecánica. Este resultado es clave para obtener magnitudes como la variación a lo largo de un periodo del radio de la órbita y del momento angular, y el tiempo de colapso del sistema binario.

4.3.1. RADIO DE LA ÓRBITA Y MOMENTO ANGULAR En primer lugar:

$$\left\langle \frac{da}{dt} \right\rangle = \left\langle \frac{dE}{dt} \right\rangle \left\langle \frac{da}{dE} \right\rangle = \left\langle \frac{dE}{dt} \right\rangle \left(\left\langle \frac{dE}{da} \right\rangle \right)^{-1}, \quad (4.26)$$

en la que la energía del sistema será la suma de la energía cinética y potencial:

$$E = \left(\frac{m_1 a_1^2}{2} + \frac{m_2 a_2^2}{2} \right) \omega_*^2 - \frac{G_N m_1 m_2}{a} = \frac{\mu a}{2} (a_1 + a_2) \frac{G_N (m_1 + m_2)}{a^3} - \frac{G_N m_1 m_2}{a} \frac{m_1 + m_2}{m_1 + m_2} = -\frac{G_N \mu m}{2a}, \quad (4.27)$$

con $m = m_1 + m_2$ la masa total del sistema. Con la energía en función de a , es directo calcular 4.26:

$$\langle \dot{a} \rangle = -\frac{32G_N^4}{5a^5} m_1^2 m_2^2 (m_1 + m_2) \left[\frac{G_N m_1 m_2 (m_1 + m_2)}{2a^2 (m_1 + m_2)} \right]^{-1} = -\frac{64G_N^3}{5a^3} m_1 m_2 (m_1 + m_2). \quad (4.28)$$

Como es inversamente proporcional a $-a^{-3}$, para un valor de a dado, su derivada temporal nos indica que la distancia entre las masas disminuye, tal que a menor distancia, más rápido se acercan, hasta el punto en el que las masas colapsen.

Y, en segundo lugar, para ver como varía la rotación de los cuerpos:

$$\left\langle \frac{dL}{dt} \right\rangle = \left\langle \frac{dE}{dt} \right\rangle \frac{1}{\omega_*} = \frac{-32G_N^4 m_1^2 m_2^2 (m_1 + m_2)}{5a^5 \sqrt{G_N (m_1 + m_2)/a^3}} = -\frac{32G_N^{7/2}}{5a^{7/2}} m_1^2 m_2^2 \sqrt{m_1 + m_2}, \quad (4.29)$$

con un significado análogo: para un a dado, disminuye el momento angular, provocando que las masas se acerquen.

4.3.2. TIEMPO DE COLAPSO Para hallar el tiempo que tarda el sistema en colapsar a partir de una distancia inicial a_0 para un instante $t = 0$, calculemos como la expresión del radio de la órbita. La manera más sencilla es a partir de:

$$\left\langle \frac{da^4}{dt} \right\rangle = 4a^3 \left\langle \frac{da}{dt} \right\rangle = 4a^3 \left(-\frac{64G_N^3}{5a^3} m_1 m_2 (m_1 + m_2) \right) = -\frac{256}{5} G_N^3 \mu (m_1 + m_2)^2 = -C = \frac{da^4}{dt}, \quad (4.30)$$

con $C = -256G_N^3 \mu (m_1 + m_2)^2 / 5$ una constante, y la última igualdad se verifica porque $\langle da^4/dt \rangle$ es independiente del tiempo, variando a^4 con el tiempo a un ritmo constante.

Esta es la razón por la que nos interesado en ella, ya que:

$$\int_0^t \frac{da^4}{dt} dt = a^4 - a_0^4 = \int_0^t -C dt = -Ct \rightarrow a^4 = a_0^4 - Ct \rightarrow a = a_0 (1 - t/\tau)^{1/4}, \quad (4.31)$$

donde el tiempo buscado es:

$$\tau = a_0^4 / C = \frac{5a_0^4}{256G_N^3 m_1 m_2 (m_1 + m_2)}. \quad (4.32)$$

Cuanto mayor sean las masas de los objetos astrofísicos que van a colisionar, menor será el tiempo que tarde en colapsar. Es obvio intuitivamente porque ejercerán una mayor deformación sobre el espacio-tiempo la una sobre la otra, haciendo que se acerquen más rápido que si fueran más ligeras. También es muy sensible a la distancia inicial, con una dependencia a la cuarta, ya que a mayor distancia, más tiempo llevará en que colisione el sistema binario.

