



MARCAPASOS

Alejandro José Florido Tomé



5 DE MAYO DE 2022
TERCERO DEL GRADO DE FISICA
CIRCUITOS ELÉCTRICOS

1. INTRODUCCIÓN.

En el presente informe hablaremos sobre los marcapasos, que consiste en un circuito eléctrico junto a unos electrodos. Con su estructura tan simple, es capaz de ayudar a personas que padecen problemas cardíacos (generalmente son trastornos del ritmo cardíaco) a que sus corazones latan de una manera regular y segura para su salud.

Los marcapasos son ligeros, pequeños, de fácil implantación, te monitorean la actividad cardíaca, te aplican una corriente cuando sea necesaria en el corazón para contraerlo (lo que es un latido), entre otras.

2. ESTUDIO DE LA TEMÁTICA.

Para que lata el corazón de forma natural, tenemos lo que se denomina un marcapasos natural, que genera impulsos eléctricos en el miocardio (músculo cardíaco), que despolariza las células cardíacas, provocando un latido (que no es más que una contracción del corazón).

Pero puede darse el caso en el que los latidos producidos por este marcapasos natural sean irregulares, lentos (bradicardia), o más rápidos (taquicardia), y sea necesaria la implantación de un marcapasos artificial para regularizar dichos latidos.

Los marcapasos (artificiales) son instrumentos de unos 5 cm de longitud, 0.6 cm de grosor, de un peso de unos 28 gramos, y de una duración media de 6 años (este último factor depende de la energía necesaria para producir el latido, ya que depende del corazón, del número de cámaras a las que estimule, ya que podemos hacer un marcapasos que envíe pulsos eléctricos a distintas cámaras del corazón a la vez, y del material del que estén hechos, que por tema ecológicos, a día de hoy son de litio).

Con uno de estos implantado, debemos de tener cuidado con algunos dispositivos electrónicos como máquinas de resonancia magnética o de radioterapia, motores con imanes pesados, e incluso con el teléfono, que se recomienda mantenerlo a una distancia de unos 15 cm del mismo por seguridad.

Una imagen de estos la encontramos en la portada, o en la imagen 1, donde se aprecia bastante bien el pequeño tamaño del instrumento:



Imagen 1. Imagen de un marcapasos donde se aprecia que es bastante pequeño en comparación con el tamaño de la mano.

Para entender bien cómo funciona el marcapasos matemáticamente, supondremos, por simplicidad, que consiste en un dispositivo compuesto por:

- Una batería que alimenta la energía al circuito de la forma deseada, con una tensión determinada.
- Un condensador que almacena la energía proporcionada por la batería en un tiempo de carga, y que la descargará en un tiempo de descarga.

- Una resistencia (que corresponderá con el corazón) que se aprovechará de la energía que libera el condensador para que pueda latir.
- Otra resistencia para que el condensador tarde un tiempo t en cargarse.

Donde conectamos el circuito al corazón con ayudas de unos electrodos, por los cuales se transmite señales, y se recoge también información.

Con las cuatro partes anteriores, podemos intuir que el circuito estará montado tal y como se ve a continuación:

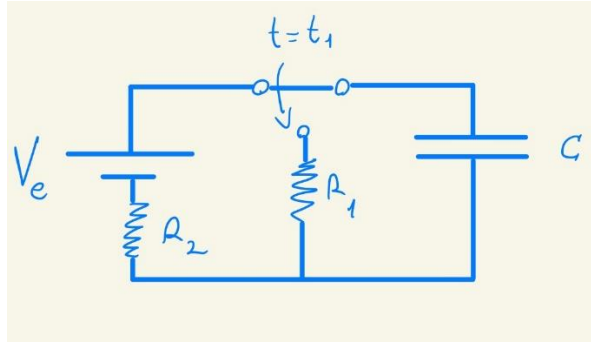


Figura 1. Representación gráfica del circuito completo.

