Práctica Relatividad General

Belén Durán González
Alejandro José Florido Tomé

22 de octubre de 2024

1. Introducción

En esta sección se va a introducir brevemente y de forma teórica lo que se ha llevado a cabo en la práctica. Posteriormente, en el siguiente apartado se expondrán y explicarán las soluciones halladas.

El objetivo principal de este trabajo es realizar un primer acercamiento a la relatividad numérica. Para ello, a través de métodos numéricos se van a calcular soluciones de EDP hiperbólicas, en específico, de la ecuación de onda en una dimensión espacial. Estas soluciones serán presentadas en forma de gráficas que se explican en la siguiente sección.
La aproximación en diferencias finitas es el procedimiento que se va a seguir. Por ello, es importante notar que las funciones involucradas en el sistema de las ecuaciones serán evaluadas en un número finito de puntos, es decir, el dominio es discreto. La función queda definida en valores de las coordenadas espaciales y temporales, las cuales serán puntos concretos en la malla. Este método supone que las funciones pueden expandirse en series de Taylor en torno a los puntos, por lo que si una función está definida en x (o t), se pueden obtener el valor de los puntos vecinos. Esto lleva a una problemática en los límites del dominio, para los cuales se impondrán unas condiciones de frontera y unas condiciones iniciales.
Por otra parte, la ecuación de onda está definida en el espacio de Minkowski en 1+1 dimensiones, y su ecuaciones de evolución vienen dadas por [1]:

$$\partial_t \pi = \partial_x(\alpha\psi + \beta\pi)$$

$$\partial_t \psi = \partial_x(\alpha\pi + \beta\psi)$$

Donde $\psi := \partial_x \phi$, $\pi := \frac{(\partial_t\phi - \partial_x\phi)}{\alpha}$ y α y β vienen dadas por la transformación general de coordenadas: $dt = \alpha d\tilde{t}$ y $dx = d\tilde{x} - \beta d\tilde{t}$.

Además de todo lo expuesto, cabe destacar que para la obtención de los resultados se ha usado un algoritmo Runge-Kutta de tercer orden. A continuación, en el siguiente apartado se muestran y comentan dichos resultados.

2. Resultados

En este apartado se presentan los resultados para diferentes combinaciones de los parámetros α y β que se han elegido .

2.1. $\alpha = 1, \beta = 0$

Para este primer resultado, se tiene el caso usual de la ecuación de onda. Se presenta en la figura 1. En esta puede verse como la gaussiana inicial se divide en dos gaussianas pequeñas con la misma amplitud y el mismo ancho, que llegan a las fronteras al mismo tiempo. Se podría hacer la analogía con el caso clásico en el que se toca el punto intermedio de la cuerda de una guitarra, y se ve la onda

[1] Veáse *Guzmán, F. S. (2007). Introduction to numerical relativity through examples. Revista mexicana de física, 53, 78-93.*

diviéndose en dos y propagándose hacia ambos extremos. La diferencia radica en los contornos, ya que en la guitarra se tienen un límite espacial fijo donde llega la onda y rebota; mientras que en el caso presentado (y en el resto) se han impuesto unas condiciones tales que la onda "continúa" su recorrido aunque no se vea gracias a que se la ha descrito como una onda saliente (para ello se han eliminado las ondas reflejadas).

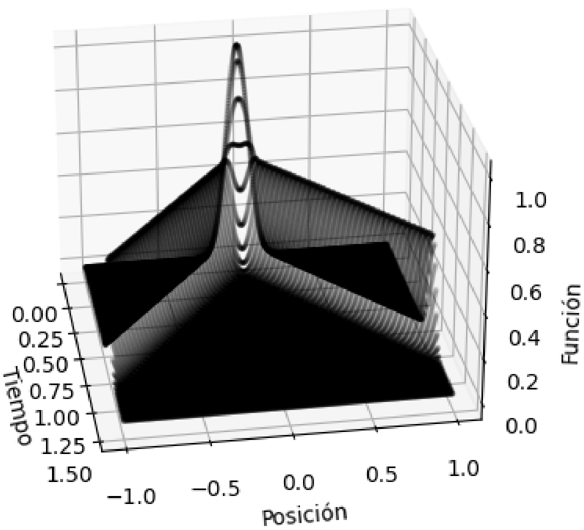

Figura 1: Solución de la ecuación de onda, la función ϕ, para $\alpha = 1$ y $\beta = 0$, frente al tiempo, t, y la posición, x.

2.2. $\alpha = 1, \beta = 1$

Para este caso, las coordenadas se mueven hacia $x > 0$ a la velocidad de propagación de la onda, haciendo esto que el sistema de coordenadas siga a un pulso. Es por esto que puede verse como en la figura 2 se tiene un pulso centrado permanente.

