Instituto de Matemáticas
Universidad de Granada

Máster Interuniversitario en Matemáticas

Modelización. Procesos Estocásticos

Ejercicios Tema 5

Alejandro José Florido Tomé

Curso académico 2024/25

1 Ejercicio teórico

Las propiedades a demostrar son las siguientes:

1. La función característica de una suma de variables aleatorias independientes es el producto de las funciones características.
2. Cuando los momentos existen y son finitos se tiene la relación $E(X^k) = \frac{1}{i^k}\phi^{(k)}(0)$, donde $f^{(k)}$ representa la derivada k-ésima de f.

1.

Procedamos con la demostración, en primer lugar, de la primera propiedad. Sea la función característica de una variable aleatoria $\phi(t) = E(e^{itX})$, es claro que la función característica de una suma de n variables independientes será:

$$\phi(t) = E(e^{it(X_1+X_2+...+X_n)}) = E(e^{itX_1} \cdot e^{itX_2} \cdot ... \cdot e^{itX_n}) = \int e^{itx_1} \cdot e^{itx_2} \cdot ... \cdot e^{itx_n} dF(x_1, ..., x_n), \tag{1}$$

donde se ha utilizado en la segunda igualdad la propiedad de la exponencial $e^{a+b} = e^a \cdot e^b$. Como las variables dadas son independientes entre sí, podremos escribir la función de distribución F como $F(x_1, x_2, ..., x_n) = F(x_1) \cdot F(x_2) \cdot ... \cdot F(x_n)$, permitiéndonos reescribir la ecuación (1) como una integral para cada variable:

$$\phi(t) = \left(\int e^{itx_1} dF(x_1)\right) \cdot \left(\int e^{itx_2} dF(x_2)\right) \cdot ... \cdot \left(\int e^{itx_n} dF(x_n)\right) = E(e^{itX_1}) \cdot E(e^{itX_2}) \cdot ... \cdot E(e^{itX_n}). \tag{2}$$

Mostrándose que efectivamente, $\phi(t) = \prod_{i=1}^{n} E(e^{itX_i}) = \prod_{i=1}^{n} \phi_{X_i}(t)$.

2.

Sea la función característica de una variable aleatoria $\phi(t) = E(e^{itX})$, podemos reescribirla si usamos a nuestro favor la expansión de la exponencial usando su serie de Taylor:

$$e^{itX} = 1 + itX + \frac{(itX)^2}{2!} + \frac{(itX)^3}{3!} ... \tag{3}$$

Entonces, teniendo en cuenta que la función de distribución es independiente de la variable t, se tiene que la función característica será:

$$\phi(t) = E(1) + itE(X) + \frac{(it)^2}{2!} E(X^2) + \frac{(it)^3}{3!} E(X^3) + ... \tag{4}$$

Es necesario que $E(X^k) < \infty$, para $k \geq 0$ y k un número natural, y que los distintos $E(X^k)$ existan. Bajo estas dos condiciones, el desarrollo presentado en (4) es correcto. Si le calculamos la derivada de orden k a dicha función característica, se tendrá que:

$$\phi^{(k)}(t) = \frac{d^k}{dt^k}(E(1)) + \frac{d^k}{dt^k}(itE(X)) + \frac{d^k}{dt^k}\left(\frac{(it)^2}{2!} E(X^2)\right) + \frac{d^k}{dt^k}\left(\frac{(it)^3}{3!} E(X^3)\right) + ... \tag{5}$$

Tomando $k = 2$ para ver que ocurre, se tendría que el segundo término de la ecuación anterior sería nulo porque $\frac{d}{dt}(\frac{dt}{dt}) = \frac{d}{dt}1 = 0$, mientras que en el tercer término $\frac{d}{dt}\frac{dt^2}{dt} = 2\frac{dt}{dt} = 2$, y el cuarto, $dt^3/dt^2 = \frac{d}{dt}\frac{dt^3}{dt} = 3\frac{dt^2}{dt} = 6t$, con $p \geq 1$. Es decir, la segunda derivada de $\phi(t)$ evaluada en cero sería:

$$\phi^{(2)}(t=0) = 0 + 0 + i^2E(X^2) + i^3tE(X^3)|_{t=0} + i^4t^2E(X^4)|_{t=0} + ... = i^2E(X^2). \quad (6)$$

A partir de este caso particular es claro que el único término que sobrevive a la derivada k-ésima y a la evaluación en $t = 0$ es el k-término:

$$\phi^{(k)}(0) = i^kE(X^k) \to E(X^k) = \frac{\phi^{(k)}(0)}{i^k}. \quad (7)$$

Obteniéndose una relación de vital importancia al conectarnos los momentos de un variable aleatoria con fu función característica.

2 Ejercicio teórico

En el caso discreto, demostrar que si g es una función tal que $E(|g(X)|) < \infty$, entonces $E(E(g(X)|Y)) = E(g(X))$.

