Зачетные задачи

Зотов Алексей 497

May 27, 2017

Задача. *1. Построить систему интерактивных доказательств для языка* GI-NO-EQUAL-CLASSES $= \{(G_1, \dots G_m) \mid$ *в разбиении этого набора графов на классы эквивалентности по отношению изоморфизма нет двух классов одинакового размера*$\}$

Ответ. Мы уже знаем, что GNI $\in$ **IP** и будем это использовать. Также GI $\in$ **NP**. $M = \{1, \dots, m\}$
Рассмотрим такой протокол :

1. $\forall i \in 1, \dots, m$ верификатор V посылает пруверу P индекс i соответствующий G_i.
2. P возвращает $X_i = \{(k, S_{ki}) | G_k \cong G_i\}$ - множество индексов графов, изоморфных G_i и соответствующие сертификаты изоморфности. $X_i = (K_i, S_i)$ - обозначение.
3. V проверяет полученные сертификаты.
4. $\forall j : j \notin K_i$ верификатор V инициирует протокол проверки $(G_i, G_j) \in \mathbf{GNI}$), с вероятностью ошибки $p_{ij} \leq \frac{1}{3}$.
5. Алгорим повторяется с пункта (1), игнорируя те индексы, для которых уже найден класс изоморфности.
6. V проверяет, что все классы получились разного размера. Возвращает True, если на каждый шаг протокола корректный (проверка сертификатов, проверка на $G_i \ncong G_j$), и полученные классы разного размера. Иначе False.

Докажем, что алгоритм корректен:

- если $X = (G_1, \dots G_m) \in$ GI-NO-EQUAL-CLASSES, тогда каждый на каждой итерации прувер будет действовать корректно, положительная проверка на изоморфность и неизоморфность проходит без ошибок (с вероятностью 1).
- если $X = (G_1, \dots G_m) \notin$ GI-NO-EQUAL-CLASSES, тогда P не может неизоморфные графы отнести в один класс(т.к. проверка сертификатов детерминированная), но может попробовать изоморфные графы разбить по разным классам, воспользовавшись наличем ошибки при проверке $G_i \ncong G_j$. На каждой такой проверке вероятность обмануть верификатор $p_{ij} \leq \frac{1}{3}$. Значит вероятность ошибочно принять X: $P_{\text{err}} \leq \frac{1}{3}$.

Задача. *4. Постройте систему интерактивных доказательств с общими случайными битами для языка* GROUP-NI $= \{G_0, G_1 \mid G_0,\ G_1$ — *таблицы умножения двух неизоморфных конечных групп*$\}$

Ответ. Проверить, что данные таблицы это таблицы умножения групп, верификатор может без прувера за $O(n^2)$. Достаточно проверить *ассоциативность, наличие единицы и обратимость всех элементов*. Нужно проверить их неизоморфность.
Рассмотрим $S = \{(H, \sigma) | H \cong G_i, i \in \{0, 1\}, \sigma \in \text{Aut}H\}$. Тогда, если $G_0 \cong G_1$, то $|S| = n!$, иначе $|S| = 2 \cdot n!$. Каждую группу порядка n можно записать двоичным числом длины m, где $m = p(n)$. Обозначим $K = 2n!$, имеем $S \subset \{0, 1\}^m$. Выберем k таким, что $2^{k-2} \leq K \leq 2^{k-1}$. Рассмотрим такой протокол:

- V выбирает случайную хэш-функцию h из семейства попарно независимых полиномиально вычислимых(от m, k) хеш-функций $H_{m,k} : \mathbf{2^m} \to \mathbf{2^k}$. Также выбирает случайный $y \in 0, 1^k$. Отправляет пруверу P пару (h, y) (значит можно считать,что случайные биты - общие).

- P выбирает $x \in S : h(x) = y$. Возвращает верификатору пару (x, s), где s - сертификат $x \in S$.
- V проверяет сертификат s и $h(x) = y$. Принимает доказательство если проверки корректные.

