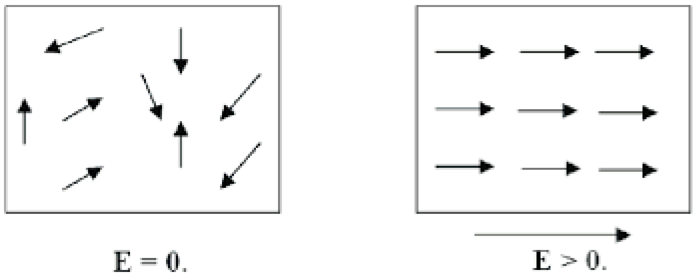
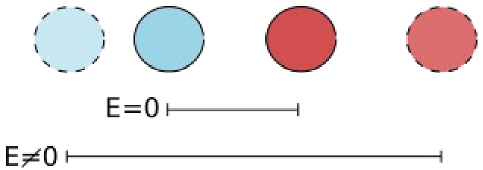
1.1 Tipos de polarización

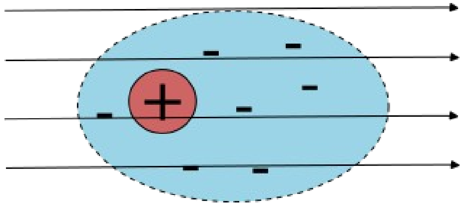
Dipolar $\vec{P}_d$



Iónica $\vec{P}_i$



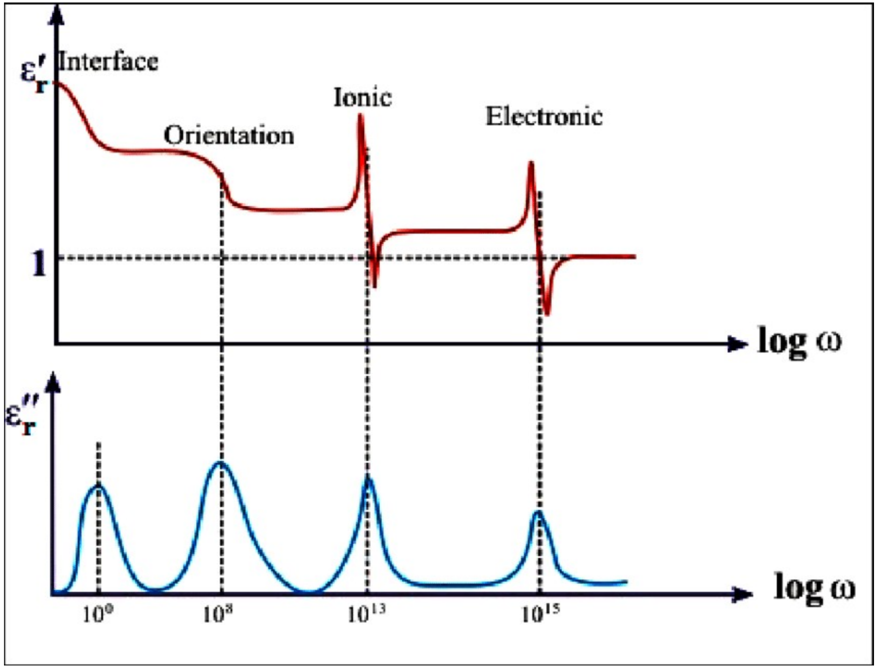
Electrónica $\vec{P}_e$



$$\vec{P} = \vec{P}_d + \vec{P}_i + \vec{P}_e$$

Existen rangos de frecuencia efectivos para los distintos tipos de polarización

- Rango **bajo**: $\vec{P}=\vec{P}_d+\vec{P}_i+\vec{P}_e$
- Rango **medio**: $\vec{P}=\vec{P}_i+\vec{P}_e$
- Rango **alto**: $\vec{P}=\vec{P}_e$



Causa: las estructuras más grandes necesitan
Un tiempo mayor para orientarse hacia el campo

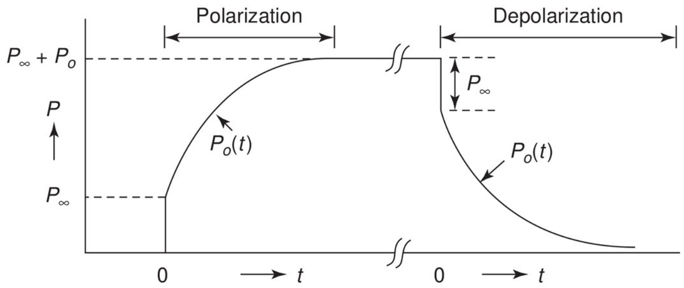
$$\Downarrow$$

Su contribución se atenúa

1.2 Ecucaciones de relajación de Debye

Modelo para la zona donde actua la polarización dipolar,
Si deja de actuar el campo eléctrico los dipolos vuelven a su posición inicial según:

$$\vec{P}_d = \vec{P}_{d0} \cdot e^{\frac{-t}{\tau}} \quad \xrightarrow{\mathscr{F}} \quad \vec{P}_d = \frac{\vec{P}_{d0}}{1/\tau + j\omega}$$



Queremos encontrar $\varepsilon(\omega)$

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}_i + \vec{P}_e + \vec{P}_d = \boxed{\varepsilon_\infty} \vec{E} + \vec{P}_d$$

Contribución instantánea del resto de componentes

¿Relación entre P y E? $\vec{P}_d(\omega) = \frac{\vec{P}_{d0}}{1/\tau + j\omega} = \varepsilon_0 \chi_e \vec{E}(\omega)$

1.2 Ecucaciones de relajación de Debye

Despejando tenemos:

$$\varepsilon_0 \chi_e = \boxed{\frac{\boldsymbol{P}_{d0}}{\boldsymbol{E}}} \frac{1}{1/\tau + j\,\omega} \Rightarrow \vec{\boldsymbol{D}} = \vec{\boldsymbol{E}} \left(\varepsilon_\infty + \frac{\chi_s}{1/\tau + j\,\omega} \right) = \varepsilon_c \vec{\boldsymbol{E}}$$

$$\boxed{\chi_s \equiv \frac{\boldsymbol{P}_{d0}}{\boldsymbol{E}}}$$

Valor de saturación $\varepsilon_s \equiv \tau \chi_s - \varepsilon_\infty$ (ε' máximo)

Identificando parte real e imaginaria:

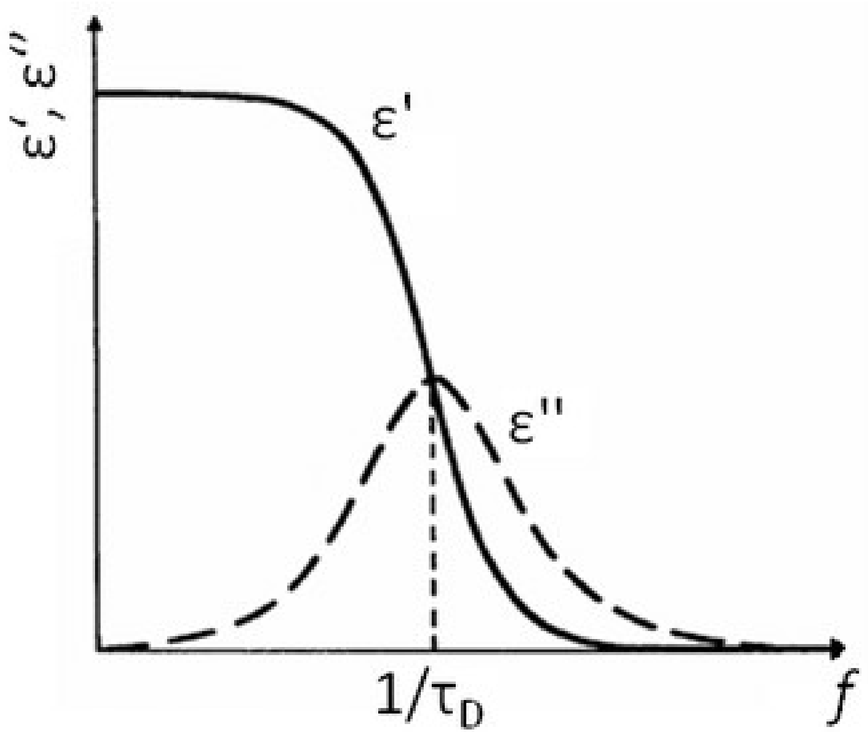
$$\varepsilon' = \varepsilon_\infty + \frac{\varepsilon_s - \varepsilon_\infty}{1 + (\omega\,\tau)^2} \qquad \varepsilon'' = \omega\,\tau \frac{\varepsilon_s - \varepsilon_\infty}{1 + (\omega\,\tau)^2}$$