Por definición de la esperanza condicionada en el caso discreto,

$$E(X|Y=y) = \sum_j x_j \ \mathrm{P}(X = x_j|Y=y), \tag{8}$$

se tiene que:

$$E(E(g(X)|Y)) = \sum_j E(g(X)|Y=y_j)P(Y=y_j) = \sum_j \left[\sum_i g(x_i)P(X=x_i|Y=y_j)\right] P(Y=y_j). \tag{9}$$

Gracias a que $E(g(X)) < \infty$, podemos intercambiar el orden de las sumas:

$$E(E(g(X)|Y)) = \sum_i g(x_i) \left[\sum_j P(X=x_i|Y=y_j)P(Y=y_i)\right]. \tag{10}$$

Lo que se encuentra entre corchetes, debido a la ley de probabilidad total, corresponde con $P(X = x_i)$, ya que se está sumando sobre todos los valores de y_j, quedando finalmente que:

$$E(E(g(X)|Y)) = \sum_i g(x_i)P(X=x_i) = E(g(X)), \tag{11}$$

donde en la última igualdad se ha usado la definición de $E(g(X))$. Así, se ha demostrado lo deseado.

Esta demostración es sencilla, y por ello se ha decidido realizar una demostración teórica extra para añadirle contenido al elaboramiento teórico.

3 Ejercicio teórico

Aplicando el teorema de renovación de Blackwell, probar que para $h > 0$ se verifica que:

$$\lim_{t \to +\infty} (E(t) - E(t-h)) = h \frac{EX_1}{ET1}. \tag{12}$$

Para un proceso de renovación, la esperanza $E(t)$ puede expresarse en términos de la tasa de renovación y el tiempo hasta la primera renovación gracias al teorema de Blackwell:

$$E(t) = \frac{t}{ET1} EX_1 + O(t), \tag{13}$$

con $O(t)$ términos que crecen más lentamente que t cuando $t \to +\infty$. De manera análoga se obtiene la expresión de $E(t-h)$:

$$E(t-h) = \frac{t-h}{ET1} EX_1 + O(t-h). \tag{14}$$

Entonces, con (13) y (14), somos capaces de hallar su diferencia:

$$E(t) - E(t-h) = \frac{t}{ET1} EX_1 - \frac{t-h}{ET1} EX_1 + O(t) - O(t-h) = \frac{h}{ET1} EX_1 + O(t) - O(t-h). \tag{15}$$

En el límite en el que $t \to \infty$, los dos últimos términos se vuelven despreciables frente al primer término, dando lugar a la igualdad que se quería demostrar:

$$\lim_{t \to +\infty} (E(t) - E(t-h)) = h \frac{EX_1}{ET1}. \tag{16}$$

4 Ejercicio práctico

Iré colocando los comentarios y las líneas de R que he ido introduciendo, junto con los resultados que se han ido obteniendo.

1) Hacer el cálculo de ruina para una única distribución Erlang en reclamaciones y en tiempos de llegada

La distribución de Erlang se trata de una distribución de probabilidad continua utilizada en procesos de espera y en la teoría de colas. Viene definido por dos parámetros, el 'shape' que representa el número de eventos que deben ocurrir, y el 'rate' que indica la frecuencia con la que ocurren los eventos.

```r
install.packages("actuar")
library(actuar)

ruina_unica<-function(){
  psi<-ruin(claims='Erlang',
            par.claims=list(shape=2,rate=2),
            wait='Erlang',
            par.wait=list(shape=2,rate=1),
            premium=0.6)
  return(psi(0:10))
}

resultados_uno<-ruina_unica()
print(resultados_uno)
```

Lo que dio como resultado la siguiente lista de números:

[5.993530e-01 , 2.449493e-01 , 9.199972e-02 , 3.399053e-02 , 1.251566e-02 , 4.605123e-03 , 1.694197e-03 , 6.232654e-04 , 2.292869e-04 , 8.434998e-05 , 3.103063e-05]

2) Repetir este cálculo para una mixtura de distribuciones Erlang. En ambos casos la media debe coincidir con el ejemplo inicial.

Supongamos ahora que tenemos dos distribuciones Erlang con sus propios valores de los parámetros. La media se define como shape/rate=2 en el ejemplo inicial, así que aquí tomaremos los parámetros tal que la media=2.

```r
ruina_mezcla<-function(){
  ##primera distribucion:
  psi1<-ruin(claims='Erlang',
             par.claims=list(shape=2,rate=2),
             wait='Erlang',
             par.wait=list(shape=2,rate=1),
             premium=0.6)
  ##segunda:
```

```
  psi2<-ruin(claims='Erlang',
             par.claims=list(shape=4,rate=4),
             wait='Erlang',
             par.wait=list(shape=4,rate=2),
             premium=0.6)

  print(psi1(0:10))
  print(psi2(0:10))
  resultados_mezcla<-(psi1(0:10)+psi2(0:10))/2
  return(resultados_mezcla)
}

resultados_mezcla<-ruina_mezcla()
print(resultados_mezcla)
```

Los valores de psi1 fueron:

psi1=[5.993530e-01 , 2.449493e-01 , 9.199972e-02 , 3.399053e-02 , 1.251566e-02 , 4.605123e-03 , 1.694197e-03 , 6.232654e-04 , 2.292869e-04 , 8.434998e-05 , 3.103063e-05]

Y los de psi2:

psi2=[3.639603e-01 , 6.643907e-02 , 9.320795e-03 , 1.262373e-03 , 1.707928e-04 , 2.311366e-05 , 3.128098e-06 , 4.233422e-07 , 5.729314e-08 , 7.753783e-09 , 1.049360e-09]

Y la media de ambas: (psi1+psi2)/2=[4.816566e-01 , 1.556942e-01 , 5.066026e-02 , 1.762645e-02 , 6.343228e-03 , 2.314118e-03 , 8.486626e-04 , 3.118444e-04 , 1.146721e-04 , 4.217887e-05 , 1.551584e-05]

3) Hacer un análisis comparativo, crítico y razonado de los resultados.