Покажем корректность протокола. Пусть $p = \frac{|S|}{2^k}$.

- $P_{h,y}\{\exists x \in S : h(x) = y\} \leq p$ - так как $|h(S)| \leq |S|$.
- Рассмотрим E_x - событие $\{h(x) = y\}$. $Pr\{\cup_{x \in S} E_x\} \geq \sum_{x \in S} Pr\{E_x\} - \sum_{x < x' \in S} Pr\{E_x \cap E_{x'}\} = \frac{|S|}{2^k} - \frac{|S|(|S|-1)}{2} \frac{1}{2^{2k}} > p(1 - \frac{p}{2}) \geq\geq \frac{3}{4}p$ (так как $p \leq \frac{1}{2}$ из-за выбора p и ограничения сверху на размер S).

Получили $\frac{3}{4}p \leq P_{h,y}\{\exists x \in S : h(x) = y\} \leq p$, значит :

- Если $|S| \geq K$, то $\frac{3}{4}p_0 \leq P_{h,y}\{\exists x \in S : h(x) = y\}$
- Если $|S| \leq \frac{K}{2}$, то $P_{h,y}\{\exists x \in S : h(x) = y\} \leq p \leq \frac{p_0}{2} < \frac{3}{4}p_0$

  Для разных случаев получили некоторый вероятностый зазор, который можно увеличить полиномильным числом повторений протокола.

Задача. *2. Пусть есть $m = n(n-1)/2$ булевых схем полиномиального размера $\phi_1, \ldots, \phi_m$ со входом длины k и одним выходом. Для каждого $x \in \{0,1\}^k$ рассмотрим граф G_x на n вершинах, матрица смежности которого задана результатами работы схем ϕ_j на входе x. Рассмотрим множество графов $\mathcal{G} = \{G_x | x \in \{0,1\}^k\}$. Пусть мы хотим отделить наборы $\phi_1, \ldots, \phi_m$, когда в множестве $\mathcal{G}$ менее C различных попарно неизоморфных графов от наборов, когда их хотя бы D ($D \geq C$). Существует ли интерактивная система доказательств, которая делает это при $C = D$? Можете ли вы её построить? Если не можете, то попробуйте её построить для случая $C = D/2$.*

Ответ. Да, такой протокол существует. $\mathbf{L} = \{\{(\phi_1 \ldots \phi_m)\}$: в $\mathcal{G}$ содержится менее D попарно неизоморфных графов$\}$. $\mathbf{L} \in \mathbf{PSAPCE}$. Можно посчитать количество классов изоморфности графов на полиномиальной памяти, для этого храним текущее число классов, для каждого не рассмотренного графа G_i, перебираем все уже рассмотренные G_j (перебор графов, или наборов булевых формул это одно и то же), если $\forall j \leq i : G_j \ncong G_i$, то увеличиваем число классов эквивалентности. Полученное число классов эквивалентности и будет ответом. Дальше сравним его с D. Значит $\mathbf{L} \in \mathbf{PSAPCE}$. Знаем $\mathbf{IP} = \mathbf{PSAPCE}$. Значит нужный протокол из $\mathbf{IP}$ существует.

Для $C = D/2$ подойдет протокол подробно описанный выше, в задаче (4).

Задача. *3. Пусть $S \in$ **NP**. Обозначим через S_n множество $S \cap \{0,1\}^n$. Постройте систему интерактивных доказательств, получающую на вход число K, такую что если $|S_n| > K$, то прувер убеждает верификатора с вероятностью 1 (а не 2/3, как на лекции), а если $|S_n| < K/2$, то прувер убеждает с вероятностью не больше 1/3. Можно ли заменить $K/2$ на $0.99K$? (Аргумент полинома во времени работы верификатора - это n).*

Ответ. Используем протокол, подробно описанный в задаче (4).