4.4. EJEMPLO CONCRETO

Tenemos todas las herramientas necesarias para estudiar un caso concreto de un sistema binario. Supongamos que tenemos dos agujeros negros, cada uno de masa $m_1 = 1,4M_\odot$ y $m_2 = 1,3M_\odot$ separados inicialmente una distancia de $a_0 = 7 \cdot 10^8 m$. Mencionar que, en el ámbito de la astrofísica, se miden las masas de los cuerpos masivos en unidades de masas solares, definida como [7]:

$$1 M_\odot = 2 \cdot 10^{30} kg, \quad (4.33)$$

y se tomará un valor de la constante de Gravitación Universal de [4]:

$$G_N = 6,67 \cdot 10^{-11} m^3 kg^{-1} s^{-2}. \quad (4.34)$$

Experimentalmente, se ve que el sistema gira alrededor del centro de masas en unos 150 minutos. Esto corresponderá con el periodo $T = 150 \cdot 60 s$, teniendo lo necesario para obtener el radio de la órbita circular inicial a_0 con la tercera ley de Kepler 4.2:

$$a_0 = \left(\frac{T^2 G_N (m_1 + m_2)}{4\pi^2} \right)^{1/3} = 5,69 \cdot 10^8 m, \quad (4.35)$$

con la que podemos hallar, a partir de 4.32, el tiempo que tarda el sistema en colisionar. Hay que tener en cuenta que en esta expresión no aparece el tiempo en el sistema internacional si no en unidades naturales, así que hay que tener en cuenta la velocidad de la luz, de valor [17]:

$$c = 2,998 \cdot 10^8 m/s, \quad (4.36)$$

se multiplicará 4.32 por el valor de c a la quinta, obteniéndose:

$$\tau = 1,36 \cdot 10^7 years. \quad (4.37)$$

Lo que buscamos pues es ver la potencia radiada emitida en función de a ; es decir, queremos representar, con ayuda de la ecuación 4.25, $\langle P \rangle$ frente a a , donde obtenemos la variación de a con el tiempo según 4.28. Para la distancia inicial, se emite una potencia $\langle P_0 \rangle = 1,39 \cdot 10^{25} \text{ W}$, siendo un valor bastante elevado el que emite el sistema. Lo interesante es que, conforme se acercan, esta potencia irá creciendo, tal y como se ve en la Figura 4.1, donde el valor de a irá variando, tomando los siguientes valores si parte del valor inicial a_0 :

$$a = a_0 + \langle \dot{a} \rangle T, \quad (4.38)$$

con el periodo T el inverso de 4.17. El proceso será, a partir de a_0 , hallar la potencia radiada y el periodo, y el siguiente valor de a , comenzando un proceso reiterativo, que tendrá que para cuando $a < 0$. Con esta idea en mente, se obtiene la Figura 4.1 (véase código fuente en el Anexo), donde se ha comenzado a enseñar la gráfica para $a_0 = 10^5 \text{ m}$. Conforme va disminuyendo la distancia, la potencia radiada es del orden de 10^{25} tal y como se comentó originalmente, hasta que nos encontramos que ambas masas están a una distancia relativa de 10^4 m . En dicho punto, donde las masas están tan próximas, la potencia radiada crece enormemente, mostrándose que es en estos últimos instantes justo antes de la colisión donde el sistema pierde una gran cantidad de energía. De hecho, la potencia radiada es del orden de 10^{50} W . Además, el periodo cada vez es menor, por lo que las masas circulan entre ellas cada vez más rápido.