Y podremos separarlo en dos etapas bien diferenciadas (sólo representaremos los elementos que estarán influyendo en cada etapa):

a) Primera fase: En $t \in [0, t_1]$:

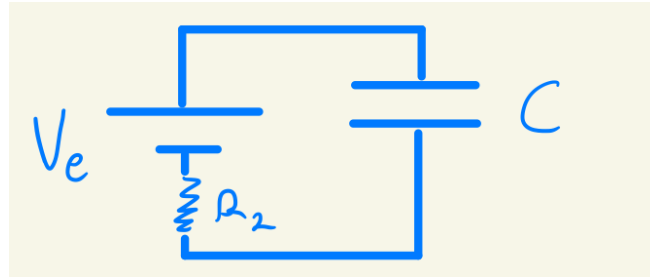


Figura 2. Circuito para $t \in [0, t_1]$, en el cuál se va cargando el condensador.

Si aplicamos la ley de Kirchoff de las mallas (de las tensiones):

$$V_{c1} + V_{R2} - V_e = 0 = R_2 \cdot i + V_{c1} - V_e \quad (1)$$

Teniendo en cuenta que la ley del condensador para su intensidad (que es la misma intensidad que circulará por la malla) viene dado por:

$$i_1 = C \cdot \frac{dV_{c1}}{dt} \quad (2)$$

Sustituyendo (2) en (1):

$$R_2 \cdot C \cdot \frac{dV_{c1}}{dt} + V_{c1} - V_e = 0 \quad (3)$$

Que no es más que una ecuación diferencial ordinaria de primer orden, cuya solución será suma de la solución particular más la homogénea:

- V_{c1h} : Solución de la ecuación diferencial homogénea asociada a (3):

$$R_2 \cdot C \cdot \frac{dV_{c1h}}{dt} + V_{c1h} = 0 \leftrightarrow \frac{dV_{c1h}}{dt} = -\frac{1}{R_2 C} V_{c1h} \quad (4)$$

Cuya solución sabemos que será:

$$V_{c1h} = C \cdot e^{-\frac{t}{R_2 C}} \quad (5)$$

- V_{c1p} : Solución particular de la ecuación (3): Supondremos, como solución particular, que $V_{c1p} = K$, con K una constante, por lo que, sustituyendo en (3):

$$R_2 \cdot C \cdot \frac{dK}{dt} + K - V_e = 0 = K - V_e \rightarrow K = V_{c1p} = V_e \quad (6)$$

Por tanto, con (5) y (6), la solución general de la ecuación (3), que corresponde con la tensión del condensador en esta primera fase, será:

$$V_{c1} = V_{c1h} + V_{c1p} = V_e + C \cdot e^{-\frac{t}{R_2 C}} \quad (7)$$

Para conocer la constante C, usaremos la condición de que, en $t=0$, justo conectamos el circuito y la batería, por lo que el condensador estará descargado en ese instante. Es decir:

$$V_{c1}(t=0) = 0 = V_e + C \cdot e^0 = V_e + C \rightarrow C = -V_e \quad (8)$$

Así que, sustituyendo (8) en (7):

$$V_{c1} = V_e \left(1 - e^{-\frac{t}{R_2 C}}\right) \quad (9)$$

De donde deducimos que, el condensador, en esta primera fase, se va cargando, desde un valor nulo, hasta el valor V_e (para ello, se cumplirá, o que t_1 es mucho mayor que uno, o que el producto entre R_2 y C es mucho menor que uno, para un valor de t_1 no muy grande en comparación), por lo que $V_{c1}(t=t_1) = V_e$.

b) Segunda fase: En $t \in [t_1, t_2]$:

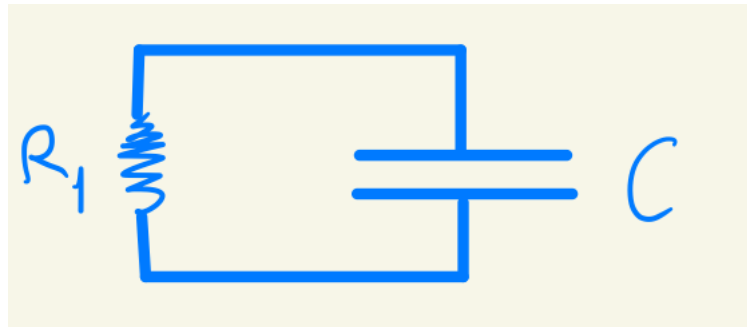


Figura 3. Circuito para $t \in [t_1, t_2]$, en el cuál se va liberando la energía del condensador en la resistencia R_1 , que corresponderá con el corazón.

Volviendo a aplicar la ley de Kirchoff de las mallas, vemos que:

$$V_{c2} + V_{R1} = 0 = R_1 \cdot i + V_{c2} \quad (10)$$

Al igual que antes, volveremos a usar la ley del condensador:

$$i = C \cdot \frac{dV_{c2}}{dt} \quad (11)$$

Sustituyendo (3) en (2):

$$R_1 \cdot C \cdot \frac{dV_{c2}}{dt} + V_{c2} = 0 \leftrightarrow \frac{dV_{c2}}{dt} = -\frac{1}{R_1 C} V_{c2} \quad (12)$$

Que corresponde con una ecuación diferencial lineal ordinaria homogénea de primer orden, cuya solución conocemos:

$$V_{c2} = C' \cdot e^{-\frac{t}{R_1 C}} \quad (13)$$

Para hallar la constante C' , impondremos la condición de continuidad en $t = t_1$ para la tensión del condensador:

$$V_{c1}(t_1^-) = V_{c2}(t_1^+) = V_e = C' \cdot e^{-\frac{t_1}{R_1 C}} \leftrightarrow C' = V_e \cdot e^{\frac{t_1}{R_1 C}} \quad (14)$$

Por tanto, en la segunda fase, la tensión del condensador será:

$$V_{c2} = V_e \cdot e^{\frac{1}{R_1 C}(t_1 - t)} \quad (15)$$

Así que, concluimos que la tensión del condensador será:

$$V_c = \begin{cases} V_e \left(1 - e^{-\frac{t}{R_2 C}}\right) & \text{si } 0 < t < t_1 \\ V_e \cdot e^{\frac{1}{R_1 C}(t_1 - t)} & \text{si } t_1 < t < t_2 \end{cases} \quad (16)$$

De las igualdades anteriores, deducimos que, para $t \in [0, t_1]$, el condensador se va cargando, y, que, en $t \in [t_1, t_2]$, el mismo se descarga, y sabemos que dicha energía disipada se debe a la resistencia R_1 , que la absorberá.

Gracias a este proceso, el condensador, para $t_2 > t_1$ y $R_1 C \ll 1$ (cosa que suele ser así ya que el orden de la resistencia es de 10^3 ohmios, mientras que la de la capacidad del condensador es del orden de 10^{-9} faradios), habrá liberado toda la energía, y la habrá absorbido la resistencia, tal que, si es mayor que un cierto valor umbral, permitirá al corazón (resistencia 1) contraerse, y así latir.

También podríamos pensar el razonamiento anterior hablando en términos de corrientes:

$$i = \begin{cases} C \cdot \frac{dV_{c1}}{dt} = \frac{V_e}{R_2} \cdot e^{-\frac{t}{R_2 C}} & \text{si } 0 < t < t_1 \\ C \cdot \frac{dV_{c2}}{dt} = -\frac{V_e}{R_1} \cdot e^{-\frac{t-t_1}{R_1 C}} & \text{si } t_1 < t < t_2 \end{cases} \quad (17)$$

Donde dicha corriente disminuye con tiempo en ambas cosas (cosa lógica porque, en el primer caso, se va cargando el condensador, y una vez se cargue, la intensidad será nula, y ocurrirá lo mismo, pero al descargarse), y debe ser, cuando $t \in [t_1, t_2]$, mayor que un cierto valor umbral para que pueda ocurrir la contracción del corazón.