Для $0.99K$ достаточно проверять не размер множества S, а размер множества $(S \times S \times \ldots \times S) = S^l$, которое очевидно лежит в **NP**, l выбираем так, что $0.99^l \leq \frac{1}{2}$. Получаем сравнение для размеров M и K, где $\frac{1}{2}K^l \leq M \leq K^l$.

Ошибку первого рода можно до 0, так как мы получили протокол из IP, для которого в одном из эквивалентных определений соответствующая ошибка равна 0.

Задача. 5. *Определим класс $\mathbf{AMA}'$ и $\mathbf{AMA}''$ так: $B \in \mathbf{AMA}'(\mathbf{AMA}'')$, если существует полиномиальный алгоритм $V(x, r, s, q)$, такой что:*

- *Если $x \in B$, то $\mathbf{Pr}_r[\exists\ s\mathbf{Pr}_q[V(x, r, s, q) = 1] \geq \frac{2}{3}] \geq \frac{2}{3}$*
- *(для $\mathbf{AMA}'$) Если $x \notin B$, то $\mathbf{Pr}_r[\exists\ s\mathbf{Pr}_q[V(x, r, s, q) = 1] \geq \frac{2}{3}] \leq \frac{1}{3}$*
- *(для $\mathbf{AMA}''$) Если $x \notin B$, то $\mathbf{Pr}_r[\forall\ s\mathbf{Pr}_q[V(x, r, s, q) = 1] \leq \frac{1}{3}] \geq \frac{2}{3}$*

(а) (1 балл) Поясните, в чём отличие трёх определений. А именно, почему один и тот же V может удовлетворить одному и не удовлетворить другому.
(б) (4 балла) Докажите, что $\mathbf{PP} \subset \mathbf{AMA}'$.
(в) (5 баллов) Докажите, что $\mathbf{AMA}'' = AMA$.

Ответ.

1. $\forall\ s\mathbf{Pr}_q[V(x,r,s,q)=1] \leq \frac{1}{3} \Leftrightarrow \nexists s\mathbf{Pr}_q[V(x,r,s,q)=1] > \frac{1}{3}$.
   получаем для $\mathbf{AMA'}$ и $\mathbf{AMA''}$ соответственно :
   - (для $\mathbf{AMA'}$) Если $x \notin B$, то $\mathbf{Pr}_r[\exists\ s\mathbf{Pr}_q[V(x,r,s,q)=1] \geq \frac{2}{3}] \leq \frac{1}{3}$
   - (для $\mathbf{AMA''}$) Если $x \notin B$, то $\mathbf{Pr}_r[\nexists s\mathbf{Pr}_q[V(x,r,s,q)=1] > \frac{1}{3}] \geq \frac{2}{3}$

   Пусть тогда V такой, что $x \in B \implies \forall r \exists s\mathbf{Pr}_q[V(x,r,s,q)=1] = \frac{1}{2}$, тогда :
   $\mathbf{Pr}_r[\exists\ s\mathbf{Pr}_q[V(x,r,s,q)=1] \geq \frac{2}{3}] = 0 \leq \frac{1}{3}$ - выполнено
   $\mathbf{Pr}_r[\nexists s\mathbf{Pr}_q[V(x,r,s,q)=1] > \frac{1}{3}] = 0 < \frac{2}{3}$ - не выполнено

2. Пусть $\mathsf{L} \in \mathbf{PP}$, значит $\exists M$:
   - $x \in L \implies P_q[M(x,q)=1] \geq \frac{1}{2}$
   - $x \notin L \implies P_q[M(x,q)=1] < \frac{1}{2}$

   Заметим, что $\frac{1}{2}$ из определения можно заменить на произвольную константу $\in (0,1)$. Это можно сделать, например, добавив некоторое количество случайных бит, и на некотором фиксированном числе случайных исходов(фиксированных для каждого n) выдавать ответ True, вне зависисмости от входа. Это увеличит константу в определении. Воспользуемся опредеделением с константой $\frac{2}{3}$.
   Положим тогда $V(x,s,r,q) = M(x,q) \quad \forall r,s$. Тогда :
   - $x \in L \implies P_r[\exists s : P_q[V(x,r,s,q) = M(x,q) = 1] \geq \frac{2}{3}] = 1 > \frac{2}{3}$
   - $x \notin L \implies P_r[\exists s : P_q[V(x,r,s,q) = M(x,q) = 1] \geq \frac{2}{3}] = 0 < \frac{1}{3}$

   Значит $L \in AMA'$.