$$\omega \rightarrow 0 \Rightarrow \varepsilon_c = \varepsilon_s$$

$$\omega \rightarrow \infty \Rightarrow \varepsilon_c = \varepsilon_\infty$$

Máximo en pérdidas:

$$\omega = \frac{1}{\tau} \equiv \omega_0$$



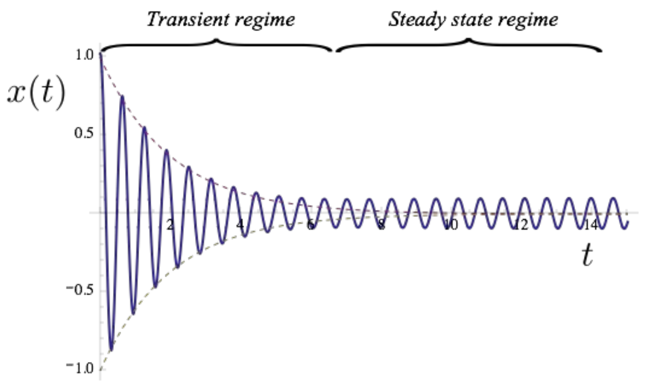
Limitación: La forma de
la gráfica se deformará en presencia de
distintos tiempos de relajación

Polarización iónica y electrónica, se utiliza un modelo de oscilador amortiguado

Ecuación de movimiento

$$\frac{d^2\boldsymbol{x}}{dt^2}+\gamma\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}+\omega_0^2\boldsymbol{x}=\frac{q}{m}\boldsymbol{E}e^{j\omega t} \xrightarrow[t\gg 0]{\text{Solución forzada}} \vec{\boldsymbol{x}}=\frac{q}{m}\frac{1}{\omega_0-\omega^2+j\gamma\omega}\vec{\boldsymbol{E}}$$

- γ Constante de amortiguación
- m,q Masa y carga a considerar(electrón o ión)
- $\omega_0\equiv\sqrt{\gamma/m}$ Frecuencia natural



1.3 Polarización iónica y electrónica, frecuencia de resonancia

Siguiendo un procedimiento igual al modelo de Debye:

$$\vec{P}=\varepsilon_0\chi_e\vec{E}=Nq\vec{x}$$

$$\vec{D}=\varepsilon_0\vec{E}+\vec{P}$$

$$\vec{x}=\frac{q}{m}\alpha(\omega)[(\omega_0^2-\omega^2)-j\omega]\vec{E}$$

$$\varepsilon'=\varepsilon_0+\frac{Nq^2}{m}\alpha(\omega)(\omega_0^2-\omega^2)$$

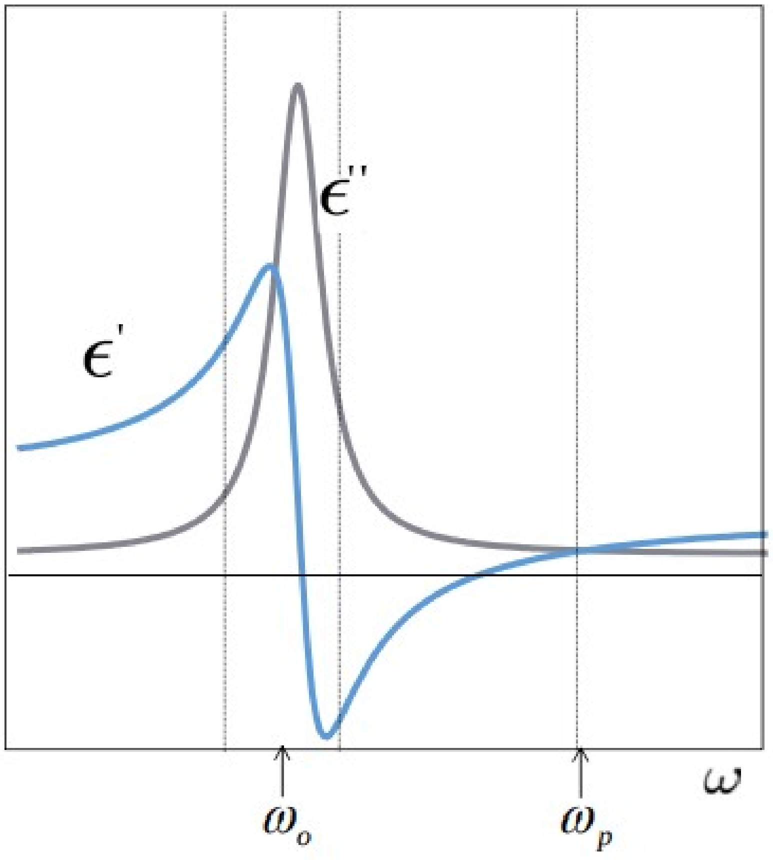
$$\varepsilon''=\frac{Nq^2}{m}\alpha(\omega)\gamma\omega$$

$$\alpha(\omega)\equiv\frac{1}{(\omega_0^2-\omega^2)+\gamma^2\omega^2}$$

Consecuencias

Tenemos un máximo en pérdidas debido a resonancia en ω_0

La masa de los iónes será mucho mayor así que su frecuencia de resonancia será menor



Límites del modelo:

- Ignora interacciones entre moléculas
- Campo local pequeño
- No contempla distintas constantes y frecuencias de resonancia

Ecuaciones simétricas de Maxwell

De forma teórica y con objetivo de simetrizar las ecuaciones de Maxwell introducimos las **fuentes magnéticas**

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = \rho_m$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\vec{J}_m - \mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

En medios lineales

$$\vec{D} = \vec{D}_e + \vec{D}_m$$

$$\vec{B} = \vec{B}_e + \vec{B}_m$$

$m \longleftrightarrow$ Magnéticas

$e \longleftrightarrow$ Reales

De la linealidad:

$$\nabla\cdot\vec{D}_e=\rho$$

$$\nabla\cdot\vec{B}_e=0$$

$$\nabla\times\vec{E}_e=-\mu_0\frac{\partial\vec{H}_e}{\partial t}$$

$$\nabla\times\vec{H}_e=\vec{J}+\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}_e}{\partial t}$$

$$\nabla\cdot\vec{D}_m=0$$

$$\nabla\cdot\vec{B}_m=\rho_m$$

$$\nabla\times\vec{E}_m=-\vec{J}_m-\mu_0\frac{\partial\vec{H}_m}{\partial t}$$

$$\nabla\times\vec{H}_m=\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}_m}{\partial t}$$

De la linealidad:

$$\nabla\cdot\vec{D}_m=0$$

$$\nabla\cdot\vec{B}_m=\rho_m$$

$$\nabla\times\vec{E}_m=-\vec{J}_m-\mu_0\frac{\partial\vec{H}_m}{\partial t}$$

$$\nabla\times\vec{H}_m=\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}_m}{\partial t}$$

$$\boxed{\begin{aligned}&\nabla\cdot[-\mu_0\vec{E}_m]=0\\&\nabla\cdot[\vec{B}_m/\varepsilon_0]=\rho_m/\varepsilon_0\\&\nabla\times[-\mu_0\vec{E}_m]=\mu_0[\vec{J}_m+\varepsilon_0\frac{\partial\vec{B}_m/\varepsilon_0}{\partial t}]\\&\nabla\times[\vec{B}_m/\varepsilon_0]=\frac{-\partial[-\mu_0\vec{E}_m]}{\partial t}\end{aligned}}$$

