

Máster en Física Avanzada

Especialidad Astrofísica



Trabajo Fin de Máster

Formación dinámica y estabilidad de estrellas
de bosones multi-estado

Alejandro José Florido Tomé

Tutores: Nicolás Sanchis Gual y Adrián del Río Vega

Curso académico 2023/24

Índice

Agradecimientos	2
Resumen	3
1. Introducción	4
2. Sistema de ecuaciones Einstein-Klein-Gordon	11
3. Marco numérico	15
3.1. Método de diferencias finitas	15
3.2. Método de Runge-Kutta	16
3.3. Sistema de ecuaciones de Einstein-Klein-Gordon	17
3.4. Instante inicial	17
3.5. Evolución temporal	19
3.6. Campos de distinta masa	19
4. Simulaciones y resultados	21
4.1. Convergencia	21
4.2. Dependencia con las variables	23
4.2.1. Frecuencia inicial ω	23
4.2.2. Valor central inicial del campo C	24
4.2.3. Término de auto-interacción Λ	27
4.2.4. Relación entre las amplitudes, η y η_2	30
4.2.5. Relación entre las masas $\eta_3 = m^{(2)}/m^{(1)}$	34
4.3. Velocidad de rotación	38
5. Conclusión	40
Bibliografía	41

Agradecimientos

Quería agradecer a la Universidad de Valencia y a Juan Zúñiga por darme la oportunidad de haber realizado este máster. Entre las asignaturas de astrofísica y física teórica, la beca de iniciación a la investigación con Nico y Adri, la estancia de investigación en Roma con Paolo Pani y Massimo Vaglio, y el TFM de nuevo con Nico y Adri, he aprendido mucho más de lo que hubiera imaginado en un sólo año. Todos ellos han sido pilares fundamentales en mi formación, y a los que les estaré eternamente agradecido, por todas las tutorías, horas invertidas, y temas enseñados, gracias por todo.

Gracias a mi padre por su gran apoyo, estando ahí durante todo el proceso, impulsándome a ser la mejor versión de mí mismo. Gracias a todos mis amigos que tengo repartidos por todo el mundo por aportarme desde un grano de arena hasta felicidad. Y gracias a mi pareja por darme esa fuerza que en los días más oscuros ni yo sé sacar.

Y gracias especialmente a Nico. Desde el primer día que me planté en su despacho por mi curiosidad por las ondas gravitacionales, me ha estado abriendo muchísimas puertas y enseñado cosas espectaculares, siempre con una gran paciencia y comprensión a la hora de resolver mis recurrentes dudas. Gracias por abrir la puerta ese día.

Resumen

La materia oscura es hoy en día uno de los misterios más fascinantes de la Astrofísica, la Cosmología y la Física Teórica. Se desconoce todavía su naturaleza, por lo que se han propuesto diferentes modelos teóricos para explicarla. En este trabajo hemos estudiado la formación dinámica de las soluciones del sistema de ecuaciones de Einstein-Klein-Gordon, que se corresponden a objetos compactos compuestos por campos escalares que describen un potencial tipo de materia oscura. Se tratan de las estrellas de bosones multi-campo formadas por dos campos escalares complejos masivos acoplados a la gravedad. Es análogo al estudio de dos estrellas de bosones autogravitantes que interactúan únicamente a través de la gravedad. Si los campos se encuentran en distintos estados de excitación, tendremos una estrella de bosones multi-estado.

Con el uso de métodos numéricos hemos resuelto el sistema de ecuaciones mencionado para estudiar la formación y estabilidad de las estrellas multi-estado en distintas circunstancias. Veremos cómo los objetos más compactos son los que presentan mayores estados de excitación. Además, éstos tienen un mayor número de partículas en el estado de mayor excitación tras la evolución dinámica. Por último, obtendremos las curvas de rotación de estos objetos, y las hemos comparado con las experimentales obtenidas para galaxias concretas, demostrando que pueden llegar a ser un buen modelo sencillo para describir el halo de materia oscura presente en las galaxias.

Palabras clave: Estrellas de bosones, relatividad numérica, métodos numéricos, materia oscura, curvas de rotación.

1 Introducción

La materia oscura es una de las mayores incógnitas a día de hoy en Física, uniendo la cosmología, la astrofísica, la física teórica y la física de partículas, pero, ¿qué sabemos realmente de ella, y qué relación tiene con las estrellas de bosones que dan título al trabajo?

En los años 20 del pasado siglo XX, Edwin Hubble revolucionó la concepción que se tenía del universo hasta el momento. Además de ver que en el universo existen muchas más galaxias como la Vía Láctea, demostró que el propio universo se estaba expandiendo. Concretamente, midiendo la velocidad radial de las galaxias y la distancia a la que se encuentran, Hubble descubrió que casi todas las galaxias se alejan de nosotros a una velocidad proporcional a su distancia, véase Fig. 1. [1, 2, 3]. La pendiente de la recta de la Fig. 1 es conocida como la constante de Hubble H_0 , y mide la tasa de expansión de nuestro Universo [4, 5, 6, 7]. Con este descubrimiento y posteriores medidas más precisas de H_0 , ahora sabemos que nuestro universo se está expandiendo [8, 9, 10].

Nuestro entendimiento sobre el origen y evolución del Universo se basa en los modelos de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker [11, 12, 13], que son soluciones de las ecuaciones de Einstein para la Relatividad General. Dichos modelos parten de un instante inicial común, una “singularidad” que da comienzo a todo, conocido como ‘Big Bang’, y, en función de ciertos parámetros, el Universo evoluciona y se expande de una forma u otra. Concretamente, la evolución del Universo y el valor teórico de H_0 vienen determinadas por la cantidad de materia que éste contiene, entre otras, la cual puede conocerse mediante observaciones. Para estimar la masa total presente en nuestro universo, la comunidad científica apuntó sus telescopios hacia las galaxias.

Observando la radiación procedente de las galaxias con una longitud de onda de 21

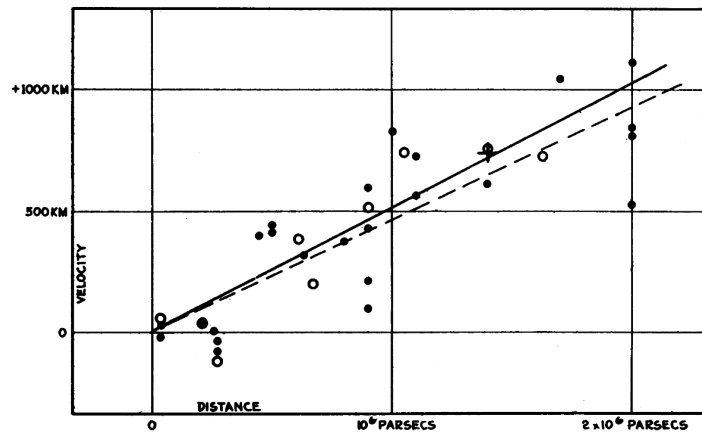


Figura 1: Relación entre velocidad y distancia observadas por Hubble para nebulosas extragalácticas. Los puntos negros y el ajuste lineal continuo corresponden con galaxias individuales, mientras que los puntos blancos y el ajuste lineal discontinuo hacen referencia a grupos de galaxias. Imagen extraída de [1]

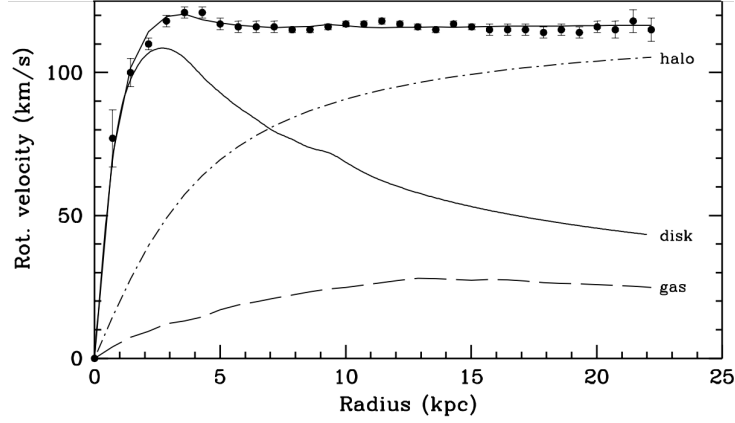


Figura 2: Perfil radial de la velocidad de rotación de la galaxia NGC 6503 frente a su radio. Los puntos son los datos obtenidos observacionalmente. La línea continua que atraviesa los puntos está asociada al ajuste experimental. La línea continua inferior (asociada a 'disk') es la predicción Newtoniana de la velocidad circular del disco. La línea discontinua inferior para el gas visible. Por último, la línea discontinua superior para el halo de materia que no somos capaces de ver, conocida como materia oscura. Dicha materia oscura debe estar para que encajen los resultados experimentales con la superposición de las tres contribuciones. Imagen extraída de [16].

centímetros asociada a la línea del hidrógeno neutro, HI, podemos extraer las curvas de rotación de la galaxia en cuestión [14, 15]. En la Fig. 2 [16] presentamos el perfil radial de la velocidad de rotación de la galaxia NGC 6503. Se tienen cuatro curvas: una de la rotación del disco ('disk' en la figura) obtenida a partir de las estrellas visibles de la galaxia; otra análoga para el gas galáctico que somos capaces de detectar; la experimental que se obtiene al observar la velocidad media del HI de la galaxia; y una para la materia que no se ve de la galaxia, denominada halo. La contribución del halo, disco y gas conjuntas dan lugar a la curva experimental. Si sólo incluyéramos la masa visible de la galaxia, no habría una concordancia entre las curvas de rotación experimentales y teóricas. Según la Fig. 2, hay una gran contribución a la rotación de la galaxia relacionada con la masa no luminosa, la que no somos capaces de detectar directamente con los telescopios, capaz de mantener su perfil radial casi constante lejos del centro galáctico [17, 18, 19, 20].

Al halo presente en las galaxias se le suele denominar "materia oscura". Tiene este nombre por dos razones: el sustantivo materia por ser la responsable de otorgar esa masa que no vemos a las galaxias, y el adjetivo oscuro porque no se "observa" directamente con luz, i.e. no interacciona electromagnéticamente, solo gravitatoriamente. Su existencia se ha confirmado con otros tipos de observaciones, como por ejemplo con mediciones del efecto "lente gravitacional", a partir del cual es posible inferir la masa total de una galaxia. Cuando un objeto muy masivo, como por ejemplo una galaxia, se coloca entre un cuerpo visible y la dirección de observación de nuestro telescopio, deforma el espacio-tiempo de tal forma que los rayos de luz que provienen del cuerpo visible sigan trayectorias "curvas" (i.e. las geodésicas del espacio tiempo curvo) [22, 23]. El efecto más famoso es el anillo de Einstein, véase la Fig. 3, en el que ocurre una alineación casi perfecta entre el objeto que actúa como lente (la galaxia que explicábamos en el ejemplo anterior) y el que se encuentra justo detrás de él respecto a nuestra línea de visión [21]. A partir del ángulo de desviación es posible inferir de manera indirecta la masa total del cuerpo que actúa como lente gravitatoria. Dicha masa la podemos comparar con la que somos capaces de ver, volviéndose a obtener masas mayores a las esperadas debido a la presencia de la materia oscura [24, 25].

La presencia de materia oscura es de vital importancia también a nivel cosmológico, ya que simulaciones del universo (en una versión simplificada) con y sin ella llevan a escenarios cosmológicos muy distintos; aquel que mejor ajusta las observaciones es precisamente el que incluye materia oscura. En particular, la materia oscura puede interactuar gravitatoriamente con las estrellas, agrupándose en torno a ellas. En este respecto, destacan las simulaciones de IllustrisTNG [26, 27, 28, 29], donde se presentan conexiones entre las galaxias y los halos de materias oscuras.

Una vez se ha entendido que la materia oscura es un ingrediente clave para la evolución del universo, se quiere entender su origen. En la actualidad existen múltiples explicaciones físicas de su existencia, desde teorías de gravedad modificada, hasta diversos modelos de partículas [30]. Debido a que la gravedad de Einstein funciona bastante bien para describir la interacción gravitatoria, parte de la comunidad científica decidió estudiar distintas partículas candidatas para describir la materia oscura. Entre todas las teorías de materia oscura propuestas en la literatura, podemos distinguir dos grandes grupos, que son distintos y complementarios a la vez: materia oscura bariónica y materia oscura no bariónica. Dentro de la materia oscura bariónica nos encontramos con los MACHOs (objetos compactos masivos astrofísicos en halos, por sus siglas en inglés), que son objetos como enanas marrones y agujeros negros [31]. Esta propuesta gozaba de cierta popularidad científica porque no es posible detectar dichos cuerpos directamente. Sin embargo, actualmente los astrofísicos no la consideran como una opción viable puesto que haría falta una gran cantidad de estos objetos para explicar toda la materia oscura, que de momento no se han encontrado. En cualquier caso, dichos cuerpos contribuirán gravitatoriamente a los efectos manifestados por la materia oscura en cierta medida, a pesar de que no se espere que sean la principal contribución.

La principal contribución podría tratarse de modelos de materia oscura no bariónica. Son candidatos exóticos de existencia cuestionable, tratándose de partículas teóricas que pueden dar lugar al universo al que habitamos. A partir de las observaciones, deben verificar unas condiciones generales como unas interacciones débiles con las partículas del Modelo Estándar de partículas, junto a una distribución del momento no relativista durante la formación de las grandes estructuras para una partícula que sea estable en tiempos de escalas cosmológicas [32]. Se han propuesto durante las últimas décadas una gran variedad de candidatos a partículas de materia oscura: los neutralinos en modelos



Figura 3: Representación artística de un anillo de Einstein extraída de [21].

de supersimetría; los sneutrinos (la supercompañera del neutrino); dentro de la teoría de Kaluza-Klein de dimensiones extra también es posible encontrar un candidato viable; neutrinos estériles teóricos (análogos a los neutrinos pero que no interactúan débilmente); los axiones que resuelven el problema de la violación CP (carga-paridad) en física de partículas; los gravitinos (supercompañeras del hipotético gravitón); la materia oscura auto-interaccionante; la materia oscura ligera escalar (SFDM de sus siglas en inglés o MOLE del español) con una masa por debajo de 10^{-10} eV; los WIMPs (partículas masivas que interactúan débilmente, por sus siglas en inglés) que son de gran interés por su concordancia teórica basada en su desacople a comienzos del universo, con la evidencia experimental de su densidad de energía-materia; ... [21, 33]. Puede darse incluso el caso en el que la materia oscura no esté compuesto únicamente por un solo tipo de partícula, sino que en realidad sean varias las que han escapado la detección directa en todos los experimentos hasta el día de hoy.

Detectar la materia oscura más allá de sus efectos gravitacionales sería un gran avance en la comprensión de la misma, ya fuera detectando las aniquilaciones o desintegraciones de su partícula, o en colisionadores, entre otras. A día de hoy, sólo hemos sido capaces de limitar, por un lado, el grado de las interacciones no gravitacionales de la materia oscura, y por otro, el rango de valores de la masa de la hipotética partícula [32, 34, 35].

De entre todos los candidatos viables, nosotros modelizaremos la MOLE mediante un campo escalar de Klein-Gordon ligero, con una partícula escalar de pequeña masa m asociada. La MOLE nos permite estudiar estructuras galácticas con partículas escalares, describiendo un gran número de estas partículas en un mismo estado por un campo escalar clásico. Es una herramienta de fácil estudio incluso dentro de la teoría cuántica de campos [36]. Además, si el campo es complejo, aparte de haber presente una simetría global de U(1) con una carga de Noether conservada, se pueden dar condensados macroscópicos autogravitantes de Bose-Einstein denominados “estrella de bosones”. Los condensados de Bose-Einstein son unos estados de agregación de la materia donde un número bosones se agrupan en el estado fundamental, formando un macroestado [37]. Estas estructuras se pueden formar en el Universo ya que, en el límite $T \rightarrow 0$ (a bajas temperaturas), se forma un gas de Bose degenerado agrupado en torno a un valor nulo del momento lineal. Es decir, se encuentran localizados en una región del espacio-tiempo. Destacar que su formación se debe a un efecto puramente cuántico, que incluso en ausencia de interacciones entre las partículas es capaz de darse.

En la Fig. 4, la masa de la estrella de bosones, M , verifica la relación $M \propto 1/m$ para distintas auto-interacciones Λ , siendo m la masa del bosón. Cuanto menor sea la masa del bosón, mayor será la masa del condensado de Bose-Einstein que se forme. Describiremos halos galácticos si la masa de la partícula de la materia oscura ligera escalar es del orden de 10^{-22} eV (o 10^{-31} GeV), u objetos de tamaño estelar que se podrían detectar con los experimentos de ondas gravitacionales LIGO-Virgo-Kagra [39, 40, 41] si $m \sim 10^{-12}$ eV (o 10^{-21} GeV). Es decir, podemos describir con un campo escalar complejo tanto objetos galácticos como estelares, regidos por las mismas ecuaciones fundamentales, y con un sólo parámetro en el caso más sencillo, la masa de la partícula. Los órdenes de magnitud de la masa de la MOLE se encuentran muy distanciados del rango de masas de las partículas conocidas. Para hacernos una idea, el electrón tiene una masa de 511 keV. Incluso al neutrino, esa partícula “fantasma” que se pensaba que no tenía masa, medidas actuales únicamente le ponen cotas superiores de varias centésimas de eV [42]. A día de hoy, la única partícula elemental escalar de espín 0 de la que se tiene evidencia experimental es el bosón de Higgs, con una masa de 125 GeV [43, 44, 45], que se distancia muchos órdenes

de magnitud de la partícula escalar que nosotros buscamos como posible candidata a materia oscura. De hecho, la estrella de bosones asociada al bosón de Higgs tendría una masa del orden de $10^{-22} M_{\odot}$, con M_{\odot} la masa del Sol. Si la masa del bosón realmente fuese $m \sim 10^{-12} - 10^{-22}$ eV, sería muy difícil de detectar, explicando por qué no se ha encontrado todavía, y que, a pesar de ello, dé lugar al universo en el que vivimos.

A parte del interés de las estrellas de bosones a escala galáctica para explicar la materia oscura presente en el Universo, como objetos estelares también son muy interesantes. Podrían existir binarias de las mismas que colisionaran eventualmente, produciendo ondulaciones en el espacio-tiempo que se propagan a la velocidad de la luz llamadas ondas gravitacionales [46, 47, 48]. Dichas ondas podrían ser análogas a las provenientes de colisiones de agujeros negros que somos capaces de detectar con los detectores que tenemos en la Tierra, como LIGO en Estados Unidos, Virgo en Italia, y KAGRA en Japón [49, 50, 51, 52]. De hecho, ya se han medido estas ondas provenientes de colisiones de estrellas de neutrones y de agujeros negros [53, 54, 55, 56], y se ha estudiado la posibilidad de una colisión de estrellas de bosones para el evento GW190521 [57]. Entonces, podemos comparar las ondas gravitacionales experimentales con las teóricas de los distintos modelos de las estrellas de bosones, para ver cuál de ellos se adapta mejor a lo medido, pudiendo ser posibles imitadores de agujeros negros [58, 59, 60, 61, 62]. Con los interferómetros de nueva generación, como con el Einstein Telescope o el Cosmic Explorer [63, 64], puede que tengamos suficiente sensibilidad para descartar o confirmar la existencia de estrellas de bosones estelares.

Una gran diferencia entre una estrella de bosones y, por ejemplo, una estrella de neutrones, radica en la descripción de la interacción entre las partículas constituyentes. Las estrellas de neutrones se suelen describir como un fluido gobernado por una ecuación de estado [65]. En cambio, toda la información sobre la interacción entre las partículas en una estrella de bosones viene codificada en el potencial presentado en la ecuación (1) [66]. En

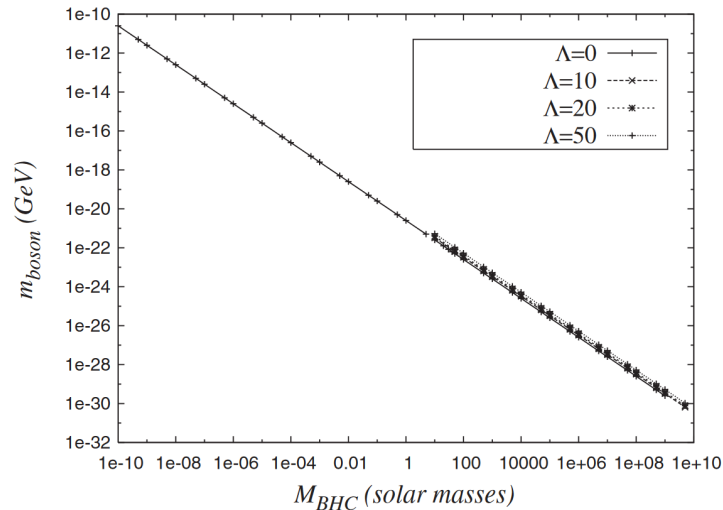


Figura 4: Se muestra una relación lineal entre la masa del bosón en GeV y la de la estrella de bosones (referenciados en [38] como candidatos a agujeros negros, BHC de sus siglas en inglés) en unidades de masas solares, para distintos valores de Λ asociada a la auto-interacción entre las partículas. En función del valor de la masa del bosón, somos capaces de describir objetos con miles millones de masas solares como halos galácticos, o con varias masas solares como posibles imitadores de agujeros negros, o un objeto nuevo y distinto. Gráfica extraída de [38].

ambos casos, distintas ecuaciones de estado o potenciales describen distintas de neutrones o bosones, respectivamente, con sus propiedades. Las distintas estrellas de bosones pueden describir posibles imitadores de agujeros negros [38], e incluso halos galácticos [67]. Para describir una galaxia correctamente, con su materia bariónica y con su MOLE, se estudian a día de hoy estrellas de bosones mixtas de materia bosónica (materia oscura) y fermiónica (materia conocida) [68, 69, 70]. Un primer paso para formar estrellas de bosones mixtas sencillas es superponiendo una estrella de bosones y otra de neutrones, interaccionando únicamente gravitatoriamente, pudiendo modificar las propiedades de ambas estrellas, por ejemplo su estabilidad. Véase [71] para ver en profundidad y con un gran número de referencias los distintos tipos de estrellas de bosones.

