Máster Interuniversitario en Matemáticas

Modelización. Procesos Estocásticos

Trabajo Tema 6: Récords Geométricos

Alejandro José Florido Tomé

Curso académico 2024/25

1 Introducción

Un récord, tal y como conocemos de la teoría, no es más que la medida de una observación que es mayor que la obtenida anteriormente [1]. Considera una serie genérica temporal con una secuencia de n variables aleatorias $[X_1, X_2, ..., X_n]$. Entonces, un récord ocurre si se presenta un X_k en el puesto $1 \leq k \leq n$ que sea mayor que todas las observaciones anteriores.

Se puede hacer la fácil analogía a día de hoy con el cambio climático: la mayor temperatura alcanzada en Granada fue en el aeropuerto el 14 de agosto de 2021 según la AEMET [2], de 46 grados centígrados. Surge naturalmente la pregunta en torno a cuanto tiempo se tendrá que esperar para hallar un valor mayor [3].

El récord así definido es discreto, asociado también a series temporales discretas, lo cuál trae bastantes simplificaciones y cálculos sencillos con ella, pero puede no llegar a ser realista para ciertos casos. Al final, vivimos en un espacio-tiempo continuo (apoyado al menos por la mayoría de la comunidad científica), y un récord más realista sería uno que tuviera en cuenta un tiempo continuo. Con dicha finalidad, se estudiaron los denominados 'récords geométricos' que le dan título al trabajo, y que serán los que abordemos a continuación.

Para ello, se estudiará un sistema con tiempo continuo en el que ocurren eventos que van alterando los valores de ciertas magnitudes aleatoriamente de manera estocástica. Cada evento será descrito por las coordenadas (t, x), tiempo y magnitud, para dicho evento [4].

Veamos a continuación ciertas nociones básicas para comprender los récords geométricos.

1.1. Modelo del sistema

Definición 1: ϵ es un conjunto aleatorios de puntos que ocurren en el semi-plano $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$, tratándose del historial continuo de eventos que han tomado lugar.

Entonces, $\epsilon(B) := card(\epsilon \cap B)$ serán un conjunto de puntos de $B \subset \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$.

Asumiremos que ϵ es un proceso puntual de Poisson homogéneo en el tiempo, es decir:

- Si $B \subset \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$, sus variables aleatorias siguen una distribución de Poisson con media $\int\int_B \lambda(x) dt dx$, con $\lambda(x)dx$ el ritmo al que ocurren los eventos en el rango infinitesimal $(x, x + dx)$.
- Si $\{B_n\}_n$ es una colección finita de subgrupos, entonces $\{\epsilon(B_n)\}_n$ será una colección finita de variables aleatorias independientes.

1.2. Récords

Se tiene un récord en el punto $(t,x) \in \epsilon$ si y solo si todos los eventos anteriores son menores en magnitud, $\epsilon([0,t] \times [x,\infty)) = 0$

Definición 2: un evento de magnitud máxima que ocurre en el intervalo $[0,t]$ será $X(t) := sup\{x|(s,x) \in \epsilon, s \in [0,t]\}$, tratándose X de un proceso Markoviano.

Si se da un récord con magnitud x, se dará otro cuando se supere dicho valor. Dicha ocurrencia de eventos forma un proceso temporal de Poisson con una tasa dada por $\Lambda(x) := \int_x^\infty \lambda(u)du$.

Por ende, la densidad de probabilidad de que el proceso X pase de x a otro perteneciente en el rango $(y, y+dy)$ es $p(x;y)dy$, con $p(x;y) = \lambda(y)/\Lambda(x)$, $x < y < \infty$.

Y la probabilidad de distribución del máximo $X(t)$ será:

$$P(X(t) \leq x) = e^{-t\Lambda(x)}. \tag{1}$$

2 Récords geométricos

Asumamos que nos encontramos ante un récord con magnitud x. Consideremos $\tau(x)$ como el tiempo necesario para que se de el siguiente récord, y $T_k(x)$ el tiempo necesario para que se de un récord que es $k-$veces superior a todos los récords anteriores, con $k > 1$.

Es claro que $\tau(x)$, por como la hemos definido, tendrá asociada (1) como distribución. Vamos a interesarnos en hallar la probabilidad de distribución del tiempo del récord geométrico, $T_k(x)$.