Dualidad entre campos

Podemos expresar los campos magnéticos en función de sus propios potenciales:

$$\nabla \cdot \vec{D}_m = 0 \Rightarrow \vec{D}_m = -\nabla \times \vec{F}$$

$$\nabla \times \vec{H}_m = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}_m}{\partial t} \Rightarrow \nabla \times \left(\vec{H}_m + \frac{\partial \vec{F}}{\partial t} \right) = 0 = -\nabla \Psi$$

Usando dualidad

$$\vec{D}_m = -\nabla \times \vec{F}$$

$$\vec{H}_m = -\nabla \Psi - \frac{\partial \vec{F}}{\partial t}$$

$$\Psi = \frac{1}{4\pi\mu_0} \int_{V'} \frac{[\rho_m]}{R} dv'$$

$$\vec{F} = \frac{\varepsilon_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{[\vec{J}_m]}{R} dv'$$

9.1 Ecuaciones simétricas de Maxwell

Dualidad entre los **campos**:

$\vec{B}_e$	$-\mu_0 \vec{E}_m$
$\vec{E}_e$	$\vec{B}_m / \varepsilon_0$
Φ	$\frac{\mu_0}{\varepsilon_0} \Psi$
$\vec{A}$	$\frac{\mu_0}{\varepsilon_0} \vec{F}$

Dualidad de las **fuentes**

ρ	ρ_m
$\vec{J}$	$\vec{J}_m$

9.1 Ecuaciones simétricas de Maxwell

La elección no es única

$\vec{B}_e$	$-\mu_0\,\vec{E}_m$	ρ	ρ_m
$\vec{E}_e$	$\vec{B}_m/\varepsilon_0$	$\vec{J}$	$\vec{J}_m$
Φ	Ψ	ε_0	μ_0
$\vec{A}$	$\vec{F}$	μ_0	ε_0

Algunos ejemplos de fórmulas magnéticas

Ecuaciones de onda no homogéneas

$$\nabla^2 \vec{A} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{J}$$

$$\nabla^2 \Phi - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = \frac{-\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\nabla^2 \vec{F} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{F}}{\partial t^2} = -\varepsilon_0 \vec{J}_m$$

$$\nabla^2 \Psi - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = \frac{-\rho_m}{\mu_0}$$

Campos de radiación lejanos

$$\vec{E}_{\cdot m,rad} = \frac{-1}{4\pi c r} \int_{V'} \frac{\partial \vec{J}_m(\vec{r}\,', t - \frac{r}{c} + \frac{\vec{r}\,'\hat{r}}{c})}{\partial t} \times \hat{r}\, dv'$$

$$\vec{B}_{\cdot m,rad} = \frac{1}{4\pi c^2 r} \int_{V'} [\frac{\partial \vec{J}_m(\vec{r}\,', t - \frac{r}{c} + \frac{\vec{r}\,'\hat{r}}{c})}{\partial t} \times \hat{r}] \times \hat{r}\, dv'$$

Soluciones generales de los campos en función de los potenciales

$$\vec{E} = -\nabla\Phi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} - \nabla\times\vec{F}$$

$$\vec{H} = -\nabla\Psi - \frac{\partial\vec{F}}{\partial t} - \frac{1}{\mu_0}\nabla\times\vec{A}$$

Simétricas

Condiciones de frontera

$$\hat{n}\cdot(\vec{D}_2 - \vec{D}_1) = \rho_s \qquad \hat{n}\cdot(\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = \rho_{sm}$$

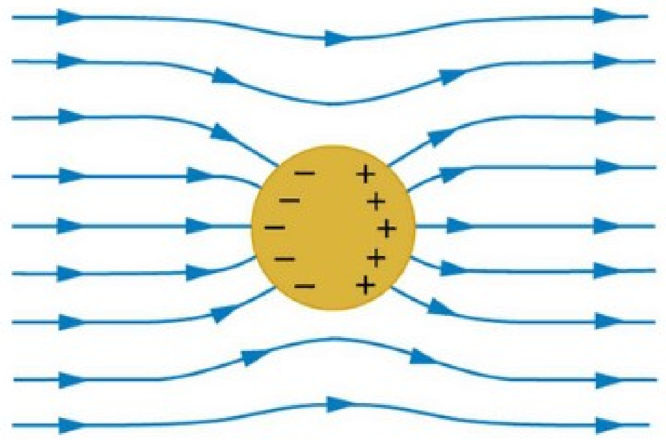
$$\hat{n}\times(\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = -\vec{J}_{sm} \qquad \hat{n}\times(\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \vec{J}_s$$

PEC

Lineas de E normales a la superficie

$$\hat{n}\cdot\vec{D}_2=\rho_s \qquad \hat{n}\cdot\vec{B}_2=0$$

$$\boxed{\hat{n}\times\vec{E}_2=0} \qquad \hat{n}\times\vec{H}_2=\vec{J}_s$$



PMC, Análogo con fuentes magnéticas y H

$$\hat{n}\cdot\vec{D}_2=0 \qquad \hat{n}\cdot\vec{B}_2=\rho_{sm}$$

$$\hat{n}\times\vec{E}_2=-\vec{J}_{sm} \qquad \boxed{\hat{n}\times\vec{H}_2=0}$$

Lineas de H normales a la superficie

Variaciones armónicas

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = \rho_m$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\vec{J}_m - j\,\omega\,\mu_0\,\vec{H}$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + j\,\omega\,\varepsilon_0\,\vec{E}$$

Condición de Lorentz

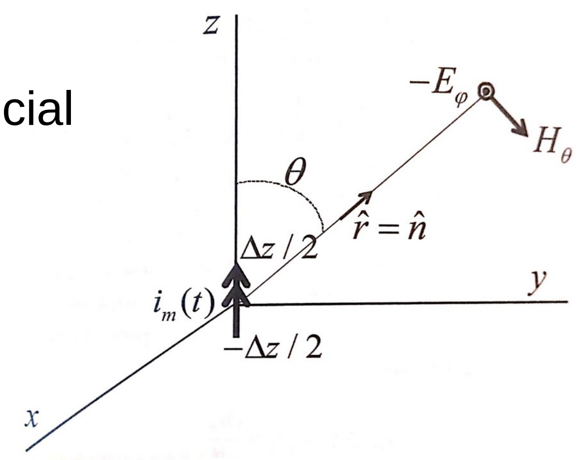
$$\Psi = \frac{j}{\omega\,\varepsilon_0\,\mu_0}\nabla\,\vec{F}$$

$$\vec{E} = -j\frac{c^2}{\omega}\nabla(\nabla\,\vec{A}) - j\,\omega\,\vec{A} - \frac{1}{\varepsilon_0}\nabla\times\vec{F}$$

$$\vec{H} = -j\frac{c^2}{\omega}\nabla(\nabla\,\vec{F}) - j\,\omega\,\vec{F} + \frac{1}{\mu_0}\nabla\times\vec{A}$$

Solo necesitamos los potenciales vectoriales

Ejemplo: Elemento de corriente magnética diferencial



$$\vec{J}_m = i_m(t)\,\delta(x')\,\delta(y')\,z' \in [-\Delta z/2, \Delta z/2]$$

Usando dualidad:

$$\vec{E}=\vec{E}_m=\frac{-\Delta z}{4\pi}\left(\frac{1}{cr}\frac{d[i_m]}{dt}+\frac{1}{r^2}[i_m]\right) sen\,\theta\,\hat{\varphi}$$

$$\vec{B}=\vec{B}_m=\frac{\Delta z}{4\pi}\left(\frac{1}{r^3}\int_{-\infty}^{t}[i_m]\,dt+\frac{1}{cr^2}[i_m]\right)\left(2\cos\theta\,\hat{r}+sen\,\theta\,\hat{\theta}\right)+\frac{\Delta z}{4\pi}\frac{1}{c^2 r}\frac{d[i_m]}{dt}\,sen\,\theta\,\hat{\theta}$$

$$\vec{E}_{\cdot m,rad}=\frac{-\Delta z}{4\pi c\,r}\frac{d[i_m]}{dt}\,sen\,\theta\,\hat{\varphi}$$

$$\vec{B}_{\cdot m,rad}=\frac{\Delta z}{4\pi\mu_0 c^2 r}\frac{d[i_m]}{dt}\,sen\,\theta\,\hat{\theta}$$