Por lo tanto, en el presente trabajo abordaremos las estrellas de bosones, que son hipotéticos objetos autogravitantes (también conocidos como objetos compactos exóticos) sin horizonte ni superficie bien definida (el valor del campo decae exponencialmente en el infinito). Dichas estrellas están descritas por un campo escalar complejo ϕ [72] cuyo comportamiento viene dado por la ecuación de Klein-Gordon, mínimamente acoplado a la gravedad, donde la dinámica del espacio-tiempo viene gobernada por la teoría de la Relatividad General. El equilibrio de estas estrellas reside en un balance entre la dispersión del campo escalar y la atracción de la gravedad [71]. La interacción entre las partículas la modelizaremos con un potencial efectivo. En nuestro caso, el potencial de interés tendrá la forma [73]:

$$V(|\phi|) = m^2|\phi|^2 + \Lambda|\phi|^4, \quad (1)$$

el cuál ha sido extensamente estudiado en la literatura [74, 75, 76, 77, 78, 79]. Se ha introducido la auto-interacción entre las partículas bosónicas con Λ . La contribución de la masa de la partícula m en el potencial permite producir estados ligados, por lo que trabajar con un campo escalar masivo es fundamental. Estudiaremos la solución más sencilla del sistema Einstein-Klein-Gordon: aquella con una distribución esféricamente simétrica sin rotación de la densidad de energía con el máximo en el centro.

Es importante señalar que las partículas bosónicas del campo que componen la estrella pueden estar en el estado fundamental al ser un condensado de Bose-Einstein, o agruparse en estados excitados [80], en analogía a un átomo y sus niveles de energía [81]. Se tiene un nodo cuando el perfil radial del campo escalar complejo adopta un valor nulo [82]. Y un estado excitado se presenta cuando hay nodos. Si tenemos dos nodos, tendremos un segundo estado excitado, como se ve en la Fig. 5. En general, los estados excitados son inestables, decayendo al estado fundamental por el mecanismo llamado “enfriamiento gravitacional” con el que se libera campo escalar y energía cinética [84, 85]. Sin embargo, existen soluciones en los que los nodos se mantienen con el tiempo y la configuración es estable.

Por un lado, la presencia de un término de auto-interacción como el que se presentó en la ecuación (1), $\Lambda > 0$, permite que los modelos excitados se estabilicen. De hecho, como se probó en [83], a mayor término de auto-interacción, mayor es el número de nodos que será capaz de estabilizar el campo escalar complejo. Por otro lado, podemos considerar dos campos escalares complejos independientes para describir un único objeto, al que llamaremos en el caso general como estrella multi-campo. Si cada campo se encuentra en un estado distinto, estaremos ante una estrella multi-estado [80, 86]. Este objeto puede alcanzar una estabilidad cooperativa a pesar de que uno de sus constituyentes sea inestable. Esta descripción sería similar a lo que ocurre en las galaxias, puesto que las curvas de rotación indican que las galaxias serían inestables (rotan demasiado rápido) sin la presencia de materia oscura.

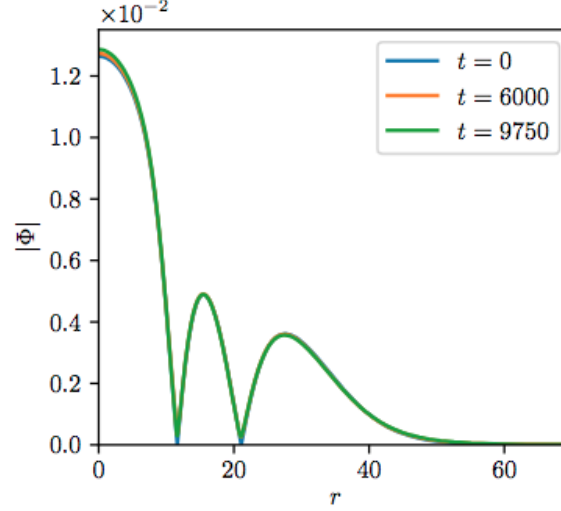


Figura 5: Se muestra el perfil radial de la magnitud del campo escalar $|\Phi|$ para un modelo estable de estrella de bosones en un estado excitado con dos nodos y $\Lambda = 150$. Extraído de [83].

Los objetivos de este trabajo son:

- Comprender cómo se describen las estrellas de bosones de manera teórica.
- Usar el método de diferencias finitas para resolver las ecuaciones Einstein-Klein-Gordon que modelizan la evolución de una estrella de bosones multi-estado.
- Averiguar si es posible formar estrellas multi-estado descritas en [80] durante la formación dinámica conjunta de dos estrellas de bosones superpuestas que interactúan gravitatoriamente, y bajo qué condiciones es posible.
- Modelizar en un caso sencillo lo que podría ocurrir en la formación de las galaxias, y si diferentes configuraciones pueden darse a partir de unos datos iniciales generales.
- Comparar las curvas de rotación teóricas de las estrellas de bosones multi-estado con las experimentales de las galaxias.

Vamos a definir a continuación los convenios utilizados. Los índices a, b, c, \dots indicarán coordenadas espaciales, mientras que μ, ν, γ, \dots estarán asociados a las espacio-temporales. Trabajaremos en unidades geométricas naturales, $G = c = \hbar = 1$. La métrica de Minkowski es $[\eta_{\mu\nu}] = \text{diag}(-1, +1, +1, +1)$; ∇_μ denotará la conexión de Levi-Civita asociada; el tensor de Riemann se define como $[\nabla_\alpha, \nabla_\beta]V^\mu = R^\mu{}_{\nu\alpha\beta}V^\nu$ para cualquier cuatro-vector V^ν ; el tensor de Ricci vendrá dado por $R_{\alpha\beta} = R^\mu{}_{\alpha\mu\beta}$; y el escalar de Ricci será $R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$ [87]. Todos los tensores y funciones son suaves a no ser que se indique lo contrario.

En la Sección 2 introduciremos de manera teórica el sistema de ecuaciones Einstein-Klein-Gordon y las variables necesarias que describen la evolución dinámica y formación de nuestras estrellas multi-estado. En la Sección 3 explicaremos todas las aproximaciones y métodos usados para lidiar con las ecuaciones de manera numérica. Y en la Sección 4 mostraremos los principales resultados obtenidos para distintos casos a partir de un código de elaboración propia realizado en Fortran [88], y compararemos algunas simulaciones con datos experimentales de las rotaciones de las galaxias.

2 Sistema de ecuaciones Einstein-Klein-Gordon

Asumiremos un espacio-tiempo con simetría esférica por simplicidad, usando las coordenadas (t, r, θ, φ) . Nos limitaremos a una foliación ‘polar-areal slicing’, con la métrica $g_{\mu\nu}$ dada por [89, 90]:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -\alpha^2(r, t) dt^2 + a^2(r, t) dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad (2)$$

siendo una simplificación de la formulación 3+1 [91] con un vector de desplazamiento nulo, $\beta^a = 0$, con una función lapso $\alpha(r, t)$ no nula, y $a(r, t)$ la parte radial de la métrica.

Sobre este espacio-tiempo consideraremos un conjunto de P campos escalares complejos acoplados mínimamente, $\{\phi^{(i)}\}_{i=1}^P$, que físicamente representan o modelizan la materia oscura que queremos describir. La acción de nuestra teoría viene dada por:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left(-\frac{R}{16\pi} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^P [g^{\mu\nu} \partial_\mu \bar{\phi}^{(n)} \partial_\nu \phi^{(n)} + V(|\phi^{(n)}|^2)] \right), \quad (3)$$

donde R es el escalar de curvatura de Ricci, barra denota complejo-conjugación, y $V(|\phi^{(n)}|^2)$ es un potencial efectivo que describe la auto-interacción de los campos:

$$V = \sum_{n=1}^P \left[(m^{(n)})^2 |\phi^{(n)}|^2 + \Lambda^{(n)} |\phi^{(n)}|^4 \right]. \quad (4)$$

En esta expresión, $m^{(n)}$ denota la masa del campo escalar complejo $\phi^{(n)}$, mientras que $\Lambda^{(n)}$ representa un acoplamiento de auto-interacción repulsivo si es positivo, que puede compensar la gravedad y con ello formar un objeto autogravitante estable. A dicho potencial se le ha exigido que sea una función del módulo del campo escalar para que la acción (3) respete la simetría global U(1) del sistema, es decir, que sea invariante bajo transformaciones globales de dicho grupo, $\phi^{(n)} \rightarrow \phi^{(n)} e^{i\delta^{(n)}}$. Como consecuencia, por el Teorema de Noether tendremos un conjunto de corrientes conservadas [76]:

$$J_\mu^{(n)} = \frac{i}{2} \sqrt{-g} [\bar{\phi}^{(n)} \partial_\mu \phi^{(n)} - \phi^{(n)} \partial_\mu \bar{\phi}^{(n)}]. \quad (5)$$

Y la carga asociada a cada corriente será:

$$N^{(n)}(r) = \int_0^r g^{0\mu} J_\mu^{(n)} d^3x. \quad (6)$$

Físicamente podemos interpretar esta magnitud como el número de partículas bosónicas del campo n . El número total de partículas bosónicas vendrá dado entonces por:

$$N = \sum_{n=1}^P N^{(n)}(\infty). \quad (7)$$

Con la acción del sistema podemos obtener las ecuaciones que describen la dinámica de la métrica, que serán las ecuaciones de Einstein, así como la evolución de los campos, dada por las ecuaciones de Klein-Gordon.

La ecuación de Einstein a resolver para nuestro sistema de interés se obtiene variando la acción asociada al lagrangiano de la ecuación (3) respecto a $g^{\alpha\beta}$:

$$R_{\mu\nu} - \frac{R}{2}g_{\mu\nu} = k_0 \sum_{n=1}^P T_{\mu\nu}^{(n)}, \quad (8)$$

donde $k_0 = 8\pi$ en unidades naturales. Fijémonos que el tensor energía-momento toma una forma sencilla, i.e. la suma de contribuciones de cada campo [73]:

$$T_{\mu\nu}^{(n)} = \frac{1}{2} [\partial_\mu \bar{\phi}^{(n)} \partial_\nu \phi^{(n)} + \partial_\mu \phi^{(n)} \partial_\nu \bar{\phi}^{(n)}] - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} [\partial^\alpha \bar{\phi}^{(n)} \partial_\alpha \phi^{(n)} + V(|\phi^{(n)}|^2)]. \quad (9)$$

Por otro lado, las ecuaciones de Klein-Gordon se obtienen variando la acción respecto a los campos escalares:

$$\square \phi^{(n)} = \frac{dV}{d|\phi^{(n)}|^2} \phi^{(n)}, \quad (10)$$

con $\square \phi^{(n)} = \partial_\mu [\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu \phi^{(n)}] / \sqrt{-g}$ el laplaciano en un espacio-tiempo curvo [22], donde $g = \det(g_{\mu\nu})$ corresponde con el determinante de la métrica. La ecuación (10) describe el comportamiento de los P campos escalares complejos. Nuestro objetivo ahora es re-escribir esta ecuación como un conjunto de ecuaciones de primer orden para una fácil descripción numérica. Para ello simplificamos el término $\square \phi^{(n)}$ en la ecuación anterior, teniendo en cuenta que $\sqrt{-g} = a\alpha r^2 \sin \theta$ para nuestra métrica esférica simétrica, y que $\phi^{(n)} = \phi^{(n)}(r, t)$:

$$\square \phi^{(n)} = \frac{1}{a\alpha r^2 \sin \theta} \left[\partial_t \left(r^2 (\sin \theta) a\alpha \frac{1}{-\alpha^2} \partial_t \phi^{(n)} \right) + \partial_r \left(r^2 (\sin \theta) a\alpha \frac{1}{a^2} \partial_r \phi^{(n)} \right) \right] = \frac{dV}{d|\phi^{(n)}|^2} \phi^{(n)}. \quad (11)$$

Definiendo las variables de primer orden $\Pi^{(n)} = a\partial_t \phi^{(n)} / \alpha$ y $\psi^{(n)} = \partial_r \phi^{(n)}$, tendremos lo suficiente para convertir la ecuación de Klein-Gordon (10) para cada campo escalar complejo en un sistema de tres ecuaciones de primer orden¹:

$$\partial_t \phi^{(n)} = \frac{\alpha}{a} \Pi^{(n)}, \quad (12)$$

$$\partial_t \psi^{(n)} = \partial_r \left(\frac{\alpha}{a} \Pi^{(n)} \right), \quad (13)$$

$$\frac{1}{a\alpha} \left(-\partial_t \Pi^{(n)} + \frac{1}{r^2} \partial_r \left(\frac{r^2 \alpha \psi^{(n)}}{a} \right) \right) = \frac{dV}{d|\phi^{(n)}|^2} \phi^{(n)}. \quad (14)$$

El siguiente paso es introducir estas variables en las ecuaciones de Einstein (8). Si tomamos sus componentes (tt) , (rr) y (rt) , obtendremos un sistema de ecuaciones acopladas para P campos escalares complejos² [80, 93, 94]:

$$\partial_r a = \frac{a}{2} \left[-\frac{a^2 - 1}{r} + \frac{k_0}{2} r \left(\sum_{n=1}^P (\psi^{(n)2} + \Pi^{(n)2}) + a^2 V \right) \right] \quad (15)$$

$$\partial_r \alpha = \frac{\alpha}{2} \left[\frac{a^2 - 1}{r} + \frac{k_0}{2} r \left(\sum_{n=1}^P (\psi^{(n)2} + \Pi^{(n)2}) - a^2 V \right) \right] \quad (16)$$

¹Se ha supuesto que $\phi^{(n)}$ es de clase C^2 para que su derivada de segundo orden sea continua.

²Se utilizó Wolfram Mathematica [92] para obtener las ecuaciones (15), (16) y (17) y contrastar con la bibliografía.

$$\partial_t a - \frac{k_0 \alpha r}{2} \sum_{n=1}^P \Pi^{(n)} \psi^{(n)} = 0. \quad (17)$$

Las dos primeras ecuaciones anteriores permiten obtener los valores de a y α . La tercera ecuación es redundante y no es necesaria resolverla. Utilizaremos dicha ecuación (17) para comprobar que se verifica el sistema de ecuaciones para cada instante de tiempo y para llevar a cabo un estudio de convergencia.

En el resto del trabajo nos limitaremos al caso $P = 2$, es decir, estudiaremos dos campos escalares complejos, asumiendo una interacción gravitacional mutua entre ellos, cuyo potencial sea de la forma:

$$V = m^2(|\phi^{(1)}|^2 + |\phi^{(2)}|^2) + \Lambda(|\phi^{(1)}|^4 + |\phi^{(2)}|^4). \quad (18)$$

Además, haremos uso del siguiente ansatz armónico para describir la evolución temporal de cada campo escalar [95]:

$$\phi^{(1)}(r, t) = \phi_0(r) e^{-i\omega t} = \phi_1(r, t) + i\phi_2(r, t), \quad (19)$$

$$\phi^{(2)}(r, t) = \eta \xi(r) \phi^{(1)}(r, t) = \phi_3(r, t) + i\phi_4(r, t), \quad (20)$$

donde $\omega > 0$ es la frecuencia de oscilación inicial del campo, $\phi_0(r)$ la amplitud (real) del mismo, η un factor que nos relaciona directamente la amplitud ambos campos, y $\xi(r)$ una función dependiente de r . Descomponiendo los campos en sus partes reales e imaginarias, se pueden asociar con osciladores armónicos de amplitud $\phi_0(r)$ y $\eta \xi(r) \phi_0(r)$, teniendo la particularidad que en $t = 0$ sólo permanecen las partes reales [86]. La variable η mide la fracción relativa entre las amplitudes de los campos escalares complejos, relacionada con la fracción del número de partículas asociadas a cada campo.

Gracias a este ansatz podemos separar las ecuaciones de Klein-Gordon en sus partes reales e imaginarias, obteniéndose para cada campo escalar complejo dos ecuaciones análogas para dos campos reales. Por otro lado, fíjese que si sustituimos $\phi^{(1)}$ y $\phi^{(2)}$ en el tensor de energía-impulso de la ecuación (9), la dependencia temporal desaparece. Esto nos indica que, aunque los campos oscilan en el tiempo, la métrica resultante de las ecuaciones de Einstein con estas fuentes permanecerá independiente del tiempo, dando lugar a un espacio-tiempo estático [71].

Una vez resuelta la evolución de nuestro sistema de ecuaciones, podremos calcular el número de partículas via (6). Usando (12) para el campo $\phi^{(1)}$ definido en (19), podemos reducir dicha fórmula a:

$$N^{(1)} = \int (\phi_1(r) \Pi_2(r) - \phi_2(r) \Pi_1(r)) r^2 \sin \theta d^3 x = \pi^2 \int (\phi_1 \Pi_2 - \phi_2 \Pi_1) r^4 dr \quad (21)$$

donde hemos tenido en cuenta que $\Pi^{(1)} = \Pi_1 + i\Pi_2$. Análogamente podemos obtener una expresión similar para $\phi^{(2)}$. Con el número de partículas asociado a cada campo, definiremos una variable que relacione ambos:

$$\eta' = \frac{N^{(2)}}{N^{(1)}}, \quad (22)$$

relacionada con la η que ya apareció en (20). En el caso concreto $\xi(r) = 1$, la relación es $\eta' = \eta^2$.

Para distinguir a los campos complejos de sus partes reales e imaginarias, usaremos superíndices para referirnos a los primeros, y subíndices a los segundos, tal y como ya se ha hecho en las ecuaciones (19) y (20).

Al resolver el sistema de ecuaciones anterior impondremos la condición de decaimiento $\phi \rightarrow 0$ para los campos escalares. La solución, en general, no tendrá soporte compacto, i.e. $T_{ab} \neq 0$ para cualquier valor del radio. Como consecuencia, es necesario introducir una noción de compacidad para poder analizar nuestra estrella de bosones. Al no tener una superficie estelar bien definida, definiremos un radio efectivo para la estrella, que será aquel que contenga un porcentaje que definiremos ahora de la masa. De esta forma, más allá de este radio efectivo el espacio-tiempo será, en términos efectivos, como si fuera vacío, es decir $T_{\mu\nu} \approx 0$ [83]. Definamos la masa M como la masa de la estrella de bosones, y $M_{0.9}$ la masa efectiva asociada al 90 % de M . Normalmente se define la masa efectiva asociada al 99 % de la masa, pero en nuestras simulaciones no daba lugar a resultados claros por la gran emisión de materia escala durante la evolución dinámica. Tendríamos que tomar $t > 10^4$ para que se estabilizaran por completo todas las estrellas simuladas, y poder definir $M_{0.99}$. Entonces, $M_{0.9}$ vendrá dada por:

$$M_{0.9} = (90\%) \cdot M = 0.9 \cdot \frac{r_{final}}{2} \left(1 - \frac{1}{a^2(r_{final})} \right). \quad (23)$$

El radio donde se alcanza el valor de $M_{0.9}$ será $R_{0.9}$. Con todos estos parámetros, definiremos la compacidad $C_{0.9}$ por:

$$C_{0.9} = \frac{2M_{0.9}}{R_{0.9}}. \quad (24)$$

Fijémonos que esta variable así definida es adimensional.

Por último, podemos comparar los resultados obtenidos con unos experimentales fijándonos en las curvas de rotación de las estrellas de bosones y de las galaxias, respectivamente. Las de las galaxias las tomaremos de datos experimentales [96, 97], teniendo que calcular solamente la curva de rotación, v_φ , de los objetos de estudio. Para nuestra métrica (2), es [23, 80]:

$$v_\varphi(r)^2 = r\alpha\partial_r\alpha. \quad (25)$$

Como la mayoría de la masa se encuentra localizada en una región del espacio-tiempo, fuera de la misma disminuirá la velocidad de rotación de manera proporcional a $1/\sqrt{r}$, verificando $v_\varphi(r > R_{0.9}) \approx \sqrt{M_{0.9}/r}$ [98].

3 Marco numérico

3.1. Método de diferencias finitas

Para resolver numéricamente las ecuaciones planteadas en la sección anterior seguiremos de cerca la labor realizada en [94], generalizándolo a nuestro caso tal y como se hizo en [80]. Usaremos el método de diferencias finitas [99], el cual se basa en la discretización del espacio-tiempo³. Para llevar a cabo esta discretización, expandiremos todas las funciones en series de Taylor en torno a los puntos de estudio, hasta un cierto orden de precisión. Dada la función $f(x)$, dicha expansión en torno a un punto x_r viene dada por:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_r)}{n!} (x - x_r)^n. \quad (26)$$

En nuestro trabajo limitaremos los desarrollos hasta segundo orden para el espacio, y a primer orden para el tiempo. Como veremos, los resultados obtenidos serán bastantes buenos y consistentes, descritos con expresiones sencillas.