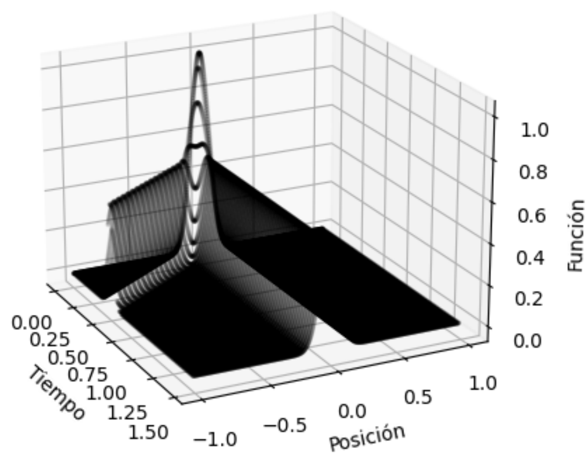

Figura 2: Solución de la ecuación de onda, la función ϕ, para $\alpha = 1$ y $\beta = 1$, frente al tiempo, t, y la posición, x.

2.3. $\alpha = \alpha(x), \beta = 0$

En la figura 3 se presenta la solución a la combinación $\alpha = \alpha(x), \beta = 0$, donde $\alpha = 0,25 \cdot tanh(10x) + 0,75$, es una función escalón suavizada que va de 0,5 a 1,0. Esto provoca que la evolución de la zona donde $x < 0 (\alpha = 0,5)$ es más lenta que la región donde $x > 0 (\alpha = 1)$.

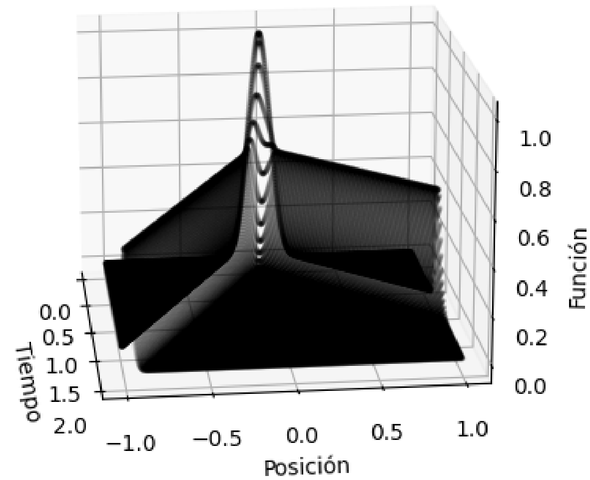

Figura 3: Solución de la ecuación de onda, la función ϕ, para $\alpha = \alpha(x)$ y $\beta = 0$, frente al tiempo, t, y la posición, x.

2.4. $\alpha = 1$, $\beta = x$

En este último caso, se observa lo representado en la figura 4.

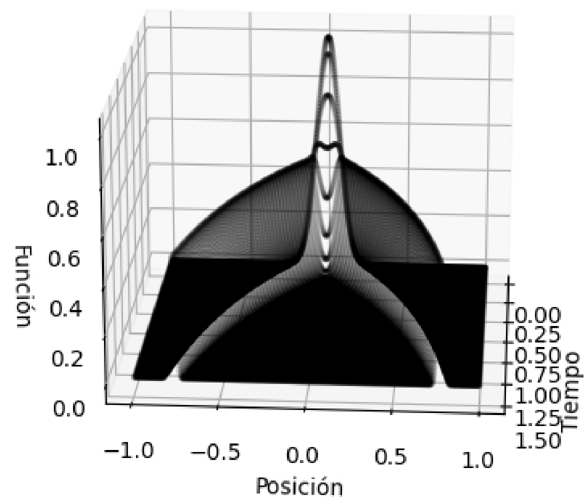

Figura 4: Solución de la ecuación de onda, la función ϕ, para $\alpha = 1$ y $\beta = x$, frente al tiempo, t, y la posición, x.

El hecho de que β, la única componente no nula del vector de corriente, sea igual a la posición, indica que las coordenadas viajan a la velocidad de la onda gaussiana en $x = \pm 1$, dando $\beta = \pm 1$, lo que permite hacer una analogía con el apartado anterior. Al viajar a la misma velocidad en estos puntos de la frontera, implica que el pulso se va aproximando a las fronteras, sin llegar a ellas, y comprimiéndose.

Desde la vista de la programación, como se tiene un dx con un valor finito, llegará un punto, para un valor del tiempo, donde la sensibilidad del programa no será suficiente, y aparecerán cosas incoherentes, tal y como se puede ver en la figura 5.

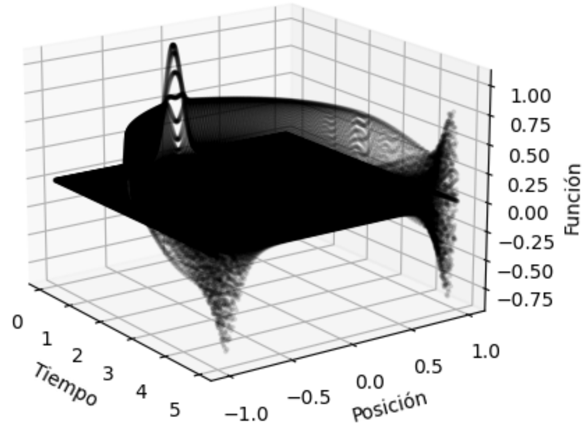

Figura 5: Solución de la ecuación de onda, la función ϕ, para $\alpha = 1$ y $\beta = x$, frente al tiempo, t, y la posición, x, para mayores valores del tiempo respecto a la Figura 4.