Comparando con el generado por una espira real

$$\vec{E}_{\cdot m,rad} = \frac{-\Delta z}{4\pi c r} \frac{d[i_m]}{dt} sen\,\theta \hat{\varphi}$$

$$\vec{E}_{\cdot e,rad} = \frac{-\mu_0 S}{4\pi c r} \frac{d^2[i]}{dt^2} sen\,\theta \hat{\varphi}$$

$$\vec{B}_{\cdot m,rad} = \frac{\Delta z}{4\pi c^2 r} \frac{d[i_m]}{dt} sen\,\theta \hat{\theta}$$

$$\vec{B}_{\cdot m,rad} = \frac{\mu_0 S}{4\pi c^2 r} \frac{d^2[i]}{dt^2} sen\,\theta \hat{\theta}$$

$$i_m \Delta z = \mu_0 S \frac{d\,i}{d\,t} \Leftrightarrow \dot{p}_m = \mu_0 \dot{m}$$

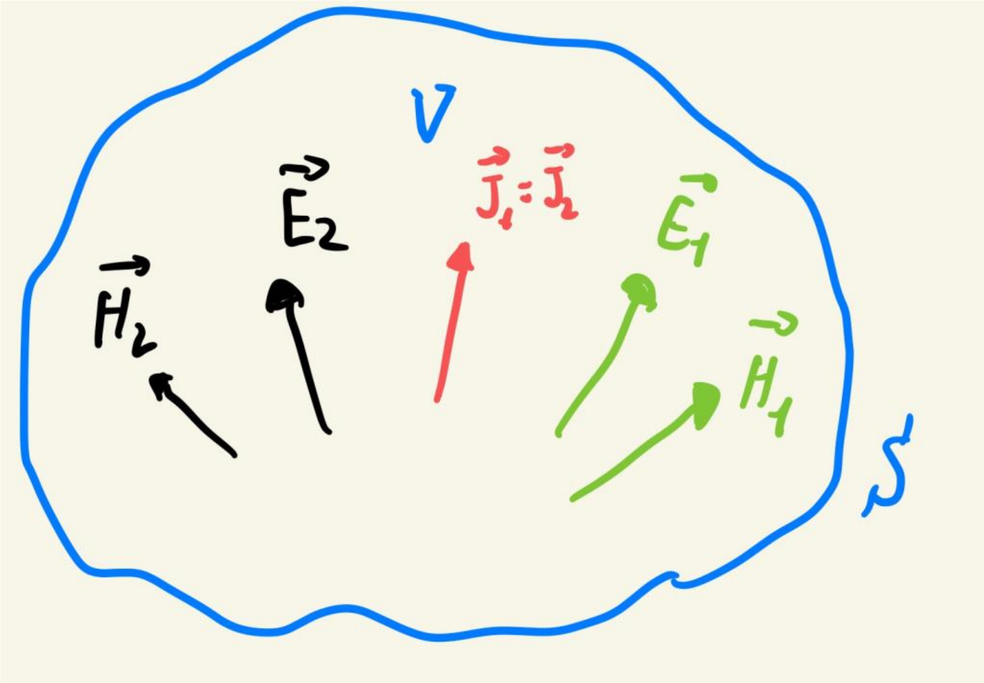
Dipolo magnético como cargas magnéticas

Teoremas fundamentales

9.2.1 Teorema de Unicidad: Campos EM con variación temporal arbritaria

Solución única si conocemos:

- -Fuentes en t>t_0 en interior V.
- -$\vec{E}(t_0)$ y $\vec{H}(t_0)$.
- -t>t_0, $\overrightarrow{E_t}(t)$ y $\overrightarrow{H_t}(t)$.



$$\vec{E}' = \overrightarrow{E_1} - \overrightarrow{E_2}$$
$$\vec{H}' = \overrightarrow{H_1} - \overrightarrow{H_2}$$
$$\vec{J}' = \overrightarrow{J_1} - \overrightarrow{J_2} = 0$$

Demostración:

Tº Poynting: $-\int_V \cancel{\vec{J}'} \cdot \vec{E}' dV = \oint_S \underbrace{(\vec{E}' \times \vec{H}') \cdot d\vec{S}}_{} + \frac{\partial}{\partial t} \int_V \frac{1}{2} (\vec{E}' \cdot \vec{D}' + \vec{B}' \cdot \vec{H}') dV + \int_V \sigma E'^2 dV$

$\boxed{\vec{J}' = 0}$ $\quad$ $\boxed{(\vec{E}' \times \vec{H}') \cdot \vec{n} \cdot dS = (\vec{n} \times \vec{E}') \cdot \vec{H}' \cdot dS = (\vec{H}' \times \vec{n}) \cdot \vec{E}' \cdot dS}$

Integrando entre t y t_0:

$$0 = \int_V \frac{1}{2} (\vec{E}' \cdot \vec{D}' + \vec{B}' \cdot \vec{H}') dV + \int_{t_0}^{t} \int_V \sigma E'^2 dV\, dt$$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{\vec{E}' = 0 \ \text{ y } \ \vec{B}' = 0} \Leftrightarrow \boxed{\vec{E_1} = \vec{E_2} \ \text{ y } \ \vec{B_1} = \vec{B_2}}$$

Demostración: Diferencia es que estaremos en medio con pérdidas

To Poynting será:

$$-\int_V \cancel{\vec{\boldsymbol{J}}'^*} \cdot \vec{\boldsymbol{E}}'\, dV = \mathrm{j}\omega \int_V \left(\mu H_0'^2 - \varepsilon E_0'^2\right) dV + \int_V \sigma E_0'^2 dV + \oint_S \underbrace{\left(\vec{\boldsymbol{E}}' \times \vec{\boldsymbol{H}}'^*\right) \cdot d\vec{S}}$$

$$\boxed{\vec{J}' = 0}$$

$$\boxed{\left(\vec{E}' \times \vec{H}'\right) \cdot \vec{n} \cdot dS = \left(\vec{n} \times \vec{E}'\right) \cdot \vec{H}' \cdot dS = \left(\vec{H}' \times \vec{n}\right) \cdot \vec{E}' \cdot dS}$$

$$0 = \mathrm{j}\omega \int_V \left(\mu H_0'^2 - \varepsilon E_0'^2\right) dV + \int_V \sigma E_0'^2 dV$$

Igualando parte real e imaginaria

$$\boxed{\vec{E}' = 0 \ \text{ y } \ \vec{B}' = 0} \Leftrightarrow \boxed{\vec{E_1} = \vec{E_2} \ \text{ y } \ \vec{B_1} = \vec{B_2}}$$

9.3 Teoría de imágenes

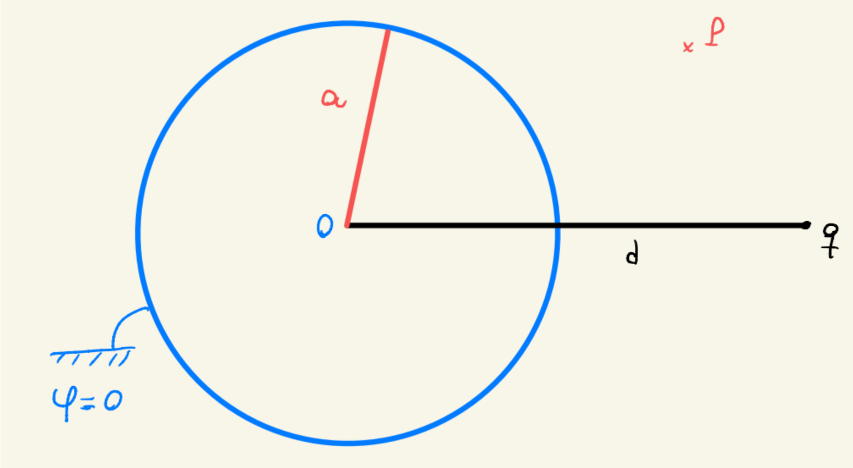
Sea distribución de fuentes en V+ superficie conductora S que rodea V

Buscamos distribución de fuentes ficticias que, junto reales, satisfagan las condiciones de contorno

Las distribuciones ficticias:

- Simulan a la superficie conductora, cambiando problema con límites a uno sin límites
- Están fuera de la zona de cálculo
- Producen solución válida en región donde están las cargas reales

-Sea una carga puntual q frente a una superficie esférica conductora conectada a tierra, hallar el campo eléctrico en un punto P cualquiera del espacio.