Para evitar la singularidad presente en $r = 0$ en las ecuaciones (15) y (16), incluiremos un “punto fantasma” $r_0 = -\delta r/2$, con δr un espaciado suficientemente pequeño. A partir de dicho punto crearemos el resto de la malla espacial, teniendo cada punto la coordenada radial $r_j = (j - 1/2)\delta r$, siendo j un índice que corre desde 0 hasta un valor dado. Por otro lado, para la discretización temporal crearemos una malla similar. Comenzará en $t = 0$ con los datos iniciales de los campos, y en los tiempos superiores los puntos tendrán la forma $t_i = i \cdot \delta t$, con $i = 1, 2, 3, \dots$ y δt un intervalo temporal suficientemente pequeño.

Para resolver las ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO) de primer orden que se nos presentan en el sistema de ecuaciones de Einstein-Klein-Gordon (12), (13), (14), (15) y (16), necesitaremos obtener expresiones discretizadas de las derivadas espaciales y temporales de primer orden. Para la discretización espacial, si tenemos el valor de una función concreta en un punto dado, $f(r_j)$, en los puntos más cercanos hasta segundo orden será:

$$f(r_{j-1}) = f(r_j) + (r_{j-1} - r_j) \partial_r f(r_j) + \frac{(r_{j-1} - r_j)^2}{2!} \partial_r^2 f(r_j), \quad (27)$$

$$f(r_{j+1}) = f(r_j) + (r_{j+1} - r_j) \partial_r f(r_j) + \frac{(r_{j+1} - r_j)^2}{2!} \partial_r^2 f(r_j). \quad (28)$$

Por ende, la expresión de la primera derivada radial se obtiene sumando las ecuaciones (27) y (28):

$$\partial_r f(r_j) = \frac{f(r_{j+1}) - f(r_{j-1}))}{r_{j+1} - r_{j-1}} + O(\delta r^2) = \frac{f(r_{j+1}) - f(r_{j-1}))}{2\delta r} + O(\delta r^2), \quad (29)$$

con $O(\delta r^2)$ un error inducido de segundo orden. Para evaluar la derivada radial en un punto cualquiera, es necesario saber el valor de la función en los dos puntos vecinos, a la

³Numéricamente no es posible disponer de un continuo perfecto. Solo podemos plantear un número finito de puntos en nuestro código.

derecha y a la izquierda. Esto es un problema, ya que en el punto r_{final} no disponemos de un punto $r_{final+1}$ en nuestra malla. Para evaluar la derivada radial en dicho punto final de la malla tendremos que recurrir a alguna otra fórmula⁴. Con esto en mente, usaremos los dos puntos más cercanos hacia la izquierda, y expandiremos las funciones asociadas hasta segundo orden en torno a r_{final} :

$$f(r_{final-1}) = f(r_{final}) - \delta r \cdot \partial_r f(r_{final}) + \frac{(-\delta r)^2}{2} \partial_r^2 f(r_{final}), \quad (30)$$

$$f(r_{final-2}) = f(r_{final}) - 2\delta \cdot r \partial_r f(r_{final}) + \frac{(-2\delta r)^2}{2} \partial_r^2 f(r_{final}). \quad (31)$$

A partir de la combinación $f(r_{final-2}) - 4f(r_{final-1}) + 3f(r_{final})$ podemos extraer la expresión de la derivada en el punto externo:

$$\partial_r f(r_{final}) = \frac{f(r_{final-2}) - 4f(r_{final-1}) + 3f(r_{final})}{2\delta r} + O(\delta r^2). \quad (32)$$

Por otro lado, y razonando de manera similar, para la primera derivada temporal a primer orden en torno a t_i se puede obtener la expresión:

$$\partial_t f(t_i) = \frac{f(t_{i+1}) - f(t_i)}{\delta t}. \quad (33)$$

3.2. Método de Runge-Kutta

Para resolver las ecuaciones diferenciales de primer orden de la forma $\partial_x f = S$, usaremos los métodos iterativos de Runge-Kutta de orden 2 y 3, con $x = r$ y $x = t$, respectivamente [86, 93]. Estos métodos nos permiten calcular de manera sencilla $f(x_{i+1})$ con el valor de la función y la fuente en x_i . Para comenzar con el proceso necesitaremos la función en el instante inicial si es una derivada temporal, o la función en uno de los bordes espaciales si es una derivada espacial.

Por un lado, con el método de Runge-Kutta de orden 2 podemos obtener el valor de función en el punto contiguo, $f(x_{i+1})$. Definamos una función intermedia $f^*(x_i)$; δx como la distancia entre el punto x_i y x_{i+1} ; y $S^*(x_{i+1})$ a la fuente calculada con la función $f^*(x_i)$ y evaluada en el punto x_i . Con ellas, $f(x_{i+1})$ vendrá dada por:

$$f^*(x_i) = f(x_i) + \delta x \cdot S(x_i), \quad (34)$$

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + \frac{1}{2} \delta x \cdot (S(x_i) + S^*(x_{i+1})). \quad (35)$$

Por otro lado, para el método de Runge-Kutta de orden 3, definimos otra función intermedia, $f^{**}(x_i)$, y otra fuente $S^{**}(x_i)$ calculada con la función $f^{**}(x_i)$. Por ende, $f(x_{i+1})$ con este método vendrá dada ahora por:

$$f^*(x_i) = f(x_i) + \delta x \cdot S(x_i), \quad (36)$$

$$f^{**}(x_i) = \frac{3}{4} f(x_i) + \frac{1}{4} f^*(x_i) + \frac{\delta x}{4} S^*(x_i), \quad (37)$$

$$f(x_{i+1}) = \frac{1}{3} f(x_i) + \frac{2}{3} f^{**}(x_i) + \frac{2}{3} \delta x \cdot S^{**}(x_i), \quad (38)$$

⁴Como veremos, al comienzo de la malla espacial, en r_0 , no tendremos este problema.

3.3. Sistema de ecuaciones de Einstein-Klein-Gordon

Tal y como hemos explicado en la Sección 2, para simplificar el sistema de ecuaciones de Einstein-Klein-Gordon trabajamos con las variables $\psi_i = \partial_r \phi_i$ y $\Pi_i = a \partial_t \phi_i / \alpha$ (donde el subíndice i hace referencia a las partes reales e imaginarias de las variables que definimos anteriormente, de $\Pi^{(n)}$ y $\psi^{(n)}$). Para hacer el cálculo menos tedioso, es conveniente reescalar también todas las cantidades con dimensiones: $r \rightarrow r/m$, $t \rightarrow t/m$, $\phi_i \rightarrow \phi_i / \sqrt{k_0}$ y $\Lambda \rightarrow \Lambda \cdot m^2$. El reescalamiento de la masa es equivalente, a efectos prácticos, a tomar $m = 1$ en las ecuaciones que obtengamos. Como desaparece la dependencia con la masa, no indicaremos en ningún momento que objeto estamos describiendo, pudiendo ser uno galáctico o estelar, con las mismas propiedades y descripción. Indicaríamos que tipo de objeto sería una vez recuperáramos las variables dimensionales.

En cada instante de tiempo resolveremos las ecuaciones (15) y (16) para obtener los valores de $a(r, t)$ y $\alpha(r, t)$, verificando que (41) adopta valores compatibles con cero dentro del error numérico. Como hemos dividido nuestros campos en sus partes reales e imaginarias en (19) y (20), las ecuaciones de Einstein se modificarán ligeramente:

$$\partial_r a = \frac{a}{2} \left[-\frac{a^2 - 1}{r} + \frac{r}{2} \left(\sum_{l=1}^{2P} (\psi_l^2 + \Pi_l^2) + a^2 V \right) \right] \quad (39)$$

$$\partial_r \alpha = \frac{\alpha}{2} \left[\frac{a^2 - 1}{r} + \frac{r}{2} \left(\sum_{l=1}^{2P} (\psi_l^2 + \Pi_l^2) - a^2 V \right) \right] \quad (40)$$

$$\gamma = \partial_t a - \frac{\alpha r}{2} \sum_{l=1}^{2P} \Pi_l \psi_l = 0. \quad (41)$$

En particular, ahora el sumatorio va hasta $2P$ debido a que hemos dividido cada variable, por ejemplo $\Pi^{(1)}$, en Π_1 la parte real y Π_2 la imaginaria, teniéndose el doble de variables. Hemos definido la ecuación (41) con γ por futura simplicidad.

Las ecuaciones de evolución para los campos serán, al dividir en sus partes reales e imaginarias las ecuaciones (12), (13) y (14) [93, 100]:

$$\partial_t \phi_i = \frac{\alpha}{a} \Pi_i, \quad (42)$$

$$\partial_t \psi_i = \partial_r \left(\frac{\alpha}{a} \Pi_i \right), \quad (43)$$

$$\partial_t \Pi_i = 3 \frac{\partial}{\partial r^3} \left(\frac{r^2 \alpha \psi_i}{a} \right) - a \alpha \phi_i \frac{dV}{d|\phi^{(J)}|^2}, \quad (44)$$

con $i = 1, 2, 3, 4$, y $J = 1, 2$, tal que en la última ecuación, $i = 1, 2$ están asociados a $J = 1$, e $i = 3, 4$ a $J = 2$. En el segundo sumando del primer término de la ecuación (14) se ha reescrito la derivada para evitar la singularidad que aparecía en $r = 0$, adoptando la forma que se aprecia en (44).

3.4. Instante inicial

En primer lugar, tenemos que resolver las ecuaciones (39) y (40) en el instante inicial. Se trata de ecuaciones diferenciales acopladas de primer orden, por lo que necesitaremos

una condición de contorno para cada variable, que será la misma para toda la evolución temporal.

Asumiremos un perfil gaussiano inicial para nuestros campos escalares, conocido en la bibliografía como “nube bosónica”. Concretamente, en el instante inicial los campos serán:

$$\phi^{(1)}(r, t = 0) = (Ce^{-r^2/\sigma^2})e^{-i\omega t}|_{t=0} = Ce^{-r^2/\sigma^2}, \quad (45)$$

$$\phi^{(2)}(r, t = 0) = (De^{-r^2/\sigma_2^2})e^{-i\omega t}|_{t=0} = (C \cdot \eta)e^{-r^2/(\sigma \cdot \eta_2)^2}, \quad (46)$$

siendo C y $D = C \cdot \eta$ las amplitudes de las gaussianas, y σ y $\sigma_2 = \sigma \cdot \eta_2$ las anchuras de las mismas. Por conveniencia numérica hemos introducido η y η_2 , que nos relacionan las amplitudes y anchuras de ambos campos escalares, respectivamente. Comparando las ecuaciones (45) y (46) con (19) y (20), en $t = 0$ tendremos sólo componentes reales de nuestros campos complejos. De igual manera, como $\psi_i = \partial_r \phi_i$ están asociadas a las partes reales e imaginarias, tampoco tendrán partes imaginarias en $t = 0$. La contribución a la parte imaginaria en el instante inicial viene de $\Pi_i = a\partial_t \phi_i / \alpha$, cuyos valores para las partes reales e imaginarias para $\phi^{(1)}$ (análogo para $\phi^{(2)}$) serían:

$$\Pi_1(r, t = 0) = a\partial_t(\phi_0(r) \cos(-\omega t)) / \alpha|_{t=0} = 0, \quad (47)$$

$$\Pi_2(r, t = 0) = a\partial_t(\phi_0(r) \sin(-\omega t)) / \alpha|_{t=0} = -a\omega\phi_0(r) / \alpha. \quad (48)$$

Con todas estas variables en el instante inicial, podremos proceder a la resolución de las ecuaciones (39) y (40) una vez tengamos las condiciones de contorno.

Fijémonos que al sustituir la ecuación (48) en (39) obtendríamos una EDO de primer orden acoplada con α , lo que dificultaría mucho la resolución del problema. Para lidiar con este problema optamos por partir de un espacio-tiempo de Minkowski con $a = \alpha = 1$ [101], simplificando la expresión (48) a $\Pi_2(r, t = 0) = -\omega\phi_0(r)$. Con esta simplificación podemos resolver las ecuaciones de interés (39) y (40) como se explicará en los siguientes párrafos. Una vez obtengamos los valores de a y α , sustituiremos en (48), obteniendo un nuevo valor de $\Pi_2(r, t = 0)$, con el que podemos volver a calcular a y α , y así continuamente en un proceso iterativo. Tras un número de iteraciones, obtendremos el verdadero valor de $\Pi_2(r, t = 0)$, junto a $a(r, t = 0)$ y $\alpha(r, t = 0)$.

Gracias a como hemos definido la malla espacial, podemos imponer las condiciones de contorno, $\phi_i(r_0) = \phi_i(r_1)$, $\psi_i(r_0) = -\psi_i(r_1)$ y $\Pi_i(r_0) = \Pi_i(r_1)$. Se usarán en cada instante de tiempo a la hora de resolver las ecuaciones (42), (43) y (44).

Asumiremos planitud local espacial en el origen para obtener una solución regular, siendo la condición $a(r_0) = 1$ para la ecuación (39). Tomaremos el borde de la simulación lo suficientemente lejos como para encontrarnos en el vacío lejos de la fuente, teniendo ahí el espacio-tiempo de Schwarzschild [102]. Esto traerá consigo que en la frontera se verifique la condición $\alpha(r_{final}) = 1/a(r_{final})$ para la ecuación (40). Con ambas condiciones, resolveremos las ecuaciones (39) y (40) con un método de Runge-Kutta de segundo orden [93], integrando desde r_0 hasta la frontera y del dominio externo hasta r_0 , respectivamente. Podemos resolver la primera de ellas directamente porque es una EDO de primer orden en a . Una vez tengamos $a(r)$, podemos sustituirla en la segunda ecuación, que será simplemente otra EDO de primer orden, esta vez para α .

Destacar que, por las definiciones tomadas para los campos en las ecuaciones (19), (20), (45) y (46), η y η' sólo estarán relacionadas de la forma $\eta' = \eta^2$ en el caso en el que $\eta_2 = \sigma_2/\sigma = 1$.

Con todo lo anterior mencionado, ya tenemos todas las variables de interés en el instante inicial para proceder a la evolución temporal.

3.5. Evolución temporal

Con los datos iniciales ya calculados, podemos proceder a la evolución de las ecuaciones (42), (43) y (44), usando ahora el método de Runge-Kutta de tercer orden.

Un problema con el que nos encontramos ahora es que, al aplicar el método de diferencias finitas, necesitamos en cada instante de tiempo los valores de las funciones en las fronteras del dominio espacial, i.e. en el punto fantasma r_0 y en la frontera externa r_{final} , que no se pueden obtener directamente con las ecuaciones de evolución al contener derivadas. Como ya comentamos anteriormente, en el punto fantasma aplicaremos las condiciones de paridad para cada instante de tiempo, relacionando las variables en r_0 con aquellas que obtengamos resolviendo las ecuaciones en r_1 .

Por otro lado, en la frontera externa tendremos que recurrir a suposiciones para las ecuaciones (43) y (44). La ecuación (42) sí se puede resolver hasta la frontera externa sin problemas porque no hay que usar diferencias finitas en el lado derecho de su ecuación. Como en la frontera externa se verifica $\alpha(r_{final}) = 1/a(r_{final})$, podremos asumir en dicho punto que Π_i se comporta como una onda saliente [94] de la forma $\Pi_i(r_{final}, t) = u(r_{final} - t)/r$, con u una función arbitraria. La ecuación diferencial que satisface esta onda sería

$$\partial_r \Pi_i(r_{final}, t) + \partial_t \Pi_i(r_{final}, t) + \Pi_i(r_{final}, t)/r = 0, \quad (49)$$

que sí podemos resolver en la frontera para cualquier instante de tiempo, ya que solo depende de los valores de la variable en el instante anterior. El primer término lo podríamos obtener usando la ecuación (32), así que del segundo podemos despejar nuestra incógnita $\Pi_i(r_{final}, t)$. Al describir a $\Pi_i(r_{final}, t)$ como una onda saliente en la frontera, relacionada con $\phi_i(r_{final}, t)$ por una derivada temporal, significa que también $\psi_i(r_{final}, t) = \partial_r \phi_i(r_{final}, t)$ se comportará como tal. Tendrá por ende la siguiente condición en el borde externo de la malla espacial en cada instante de tiempo:

$$\psi_i(r_{final}, t) = -\Pi_i(r_{final}, t) - \phi_i(r_{final}, t)/r, \quad (50)$$

dependiendo de dos variables que ya se han calculado.

3.6. Campos de distinta masa

Por último, simularemos dos campos escalares complejos con distintas masas de la partícula bosónica asociadas, $m^{(1)}$ y $m^{(2)}$. Las ecuaciones serán levemente distintas porque vamos a hacer el reescalado de las ecuaciones en función de la masa total $m_T = m^{(1)} + m^{(2)}$, de tal manera que $\phi_i \rightarrow \phi_i/\sqrt{k_0}$, $r \rightarrow r/m_T$, $t \rightarrow t/m_T$ y $\Lambda \rightarrow \Lambda \cdot m_T^2$.

Teniendo este nuevo reescalado en mente, reescribiremos el potencial (4) de una manera que nos convenga más, con $m^{(1)} \neq m^{(2)}$ y $\Lambda^{(1)} = \Lambda^{(2)} = \Lambda$:

$$V = m_T^2 \left[\left(\frac{m^{(1)}}{m_T} \right)^2 |\phi^{(1)}|^2 + \left(\frac{m^{(2)}}{m_T} \right)^2 |\phi^{(2)}|^2 \right] + \Lambda (|\phi^{(1)}|^4 + |\phi^{(2)}|^4). \quad (51)$$

Al final, la ecuación anterior dependerá de la variable $\eta_3 = m^{(2)}/m^{(1)}$, que iremos variando cuando busquemos la dependencia de nuestras estrellas de bosones a las distintas masas de los campos escalares complejos.

Sólo usaremos este reescalado en el apartado correspondiente a campos de distinta masa.

4 Simulaciones y resultados

4.1. Convergencia

En este apartado comprobamos la convergencia de nuestro código antes de comenzar con las simulaciones de las estrellas de bosones multi-estado. Debido a que hemos usado un método de diferencias finitas, y hemos truncado la expansión en series de Taylor, las ecuaciones no serán exactas, al menos hasta cierto punto de precisión dado por la resolución. Para estudiar la convergencia de nuestro código, probaremos que la ecuación (41) se va verificando en todos los tiempos obteniendo valores numéricos compatibles con el cero. Según vayamos tomando una mayor resolución de las simulaciones, traducido en unos menores valores de δr y δt , obtendremos valores más compatibles con el cero para la ecuación (41) con un tasa dada por el orden de precisión de nuestro algoritmo.

Los valores de las resoluciones son $\delta r = 0.1$, con $r_{max} = 1000$, y $\delta t = 0.025$, con $t_{max} = 100$ en este apartado. En los siguientes apartados, se tomarán $t_{max} = 9000$, manteniendo $\delta t = 0.025$ y la resolución espacial.

Definimos una “configuración” como una estrella multi-campo con unos parámetros específicos. Se ha tomado una configuración $c_0 : \{C = 0.01, \eta = 0.02, \sigma = 5.35, \eta_2 = 2, \Lambda = 200\}$ para calcular la convergencia de nuestro código, véase la Fig. 6. En la Fig. 6a, hemos calculado la norma L2 del lado izquierdo de la ecuación (41), definida como $L2(\gamma) = \sqrt{\sum_{i=q}^{N_p} x_i^2 / N_p}$, para γ una lista de elementos, y N_p el número de puntos de la malla que hayamos tomado para la resolución espacial. Se puede apreciar en ella que menores valores de δr y δt implican menores valores de la norma, siendo en el límite continuo exactamente cero. De hecho, para $\delta r = 0.1$ y $\delta t = 0.025$ ya se obtienen valores del orden de 10^{-10} , compatibles con el cero como se esperaba. Esto nos afirma que una mayor resolución nos verifique la igualdad de la ecuación (41) de manera más precisa.

El comportamiento recién explicado se debe dar de manera convergente, de una manera precisa. La convergencia Q que se quiere calcular viene dada por [93]:

$$Q = \frac{L2(\gamma)_{\delta r, \delta t} - L2(\gamma)_{\delta r/2, \delta t/2}}{L2(\gamma)_{\delta r/2, \delta t/2} - L2(\gamma)_{\delta r/4, \delta t/4}}. \quad (52)$$

Hemos definido en el subíndice la resolución con la que calculamos la norma L2 de la ecuación (41). Como hemos desarrollado nuestras funciones usando series de Taylor de segundo orden, podemos predecir el valor que adoptará la convergencia. Usando $L2(\gamma)_0$ la solución exacta, $E(\gamma)$ una función error, y $O(\delta x^3)$ un error inducido de tercer orden donde $x = t, r$, podemos reescribir la ecuación (52):

$$Q = \frac{(L2(\gamma)_0 + E(\gamma) \cdot \delta x^2) - \left(L2(\gamma)_0 + E(\gamma) \cdot \left(\frac{\delta x^2}{2^2}\right)\right)}{\left(L2(\gamma)_0 + E(\gamma) \cdot \left(\frac{\delta x^2}{2^2}\right)\right) - \left(L2(\gamma)_0 + E(\gamma) \cdot \left(\frac{\delta x^2}{4^2}\right)\right)} + O(\delta x^3) = 4 + O(\delta x^3). \quad (53)$$

El valor experimental de la convergencia se observa en Fig. 6b para la configuración c_0 . Conforme avanza el tiempo, la convergencia entre las resoluciones se estabiliza en torno

al 4. En nuestra simulación para la configuración tomada, converge a 3.8. Dicho valor coincide con el teórico al tener en cuenta el error introducido por las correcciones de tercer orden.

