Cosmología: Ejercicios a resolver

Alejandro José Florido Tomé

22 de octubre de 2024

1. Demostrar que las temperaturas actuales de los fondos cósmicos de neutrinos, T_ν, y de microondas, T_γ, satisfacen la siguiente relación: $T_\nu = (4/11)^{1/3} T_\gamma$.

Tenemos un fondo cósmico cuando la especie en cuestión se desacopló del plasma térmico. Para entender bien en qué momento esto ocurre, hay que comparar la escala de tiempo característica de las interacciones entre las partículas, $t_c = 1/\Gamma$ (Γ es la tasa de interacción para un proceso dado), con la escala de tiempo de la expansión, $t_H = 1/H$ (H es la tasa de expansión del universo). En otras palabras, cuando se verifica que $t_c \sim t_H$, ocurrirá el desacoplamiento de la especie del plasma térmico.

Gracias a la conservación de la entropía, la siguiente relación se verifica:

$$g_{*S}(T) T^3 a^3 = cte, \tag{1}$$

con $g_{*S}(T)$ el número efectivo de grados de libertad en entropía, que es aproximadamente igual a $g_*(T)$ cuando las especies relativistas están en equilibrio térmico. Recordemos su expresión:

$$g_*(T) = \sum_{i=bosones} g_i + \frac{7}{8} \sum_{i=fermiones} g_i. \tag{2}$$

Tras el desacoplo de los neutrinos, cuando $T < 500$ keV, la aniquilación de pares calienta sólo al gas de fotones (mayoritariamente), mientras que los neutrinos tendrán la misma temperatura (en promedio). Un factor muy importante a tener en cuenta es que los neutrinos se desacoplan pero siguen siendo relativistas, por lo que no transfiere su entropía al resto de especies relativistas del plasma, ni hace que disminuya la temperatura, conque la temperatura a la que se desacoplan los neutrinos se conservará. Entonces, podemos aplicar la conservación de la entropía justo antes y después del desacoplo de los fotones, teniendo en cuenta que antes estaba en equilibrio con los electrones y positrones, y tras desacoplarse, estará sólo en equilibrio con ellos mismos:

$$\frac{g_{*S\nu}(T_\nu) T_\nu^3 a^3}{g_{*S\gamma}(T_\gamma)^3 a^3} = 1. \tag{3}$$

Antes de desacoplarse los fotones, gracias a (2), y con $g_e = 4$ y $g_\gamma = 2$, tendremos que:

$$g_{*S\nu} = 2 + \frac{7}{8} * 4 = \frac{11}{2}, \tag{4}$$

mientras que después sólo quedan los fotones, por lo que $g_{*S\gamma} = 2$.

Con todo lo discutido anteriormente, podemos finalmente sustituir todo lo que sabemos en (3):

$$\frac{\frac{11}{2} T_\nu^3}{2 T_\gamma^3} = 1 \Longrightarrow T_\nu = \left(\frac{4}{11}\right)^{1/3} T_\gamma. \tag{5}$$

Si tomamos que la temperatura del fondo cósmico de microondas es $T_\gamma = 2{,}73\ K$, entonces, la asociada al fondo cósmico de neutrinos tendrá un valores de:

$$T_\nu = 1{,}95\ K. \tag{6}$$

2. Estimar el espesor de la región de última colisión. Discutir el significado de este espesor que, frecuentemente, viene dado por el valor de $\triangle z$.

Como el proceso de recombinación y desacoplamiento de los fotones del plasma térmico fue gradual porque pasó un tiempo desde la formación de los primeros átomos de H hasta que se terminó de crear el CMB, se habla de la banda de última colisión.