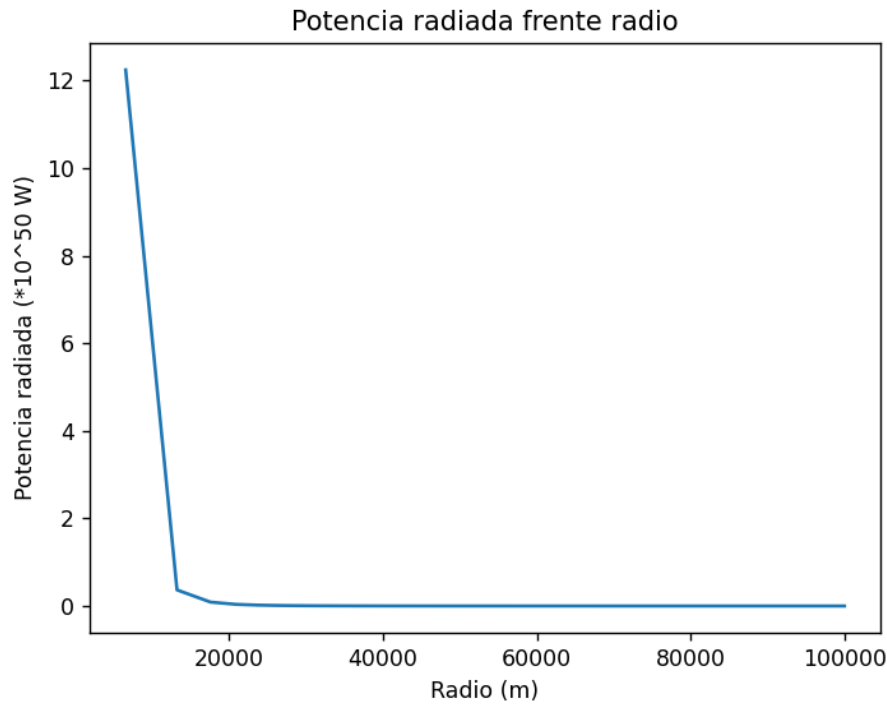


Figura 4.1: Representación gráfica de la potencia radiada con ayuda de 4.25 frente a la distancia radial 4.38. Se toma como valor inicial $a_0 = 10^5 \text{ m}$, y con ella se halla, con las ecuaciones recién indicadas, la potencia radiada asociada a cada distancia, y el valor nuevo de la distancia, conforme las masas se van acercando. Es un gráfico que hay que ver de derecha a izquierda, ya que van disminuyendo los valores del radio a , para comprenderla bien. De elaboración propia con ayuda de Python [25].

Es decir, a pesar de estar lidiando con la interacción más débil del Universo como es la gravedad, llega un punto crítico como es la colisión de dos agujeros negros, cuando se encuentran tan cerca, donde la potencia radiada por el sistema es del orden de 10^{50} W , siendo uno de los eventos más energéticos existentes. Tanto es así, que hay colisiones que ocurrieron hace millones de años, y que se miden a día de hoy con ayuda de los detectores LIGO [2] aquí en la Tierra.

Obviamente, podemos preguntarnos cuál será la potencia radiada justo en el momento en el que colapsa el sistema. El problema en nuestro caso es que hemos partido de un cálculo clásico en el que se consideran las masas como puntuales, y no deformables, por lo que, cuando colisionen, como no podrían estar clásicamente ambos en el mismo punto del espacio-tiempo, daría una potencia radiada infinita (sustituir $a = 0$ en 4.25). Esto no tiene sentido, y de hecho no es lo que se observa experimentalmente. Tendríamos que hacer un tratamiento más realista del problema, sin considerar las masas como puntuales, cosa que no abordaremos.

Conclusiones

Se comenzó con una introducción a la relatividad general en el Capítulo 1, y se plasmó una idea general de los objetivos que tiene el presente trabajo en el Capítulo 2, siendo los puntos claves que se abordarían en los siguientes capítulos. En el Capítulo 3 se obtuvo la ecuación de las ondas gravitatorias en distintas condiciones generales, donde se describieron los modos de oscilación y la potencia radiada, entre otras, de las mismas. Finalmente, se acabó llegando al Capítulo 4, donde se estudió el caso práctico de un sistema binario compuesto por agujeros negros.

Las ondas obtenidas son, en general, no muy energéticas, teniendo en cuenta el orden de magnitud del resto de las fuerzas, excepto en el momento de una colisión de los agujeros negros cuando se encuentran muy cerca, donde se comenzaron a obtener valores descomunales de la potencia radiada. En esos momentos, se alcanzan cantidades descomunales de energía emitida, de las más grandes del Universo, y es una razón por la que, experimentalmente, cuando se mide la masa del objeto resultante, tiene una masa menor a la suma de los constituyentes inicialmente: porque la masa que falta ha sido emitida mediante las ondas gravitacionales.