Se presenta en la Fig. 6c algo análogo a lo que ya se comentó en la Fig. 6a. La diferencia es que hemos multiplicado las ecuaciones de ligadura por su correspondiente factor de convergencia. Es decir, respecto a δr y δt , el factor de convergencia de $\delta r/2$ y $\delta t/2$ es 4, mientras que para $\delta r/4$ y $\delta t/4$ es 4^2 . Con esto en mente, se han multiplicado las ecuaciones (41) obtenidas con $\delta r/2$ y $\delta t/2$ por 4, y las obtenidas con $\delta r/4$ y $\delta t/4$ por 4^2 . Así, coinciden las 3 curvas casi exactamente, siendo otra evidencia clara del valor obtenido para nuestro factor de convergencia con un valor en torno al 4.

$Q = 4$ trae consigo la ventaja de asegurarnos que nuestro código funciona con estas resoluciones, $\delta r = 0.1$ y $\delta t = 0.025$, para cualquier configuración. Tendremos valores más compatibles con el cero de la ecuación (41) para menores valores de δr y δt , a cambio de un mayor coste computacional. Para hacernos una idea del tiempo de cómputo, las

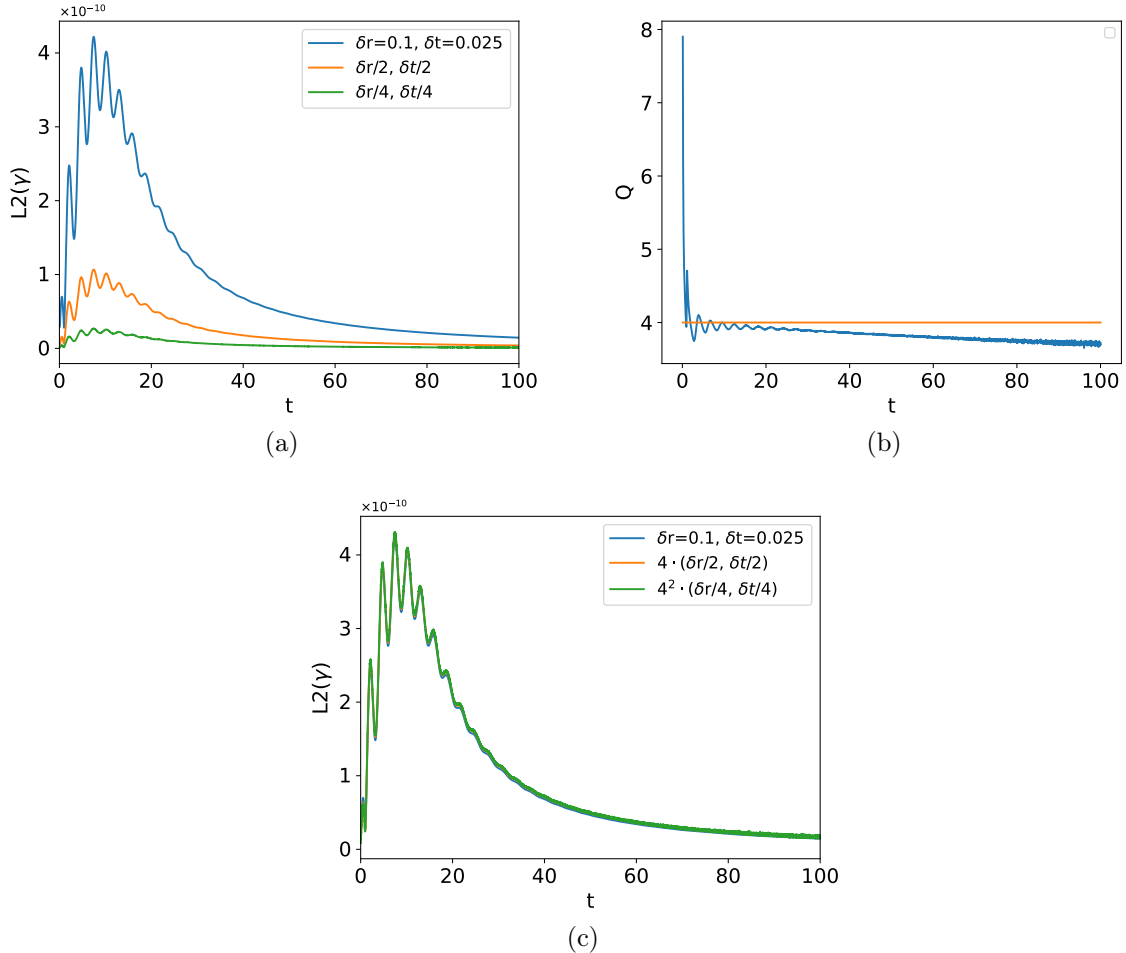


Figura 6: Para la configuración $c_0 : \{C = 0.01, \eta = 0.02, \sigma = 5.35, \eta_2 = 2, \Lambda = 200\}$ se ha representado en 6a el valor numérico de la norma L2 del lado izquierdo de la ecuación (41) para distintas resoluciones. De arriba hacia abajo, $\delta r = 0.1$ y $\delta t = 0.025$, $\delta r/2$ y $\delta t/2$, y $\delta r/4$ y $\delta t/4$. 6b se representa el perfil temporal de la convergencia dada por la ecuación (52). 6c se representa algo análogo a 6a, donde se han multiplicado las curvas por el factor de convergencia correspondiente.

simulaciones realizadas anteriormente para $t_{max} = 1000$ se realizaron en 7.5 horas para $\delta r/4$ y $\delta t/4$, mientras que si se utilizaba $\delta r/2$ y $\delta t/2$ tardaba 2 horas. El mejor escenario es aquel con δr y δt , con un tiempo de simulación de 30 minutos.

Una vez tenemos un código que efectivamente converge, podemos pasar a la simulación de las distintas configuraciones. Tomaremos distintos parámetros para ver la formación y estabilidad de las estrellas de bosones multi-estado. Se usará la resolución de $\delta r = 0.1$ y $\delta t = 0.025$, que como se vio en la Fig. 6, converge se encuentra en el rango de convergencia y da valores suficientemente pequeños para la ecuación (41).

4.2. Dependencia con las variables

Simulemos distintas configuraciones a partir de las presentadas en el Cuadro 1. Haremos un estudio sistemático variando los parámetros η , η_2 , η_3 y Λ en búsqueda de comportamientos interesantes y/o insólitos. Antes de ello, veamos como de sensible es nuestra simulación a los valores de C , y por qué no nos centraremos en el valor de ω . En las próximas simulaciones, representaremos los módulos de los campos escalares complejos que, según las ecuaciones (19) y (20), vendrán dados por $|\phi^{(1)}| = \sqrt{\phi_1^2 + \phi_2^2}$ y $|\phi^{(2)}| = \sqrt{\phi_3^2 + \phi_4^2}$. Esto nos permite determinar el número de nodos de cada campo y, por lo tanto, identificar su estado energético. En el Cuadro 1 indicamos en qué estados se encuentran $|\phi^{(1)}|$ y $|\phi^{(2)}|$. Sobre la notación que seguimos, aclarar que “gs” está asociado al estado fundamental (del inglés, ground state), “1 ex” al primer estado excitado, “2 ex” al segundo, y “complejo” a un estado con mayor número de nodos. A no ser que se indique lo contrario, se trata de configuraciones estables por lo menos hasta el final de la simulación (el objeto resultante ni se dispersará ni colapsará a un agujero negro).

Elegimos $\sigma = 40$, $C = 0.01$ y $\omega = 1$ para todas las simulaciones presentadas a lo largo el trabajo, a no ser que se indique lo contrario.

η	η_2	Λ	Resultado: $ \phi^{(1)} $ y $ \phi^{(2)} $	$M_{0.9}$	$R_{0.9}$	$C_{0.9}$	η'
0.01	2	200	gs+1 ex	0.454	83.55	0.0109	$4.36 \cdot 10^{-4}$
0.2	5	200	gs+complejo->gs+1 ex	2.683	380.05	0.0141	11.72

Cuadro 1: Parámetros tomados para distintas configuraciones iniciales del sistema de ecuaciones de Einstein-Klein-Gordon (39), (40), (42), (43) y (44). Se muestran, de izquierda a derecha, η , η_2 , Λ , los estados en los que se encuentren los dos campos escalares complejos de nuestra estrella de bosones, $M_{0.9}$, $R_{0.9}$, $C_{0.9}$ y el cociente entre el número de partículas asociadas a cada campo, η' . Lo mostrado en la tabla es el estado de la estrella multi-estado al final de nuestra simulación, en $t = 9000$.

4.2.1. Frecuencia inicial ω

No hemos realizado un estudio exhaustivo en torno a el valor inicial de ω por falta de tiempo. Tomar $\omega \neq 1$ hace que las amplitudes de las partes reales e imaginarias de ϕ , ψ y Π no coincidan entre sí. Esto lo podemos apreciar via ecuaciones (19) y (20).

Sea la configuración $c_1 : \{C = 0.01, \eta = 0.9, \eta_2 = 1, \Lambda = 200\}$, se han tomado $\omega = 0.8, 0.9$ y 0.98 , véase la Fig. 7. Teniendo en cuenta que $\alpha(r, t) = 1$ está asociado al espacio-tiempo de Minkowski en el que se describe el vacío, cuánto menor sea el valor del

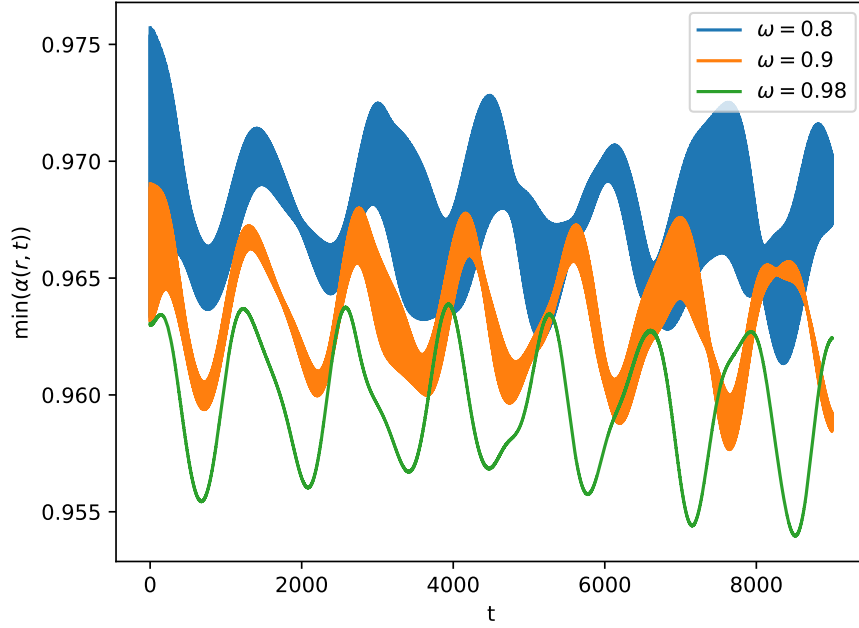


Figura 7: A partir de $c_1 : \{C = 0.01, \eta = 0.9, \eta_2 = 1, \Lambda = 200\}$, se han tomado $\omega = 0.8$, $\omega = 0.9$ y $\omega = 0.98$ para representar el perfil temporal del $\min(\alpha)$.

mínimo de α , más se distorsionará el espacio-tiempo debido al objeto de estudio, siendo más masivo en general⁵. Además presentan curvas más precisas por la menor diferencia de desfase presente entre las partes reales e imaginarias de los campos. Este efecto se aprecia en el instante inicial explícitamente en la ecuación (48), siendo claro el desfase que se introduce en la componente imaginaria de $\Pi^{(n)}$, $n = 1, 2$.

Como queremos un espacio-tiempo estático, las amplitudes de las partes reales e imaginarias deben ser iguales para verificar el ansatz armónico $\phi^2 = \phi_0^2 \cos^2(\omega t) + \phi_0^2 \sin^2(\omega t) = \phi_0^2$. Si $\omega \neq 1$, $\phi^2 = \phi_1^2 \cos^2(\omega t) + \phi_2^2 \sin^2(\omega t)$ con $\phi_1 \neq \phi_2$ y ϕ una función del tiempo.

Nos limitaremos al caso con $\omega = 1$ durante todo el trabajo. Con él se nos simplifican las ecuaciones del sistema, junto a la ventaja de no introducir un desfase que podría conllevar un mayor coste computacional. Las configuraciones asociadas a $\omega = 1$ serán más masivas que las asociadas a $\omega < 1$ para los mismos valores de los demás parámetros, y por ende más interesantes por razones que comentaremos en los siguientes apartados⁶.

4.2.2. Valor central inicial del campo C

En esta sección veremos como de sensible son nuestras configuraciones al valor central inicial del campo, C . Para ello, para la configuración $c_2 : \{\eta = 0.05, \eta_2 = 1, \Lambda = 200\}$, se van a tomar tres valores diferentes: $C = 0.001$, $C = 0.01$ y $C = 0.028$. Al tomar $C = 0.001$, no se llega a formar un objeto estable en la formación dinámica, tal y como

⁵Veremos que en función de Λ esto no es cierto, se explicará a continuación. Para el resto de variables, menor valor del $\min(\alpha)$, mayor masa tendrá la estrella de bosones.

⁶Las configuraciones podrán ser más compactas, y por ende tener sus campos escalares complejos en estados de mayor orden de excitación respecto a estrellas análogas menos compactas.

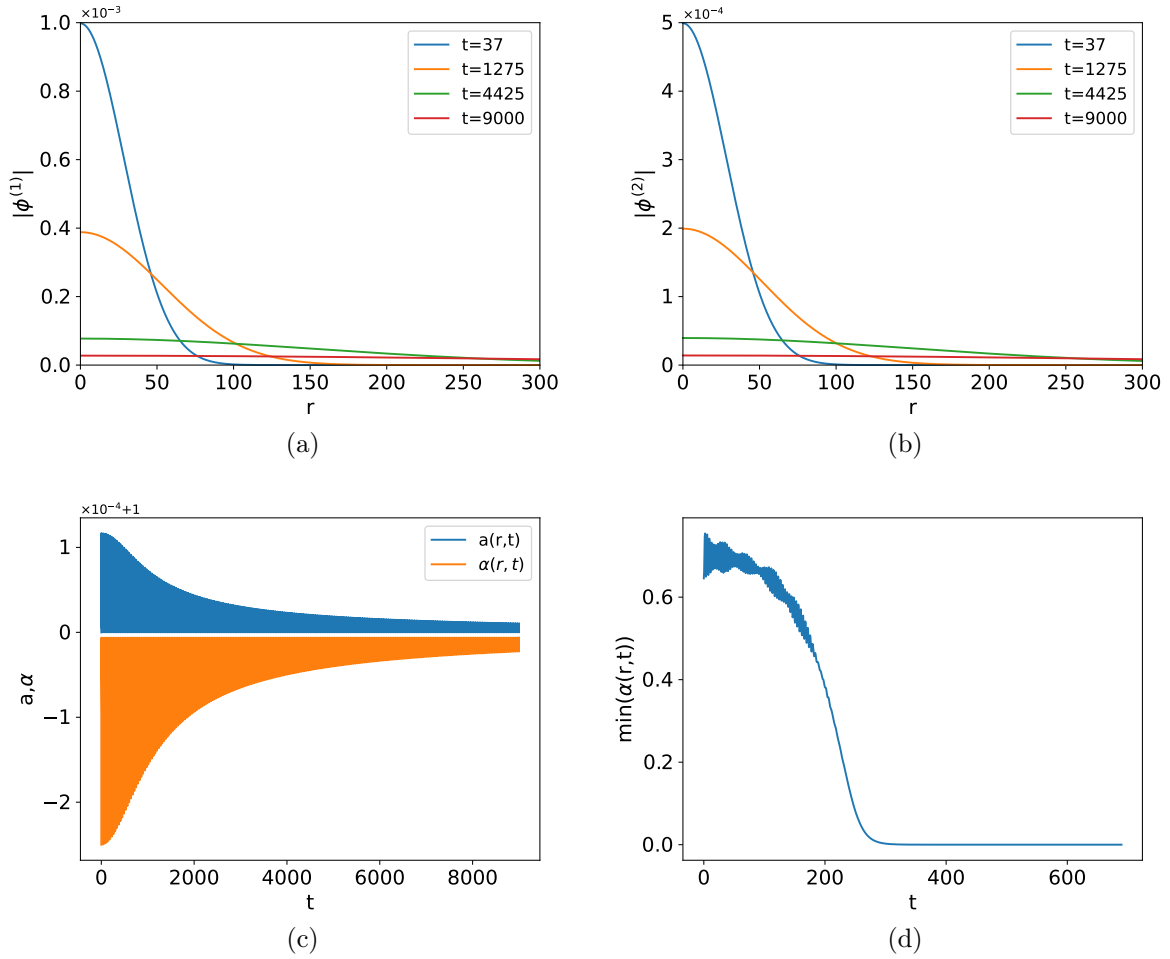


Figura 8: Para la configuración $c_2 : \{\eta = 0.5, \eta_2 = 1, \Lambda = 200\}$ con $C = 0.001$, en 8a se representa el perfil radial de $|\phi^{(1)}|$, y en 8b el de $|\phi^{(2)}|$, ambos evaluados en distintos tiempos. En 8c se representan para la misma configuración todos los valores de $\alpha(r)$ y $a(r)$ en cada instante de tiempo. Véase en la parte superior del eje "y" que hay un +1. En 8d se observa el mínimo valor de α para la configuración c_2 con $C = 0.028$.

podemos ver en las Figs. 8a y 8b. Con el paso del tiempo, los valores centrales de los campos van disminuyendo en el origen, mientras se va emitiendo campo escalar hacia largas distancias. El análogo astrofísico conocido podría ser una supernova termonuclear que no deja un remanente en el interior y donde se emite toda la materia hacia el exterior [103]. Ambos campos escalares complejos adoptan valores tan pequeños, $|\phi^{(1)}| \sim 10^{-3}$ y $|\phi^{(2)}| \sim 10^{-4}$ que no son capaces de estabilizarse bajo su propia gravedad, liberándose mediante el enfriamiento gravitacional todo el campo escalar que se concentraba en torno a $r = 0$. Esto impide la formación de una estrella de bosones estable. En la Fig. 8c se presentan todos los valores espaciales de $a(r,t)$ y $\alpha(r,t)$ en cada instante de tiempo, tendiendo a 1 con el paso del tiempo hacia la métrica de Minkowski. Se muestra como la región estudiada del espacio-tiempo se va vaciando de materia escalar, disminuyendo su densidad.

Por otro lado, si tomamos $C = 0.028$, la evolución cambia. Su comportamiento se muestra en la Fig. 8d. $\alpha(r, t > 300) = 0$ es un indicador del colapso de la métrica a un agujero negro. Es un proceso análogo al que se tiene cuando una estrella suficientemente masiva no es capaz de sustentar su propia atracción gravitatoria. Al añadir unos campos

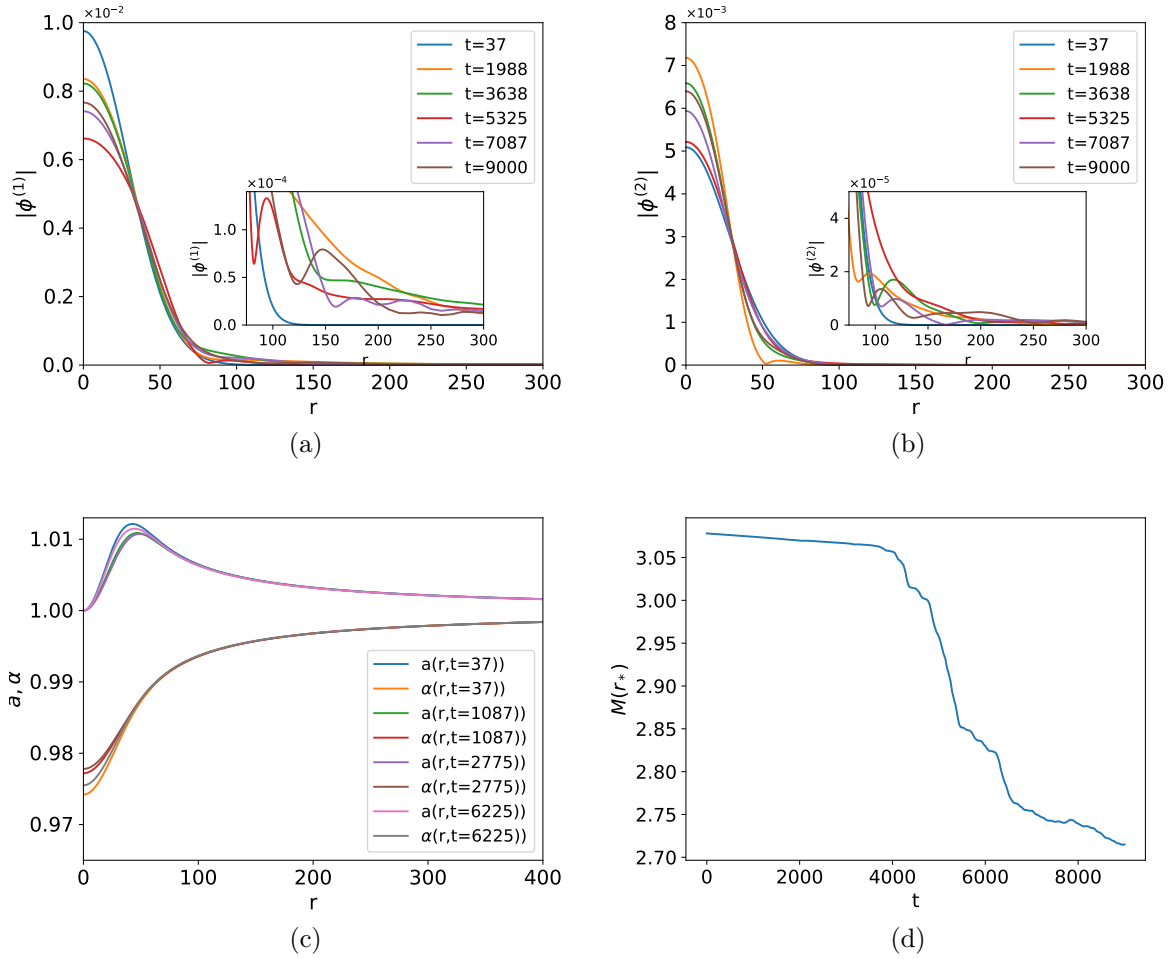


Figura 9: Para la configuración c_2 con $C = 0.01$, en 9a se representa el perfil radial de $|\phi^{(1)}|$, y en 9b el de $|\phi^{(2)}|$, ambos evaluados en distintos tiempos. En 9c se representan los perfiles radiales de α y a evaluados en distintos tiempos. En 9d se muestra el perfil temporal de la masa contenida en una esfera de radio $r_* = 575.05$ para la configuración con $\eta = 0.2$, $\eta_2 = 5$ y $\Lambda = 200$.

escalares complejos suficientemente grandes, las dispersiones cuántica y la debida a la repulsión causada por el término Λ no serán suficientes para evitar el colapso.