3. (a) Пусть $L \in AMA$. Есть протокол: общие случайные биты r и $q \to$ Артур получает $r \to$ Мерлин возвращает s, зная $r \to$ Артур получает случайные биты $q \to$ Выдает вердикт $V(x,r,s,q)$. Так как значение констант в определении AMA не играет, будем счиать их достаточно близкими к 0 и к 1 соответственно (ε,$1-\varepsilon$. Тогда :
   - Выполнено : $x \in L \implies \mathbf{Pr}_r[\exists\ s\mathbf{Pr}_q[V(x,r,s,q)=1] \geq \frac{2}{3}] \geq \frac{2}{3}$, иначе $P_{r,q}(V(x,r,s,q) = 1) < \frac{2}{3}\cdot 1 + \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3} = \frac{8}{9} < 1-\varepsilon$. (Здесь счиатем что P выбирает наилучшее s).
   - Выполнено : $x \notin L \implies \mathbf{Pr}_r[\forall\ s\mathbf{Pr}_q[V(x,r,s,q)=1] \leq \frac{1}{3}] \geq \frac{2}{3}$, иначе $P_{r,q}(V(x,r,s,q) = 1) > \frac{2}{3}\cdot 1 + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} = \frac{7}{9} > \varepsilon$

   Значит $L \in AMA''$.

   (b) Пусть теперь $L \in AMA''$, значит существует соответствующая V. Протокол будет как в пункте 1, но изменим поцедуру принятия доказательства. Пусть Артур получает сразу несколько групп случайных битов $q_1, q_2, ..., q_m$перед принятием решения. Рассмотрим такую процедуру:

   i. Артур запускает $V(x,r,s,q_1)$ и $V(x,r,s,q_2)$, если получил в обоих случаях TRUE, то принимает, если в обоих случаях FALSE, то отвергает, иначе повторяет сначала, используя новые случайные биты. Так повторяет некоторое количество раз (подробнее ниже), если так и не получил ответ, то выбирает случайно FALSE или TRUE.

   Посмотрим на вероятности:
   - Пусть $x \in L$, тогда Артур с вероятностью(по r) $\geq \frac{2}{3}$ попадет в благоприятный случай, где $\exists s$, который и выберет Мерлин, такой, что $\mathbf{Pr}_q[V(x,r,s,q)=1] \geq \frac{2}{3}$. Тогда, применив процедуру описанную выше, Артур с вероятностью $p_1 \geq \frac{4}{9}$ примет доказательство на 1 шаге, с вероятностью $p_1' \leq \frac{1}{9}$ отвергнет, в остальных случая он повторит процедуру, используя новые случайные биты.
     Если бы он повторял бесконечное число раз, то вероятность принять $p = p_1 + cp_1 + c^2p_1 + \ldots = p_1(1+c+c^2+\ldots) = p_1C$, отверг с $p' = p_1' + cp_1' + c^2p_1' + \ldots = p_1'(1+c+c^2+\ldots) = p_1'C$. Но $p_1C + p_1'C = p + p' = 1 \implies C = \frac{1}{p_1+p_1'} \implies p = \frac{p_1}{p_1+p_1'}$. Получим, что $p \geq \frac{4}{5}$. Понятно, что если мы применим меньшее число раз то получим оценку немного хуже, но последовательность C_n - геометрическая прогрессия, поэтому можно взять полином повторений и приблизиться экспоненциально. (Можно даже

константу раз, т.к. нам нужно константное приближение с некоторой точностью, например с возможной ошибкой δ). Значит итоговая веротяность принять x не меньше $\frac{2}{3}(\frac{4}{5}-\delta)=\frac{8}{15}-\frac{2\delta}{3}>\frac{1}{2}+\delta_0$.