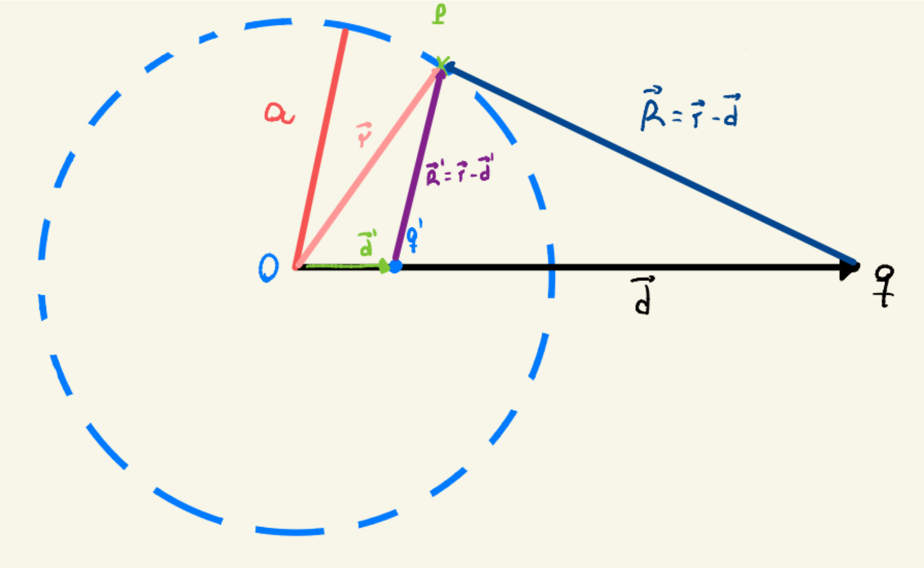


- Esfera conductora $\rightarrow \vec{E} = 0$ en su interior, y el potencial $\varphi = cte$. Como $\varphi = 0$ en la superficie, y es cte en el interior tal que debe ser continua $\rightarrow\ \varphi = 0$ en el interior.

- q frente a la esfera conductora reordenará las cargas de la superficie esférica, conque habrá en ella una densidad superficial distinta de cero.

Carga + superficie conductora → Método de imágenes

Sustituimos sup. por carga / puntos en r=a deben seguir verificando $\varphi = 0$



$$\vec{r} = r\widehat{u_r}$$

$$\vec{d} = d\widehat{u_k}$$

$$\vec{R} = r\widehat{u_r} - d\widehat{u_k}$$

$$\overrightarrow{d'} = d'\widehat{u_k}$$

$$\overrightarrow{R'} = r\widehat{u_r} - d'\widehat{u_k}$$

9.3 Teoría de imágenes: ejemplo conceptual

Potencial en un punto cualquiera (externo a esfera): $\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{|r\widehat{u_r} - d\widehat{u_k}|} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\prime}{|r\widehat{u_r} - d\prime\widehat{u_k}|}$

Potencial en superficie: $\varphi(a,\theta,\gamma) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q}{d|\frac{a}{d}\widehat{u_r} - \widehat{u_k}|} + \frac{q}{a|\widehat{u_r} - \frac{d\prime}{a}\widehat{u_k}|}\right] = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1) \quad |\frac{a}{d}\widehat{u_r} - \widehat{u_k}| = |\widehat{u_r} - \frac{d\prime}{a}\widehat{u_k}| = \sqrt{\left(\frac{a}{d}\right)^2 + 1} = \sqrt{1 + \left(\frac{d\prime}{a}\right)^2} \\ 2) \quad \frac{q}{d} + \frac{q\prime}{a} = 0 \end{cases}$$

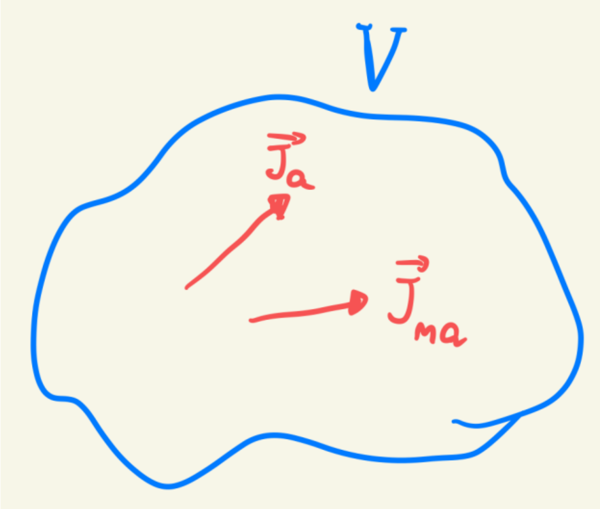
9.3 Teoría de imágenes: ejemplo conceptual

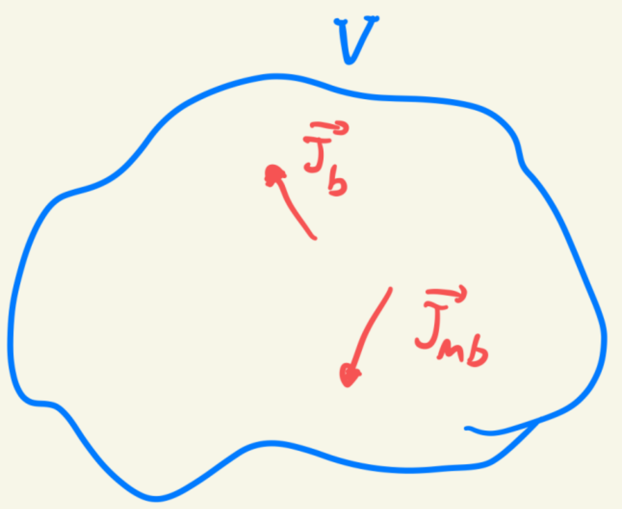
1) $\left(\frac{a}{d}\right)^2 + 1 = 1 + \left(\frac{d'}{a}\right)^2 \longrightarrow \frac{a}{d} = \frac{d'}{a} \longleftrightarrow \boxed{d' = \frac{a^2}{d}}$

2) $\frac{q}{d} + \frac{q'}{a} = 0 \longrightarrow \boxed{q' = -q\frac{a}{d}}$

$$\boxed{\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q}{R^3}\vec{R} + \frac{-q\frac{a}{d}}{R'^3}\overrightarrow{R'}\right]}$$

- Resolvemos problema en el mismo medio pero cambiando la distribución de fuentes, donde habrá una relación entre el campo EM obtenido y el original.





$$\begin{cases} \nabla \times \vec{\boldsymbol{H}}_{\boldsymbol{a}} = \vec{\boldsymbol{J}}_{\boldsymbol{a}} + j\omega\epsilon_0 \vec{\boldsymbol{E}}_{\boldsymbol{a}} \\ \nabla \times \vec{\boldsymbol{E}}_{\boldsymbol{a}} = -\vec{\boldsymbol{J}}_{\boldsymbol{ma}} + j\omega\epsilon_0 \vec{\boldsymbol{H}}_{\boldsymbol{a}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \nabla \times \vec{\boldsymbol{H}}_{\boldsymbol{b}} = \vec{\boldsymbol{J}}_{\boldsymbol{b}} + j\omega\epsilon_0 \vec{\boldsymbol{E}}_{\boldsymbol{b}} \\ \nabla \times \vec{\boldsymbol{E}}_{\boldsymbol{b}} = -\vec{\boldsymbol{J}}_{\boldsymbol{mb}} + j\omega\epsilon_0 \vec{\boldsymbol{H}}_{\boldsymbol{b}} \end{cases}$$

9.4 Teorema de reciprocidad de Lorentz

$$\nabla \times \vec{\boldsymbol{H}}_{\boldsymbol{a}} = \vec{\boldsymbol{J}}_{\boldsymbol{a}} + j\omega\epsilon_0 \vec{\boldsymbol{E}}_{\boldsymbol{a}}$$
$$\nabla \times \vec{\boldsymbol{E}}_{\boldsymbol{a}} = -\vec{\boldsymbol{J}}_{\boldsymbol{ma}} + j\omega\epsilon_0 \vec{\boldsymbol{H}}_{\boldsymbol{a}}$$