Acabamos de ver dos escenarios en los que no se forma en una evolución dinámica una estrella multi-campo. Para la formación de un objeto estable es muy importante el enfriamiento gravitacional, encargado de expulsar la cantidad de campo escalar necesaria para que la estrella de bosones no colapse a un agujero negro al transformar la energía potencial inicial en energía cinética. Este mecanismo es esencial para llegar a estabilizar la estrella, ya que en el caso esférico no se emiten ondas gravitacionales.

Ahora, tomemos una configuración análoga a las dos anteriores con $C = 0.01$, entre la dispersión, $C = 0.001$, y el colapso, $C = 0.028$. Analizando la Fig. 9c, observamos que se obtiene una estrella de bosones estable de esta evolución, cuya métrica, para largos instantes de tiempo, se hace aproximadamente independiente del tiempo tal y como cabría esperar por el uso del ansatz armónico. De las Figs. 9a y 9b extraemos que nuestros campos, $|\phi^{(1)}|$ y $|\phi^{(2)}|$, varían conforme avanza el tiempo hasta alcanzar eventualmente un perfil aproximadamente estático. Comienzan ambos en el estado fundamental en $t = 37$, para adoptar $|\phi^{(2)}|$ un nodo en $t = 1988$. Sin embargo, este nodo se acaba eyectando por el

enfriamiento gravitacional en tiempos superiores mediante la expulsión de campo escalar. No hay que confundir este nodo temporal con uno correspondiente a un estado excitado, que perdura en el tiempo. En comparación con la estrella que se dispersaba en las Figs. 8a y 8b, hemos obtenido un objeto estable, cuyos campos escalares adoptan unos valores no nulos en una región localizada del espacio-tiempo. Esta estrella de bosones multi-campo ha logrado, gracias a la eyección de materia escalar, estabilizar ambos estados en el estado fundamental para largos tiempos.

Comentemos en mayor profundidad el enfriamiento gravitacional. Este efecto se aprecia claramente observando el perfil temporal de la masa de una estrella de bosones concreta. Del Cuadro 1 hemos tomado la configuración inferior de radio $R_{0.9} = 380.05$ (el 90 % de la masa se encuentra en una esfera de radio 380.05). Calculemos la masa total contenida en una esfera de radio $r_* = 575.05$, suficientemente lejos de la estrella de bosones, en distintos instantes de tiempo. En la Fig. 9d, disminuye la masa en esta esfera total, estabilizándose al final de la simulación. La eyección del campo escalar está relacionada con la disminución de la masa escalar. La masa disminuye bruscamente en torno a $t=5000$, instante en el cual $|\phi^{(2)}|$ pasa de estar en un estado complejo al primer estado excitado.

En función del valor del campo central que tomemos, la configuración puede colapsar a un agujero negro ($C = 0.028$ para c_2), dispersarse ($C = 0.001$), o formar una estrella multi-campo ($C = 0.01$). Nos centraremos en los próximos apartados en la formación de estrellas de bosones estables.

4.2.3. Término de auto-interacción Λ

Con este apartado comienza el estudio sistemático de las configuraciones presentadas en el Cuadro 1. Específicamente, variaremos la auto-interacción entre las partículas según el valor de Λ presente en el potencial (18), véase el Cuadro 2. $\Lambda > 0$ conlleva una repulsión entre las partículas de la estrella de bosones, análoga a la presión de degeneración presente en las estrellas de neutrones. Nos podrá evitar del colapso a un agujero negro, hasta la dispersión de la misma, teniéndose en un punto intermedio la formación de la estrella. Y $\Lambda < 0$ permite que las partículas se atraigan entre sí, pudiendo formarse un agujero negro. Para $\Lambda = 0$ no habrá interacción entre las partículas, conocido en la literatura como mini-estrella de bosones [104].

η	η_2	Λ	Resultado: $ \phi^{(1)} $ y $ \phi^{(2)} $	$M_{0.9}$	$R_{0.9}$	$C_{0.9}$	η'
0.01	2	-2	Colapso a agujero negro	-	-	-	-
0.01	2	-1	gs+gs	0.435	441.47	$1.98 \cdot 10^{-3}$	$2.05 \cdot 10^{-3}$
0.01	2	0	(gs+1ex)<->gs+gs	0.441	290.05	$3.04 \cdot 10^{-3}$	$1.61 \cdot 10^{-3}$
0.01	2	200	gs+1 ex	0.454	83.55	$1.09 \cdot 10^{-2}$	$4.36 \cdot 10^{-4}$
0.01	2	300	gs+1 ex	0.450	520.05	$1.73 \cdot 10^{-3}$	$2.35 \cdot 10^{-4}$
0.01	2	2000	Dispersión	0.226	930.35	$4.88 \cdot 10^{-4}$	$2.97 \cdot 10^{-4}$
0.2	5	0	Colapso a agujero negro.	-	-	-	-
0.2	5	200	gs+complejo->gs+1ex	2.683	380.05	$1.41 \cdot 10^{-2}$	11.72
0.2	5	2000	complejo+1 ex	2.631	210.05	$2.51 \cdot 10^{-2}$	$4.51 \cdot 10^{-1}$
0.2	5	10000	Dispersión	2.265	900.06	$5.03 \cdot 10^{-3}$	35.27

Cuadro 2: Se muestran los mismos parámetros que en el Cuadro 1. Estudio sistemático de las dos configuraciones que ahí se presentaban, variando Λ .

En el Cuadro 2 se resume el comportamiento de la estrella multi-estado que se acaba formando tras la evolución dinámica de cada configuración que se ha presentado. En la configuración superior $c_3 : \{\eta = 0.01, \eta_2 = 2\}$, varía drásticamente el comportamiento entre $\Lambda = -2$ y $\Lambda = 2000$. En el primer caso, la métrica colapsó a un agujero negro. Sin embargo, en el rango⁷ $\Lambda \in [-1, 200]$, se obtienen estrellas multi-campo estables gradualmente más compactas, con mayores valores de $C_{0.9}$ conforme mayor sea Λ . Se tiene aproximadamente la misma masa $M_{0.9}$ en menores radios $R_{0.9}$. Para mayores Λ se tienen también estrellas cuyos campos escalares complejos se encuentran en mayores estados. Es decir, para $\Lambda = -1$, ambos campos se encontraban en el estado fundamental, y ya para $\Lambda = 0$ se encuentra $\phi^{(1)}$ en el “gs” y $\phi^{(2)}$ en una superposición de estados entre el primer estado excitado y el fundamental, teniéndose a partir de aquí estrellas de bosones multi-estado. En las Figs. 10a y 10b $|\phi^{(1)}|$ se encuentra en el “gs” conforme va emitiendo campo escalar, mientras que $|\phi^{(2)}|$ alterna entre el primer estado excitado en $t = 1087$ y $t = 6225$ con el “gs” en $t = 2775$. Dicha superposición es razonable ya que nuestros condensados de Bose-Einstein son estables gracias a fundamentos cuánticos de los bosones, incluso en el

⁷Aclarar que estamos en este intervalo de valores de Λ que nosotros hemos simulado. Seguramente los límites tenga unos valores mucho más precisos.

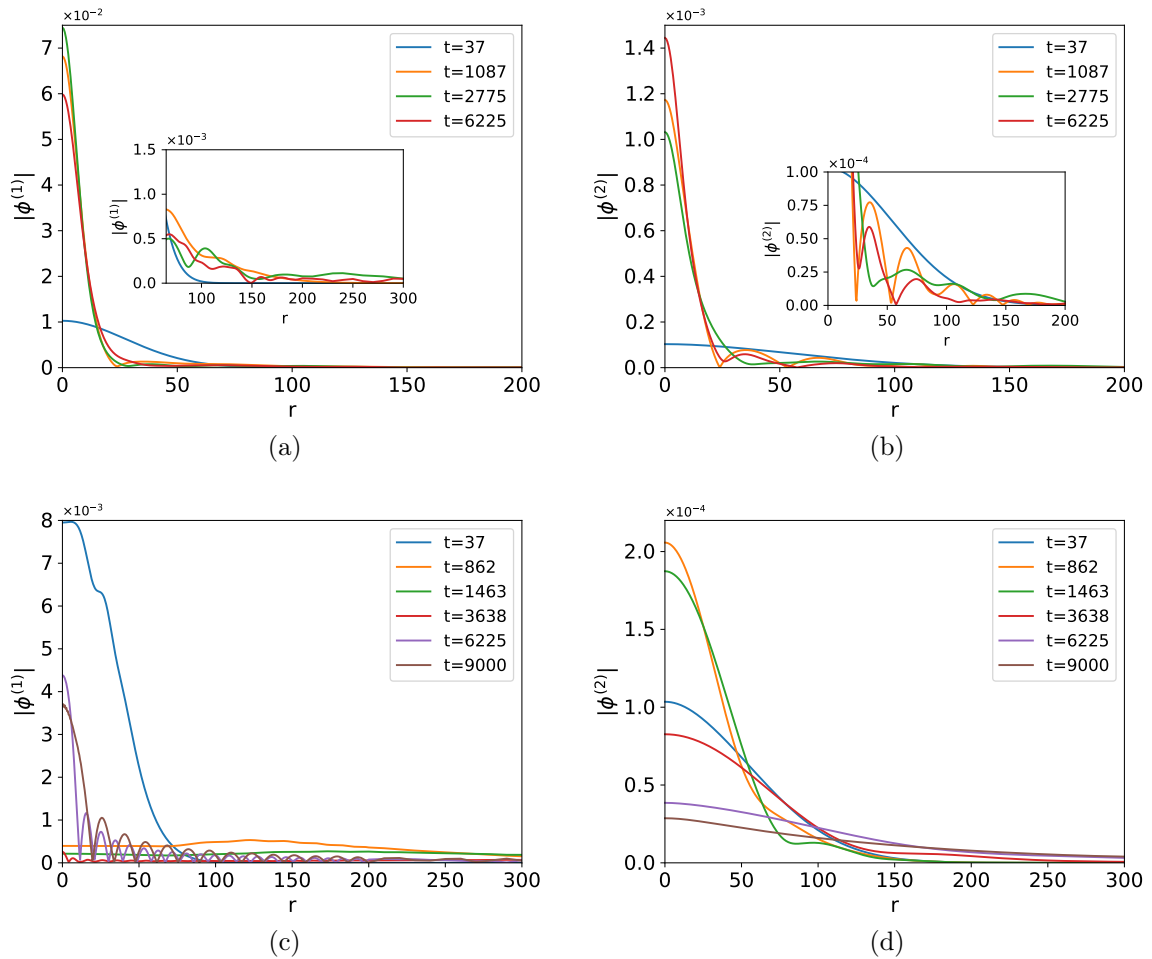


Figura 10: Para la configuración $c_3 : \{\eta = 0.01, \eta_2 = 2\}$, si $\Lambda = 0$ se muestra en 10a y 10b el perfil radial de $|\phi^{(1)}|$ y $|\phi^{(2)}|$, respectivamente, en distintos instantes de tiempos. Si $\Lambda = 2000$, se muestra en 10c y 10d el perfil radial de $|\phi^{(1)}|$ y $|\phi^{(2)}|$, respectivamente, en distintos instantes de tiempos.

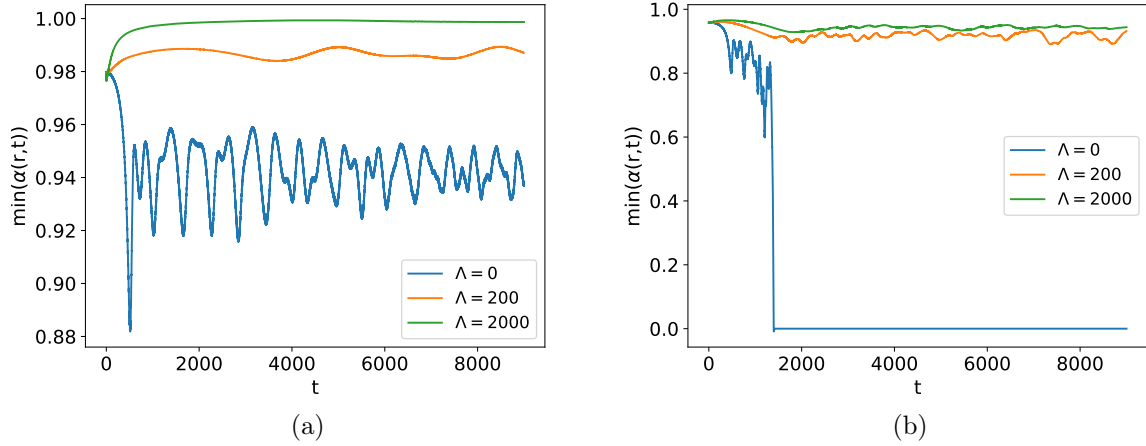


Figura 11: Se muestra el perfil temporal del $\min(\alpha)$ en 11a para c_3 , y en 11b para la configuración $c_4 : \{\eta = 0.2, \text{ y } \eta_2 = 5\}$. En ambos casos se toman $\Lambda = 0, 200$ y 2000 .

caso con $\Lambda = 0$. Y para $\Lambda = 200$ se tiene a $|\phi^{(1)}|$ en el “gs” y a $|\phi^{(2)}|$ en el primer estado excitado. Cuanto más compacta sea una configuración, mayor será el estado de excitación de la estrella.

Como $\Lambda > 0$ introduce una dispersión entre las partículas, llegará un punto donde superará a la atracción gravitatoria, dispersando la estrella. Dicho comportamiento se presenta para la configuración c_3 con $\Lambda = 300$, véase el Cuadro 2, donde ha aumentado considerablemente el valor de $R_{0.9}$ debido a la dispersión. Y para valores suficientemente altos se dispersa la estrella por completo, como ocurre para $\Lambda = 2000$ con la mayoría de la masa distribuida en $R_{0.9} = 930.35 \sim r_{max} = 1000$, respaldado por la Fig. 11a con $\alpha(r, t > 5000) \approx 1$. En las Fig. 10c y 10d, $|\phi^{(1)}|$ adopta un gran número de nodos, mientras que $|\phi^{(2)}|$ se va dispersando completamente. Incluso entre $t = 6225$ y $t = 9000$ $|\phi^{(1)}|$ comienza a dispersarse al adoptar menores valores en $r = 0$, liberando materia escalar por sus nodos.

En la Fig. 12a se presenta el perfil radial de la masa para distintos instantes de tiempo para c_3 con $\Lambda = 200$. Se liberó una pequeña cantidad de masa en comparación con c_3 con $\Lambda = 300$ presente en la Fig. 12b, y desde cortos intervalos de tiempo se estabilizó la estrella de bosones en un radio de $R_{0.9} = 83.55$. Es mucho más localizada que la estrella comentada para $\Lambda = 300$, y por ello más compacta.

También se ha estudiado la configuración $c_4 : \{\eta = 0.2, \eta_2 = 2\}$, véase la parte inferior del Cuadro 2. Al tomar $\Lambda = 0$ y $\Lambda = 200$, se obtuvieron objetos finales muy distintos. En el primer caso, la estrella colapsó a agujero negro, mientras que en el segundo se obtuvo una estrella de bosones. Al aumentar de $\Lambda = 200$ a $\Lambda = 2000$, aumenta la compacidad y el número de nodos. Sin embargo, para $\Lambda = 10000$, la estrella se dispersa, distribuyéndose toda su masa en radios $r > 900$. Al igual que se obtuvo para c_3 , hay un valor crítico de Λ con una compacidad máxima a partir de la cuál se dispersan las estrellas. Notase que la introducción de $\Lambda > 0$ ha evitado el colapso de la métrica, tal y como se observa en la Fig. 11b.

Mayores valores de Λ tienen asociadas unas curvas del valor mínimo del lapso α más estables temporalmente, además de objetos más compactos que distorsionan menos el espacio-tiempo (con valores más cercanos a $\alpha = 1$). Como veremos en los siguientes

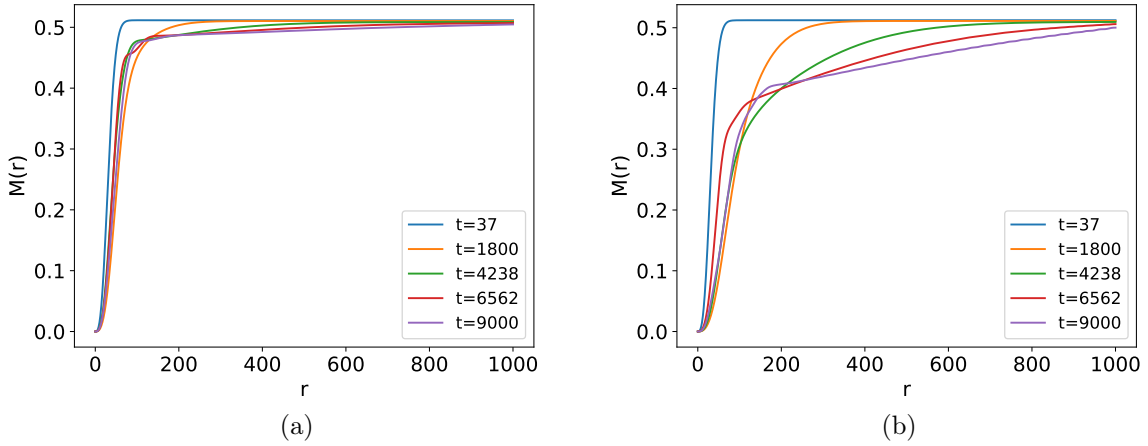


Figura 12: Se muestran los perfiles radiales de la masa en distintos instantes de tiempo para c_3 , en 12a con $\Lambda = 200$ y en 12b con $\Lambda = 300$.

apartados, la diferencia entre Λ y η es que al ir aumentando sus valores varía el radio y la masa, respectivamente, dando lugar a configuraciones más compactas. A mayor Λ , menores valores de $R_{0.9}$ y por ello se aprecian menos distanciadas de $\alpha = 1$ en la Fig. 11; mientras que a mayor η habrá mayor cantidad de materia escalar en el mismo radio, véase la Fig. 13, distanciándose más de Minkowski. Las configuraciones presentarán una compacidad máxima asociado a un valor específico de $\Lambda = \Lambda_C$. Para $\Lambda > \Lambda_C$, los objetos se encargarán de liberar materia escalar hacia el exterior para intentar estabilizarse, siendo necesario para ello unos grandes radios y menores compacidades.

Los valores de η y η_2 serán determinantes para hallar el cociente entre el número de partículas en $\phi^{(2)}$ y $\phi^{(1)}$, η' , véase la última columna del Cuadro 2. Para $\eta = 0.01$, se verifica que $\eta' < 1$ para cualquier valor de Λ , traducido en $N^{(1)} > N^{(2)}$ (habiendo más partículas asociadas a $\phi^{(1)}$ que a $\phi^{(2)}$) sin importar en qué estado se encuentren. Sin embargo, para $\eta = 0.2$, $\phi^{(1)} \sim \phi^{(2)}$. Para dicho valor de η , cuando $\Lambda = 200$, el resultado final será una estrella multi-estado con $|\phi^{(1)}|$ en el estado fundamental, y $|\phi^{(2)}|$ en el primer estado excitado, con $\eta' = 11.72$. Y cuando $\Lambda = 2000$, $|\phi^{(1)}|$ estará en un estado complejo, y $|\phi^{(2)}|$ en el primer estado excitado, con $\eta' = 4.51 \cdot 10^{-1}$. Es decir, cuando $\phi^{(1)} \sim \phi^{(2)}$, se tendrán más partículas en el estado de mayor orden. Este comportamiento se presentará en el resto de apartados.