- Пусть $x \notin L$, пользуемся вторым пунктом определения AMA''. Тогда Артур с вероятностью $<\frac{1}{3}$ попадет в случай (1), где V может ошибаться часто, то есть в такое r, что $\exists s: P_q[V(x,r,s,q)=M(x,q)=1]>\frac{1}{3}]$. С вероятностью $\geq \frac{2}{3}$ попададет в случай(2), где доля ошибок V мала, то есть $\forall s: P_q[V(x,r,s,q)=M(x,q)=1]\leq \frac{1}{3}]$. Процедура принятия такая же, значит вероятность принять слово x во втором случае : $p \leq \frac{1}{5}+\delta$ получается аналогично предыдущему пункту. Итого вероятность ошибочно принять x в обоих случаях $(1+2)$: $P \leq \frac{1}{3}+\frac{2}{3}(\frac{1}{5}+\delta)=\frac{7}{15}+\frac{2\delta}{3}<\frac{1}{2}-\delta_0$. Получили разделимую (на $2\delta_0$) границу.

$L \in AMA$.

$AMA'' = AMA$.

Задача. ***6***. *Пусть G является генератором псевдослучайных чисел. Рассмотрим следующие модификации:*

- $G'(s)=\begin{cases} 0^{|G(s)|}, & \text{если } s \text{ содержит ровно } \frac{|s|}{2} \text{ единиц} \\ G(s), & \text{иначе} \end{cases}$
- $G'(s)=\begin{cases} 0^{|G(s)|}, & \text{если } s \text{ содержит ровно } \frac{|s|}{3} \text{ единиц} \\ G(s), & \text{иначе} \end{cases}$

Какие из этих функций являются генераторами псведослучайных чисел и почему?

Ответ. Считаем $n=|s|$. В обоих случая полиномиальная вычислимость $G'(s)$ очевидна. Нужно проверить пункт (2) определения.

1.
$$G'(s)=\begin{cases} 0^{|G(s)|}, & \text{если s содержит ровно } \frac{|s|}{2} \text{ единиц} \\ G(s), & \text{иначе} \end{cases} \tag{1}$$

$G'(s)$ - не является ГПСЧ.

В s ровно $\frac{|s|}{2}$ единиц в $C_n^{\frac{n}{2}}$ различных s. Считая, что $s \sim U_n$ и воспользовавшись тем, что для достаточно больших n выполнено $C_n^{\frac{n}{2}} > \frac{2^n}{n+1}$, получим:

$$P(G(s)=0^{p(n)}) \geq \frac{C_n^{\frac{n}{2}}}{2^n} \geq \frac{1}{n+1} \quad n \geq N_0 \tag{2}$$

Воспользуемся определением вычислительной неотличимости, $y_n \sim U_{p(n)}$, пусть $\{D_n\}$ - такое симейство схем, что $D_n(x)=1 \iff x=0^n$. Получим :
$|P\{D_n(G'(s))=1\}-P\{D_n(y_n))=1\}| \geq \frac{1}{n+1}-\frac{1}{2^n} \geq \frac{1}{2(n+1)}$. при $n \geq 10$. Также $\frac{1}{2(n+1)} \geq \frac{1}{2(p(n)+1)}$ при $n > N_p$. То есть мы получили, что $\exists \{D_n\}$, $\exists q(p(n))=\frac{1}{2(p(n)+1)}$ $\forall N \exists n > N : |P\{D_n(G'(s))=1\}-P\{D_n(y_n))=1\}| \geq \frac{1}{q(p(n))}$. Значит y_n и $G'(s)$ - не являются вычислительно неотличимыми. Значит $G'(s)$ - не является ГПСЧ.