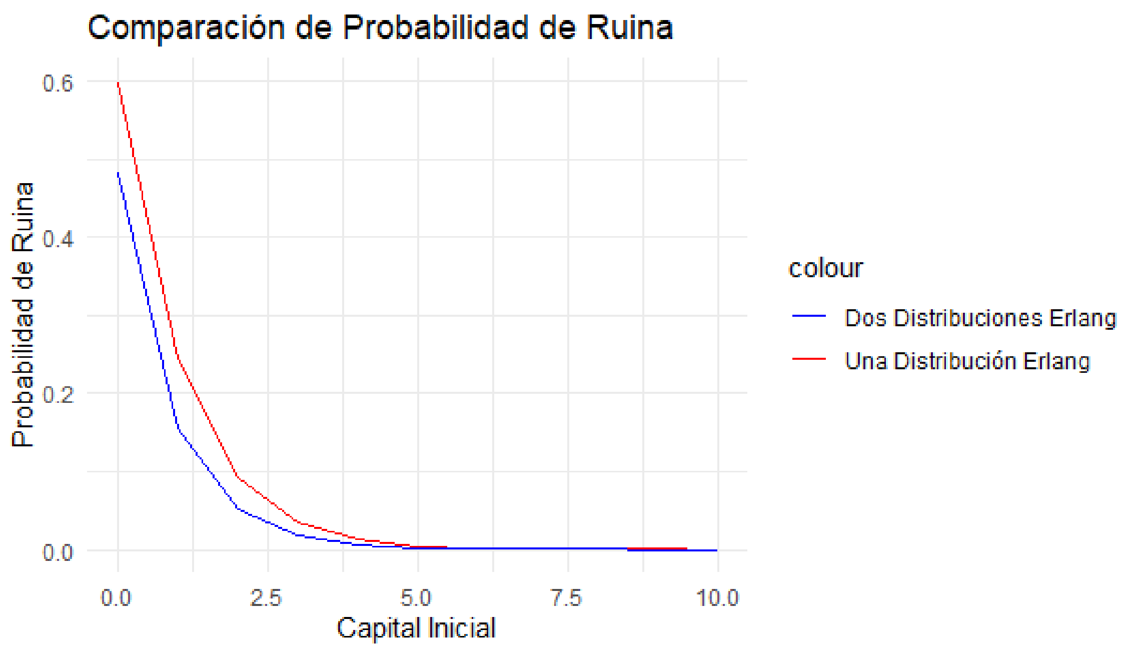
Para ello, lo primero que se realizará es un gráfico presentando ambos resultados.

```
comparacion<-data.frame(
  Capital_Inicial=0:10,
  Ruina_solo1=resultados_uno,
  Ruina_de2=resultados_mezcla
)
print("Analisis comparativos de resultados: ")
print(comparacion)

##Y ahora hacemos el grafico:

library(ggplot2)
ggplot(comparacion,aes(x=Capital_Inicial))+
  geom_line(aes(y=Ruina_solo1,color="Una Distribucion Erlang"))+
  geom_line(aes(y=Ruina_de2,color="Dos Distribuciones Erlang"))+
  labs(title="Comparacion de Probabilidad de Ruina",
       x="Capital Inicial",
       y="Probabilidad de Ruina")+
  scale_color_manual(values=c("blue","red"))+theme_minimal()
```

La gráfica resultante se muestra a continuación.



En ambos casos disminuye la probabilidad de ruina para mayores valores del capital inicial. Este comportamiento es obvio ya que un mayor capital inicial implica que tendremos un mayor margen de seguridad frente a reclamaciones.

La curva con una distribución Erlang disminuye más rápido que la mezcla en la probabilidad de ruina: para un capital inicial bajo, el riesgo de ruina es muy alto, pero conforme aumenta disminuye rápidamente. Y para capital inicial alto cubre mucho mejor las fluctuaciones en las reclamaciones.

Y la curva de las dos distribuciones Erlang está por debajo de la curva anterior, encontrándose suavizada en comparación. Esto es porque al promediar dos distribuciones se reduce la variabilidad y por ende el riesgo de ruina. De hecho, se trata de un perfil más realista al haber múltiples factores afectando al riesgo y no solo uno.

La conclusión obtenida es que es esencial tener un capital inicial adecuado para disminuir lo máximo posible la probabilidad de ruina, siempre dentro de las limitaciones financieras que se presenten.