Si esperamos $\tau(x)$ tiempo hasta que se de un nuevo récord $y > x$, pueden darse dos casos:

- Si $y > kx$, sería suficiente para ser capaces de definir $T_k(x) = \tau(x)$. El récord y sería k-veces superior a todos los récords anteriores, y no habría mayor complejidad.
- Si $x < y < kx$, tendrá que seguir pasando el tiempo $T_k(y)$ hasta que se supere el récord y, verificando que sea k-veces y. Es decir, $T_k(x) = \tau(x) + T_k(y)$.

Podemos hallar así las probabilidades de cola de $T_k(x)$. Teniendo en cuenta los dos párrafos anteriores, la probabilidad vendrá dada por la integral asociada a que $y > kx$ y por la de que $x < y < kx$:

$$P(T_k(x) > t) = \int_{kx}^{\infty} P(\tau(x) > t)p(x;y)dy + \int_{x}^{kx} P(\tau(x) + T_k(y) > t)p(x;y)dy. \tag{2}$$

Se puede desarrollar de manera sencilla y encontrar una solución en función de $\Lambda(x)$. La estructura de $\mu := \inf_{x>0} \frac{\Lambda(kx)}{\Lambda(x)}$, que depende de $\Lambda(x)$, es esencial para caracterizar nuestros récords geométricos (por ejemplo, (2) depende de $\Lambda(x)$). Veamos su importancia a partir de la siguiente proposición:

Proposición 1: Asumiendo $\mu > 0$, la ecuación integral:

$$L(x) = \frac{1}{\Lambda(x) + \theta} \left\{ \Lambda(kx) + \int_x^{kx} L(y)\lambda(y)dy \right\}, \tag{3}$$

con $k > 1$ y $\theta \geq 0$, admite una solución única en el espacio de funciones continuas $L : \mathbb{R}_+ \to [0, 1]$. $L(x) = E[e^{-\theta T_k(x)}]$ se trata de la transformada de Laplace. Demostración en el Apéndice A de [3].

Como $\Lambda(x)$ es monótona decreciente, $0 \leq \mu < 1$, y así nos aseguramos de la existencia y unicidad de las soluciones de la ecuación integral anterior.

3 Sistemas Fréchet

Se comienza con un ejemplo sencillo que se profundizó en [3]. Un uso práctico puede ser el estudio de inundaciones, de donde se recopilan los récords (máxima precipitación anual) durante un intervalo temporal (por ejemplo, de 50 años en cierta ciudad o región). Así, se puede llegar a predecir cuando se alcance una precipitación máxima, dándonos un tiempo de reacción para actuar. Esto se describe con leyes de probabilidades de los sistemas Fréchet.

Para estos sistemas, $\lambda(x) = \alpha/x^{\alpha-1}$ y $\Lambda(x) = 1/x^{\alpha}$, con $\alpha > 0$. Ahora, se fija η como ser la única solución de la ecuación $ln(\eta)/(\eta - 1) = \alpha ln(k)$, con $k > 1$.

Según la Proposición 1, la ecuación (3) admite una solución única que en el presente caso adopta la forma:

$$\mu := \inf_{x>0} \frac{\Lambda(kx)}{\Lambda(x)} = \frac{1}{k^{\alpha}} > 0. \tag{4}$$

Definición 3: la propiedad de escala de la familia de tiempos aleatorios $\{T_k(x)\}_{x \geq 0}$ es $T_k(x) \overset{d}{=} x^{\alpha} T_k(1)$, donde $\overset{d}{=}$ denota igualdad en leyes de distribución.

Es decir, que $T_k(x)$ es igual, en ley de distribución, a $T_k(1)$ multiplicado por x^{α}.

Con todo lo anterior, se tiene lo necesario para obtener la siguiente proposición.

Proposición 2: Sea $v = k^{\alpha}$ y η la única solución de $ln(\eta)/(\eta - 1) = ln(v)$, entonces:

- Los momentos de orden $n < \eta$ de los tiempos de los récords geométricos $T_k(x)$

convergen, dados por:

$$E[(T_k(x))^n] = x^{\alpha n} \frac{(n-1)!}{1-ln(v)} \frac{2}{2-v} \frac{3}{3-v^2} \cdots \frac{n}{n-v^{n-1}}. \tag{5}$$

- Los momentos de orden $n \geq \eta$ divergen.
- Las probabilidades de cola de $T_k(x)$ vienen dados por:

$$P(T_k(x) > t) \underset{t\to\infty}{\sim} x^{\alpha\eta} \frac{l(t)}{t^\eta}, \tag{6}$$

con $l(t)$ una función que varía lentamente con el tiempo.