2. $G'(s)=\begin{cases} 0^{|G(s)|}, & \text{если s содержит ровно } \frac{|s|}{3} \text{ единиц} \\ G(s), & \text{иначе} \end{cases}$ $G'(s)$ - не является ГПСЧ.

В s ровно $\frac{|s|}{3}$ единиц в $C_n^{\frac{n}{3}}$ различных s. Воспользуемся формулой Стирлинга:

$$C_n^{\frac{n}{3}}=\frac{n!}{\frac{n}{3}!\frac{2n}{3}!} \sim \frac{3}{\sqrt{4\pi n}}\frac{3^n}{2^{\frac{2n}{3}}} \tag{3}$$

Обозначим событие $X=\{$ в s ровно $\frac{|s|}{3}$ единиц$\}$. Тогда, считая $s \sim U_n$, получим :

$$P\{G'(s) \neq G(s)\} \leq P\{X\} \sim \frac{3}{\sqrt{4\pi n}}\frac{3^n}{2^{\frac{5n}{3}}} \tag{4}$$

$\frac{3^n}{2^{\frac{5n}{3}}}=e^{n(\ln 3-\frac{5}{3}\ln 2)}$. Заметим, что $\ln 3-\frac{5}{3}\ln 2=c<0$. Т.е. $P\{G'(s) \neq G(s)\} \sim \frac{3}{2\sqrt{\pi n}}e^{cn}$. Значит $\exists N \forall n > N : P\{G'(s) \neq G(s)\} \leq \frac{3}{\sqrt{\pi n}}e^{c_0 n} \leq e^{cn}, \quad c_0, c < 0$.

Так как $G(s)$ - ГПСЧ, то $y_n \sim U_{p(n)}, \forall\{D_n\}\forall q_1(x)$ - полином $\exists N \forall n > N :$
$|P\{D_n(G(s)) = 1\} - P\{D_n(y_n) = 1\}| < \frac{1}{q_1(p(n))}$.

Воспользуемся определением вычислительной неотличимости :
$y_n \sim U_{p(n)}, \forall\{D_n\}\forall q(x)$ - полином $\exists q_1(x) = \frac{q(x)}{2}, \exists N\forall n > N : |P\{D_n(G'(s)) = 1\} - P\{D_n(y_n) = 1\}| \leq |P\{D_n(G'(s)) = 1\} - P\{D_n(G(s)) = 1\}| + |P\{D_n(G(s)) = 1\} - P\{D_n(y_n) = 1\}| < e^{cn} + \frac{1}{q_1(p(n))} < \frac{1}{q(p(n))}$

Получили, что $G'(s)$ и y_n вычислительно неотличимы. Значит $G'(s)$ - ГПСЧ.

Задача. *7. Обобщённым судоку называется такая задача: в квадрате $n^2 \times n^2$ в некоторых клетках расставлены числа от 1 до n^2. Вопрос: можно ли заполнить оставшиеся клетки числами от 1 до n^2, так чтобы в каждой строке, в каждом столбце, а также в каждом из n^2 "выровненных" квадратов $n \times n$ каждое число встречалось по одному разу. В стандартном судоку $n = 3$. Известно, что эта задача* **NP***-полна. Предложите протокол доказательства существования решения с вычислительно нулевым разглашением, не использующий сводимость к какой-либо другой задаче.*

Ответ. Будем использовать "Протокол привязки к биту", описанный на лекции, для выполнения операций "Загораживание" и "Открытие".

- S - "загораживание", $S(b) = (c, k)$
- R - "открытие", $R(c, k) = \{b, \mathsf{ERROR}\}$
- Требования :
  1. Корректность : $R(S(b)) = b$
  2. Секретность : привязка к 0 и 1 вычислительно неотличимы.
  3. Неподменяемость : невозможность $R(c, k_0) = 0$ и $R(c, k_1) = 1$

Протокол:
Исходная таблица T_0.