De estas ondas gravitatorias, a partir del perfil de la potencia radiada, se puede simular el valor de las masas iniciales, por ejemplo, y la cantidad de energía que ha perdido el sistema, pudiendo obtenerse los datos que nosotros hemos usado como de partida a partir de lo que hemos usado como resultado.

Estas ondas proporcionan mucha información sobre el sistema, y se seguirá profundizando en ellas para el actual estudio del fondo estocástico de ondas gravitacionales [27].

Conclusions

We began with an introduction to general relativity in Chapter 1, and gave a general idea of the objectives of the present work in Chapter 2, the key points to be addressed in the following chapters. In Chapter 3, the gravitational wave equation was obtained under different general conditions, where the oscillation modes and the radiated power, among others, of the gravitational waves were described. Finally, Chapter 4, where the practical case of a binary system composed of black holes was studied.

The waves obtained are, in general, not very energetic, taking into account the order of magnitude of the rest of the forces, except at the moment of a collision of the black holes when they are very close, where we started to obtain huge values of the radiated power. At these moments, huge amounts of emitted energy are reached, among the largest in the Universe, and this is one reason why, experimentally, when the mass of the resulting object is measured, it has a mass less than the sum of the initial constituents: because the missing mass has been emitted by gravitational waves.

From these gravitational waves, from the profile of the radiated power, we can simulate the value of the initial masses, for example, and the amount of energy that the system has lost, and the data we have used as a starting point can be obtained from what we have used as a result.

These waves provide a lot of information about the system, and will be further explored for the ongoing study of the stochastic gravitational-wave background [27].

Bibliografía

- [1] Benjamin P Abbott. Multi-messenger observations of a binary neutron star merger. 2017.
- [2] Barry C Barish and Rainer Weiss. Ligo and the detection of gravitational waves. *Physics Today*, 52(10):44–50, 1999.
- [3] Radoje Belusevic. *Relativity, Astrophysics and Cosmology. Volume 2*. WILEY-VCH, 2022.
- [4] María Guadalupe Contreras Calderón and Luis Omar Becerra Santiago. Análisis de resultados de diferentes mediciones de la constante de gravitación universal g . In *Sov. Phys. Dokl*, volume 245, page 20, 1981.
- [5] Rubén Calvo Ibáñez et al. Formulación matemática de las teorías de gauge: grupos de lie, teoría de representaciones, acciones de grupo, fibrados, conexión, curvatura y derivada covariante, aplicaciones físicas. 2020.
- [6] Joan Costa and Fernando López. *Interacción electromagnética: Teoría clásica*. Editorial Reverté, 2007.
- [7] Antonio Dobado, Felipe J Llanes-Estrada, and Jose Antonio Oller. Existence of two-solar-mass neutron star constrains gravitational constant g n at strong field. *Physical Review C*, 85(1):012801, 2012.
- [8] A. Einstein. Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie. *Annalen der Physik*, 354(7):769–822, January 1916.
- [9] Albert Einstein. Naherungsweise Integration der Feldgleichungen der Gravitation. *Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften*, pages 688–696, January 1916.