4 Sistemas Weibull

Es interesante estudiar este tipo de sistemas, ya las magnitudes de muchos sistemas físicos suelen estar acotados por distintos parámetros tales como el tamaño del sistema. Por ejemplo, la cantidad de agua en vaso al aire libre aumentará con el tiempo en un día de lluvia, hasta que se llegue a la capacidad máxima y empiece a desbordar. En estos casos, se aplican las leyes de probabilidades de los sistemas Weibull.

Para estos sistemas, $\lambda(y) = \alpha(-y)^{\alpha-1}$ y $\Lambda(y) = (-y)^\alpha$, siendo ahora las magnitudes $y \leq 0$ con $0 < k < 1$, $\alpha > 0$. La relación entre las magnitudes $(t, x) \in \epsilon$ del resto del trabajo y las aquí definidas es de la forma $(t, y) = (t, -1/x) \in \bar{\epsilon}$, siendo $\bar{\epsilon}$ un proceso puntual transformado en $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$.

Denominaremos para este modelo el proceso máximo a $Y = (Y(t))_{t\geq 0} \overset{d}{=} -1/(X(t))_{t\geq 0}$. $X(t)$ está asociado al sistema de Fréchet con $\lambda(x) = \alpha/x^{\alpha-1}$ y $\Lambda(x) = 1/x^\alpha$. Con esta analogía, podemos pasar de una descripción a otra de manera muy sencilla. Calculemos el tiempo del récord gemétrico del sistema Weibull, $\overline{T}_k(y)$, asumiendo que el récord actual es y. Por definición,

$$\overline{T}_k(y) \overset{d}{=} \text{ínf}\{t \geq 0 | Y(t) > kY(t-)\} \overset{d}{=} \text{ínf}\left\{t \geq 0 | \frac{-1}{X(t)} > k\frac{-1}{X(t-)}\right\}$$

$$\overset{d}{=} \text{ínf}\left\{t \geq 0 | X(t) > \frac{1}{k}X(t-)\right\} \overset{d}{=} T_{1/k}(-1/y). \tag{7}$$

Obterniéndose la otra gran relación entre los k tiempos de los récords geométricos del sistema de Weibull en y, con el $(1/k)$ tiempo récord geométrico del sistema Fréchet en $x = -1/y$.

Así, tendríamos todo lo necesario para transformar la Proposición 2 para el sistema Fréchet a una proposición análoga para los sistemas Weibull.

5 Conclusión

Al considerar sistemas con tiempos continuos en vez de discretos como se ha estado estudiando con los récords, se han investigado los tiempos de los récords geométricos, $T_k(x)$, definida como un récord cuya magnitud es al menos k-veces superior al resto de magnitudes obtenidas en los récords anteriores.

Junto a la definición de $T_k(x)$ se tiene un proceso puntual de Poisson homogéneo en el tiempo, ϵ, definida por una función $\lambda(x)$.

Con estas dos, hemos podido exponer las probabilidades de cola de $T_k(x)$ y la existencia y unicidad de soluciones de la ecuación integral asociada a la transformada de Laplace.

A continuación, hemos particularizado a los sistemas Fréchet y Weibull, que se han podido relacionar para pasar de un tipo de récord a otro según. De la Proposición 2 se han desprendido los siguientes resultados:

- Los momentos $E[(T_k(x))^n]$ convergen si $n < \eta$.
- Las probabilidades de cola decaen algebraicamente tal que el exponente que lo gobierna es η.

Concluir que ha sido un trabajo bibliográfico para comprender en qué consisten exactamente los récords geométricos junto a algunos aspectos generales de interés como $P(T_k(x) > t)$, y entender su importancia en algunos modelos realistas como los sistemas Fréchet y Weibull.

Referencias

[1] HN Nagaraja. "Record values and related statistics-a review". En: *Communications in Statistics-Theory and Methods* 17.7 (1988), págs. 2223-2238.

[2] Agencia Estatal de Meteorología. En: (2025). URL: `https://www.aemet.es/es/serviciosclimaticos/datosclimatologicos/efemerides_extremos*?w=0&k=and&l=5530E&datos=det&x=5530E&m=13&v=TMX`.

[3] Iddo Eliazar. "On geometric record times". En: *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* 348 (2005), págs. 181-198.

[4] Iddo Eliazar. "Extremes: a continuous-time perspective". En: *Probability in the Engineering and Informational Sciences* 19.3 (2005), págs. 289-308.