- P выбирает случайную перестановку(перенумерацию) $\sigma \in S_{n^2}$, записывает решение в таблицу T_1, применяет σ к числам $\{1, \dots n^2\}$ из таблицы T_1. "Закрывает" таблицу T_1 и перестановку σ и отправляет верификатору.
- V выбирает случайным образом строку, столбец или квадрат, и просит прувера "открыть" выбранный элемент в T_1. Также V выбирает случайную позицию (i, j) в исходной таблице такую, что $T_0[i, j] = x$ (т.е. в $T_0[i, j]$ уже записано некоторое известное число x , и просит прувера "открыть" $\sigma(x)$. Проверяет на корректность строку, столбец или квадрат соответственно, а также проверяет, что $T_1[i, j] = \sigma(x)$.
- Повторяем протокол с начала нужное количество раз(полином).
- Принимает доказательство, если все проверки пройдены на каждом шаге.

Корректность:

- Если решение существует, то P будет дйствовать оптиматьно, ошибка второго рода может возникнуть только в протоколе привязки к биту, но ее можно сделать очень маленькой. Во всех остальных частях протокола ошибки не возникнет.
- Если решения нет, то либо есть некорректный элемент(строка,столбец, квадрат), либо прувер применил замену индексов не соответствующим перестановке σ образом. В первом случае вероятность не заметить ошибку $P_1 \leq \frac{3n^2-1}{3n^2} = 1 - \frac{1}{3n^2}$, во втором, $P_2 \leq \frac{n^2-1}{n^2} = 1 - \frac{1}{n^2}$. В любом случае $P \leq 1 - \frac{1}{3n^2}$. $P^{3n^2} \leq (1 - \frac{1}{3n^2})^{3n^2} \sim \frac{1}{e}, n \to \inf$. Значит повторив полиномиальное количество раз сможем получить достаточно малую ошибку.

Задача. *9. Расширим определение* **PCP***, введённое на лекции. Назовём классом* $\mathbf{PCP}_{c,s}(r, q)_\Sigma$ *класс языков L, для которых существует полиномиальный вероятностный верификатор V с произвольным доступом к строке $\pi \in \Sigma^*$ длины не более $q2^{O(R)}$, со следующими условиями:*

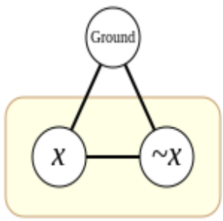
- *V использует не больше r случайных битов и делает не больше q неадаптивных запросов к π (обратите внимание, что здесь мы отказываемся от $O()$-обозначений);*
- *Если $x \in L$, то $\mathbf{Pr}\{V^\pi(x) = 1\} \geq c$;*
- *Если $x \notin L$, то $\mathbf{Pr}\{V^\pi(x) = 1\} \leq s$.*

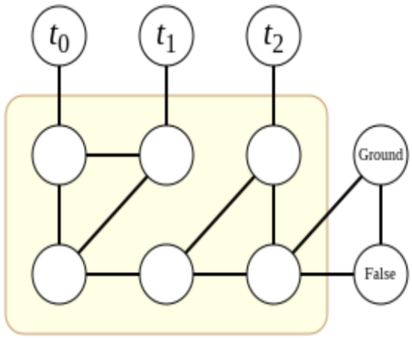
Соответственно, класс, введённый на лекции, является классом $\mathbf{PCP}_{1,\frac{1}{2}}(r, q)_{\{0,1\}}$ Будем считать, что размер алфавита $|\Sigma|$ может зависеть от длины входа $|x|$. Докажите, что:
(а) (1 балл) Для алфавитов Σ полиномиального размера выполнено $\mathbf{PCP}_{c,s}(O(\log n), 0)_\Sigma \subset \mathbf{P}$
(б) (4 балла) Для алфавитов Σ полиномиального размера выполнено $\mathbf{PCP}_{c,s}(O(\log n), 1)_\Sigma \subset \mathbf{P}$ (для любых параметров $c > s$)
(в) (5 баллов) Для алфавитов Σ и параметров q, таких что $|\Sigma|^q$ не больше полинома, выполнено $\mathbf{PCP}_{1,\frac{1}{|Sigma|q}}(O(\log n), q)_\Sigma \subset P$