Con la ecuación de Saha se puede calcular la profundidad óptica de los fotones cerca del desacoplamiento, y con ella, la probabilidad de recibir un fotón del CMB cuya última colisión fuese en el intervalo $(z{,}z + dz)$, dada por:

$$P(z) = 5{,}26 \cdot 10^{-3} \left(\frac{z}{1000}\right)^{13{,}25} exp\left[-0{,}37\left(\frac{z}{1000}\right)\right]. \tag{7}$$

Esta función se puede representar:

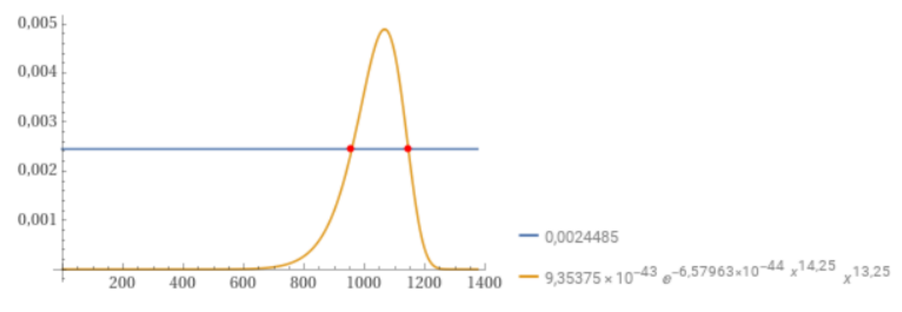

Figura 1: Representación gráfica de (7), representándose en el eje 'y' la probabilidad de recibir un fotón del CMB cuya última colisión fuese en el intervalo $(z{,}z + dz)$, y en el eje 'x' el valor del redshift. La línea recta nos da los valores de la función en la que toma un valor igual a la mitad del valor máximo, donde se resolvió la ecuación (10). Créditos a Wolfram Alpha.

Se ve que dicha función adopta valores del orden de 10^{-3}, por lo que nos interesaremos por la región en la que la función adopta como mínimo la mitad del valor máximo, que tiene una forma gaussiana. El resto de la función será despreciable en comparación, dando probabilidades demasiado pequeñas como para tenerlas en cuenta. Por ende, calculemos en qué punto exacto dicha función presenta un máximo:

$$\left.\frac{dP(z)}{dz}\right|_{z=z_{max}} = 0 = 5{,}26 \cdot 10^{-3} \frac{z_{max}^{12{,}25}}{1000^{13{,}25}} \left[13{,}25 - 0{,}37 \cdot 14{,}25 \left(\frac{z_{max}}{1000}\right)^{14{,}25}\right] e^{-0{,}37(z_{max}/1000)^{14{,}25}} \tag{8}$$

Suponiendo que $z_{max} \neq 0$:

$$13{,}25 - 0{,}37 \cdot 14{,}25 \left(\frac{z_{max}}{1000}\right)^{14{,}25} = 0 \Longrightarrow z_{max} = \left(\frac{13{,}25 \cdot 1000^{14{,}25}}{0{,}37 \cdot 14{,}25}\right)^{1/14{,}25} = 1066{,}8028. \tag{9}$$

Para este valor del redshift, la función alcanza un máximo. Con esto calculado, como hemos discutido antes, hallaremos los valores para los que se verifique que:

$$\frac{P(z_{max})}{P(z')} = 2 \Longrightarrow P(z') = 0{,}5 \cdot P(z_{max}) = 2{,}4485 \cdot 10^{-2} = 5{,}26 \cdot 10^{-3} \left(\frac{z'}{1000}\right)^{13{,}25} e^{-0{,}37\left(\frac{z'}{1000}\right)^{14{,}25}} \tag{10}$$

Se puede resolver esta ecuación con Wolfram Alpha, y se obtiene que $z'_1 = 1145{,}54$ y $z'_2 = 985{,}427$, que son los dos puntos que se ven que cortan la línea recta con la función en la Figura 1.

Finalmente, está claro que el ancho de la banda de la última colisión, $\triangle z$, se define a partir de que $P(z)$ se hace ”prácticamente nulo.en $z = z'_{1,2} \approx z_{max} \pm \triangle z$. De los valores obtenidos, se llegan a los valores de $\triangle z_1 = 78{,}7372$ y $\triangle z_2 = 81{,}3758$, cuyo valor medio es $\triangle z = 80{,}0565$. Dicho valor medio es el resultado que buscábamos: la anchura de la banda de última colisión para una probabilidad apreciable de los fotones recibidos del CMB.

Esto quiere decirnos que para un redshift dentro del intervalo $z = z_{max} \pm \triangle z$, podemos obtener fotones con una probabilidad apreciable que procedan del CMB.