Calculemos:

$$\nabla \cdot \left(\vec{\boldsymbol{E}}_{\boldsymbol{b}} \times \vec{\boldsymbol{H}}_{\boldsymbol{a}}\right) = -\vec{\boldsymbol{E}}_{\boldsymbol{b}} \cdot \nabla \times \vec{\boldsymbol{H}}_{\boldsymbol{a}} + \vec{\boldsymbol{H}}_{\boldsymbol{a}} \cdot \nabla \times \vec{\boldsymbol{E}}_{\boldsymbol{b}} = -j\omega\epsilon_0 \vec{\boldsymbol{E}}_{\boldsymbol{a}} \cdot \vec{\boldsymbol{E}}_{\boldsymbol{b}} - j\omega\mu_0 \vec{\boldsymbol{H}}_{\boldsymbol{a}} \cdot \vec{\boldsymbol{H}}_{\boldsymbol{b}} - \vec{\boldsymbol{E}}_{\boldsymbol{b}} \cdot \vec{\boldsymbol{J}}_{\boldsymbol{a}} - \vec{\boldsymbol{H}}_{\boldsymbol{a}} \cdot \vec{\boldsymbol{J}}_{\boldsymbol{mb}}$$

$$-\nabla \cdot \left(\vec{\boldsymbol{E}}_{\boldsymbol{a}} \times \vec{\boldsymbol{H}}_{\boldsymbol{b}}\right) = \vec{\boldsymbol{E}}_{\boldsymbol{a}} \cdot \nabla \times \vec{\boldsymbol{H}}_{\boldsymbol{b}} - \vec{\boldsymbol{H}}_{\boldsymbol{b}} \cdot \nabla \times \vec{\boldsymbol{E}}_{\boldsymbol{a}} = j\omega\epsilon_0 \vec{\boldsymbol{E}}_{\boldsymbol{a}} \cdot \vec{\boldsymbol{E}}_{\boldsymbol{b}} + j\omega\mu_0 \vec{\boldsymbol{H}}_{\boldsymbol{a}} \cdot \vec{\boldsymbol{H}}_{\boldsymbol{b}} + \vec{\boldsymbol{E}}_{\boldsymbol{a}} \cdot \vec{\boldsymbol{J}}_{\boldsymbol{b}} + \vec{\boldsymbol{H}}_{\boldsymbol{b}} \cdot \vec{\boldsymbol{J}}_{\boldsymbol{ma}}$$

Teorema de reciprocidad diferencial de Lorentz

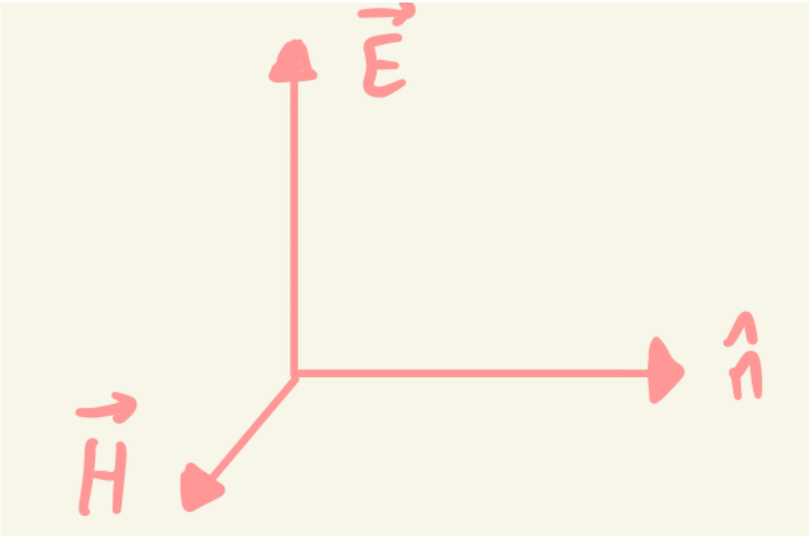
$$\boxed{-\nabla \cdot \left(\vec{\boldsymbol{E}}_{\boldsymbol{a}} \times \vec{\boldsymbol{H}}_{\boldsymbol{b}} - \vec{\boldsymbol{E}}_{\boldsymbol{b}} \times \vec{\boldsymbol{H}}_{\boldsymbol{a}}\right) = \vec{\boldsymbol{E}}_{\boldsymbol{a}} \cdot \vec{\boldsymbol{J}}_{\boldsymbol{b}} + \vec{\boldsymbol{H}}_{\boldsymbol{b}} \cdot \vec{\boldsymbol{J}}_{\boldsymbol{ma}} - \vec{\boldsymbol{E}}_{\boldsymbol{b}} \cdot \vec{\boldsymbol{J}}_{\boldsymbol{a}} - \vec{\boldsymbol{H}}_{\boldsymbol{a}} \cdot \vec{\boldsymbol{J}}_{\boldsymbol{mb}}}$$

Integrando en V y recordando el teorema de la divergencia $\int_V \nabla \cdot \vec{K} dV = \oint_S \vec{K} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$

Teorema de reciprocidad integral de Lorentz

$$\boxed{\oint_S \left(\vec{\boldsymbol{E}}_{\boldsymbol{a}} \times \vec{\boldsymbol{H}}_{\boldsymbol{b}} - \vec{\boldsymbol{E}}_{\boldsymbol{b}} \times \vec{\boldsymbol{H}}_{\boldsymbol{a}}\right) \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \int_V \left(-\vec{\boldsymbol{E}}_{\boldsymbol{a}} \cdot \vec{\boldsymbol{J}}_{\boldsymbol{b}} - \vec{\boldsymbol{H}}_{\boldsymbol{b}} \cdot \vec{\boldsymbol{J}}_{\boldsymbol{ma}} + \vec{\boldsymbol{E}}_{\boldsymbol{b}} \cdot \vec{\boldsymbol{J}}_{\boldsymbol{a}} + \vec{\boldsymbol{H}}_{\boldsymbol{a}} \cdot \vec{\boldsymbol{J}}_{\boldsymbol{mb}}\right) dV}$$

Extendiendo integral hasta infinito, en ella priorizarán los campos de radiación, donde tendremos ondas planas: $\vec{H}_{rad,a} = \eta_0^{-1}(\hat{n} \times \vec{E}_{rad,a})$ $\vec{H}_{rad,b} = \eta_0^{-1}(\hat{n} \times \vec{E}_{rad,b})$



$$\vec{E}_a \times \vec{H}_b - \vec{E}_b \times \vec{H}_a \approx$$
$$\approx \vec{E}_{rad,a} \times \vec{H}_{rad,b} - \vec{E}_{rad,b} \times \vec{H}_{rad,a} =$$
$$= \eta_0^{-1}\left[\vec{E}_{rad,a} \times (\hat{n} \times \vec{E}_{rad,b}) - \vec{E}_{rad,b} \times (\hat{n} \times \vec{E}_{rad,a})\right]=0$$

Por tanto: $$\oint_S (\vec{\boldsymbol{E}}_{\boldsymbol{a}} \times \vec{\boldsymbol{H}}_{\boldsymbol{b}} - \vec{\boldsymbol{E}}_{\boldsymbol{b}} \times \vec{\boldsymbol{H}}_{\boldsymbol{a}}) \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \int_V (-\vec{\boldsymbol{E}}_{\boldsymbol{a}} \cdot \vec{\boldsymbol{J}}_{\boldsymbol{b}} - \vec{\boldsymbol{H}}_{\boldsymbol{b}} \cdot \vec{\boldsymbol{J}}_{\boldsymbol{ma}} + \vec{\boldsymbol{E}}_{\boldsymbol{b}} \cdot \vec{\boldsymbol{J}}_{\boldsymbol{a}} + \vec{\boldsymbol{H}}_{\boldsymbol{a}} \cdot \vec{\boldsymbol{J}}_{\boldsymbol{mb}})\ dV = 0$$

Despejando, y asumiendo que las corrientes se encuentran encerradas en distintos volúmenes (integraremos donde las corrientes son no nulas):