Concluimos de este apartado que mayores valores de Λ permiten un mayor número de nodos y una mayor compacidad, hasta una configuración con un valor máximo de la compacidad a partir del cuál las estrellas presentan menores compacidades, dispersándose más y más. Además, se tendrán más partículas en el estado de mayor excitación si $\phi^{(1)} \sim \phi^{(2)}$.

4.2.4. Relación entre las amplitudes, η y η_2

A) Parámetro η

La variable η puede ser una de las más importantes y directas de comprender, ya que nos relaciona directamente las amplitudes de los campos $\phi^{(2)}$ y $\phi^{(1)}$, $D = C \cdot \eta$. Tendremos mayor cantidad de materia escalar al aumentar el valor de η .

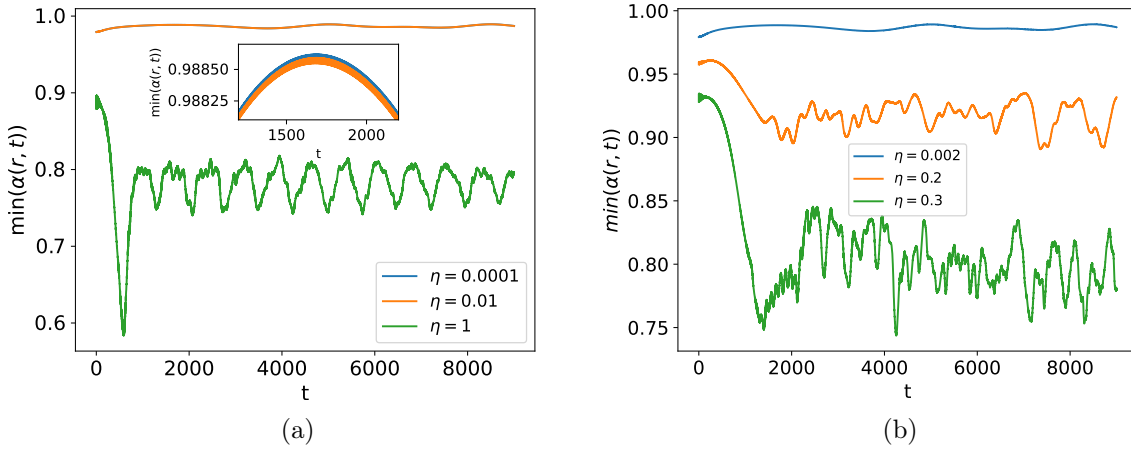


Figura 13: Se muestra el perfil temporal del $\min(\alpha)$ en 13a para $c_5 : \{\eta_2 = 2, \Lambda = 200\}$ con $\eta = 10^{-4}, 10^{-2}$ y 1, y en 13b para $c_6 : \{\eta_2 = 5, \Lambda = 200\}$ con $\eta = 0.002, 0.2$ y 0.3.

En la Fig. 13 presentamos la mayoría de las configuraciones presentes en el Cuadro 3. En la figura izquierda se tiene la configuración $c_5 : \{\eta_2 = 2, \Lambda = 200\}$. Al tomar $\eta = 10^{-4}$ y $\eta = 10^{-2}$, se obtienen dos configuraciones con prácticamente el mismo perfil temporal del $\min(\alpha)$, aunque dan lugar a estrellas de bosones distintas, véase el Cuadro 3. Cuando $\eta = 10^{-4}$, $\phi^{(2)} \sim 10^{-6}$, siendo una pequeña perturbación en comparación a $\phi^{(1)} \sim 10^{-2}$, interaccionando de una manera tan débil que ambos campos escalares se mantienen en el estado fundamental. Al tomar $\eta = 10^{-2}$, $\phi^{(2)} \sim 10^{-4}$ será suficientemente grande en comparación al caso anterior para que interaccione con $\phi^{(1)}$, estableciéndose $\phi^{(2)}$ en el primer estado excitado. Dos órdenes de magnitud nos llevarán a dos estrellas de bosones con las mismas propiedades, $C_{0.9}$, pero con distintos número de partículas, η' , y estados de excitación de los campos. Y al tomar $\eta = 1$, la configuración cambia por completo debido a que $\phi^{(1)} \sim \phi^{(2)}$, véase el Cuadro 3. Ambos campos escalares complejos interaccionarán de tal manera que se excitarán, introduciendo una gran cantidad de materia escalar, $M_{0.9} = 4.118$ (para $\eta = 10^{-4}$ se tenía $M_{0.9} = 0.454$) en $R_{0.9} = 81.05$. Se observa un comportamiento análogo en la Fig. 13b para las configuraciones asociadas a $c_6 : \{\eta_2 = 5, \Lambda = 200\}$. Mayores valores de η implican mayores $M_{0.9}$, aumentando la compacidad, hasta $\eta = 0.5$ donde la configuración colapsa a un agujero negro.

Cuando η es varios órdenes de magnitud menor que la unidad, $\phi^{(2)}$ puede llegar a ser despreciable frente a $\phi^{(1)}$. Se podría describir el problema como una estrella de bosones con un campo escalar, $\phi^{(1)}$, perturbado por otro campo, $\phi^{(2)} \ll \phi^{(1)}$. Por ello se ve en

η	η_2	Λ	Resultado: $ \phi^{(1)} + \phi^{(2)} $	$M_{0.9}$	$R_{0.9}$	$C_{0.9}$	η'
10^{-4}	2	200	gs+gs	0.454	81.55	$1.11 \cdot 10^{-2}$	$4.43 \cdot 10^{-8}$
0.01	2	200	gs+1 ex	0.454	83.55	$1.09 \cdot 10^{-2}$	$4.36 \cdot 10^{-4}$
1	2	200	1 ex+complejo	4.118	81.05	$1.02 \cdot 10^{-1}$	25.99
0.002	5	200	gs+1 ex	0.454	81.55	$1.11 \cdot 10^{-2}$	$5.56 \cdot 10^{-4}$
0.2	5	200	gs+complejo->gs+1ex	2.683	380.05	$1.41 \cdot 10^{-2}$	11.72
0.3	5	200	1 ex+complejo	5.096	380.05	$2.68 \cdot 10^{-2}$	13.24
0.5	5	200	Colapso a agujero negro	-	-	-	-

Cuadro 3: Se representa lo mismo que en el Cuadro 1. Se muestra el estudio sistemático de las dos configuraciones que ahí se presentaban, variando η .

la Fig. 13a las curvas asociadas a $\eta = 10^{-4}$ y $\eta = 10^{-2}$ prácticamente con el mismo perfil temporal. Un comportamiento análogo se ve en la Fig. 13b para c_6 con $\eta = 0.002$, obteniéndose la misma $M_{0.9}$ y $R_{0.9}$ que para c_5 con $\eta = 10^{-4}$. En ambos casos, $\phi^{(2)} \ll \phi^{(1)}$.

A mayores valores de η tendremos una mayor compacidad, teniéndose una mayor masa en el mismo $R_{0.9}$, véase el Cuadro 3, permitiéndose la formación de un mayor número de nodos. Esta compacidad tendrá un máximo, a partir del cuál la métrica colapsará a un agujero negro. Esto concuerda con lo observado en la Fig. 13. Entonces, a mayor η , se concentrará más masa-energía en una región localizada de radio $r = R_{0.9}$, distorsionándose más el espacio-tiempo y alcanzándose menores valores del $\min(\alpha)$, distanciándonos más de la métrica de Minkowski. Dicho de otra manera, cuando $\eta \sim 1$ y $\eta_2 \sim 1$, $\phi^{(1)} \sim \phi^{(2)}$, aportando ambos campos a la formación del objeto compacto. Explicaremos esto con más profundidad en el siguiente apartado al discutir η_2 .

Nuestras ecuaciones presentan el mismo comportamiento para $\eta = \eta_P > 0$ y $-\eta_P < 0$, con η_P un valor específico. Esto se debe a que los campos escalares complejos verifican que $|\phi^{(1)}(r, t)| = +\sqrt{\phi_1(r, t)^2 + \phi_2(r, t)^2}$ y $|\phi^{(2)}(r, t)| = +\sqrt{\phi_3(r, t)^2 + \phi_4(r, t)^2} = |\eta\xi(r)\phi^{(1)}(r, t)|$.

Respecto al cociente del número de partículas, η' , volvemos a obtener un resultado análogo al que ya esperábamos: para $\eta \sim 1$, se tendrán más partículas en el estado de mayor excitación. Si $\eta \ll 1$, $\phi^{(2)} \ll \phi^{(1)}$, teniéndose $\eta' \ll 1$ y $N^{(2)} \ll N^{(1)}$.

B) Parámetro η_2

La relación $\sigma_2 = \eta_2 \cdot \sigma$ ya se presentó en la ecuación (46). De ella se deduce que para valores de η_2 suficientemente pequeños, $\phi^{(2)}(r \neq 0, t) = \lim_{\eta_2 \rightarrow 0} (C \cdot \eta) e^{-r^2/(\sigma \cdot \eta_2)^2} \cdot e^{-i\omega t} = e^{-i\omega t} \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} (C \cdot \eta) e^{-x^2} = 0$. Es decir, η_2 se encarga de ir controlando los valores de $\phi^{(2)}$ respecto a $\phi^{(1)}$. En el límite en el que η_2 es nulo, recuperaremos el caso en el que sólo describimos un campo escalar, $\phi^{(1)}$, con $\phi^{(2)} = 0$. Vuelve a presentarse un estudio análogo al que se tuvo para η como ya esperábamos ya que ambos, η y η_2 , relacionan las amplitudes de los campos.

Para $\eta \rightarrow 0$, o $\eta_2 \rightarrow 0$, o η y η_2 suficientemente pequeños, $\phi^{(2)} \ll \phi^{(1)}$, obteniéndose

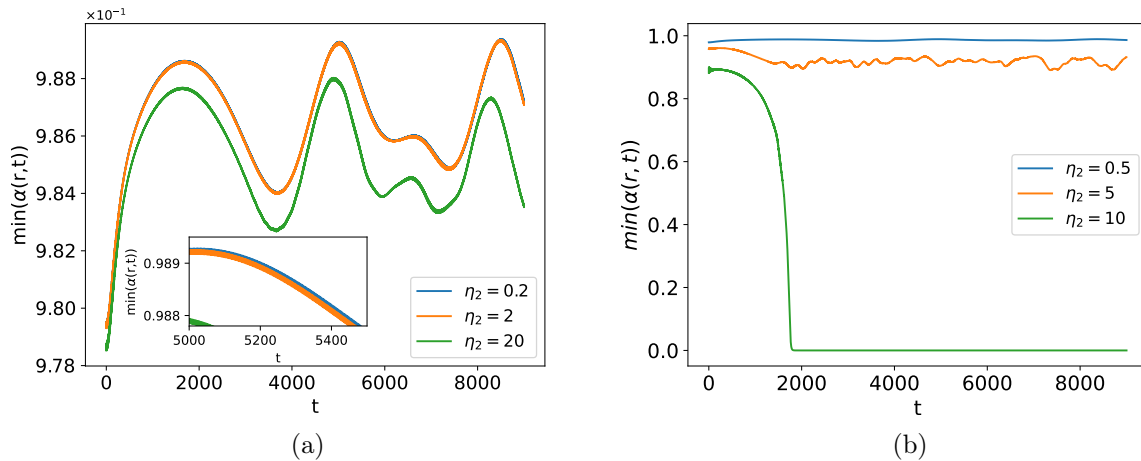


Figura 14: Se muestra el perfil temporal del $\min(\alpha)$ en 14a para $c_7 : \{\eta = 0.01, \Lambda = 200\}$ con $\eta_2 = 0.2, 2$ y 20 , y en 14b para $c_8 : \{\eta = 0.2, \Lambda = 200\}$ con $\eta_2 = 0.5, 5$ y 10 .

η	η_2	Λ	Resultado: $ \phi^{(1)} $ y $ \phi^{(2)} $	$M_{0.9}$	$R_{0.9}$	$C_{0.9}$	η'
0.01	0.2	200	gs+gs	0.454	81.55	$1.11 \cdot 10^{-2}$	$7.83 \cdot 10^{-6}$
0.01	2	200	gs+1 ex	0.454	83.55	$1.09 \cdot 10^{-2}$	$4.36 \cdot 10^{-4}$
0.01	20	200	gs+complejo	0.775	710.05	$2.18 \cdot 10^{-3}$	13.64
0.2	0.5	200	gs+gs	0.456	83.04	$1.10 \cdot 10^{-2}$	$1.71 \cdot 10^{-3}$
0.2	5	200	gs+complejo->gs+1ex	2.616	425.05	$1.23 \cdot 10^{-2}$	11.72
0.2	10	200	Colapso a agujero engro	-	-	-	-

Cuadro 4: Se representa lo mismo que en el Cuadro 1. Se muestra el estudio sistemático de las dos configuraciones que ahí se presentaban, variando η_2 .

se configuraciones análogas. Esto se observa en las dos líneas superiores de la Fig. 14a asociadas a $c_7 : \{\eta = 0.01, \Lambda = 200\}$ con $\eta_2 = 0.2$ y $\eta_2 = 2$ se obtienen prácticamente el mismo perfil temporal del $\min(\alpha)$ debido a que η es tan pequeño. Véase la Fig. 15a para apreciar como $\phi^{(2)} \ll \phi^{(1)}$ para $\eta_2 = 0.2$. Lo que sí varía es el resultado final del objeto, véase el Cuadro 4, teniéndose $\phi^{(2)}$ en el estado fundamental para $\eta_2 = 0.2$, y en el primer estado excitado para $\eta_2 = 2$. Tendremos que aumentar otro orden de magnitud, $\eta_2 = 20$, para que varíe considerablemente el comportamiento de la estrella multi-estado, con $\phi^{(1)} \sim \phi^{(2)}$, véase la Fig. 15b. Esperaríamos que al haber una mayor cantidad de campo escalar, la compacidad aumentaría. Pero según el Cuadro 4, la compacidad asociada a $\eta_2 = 20$ disminuye. Para comprender este comportamiento, decidimos representar en la Fig. 16a el perfil radial de $\phi^{(2)}$, y en 16b el perfil radial de la masa. Al estar distribuida el 90 % de su masa en una esfera de mayor radio, $R_{0.9} = 710.05$, parece a primera vista que no verifica lo que estamos intentando probar. Sin embargo, esto se debe a la presencia de una gran cantidad de nodos en el perfil radial de $\phi^{(2)}$, que van siendo expulsados, llevándose unas grandes cantidades de masa escalar, al coste de que $\phi^{(2)}(r > 400, t) \neq 0$. Necesitaríamos simular largos instantes de tiempo para que $\phi^{(2)}$ emitiera suficiente materia escalar hacia el exterior hasta estabilizarse y verificar $\phi^{(2)}(r > 400, t) \sim 0$. Si tomamos el 50 % de la masa, $M_{0.5} = 0.430$, $R_{0.5} = 66.05$ y $C_{0.5} = 0.0130$. Esta compacidad sería como se esperaría, mayor que la asociada a $\eta_2 = 2$.

Un comportamiento análogo se presenta en la Fig. 14b para $c_8 : \{\eta = 0.2, \Lambda = 200\}$. En este caso, cuando $\eta_2 \sim 1$, $\phi^{(1)} \sim \phi^{(2)}$. Una pequeña variación de η_2 nos lidiará a configuraciones muy distintas, véase el Cuadro 4. De hecho, para $\eta_2 = 0.5$ y $\eta_2 = 5$, se forman estrellas de bosones, mientras que $\eta_2 = 10$ varía drásticamente la situación, colapsando a un agujero negro. Destacar que vuelve a aumentar la compacidad y los estados de excitación de $\phi^{(2)}$ para mayores valores de η_2 . Como $\phi^{(1)} \sim \phi^{(2)}$, se tendrán más partículas en el estado de mayor orden, véase el Cuadro 4. Si $\phi^{(2)}$ fuese despreciable frente a $\phi^{(1)}$, se verificaría que $N^{(1)} > N^{(2)}$.

Podríamos tomar η_2 con valores negativos. Teniendo en cuenta que $\phi^{(2)}(r, t) = D \cdot e^{-r^2/(\sigma \cdot \eta_2)^2} \cdot e^{-i\omega t}$, las configuraciones serán simétricas respecto a $\eta_2 = 0$. Dos configuraciones con $\eta_2 = \eta_{2P} > 0$ y $-\eta_{2P} < 0$, con η_{2P} un valor específico, serán análogas.

Concluimos que para mayor η y η_2 aumentan los estados de excitación y la compacidad (mayores $M_{0.9}$ en $R_{0.9}$ similares) hasta un máximo valor a partir del cuál la métrica colapsa a un agujero negro.

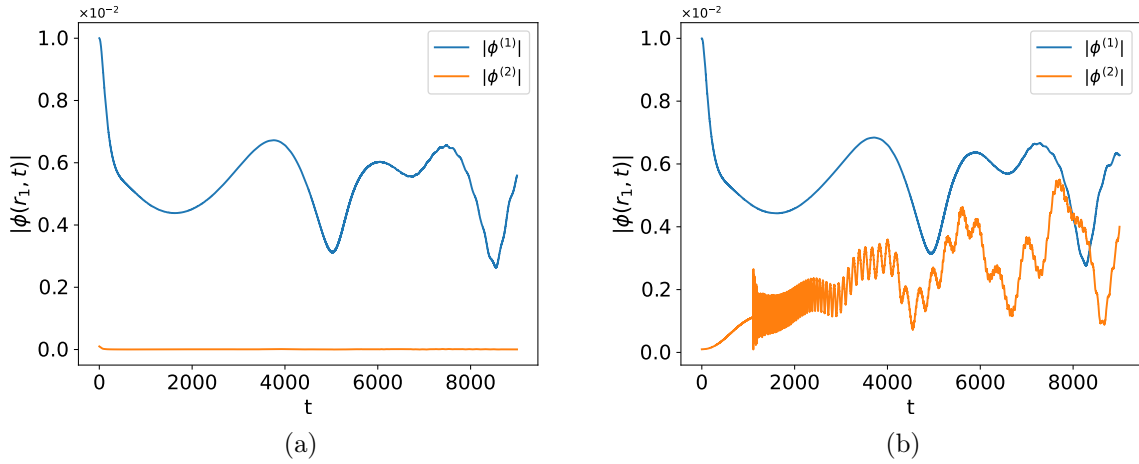


Figura 15: Se muestra el perfil temporal de los campos escalares complejos evaluados en $r = r_1$ para c_7 , en 15a con $\eta_2 = 0.2$, y en 15b con $\eta_2 = 20$.

4.2.5. Relación entre las masas $\eta_3 = m^{(2)}/m^{(1)}$

También nos hicimos la natural pregunta de cómo variaría la descripción del problema si tomábamos dos campos escalares complejos de distinta masa. Tomaremos el potencial de la ecuación (51) y haremos el estudio sistemático en función de $\eta_3 = m^{(2)}/m^{(1)}$. Tendremos configuraciones análogas (no iguales) a las ya estudiadas cuando tomemos $m^{(1)} = m^{(2)}$. Se tratan de distintas configuraciones porque variables como Λ se reescalan de distintas maneras, como $\Lambda \rightarrow \Lambda \cdot m^2$ o $\Lambda \rightarrow \Lambda \cdot m_T^2$ si no se incluye η_3 o si se incluye, respectivamente. En este apartado se va a realizar el estudio sistemático de las configuraciones $c_9 : \{C = 0.03, \eta = 0.01, \eta_2 = 2, \eta_3 = 1, \Lambda = 20\}$ y $c_{10} : \{C = 0.02, \eta = 0.2, \eta_2 = 5, \eta_3 = 1, \Lambda = 200\}$, véase el Cuadro 5.

En primer lugar, para la configuración c_9 iremos tomando distintos valores de $\eta_3 = m^{(2)}/m^{(1)}$, véase la parte superior del Cuadro 5. Al aumentar los valores de η_3 de 0 a 1.5, pasamos de un colapso gravitatorio a la dispersión del objeto compacto, teniéndose en los

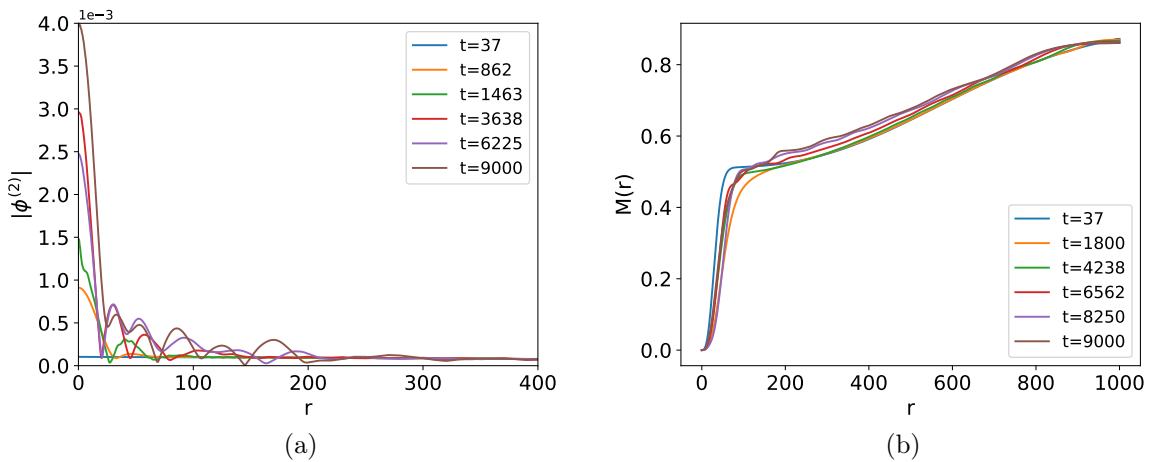


Figura 16: Para c_7 con $\eta_2 = 20$, se muestran los perfiles radiales de $\phi^{(2)}$ y de la masa en 16a y 16b, respectivamente, evaluados en distintos instantes de tiempo.

valores intermedios estrellas multi-estado estables. Respaldándonos en la Fig. 17a y en el Cuadro 5, con mayores valores de η_3 se obtienen objetos menos compactos. Se tienen menores $M_{0.9}$ en radios $R_{0.9}$ cada vez mayores. Nosotros esperaríamos que un mayor valor de $m^{(2)}$ aumentase $M_{0.9}$. Sin embargo, recordando lo que presentamos en la Fig. 4, un mayor valor de $m^{(2)}$ tiene asociado una estrella de bosones de menor masa total, $M \propto 1/m$. Al ser $\eta = 0.01$, $\phi^{(2)} \ll \phi^{(1)}$ se comportará como una pequeña perturbación respecto a $\phi^{(1)}$ para cualquier valor de η_3 , que al tener una masa no nula evita el colapso, $\eta_3 > 0$, estabilizando la formación de una estrella multi-estado si $\eta_3 < 1.5$. Básicamente, introduce un efecto de dispersión en las estrellas multi-campo. Dicha dispersión superará a la atracción gravitatoria para $\eta_3 \geq 1.5$, impidiendo la formación de un objeto estable, liberando toda la materia escalar por todo el espacio-tiempo.