Ответ. 1. $q = 0 \implies$ алгоритм проверки детерменированный, к сертификату не обращается, работает полином. Это есть $\mathbf{P}$

Задача. *8. Рассмотрим следующую оптимизационную задачу: по графу $G = (V, E)$ найти максимальный размер подмножества $W \subset V$, такую что индуцированный подграф $(W, W^2 \cap E)$ можно раскрасить в 3 цвета. Докажите, что для некоторого ρ её приближённое решение с точностью ρ является $\mathbf{NP}$-трудной задачей.*

Ответ. Воспользуемся доказанным на лекции фактом, что $\exists \rho$ такое, что ρ - приближение задачи MAX3SAT является $NP-$ трудным. Будем использовать гаджеты, которые мы раньше вводили для сведения MAX3SAT к 3COLOR. Заведем a константных гаджетов(GROUND-FALSE на рисунке).





Также для каждой вершины заведем b гаджетов-пар, соединяющих вершины x и $\bar{x}$, при этом каждая гаджет-пара соединена с вершиной Ground в константных гаджетах. Далее для каждого дизъюнкта (t_1, t_2, t_3) заведем c 6-вершинных гаджетов снизу, где i-ая вершина из трех соединена со всеми t_1, t_2, t_3 во всех гаджетах, а правая нижняя соединена со всеми Ground и False. Теперь задача нахождения интерпретации, удовлетворяющей k скобкам в 3КНФ эквивалента задаче раскраски такого подграфа из $2a + 2bn + 6ck + 5c(m - k)$ (n - число переменных, m -дизъюнктов).

Далее Ground вершины красим в цвет 2, все False вершины в цвет 0, в гаджетах переменных: x в 1, $\bar{x}$ в 0. Каждый гаджет дизъюнкта красится в 3 цвета тогда, когда при такой раскраске хотя бы один литерал не ложный.

Пусть мы выбрали в полученном графе множество вершин W и правильно покрасили $(W, W^2 \cap E)$ в 3 цвета. Если мы выбрали какой-то гаджет, то мы можем выбрать все аналогичные гаджеты и покрасить их точно так же.

Увеличив a можно добиться того, чтобы константных гаджетов стало больше, чем всех остальных вершин. Поэтому все константные гаджеты попадают в W. Также, при $b \gg c$ будут покрашены все гаджеты переменных. При этом все гаджеты одного типа имеют одинаковую раскраску.

Итого :

- Если один гаджет имеет раскраску, то также можно раскрасить все аналогичные гаджеты.
- Гаджетам дизъюнктов, полностью раскрашенным в 3 цвета соответствуют истинные дизъюнкты.

Пусть теперь $a = 10000, b = 100, c = 1$, тогда k скобок можно сделать истинными $\iff$ можно раскрасить подграф размера $20000 + 200n + 5m + k$.

Так как $n \leq 3m, k \geq \frac{7}{8}m$(хотя бы столько можно сделать истинными), то если умеем решать задачу о графе с точностью ρ', то умеем находить такое k, что

$$\frac{20000 + 200n + 5m + k}{20000 + 200n + 5m + k_{opt}} \geq \rho' \tag{5}$$

$$\frac{k_{opt} - k}{20000 + 200n + 5m + k_{opt}} \leq 1 - \rho' \tag{6}$$

$$k_{opt} - k \leq (20000 + 200n + 5m + k_{opt})(1 - \rho') \leq (1 - \rho')(20000 + 800k_{opt}). \tag{7}$$

Так как для некоторой точности ρ задача MAX3SAT (нахождение k близкое к k_{opt}) является NP-трудной, то для точности ρ' данная задача тоже является NP-трудной.