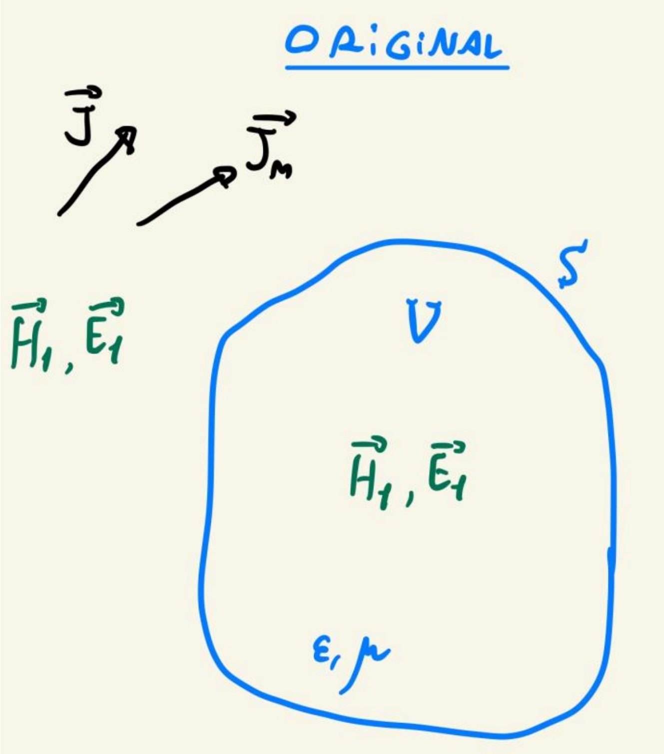
$$\underbrace{\int_{V_a} (-\vec{\boldsymbol{H}}_{\boldsymbol{b}} \cdot \vec{\boldsymbol{J}}_{\boldsymbol{ma}} + \vec{\boldsymbol{E}}_{\boldsymbol{b}} \cdot \vec{\boldsymbol{J}}_{\boldsymbol{a}})\ dV}_{<\mathrm{b,a}>} = \underbrace{\int_{V_b} (-\vec{\boldsymbol{H}}_{\boldsymbol{a}} \cdot \vec{\boldsymbol{J}}_{\boldsymbol{mb}} + \vec{\boldsymbol{E}}_{\boldsymbol{a}} \cdot \vec{\boldsymbol{J}}_{\boldsymbol{b}})\ dV}_{<a,b>}$$

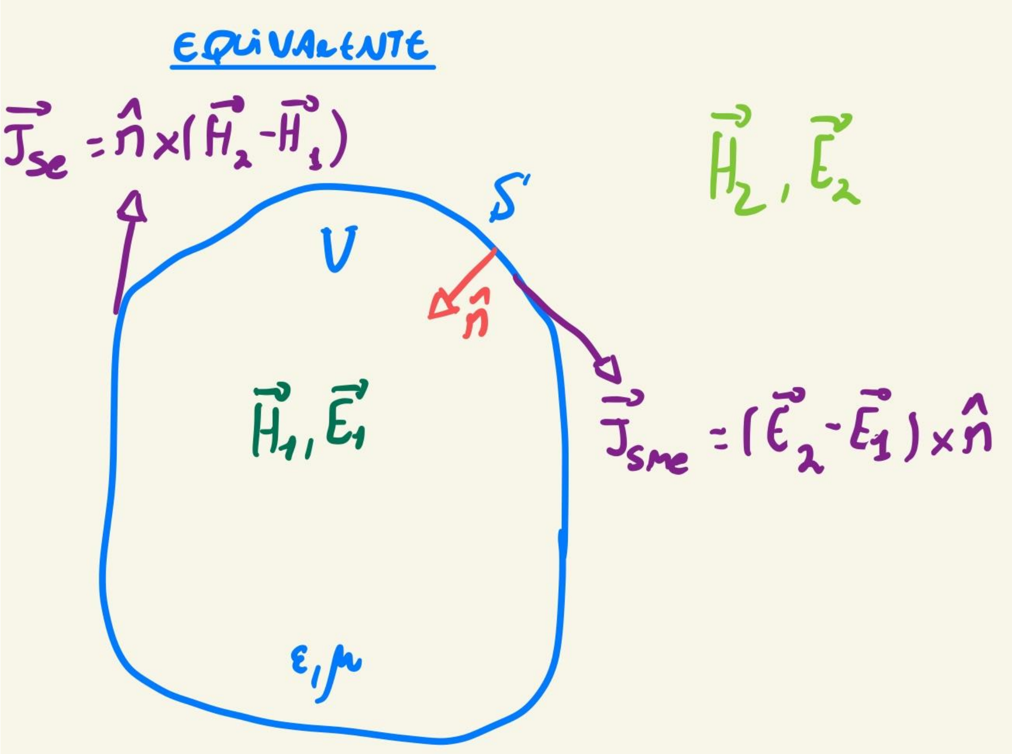
Reacción del campo “a” sobre las fuentes de “b”

Teorema de reciprocidad de Lorentz

$$<a,b> = <\mathrm{b,a}>$$

Si buscamos solución en el interior de V:

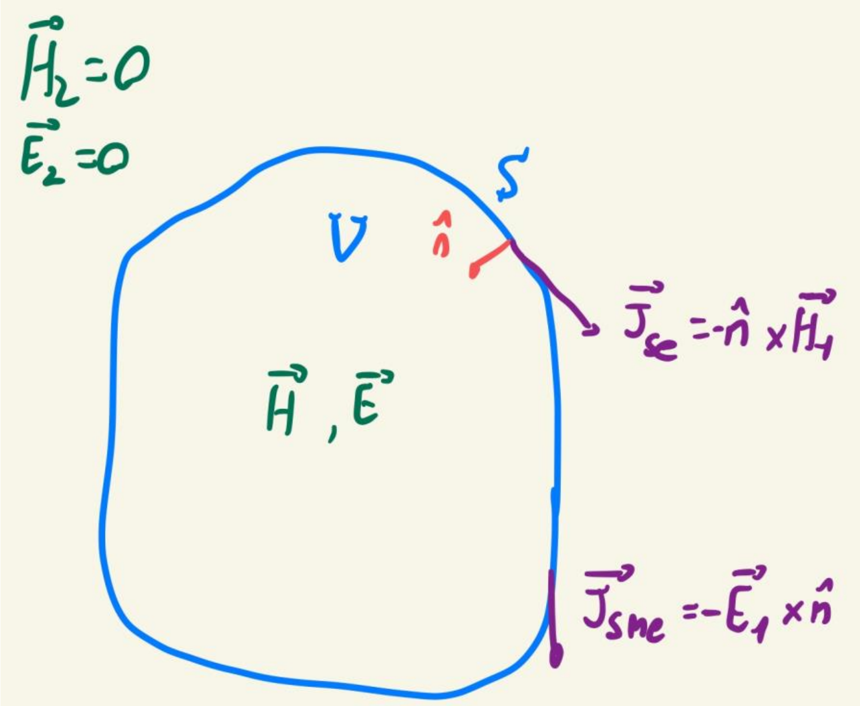




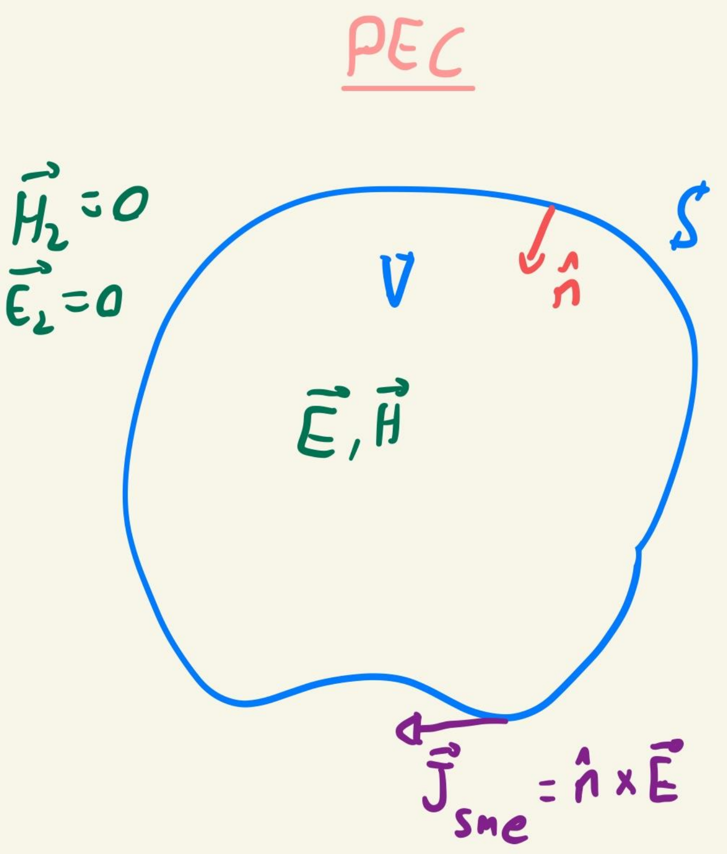
9.5.1 Equivalente de Love

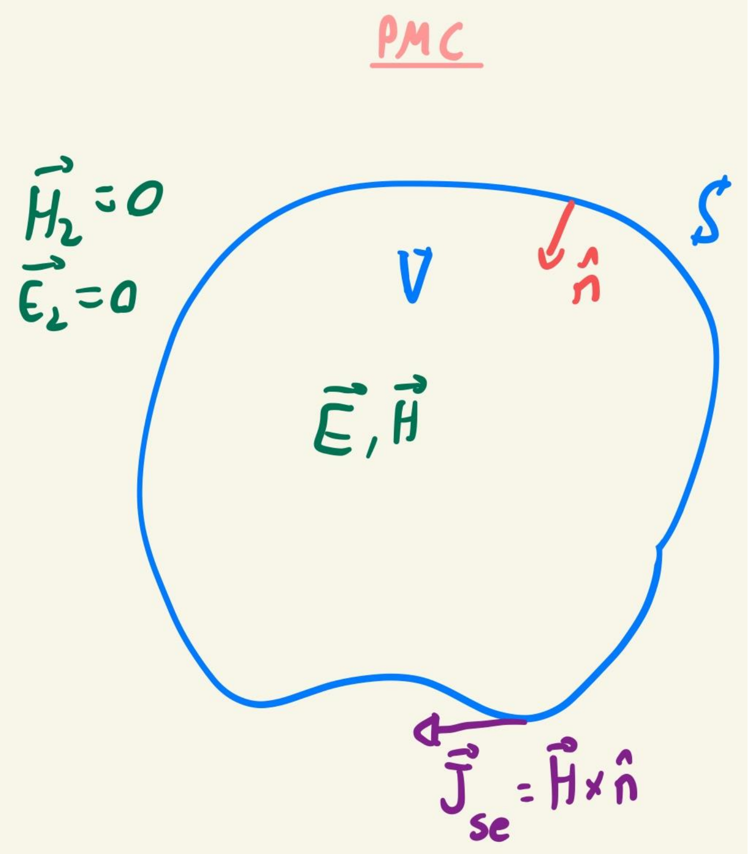
Queremos simplificar el teorema de equivalencia:

- Forzamos $\overrightarrow{E_2} = 0$ y $\overrightarrow{H_2} = 0$ ⇒ $\overrightarrow{J_{se}} = -\hat{n} \times \overrightarrow{H_1}$ y $\overrightarrow{J_{sme}} = -\overrightarrow{E_1} \times \hat{n}$ (en medio homogéneo indefinido)

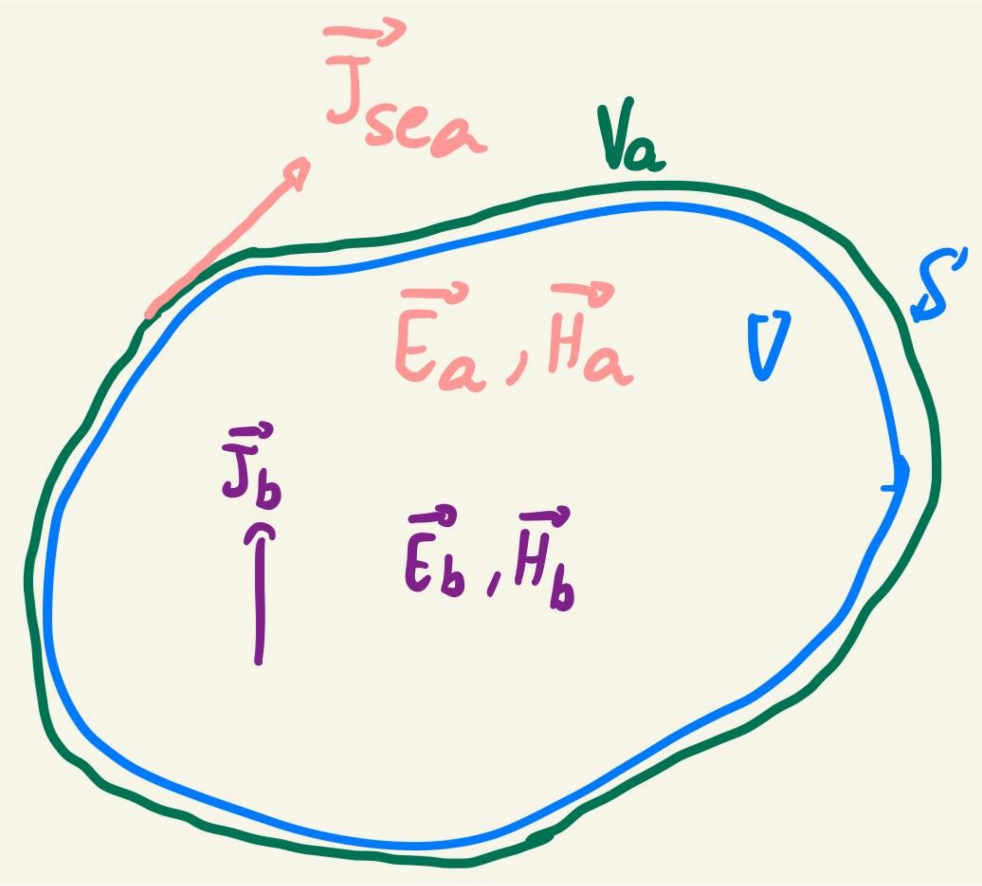


Simplificamos equivalente de Love: modificamos región de no interés





Demostración PEC: Nos ayudaremos del teorema de reciprocidad.



$$\overrightarrow{J_b}(\vec{r}) = \delta(x - x_i)\delta(y - y_i)\delta(z - z_i)I \cdot d\vec{l}$$

$$\vec{J}_{ma} = \vec{J}_{mb} = 0$$

Demostración PEC: Nos ayudaremos del teorema de reciprocidad.

$$\int_{V_a} \left(-\vec{H}_b \cdot \vec{J}_{ma} + \vec{E}_b \cdot \vec{J}_{sea}\right) dV = \int_{V} \left(-\vec{H}_a \cdot \vec{J}_{mb} + \vec{E}_a \cdot \vec{J}_b\right) dV =$$

$$= \int_{V_a} \vec{E}_b \cdot \vec{J}_{sea}\ dV = \int_{V} \vec{E}_a \cdot \vec{J}_b\ dV = \int_{V} \vec{E}_a \cdot \delta(x - x_i)\delta(y - y_i)\delta(z - z_i) I \cdot d\vec{l}\ dV = \vec{E}_a(\vec{r}) \cdot d\vec{l}$$

$$\boxed{\int_S \vec{E}_b \cdot \vec{J}_{sea}\, ds = \overrightarrow{E_a}(\vec{r}) \cdot d\vec{l}}$$

$$\boxed{\hat{n} \times \overrightarrow{E_b} = 0 = \mathrm{E}_{bt}\Big|_S}$$

$$\boxed{\overrightarrow{E_a} = 0}$$

En PEC, $\vec{J}_{sea}$ no produce ningún campo, conque tendremos que calcular los campos en V con $\vec{J}_{sme}$

Por dualidad, en PMC, será $\vec{J}_{se}$ quien produzca los campos