En segundo lugar, para la configuración c_{10} presentamos en las Fig. 17b y 17c el perfil temporal del mínimo de α para distintos valores de η_3 . En 17b se presenta un comportamiento análogo al que hemos mencionado para la configuración c_9 : conforme aumenta η_3 , disminuye $C_{0.9}$, liberándose grandes cantidades de campo escalar para $\eta_3 = 0.25$ y 0.5 , véanse los valores de $R_{0.9}$ en el Cuadro 5. Sin embargo, para $\eta_3 > 0.5$, se invierte el comportamiento. Los objetos se comienzan a hacer más compactos, aumentando los valores de $M_{0.9}$ en menores $R_{0.9}$ hasta colapsar, véase la Fig. 17c y el Cuadro 5. La diferencia con c_9 radica en el valor de η , que ahora es $\eta = 0.2$. Como $\phi^{(1)} \sim \phi^{(2)}$, se verifica para $\eta_3 > 0.5$ que $\phi^{(2)}(r, t) > \phi^{(1)}(r, t)$ para $t \in (250, 2000)$. Es decir, se está invirtiendo el rol que se tenía entre $\phi^{(1)}$ y $\phi^{(2)}$ para $\eta_3 > 0.5$. Ahora, el campo principal será $\phi^{(2)}$, véanse las Figs. 18 en donde se presentan los perfiles radiales de ambos campos escalares complejos para distintos valores de η_3 . Para las configuraciones con $\eta_3 \in (0, 0.5)$, el perfil de $\phi^{(2)}$ no varía prácticamente, y lo que hace es dispersarse. Pero $\phi^{(1)}$ sí va variando, disminuyendo sus valores y dispersándose más para mayores valores de η_3 . De hecho, para $\eta_3 = 0.5$, $\phi^{(2)} > \phi^{(1)}$ cuando $t \in (250, 2000)$ aunque ambos se dispersen. Y a partir de este valor de η_3 se aprecia la razón de la formación de las estrellas multi-estado. Para $\eta_3 = 0.75$, $\phi^{(1)}$ se dispersa prácticamente, pero $\phi^{(2)}$ se estabiliza en un valor no nulo. En las figuras

C	η	η_2	η_3	Λ	Resultado: $ \phi^{(1)} $ y $ \phi^{(2)} $	$M_{0.9}$	$R_{0.9}$	$C_{0.9}$	η'
0.03	0.01	2	0	20	Colapso a agujero negro	-	-	-	-
0.03	0.01	2	0.5	20	gs+1 ex	3.726	30.05	$2.48 \cdot 10^{-1}$	$8.41 \cdot 10^{-2}$
0.03	0.01	2	1	20	gs+1 ex	3.045	178.55	$3.41 \cdot 10^{-2}$	$2.21 \cdot 10^{-2}$
0.03	0.01	2	10/9	20	gs+1 ex	2.805	515.03	$1.09 \cdot 10^{-2}$	$1.25 \cdot 10^{-3}$
0.03	0.01	2	1.5	20	Dispersión	1.498	905.05	$3.31 \cdot 10^{-3}$	$1.46 \cdot 10^{-3}$
0.03	0.01	2	5	20	Dispersión	0.015	650.05	$4.97 \cdot 10^{-5}$	$4.85 \cdot 10^{-2}$
0.02	0.2	5	0	200	gs+gs	2.212	58.05	$7.62 \cdot 10^{-2}$	$4.04 \cdot 10^{-3}$
0.02	0.2	5	0.1	200	gs+gs	2.035	91.05	$4.47 \cdot 10^{-2}$	$5.25 \cdot 10^{-1}$
0.02	0.2	5	0.25	200	1 ex+complejo	2.286	830.04	$5.51 \cdot 10^{-3}$	3.71
0.02	0.2	5	0.5	200	Dispersión	5.614	920.05	$1.22 \cdot 10^{-2}$	8.18
0.02	0.2	5	0.75	200	complejo+gs	6.802	320.05	$4.19 \cdot 10^{-2}$	$6.41 \cdot 10^{-2}$
0.02	0.2	5	1	200	complejo+gs	7.007	250.07	$5.61 \cdot 10^{-2}$	$2.67 \cdot 10^{-1}$
0.02	0.2	5	2	200	1 ex+2 ex	7.330	265.05	$5.53 \cdot 10^{-2}$	4.899
0.02	0.2	5	16	200	Colapso a agujero negro	-	-	-	-

Cuadro 5: Se representa lo mismo que en el Cuadro 1, añadiendo en la primera y cuarta columna el valor central del campo C y η_3 , respectivamente. Se muestra el estudio sistemático de dos configuraciones, $c_9 : \{C = 0.03, \eta = 0.01, \eta_2 = 2, \eta_3 = 1, \Lambda = 20\}$ y $c_{10} : \{C = 0.02, \eta = 0.2, \eta_2 = 5, \eta_3 = 1, \Lambda = 200\}$ para las que iremos variando el valor de η_3 .

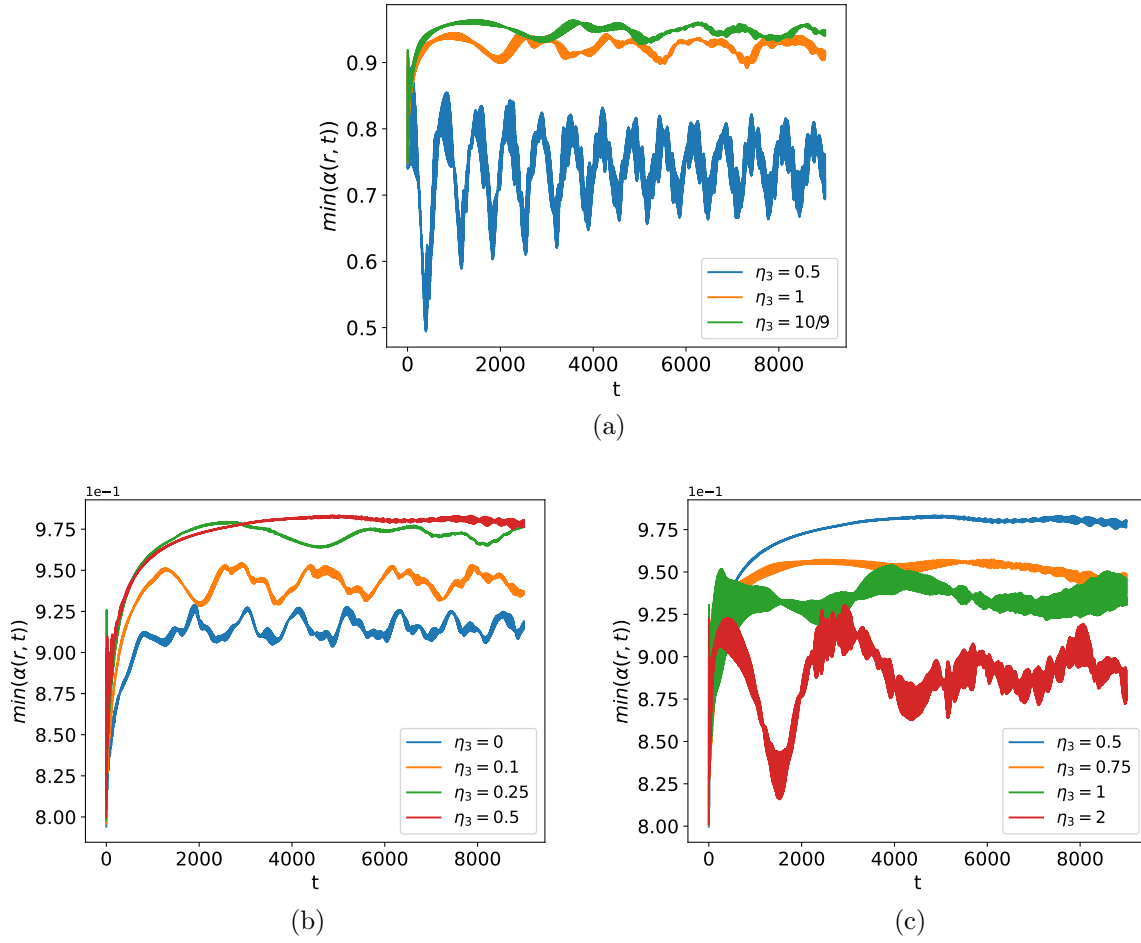


Figura 17: Se muestran los perfiles temporales del $\min(\alpha)$ en 17a para c_9 con $\eta_3 = 0.5, 1$ y $10/9$, y en 17b y 17c para c_{10} con $\eta_3 = 0, 0.1, 0.25$ y 10 y $\eta_3 = 0.5, 0.75, 1$ y 2 , respectivamente.

asociadas a $\eta_3 < 0.5$ se tenían mayores valores de $\phi^{(1)}$ mientras $\phi^{(2)}$ se dispersaba, y ahora es a la inversa. Si $\eta_3 = 2$, los valores de $\phi^{(2)}$ comienzan a aumentar considerablemente, interaccionando con $\phi^{(1)}$ de tal manera que también adoptará mayores valores. Con este aumento en los valores de los campos, es comprensible por qué para $\eta_3 = 16$ la métrica colapsa.

La configuración c_{10} ha presentado un comportamiento muy peculiar, con una disminución y aumento de la compacidad, cuando lo normal sería que sólo aumentara o disminuyera. Esto nos demuestra que nos podemos encontrar con casos en los que no ocurra lo que esperábamos, permitiéndonos comprender en mayor profundidad dichos objetos.

Se han vuelto a obtener $\phi^{(1)}$ y $\phi^{(2)}$ en mayores estados de excitación para las configuraciones más compactas. Además, respecto a η' , para c_9 con $\eta = 0.01$ se tiene para cualquier valor de η_3 un valor de $\eta' < 1$. En cambio, para c_{10} con $\eta = 0.2$, η' presenta el comportamiento esperado: hay más partículas en el estado de mayor excitación para cualquier valor de η_3 .

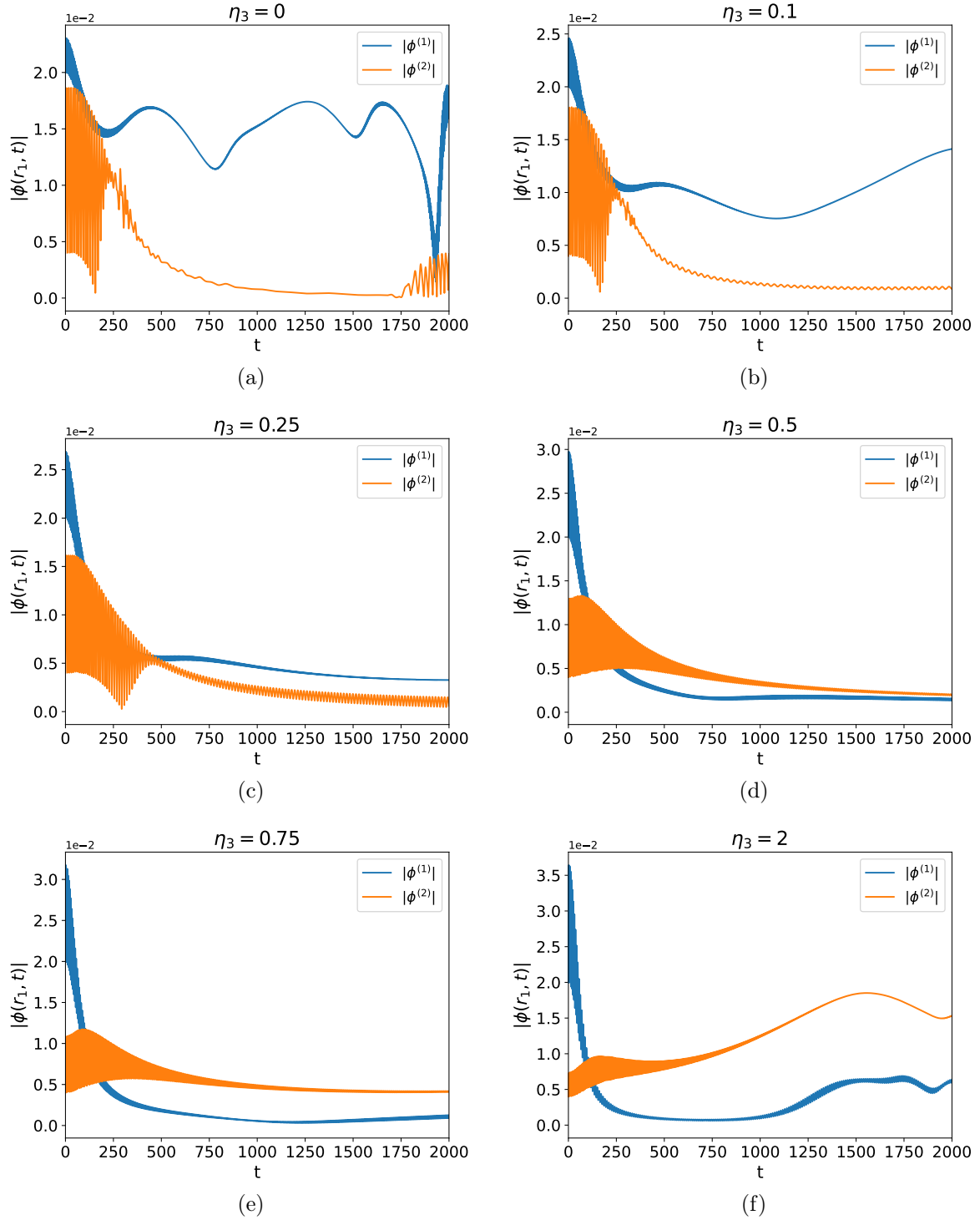


Figura 18: Se han representado los perfiles temporales de $\phi^{(1)}(r_1, t)$ y $\phi^{(2)}(r_1, t)$ para las estrellas multi-campo asociadas a la configuración c_{10} presentes en el Cuadro 5. De izquierda a derecha y de arriba hacia abajo, se han tomado $\eta_3 = 0, 0.1, 0.25, 0.5, 0.75$ y 2 .

4.3. Velocidad de rotación

Hemos visto que el resultado de la formación dinámica de estrellas de bosones descritas por varios campos dan lugar a distintas configuraciones. En función de los parámetros que tomemos, la estrella multi-campo acabará en un estado final en específico. Y para cada estrella, podemos hallar el perfil radial de la velocidad de rotación via ecuación (25). Así, somos capaces de obtener distintos perfiles que podemos comparar con los resultados teóricos. Ajustándonos a lo observado, podríamos ser capaces de modelizar las curvas de rotación experimentales con una estrella de bosones multi-estado, extrapolando los valores de los parámetros, como la masa de los campos escalares.

Hemos tomado dos configuraciones del Cuadro 3, $c_{11} : \{\eta = 0.002, \eta_2 = 5, \Lambda = 200\}$ y $c_{12} : \{\eta = 0.3, \eta_2 = 5, \Lambda = 200\}$. Con ellas, calculamos sus curvas de rotación, y las comparamos con las teóricas extraídas de [97]. Las que tenían un perfil más similar a nuestras curvas teóricas eran las asociadas a las galaxias UGC 11861 y UGC 4305 para c_{11} y c_{12} , respectivamente, véanse las Fig. 19 y 20. Hemos representado para las curvas teóricas hasta $r \sim R_{0.9}$ para tener presente la mayoría de la masa gravitatoria del objeto. En la Fig. 19, ambos perfiles suben y se mantienen aproximadamente constante, con una leve pendiente negativa para el perfil teórico. En la Fig. 20 ocurre algo similar, con la diferencia que en el perfil experimental hay unas subidas y bajadas del valor de la velocidad de rotación para *radius* > 100 arcsec. Podría indicar la presencia de nodos, tal y como se presentan en la configuración c_{12} , véase el Cuadro 3. De hecho, en el perfil teórico de dicha configuración también se presentan picos de v_ϕ . El comportamiento global lejos de las estrellas multi-estado se aprecia en las figuras internas de las Fig. 19 y 20. Para $r > R_{0.9}$, fuera de donde se considera que se encuentra la estrella multi-estado, se tendrá una partícula de prueba girando en torno a un objeto de radio $R_{0.9}$ girando con una velocidad proporcional a $1/\sqrt{r}$. Por ello, el perfil radial de v_ϕ comienza a decaer.

Se pueden obtener de manera satisfactoria perfiles experimentales que encajen con los teóricos, y podemos ir cambiando los parámetros para que cuadren tanto como queramos,

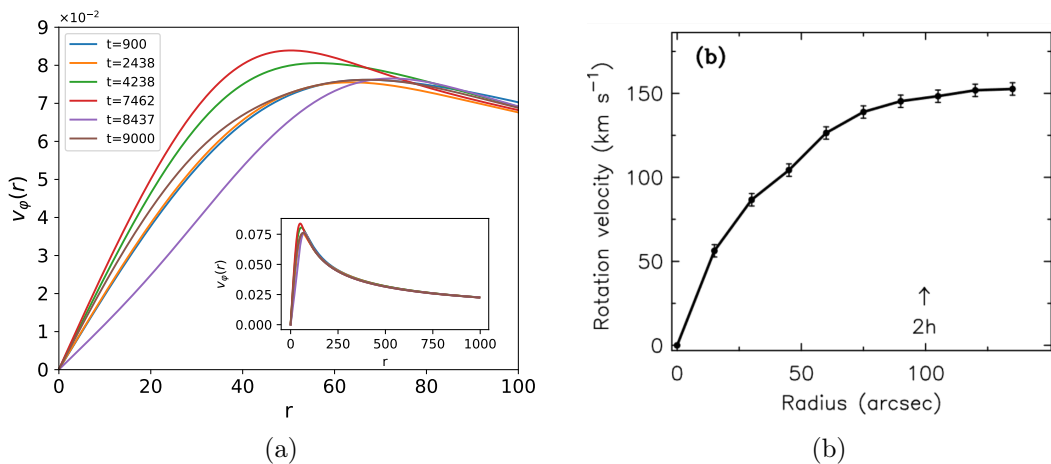


Figura 19: En 19a se tiene la curva de rotación teórica obtenida a partir de la ecuación (25) para la configuración $c_{11} : \{\eta = 0.002, \eta_2 = 5, \Lambda = 200\}$. Representamos hasta $r = 100 > R_{0.9} = 81.55$, véase el Cuadro 3, para tener más del 90 % de la masa presente en la gráfica. En el interior se presenta el perfil completo. En 19b se tiene la curva de rotación experimental obtenida para la galaxia UGC 11861 extraída de [97].

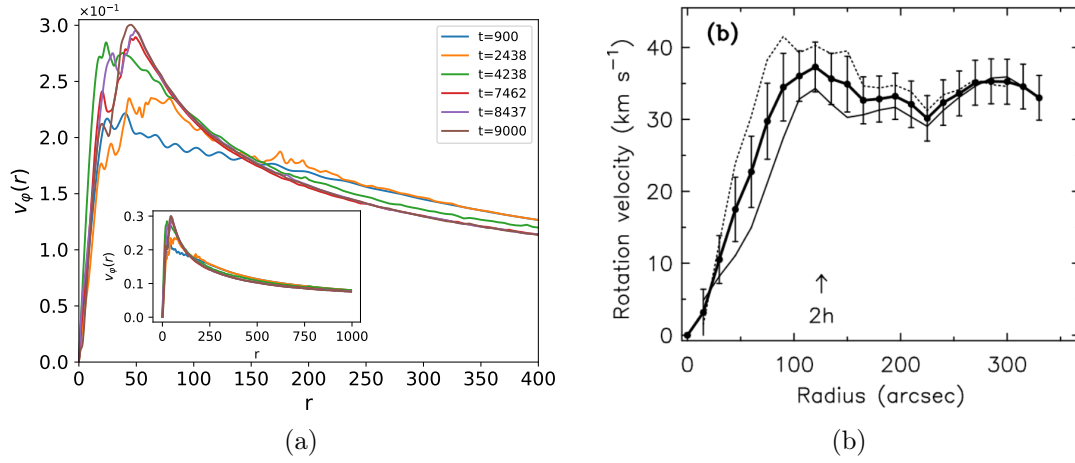


Figura 20: En 20a se tiene la curva de rotación teórica obtenida a partir de la ecuación (25) para la configuración $c_{12} : \{\eta = 0.3, \eta_2 = 5, \Lambda = 200\}$. Representamos hasta $r = 400 > R_{0.9} = 380.05$, véase el Cuadro 3, para tener más del 90 % de la masa presente en la gráfica. En la imagen interior se presenta el perfil completo. En 20b se tiene la curva de rotación experimental obtenida para la galaxia UGC 4305 extraída de [97].

en búsqueda de configuraciones que se ajusten mejor. Se quiere tener una región en torno a $R_{0.9}$ que pueda llegar a coincidir en mayor o menor medida con el perfil experimental, y a partir de ahí, un perfil que decaiga $\propto 1/\sqrt{r}$, como se espera para una partícula fuera de una galaxia.