Lógicamente, esto es simplificando mucho las cosas, aunque es una buena aproximación a lo que ocurre en la realidad. Si queremos un modelo más real, para $t \in [0, t_1]$, tendríamos la misma tensión del condensador, mientras que si $t \in [t_1, t_2]$ sería, usando un modelo logístico (se añade a la ecuación (12) un sumando extra, que sería una corrección):

$$\frac{dV_{c2}}{dt} = -\frac{1}{R_1 C} V_{c2} - \frac{1}{R_1 C V_e} V_{c2}^2 \quad (18)$$

Cuya solución nos da una mejor aproximación de la forma de la tensión asociada al momento en el que se descarga el condensador. Calculémosla:

$$\frac{dV_{c2}}{V_{c2}(V_{c2} + V_e)} = -\frac{1}{R_1 C V_e} dt = \frac{\left(\frac{1}{V_{c2}} - \frac{1}{V_{c2} + V_e}\right) dV_{c2}}{V_e} \quad (19)$$

Integrando a ambos lados:

$$\int \left(\frac{1}{V_{c2}} - \frac{1}{V_{c2} + V_e} \right) dV_{c2} = (\ln V_{c2} - \ln(V_{c2} + V_e)) = -\frac{1}{R_1 C} t + K'' = \ln \frac{V_{c2}}{V_{c2} + V_e} \quad (20)$$

Despejando:

$$\frac{V_{c2}}{V_{c2} + V_e} = C'' \cdot e^{-\frac{t}{R_1 C}}$$

$$V_{c2} = C'' \frac{V_e}{e^{\frac{t}{R_1 C}} - C''} \quad (21)$$

Usando la condición de continuidad en $t=t_1$:

$$V_{c1}(t_1^-) = V_{c2}(t_1^+) = V_e = C'' \frac{V_e}{e^{\frac{t_1}{R_1 C}} - C''} \quad (22)$$

De donde obtenemos que $C'' = \frac{1}{2} e^{\frac{t_1}{R_1 C}}$. Sustituyendo en (21):

$$V_{c2} = \frac{V_e}{2e^{\frac{t-t_1}{R_1 C}} - 1} \quad (23)$$

Que se puede ver una clara diferencia entre las ecuaciones (16) y (23), siendo la última la que mejor se adapta a la realidad.

3. CONCLUSIÓN.

Podemos concluir que los marcapasos siguen un modelo matemático sencillo, y su funcionamiento es eficaz para ir emitiéndole señales eléctricas al corazón para que lata cuando sea necesaria (cosa que programaremos o, si el marcapasos es muy avanzado, lo hará por su cuenta).

La condición que se debe cumplir es que el producto de la resistencia (tanto para R_1 como R_2) por la capacidad del condensador sea mucho menor que uno, que experimentalmente se cumple, y así se puede realizar en tiempos rápidos (suelen ser fracciones de segundos o milisegundos, en función del producto anterior) la carga y descarga del condensador, para así darle al corazón la tensión necesaria para que lata.

Sin duda, su estudio es algo que vale la pena, ya que gracias a ellos muchas personas pueden llevar una vida normal y corriente (dentro de unos márgenes).

4. BIBLIOGRAFÍA.

- <https://esforem.es/blog/diferencias-marcapasos-desfibrilador-dia>
- <https://cirugiacardiovascularsevilla.com/marcapasos-monocamerales-bicamerales/>
- <http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica3/electrico/rc/rc.html>
- <https://www.redalyc.org/pdf/4576/457645127002.pdf>
- <https://www.bhf.org.uk/information-support/heart-matters-magazine/medical/how-does-a-pacemaker-work>
- https://www.fbbva.es/microsites/salud_cardio/mult/fbbva_libroCorazon_cap45.pdf
- <https://www.youtube.com/watch?v=9Yb8Q9c-NQk>