- [10] Albert Einstein. The general theory of relativity. In *The Meaning of Relativity*, pages 54–81. Springer, 1922.
- [11] Albert Einstein. The bianchi identities in the generalized theory of gravitation. *Canadian Journal of Mathematics*, 2:120–128, 1950.
- [12] Albert Einstein and Nathan Rosen. On gravitational waves. *Journal of the Franklin Institute*, 223(1):43–54, 1937.
- [13] Juan P. Expósito. *Relatividad General: Una introducción*. García-Maroto Editores, S.L., 2020.
- [14] JH Field. Einstein and planck on mass–energy equivalence in 1905–1906: a modern perspective. *European Journal of Physics*, 35(5):055016, 2014.
- [15] Bert Janssen. *Gravitación y Geometría: Una introducción moderna a la Teoría de la Relatividad General*. Editorial Universidad de Granada, 2022.
- [16] Issis Leon. El efecto onda: Acciones pequeñas con grandes impactos. <https://reconexionesencial.org/el-efecto-onda-acciones-pequenas-con-grandes-impactos/>, 2020. Accedido 10-09-2023.
- [17] I Martí-Vidal, S Jiménez-Monferrer, and C Cruz-Molina. Emulando a römer: medida de la velocidad de la luz cronometrando los eclipses de io. 2010.
- [18] María José Martínez Uso. Desarrollo de taylor de la función binómica. 2018.
- [19] Charles W. Misner, Kip S. Thorne, and Jhon A. Wheeler. *Gravitation*. W. H. Freeman and Company, 1973.
- [20] JMC Montanus. Proper-time formulation of relativistic dynamics. *Foundations of Physics*, 31:1357–1400, 2001.
- [21] BBC News Mundo. ¿qué son las ondas gravitacionales que einstein predijo? https://www.bbc.com/mundo/video_fotos/2016/02/160211_video_que_son_ondas_gravitacionales_cof, 2016. Accedido 10-09-2023.
- [22] Isaac Newton. *Philosophiae naturalis principia mathematica*, volume 1. G. Brookman, 1833.

- [23] J-F Pascual-Sánchez. The harmonic gauge condition in the gravitomagnetic equations. *arXiv preprint gr-qc/0010075*, 2000.
- [24] Peter Petersen. *Riemannian geometry*, volume 171. Springer, 2006.
- [25] Python. Python. <https://www.python.org/>, 2019. Accedido 10-09-2023.
- [26] Elizabeth A Rauscher. The minkowski metric for a multidimensional geometry. *Lettere al Nuovo Cimento (1971-1985)*, 7(10):361–367, 1973.
- [27] Sunny Vagnozzi. Inflationary interpretation of the stochastic gravitational wave background signal detected by pulsar timing array experiments. *Journal of High Energy Astrophysics*, 39:81–98, 2023.
- [28] Maris Van Haandel and Gert Heckman. Teaching the kepler laws for freshmen. *arXiv preprint arXiv:0707.4605*, 2007.

Anexo

```
1
2 #Modulo Python del TFG Ondas gravitacionales: obtencion de la
3 #ecuacion y simulaciones
4
5 import matplotlib.pyplot as plt
6 import math
7 #datos iniciales
8 periodo=150*60
9 g_n=6.67*10**(-11)
10 m_1=1.4*2*10**(30)
11 m_2=1.3*2*10**(30)
12
13 #caclulo del radio de la arbita inicial
14 a_0=(periodo**2*g_n*(m_1+m_2)/(4*math.pi)**2)**(1/3)
15 print(a_0)
16
17 #calculo del tiempo de colapso en segundo y years
18 x=(5*(a_0**4)/(256*(g_n**3)*m_1*m_2*(m_1+m_2)))
19 tau=x*(3*10**8)**5
20 print(tau)
21 tau_anos=tau/(60*60*24*365)
22
23 #veamos cuanto varia el radio de la orbita en cada periodo orbital
24 R_0=10**5
25 r=[]
26 P=[]
27 P1=0
28 up=0
29 down=0
30 up1=0
31 down1=0
32 f=0
33 while R_0>0:
34     up=32*(6.67*10**(-11))**4*(1.3*1.4)**2*2.7*32*10**(150)
35     down=(5*(R_0*3*10**8)**5)/10**(50)
36     P1=up/down
37     P.append(P1)
38     r.append(R_0)
39     up1=64*(6.67*10**(-11))**3*1.4*1.3*2.7*8*10**(90)
40     down1=(5*R_0**3*(3*10**8)**5)
```

```

41     f=math.pi*(R_0**3/(6.67*10**(-11)*2.7*2*10**(30)))*(1/2)
42     R_0=R_0-up1/down1*f
43
44     #representemos en una grafica la potencia radiada frente al
45     #radio de la orbita circular
46     fig, ax = plt.subplots()
47     ax.set_xlabel('Radio (m)')
48     ax.set_ylabel('Potencia radiada (*10^50 W)')
49     ax.set_title('Potencia radiada frente radio')
50     plt.plot(r,P)
51     plt.show()

```