5 Conclusión

En este Trabajo Fin de Máster, hemos estudiado numéricamente la formación dinámica de estrellas multi-estado y multi-campo como potenciales candidatos a materia oscura. El objetivo de este trabajo era investigar si, a partir de datos iniciales no ajustados (distribución Gaussiana inicial del campo), podíamos obtener distintas configuraciones considerando diferentes valores de los parámetros [86, 93]. Nuestros resultados confirman esta hipótesis, al haber logrado formar estrellas de bosones multi-estado para dos campos bosónicos complejos independientes, con una de las componentes presentando uno o más nodos en el perfil radial.

En las Secciones 2 y 3 hemos analizado de manera teórica y numéricas las ecuaciones que describen las estrellas multi-campo, para acabar simulando distintos objetos compactos en la Sección 4. Hemos estudiado cómo varía la formación y estabilidad de las estrellas al variar las amplitudes entre los campos con η y η_2 , la auto-interacción entre las partículas con Λ , y la masa asociada con los campos escalares complejos con η_3 . Con todo ello comprendido, se compararon las curvas de rotación teóricas con las experimentales de las galaxias. Podemos concluir que estos objetos tienen el potencial para describir la materia oscura presente en las galaxias. Podríamos ir tomando distintos valores de los parámetros para ajustarnos a las curvas experimentales. La formación de nodos permite un mayor símil entre algunos resultados, insinuando que algunos halos de galaxia podrían encontrarse en estados excitados, si la materia oscura estuviera compuesta de partículas bosónicas y formase una estrella de bosones. Destacar que nuestras estrellas de bosones multi-estado se han estabilizado para $\phi^{(1)} \sim \phi^{(2)}$ si se tenía más partículas en el estado de mayor orden de excitación.

Se presenta una limitación en nuestro código para las configuraciones con un gran número de nodos, véanse las Figs. 16, al verificarse que $R_{0.9} \sim r_{max}$. En ellas, no es cierta la suposición que hicimos inicialmente, $T_{\mu\nu} \approx 0$ para $r > R_{0.9}$, para así tomar $\alpha(r_{max}) = 1/a(r_{max})$. Podríamos mejorar directamente nuestro código con mayores tiempos de simulación, y mayores valores de r_{max} , teniendo en cuenta el gran coste computacional que esto conllevaría.

Otra manera de mejorar este estudio es intercambiando uno de los campos escalares complejos por materia bariónica. Las estrellas mixtas son interesantes por ello: hay una interacción entre materia conocida y un campo escalar que podría simular a los halos de materia oscura. A pesar de ello, nuestro estudio es una aproximación simplificada al caso real para contextualizarnos con el problema.

El trabajo se podría generalizar con la adición de otro campo escalar, variando los valores de las auto-interacciones para que cada campo escalar complejo tenga su propio valor de Λ , o yendo más allá de simetría esférica, entre otros. Los dejamos como posibles futuros estudios.

Bibliografía

- [1] Edwin Hubble. “A relation between distance and radial velocity among extra-galactic nebulae”. En: *Proceedings of the national academy of sciences* 15.3 (1929), págs. 168-173.
- [2] Edwin Hubble y Milton L Humason. “The velocity-distance relation among extra-galactic nebulae”. En: *Astrophysical Journal*, vol. 74, p. 43 74 (1931), pág. 43.
- [3] Donald E Osterbrock, Joel A Gwinn y Ronald S Brashear. “Edwin Hubble and the expanding universe”. En: *Scientific American* 269.1 (1993), págs. 84-89.
- [4] John P Huchra. “The hubble constant”. En: *Science* 256.5055 (1992), págs. 321-325.
- [5] Wendy L Freedman. “The Hubble constant and the expansion age of the Universe”. En: *Physics Reports* 333 (2000), págs. 13-31.
- [6] Wendy L Freedman. “Measurements of the Hubble constant: tensions in perspective”. En: *The Astrophysical Journal* 919.1 (2021), pág. 16.
- [7] Licia Verde, Tommaso Treu y Adam G Riess. “Tensions between the early and late Universe”. En: *Nature Astronomy* 3.10 (2019), págs. 891-895.
- [8] Edwin Hubble. “The problem of the expanding universe”. En: *Science* 95.2461 (1942), págs. 212-215.
- [9] Brian P Schmidt. “Nobel Lecture: Accelerating expansion of the Universe through observations of distant supernovae”. En: *Reviews of Modern Physics* 84.3 (2012), págs. 1151-1163.
- [10] Roya Mohayaee, Mohamed Rameez y Subir Sarkar. “Do supernovae indicate an accelerating universe?” En: *The European Physical Journal Special Topics* 230.9 (2021), págs. 2067-2076.
- [11] Phillip James Edwin Peebles. *Principles of physical cosmology*. Vol. 27. Princeton university press, 1993.
- [12] Cristi Stoica. “Big Bang singularity in the Friedmann-Lemaitre-Robertson-Walker space-time”. En: *arXiv preprint arXiv:1112.4508* (2011).
- [13] Stanislav R Kelner, A Yu Prosekin y FA Aharonian. “Mechanics and kinetics in the Friedmann-Lemaitre-Robertson-Walker space-times”. En: *Physical Review D* 84.4 (2011), pág. 044016.
- [14] Harold Irving Ewen y Edward Mills Purcell. “Observation of a Line in the Galactic Radio Spectrum: Radiation from Galactic Hydrogen at 1,420 Mc./sec.” En: *Nature* 168.4270 (1951), págs. 356-356.
- [15] KG Begeman. “HI rotation curves of spiral galaxies. I-NGC 3198”. En: *Astronomy and Astrophysics (ISSN 0004-6361)*, vol. 223, no. 1-2, Oct. 1989, p. 47-60. Research supported by ZWO and ASTRON. 223 (1989), págs. 47-60.
- [16] Roelof Bottema. “The maximum rotation of a galactic disc”. En: *arXiv preprint astro-ph/9706230* (1997).
- [17] Roelof Bottema y Jeroen PE Gerritsen. “An investigation of the structure and kinematics of the spiral galaxy NGC 6503”. En: *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 290.4 (1997), págs. 585-597.
- [18] Vera C Rubin. “Dark matter in spiral galaxies”. En: *Scientific American* 248.6 (1983), págs. 96-109.
- [19] RH Sanders. “Mass discrepancies in galaxies: dark matter and alternatives”. En: *The Astronomy and Astrophysics Review* 2 (1990), págs. 1-28.

- [20] Paolo Salucci. “Dark matter in galaxies: evidences and challenges”. En: *Foundations of Physics* 48 (2018), págs. 1517-1537.
- [21] Paolo Salucci. “The distribution of dark matter in galaxies”. En: *The Astronomy and Astrophysics Review* 27.1 (2019), pág. 2.
- [22] Bert Janssen. *Gravitación y Geometría. Una introducción moderna a la Teoría de la Relatividad General*. Colección Manuales/Major, 2022.
- [23] Kip S Thorne, Charles W Misner y John Archibald Wheeler. *Gravitation*. Freeman San Francisco, 2000.
- [24] R Benton Metcalf y Piero Madau. “Compound gravitational lensing as a probe of dark matter substructure within galaxy halos”. En: *The Astrophysical Journal* 563.1 (2001), pág. 9.
- [25] Anatolii Vladimirovich Zasov et al. “Dark matter in galaxies”. En: *Physics-Uspekhi* 60.1 (2017), pág. 3.
- [26] Volker Springel et al. “First results from the IllustrisTNG simulations: matter and galaxy clustering”. En: *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 475.1 (2018), págs. 676-698.
- [27] Dylan Nelson et al. “First results from the IllustrisTNG simulations: the galaxy colour bimodality”. En: *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 475.1 (2018), págs. 624-647.
- [28] Farhanul Hasan et al. “Filaments of The Slime Mold Cosmic Web And How They Affect Galaxy Evolution”. En: *arXiv preprint arXiv:2311.01443* (2023).
- [29] John F Wu, Christian Kragh Jespersen y Risa H Wechsler. “How the Galaxy-Halo Connection Depends on Large-Scale Environment”. En: *arXiv preprint arXiv:2402.07995* (2024).
- [30] Gianfranco Bertone y Dan Hooper. “History of dark matter”. En: *Reviews of Modern Physics* 90.4 (2018), pág. 045002.
- [31] Keith M Ashman. “Dark matter in galaxies”. En: *Publications of the Astronomical Society of the Pacific* 104.682 (1992), pág. 1109.
- [32] Andreas Ringwald. “Exploring the role of axions and other WISPs in the dark universe”. En: *Physics of the Dark Universe* 1.1-2 (2012), págs. 116-135.
- [33] Gianfranco Bertone, Dan Hooper y Joseph Silk. “Particle dark matter: Evidence, candidates and constraints”. En: *Physics reports* 405.5-6 (2005), págs. 279-390.
- [34] Leszek Roszkowski, Sebastian Trojanowski y Krzysztof Turzyński. “Towards understanding thermal history of the Universe through direct and indirect detection of dark matter”. En: *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics* 2017.10 (2017), pág. 005.
- [35] Nicolás Bernal et al. “The dawn of FIMP dark matter: a review of models and constraints”. En: *International Journal of Modern Physics A* 32.27 (2017), pág. 1730023.
- [36] Lam Hui et al. “Ultralight scalars as cosmological dark matter”. En: *Physical Review D* 95.4 (2017), pág. 043541.
- [37] José Javier Brey Abalo, Juan de la Rubia Pacheco y Javier de la Rubia Sánchez. *Mecánica estadística*. Universidad Nacional de Educación a Distancia, 2020.
- [38] Francisco S Guzmán y Jesús M Rueda-Becerril. “Spherical boson stars as black hole mimickers”. En: *Physical Review D* 80.8 (2009), pág. 084023.
- [39] LIGO Scientific Collaboration. En: (2024). URL: <https://www.ligo.org/>.
- [40] EGO the Virgo Collaboration. En: (2021). URL: <https://www.virgo-gw.eu/>.

- [41] National Astronomical Observatory of Japan Gravitational Wave Project Office. En: (2023). URL: <http://gwpo.nao.ac.jp/en/research/kagra.html>.
- [42] R. L. Workman et al. “Review of Particle Physics”. En: *PTEP* 2022 (2022), pág. 083C01. DOI: 10.1093/ptep/ptac097.
- [43] Peter W Higgs. “Broken symmetries and the masses of gauge bosons”. En: *Physical review letters* 13.16 (1964), pág. 508.
- [44] Georges Aad et al. “Observation of a new particle in the search for the Standard Model Higgs boson with the ATLAS detector at the LHC”. En: *Physics Letters B* 716.1 (2012), págs. 1-29.
- [45] “A detailed map of Higgs boson interactions by the ATLAS experiment ten years after the discovery”. En: *Nature* 607.7917 (2022), págs. 52-59.
- [46] Eanna E Flanagan y Scott A Hughes. “The basics of gravitational wave theory”. En: *New Journal of Physics* 7.1 (2005), pág. 204.
- [47] Alejandro José Florido Tomé. *Ondas gravitacionales: obtención de la ecuación y simulaciones*. University of Cordoba, 2023.
- [48] Albert Einstein y Nathan Rosen. “On gravitational waves”. En: *Journal of the Franklin Institute* 223.1 (1937), págs. 43-54.
- [49] Barry C Barish y Rainer Weiss. “LIGO and the detection of gravitational waves”. En: *Physics Today* 52.10 (1999), págs. 44-50.
- [50] Junaid Aasi et al. “Advanced ligo”. En: *Classical and quantum gravity* 32.7 (2015), pág. 074001.
- [51] BP Abbott et al. “LIGO: the laser interferometer gravitational-wave observatory”. En: *Reports on Progress in Physics* 72.7 (2009), pág. 076901.
- [52] Gregory M Harry, for the LIGO Scientific Collaboration et al. “Advanced LIGO: the next generation of gravitational wave detectors”. En: *Classical and Quantum Gravity* 27.8 (2010), pág. 084006.
- [53] Benjamin P Abbott et al. “GW170817: observation of gravitational waves from a binary neutron star inspiral”. En: *Physical review letters* 119.16 (2017), pág. 161101.
- [54] Benjamin P Abbott et al. “Binary black hole mergers in the first advanced LIGO observing run”. En: *Physical Review X* 6.4 (2016), pág. 041015.
- [55] Tejaswi Venumadhav et al. “New binary black hole mergers in the second observing run of Advanced LIGO and Advanced Virgo”. En: *Physical Review D* 101.8 (2020), pág. 083030.
- [56] Seth Olsen et al. “New binary black hole mergers in the LIGO-Virgo O3a data”. En: *Physical Review D* 106.4 (2022), pág. 043009.
- [57] Juan Calderón Bustillo et al. “GW190521 as a merger of Proca stars: a potential new vector boson of 8.7×10^{-13} eV”. En: *Physical Review Letters* 126.8 (2021), pág. 081101.
- [58] Miguel Bezares y Carlos Palenzuela. “Gravitational waves from dark boson star binary mergers”. En: *Classical and Quantum Gravity* 35.23 (2018), pág. 234002.
- [59] Miguel Bezares et al. “Gravitational waves and kicks from the merger of unequal mass, highly compact boson stars”. En: *Physical Review D* 105.6 (2022), pág. 064067.
- [60] Costantino Pacilio et al. “Gravitational-wave detectors as particle-physics laboratories: Constraining scalar interactions with a coherent inspiral model of boson-star binaries”. En: *Physical Review D* 102.8 (2020), pág. 083002.
- [61] Carlos Palenzuela et al. “Gravitational wave signatures of highly compact boson star binaries”. En: *Physical Review D* 96.10 (2017), pág. 104058.

- [62] Miguel Bezares, Carlos Palenzuela y Carles Bona. “Final fate of compact boson star mergers”. En: *Physical Review D* 95.12 (2017), pág. 124005.
- [63] Einstein Telescope. En: (2020). URL: <https://www.et-gw.eu/>.
- [64] Cosmic Explorer: Next-generation gravitational-wave observatories. En: (2023). URL: <https://cosmicexplorer.org/>.
- [65] Feryal Özel y Paulo Freire. “Masses, radii, and the equation of state of neutron stars”. En: *Annual Review of Astronomy and Astrophysics* 54 (2016), págs. 401-440.
- [66] Edward Seidel y Wai-Mo Suen. “Dynamical evolution of boson stars: Perturbing the ground state”. En: *Physical Review D* 42.2 (1990), pág. 384.
- [67] Franz E Schunck y Diego F Torres. “Boson stars with generic self-interactions”. En: *International Journal of Modern Physics D* 9.05 (2000), págs. 601-618.
- [68] Phillippe Jetzer. “Boson stars”. En: *Physics Reports* 220.4 (1992), págs. 163-227.
- [69] Susana Valdez-Alvarado et al. “Dynamical evolution of fermion-boson stars”. En: *Physical Review D* 87.8 (2013), pág. 084040.
- [70] Fabrizio Di Giovanni et al. “Can fermion-boson stars reconcile multimessenger observations of compact stars?” En: *Physical Review D* 105.6 (2022), pág. 063005.
- [71] Steven L Liebling y Carlos Palenzuela. “Dynamical boson stars”. En: *Living Reviews in Relativity* 26.1 (2023), pág. 1.
- [72] David J Kaup. “Klein-gordon geon”. En: *Physical Review* 172.5 (1968), pág. 1331.
- [73] Monica Colpi, Stuart L Shapiro e Ira Wasserman. “Boson stars: Gravitational equilibria of self-interacting scalar fields”. En: *Physical review letters* 57.20 (1986), pág. 2485.
- [74] João Luís Rosa, Joaquín Pelle y Daniela Pérez. “Accretion disks and relativistic line broadening in boson star spacetimes”. En: *arXiv preprint arXiv:2403.11540* (2024).
- [75] Jorge Castelo Mourelle et al. “Rotating Fermion-Boson Stars”. En: *arXiv preprint arXiv:2403.13052* (2024).
- [76] Marcelo Gleiser. “Stability of boson stars”. En: *Physical Review D* 38.8 (1988), pág. 2376.
- [77] Eric Cotner. “Collisional interactions between self-interacting nonrelativistic boson stars: effective potential analysis and numerical simulations”. En: *Physical Review D* 94.6 (2016), pág. 063503.
- [78] Nicolas Sanchis-Gual, Carlos Herdeiro y Eugen Radu. “Self-interactions can stabilize excited boson stars”. En: *Classical and Quantum Gravity* 39.6 (2022), pág. 064001.
- [79] Fintan D Ryan. “Spinning boson stars with large self-interaction”. En: *Physical Review D* 55.10 (1997), pág. 6081.
- [80] Argelia Bernal et al. “Multistate boson stars”. En: *Physical Review D* 81.4 (2010), pág. 044031.
- [81] Brian Harold Bransden y Charles Jean Joachain. *Physics of atoms and molecules*. Pearson Education India, 2003.
- [82] Fabrizio Di Giovanni et al. “A stabilization mechanism for excited fermion–boson stars”. En: *Classical and Quantum Gravity* 38.19 (2021), pág. 194001.
- [83] Marco Brito et al. “Stability and physical properties of spherical excited scalar boson stars”. En: *Physical Review D* 107.8 (2023), pág. 084022.
- [84] Jayashree Balakrishna, Edward Seidel y Wai-Mo Suen. “Dynamical evolution of boson stars. II. Excited states and self-interacting fields”. En: *Physical Review D* 58.10 (1998), pág. 104004.
- [85] Edward Seidel y Wai-Mo Suen. “Formation of solitonic stars through gravitational cooling”. En: *Physical review letters* 72.16 (1994), pág. 2516.

- [86] Daniela Delia Alic et al. “Theoretical issues in Numerical Relativity simulations”. En: (2009).
- [87] Bernard Schutz. *A first course in general relativity*. Cambridge university press, 2022.
- [88] Fortran Programming Language. En: (1990). URL: <https://fortran-lang.org/es/index>.
- [89] Scott H Hawley y Matthew W Choptuik. “Numerical evidence for “multiscalar stars””. En: *Physical Review D* 67.2 (2003), pág. 024010.
- [90] F Siddhartha Guzman y L Arturo Urena-López. “Evolution of the Schrödinger-Newton system for a self-gravitating scalar field”. En: *Physical Review D* 69.12 (2004), pág. 124033.
- [91] Miguel Alcubierre. *Introduction to 3+ 1 numerical relativity*. Vol. 140. OUP Oxford, 2008.
- [92] Wolfram Mathematica. En: (1996). URL: <https://www.wolfram.com/mathematica/>.
- [93] FS Guzmán. “Introduction to numerical relativity through examples”. En: *Revista mexicana de física* 53 (2007), págs. 78-93.
- [94] Miguel Alcubierre et al. “Numerical studies of Φ^2 -oscillatons”. En: *Classical and Quantum Gravity* 20.13 (2003), pág. 2883.
- [95] Scott H Hawley y Mathew W Choptuik. “Boson stars driven to the brink of black hole formation”. En: *Physical Review D* 62.10 (2000), pág. 104024.
- [96] Yoshiaki Sofue et al. “Central rotation curves of spiral galaxies”. En: *The Astrophysical Journal* 523.1 (1999), pág. 136.
- [97] RA Swaters et al. “The rotation curves shapes of late-type dwarf galaxies”. En: *Astronomy & Astrophysics* 493.3 (2009), págs. 871-892.
- [98] Katherine Garrett y Gintaras Dūda. “Dark matter: A primer”. En: *Advances in Astronomy* 2011.1 (2011), pág. 968283.
- [99] Changpin Li y Fanhai Zeng. “Finite difference methods for fractional differential equations”. En: *International Journal of Bifurcation and Chaos* 22.04 (2012), pág. 1230014.
- [100] Ben Kain. “Boson stars and their radial oscillations”. En: *Physical Review D* 103.12 (2021), pág. 123003.
- [101] Hermann Minkowski. “Criticisms and Discussions: Time and Space.” En: *The Monist* 28.2 (1918), págs. 288-302.
- [102] Karel V Kuchař. “Geometrodynamics of Schwarzschild black holes”. En: *Physical Review D* 50.6 (1994), pág. 3961.
- [103] Adam Burrows. “Supernova explosions in the universe”. En: *Nature* 403.6771 (2000), págs. 727-733.
- [104] TD Lee y Yang Pang. “Stability of mini-boson stars”. En: *Nuclear Physics B* 315.2 (1989), págs. 477-516.